



Geodésicas nulas en espacio-tiempos esféricos

Tesis
para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta

Alejandro Cruz Osorio

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo*

Abril del 2008

Director de tesis:
Dr. Francisco S. Guzmán Murillo
Instituto de Física y Matemáticas,
UMSNH.

Agradecimientos.

A mis padres:

Sin duda no hubiera logrado terminar la carrera si el apoyo de mis padres : **Sabino Cruz Cruz** y **Basilia Osorio Antonia**, les agradezco todo su apoyo y por su comprensión, por sus sabios consejos que siempre me han guiado durante toda mi vida.

A mis hermanas:

A **Yareli Cruz Osorio** y **Ines Cruz Osorio** por darme tantos momentos de alegría.

A Dr. Francisco S. Guzmán Murillo:

Por todo su apoyo durante el desarrollo de este trabajo, por sus sabios consejos, pues mas que un asesor ha sido un amigo.

A Dr. Alberto Mendoza Suárez:

Por sus sabios consejos, pues me han ayudado en gran parte a tomar algunas decisiones importantes, además de ser un buen amigo es un muy buen cadredratico del cual he aprendido mucho.

A Dr. José Antonio González:

Que apesar de que llevo poco en conocerlo, me ha dado muchos consejos que me han servido mucho.

A Dr. Mary Carmen Peña Gomar:

Amiga y profesora que me ha sabido escuchar y aconsejar cuando lo he necesitado.

A mis amigos:

A todos mis amigos con los que he compartido mucho en la buenas y que me han sabido escuchar y aconsejar cuando he tenido problemas: **Avith, Antonio Piña, Diecenia, Esteban, Manuel Torrez, Octavio**

A la casa del estudiante Lucio Cabañas Barrientos: Estoy conciente de que sin el apoyo de la casa del estudiante, no hubiera llegado a lograr lo que logrado.

Contenido

1	Introducción	7
2	La métrica y las geodésicas nulas en el plano espacio temporal	11
2.1	La métrica y su significado	11
2.2	La ecuación de las geodésicas	13
2.3	Geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Minkowski	16
2.4	Geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild	19
2.5	Geodésicas nulas de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein	27
3	Soluciones numéricas de la ecuación de las geodésicas radiales	33
3.1	Cuando se conoce la solución global.	33
3.1.1	La estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski.	34
3.1.2	La estructura causal de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild.	36
3.1.3	La estructura causal de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein.	36
3.2	Cuando se conoce una solución numérica en un dominio discreto	39
4	Geodésicas radiales en espacio-tiempos numéricos	47
4.1	Estrella de Bosones	47
4.2	Oscilación	52
4.3	Solitón	56
5	Discusión y Conclusiones	61
A	Método de Runge-Kutta	63
B	Código numérico.	65
B.1	Caso de espacio-tiempo discreto	65

B.2	Caso de espacio-tiempo conocido continuo	67
C	Símbolos de Christoffel de las soluciones conocidas	69

Capítulo 1

Introducción

La Teoría de la Relatividad General es una generalización de la teoría de gravitación Newtoniana, fue postulada por Albert Einstein en 1915. Dicha teoría se basa en la constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales y en el principio de equivalencia.

Esta teoría plantea que el espacio-tiempo es una variedad de cuatro dimensiones y que la gravedad es una manifestación de la curvatura de dicha variedad. Un objeto masivo que habita en el espacio-tiempo produce una deformación en la geometría del espacio-tiempo y a su vez esta distorsión controla el movimiento de este objeto y de los que están cerca de él.

Para el estudio de los eventos en el espacio-tiempo, es necesario etiquetarlos, por ello se define el concepto de observador. Un *observador* es un sistema coordenado que permite etiquetar la posición de un evento con cuatro números (t, x, y, z) , t etiqueta la posición temporal y (x, y, z) la posición espacial del espacio-tiempo.

En el espacio cuatro dimensional la distancia entre dos eventos cualesquiera se mide a través de la métrica. *La métrica del espacio-tiempo* es la distancia entre dos eventos x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$ del espacio-tiempo y está definida como: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, donde los índices μ y ν etiquetan las coordenadas del espacio-tiempo y $g_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico. Si ds^2 es el intervalo entre dos eventos A y B para un observador O y $d\bar{s}^2$ el intervalo entre eventos A y B pero para un observador \bar{O} , se tiene que:

$$ds^2 = d\bar{s}^2. \quad (1.1)$$

Se pueden tener tres tipos de intervalos entre los eventos del espacio-tiempo:

$ds^2 > 0$ es *tipo espacio*,

$ds^2 = 0$ es *tipo nulo*,

$ds^2 < 0$ es *tipo tiempo*.

Si la distancia entre dos eventos satisface $ds^2 > 0$ entonces lo llamamos un intervalo *tipo espacio* y representa a partículas que se mueven a velocidades mayores para llegar de un evento a otro, si las distancias entre dos eventos satisface $ds^2 = 0$ se le llama *tipo nulo* que representa a partículas que viajan a la velocidad de la luz para llegar de un evento a otro, y si la distancia entre dos eventos satisface que $ds^2 < 0$ entonces lo llamamos *tipo tiempo* y representan partículas que viajan a velocidades menores a la de la luz. En este trabajo nos concentraremos en el caso de *tipo nulo*, pues nos interesa estudiar la trayectoria de los fotones.

Las partículas en el espacio-tiempo se mueven a lo largo de geodésicas. Una *geodésica* es la curva a través del cual se puede transportar paralelamente un vector en una variedad. En el caso de una variedad plana, las geodésicas son líneas rectas, en el caso de una variedad curva las geodésicas son líneas curvas. Las geodésicas se clasifican también en *tipo tiempo*, *nulas* y *tipo espacio*, dependiendo del signo del valor del intervalo ds^2 entre cualquier par de puntos de dicha curva.

En este trabajo solo se estudiarán las geodésicas que siguen los fotones: las *geodésicas nulas*. Existen dos opciones: i) las geodésicas nulas en espacio-tiempos estáticos, y ii) las geodésicas nulas que permiten estudiar la estructura causal de un espacio-tiempo dependiente del tiempo. Por estructura causal se entiende al estudio del comportamiento de los conos de luz en una región de espacio tiempo, esto es interesante para el estudio del espacio-tiempo. La primera parte de esta tesis se enfoca en entender la estructura causal de una de las soluciones analíticas conocidas de las ecuaciones de Einstein, la solución de Schwarzschild y en la segunda parte se enfoca la atención en la estructura causal de espacio-tiempos obtenidos a partir de soluciones numéricas de las ecuaciones de Einstein en trabajos diferentes a este.

Las *Ecuaciones de Einstein* describen la relación entre la parte geométrica y la materia del espacio-tiempo, esta relación está definida a través de las ecuaciones:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $G_{\mu\nu}$ se escribe en términos del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R ,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.3)$$

El lado derecho de las ecuaciones de Einstein (1.2) describe la distribución de energía-momento y de la materia que constituye al espacio-tiempo estudiado [1, 2, 3, 4].

Las soluciones a las ecuaciones de Einstein son de diversos tipos, y existen varias clasificaciones de los espacio-tiempos solución. En este trabajo se estudiará solamente el caso en que el espacio-tiempo tiene simetría esférica. Además se estudiarán dos posibles casos, una en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) y otra cuando la materia corresponde a un campo escalar.

Una vez conocida alguna solución de las ecuaciones de Einstein es fundamental estudiar la estructura causal de dicha solución, pues esto nos ayudará a entender el comportamiento de dicho espacio-tiempo. Para lograrlo es necesario conocer las geodésicas nulas de dicho espacio-tiempo. Es por esto que en este trabajo se concentra la atención en los siguientes problemas:

- Se resuelven analíticamente las ecuaciones de las geodésicas para espacio-tiempos obtenidos de las soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein (la espacio-tiempo de Schwarzschild). El objeto es hacer una descripción completa de la estructura causal. Además dichas soluciones se usan para comparar las soluciones numéricas calculadas posteriormente. En este punto se pone especial atención a la patología (singularidad de las coordenadas en $r = 2M$) de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild y la noción de horizonte de eventos.
- Se resuelven las ecuaciones de las geodésicas para espacio-tiempos obtenidos de la solución analítica de las ecuaciones de Einstein conocidos. Esto se hace usando métodos numéricos en un dominio continuo, es decir, las funciones métricas se conocen en todos los puntos del espacio-tiempo continuo.
- Se hace lo mismo que en el caso anterior pero en un dominio discreto, en este caso las funciones métricas se conocen solo en un determinado número de puntos del espacio-tiempo. Esto es útil ya que se pretende llegar a resolver las ecuaciones para las geodésicas en espacio-tiempos discretos que se obtienen resolviendo numéricamente las ecuaciones de Einstein.
- Finalmente, una vez teniendo un código numérico capaz de reproducir los resultados exactos obtenidos en el primer paso, se procede a resolver numéricamente las ecuaciones para las geodésicas en espacio-tiempos obtenidos de la solución numérica de las ecuaciones de Einstein.

La motivación de este trabajo consiste en que las ecuaciones de Einstein astrofísicamente relevantes se han calculado numéricamente, pues las soluciones analíticas

existentes son para casos en el que se tienen muchas simetrías. Esto es, se conoce la solución a una aproximación de dichas ecuaciones en un dominio finito del espacio-tiempo. El estudio de la estructura causal de dichas soluciones es fundamental para verificar que los cálculos son consistentes. Es por ello que el caso culminante de este trabajo corresponde al estudio de espacio-tiempos calculados numéricamente en trabajos como las referencias [9, 10] en donde no se hace un análisis de la estructura causal.

Esta tesis se organiza como sigue: En el Capítulo 2 se estudia la estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski, de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild y en coordenadas de Eddington-Finkelstein. En el Capítulo 3 se resuelven numéricamente las ecuaciones de las geodésicas primero en el caso en que se tienen valores de las funciones métricas en cada punto del espacio-tiempo y en el caso en que solo se tienen definidas las funciones métricas en una malla discreta. En el Capítulo 4 se estudian las geodésicas nulas en espacio-tiempos que son solución numérica de las ecuaciones de Einstein que tienen como fuente un campo escalar. Se estudian tres casos de soluciones numéricas: la estrella de bosones, el osciladón y una solución solitónica con campo escalar. Finalmente en el Capítulo 5 se tienen las discusiones y conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

La métrica y las geodésicas nulas en el plano espacio temporal

2.1 La métrica y su significado

La teoría de la relatividad general nos indica que podemos indentificar a la gravedad con la geometría del espacio-tiempo, es decir, que la gravedad se manifiesta a través de una distorsión de la geometría del espacio-tiempo [1, 2].

El espacio-tiempo es una variedad de cuatro dimensiones con coordenadas identificadas como x^α , con el índice α igual a 0, 1, 2, 3, donde 0 identifica la coordenada temporal y 1, 2 y 3 identifican las coordenadas espaciales [1, 2]. Los valores de x^α etiquetan un evento, es decir un momento determinado del tiempo y un lugar del espacio. Consideremos ahora dos eventos separados por una distancia infinitesimal con coordenadas x^α y $x^\alpha + dx^\alpha$, entonces la distancia entre estos dos eventos se calcula:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.1)$$

donde $g_{\alpha\beta}$ es el *tensor métrico*. Dada la naturaleza infinitesimal de ds^2 a ésta cantidad se le conoce como *elemento de línea*. La distancia ds^2 es invariante pues no depende del sistema de coordenadas que se utilice para describir al espacio-tiempo.

El tensor métrico es un tensor de tipo $\binom{0}{2}$, es decir, actúa sobre dos vectores para entregar un escalar: el producto escalar de los dos vectores. En la ecuación (2.1) se tendría el caso equivalente de $ds^2 = \vec{dl} \cdot \vec{dl}$. Dicho tensor se puede expresar como:

$$\mathbf{g} = g_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha \otimes d\tilde{x}^\beta, \quad (2.2)$$

donde $d\tilde{x}^\alpha$ y $d\tilde{x}^\beta$ son los elementos de la base del espacio dual al espacio vectorial tangente a un punto de la variedad. Para cualesquiera 2 vectores \vec{A} y \vec{B} se define el

tensor métrico por un producto escalar como: $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B}$. Las componentes de este tensor están dadas por

$$\mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = g_{\alpha\beta}. \quad (2.3)$$

donde las $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$ son elementos de la base canónica del espacio vectorial tangente en un punto de la variedad. Para dos vectores cualesquiera se tiene entonces que el producto escalar está dado por

$$\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta. \quad (2.4)$$

El tensor \mathbf{g} es además simétrico:

$$\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) = \mathbf{g}(\vec{B}, \vec{A}). \quad (2.5)$$

Como ejemplo se escribe el elemento de línea del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.6)$$

La representación matricial de las componentes del tensor métrico en este caso es la siguiente:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Si en lugar de foliar el espacio-tiempo con planos se folia con esferas de dimensión 2 obtenemos el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas esféricas cuyo elemento de línea es:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.8)$$

donde t es una vez más la etiqueta del tiempo, r es una coordenada esférica radial, θ y φ son los ángulos cenital y azimutal usuales de las coordenadas esféricas. La representación matricial de las componentes del tensor métrico en este caso es la siguiente:

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

El objeto de estudio de este trabajo son las geodésicas nulas (definidas adelante), que son curvas en el espacio-tiempo. Las curvas en una variedad están parametrizadas en términos de los elementos de longitud de la curva. Esta es la razón por la que entender el significado de la métrica es fundamental y se ha empleado este espacio para describirla. Adicionalmente, dado que las componentes de la métrica dependen de las coordenadas utilizadas para parametrizar al espacio-tiempo, discutiremos con especial atención que la solución de agujero negro tiene propiedades distintas dependiendo de las coordenadas utilizadas.

2.2 La ecuación de las geodésicas

Transporte paralelo. Cuando un vector \vec{v} se transporta paralelamente a sí mismo a lo largo de una curva se dice que se hace un transporte paralelo, como el que se muestra en la Figura 2.1. El concepto de paralelismo en la geometría Euclidiana establece que dos rectas son paralelas si permanecen a la misma distancia cuando se propagan a lo largo de la tangente a ellas. De hecho las rectas Euclidianas son las únicas curvas que se transportan paralelamente a su vector tangente y no se cruzan, lo cual solamente pasa en variedades que nos son curvas [1, 4, 5].

Esto no ocurre si se considera un vector \vec{v} tangente a la esfera que se transporta paralelamente sobre una curva cerrada \vec{u} en la superficie de la esfera de dos dimensiones, como la curva $(a - b - c - a)$ de la Figura 2.1. Se observa en la Figura 2.1 (izquierda) que al llegar al punto de partida en a , este vector ya no tiene la misma dirección que al inicio. El hecho de que los vectores tangentes inicial y final no coincidan es una manifestación de la curvatura intrínseca, y la esfera es el paradigma de una variedad curva. En la Figura 2.1 (derecha) se muestra el transporte paralelo a lo largo de la misma curva cerrada, pero esta vez de un vector ortogonal a la superficie, el cual no sufre cambios en su orientación. Las geodésicas son curvas que están contenidas en el espacio tiempo y por tanto los vectores tangentes a ellas serán vectores tangentes a la variedad del espacio-tiempo y nunca serán ortogonales a este.

Se debe aclarar que existen dos tipos de curvatura: extrínseca e intrínseca. La curvatura extrínseca es la que se puede apreciar desde una variedad de dimensión mayor a la que está bajo estudio, como ejemplo más sencillo es la curvatura de la circunferencia (variedad de dimensión 1) en el plano (variedad de dimensión 2), de hecho el radio de dicha circunferencia se llama radio de curvatura. La curvatura intrínseca por otra parte, se puede medir desde la variedad misma, es decir, es una relación entre los puntos de una trayectoria en el dicha variedad.

Una variedad tiene curvatura intrínseca distinta de cero si el transporte paralelo

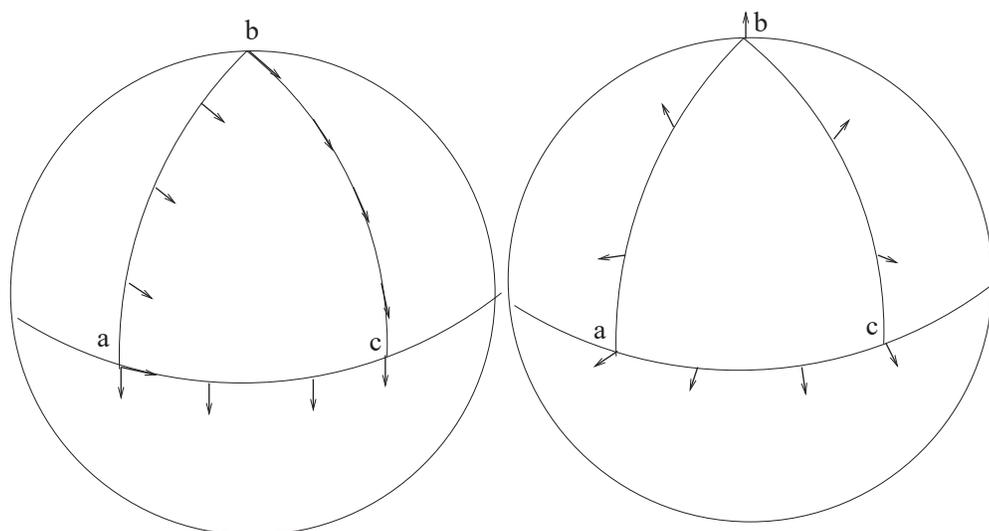


Figura 2.1: Se muestra el transporte paralelo de vectores sobre la 2-esfera. En la figura de la izquierda se muestra el vector inicial es el que aparece apuntando hacia la derecha en el punto a , después de hacer el transporte paralelo de este vector tangente a la esfera a lo largo de una trayectoria cerrada $a-b-c-a$ en la superficie de la esfera el vector que aparece en el punto a pero apuntando hacia abajo es el final y de hecho es ortogonal al inicial. En la figura de la derecha se muestra el transporte paralelo de un vector ortogonal a la superficie y su orientación no cambia al transportarlo en una trayectoria cerrada.

de un vector tangente inicial transportado paralelamente a lo largo de una curva cerrada resulta en un vector diferente al regresar al punto inicial (como en el caso de la Figura 2.1, izquierda).

Las ecuaciones de la teoría general de la relatividad relacionan la curvatura intrínseca del espacio-tiempo con la materia, no la curvatura extrínseca.

El cilindro $S^1 \times R$ es un ejemplo de una variedad de curvatura intrínseca cero y curvatura extrínseca en R^3 : por una parte, si se transporta paralelamente un vector tangente a este cilindro a lo largo de una curva cerrada, el vector inicial será igual al final, y por otra parte es evidente que este cilindro visto en R^3 presenta curvatura.

Geodésicas. Se sabe que en R^N la distancia más corta entre dos puntos p y q es una recta. En una variedad curva las líneas prolongadas a lo largo de la tangente a sí mismas se llaman geodésicas, lo cual se explica a continuación.

Si $x^\mu(\lambda)$ es una curva en una variedad y \vec{v} un vector tangente a la curva definido por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}, \quad \text{o bien,} \quad v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (2.10)$$

cuyas componentes son v^α . En un sistema de referencia localmente inercial las componentes de \vec{v} en un punto p son constantes a lo largo de la curva $x^\mu(\lambda)$, entonces $\frac{dv^\alpha}{d\lambda} = 0$ en el punto p . Esto se puede escribir como:

$$\frac{dv^\alpha}{d\lambda} = u^\beta v^\alpha_{;\beta} = u^\beta v^\alpha_{;\beta} = 0, \quad (2.11)$$

donde u^α son las componentes de un vector tangente a la curva en la cual se hace un transporte paralelo, $v^\alpha_{;\beta} = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta}$ y $v^\alpha_{;\beta} = v^\alpha_{,\beta} + v^\mu \Gamma_{\mu\beta}^\alpha$. Por lo tanto, el transporte paralelo de \vec{v} a lo largo de la curva cuyo vector tangente es \vec{u} está dado por

$$u^\beta v^\alpha_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{d\lambda} = u^\beta v^\alpha_{;\beta}. \quad (2.12)$$

Usando este resultado para el vector tangente \vec{u} y desarrollando la derivada covariante de manera explícita se tiene que la ecuación anterior para el transporte del vector tangente \vec{u} es:

$$u^\beta u^\alpha_{;\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha u^\mu u^\beta = 0. \quad (2.13)$$

El parámetro λ de la curva se llama “parámetro afín”. Usando el hecho de que $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$, e introduciendo el concepto de derivada direccional en la dirección de la curva $u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} = \frac{d}{d\lambda}$, y considerando que los índices son mudos es posible reescribir la ecuación (2.13) en términos de este parámetro afín, de modo que los puntos de la geodésica cumplen con la ecuación:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.14)$$

con $\alpha, \beta, \nu, \mu = 0, 1, 2, 3$. La ecuación (2.14) representa un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para $x^\alpha(\lambda)$, donde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ son los símbolos de Christoffel asociados con la métrica de la variedad. Este sistema de ecuaciones tiene solución cuando se conocen las condiciones iniciales, que son la posición inicial y la velocidad inicial de la partícula en dicha posición inicial.

Puesto que la ecuación para las geodésicas está definida en términos de los *símbolos de Christoffel* es preciso definirlo. Los símbolos de Christoffel se pueden escribir en términos de las primeras derivadas de la métrica como sigue:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma}(g_{\alpha\mu,\nu} + g_{\alpha\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}). \quad (2.15)$$

La ecuación (2.15) indica que los símbolos de Christoffel dependen totalmente de las componentes de la métrica y de sus derivadas de primer orden [1, 2, 3]. Dado que la métrica es simétrica se tiene que $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} = \Gamma_{\nu\mu}^{\gamma}$, un detalle que simplifica la escritura de la ecuación de las geodésicas, pues la ecuación (2.14) involucra la sumatoria sobre μ y ν . Además se puede ver que las componentes de la métrica determinan la ecuación de las geodésicas, por lo que basta con tener la métrica de un espacio-tiempo para conocer las trayectorias de las geodésicas.

A continuación se resuelve de manera exacta la ecuación de la geodésicas nulas para distintos espacio-tiempos que son solución de las ecuaciones de Einstein.

2.3 Geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Minkowski

El *espacio-tiempo de Minkowski* es una variedad que es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío con contenido cero de energía y con curvatura intrínseca cero. Como se mencionó antes, el elemento de línea de este espacio-tiempo en coordenadas cartesianas está dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.16)$$

y las componentes de la métrica en forma matricial aparecen en (2.7). Los símbolos de Christoffel para la métrica de Minkowski en coordenadas cartesianas son cero $\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma} = 0$ para todos los valores de γ, μ, ν pues las componentes de la métrica son constantes. Sin pérdida de generalidad (pues siempre es posible orientar la parte espacial del espacio-tiempo de modo que y y z sean constantes), en adelante se estudiará el caso en que las dos coordenadas espaciales y y z tienen un valor constante, y el análisis de las geodésicas solo efectuará en el plano $t - x$, de modo que $x^{\mu} = (t, x)$. Reescribiendo la ecuación (2.14) para la métrica de Minkowski, se obtienen las ecuaciones de las geodésicas para t y x :

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^2x}{d\lambda^2} = 0. \quad (2.17)$$

La solución de estas ecuaciones es

$$\begin{aligned} t &= a\lambda + b, \\ x &= c\lambda + d. \end{aligned}$$

Si se desea que estas soluciones representen geodésicas nulas es necesario usar la condición de nulidad, es decir, que el vector tangente a la curva en cada punto (t, x) sea nulo. Un vector \vec{u} es nulo si $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$. Es decir, las componentes $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ del vector tangente a la curva deben satisfacer la condición

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (2.18)$$

En el presente caso, para $x^\mu = (t, x)$, dicha condición se escribe

$$-\dot{t}^2 + \dot{x}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \pm \dot{t}, \quad (2.19)$$

donde el punto significa $\frac{d}{d\lambda}$. De la ecuación (2.19) se obtiene que $a = \pm c$. Imponiendo las condiciones iniciales en $\lambda = 0$ de modo que $t(\lambda = 0) = t_0$ y $x(\lambda = 0) = x_0$, se obtiene:

$$\begin{aligned} t &= a\lambda + t_0, \\ x &= \pm a\lambda + x_0. \end{aligned}$$

Combinando ambas ecuaciones es posible obtener la expresión para $\lambda = \frac{x-x_0}{\pm a}$ y la solución completa de las ecuaciones es:

$$t = \pm(x - x_0) + t_0, \quad (2.20)$$

para valores de t_0 y x_0 dados. En particular para $t_0 = 0$ se tiene:

$$t = \pm(x - x_0), \quad (2.21)$$

es decir, se obtiene las ecuaciones de dos rectas, con pendientes ± 1 , y ordenada al origen $\mp x_0$:

$$\begin{aligned} t &= x - x_0, \\ t &= -(x - x_0). \end{aligned}$$

En la Figura 2.2 se muestra un conjunto de geodésicas nulas para distintos valores de x_0 y $t_0 = 0$. La solución (2.21) define los conos de luz del espacio de Minkowski en cada punto (t, x) del espacio-tiempo.

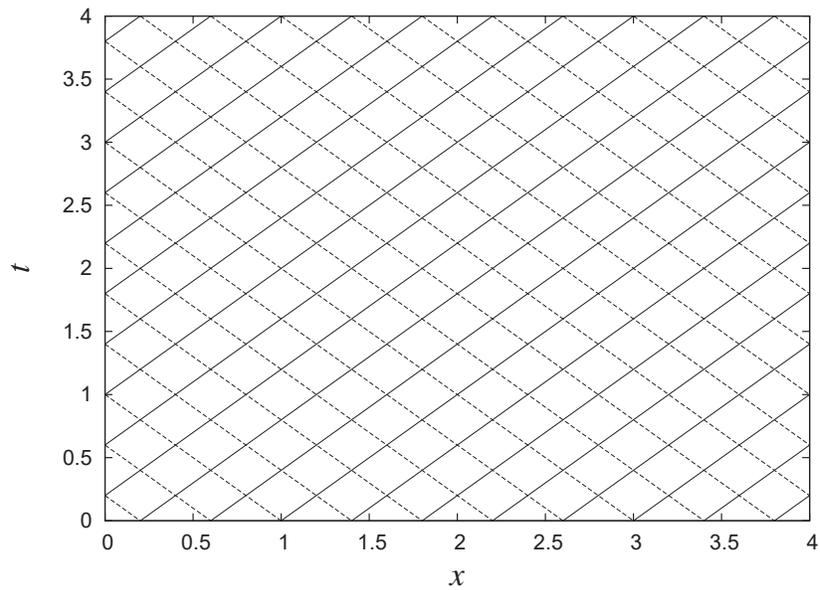


Figura 2.2: Se muestra la solución de las ecuaciones de las geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Minkowski en el plano $t-x$. Se trata de las geodésicas más sencillas. En cada punto del dominio se define el cono de luz por dos rectas de pendiente ± 1 .

2.4 Geodésicas nulas en el espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild

En 1916, Karl Schwarzschild presentó la solución exacta de un espacio-tiempo estático con simetría esférica en el vacío. La métrica de Schwarzschild describe la geometría del espacio-tiempo en el vacío fuera de una fuente esférica. Esta métrica es importante porque puede describir la geometría de un hoyo negro esférico y estático, o bien el entorno de estrellas masivas. Se muestra a continuación la construcción de dicha solución.

Métrica general en simetría esférica. En coordenadas esféricas el elemento de línea en un espacio-tiempo plano (Minkowski) está dado por las ecuación (2.8). Si r y t son constantes, la superficie resultante es una 2-esfera, es decir, que la distancia entre dos puntos de una esfera de radio r es $r^2 d\Omega^2$ donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ [1, 2, 3]. De hecho en lo que sigue, se desea preservar esta propiedad de las 2-esferas para cualquier sistema coordenado.

Si se considera una 2-esfera en un espacio 3-dimensional con $t = cte$, y se traza una línea desde el origen, dicha línea será ortogonal a la 2-esfera y paralela al vector base en la dirección radial, es decir, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$, entonces las componentes $g_{r\theta} = g_{r\varphi} = 0$. Entonces es posible escribir el elemento de línea de un espacio-tiempo esféricamente simétrico en términos de las componentes de la métrica de la forma:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + 2g_{0\theta}d\theta dt + 2g_{0\varphi}d\varphi dt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.22)$$

En un espacio-tiempo esféricamente simétrico una línea recta de r, θ, φ constantes es ortogonal a las 2-esferas y paralelo al vector base en dirección radial \vec{e}_t , entonces se tiene que $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_\theta = 0$ y $\vec{e}_t \cdot \vec{e}_\varphi = 0$, por lo tanto las componentes de la métrica $g_{0\theta} = g_{0\varphi} = 0$. Bajo tales condiciones el elemento de línea se reduce al siguiente:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}drdt + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.23)$$

Solución de Schwarzschild. En un espacio-tiempo estático, ds^2 es invariante bajo cambios $t \rightarrow -t$, esta propiedad requiere que ds^2 no contenga términos cruzados $dx^i dt$, con $i = 1, 2, 3$, es decir que es estático, y $t \rightarrow t + dt$ que indica que las funciones métricas no dependen del tiempo, por lo tanto la métrica tendrá solamente términos en la diagonal (o sea $g_{0r} = 0$) y las funciones $g_{\mu\nu}$ sobrevivientes no dependen del tiempo. Ahora es posible escribir el elemento de línea en un espacio-tiempo esféricamente simétrico estático como:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.24)$$

con g_{00} y g_{rr} funciones de r solamente. Es cómodo escribir g_{00} y g_{rr} en términos de funciones auxiliares ϕ y Λ de modo que el elemento de línea sea

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.25)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$ se quiere recuperar el espacio-tiempo de Minkowski, es decir, si la fuente se encuentra a una distancia muy lejana, los efectos en la geometría del espacio-tiempo debidos a la fuente deben ser despreciables [1]. Para cumplir esta condición basta con exigir que $\phi(r)$ y $\Lambda(r)$ cumplan

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \Lambda(r) = 0. \quad (2.26)$$

El espacio-tiempo de Schwarzschild es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, es decir, $G_{\mu\nu} = 0$, o sea una región fuera de una fuente. Las componentes del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ para la métrica (2.25) son : [1]

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{1}{r^2} e^{2\phi} [r (1 - e^{-2\Lambda})]', \\ G_{rr} &= -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \phi', \\ G_{\theta\theta} &= r^2 e^{-2\Lambda} \left[\phi'' + (\phi')^2 + \frac{\phi'}{r} - \phi' \Lambda' - \frac{\Lambda'}{r} \right], \\ G_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta G_{\theta\theta}, \end{aligned}$$

donde la prima denota derivada con respecto a r . La primera ecuación $G_{00} = 0$ implica que $r (1 - e^{-2\Lambda}) = cte = 2M$, donde $2M$ se introduce convenientemente para que cuando se tenga el límite Newtoniano coincida con la masa de la fuente, por lo tanto:

$$e^{2\Lambda(r)} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (2.27)$$

Usando que $(1 - e^{-2\Lambda}) = \frac{2M}{r}$, y tomando en cuenta que $G_{rr} = 0$ en la segunda ecuación se tiene que $\phi' = \frac{M}{r^2} e^{2\Lambda}$, así usando el valor de $e^{2\Lambda}$ que obtuvimos de la componente G_{00} e integrando ϕ' tenemos que:

$$e^{2\phi(r)} = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (2.28)$$

Por lo tanto, el elemento de línea de la solución de Schwarzschild es:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.29)$$

La forma matricial del tensor métrico resulta:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Las coordenadas en que aparece escrita esta solución se llaman coordenadas de Schwarzschild, y el espacio-tiempo solución se llama solución de Schwarzschild [1, 2, 3, 6].

Singularidad de las coordenadas. Conociendo el elemento de línea en coordenadas de Schwarzschild se observa que ocurre una anomalía cuando $r \rightarrow 2M$, es decir, tenemos una "singularidad" en el elemento de línea de Schwarzschild, pues la función métrica g_{rr} diverge.

Para estudiar lo que en dicho valor de r ocurre es útil estudiar la condición que determina instantáneamente los conos de luz: $ds^2 = 0$, con θ y φ constantes, es decir, se hace un análisis en el plano $t - r$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\right) dr^2 &= 0 \Rightarrow \\ \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt &= dr, \end{aligned} \quad (2.31)$$

de donde se obtiene una relación entre la coordenada temporal t y espacial r , haciendo $dt \rightarrow \Delta t$ y $dr \rightarrow \Delta r$, con $\Delta t = t - t_0$ y $\Delta r = r - r_0$, para $t_0 = 0$ y para valores de r_0 dados se tiene:

$$t = \pm \frac{r - r_0}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.32)$$

esta expresión que define los conos de luz a un tiempo fijo. En la Figura 2.3 se muestran los conos de luz para dicha solución a un tiempo dado. Cerca de $r = 2M$ los conos se cierran, de hecho parece que ninguna señal de luz puede ni entrar ni salir de una región cercana a dicha superficie, lo cual no coincide con la noción de que los hoyos negros succionan partículas materiales, pues en estas coordenadas son incapaces incluso de absorber la luz. Como se mostrará en la siguiente sección, esta patología es propia de las coordenadas de Schwarzschild.

La superficie definida por $r = 2M$ se llama horizonte de eventos, pero es necesario aclarar que con las coordenadas de Schwarzschild es injustificable tratar de ilustrar lo que significa un horizonte de eventos debido a la singularidad de g_{rr} , por lo cual

se pospone el concepto de horizonte de eventos para la siguiente sección. Adicionalmente el valor de $r = 2M$ recibe el nombre de radio de Schwarzschild.

Para continuar con la exploración de la solución, es posible estimar cantidades independientes del sistema de coordenadas utilizado. En particular, es muy útil mencionar el invariante de Kretschmann [5], definido en términos del tensor de Riemann como $K = R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$. Para la solución (2.29) el valor de esta cantidad es:

$$K = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (2.33)$$

De esta expresión se desprende que en $r = 0$ tal invariante tiene una singularidad. Dado que dicha cantidad es independiente de las coordenadas [3, 5], entonces en cualquier otro sistema de coordenadas aparece la misma singularidad. Se dice entonces que la solución de Schwarzschild tiene una singularidad de la geometría en $r = 0$.

La singularidad en $r = 2M$ para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild es entonces una singularidad de las coordenadas solamente. Pero la singularidad en $r = 0$ es independiente de las coordenadas.

Geodésicas de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild. Ahora se escriben las ecuaciones para las geodésicas nulas. Se parte de la ecuación (2.14) para las coordenadas (t, r, θ, φ) introducidas en la ecuación (2.29); como nos interesan las geodésicas nulas tomamos θ y φ constantes (como se hizo para el caso de Minkowski) de modo que $x^\alpha = (t, r)$. Las ecuaciones de las geodésicas son entonces:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \Gamma_{tt}^t \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{rt}^t \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} + \Gamma_{rr}^t \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{tr}^r \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \Gamma_{tt}^r \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0. \quad (2.35)$$

Introduciendo los símbolos de Christoffel asociados con la métrica de la ecuación (2.29), mostrados en el apéndice C las ecuaciones para t y r son explícitamente:

$$\frac{d^2t}{d\lambda^2} + \frac{2M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \frac{dr}{d\lambda} \frac{dt}{d\lambda} = 0, \quad (2.36)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} - \frac{M}{r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0. \quad (2.37)$$

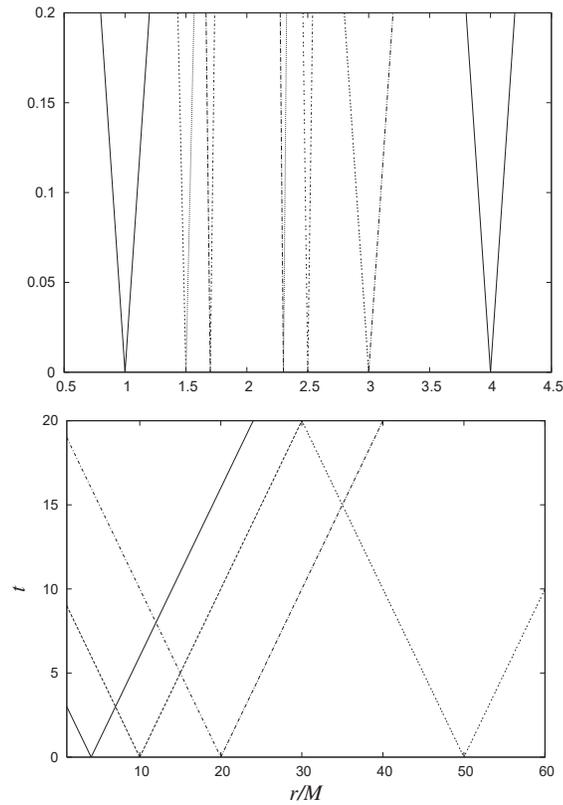


Figura 2.3: Se muestran los conos de luz a un tiempo fijo para valores de $r = \{M, 1.5M, 1.7M, 2.3M, 2.5M, 4M, 5M, 10M, 20M, 50M\}$, para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild. Se puede apreciar que los conos de luz solo se dibujan al tiempo $t = 0$ y tomando distintos valores de r . Cuando r se aproxima a $2M$ por la derecha, los conos se cierran. Es posible decir que los conos de luz se colapsan cerca de esta región.

El siguiente paso es resolver estas ecuaciones para obtener las geodésicas nulas. Hace falta imponer la condición de nulidad expresada en la ecuación (2.18), y para $x^\mu = (t, r)$ se escribe:

$$g_{tt} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + g_{rr} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2. \quad (2.38)$$

Entonces, de la condición de nulidad se obtiene una relación entre las derivadas de t y de r ,

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (2.39)$$

Esta ecuación se usa como condición inicial para resolver las ecuaciones diferenciales (2.37). Se define la cantidad (interpretada como la energía de un fotón, esta interpretación de hacer un análisis lagrangiano, se escoge signo positivo pues es el único que tiene sentido físico)

$$E = \frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r} \right)}. \quad (2.40)$$

Se define además r en términos de un nuevo parámetro η de la siguiente forma:

$$r = \frac{M}{1 - E^2} (1 + \cos \eta), \quad (2.41)$$

de modo que si se impone la condición inicial $\eta = 0$ a la ecuación anterior y a este valor de η se denota por η_0 , es posible obtener el valor de $r(\eta_0)$ que se le llamará r_0 y esta dada por:

$$r_0 = \frac{2M}{1 - E^2}. \quad (2.42)$$

La relación entre el parámetro afín λ y el nuevo parámetro η esta dada como:

$$\lambda = \left(\frac{r_0^3}{8M} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta + \sin \eta). \quad (2.43)$$

Para $r = 2M$ y haciendo uso de algunas identidades trigonométricas se tiene que el valor η que denotaremos como η_s

$$2M = \frac{2M}{1 - E^2} \cos^2 \frac{\eta_s}{2}, \quad (2.44)$$

reescribiendo esta ecuación se tiene

$$E^2 = 1 - \cos^2 \frac{\eta_s}{2},$$

de esta expresión se obtiene el valor de η_s

$$\eta_s = 2 \sin^{-1} E, \quad (2.45)$$

Tomando la derivada de r respecto a λ , recordando que η depende de λ y usando la ecuación (2.43) se obtiene

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = (1 - E^2) \tan^2 \frac{\eta}{2}. \quad (2.46)$$

Para obtener la ecuación de la derivada de t respecto a λ en términos de η , se usa la expresión para r dada por la ecuación 2.43 y del valor de η_0 :

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E \cos^2 \frac{\eta}{2}}{\cos^2 \frac{\eta}{2} - \cos^2 \frac{\eta_s}{2}}. \quad (2.47)$$

Además es necesario calcular la derivada de r con respecto a η :

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} r_0 \cos^2 \frac{\eta}{2} = -r_0 \sin \frac{\eta}{2} \cos \frac{\eta}{2}. \quad (2.48)$$

Entonces el sistema de ecuaciones por resolver es el siguiente:

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E \cos^2 \frac{\eta}{2}}{\cos^2 \frac{\eta}{2} - \cos^2 \frac{\eta_s}{2}}, \quad (2.49)$$

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = (1 - E^2) \tan^2 \frac{\eta}{2}, \quad (2.50)$$

$$\frac{dr}{d\eta} = -r_0 \sin \frac{\eta}{2} \cos \frac{\eta}{2}. \quad (2.51)$$

De las ecuaciones anteriores es posible obtener la derivada del parámetro afín con respecto al parámetro η . Ahora se desea obtener una ecuación para el tiempo coordenado t en términos de η

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\eta} = \frac{E \cos^2 \frac{\eta}{2}}{\cos^2 \frac{\eta}{2} - \cos^2 \frac{\eta_0}{2}} \left(\frac{r_0^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \frac{\eta}{2}. \quad (2.52)$$

Obtenemos que

$$\frac{dt}{d\eta} = E \left(\frac{r_0^3}{8M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^4 \frac{\eta}{2}}{\cos^2 \frac{\eta}{2} - \cos^2 \frac{\eta_0}{2}}. \quad (2.53)$$

Integrando se obtiene finalmente que el tiempo coordenado es:

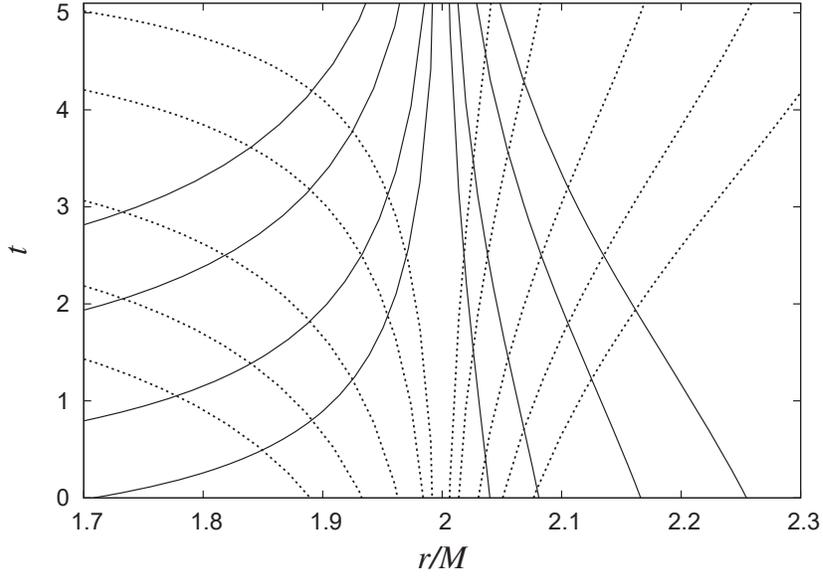


Figura 2.4: Se muestra la solución exacta global de las ecuaciones de las geodésicas nulas en coordenadas de Schwarzschild en el plano $t-r$. Se puede apreciar en la figura que se confirma que las trayectorias de los fotones presentan conos de luz cerrados cuando se aproximan a $r = 2M$, según quedó ilustrado en la Figura 2.3 para un tiempo fijo. En este caso se tienen definidos los conos de luz para todos los valores del tiempo a diferencia de lo que se tiene en la Figura 2.3. Las líneas continuas y punteadas representan geodésicas nulas entrantes y salientes respectivamente. Es notable además, que los conos de luz aparecen rotados en la región $r < 2M$, de modo que en lugar de presentarse conos de luz verticales aparecen horizontales.

$$t = 2M \ln \left| \frac{\tan \frac{\eta_s}{2} + \tan \frac{\eta}{2}}{\tan \frac{\eta_s}{2} - \tan \frac{\eta}{2}} \right| + E \left(\frac{r_0^3}{8M} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(\eta + \sin \eta)}{2} + (1 - E^2) \eta \right]. \quad (2.54)$$

La ecuación (2.54) indica el comportamiento de las geodésicas nulas en coordenadas de Schwarzschild. En la Figura 2.4 se muestra el tiempo coordenado en función de la coordenada radial. Se puede observar que cuando $r \rightarrow 2M$ las geodésicas salientes y entrantes divergen.

Trazando las geodésicas salientes y las entrantes es posible ver cómo se determinan los conos de luz en el plano $t-r$. En la Figura 2.3 se muestran los conos de luz instantáneos para un tiempo fijo, y en la Figura 2.4 se muestra la trayectoria global

que sigue un fotón tanto entrante como saliente en la dirección radial. Es evidente que los conos de luz se van cerrando conforme la geodésica se aproxima a $r = 2M$. Por otra parte, para $r < 2M$ los conos de luz cambian de orientación de vertical a horizontal.

Esta transición de la orientación de los conos de luz es consecuencia de la patología de las coordenadas de Schwarzschild en $r = 2M$, y como se verá enseguida no ocurre en todos los casos.

2.5 Geodésicas nulas de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein

En 1924 Arthur Eddington y en 1958 David Finkelstein por separado definieron un nuevo sistema de coordenadas para fotones en caída libre, estas nuevas coordenadas se llaman coordenadas de Eddington-Finkelstein [3]. Dichas coordenadas introducen las nuevas variables \tilde{U} y \tilde{V} , que representan geodésicas radiales nulas salientes para \tilde{U} y entrantes para \tilde{V} .

Fijando el valor de las coordenadas angulares en la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, las geodésicas nulas cumplen:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}\right) dr^2 = 0, \quad (2.55)$$

de donde se desprende que

$$dt^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} dr^2, \quad \Rightarrow \quad dt = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr, \quad (2.56)$$

que además se reescribe en una forma cómoda

$$dt = \pm \frac{2M}{r} \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{-1} dr. \quad (2.57)$$

Después de integrar esta ecuación se obtiene

$$t + cte = \pm \left(r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right| + cte\right). \quad (2.58)$$

De aquí se desprende la definición de la coordenada r^* como

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|, \quad (2.59)$$

con lo cual se construyen dos coordenadas nulas, una saliente y otra entrante:

$$t - r^* = cte, \quad t + r^* = cte. \quad (2.60)$$

Así, las geodésicas nulas salientes estarán dadas por $\tilde{U} = cte$ y las entrantes por $\tilde{V} = cte$, donde

$$\tilde{U} \equiv t - r^*, \quad \tilde{V} \equiv t + r^*. \quad (2.61)$$

En estas coordenadas se tiene para el caso de la variable \tilde{V} que

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{V}}{dr} &= 0, \\ \frac{d\tilde{V}}{dr} &= \frac{2}{1 - \frac{2M}{r}}, \end{aligned}$$

por lo que las geodésicas nulas en el plano $\tilde{V} - r$ involucran rectas constantes. Con la finalidad de que las geodésicas nulas queden representadas por al menos una recta de pendiente ± 1 como en el caso del espacio-tiempo de Minkowski, se define el tiempo de Eddington-Finkelstein con la transformación de coordenadas de (\tilde{V}, r) a (\bar{t}, r) ;

$$\bar{t} = \tilde{V} - r = t + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (2.62)$$

Este cambio de coordenadas lleva la métrica del espacio-tiempo a la forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.63)$$

Las geodésicas nulas entrantes y salientes respectivamente que corresponden a estas nuevas coordenadas son:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{t}}{dr} &= -1, \\ \frac{d\bar{t}}{dr} &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{2M}{r} \right), \end{aligned}$$

de donde es evidente que las geodésicas nulas entrantes tienen pendiente -1, independientemente de la posición de donde sean lanzadas.

Para escribir las ecuaciones diferenciales de las geodésicas en estas coordenadas, es necesario calcular los símbolos de Christoffel para esta métrica (ver apéndice C), y sustituirlos en la ecuación (2.14):

$$\frac{d^2\bar{t}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\bar{t}\bar{t}}^{\bar{t}} \left(\frac{d\bar{t}}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{r\bar{t}}^{\bar{t}} \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} + \Gamma_{rr}^{\bar{t}} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{d^2\bar{t}}{d\lambda^2} + \frac{2M^2}{r^3} \left(\frac{d\bar{t}}{d\lambda} \right)^2 + \frac{2M(r+2M)}{r^3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{2M(r+M)}{r^3} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.65)$$

y para r :

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \Gamma_{\bar{t}\bar{t}}^r \left(\frac{d\bar{t}}{d\lambda} \right)^2 + 2\Gamma_{r\bar{t}}^r \frac{dr}{d\lambda} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} + \Gamma_{rr}^r \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 0, \quad (2.66)$$

$$\frac{d^2r}{d\lambda^2} + \frac{M(r-2M)}{r^3} \left(\frac{d\bar{t}}{d\lambda} \right)^2 - \frac{2M^2}{r^3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{M(r+2M)}{r^3} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 = 0. \quad (2.67)$$

Las geodésicas nulas en las nuevas coordenadas se obtienen de la condición

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) d\bar{t}^2 + \frac{4M}{r} d\bar{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r} \right) dr^2 + r^2 d\Omega^2 = 0, \quad (2.68)$$

para θ y φ constantes ($d\Omega^2 = 0$) y resolviendo para $\dot{\bar{t}}$, donde el punto significa $\frac{d}{d\lambda}$, se tiene

$$\dot{\bar{t}} = \frac{-\frac{4M}{r}\dot{r} \pm \sqrt{\left(\frac{4M}{r}\right)^2 \dot{r}^2 + 4\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{2M}{r}\right)\dot{r}^2}}{-2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (2.69)$$

lo que implica que

$$\dot{\bar{t}} = \frac{2M \pm r}{r - 2M} \dot{r}, \quad (2.70)$$

que a su vez es fácil de integrar. Considerando el signo - se tiene

$$\bar{t} = -(r - r_0) + \bar{t}_0, \quad (2.71)$$

y para el signo +:

$$\bar{t} = (r - r_0) + 4 \ln \left(\frac{r - 2}{r_0 - 2} \right) + \bar{t}_0. \quad (2.72)$$

Estas son las soluciones para las geodésicas nulas en coordenadas de Eddington-Finkelstein; la ecuación (2.71) para las geodésicas entrantes y (2.72) para las geodésicas salientes. En la Figura 2.5 se muestran las geodésicas nulas en estas coordenadas, para propósitos de este trabajo la coordenada \bar{t} juega el mismo papel de t . Se puede

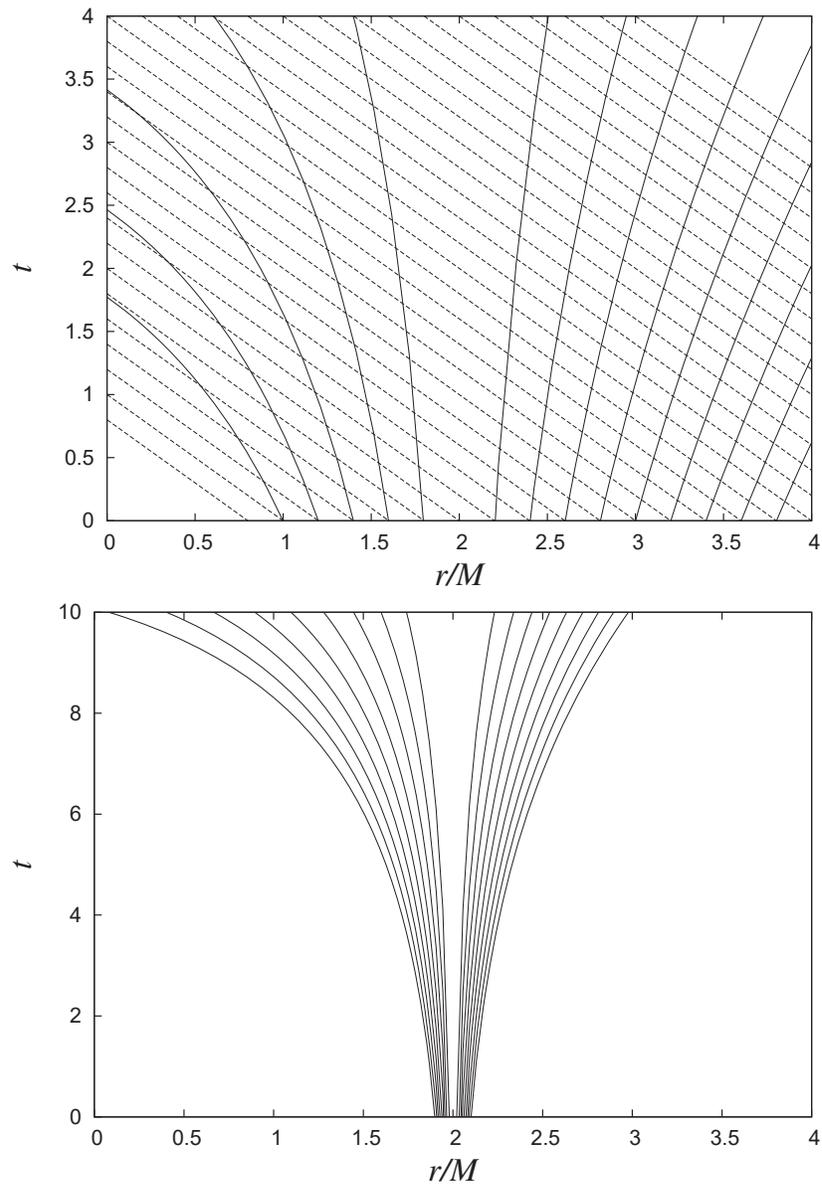


Figura 2.5: Se presenta la solución de las ecuaciones de las geodésicas en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Como era de esperarse según la definición de las coordenadas nulas, las geodésicas entrantes tienen pendiente -1 independientemente de la posición de donde son lanzadas, y de hecho aparecen en el plano $t - r$ como aparecen para el espacio-tiempo de Minkowski.

observar que las geodésicas entrantes pueden penetrar la superficie $r = 2M$ a diferencia del caso de las coordenadas de Schwarzschild.

Es ahora oportuno retomar el concepto de horizonte de eventos. El horizonte de eventos de un espacio-tiempo es una 2-superficie de la cual divergen los rayos nulos salientes lanzados desde regiones cercanas a dicha superficie. En el caso de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, las geodésicas nulas salientes de la Figura 2.5 divergen de la superficie $r = 2M$, tanto hacia dentro como hacia fuera. Se dice entonces que el horizonte de eventos para la solución de Schwarzschild es la superficie dada por la condición $r = 2M$ que es una 2-esfera.

Esta definición de horizonte de eventos es muy práctica, pues permite definir la superficie a partir de la cual los rayos salientes (geodésicas nulas) no pueden escapar.

El horizonte de eventos es una superficie que es independiente de las coordenadas, y por ende en el caso de la Solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild ocurre un comportamiento semejante al mostrado en la Figura 2.5. Sin embargo, el hecho de que las coordenadas de Schwarzschild sufran una singularidad de g_{rr} justamente en $r = 2M$, y el hecho de que la estructura causal para $r < 2M$ cambie de orientación, impiden interpretar de manera adecuada la noción de horizonte de eventos del espacio-tiempo de Schwarzschild. En la Figura 2.5 el horizonte de eventos se puede apreciar de una mejor manera, pues las coordenadas de Eddington-Finkelstein no presentan la misma anomalía que las coordenadas de Schwarzschild en $r = 2M$.

Uno de los objetivos de este capítulo es insistir en que las coordenadas de Schwarzschild no son las mejores para explicar la estructura causal de la solución de Schwarzschild.

Capítulo 3

Soluciones numéricas de la ecuación de las geodésicas radiales

3.1 Cuando se conoce la solución global.

En este caso se resuelve la ecuación de las geodésicas evaluando las funciones involucradas en cualquier punto del dominio espacio-temporal, pues las funciones métricas y los símbolos de Christoffel son conocidas en todos los puntos del espacio-tiempo, excepto donde hay singularidades.

Dado que las ecuaciones de las geodésicas son ordinarias, es posible usar integradores de ecuaciones diferenciales ordinarias. En este caso se eligió el método iterativo Runge-Kutta de cuarto orden (ver apéndice A).

Se toman en cuenta los espacio-tiempos de Minkowski, Schwarzschild y Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, puesto que en estos casos se conoce la solución exacta de la ecuación de las geodésicas, lo que permite comparar los resultados numéricos con las soluciones exactas, lo que a su vez verifica si el algoritmo usado para calcular la solución numérica funciona en los casos conocidos.

Como suele hacerse para calcular la solución numérica de ecuaciones ordinarias de segundo orden, se definen variables de primer orden, de modo que la ecuación de las geodésicas con nuevas variables de primer orden es:

$$\begin{aligned}
 t &= u(1), \\
 r &= u(2), \\
 \frac{du(1)}{d\lambda} &= u(3), \\
 \frac{du(2)}{d\lambda} &= u(4), \\
 \frac{du(3)}{d\lambda} &= -\Gamma_{tt}^t u^2(3) - \Gamma_{rt}^t u(3)u(4) - \Gamma_{tr}^t u(4)u(3) - \Gamma_{rr}^t u^2(4), \\
 \frac{du(4)}{d\lambda} &= -\Gamma_{rr}^r u^2(4) - \Gamma_{tr}^r u(3)u(4) - \Gamma_{rt}^r u(4)u(3) - \Gamma_{tt}^r u^2(3), \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

donde r tomará la etiqueta x en el caso siguiente que corresponde a la solución del espacio-tiempo de Minkowski y t juega el papel de la coordenada temporal en cada caso (incluso el de \bar{t} para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein). Así que las ecuaciones a resolver son el sistema (3.1). Aplicando el método iterativo Runge-Kutta de cuarto orden a estas ecuaciones se obtienen las soluciones numéricas de las ecuaciones para las geodésicas nulas en los espacio-tiempos de Minkowski, Schwarzschild y Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

3.1.1 La estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski.

Resolviendo numéricamente las ecuaciones (3.1) para la métrica de Minkowski y haciendo uso de condición de nulidad de la ecuación (2.18) en coordenadas cartesianas, se obtienen las geodésicas que se muestran en la Figura 3.1. Se puede observar que las geodésicas nulas en el espacio-tiempo plano son rectas con pendientes ± 1 , es decir, definen los conos de luz en cada punto del espacio-tiempo, tal como resulta en el caso en el que se tiene la solución exacta, ver Figura 2.2.

El sistema (3.1) en este caso se reduce a:

$$\begin{aligned}
 \frac{du(1)}{d\lambda} &= u(3), \\
 \frac{du(2)}{d\lambda} &= u(4), \\
 \frac{du(3)}{d\lambda} &= \frac{du(4)}{d\lambda} = 0.
 \end{aligned}$$

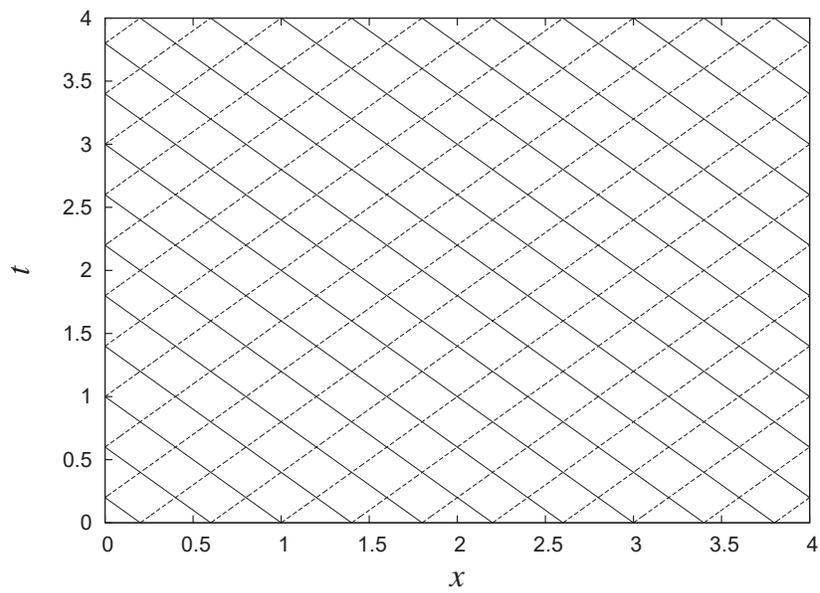


Figura 3.1: La solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas (3.1) y usando la condición de nulidad de la ecuación (2.18) para el espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas cartesianas para distintos valores de x_0 con $t_0 = 0$. En cada punto se define el cono de luz como ocurre con la solución exacta.

3.1.2 La estructura causal de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild.

De la ecuación (2.14) y sustituyendo los valores de los símbolos de Christoffel se tiene que las ecuaciones de las geodésicas son: para t

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} = -\frac{2M}{r^2(1 - \frac{2M}{r})} \frac{dt}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda}, \quad (3.2)$$

y para r :

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = \frac{M}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{M}{r^2(1 - \frac{2M}{r})} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2. \quad (3.3)$$

Usando la condición de nulidad de la ecuación (2.18) para esta métrica se tiene que:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm \frac{dt}{d\lambda} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.4)$$

que define las condiciones iniciales para las geodésicas nulas. Se integra numéricamente el sistema (3.1) usando estas condiciones. Las geodésicas nulas obtenidas se muestran en la Figura 3.2, se puede apreciar la estructura causal de la solución de Schwarzschild cerca de la región $r = 2M$; ahí las geodésicas nulas entrantes y salientes divergen al acercarse a esta 2-esfera. Este comportamiento de las geodésicas nos muestra la estructura causal tal y como sucede en el caso en el que tenemos el espacio-tiempo dado de manera exacta (ver Figura 2.4).

3.1.3 La estructura causal de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

El sistema (2.65) y (2.67) constituye el conjunto de ecuaciones diferenciales para las geodésicas de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein, las cuales se reproducen aquí:

$$\frac{d^2 \bar{t}}{d\lambda^2} = -\frac{2M^2}{r^3} \left(\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2M(r+2M)}{r^3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} - \frac{2M(r+M)}{r^3} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2,$$

y para r

$$\frac{d^2 r}{d\lambda^2} = -\frac{M(r-2M)}{r^3} \left(\frac{d\bar{t}}{d\lambda}\right)^2 + \frac{2M^2}{r^3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{dr}{d\lambda} + \frac{M(r+2M)}{r^3} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2.$$

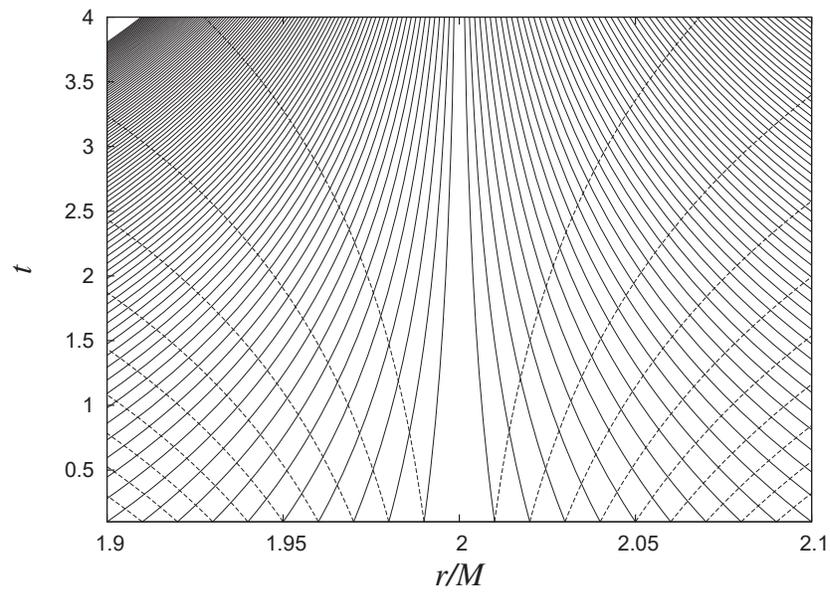


Figura 3.2: Solución numérica de las ecuaciones para las geodésicas de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild, para distintos valores de r_0 cercanos a $r = 2M$ y $t_0 = 0$. Las líneas continuas y punteadas representan geodésicas nulas entrantes y salientes respectivamente.

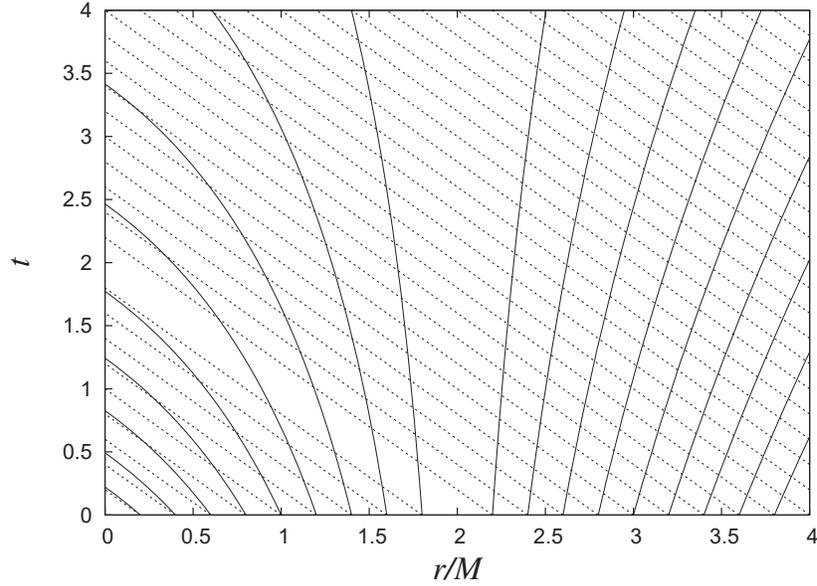


Figura 3.3: Solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas en coordenadas de Eddington-Finkelstein, para algunos valores de r_0 con $t_0 = 0$. En estas coordenadas los conos de luz no colapsan al acercarse a la superficie $r = 2M$. Se puede observar que al cruzar esta 2-superficie los conos de luz tienden a orientarse hacia la singularidad $r = 0$. Este resultado es consistente con la solución exacta. Las líneas punteadas y continuas representan geodésicas nulas entrantes y salientes respectivamente

Aplicando la condición de nulidad dada por la ecuación (2.18) para la métrica de Eddington-Finkelstein y para algunos valores de r_0 con $\bar{t}_0 = 0$ se resuelven numéricamente las ecuaciones anteriores. Se puede apreciar en la Figura 3.3 la solución numérica. Las geodésicas nulas entrantes (líneas punteadas) tiene pendiente -1 y atraviesan la región $r = 2M$ sin tener problemas.

Las geodésicas nulas salientes (líneas continuas) divergen cerca de la superficie $r = 2M$. La condición de que las geodésicas nulas diverjen de una 2-superficie, indica que dicha 2-superficie es un horizonte de eventos. Estos resultados indican que en $r = 2M$ hay un horizonte de eventos, resultado bien conocido. Sin embargo esta es una prueba más de que el algoritmo usado para integrar las ecuaciones diferenciales funciona correctamente.

3.2 Cuando se conoce una solución numérica en un dominio discreto

En este caso se conoce el valor de las funciones métricas y los símbolos de Christoffel solamente en un conjunto discreto del dominio espacio-temporal. Este es el caso más próximo a aquel en el que las funciones métricas son resultado de la evolución de un espacio-tiempo dinámico, donde las ecuaciones de Einstein se resuelven numéricamente. Es decir, no se conocen los valores de las funciones métricas $g_{\mu\nu}$ y los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en un punto arbitrario del espacio-tiempo.

Las ecuaciones de las geodésicas (2.14) necesitan de los valores de los símbolos de Christoffel en todos los puntos del espacio-tiempo, hecho que ha sido utilizado en la sección anterior, pues se usan los símbolos de Christoffel calculados a partir de una solución exacta conocida.

En el presente caso, puesto que los símbolos de Christoffel están dados en términos de las funciones métricas y sus primeras derivadas, se usa la aproximación de diferencias finitas en dos dimensiones para aproximar las derivadas de las funciones métricas, para determinar los valores de $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ en los mismos puntos donde están definidas las funciones métricas, es decir, sobre los puntos de la malla solamente. Si las funciones métricas $g_{\mu\nu}$ están definidas en los puntos (t^n, r_j) del plano r - t y se denotan por $(g_{\mu\nu})_j^n$, las primeras derivadas temporal y espacial se aproximan respectivamente con los siguientes operadores:

$$\frac{\partial (g_{\mu\nu})_j^n}{\partial t} = \frac{(g_{\mu\nu})_j^{n+1} - (g_{\mu\nu})_j^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial (g_{\mu\nu})_j^n}{\partial r} = \frac{(g_{\mu\nu})_{j+1}^n - (g_{\mu\nu})_{j-1}^n}{2\Delta r} + O(\Delta r^2), \quad (3.6)$$

donde $O(\Delta t^2)$ y $O(\Delta r^2)$ indican que la aproximación en diferencias finitas incluye un error de segundo orden. Los valores Δt y Δr indican la resolución temporal y espacial de la malla discreta donde están definidas las funciones métricas.

Dado que al integrar las ecuaciones de las geodésicas se imponen condiciones iniciales t_0 y r_0 arbitrarias, dicho punto (r_0, t_0) no necesariamente coincide con alguno de los puntos de la malla, como se puede ver si se hace $\lambda = 0$ en Figura 3.4, es necesario interpolar los valores de la métrica y los símbolos de Christoffel en dicho punto, usando los valores de estas cantidades en los puntos vecinos que sí corresponden a los de la malla. La interpolación se realiza usando el método de interpolación bilineal que se explicará más adelante.

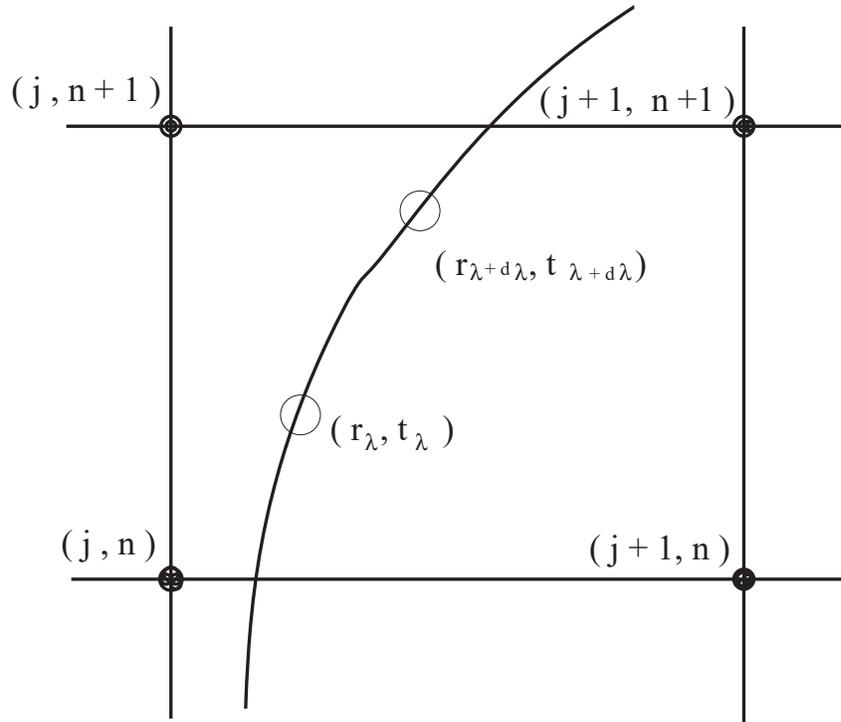


Figura 3.4: Elemento de la malla, donde se muestra el caso general de la posible curva geodésica a un tiempo arbitrario.

Por otra parte, durante la integración de las ecuaciones de las geodésicas (3.1), el parámetro λ aporta una nueva posición (r, t) después de cada iteración, y dicho punto (r, t) no necesariamente corresponde a un punto de la malla nuevamente como se puede apreciar en la Figura 3.4.

Una estrategia consiste en interpolar los valores de los símbolos de Christoffel en cada iteración en términos de los valores de estas cantidades en los vecinos más cercanos al punto de la geodésica para algún valor de λ . El algoritmo es el siguiente:

- i) Se localiza (t, r) de la última iteración en la solución de las ecuaciones.
- ii) Se localizan los puntos vecinos a dicha posición.
- iii) Se interpolan los valores de los símbolos de Christoffel en (t, r) usando los valores en los puntos vecinos (t^n, r_j) , (t^n, r_{j+1}) , (t^{n+1}, r_j) , y (t^{n+1}, r_{j+1}) .
- iv) Se usan los valores interpolados para integrar las ecuaciones (3.1).

La interpolación debe realizarse al final de cada iteración.

Así, las ecuaciones (3.1) a resolver se escriben

$$\frac{d\dot{x}_{int}^\alpha}{d\lambda} = -\Gamma_{\mu\nu}^\alpha{}_{int}\dot{x}_{int}^\mu\dot{x}_{int}^\nu, \quad (3.7)$$

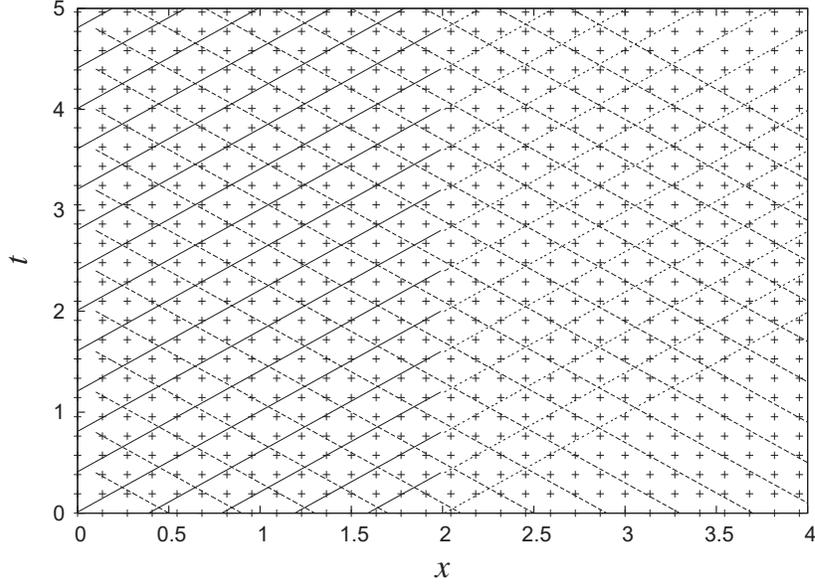


Figura 3.5: Solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas del espacio-tiempo de Minkowski. Se puede observar la malla del espacio-tiempo discreto. La resolución es $\Delta x = 0.009$, $\Delta t = 0.018$, y aquí se muestra una resolución sobresimplificada de la malla, pues la malla real es diez veces más fina.

donde $\dot{x}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}$ y el subíndice *int* significa que todos estos valores de los símbolos de Christoffel y de las coordenadas son interpolados. La fórmula usada para la interpolación involucra una aproximación lineal en cada dirección que es descrita por la siguiente fórmula [7]:

$$h(t, r)_{int} = (1 - v)(1 - u)h_1 + t(1 - u)h_2 + vuh_3 + (1 - v)h_4 \quad (3.8)$$

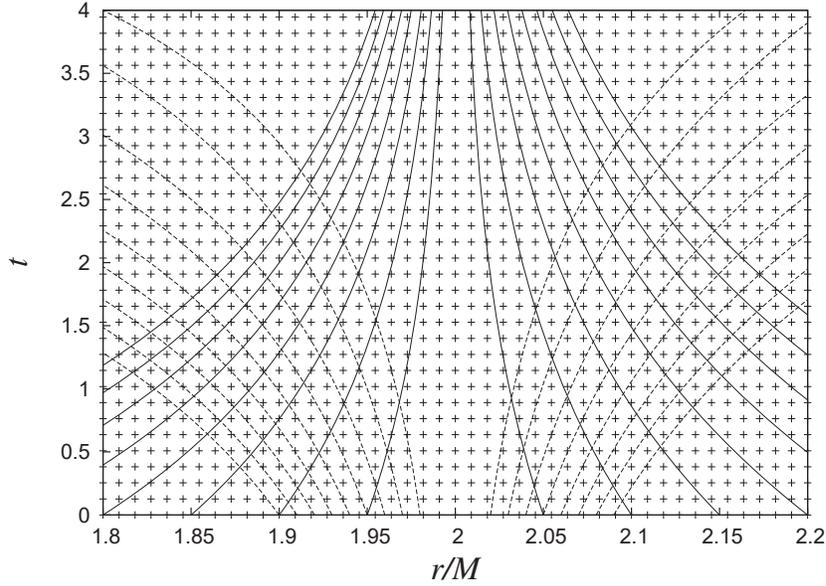


Figura 3.6: Solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas para la solución de Schwarzschild suponiendo que se conocen las funciones métricas en el dominio $0 \leq r \leq 40$ y $0 \leq t \leq 20$ con resolución $\Delta r = 0.009$ y $\Delta t = 0.018$. Se puede observar una versión diluída de la malla del espacio-tiempo, en realidad la malla es 10 veces más fina que la mostrada aquí. Ver Figuras 2.4, 3.2.

con

$$\begin{aligned}
 v &\equiv [r - r(j)]/[r(j+1) - r(j)], \\
 u &\equiv [t - t(n)]/[t(n+1) - t(n)], \\
 h_1 &= y(j, n), \\
 h_2 &= y(j+1, n), \\
 h_3 &= y(j+1, n+1), \\
 h_4 &= y(j, n+1).
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

donde h es una función arbitraria de (t, r) , por ejemplo $x^\alpha, g_{\mu\nu}$ o $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, que son las cantidades necesarias en (3.7); en ésta fórmula $j, j+1$ y $n, n+1$ etiquetan a los puntos vecinos más cercanos a (t, r) .

Espacio-tiempo de Minkowski. Siguiendo el algoritmo descrito aquí se integran las ecuaciones de las geodésicas. En la Figura 3.5 se muestran las geodésicas, que como

era de esperar son líneas rectas con pendiente ± 1 . Se muestra además una versión burda de la malla.

Solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild. Nuevamente se resuelven las ecuaciones (3.7) donde se ha sustituido la solución de Schwarzschild en una malla. En la Figura 3.6 se presentan las geodésicas que se obtienen de la solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas.

Solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Una vez más se resuelven las ecuaciones (3.7) para esta solución. Los resultados se muestran en la Figura 3.7. Las geodésicas nulas entrantes son líneas rectas con pendiente -1, que pueden atravesar esta región sin que el cono de luz sea rotado al cruzar esta 2-esfera. Por otro lado las geodésicas nulas salientes divergen cerca $r = 2M$ como se esperaba, pues este comportamiento coincide con la solución exacta de las ecuaciones y la solución numérica cuando se conoce las funciones métricas en todo el dominio del espacio-tiempo.

Es oportuno comparar los resultados numéricos con las soluciones exactas, para ello se calcula el error relativo entre las curvas geodésicas obtenidas en el capítulo anterior y los numéricos obtenidas en el presente capítulo para la solución de Schwarzschild en las coordenadas usadas en esta tesis. En la Figura 3.8 se muestran estos errores, para cada coordenada en que se ha calculado las geodésicas nulas. En la primera figura se puede apreciar como el error relativo en coordenadas Schwarzschild oscila entre -0.0005 y 0.003 , en la segunda figura se muestra que el error relativo en coordenadas de Eddington-Finkelstein oscila entre los valores -0.00002 y 0.00008 .

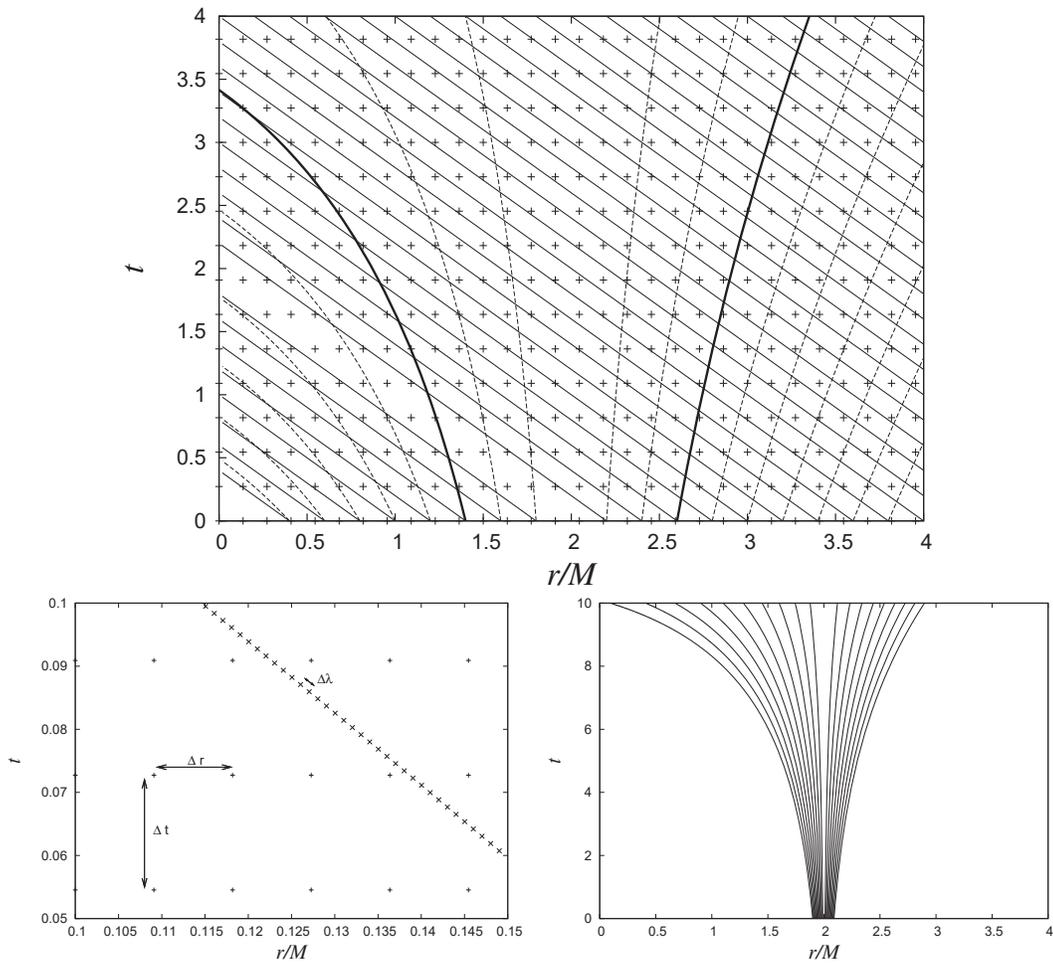


Figura 3.7: Solución numérica de las geodésicas nulas de la solución de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein en un espacio-tiempo discreto. Las líneas gruesas indican la solución exacta que aparece encima de la calculada numéricamente. La malla real es mucho más fina. La resolución real de la malla ($\Delta r = 0.009$ y $\Delta t = 0.018$) aparece en la figura inferior izquierda donde además se muestran los puntos que corresponden a la geodésica para cada $d\lambda$. En la figura inferior derecha se muestra un conjunto de geodésicas salientes cercanas al valor $r = 2M$, para mostrar que éstas divergen del horizonte de eventos.

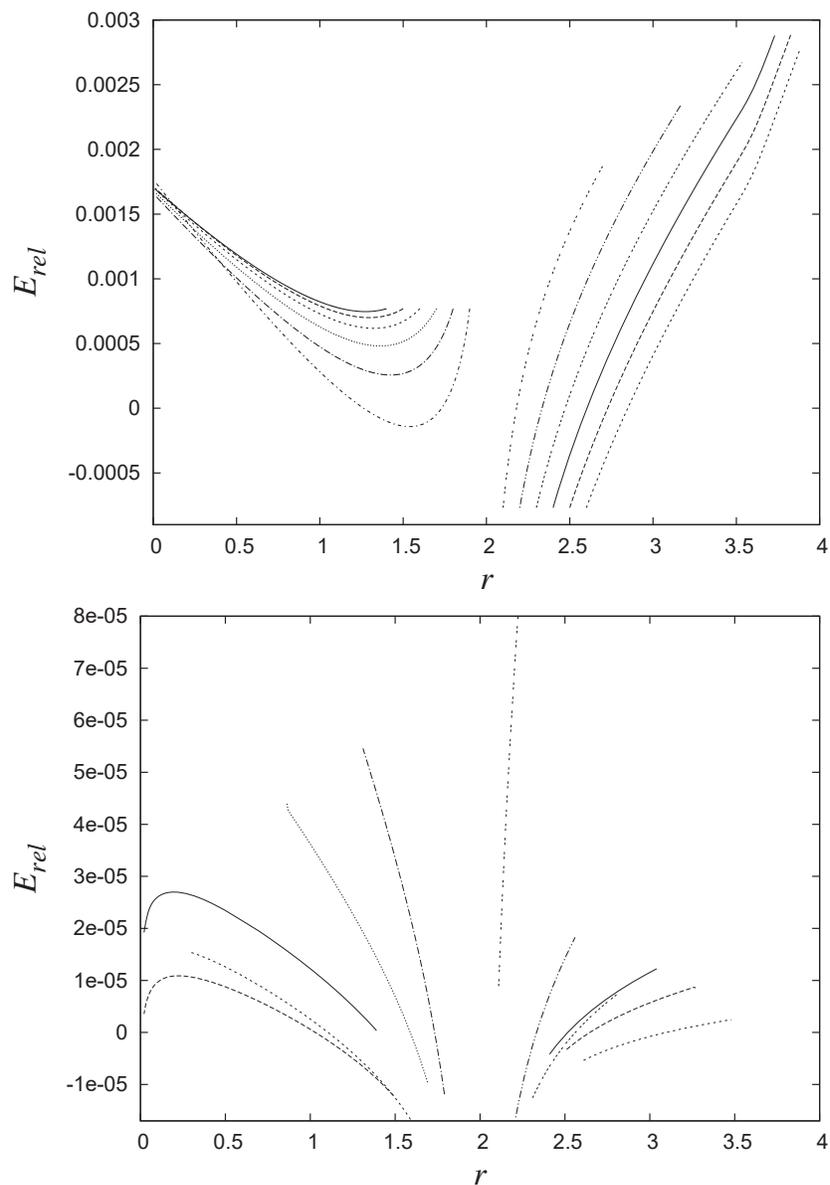


Figura 3.8: Aquí se muestra el error relativo para cada geodésica entre la solución numérica y la exacta para la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild y en coordenadas de Eddington-Finkelstein calculada en el capítulo anterior.

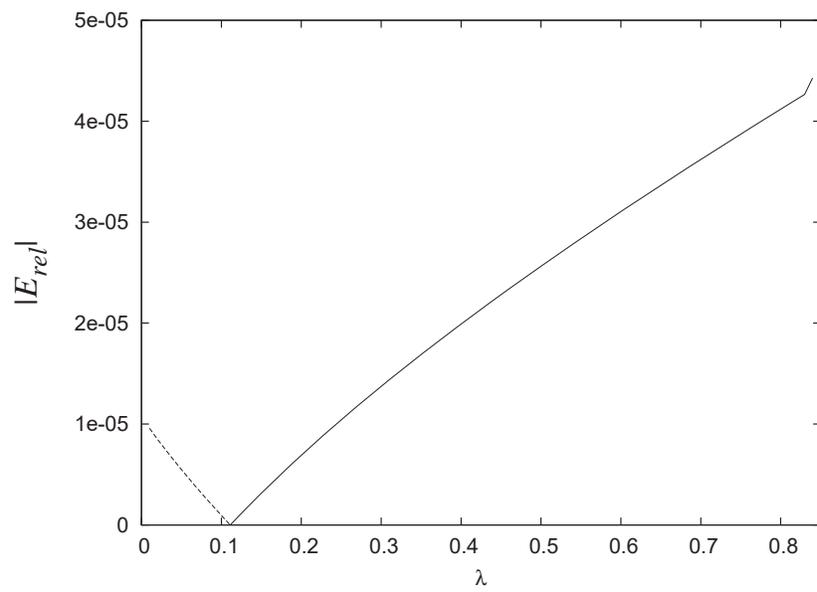


Figura 3.9: Aquí se muestra el error relativo en términos del parámetro afín λ

Capítulo 4

Geodésicas radiales en espacio-tiempos numéricos

4.1 Estrella de Bosones

Un resultado interesante de las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein con campo escalar complejo es la estrella de Bosones. El campo escalar complejo que define a la estrella de bosones está dado como:

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2. \quad (4.1)$$

Ahora el elemento de línea que describe un espacio-tiempo dinámico tiene componentes que dependen del tiempo y de la coordenada espacial r , es decir $\alpha = \alpha(t, r)$ y $a = a(t, r)$ se escribe en general como:

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.2)$$

El tensor de momento-energía asociado a la estrella de bosones es:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\phi_{,\mu}^* \phi_{,\nu} + \phi_{,\mu} \phi_{,\nu}^*] - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [\phi^{*,\alpha} \phi_{,\alpha} - V(|\phi|^2)], \quad (4.3)$$

donde $V(|\phi|^2)$ es el potencial de autointeracción del campo escalar, que en este caso es

$$V(|\phi|^2) = \frac{1}{2} m^2 |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4, \quad (4.4)$$

entendiendo a m como la masa del bosón. Este tensor de energía-momento está conectado con la geometría del espacio-tiempo a través de las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$.

Usando las identidades de Bianchi $T^{\mu\nu}_{;\mu} = 0$ para el tensor de energía-momento definido en la ecuación (4.3) y usando el rescalamiento implementada en [10]: $\phi \rightarrow \sqrt{\kappa_0/2}\phi$, $r \rightarrow mr$, $\alpha \rightarrow \frac{m}{\omega}\alpha$ y $t \rightarrow \omega t$ se tiene que la ecuación de Klein-Gordon es

$$\left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi = 0,$$

con

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi].$$

La ecuación de Klein-Gordon puede escribirse para la parte imaginaria y la parte real del campo escalar como sigue:

$$\left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi_1 = 0, \quad \left(\square - \frac{dV}{d|\phi|^2}\right)\phi_2 = 0, \quad (4.5)$$

lo que permite escribir un sistema de primer orden tanto para ϕ_1 como para ϕ_2 . Un conjunto adecuado de variables de primer orden es $\pi_i = \frac{a}{\alpha}\partial_t\phi_i$ y $\psi_i = \partial_r\phi_i$ con $i = 1, 2$.

$$\partial_t\phi_1 = \frac{a}{\alpha}\pi_2, \quad (4.6)$$

$$\partial_t\phi_2 = \frac{a}{\alpha}\pi_1, \quad (4.7)$$

$$\partial_t\pi_1 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(\frac{r^2\alpha\psi_1}{a}\right) - a\alpha\frac{dV}{d|\phi|^2}\phi_1, \quad (4.8)$$

$$\partial_t\pi_2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(\frac{r^2\alpha\psi_2}{a}\right) - a\alpha\frac{dV}{d|\phi|^2}\phi_2, \quad (4.9)$$

$$\partial_t\psi_1 = \partial_r\left(\frac{\alpha\pi_1}{a}\right), \quad (4.10)$$

$$\partial_t\psi_2 = \partial_r\left(\frac{\alpha\pi_2}{a}\right). \quad (4.11)$$

Por otra parte, las ecuaciones de Einstein para las funciones métricas son:

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1-a^2}{2r} + \frac{\kappa_0 r}{4} [\pi_1^2 + \pi_2^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + a^2 V], \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{1-a^2}{r} + \frac{a'}{a} - \frac{1}{2}\kappa_0 r a^2 V, \quad (4.13)$$

$$\partial_t a = \frac{\kappa_0 r a}{2} [\psi_1 \pi_1 + \psi_2 \pi_2]. \quad (4.14)$$

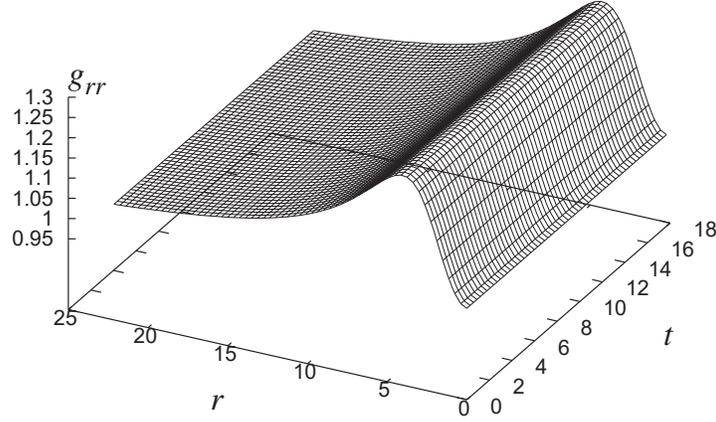


Figura 4.1: Se muestra la componente $g_{rr} = a^2$ del tensor métrico, que para el caso de la estrella de bosones es independiente del tiempo durante la evolución. El dominio numérico es tal que $0 \leq t \leq 250$, $0 \leq r \leq 40$. La estrella de bosones corresponde al caso $m = 1$, $\varphi_0 = 0$, con $\Delta t = 0.025$ y $\Delta r = 0.025$.

La ecuación (4.12) es la constricción Hamiltoniana, (la componente tt), la ecuación (4.13) es la condición para el lapso (componente rr de las ecuaciones de Einstein) y la componente rt que es la constricción de momento.

Las estrellas de bosones son soluciones de las ecuaciones anteriores con una condición muy particular; el campo escalar es armónico en el tiempo, es decir se puede escribir como

$$\phi(t, r) = \phi_0(r)e^{-i\omega t}, \quad (4.15)$$

lo cual implica que el tensor de energía-momento es independiente del tiempo, que a través de las ecuaciones de Einstein implica que la geometría del espacio-tiempo es independiente del tiempo, es decir el espacio-tiempo es estático. Usando esta condición el sistema (4.12 - 4.14) se reescribe como:

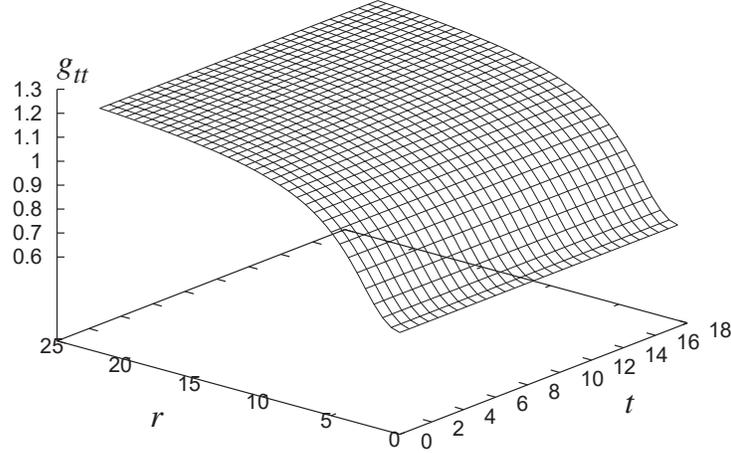


Figura 4.2: Se muestra la componente g_{tt} del tensor métrico para la misma estrella de bosones, que al igual que g_{rr} también es independiente del tiempo.

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1 - a^2}{2r} + \frac{\kappa_0 r}{4} \left[\omega^2 \phi_0^2 \frac{a^2}{\alpha^2} + (\partial_r \phi_0^2) + a^2 \left(m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{2} \lambda a^2 \phi_0^4 \right) \right], \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{1 - a^2}{r} + \frac{\partial_r a}{a} - \frac{1}{2} k_0 r a^2 \phi_0^2 \left(m^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2 \right), \quad (4.17)$$

$$0 = \partial_{rr} \phi_0 + \partial_r \phi_0 \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial_r \alpha}{\alpha} - \frac{\partial_r a}{a} \right) + \omega^2 \phi_0 \frac{a^2}{\alpha^2} - a^2 (m^2 + \lambda \phi_0^2) \phi_0. \quad (4.18)$$

Se resuelve este sistema de ecuaciones poniendo la condición de que el espacio-tiempo sea plano en el origen $a(0) = 1$, ϕ_0 finito y $\partial_r \phi_0(0) = 0$ y en la frontera $\phi_0(\infty) = \phi_0'(\infty) = 0$; con estas condiciones el sistema anterior se reduce a un problema de valores propios para ω . Se debe mencionar que este sistema de ecuaciones está sobredeterminado pues se tienen tres ecuaciones con dos incógnitas, así que es suficiente usar las primeras dos como se hace en [10] y la ecuación (4.14) solo se usa para monitorear la precisión de la evolución numérica. Las condiciones que se imponen para la solución de estas ecuaciones son:

- i)* se propone un perfil inicial de ϕ al tiempo inicial de modo que $\phi(0, r) = Ae^{-r^2/\sigma^2}$,
- ii)* se supone $\pi = 0$,
- iii)* se integra la ecuación (4.21) exigiendo un espacio plano, es decir $a(t_0, 0) = 1$,

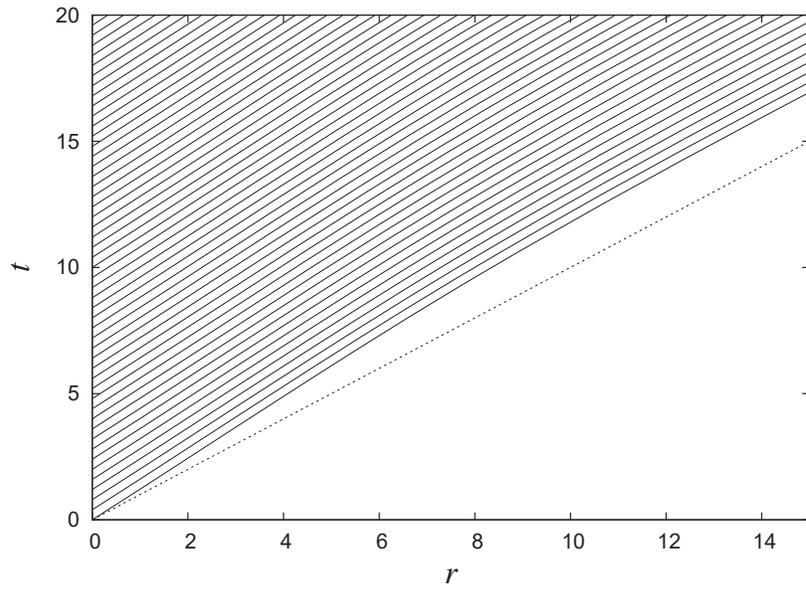


Figura 4.3: Solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas usando la métrica obtenida numéricamente de la estrella de bosones. Estas son las geodésicas nulas que parten del origen de la coordenada espacial ($r = 0$), para cada Δt en la solución de una estrella de bosones esférica.

iv) se exige la métrica de Schwarzschild en la frontera numérica, $\alpha(0, R_N) = 1/a(0, R_n)$ y se integra la ecuación (4.22),
v) se evoluciona el sistema integrando (4.25) y (4.26),
vi) con los valores encontrados se resuelven nuevamente (4.21) y (4.22).

La solución de este sistema de ecuaciones da como resultado las funciones métricas que se muestran en las Figuras 4.1 y 4.2. En la Figura 4.1 se puede apreciar que la componente g_{rr} es independiente del tiempo. En la Figura 4.2 se aprecia cómo también esta componente de la métrica g_{tt} tiene el mismo perfil durante toda la evolución. Se presentan estas figuras porque no se construyeron a partir de la solución del problema de valores iniciales, sino a partir de la evolución de dicha solución usando el sistema (4.6-4.14).

Es preciso mencionar que la solución de este sistema de ecuaciones se toma directamente de la referencia [10], pues en este trabajo nos interesa estudiar el comportamiento de las geodésicas en espacio-tiempos numéricos, y no la evolución del sistema. Entre las propiedades interesantes de este tipo de soluciones se tienen las siguientes: i) no contienen singularidades ni horizontes, ii) hay soluciones estables e inestables, de modo que algunas de estas configuraciones presentan un espacio-tiempo estático, mientras que otras (las más compactas) colapsan en hoyos negros de Schwarzschild. En este trabajo se considera el caso de una configuración estable para trazar las geodésicas nulas de dicho espacio-tiempo.

Usando el código numérico que se implementó en la sección anterior para calcular las geodésicas nulas, se obtiene la Figura 4.3. Se puede apreciar que las geodésicas nulas tienen un corrimiento al rojo gravitacional provocado por la presencia de la estrella de bosones, es decir las geodésicas nulas están ligeramente curvadas a comparación de una geodésica nula que no está sujeta a la gravedad de una estrella (línea punteada).

4.2 Oscilatón

En esta sección se estudia el caso en que las componentes del tensor métrico tienen comportamiento oscilatorio, en este caso la geometría sí es dependiente del tiempo y de la coordenada espacial r , el caso del Oscilatón.

El oscilatón corresponde a la solución de las ecuaciones de Einstein con un campo

escalar real, el tensor de energía-momento asociado a este campo escalar real es

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + 2V(\phi)], \quad (4.19)$$

$V(\phi) = \frac{1}{2}m\phi^2$, donde m es nuevamente la masa del campo escalar [10].

Usando la convención implementada en [10] para ϕ, r, t : $\phi \rightarrow \sqrt{\kappa_0}\phi$, $r \rightarrow mr$ y $t \rightarrow mt$ se tiene que la ecuación de Klein-Gordon se puede reescribir de una forma más sencilla como:

$$\square\phi - \phi = 0. \quad (4.20)$$

Desarrollando las componentes de las ecuaciones de Einstein para la métrica definida en (4.27) y usando las variables $\pi = \frac{a}{\alpha}\partial_t\phi$ y $\psi = \partial_r\phi$ se tiene un sistema de tres ecuaciones para a y α

$$\frac{\partial_r a}{a} = \frac{1-a^2}{2r} + \frac{r}{4} [\psi^2 + \pi^2 + 2a^2V], \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial_r \alpha}{\alpha} = \frac{\partial_r a}{a} + \frac{a^2-1}{r} - ra^2V, \quad (4.22)$$

$$\partial_t a = \frac{1}{2}r\alpha\psi\pi. \quad (4.23)$$

Nuevamente este sistema de ecuaciones está sobredeterminado. Desarrollando la ecuación de Klein-Gordon se tiene un sistema para las variables π, ψ

$$\partial_t \phi = \frac{a}{\alpha}\pi, \quad (4.24)$$

$$\partial_t \pi = \frac{1}{r^2}\partial_r \left(\frac{r^2\alpha\psi}{a} \right) - a\alpha\phi, \quad (4.25)$$

$$\partial_t \psi = \partial_r \left(\frac{\alpha\pi}{a} \right), \quad (4.26)$$

este sistema de ecuaciones describe a un campo escalar real autogravitante.

Se resuelve numéricamente este sistema de ecuaciones usando la aproximación del método de diferencias finitas e integradores de ecuaciones diferenciales. Para esto es necesario definir las condiciones iniciales y de frontera para π, ψ y el perfil inicial de ϕ de la misma manera que en la sección anterior. El espacio-tiempo que se obtiene de la solución numérica de esta sistema es dinámico y además las componentes g_{tt} y g_{rr} oscilan en el tiempo. Este comportamiento oscilatorio de la geometría del espacio-tiempo es lo que define al oscilación.

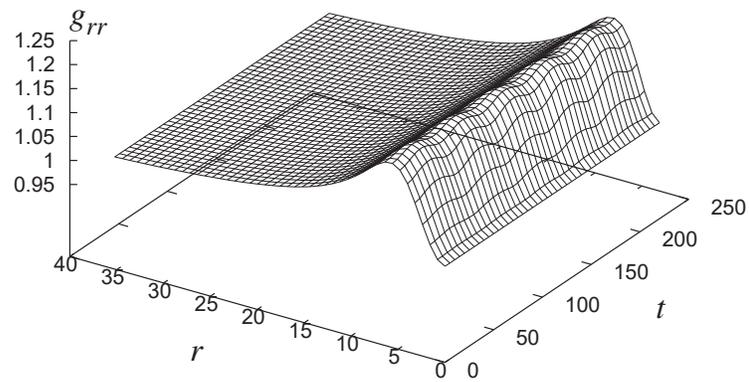


Figura 4.4: La componente g_{rr} del tensor métrico es ahora dependiente del tiempo y además oscila durante la evolución. El dominio es tal que $0 \leq t \leq 40$, $0 \leq r \leq 19$, con $\Delta t = 0.005$ y $\Delta r = 0.01$. El perfil inicial del campo escalar es $\varphi(0, r) = Ae^{-r^2/\sigma^2}$, con $A = 0.3$, $\sigma = 5.35$

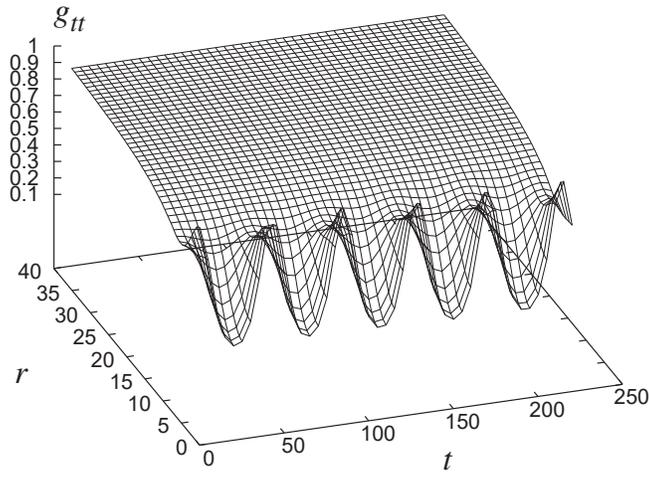


Figura 4.5: La componente g_{tt} del tensor métrico dependiente en el tiempo. Se puede apreciar que esta componente oscila en el tiempo.

En la Figura 4.4 se puede apreciar cómo la componente g_{rr} oscila en el tiempo, también en la Figura 4.5 se muestra que la componente g_{tt} de la métrica.

Una vez que se conoce la forma de las componentes de la métrica, es interesante investigar el comportamiento de las geodésicas nulas en este tipo de configuración de la geometría del espacio-tiempo.

Con la ayuda de nuestro código numérico se calculan las geodésicas nulas, y se obtienen las geodésicas nulas que se muestran en la Figura 4.6.

Se puede apreciar que las geodésicas nulas sufren una ligera desviación en sus trayectorias a comparación de una geodésica que no esta sujeta a ningun campo gravitacional, cuando el espacio tiempo se curva las geodésicas se aceleran hacia la fuente esférica, es decir, el espacio-tiempo tiende a comportarse como un espacio-tiempo de Schwarzschild para después regresar a un espacio-tiempo plano. Se puede notar también que las geodésicas nulas nos indican dónde y en qué momento las componentes de la métrica oscilan.

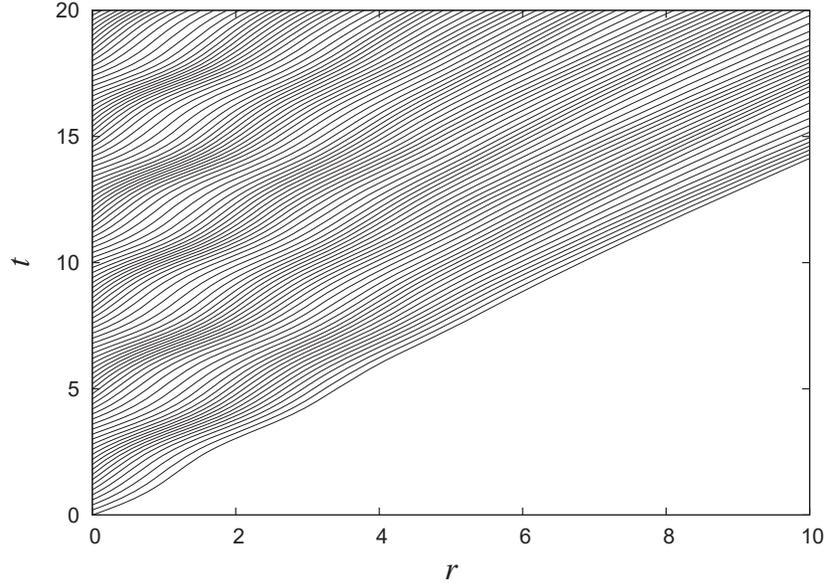


Figura 4.6: Solución numérica de las ecuaciones de las geodésicas usando una métrica obtenida numéricamente del oscilatóon.

4.3 Solitón

Otra solución interesante de las ecuaciones de Einstein es el caso de un solitón de campo escalar. Nuevamente se tiene un campo escalar real, el tensor de momento-energía dado por la ecuación (4.19).

El elemento de línea se reescribe de manera tal que todas las componentes del tensor métrico son dependientes del tiempo y de la coordenada espacial r

$$ds^2 = -\alpha^2(t, r)dt^2 + A(t, r)dr^2 + B(t, r)d\Omega^2. \quad (4.27)$$

El potencial que define al solitón está dado por:

$$V(\phi) = \frac{\sigma}{4}(\phi - a)^2 \left[(\phi - a)^2 - \frac{4(\eta_1 + \eta_2)}{3}(\phi - a) + 2\eta_1\eta_2 \right], \quad (4.28)$$

donde σ, η_1, η_2 y a son parámetros constantes. Para este trabajo se usaron los valores $\sigma = 1, \eta_1 = 0.5, \eta_2 = 0.2$ y $a = 0$.

Desarrollando las componentes de las ecuaciones de Einstein, y la ecuación de Klein-Gordon (4.5), se tiene que el sistema de ecuaciones a resolver para α, A, ϕ es:

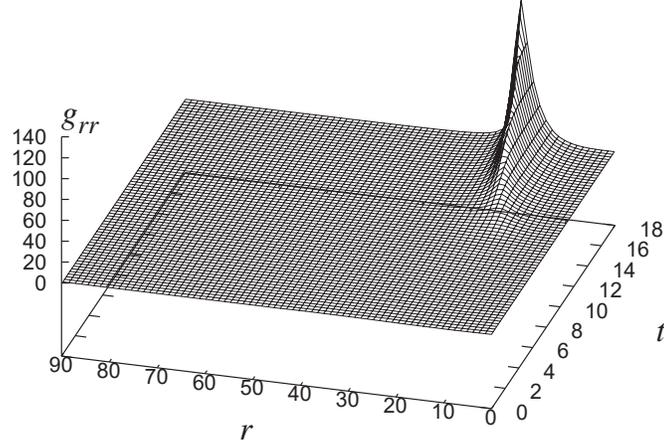


Figura 4.7: Se muestra la componente $g_{rr} = A$ del tensor métrico, para el caso en que la configuración colapsa en un agujero negro.

$$\partial_r A = A \left[\frac{1-A}{r} + 3\alpha A r K_B^2 + 8\pi A r \left(\frac{\Pi^2 + \xi^2}{2A} + V \right) \right], \quad (4.29)$$

$$\partial_r \xi = -\xi \left(D_\alpha + \frac{2}{r} - \frac{D_\alpha}{2} \right) + A \partial_\phi V, \quad (4.30)$$

$$\partial_r^2 \alpha = \partial_r \alpha \left(\frac{D_A}{2} - \frac{2}{r} \right) + \alpha A \left[6K_B^2 + 8\pi \left(\frac{\Pi^2}{A} - V \right) \right], \quad (4.31)$$

$$\xi = \partial_r \phi, \quad (4.32)$$

$$\partial_r K_B = 4\pi \frac{\xi \Pi}{A_{1/2}} - 3 \frac{K_B}{r}, \quad (4.33)$$

$$\Pi = \frac{B\sqrt{A}}{\alpha} \partial_t \phi, \quad (4.34)$$

donde $K = K_A + 2K_B$ es la curvatura extrínseca, $D_A = \partial_r \ln B$ y $D_\alpha = \partial_r \ln \alpha$.

Introduciendo un perfil inicial Gaussiano para Π

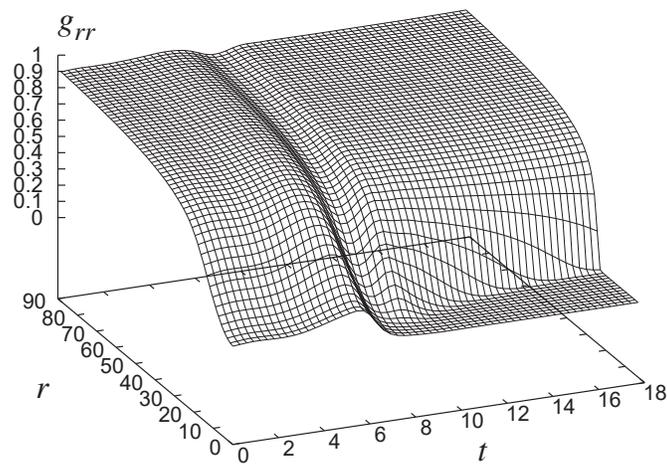


Figura 4.8: Se muestra la componente $g_{tt} = -\alpha^2$ del tensor métrico, que para el caso de un solitón es dependiente del tiempo y de la coordenada radial durante la evolución.

$$\Pi = \epsilon e^{-r^2/s^2}, \quad (4.35)$$

$$(4.36)$$

en este trabajo se usa $\epsilon = -0.002$ y $s = 10.0$. La ecuación anterior, junto con las condiciones iniciales $\partial_t \Pi = 0 = \partial_t K$, $B = 1$ y $D_B = 0$, ayudan a resolver el sistema de ecuaciones (4.29 - 4.34) con la ayuda de métodos numéricos [9].

En las Figuras 4.7 y 4.8 se puede apreciar las componentes g_{rr} y g_{tt} del tensor métrico que se obtiene de evolución numérica. La evolución no se realiza en este trabajo, los resultados se toman directamente de la referencia [9].

En la Figura 4.7 se puede observar que la componente g_{rr} es dependiente del tiempo. Se puede apreciar en la Figura 4.8 que la componente g_{tt} del tensor métrico depende del tiempo y de la coordenada espacial r .

Se resuelven las ecuaciones para las geodésicas con la ayuda de nuestro código que se implementó en las secciones anteriores una vez que se conocen las componentes del tensor métrico, obteniendo las geodésicas nulas que se muestran en la Figura 4.9

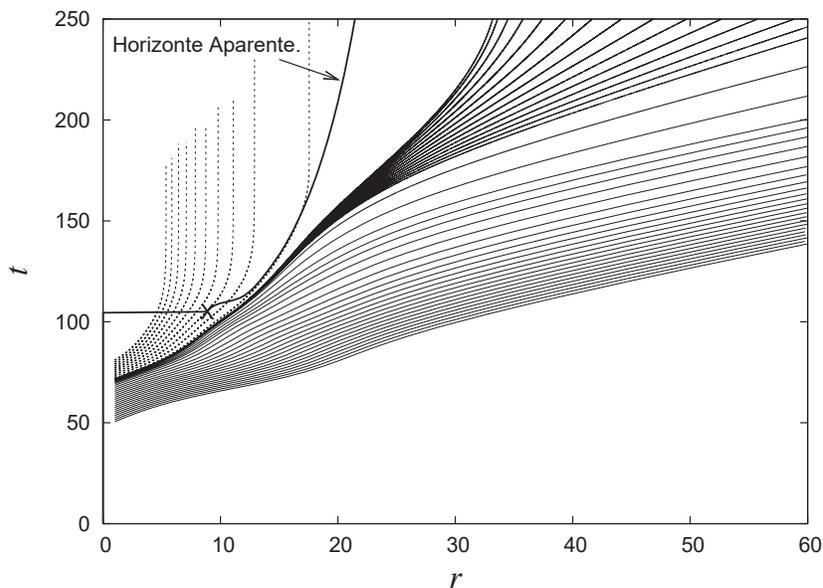


Figura 4.9: Geodésicas nulas obtenidas de la solución numérica de las ecuaciones para las geodésicas en el caso del solitón. La línea gruesa corresponde al radio de un horizonte aparente calculado en [9]. El punto marcado con una \times indica el instante en el que se localiza dicho horizonte. Alrededor de $t \rightarrow 71.5$ se muestra una superficie a partir de la cual las geodésicas nulas salientes divergen. Esta superficie se identifica con el horizonte de eventos. Dicho horizonte tiene radio mayor al del horizonte aparente y su radio se incrementan continuamente a partir de los valores iniciales de la posición de las geodésicas. Se muestra además un conjunto de geodésicas nulas que quedan atrapadas dentro de ambos horizontes.

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones

En este trabajo se estudiaron las geodésicas nulas de manera analítica y numérica, de espacio-tiempos conocidos que son Minkowski y Schwarzschild en dos sistemas coordenados.

Con los métodos numéricos probados para estas soluciones, se estudiaron las geodésicas nulas en espacio-tiempos numéricos obtenidos en trabajos independientes. Con la finalidad de tener una mejor descripción de la estructura causal de dichas soluciones.

Respecto a la solución de Schwarzschild en coordenadas de Schwarzschild mostramos que la anomalía de las coordenadas en $r = 2M$ impide interpretar de manera adecuada la noción de horizonte de eventos. Se puede ver que los fotones no pueden cruzar la 2-esfera $r = 2M$, esto contradice el concepto de hoyo negro pues se sabe que un hoyo negro acreta materia. Por lo tanto se puede concluir que las coordenadas de Schwarzschild no son las más indicadas para la descripción de la solución de Schwarzschild, es necesario usar otro sistema coordenado en donde esta anomalía (singularidad de las coordenadas en $r = 2M$) no se presenta.

Las coordenadas de Eddington-Finkelstein constituyen un sistema coordenado más apropiado para la descripción de la solución de Schwarzschild. Las geodésicas nulas entrantes penetran la región $r = 2M$ sin que los conos de luz sufran cambios en su orientación. Las geodésicas nulas salientes que se tiran desde 2-esferas $r \simeq 2M$ divergen, lo que indican que $r = 2M$ hay un horizonte de eventos.

Una vez que se conoce las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales para las geodésicas nulas, se calcularon las soluciones de estas ecuaciones de manera numérica auxiliándose del método de Runge-Kutta de cuarto orden. Estos calculos numéricos para obtener las geodésicas nulas de soluciones exactas conocidas de la ecuaciones de

Einstein se hicieron en dos casos:

- 1.- Cuando se conocen las funciones métricas y por lo tanto los símbolos de Christoffel en todo el dominio del espacio-tiempo;
- 2.- El caso en que las funciones métricas y los símbolos de Christoffel solo se conocen en un malla discreta del espacio-tiempo. En este caso fue necesario usar el método de interpolación bilineal para tener los valores de las funciones métricas y símbolos de Christoffel en cualquier punto arbitrario del dominio.

Una vez que se probó que el código numérico desarrollado reproduce las soluciones exactas de los casos conocidos, se estudiaron tres casos en los que las métricas se obtienen de manera numérica. Estas configuraciones dan lugar a que las componentes de la métrica no solo dependan de la coordenada espacial sino también de la coordenada temporal.

La primera configuración del espacio-tiempo estudiado es la estrella de bosones, el perfil de las componentes de la métrica se mantiene igual en toda la evolución. Las geodésicas nulas en esta geometría sufren un corrimiento al rojo debido al campo gravitacional de la estrella de bosones.

Otra de las soluciones de las ecuaciones de Einstein es el Oscilatón, en esta configuración las componentes de la métrica oscilan durante la evolución. Las geodésicas nulas de esta configuración oscilatoria de la geometría muestran corrimiento al rojo gravitacional de manera oscilatoria.

El tercer caso corresponde al estudio de una solución solitónica que colapsa en un hoyo negro. Se localizó una superficie de la cuál divergen las geodésicas nulas, y que se identificó una región donde hay un horizonte aparente de eventos.

El análisis mostrado en este trabajo es complementario de los resultados mostrados en [9, 10], donde no se muestra un análisis de la estructura causal del espacio-tiempo.

Apéndice A

Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta es un método de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias. Fue desarrollado alrededor del año 1900 por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta. El método de Runge-Kutta se basa en la fórmula de Euler que está dada por

$$y_{n+1} = y_n + \Delta\lambda f'(x_n, y_n), \quad (\text{A.1})$$

donde $\Delta\lambda$ es el intervalo entre x_n a x_{n+1} , que son dos puntos adyacentes en un dominio discreto de la variable independiente x . El método de Runge-Kutta es un método iterativo que en su forma más general se tiene que y_{n+1} como

$$y_{n+1} = y_n + \Delta\lambda \sum_{i=1} b_i k_i, k_i = F \left(y_n + \Delta\lambda \left(\sum_{i=1} a_{ij} k_i \right) x_n + c_i \Delta\lambda \right), \quad (\text{A.2})$$

donde a, b, c son constantes del esquema numérico. En la versión de cuarto orden se hacen cuatro iteraciones para obtener la solución. Se definen las cuatro funciones auxiliares k_i como sigue

$$k_1 = \Delta\lambda f(x_n, y_n), \quad (\text{A.3})$$

$$k_2 = \Delta\lambda f\left(x_n + \frac{\Delta\lambda}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right), \quad (\text{A.4})$$

$$k_3 = \Delta\lambda f\left(x_n + \frac{\Delta\lambda}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right), \quad (\text{A.5})$$

$$k_4 = \Delta\lambda f(x_n + \Delta\lambda, y_n + k_3). \quad (\text{A.6})$$

La pendiente entre la solución en n y $n + 1$ es un promedio ponderado de pendientes: k_1 es la pendiente al principio del intervalo; k_2 es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando k_1 para determinar el valor de y en el punto $x_n + h/2$ usando el método de Euler, k_3 es otra vez la pendiente del punto medio, pero ahora usando k_2 para determinar el valor de y , k_4 es la pendiente al final del intervalo, con el valor de y determinado por k_3 . La pendiente promedio de las pendientes después de las cuatro iteraciones es:

$$\bar{m} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

en este caso en que se hacen 4 iteraciones, se tiene que el error es de quinto orden, pues los términos que se desprecian en la aproximación de cuarto orden son $O(\Delta\lambda^5)$. La solución obtenida para y es

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta\lambda, \quad (\text{A.7})$$

donde y_{n+1} es la función a calcular numéricamente.

Apéndice B

Código numérico.

A continuación se da un breve bosquejo del código numérico que se implementó para la solución de las ecuaciones para las geodésicas nulas en los diferentes espacio-tiempos estudiados en este trabajo. Se tienen dos códigos numéricos uno para resolver las ecuaciones en espacio-tiempos continuos y otro para el caso en que el espacio-tiempo es discreto.

B.1 Caso de espacio-tiempo discreto

El código numérico consta de la siguiente estructura:

```
MAIN
  Read input
  Defines global variables, domains and parameters
  Read data files
  Loop on each geodesic
    Call Initial conditions
    Set up Initial conditions
    Interpolate metric and Christoffel symbols
    Call odesolver
      Call calcrhs
      Interpolate Christoffel symbols
  Ends Loop on each geodesic
```

END

MAIN: Parte principal del programa.

Read input: Es una rutina que lee parámetros de posición inicial de una geodésica, el paso $d\lambda$ del integrador Runge-Kutta (ver apéndice A), valor máximo de λ , dominio temporal y espacial. En el caso de espacio-tiempos discretos se define el número de puntos en la coordenada temporal (nnt) y espacial (nnr) respectivamente, se determina la malla del espacio-tiempo.

Defines global variables: Se definen las funciones métricas y los símbolos de Christoffel como arreglos de dos dimensiones, así como la coordenada temporal y espacial.

Read data files: Lee los archivos de datos que han sido resultado de una simulación numérica, estos archivos contienen los valores del tensor métrico en una malla discreta.

Loop on each geodesic: El programa resuelve para muchas geodésicas, cada una de las cuales tiene posiciones iniciales distintas dados a un tiempo inicial.

Call Initial conditions: Llama a la posición y velocidad iniciales de cada geodésica.

Set up Initial conditions: Se implementa la condición de nulidad para cada geodésica, según la ecuación (2.18).

Interpolate metric and Christoffel symbols: En la Figura ?? se muestra que la posición inicial de una geodésica no necesariamente coincide con un punto de la malla espacio-temporal. Con la ayuda de la interpolación bilineal se calculan los valores de las funciones métricas y los símbolos de Christoffel en cualquier punto arbitrario.

Call odesolver: Llama a un resolvidor de ecuaciones ordinarias, el Runge-Kutta de cuarto orden.

Call calcrhs: Llama a una rutina que ayuda al Runge-Kutta de cuarto orden a hacer las 4 iteraciones, pues actualiza la parte derecha de cada ecuación diferencial en cada iteración.

Interpolate Christoffel symbols: Interpola los símbolos de Christoffel en el punto donde se ha integrado la geodésica con la ayuda del método de interpolación bilineal, pues los símbolos de Christoffel solo están definidos en una malla discreta, ver Figura 3.4.

B.2 Caso de espacio-tiempo conocido continuo

El código numérico consta de la siguiente estructura:

```
MAIN
Read input
Defines global variables, domains and parameters
Loop on each geodesic
    Call Initial conditions
    Set up Initial conditions
    Call odesolver
    Call calcrhs
Ends Loop on each geodesic
END
```

MAIN: Parte principal del programa.

Read input: es una rutina que lee parámetros de posición inicial de una geodésica, el paso $d\lambda$ del para el integrador Runge-Kutta, valor máximo de λ , número de geodesicas.

Defines global variables: Se definen las coordenadas temporal y espacial.

Loop on each geodesic: Este programa resuelve las ecuaciones para las geodésicas, cada una de las cuales tiene posiciones iniciales dadas al tiempo inicial, estas posiciones son distintas para cada geodésica.

Call Initial conditions: Llama a la posición y velocidad iniciales de cada geodésica.

Set up Initial conditions: Se implementa la condición de nulidad para cada geodésica, según la ecuación (2.18).

Call odesolver: Llama a un resolvidor de ecuaciones ordinarias, el Runge-Kutta de cuarto orden.

Call calcrhs: Llama a una rutina que ayuda al Runge-Kutta de cuarto orden a hacer las 4 iteraciones, pues actualiza la parte derecha de cada ecuación diferencial en cada iteración.

Apéndice C

Símbolos de Christoffel de las soluciones conocidas

Símbolos de Christoffel en la métrica de Schwarzschild

La métrica en su forma matricial es:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

El determinante de $g_{\mu\nu}$ es $|g_{\mu\nu}| = -r^4 \sin^2 \theta$.

Se calcula la inversa del tensor métrico y se obtiene:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r})^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Los símbolos de Christoffel para la métrica de Schwarzschild tomando la ecuación (2.15) y por la simetría esférica que los únicos términos no triviales son:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rr,r} + g_{rr,r} - g_{rr,r}) = \frac{-M}{r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (\text{C.3})$$

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tr,t} + g_{tt,r} - g_{rt,t}) = \frac{M}{r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (\text{C.4})$$

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,r} + g_{tr,t} - g_{tr,t}) = \frac{M}{r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (\text{C.5})$$

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2}g^{rr}(g_{rt,t} + g_{rt,t} - g_{tt,r}) = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (\text{C.6})$$

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2}g^{tt}(g_{tt,t} + g_{tt,t} - g_{tt,t}) = 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\Gamma_{rt}^r = \Gamma_{tr}^r = 0. \quad (\text{C.8})$$

Símbolos de Christoffel de la métrica de Eddington-Finkelstein

Se tiene la métrica de E-F:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ \frac{2M}{r} & \left(1 + \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.9})$$

El determinante de $g_{\mu\nu}$ de esta matriz es $|g_{\mu\nu}| = -r^4 \sin^2 \theta$.

Se calcula la inversa del tensor métrico

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) & -\frac{2M}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{2M}{r} & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

De la ecuación (2.15) se puede ver que los símbolos de Christoffel se calculan a partir de la derivada de la métrica. El resultado es :

$$\Gamma_{t't'}^{t'} = \frac{2M^2}{r^3}, \quad (\text{C.11})$$

$$\Gamma_{rt'}^{t'} = \frac{M(r+2M)}{r^3}, \quad (\text{C.12})$$

$$\Gamma_{rr}^{t'} = \frac{2M(r+M)}{r^3}, \quad (\text{C.13})$$

$$\Gamma_{t't'}^r = \frac{M(r-2M)}{r^3}, \quad (\text{C.14})$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{M(r+2M)}{r^3}, \quad (\text{C.15})$$

y el resto de las componentes son cero.

Bibliografía

- [1] Bernard F. Schutz, *A first course in General Relativity*, Cambridge, United Kingdom 2000.
- [2] Miguel Alcubierre, *Introducción a la relatividad numérica*, Revista Mexicana de Física, febrero, año/vol. 53, número especial 2, Distrito Federal, México, 2007.
- [3] Misner, Thorne and Wheeler, *Gravitation*, W.H Freeman and Company, USA, 1973.
- [4] Wilson and Mathews, *Relativistic Numerical Hydrodynamics*, First edition, Cambridge, 2003.
- [5] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1983.
- [6] Stuart L. Shapiro y Saul A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*, John Wiley & Sons Inc., New York, USA 1983.
- [7] William H. Press, Saul A Teukolsky, William T. Vetterling y Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, Segunda edición, Cambridge, USA, 2003.
- [8] E. Seidel y W.-M. Suen, Phys. Rev. Lett. **66**, 1659 (1991).
- [9] M. Alcubierre, José A. González y Marcelo Salgado , *Dynamical evolution of unstable self-gravitating scalar soliton*, gr-qc/0403035, Phys. Rev. D, 2004.
- [10] F.S Guzmán, Rev. Mex. Fís. S **53**(4)(2007) 78-93.