



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE  
HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS  
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

*ESTUDIO DEL ESPACIO MODULI  
DE APLICACIONES RACIONALES  
SOBRE LA ESFERA DE RIEMMAN*

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

*LIC. EN CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS*

PRESENTA

*JESÚS ORTÍZ BEJAR*

ASESOR

*DR. LUIS ABEL CASTORENA MARTÍNEZ*

AGOSTO 2008

## Agradecimientos.

Son muchas las personas con quienes estoy en deuda por el apoyo que me han brindado todo este tiempo. . .

A mi familia por todo...

A mis amigos de la escuela; los viejos: Roberto, Vega, Alina, Daniel, Alvaro, Enif ; los nuevos: Jose Luis, Yuri, Nestor, Fortiz; que siempre me han apoyado en todo lo que han podido.

A mi asesor, Abel Castorena por su constante ayuda y paciencia a la hora de trabajar y sobre todo por haberme propuesto estudiar el espacio Moduli de aplicaciones racionales sobre la linea proyectiva.

También quiero agradecer a mis sinodales, por sus acertados comentarios a las versiones preliminares de este trabajo.

Agradecimientos. Al Dr. Manuel Cruz López por haberme invitado a trabajar una semana a la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Guanajuato, pues en esa semana resolví muchas dudas.

Además, le agradezco también al Dr. Omegar Calvo del CIMAT las observaciones que hizo sobre la tesis durante los días de trabajo en la ciudad de Guanajuato.

Agradezco la beca-tesis que recibí por seis meses del proyecto de investigación: PAPIIT IN104906-2 “Teoría de Brill-Noether para curvas especiales y aplicaciones”, dirigido por el Dr. Abel Castorena.

Las figuras las realice con el programa Xfig y las imagenes de conjuntos de Julia y mandelbrot las generamos en matlab.

# Índice general

<b>1. Prerrequisitos</b>	<b>1</b>
1.1. Análisis Complejo . . . . .	1
1.1.1. Teoremas de Arzela- Ascoli y Montel. . . . .	1
1.1.2. Proyección estereográfica . . . . .	2
1.2. Geometria Algebraica . . . . .	4
1.2.1. Variedades Diferenciables . . . . .	4
1.2.2. Variedades algebraicas. . . . .	8
1.3. Curvas elipticas . . . . .	12
1.3.1. Funciones elipticas . . . . .	12
1.3.2. La función de Weierstrass, toros complejos y curvas elipticas. . . . .	13
1.3.3. El invariante $j$ . . . . .	17
<b>2. Iteración de Funciones Racionales</b>	<b>19</b>
2.1. Iteración de funciones racionales . . . . .	19
2.2. Propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou . . . . .	23
2.2.1. Clasificación de componentes de Fatou . . . . .	25
2.2.2. El Conjunto de Mandelbrot . . . . .	26
<b>3. El Moduli de aplicaciones racionales sobre la esfera de Riemann.</b>	<b>31</b>
3.1. Descripción del espacio $\mathcal{Rat}_d$ de funciones racionales de grado $d$ . . . . .	31
3.1.1. El Espacio $\mathcal{M}_2$ de Clases de Conjugación Holomorfas . . . . .	32
3.1.2. Calculo de $\sigma_{3,1}$ y $\sigma_{3,2}$ . . . . .	40

# Introducción

Este trabajo de tesis está basado principalmente en el artículo "Geometry and Dynamics of Quadratic Rational Maps" de J. Milnor. El objetivo principal es el de dar una exposición lo mas auto contenida posible de un tema que interseca la geometría algebraica compleja y la dinámica holomorfa: El espacio moduli de funciones racionales de grado dos sobre la linea proyectiva compleja  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

En esta tesis estudiamos la construcción del espacio moduli de funciones racionales de grado  $d$  sobre  $\mathbb{P}^1$ , para posteriormente considerar el caso  $d = 2$  el cual requiere un análisis delicado. Nuestro objetivo será el de relacionar dicho espacio moduli con el espacio moduli de curvas elípticas complejas, esto es, el moduli de toros complejos( superficies de Riemman compactas de género uno). Esta caracterización de las funciones racionales de grado dos respeta propiedades y estructura dinámica y dicha caracterización tiene una interpretación geometrica muy interesante.

Comenzamos en el capítulo 1 primeramente con definiciones básicas de variable compleja. Presentamos algunos conceptos y resultados de funciones elípticas y geometría algebraica compleja . Esto lo necesitamos para entender la estructura del espacio  $\mathcal{M}_2$ , el espacio Moduli de las funciones racionales de grado 2.

En el capítulo 2 estudiamos iteración de funciones racionales de grado  $d$ , presentamos algunos resultados importantes con respecto a los invariantes bajo transformaciones de Möbius, así como el número de puntos fijos de estas. Damos los conceptos de punto fijo, punto periodico, orbita y multiplicador, para una aplicación racional. Definimos los conjuntos de Julia, Fatou y el conjunto de Mandelbrot  $\mathcal{M}$  y decimos como contar el número de componentes hiperbolicas de periodo  $n$  de  $\mathcal{M}$ .

Finalmente en el capítulo 3 construimos el espacio moduli de funciones racionales sobre  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty$  de grado  $d$ , esto es,  $\mathcal{Rat}_d$ . Hacemos ver que  $\mathcal{Rat}_d$  es un abierto (en la topología de Zariski) en cierto espacio proyectivo. Posteriormente estudiamos el caso particular  $d = 2$ . Construimos  $\mathcal{M}_2 := \frac{\mathcal{Rat}_2}{PSL(2, \mathbb{C})}$  y mostramos que  $\mathcal{M}_2 \approx \mathbb{C}^2$  teniendo en cuenta que la acción de  $PSL(2, \mathbb{C})$  en  $\mathcal{Rat}_2$  no es libre.

Definimos  $Per_n(\eta) \in \mathcal{M}_2$  , como las clases de  $\mathcal{M}_2$  que tienen un punto periodico de periodo  $n$  y multiplicador  $\eta$ . Calculamos  $Per_1(\eta)$  y  $Per_2(\eta)$ .

Basandonos en el artículo de John Milnor antes citado damos una idea de la demostración de porque los conjuntos  $Per_n(\eta)$  son curvas algebraicas cuyo grado es precisamente el número de componentes hiperbolicas de periodo  $n$  con multiplicador  $\eta$  en el conjunto de Mandelbroth  $\mathcal{M}$ . Finalmente calculamos  $Per_3(\eta)$  (lo que representa algunas dificultades de cálculo) y hacemos ver que el moduli de aplicaciones racionales de grado dos que tienen un punto periodico de periodo 3 y multiplicador  $\eta$  esta estrechamente relacionado con el moduli de curvas elipticas mediante el  $j$ -invariante.

# Capítulo 1

## Prerrequisitos

### 1.1. Análisis Complejo

En este capítulo enunciamos algunos teoremas importantes de variable compleja, omitiremos su demostración la cual se puede encontrar de manera detallada en ([4]). También damos los conceptos básicos de geometría algebraica que necesitaremos a lo largo de este trabajo.

#### 1.1.1. Teoremas de Arzela- Ascoli y Montel.

En esta sección introducimos dos conceptos fundamentales: los de familia normal y familia equicontinua, ya que en base al de familia equicontinua definimos los conjuntos de Julia y Fatou en el capítulo 2 y el teorema de Arzela Ascoli nos permite relacionar los conceptos de familia equicontinua y normal para poder usar los resultados fuertes acerca de estas últimas, como el teorema de Montel.

**Definición 1.1.1** Una familia de funciones  $\mathcal{L} = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  definidos en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{C}$ , se dice que es una familia uniformemente acotada en los discos cerrados de  $U$  si para cada disco cerrado  $V \subset U$  existe un número  $M(V)$  tal que  $|f(z)| \leq M(V)$  para toda  $z \in V$  y para toda  $f \in \mathcal{L}$ .

**Definición 1.1.2** Sea  $\mathcal{L} = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  una familia de funciones definidas en un conjunto  $U$ , se dice que es una familia uniformemente equicontinua en  $U$ , si para cualquier  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(y)| < \epsilon$  para toda  $f$  en  $\mathcal{L}$ , siempre que  $x$  y  $y$  estén en  $U$ , y  $|x - y| < \delta$ .

**Definición 1.1.3** Si  $U$  es una vecindad abierta del plano complejo  $\mathbb{C}$  y  $\mathcal{F}$  es una familia de funciones analíticas en  $U$ , decimos que  $\mathcal{F}$  es una familia normal si satisface que:

- i) Toda sucesión de funciones en la familia  $\mathcal{F}$  tiene una subsucesión que converge uniformemente en vecindades cerradas contenidas en  $U$ , o
- ii) Converge uniformemente a  $\infty$  sobre cualquier conjunto compacto.

**Teorema 1.1.1** (Arzela-Ascoli)

Sea  $\mathcal{L} = \{f : U \rightarrow \mathbb{C}\}$  una familia de funciones analíticas, entonces  $\mathcal{L}$  es una familia normal si y sólo si

- i)  $\mathcal{L}$  es equicontinua en cada punto de  $\mathbb{C}$ .
- ii) Para toda  $z \in U$  se tiene que  $\{f(z) : f \in \mathcal{L}\}$  tiene cerradura compacta en  $\mathbb{C}$ .

**Teorema 1.1.2** (Montel)

Supóngase que  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  es una familia de funciones analíticas definidas sobre un dominio  $U$  y supóngase que existen  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ , tal que  $f^n(z) \neq a$  y  $f^n(z) \neq b$  para cualquier  $n$  y cualquier  $z \in U$ . Entonces  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  es una familia normal en  $U$ .

**1.1.2. Proyección estereográfica**

La proyección central descrita en la Figura 1.1 sugiere que el plano complejo se puede pensar como la esfera unitaria en  $\mathbb{R}^3$  sin el polo norte. Resulta natural, entonces, pensar que el polo norte corresponde a un punto ideal que representa al infinito. Este es un espacio natural donde actúan las transformaciones de Möbius complejas, más precisamente:

**Definición 1.1.4** Los puntos del plano complejo junto con  $\infty$  forman el plano complejo extendido, denotado por  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

El incluir el símbolo  $\infty$  es particularmente útil en el contexto de las transformaciones de Möbius complejas:

$$\frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

Estas funciones son las únicas biyecciones holomorfas de  $\mathbb{C}_\infty$  en  $\mathbb{C}_\infty$ . La esfera unitaria,

$$\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\},$$

llamada esfera de Riemann, es el modelo requerido para incluir el punto al infinito. Para asociar cada punto en el plano con uno en  $\mathbb{S}^2$ , identificamos a  $\mathbb{C}$  con el plano en  $\mathbb{R}^3$  dado por  $x_3 = 0$  y consideramos la línea que proyecta el polo norte  $e_3 = (0, 0, 1)$  de  $\mathbb{S}^2$  a cualquier otro punto  $x = (x_1, x_2, x_3)$  en dicha esfera.

Esta línea cruza el plano complejo en un único punto, para encontrarlo se parametriza

$$e_3 + t(x - e_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

y se debe cumplir

$$[e_3 + t(x - e_3)] \cdot e_3 = 0,$$

$$1 + t(x - e_3) \cdot e_3 = 0,$$

$$t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

De donde, el punto asociado a  $x$  es

$$\begin{aligned} & e_3 + \frac{1}{1 - x_3}(x - e_3) \\ &= e_3 + \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3} \right) \\ &= \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0 \right) \end{aligned}$$

Una prueba geométrica de este hecho se obtiene observando que la proyección de  $x$  debe tener la dirección de  $(x_1, x_2)$ , y por semejanza se obtiene que

$$\frac{|z|}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3}$$

donde  $z = x_1 + ix_2$  (véase la Figura 1.1). Con base en estas ideas, se define la función :

$$\psi : \mathbb{S}^2 - \{e_3\} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ dada por } (x_1, x_2, x_3) \rightarrow \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Se afirma que  $\psi$  es una biyección de  $\mathbb{S}^2 - \{e_3\}$  al plano complejo  $\mathbb{C}$ .

1.  $\psi$  es inyectiva. Para demostrar esto se construye la inversa. Obsérvese que si  $z = \psi(x_1, x_2, x_3)$ , como  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$ , se tiene que

$$|z|^2 = \left| \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

y despejando

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \tag{1.1}$$

También

$$z + \bar{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3},$$

y

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(z + \bar{z})(1 - x_3)}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2} \left( 1 - \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) = \frac{z + \bar{z}}{2} \left( \frac{2}{|z|^2 + 1} \right), \\ x_1 &= \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1} \end{aligned} \tag{1.2}$$

Finalmente, como

$$z - \bar{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3},$$

se sigue que

$$x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)} \quad (1.3)$$

Por consiguiente,  $\psi$  es inyectiva, ya que  $z$  determina  $(x_1, x_2, x_3)$ . Obsérvese también que la función

$$\pi(z) = \left( \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right)$$

es inversa por la izquierda de  $\psi$ .

2.  $\psi$  es sobre. Un cálculo sencillo muestra que  $\pi$  es también una inversa derecha de  $\psi$ .

Haciendo corresponder  $\infty$  con el polo norte  $e_3$  se obtiene una biyección de  $\mathbb{S}^2$  en  $\mathbb{C}_\infty$ , el cual es el modelo buscado. A  $\mathbb{C}_\infty$  le llamamos la esfera de Riemann. A esta biyección se le llama la proyección estereográfica. Geométricamente es evidente que el hemisferio sur ( $x_3 < 0$ ) corresponde al disco unitario

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

y el hemisferio norte ( $x_3 > 0$ ) al exterior de este disco; la fórmula (1.2) también, muestra este hecho de manera analítica.

En esta representación esférica del plano complejo no hay una interpretación fácil de la suma y el producto, su ventaja radica en que  $\infty$  no es un punto distinguido.

Denotamos por  $SL(2, \mathbb{C}) := \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1\}$ .

Consideramos el cociente  $PSL(2, \mathbb{C}) := SL(2, \mathbb{C}) / (\{\pm I\})$  al cual le llamamos grupo modular. Estos grupos serán de importancia en el análisis de la dinámica de funciones racionales sobre  $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

## 1.2. Geometría Algebraica

### 1.2.1. Variedades Diferenciables

**Definición 1.2.1** Una variedad diferenciable de dimensión real  $n$  es un espacio topológico  $M$ , Hausdorff, segundo numerable y conexo, que dispone de una familia de homeomorfismos  $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ , donde todo  $V_\alpha$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y se cumple:

1.  $M = \cup_\alpha U_\alpha$ ;
2. Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces  $\phi_{\beta\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  es un difeomorfismo.

El conjunto  $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \mid \alpha \in I\}$  es llamado un atlas coordenado para  $M$ . Las funciones  $\phi_\alpha$  reciben el nombre de cartas coordenadas.

Decimos que la variedad diferenciable  $M$  es orientable si para cualesquiera  $\alpha, \beta$  el determinante de la derivada de la función  $\phi_{\beta\alpha}$  es positivo para cada  $p \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ .

**Definición 1.2.2** Una variedad compleja de dimensión (compleja)  $n$  es una variedad diferenciable  $M$  que admite una familia de homeomorfismos  $\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ , donde todo  $V_\alpha$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{C}^n$ , y se cumple:

1.  $M = \cup_\alpha U_\alpha$ ;
2. Si  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , entonces  $\phi_{\beta\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  es un biholomorfismo, es decir, es una función holomorfa con inversa holomorfa.

**Observación 1.2.1** Si identificamos a  $\mathbb{C}^n$  con  $\mathbb{R}^{2n}$  mediante la aplicación

$$\mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}^{2n}, \quad z_i = x_i + iy_i \mapsto (x_i, y_i)$$

entonces,  $M$  tiene una estructura como una variedad diferenciable real  $2n$  - dimensional.

**Definición 1.2.3** Una superficie de Riemann es una variedad compleja conexa  $M$  de dimensión compleja 1. Si además  $M$  es compacta entonces  $M$  se llama **Superficie de Riemann Compacta**.

**Definición 1.2.4** Una función  $f : X \rightarrow Y$  entre dos superficies de Riemann se dice holomorfa en el punto  $x \in X$ , si existe carta  $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{C}$  sobre  $X$  alrededor de  $x$  y existe carta  $\psi : V_y \rightarrow \mathbb{C}$  sobre  $Y$  alrededor de  $y = f(x)$  tal que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa en el sentido de variable compleja. Si  $f$  es holomorfa en  $x$  para todo  $x \in X$ , decimos que  $f$  es holomorfa en  $X$ .

Si  $f : X \rightarrow X$  es una función holomorfa de una superficie de Riemann en ella misma y si  $f$  es invertible en todo  $X$  decimos que  $f$  es un automorfismo.

**Ejemplo 1.2.1** La Esfera  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ , claramente  $S^2$  es una superficie conexa. En la sección 1.1.2 establecimos un homeomorfismo entre  $S^2$  y  $\mathbb{C}_\infty$  mediante la proyección estereográfica. A partir de esto, consideremos el conjunto  $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \mid \alpha = 1, 2\}$  donde:  $U_1 = \mathbb{C}$ ,  $U_2 = \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\}$  ;

$$\phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \phi_1 = Id$$

$$\phi_2 : \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \phi_2(w) = \frac{1}{w}$$

para  $w \in \mathbb{C}_\infty$  y  $\phi_2(\infty) = 0$  así

$U_1 \cup U_2 = \mathbb{C}_\infty$  y  $\phi_1, \phi_2$  son homeomorfismos bien definidos.

Ahora consideremos las coordenadas de transición:

$$(\phi_1 \circ \phi_2^{-1})(w) = \frac{1}{w}$$

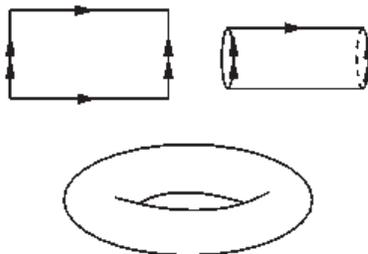
que es analítico en  $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  y

$$(\phi_2 \circ \phi_1^{-1})(w) = \frac{1}{w}$$

la cual es analítica en  $\phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{C} - \{0\}$ .

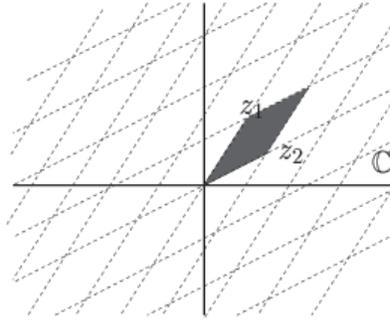
Por lo tanto  $\mathcal{A}$  es un atlas holomorfo y esto hace ver que  $\mathbb{C}_\infty$  es una superficie de Riemann compacta.

**Ejemplo 1.2.2 El Toro.** La construcción más sencilla es mediante la identificación del cuadrado unitario, ver figura. Presentaremos una construcción a partir de un espacio cociente, para esto daremos la siguiente definición.



- Sea  $G$  un conjunto en donde  $(G, \circ)$  es un grupo con la operación  $\circ$ , y  $(G, \circ)$  es un espacio topológico con una topología  $\tau$  y además:
  - i)  $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$  donde  $(x, y) \mapsto x \circ y$ ,
  - ii)  $g_2 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$  tal que  $x \mapsto x^{-1}$ .
 Entonces decimos que  $G$  es un grupo topológico.
- Si  $G$  es un grupo topológico, se dice que  $\Lambda < G$  es un subgrupo discreto si para cada  $x \in \Lambda$  existe una vecindad  $U_\epsilon(x)$  tal que  $U \cap \Lambda = \{x\}$ , i.e. el elemento identidad  $Id \in \Lambda$  es un punto aislado.
- Sean  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  dos números complejos linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ , es decir,  $\frac{z_1}{z_2} \notin \mathbb{R}$ . Una Retícula (con respecto a  $z_1$  y  $z_2$ ) se define como el subconjunto  $\Lambda = \{az_1 + bz_2 : a, b \in \mathbb{Z}\}$  (ver figura). Es fácil ver que  $\Lambda$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{C}$  y actúa sobre  $\mathbb{C}$  mediante la acción:

$$\Lambda \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, (\lambda, z) \mapsto \lambda + z.$$



Decimos que  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$  son congruentes módulo  $\Lambda$  si  $w_1 - w_2 = \lambda$  para algún  $\lambda \in \Lambda$ . Esta congruencia es claramente una relación de equivalencia que denotamos por  $\sim$ . La clase de equivalencia de un punto  $z_0$  está dada por  $[z_0]_\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : z_0 \sim z\}$ , por lo cual  $w_1 \equiv w_2 \text{ modulo } (\Lambda)$  significa que  $w_1, w_2$  están en la misma órbita bajo la acción de  $\Lambda$  sobre  $\mathbb{C}$ . Al subconjunto  $P = \{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]\} \subset \mathbb{C}$  le llamamos paralelogramo fundamental (ver figura anterior). Dado que  $\mathbb{C}$  tiene estructura de grupo abeliano, se sigue que la aplicación al cociente

$$\pi : \mathbb{C} \rightarrow \frac{\mathbb{C}}{\Lambda}$$

dada por  $\pi(z) = [z]$  está bien definida y es claramente sobreyectiva. Definimos una topología sobre  $\mathbb{C}/\Lambda$  (topología cociente) declarando a un subconjunto  $V \subset \mathbb{C}/\Lambda$  abierto si y solo si  $\pi^{-1}(V)$  es abierto en  $\mathbb{C}$ . Por definición se tiene que con esta topología  $\pi$  es continua, y además  $\pi$  manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos y se tiene que  $\pi(P) = \mathbb{C}/\Lambda$ , es decir,  $\pi(P) = \mathbb{C}/\Lambda := T$  es compacto.

Sea  $\mathbb{S}^1$  es el círculo unitario en  $\mathbb{R}^2$ . Definimos la siguiente aplicación  $h : T \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , dada por  $h([az_1 + bz_2]) = (e^{(2\pi ia)}, e^{(2\pi ib)})$ . Si  $az_1 + bz_2 \sim cz_1 + dz_2$ , entonces  $a - c, b - d \in \mathbb{Z}$  y por lo tanto  $e^{(2\pi i(a-c))} = 1 = e^{(2\pi i(b-d))}$ . Esto prueba que  $h$  está bien definida. Resulta ser que  $h$  es un homeomorfismo. Como topológicamente  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es la esfera  $\mathbb{S}^2$  con 1-asa, esto implica que el género de  $T$  es uno. Construimos un atlas sobre  $T$  de la siguiente manera:

Como  $\Lambda$  es un subgrupo discreto de  $\mathbb{C}$ , existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $|\tau| > 2\epsilon$  para cada  $\tau \in \Lambda - \{0\}$ . Dado un número  $z_\alpha \in \mathbb{C}$ , consideremos el disco abierto  $D_\alpha := D(z_\alpha, \epsilon)$ . Por la elección de  $\epsilon$ , notemos que para  $x, y \in D_\alpha$ ,  $x - y \notin \Lambda$ . Esto nos permite ver que la restricción  $\pi_\alpha := \pi|_{D_\alpha} : D_\alpha \rightarrow U_\alpha := \pi(D_\alpha)$  es inyectiva, por lo tanto su inversa  $\pi_\alpha^{-1} := \phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow D_\alpha$  es un homeomorfismo sobre su imagen. La colección de las cartas  $\mathcal{U} := \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$  es un atlas diferenciable sobre  $T$ . Veamos que el cambios de coordenadas de este atlas es una función holomorfa de variable compleja: Sean  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  dos cartas de  $\mathcal{U}$ . Consideremos

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

y sea  $z \in \phi_1(U_1 \cap U_2)$ . Sea  $\pi_i := \pi|_{D_i}$  la inversa de  $\phi_i$ , notemos que  $[\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z)] = (\pi_i \circ (\phi_2 \circ \phi_1^{-1}))(z) = (\pi \phi_2) \circ \phi_1^{-1}(z) = \phi_1^{-1}(z) = \pi(z) = [z]$ , es

decir,  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) - z \in \Lambda$ . Como  $\Lambda$  es discreto y  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  es continua, entonces  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) - z := c = \text{constante}$  y continua en cada componente conexa de  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ , por lo tanto,  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(z) = z + c$  en cada componente conexa de  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$ , esto hace ver que  $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$  es biholomorfismo. Por lo tanto tenemos que  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  es una superficie de Riemann compacta de género uno, y le llamamos toro complejo.

**Nota.** Un teorema de clasificación de superficies conexas afirma que toda variedad diferenciable conexa de dimensión dos  $X$  que es compacta, orientable y sin frontera es homeomorfa a una esfera  $\mathbb{S}^2$  con "g-asas" (ver [7]). El número  $g$  se llama el género de  $X$  el cual resulta ser un invariante topológico. Tenemos así por ejemplo que  $\mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  tiene género cero. Hemos visto que topológicamente el toro complejo  $T = \mathbb{C}/\Lambda$  es de género uno.

La prueba del siguiente resultado se encuentran en ([9]).

**Teorema 1.2.1** (Teorema de la Forma Normal Local). Sean  $X, Y$  superficies de Riemann y  $f : X \rightarrow Y$  holomorfa en  $p \in X$  no constante. Entonces, existe un único entero  $k \geq 1$  que satisface la siguiente propiedad: para cualquier carta  $\phi_2 : U_2 \rightarrow V_2$  en  $Y$  centrada en  $y = f(p)$ , existe una carta  $\phi_1 : U_1 \rightarrow V_1$  en  $X$  centrada en  $p$  tal que  $\phi_2(f(\phi_1^{-1}(z))) = z^k$ .

El número  $k$  es llamado la *multiplicidad* de  $p$  con respecto a  $f$  y lo denotamos por  $k = b_p(f)$ . Cuando  $k > 1$  se dice que  $p$  es un *punto de ramificación* y  $f(p)$  se llama *valor de ramificación*. Notemos que los puntos de ramificación son los puntos donde la derivada de la expresión local de  $f$  se anula.

**Definición 1.2.5** Sean  $X, Y$  superficies de Riemann compactas y  $f : X \rightarrow Y$  holomorfa no constante. Para cada  $y \in Y$ , definimos el grado de  $f$  en  $y$  como  $d_y(f) = \sum_{p \in f^{-1}(y)} b_p(f)$ .

El grado de  $f$  en  $y$  es constante, es decir,  $d_{y_1}(f) = d_{y_2}(f)$  para cualesquiera  $y_1, y_2 \in Y$ .

Tenemos que una aplicación holomorfa entre superficies de Riemann  $f : X \rightarrow Y$  es un *cubriente ramificado de grado  $d$* , si cada  $y \in Y$  tiene una vecindad  $V_y$  tal que:

- $f^{-1}(V) = \bigcup_{j \leq d} U_j$ , donde los  $U_j$  son vecindades disjuntas de los puntos  $x_j \in f^{-1}(y)$ .
- Existen cartas locales  $\phi_j : U_j \rightarrow D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ,  $\psi_j : V_y \rightarrow D$ , donde  $\phi_j(x_j) = 0 = \psi_j(y)$  tal que  $\psi_j \circ f \circ \phi_j^{-1}(z) = z^{n_j}$ .

### 1.2.2. Variedades algebraicas.

Consideremos el producto cartesiano  $\mathbb{C}^n := \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cdots \times \mathbb{C} = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n\}$  al cual le llamamos  $n$ -espacio afín. Si  $p = (a_1, \dots, a_n) \in$

$\mathbb{C}^n$ , decimos que los  $a_j, j = 1, \dots, n$  son las coordenadas afines de  $p$ . Sea  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios en  $n$  indeterminadas. Cada  $f \in A$  define una función polinomial de  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $(a_1, \dots, a_n) \rightarrow f(a_1, \dots, a_n)$ . Si  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ , decimos que  $p = (a_1, \dots, a_n)$  es un cero ó una solución de  $f$ . Definimos  $V(f) := \{p \in \mathbb{C}^n | f(p) = 0\}$ . Si  $T$  es un subconjunto de  $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , definimos

$$V(T) := \{p \in \mathbb{C}^n | f(p) = 0, \forall f \in T\}.$$

Sea  $I$  el ideal generado por  $T$ , entonces se tiene que  $V(T) = V(I)$ . Del hecho que  $A$  es un anillo noetheriano (Ver [1]), se tiene que cada ideal en  $A$  es finitamente generado por lo tanto se tiene que  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ , para ciertos  $f_j \in A, j = 1, \dots, r$ , entonces  $V(I) = V(f_1, \dots, f_r)$ .

**Definición 1.2.6** Decimos que un subconjunto  $Y \subset \mathbb{C}^n$  es algebraico, si existe un subconjunto  $T$  de  $A$  tal que  $V(T) = Y$ .

*Ejemplos.* (a).- Cualquier conjunto finito de puntos  $Y = \{z_1, \dots, z_k\} \in \mathbb{C}$  es algebraico, pues  $Y = V(f)$ , donde  $f = \alpha(z - z_1) \cdots (z - z_k), \alpha \in \mathbb{C}$ .

(b).- Otro ejemplo de conjunto algebraico en  $\mathbb{C}^n$  es el conjunto  $V(f_1(z_1, \dots, z_n), f_2(z_1, \dots, z_n))$  el cual es el conjunto de ceros comunes de los polinomios  $f_1(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2 - 1, f_2(z_1, \dots, z_n) = z_1 + z_2 + \dots + z_n - 1$ , esto es,  $V(f_1, f_2)$  es la intersección en  $\mathbb{C}^n$  de una esfera  $S^n$  con un hiperplano.

Los conjuntos algebraicos satisfacen las siguientes propiedades (Ver [6], pag. 2)

**Lema 1.2.1** (i).- La unión de dos conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.

(ii).- La intersección de cualquier familia de conjuntos algebraicos es un conjunto algebraico.

(iii).- El conjunto vacío  $\emptyset$  y el espacio total  $\mathbb{C}^n$  son conjuntos algebraicos.

**Definición 1.2.7** Definimos una topología sobre  $\mathbb{C}^n$  tomando como subconjuntos abiertos complementos de conjuntos algebraicos. Por la proposición anterior al tomar complementos en los incisos (i), (ii), (iii) se tiene que estos abiertos satisfacen los axiomas para una topología sobre  $\mathbb{C}^n$ . A esta topología la llamamos topología de Zariski.

Resulta que un conjunto abierto en la topología de Zariski es denso (ver [6], pag 3).

Considerando a  $\mathbb{C}^n$  con la topología de Zariski, diremos que un conjunto cerrado (en la topología de Zariski)  $Y \subset \mathbb{C}^n$  es irreducible si  $Y$  no se puede expresar como unión de dos subconjuntos cerrados (en la topología inducida) propios de  $Y$ . Diremos que  $Y$  es reducible si  $Y$  no es irreducible.

*Ejemplo.* (a).- Cada ideal  $I$  en  $\mathbb{C}[x]$  es un ideal principal, es decir,  $I$  está generado por un polinomio  $f \in \mathbb{C}[x]$ , se tiene que  $f(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_n)$ , donde  $c, a_1, \dots, a_n \in k$ , entonces  $V(f) = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Por lo tanto los abiertos de  $\mathbb{C}$  con la topología de Zariski son complementos de conjuntos finitos. Esta topología no es Hausdorff. Notemos por ejemplo que los abiertos en esta topología son densos en  $\mathbb{C}$ .

(b).- Podemos ver que los únicos conjuntos irreducibles en  $\mathbb{C}$  en la topología de Zariski son todo  $\mathbb{C}$  y los conjuntos  $Y$  de la forma  $Y = \{z\}, z \in \mathbb{C}$ . Notemos que un conjunto cerrado (en la topología de Zariski)  $Y$  en  $\mathbb{C}$  que tenga más de dos puntos no es irreducible: Por ejemplo  $W = \{z_1, z_2\} \subset \mathbb{C}$  es un conjunto algebraico ya que  $W = V(f(z)) = \{a \in \mathbb{C} : f(a) = 0\}$ , donde  $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)$ , por lo tanto  $W$  es cerrado en la topología de Zariski. Notemos que  $W = V\{z_1\} \cup \{z_2\} = V((z - z_1)) \cup V((z - z_2))$ , es decir,  $W$  no es irreducible en la topología de Zariski.  $\mathbb{C}$  es irreducible pues como  $\mathbb{C}$  tiene infinitos elementos,  $\mathbb{C}$  no se puede expresar como unión de dos conjuntos cerrados propios de  $\mathbb{C}$ , pues tales conjuntos propios cerrados deben ser finitos en la topología de Zariski sobre  $\mathbb{C}$ .

**Definición 1.2.8** *Una variedad algebraica afín es un subconjunto cerrado irreducible de  $\mathbb{C}^n$  en la topología de Zariski. Un abierto de una variedad afín se llama variedad cuasi-afín.*

**Proposición 1.2.1** *Cada conjunto algebraico  $Y$  en  $\mathbb{C}^n$  se escribe de manera única como unión de variedades afines  $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_r$ , donde  $Y_i \not\subseteq Y_j$ .*

*Demostración* Ver [6] corolario 1.6.

## Variedades Projectivas

Sean  $z, w \in \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ . Decimos que  $z$  es equivalente a  $w$  y escribimos  $z \sim w$ , si existe  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$  tal que  $\lambda z = w$ . Es fácil ver que esto define una relación de equivalencia. Denotamos por  $[z]$  la clase de equivalencia de  $z$ . Notemos que la clase  $[z]$  es una recta que pasa por el origen en  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Si  $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$ , escribimos  $[z] = [z_0 : \dots : z_n]$  y les llamamos coordenadas homogéneas de  $z$ .

**Definición 1.2.9** *Consideremos el espacio cociente por la relación de equivalencia anterior  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n := \{[z] | z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}\} = \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} / \sim$ . A  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  le llamamos espacio proyectivo complejo. Algunas veces escribimos simplemente como  $\mathbb{P}^n$ .*

Sea  $S = \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$  el anillo de polinomios en las variables  $z_0, \dots, z_n$ . Un polinomio  $f \in S$  se llama *polinomio homogéneo de grado  $d$*  si  $f(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) =$

$\lambda^d f(z_0, \dots, z_n)$  para toda  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Esto quiere decir que un polinomio homogéneo  $f$  de grado  $d$  es una suma finita de monomios de grado  $d$  en las variables  $z_0, z_1, \dots, z_n$ .

Sea  $f \in S$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ . Definimos una función  $f : \mathbb{P}^n \rightarrow \{0, 1\}$  dada por  $f([a_0 : \dots : a_n]) = 0$  si  $f(a_0, \dots, a_n) = 0$ , y  $f([a_0, \dots, a_n]) = 1$ , si  $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ . Sea  $f(p) = 0$  y consideremos un punto  $q$  tal que  $q \sim p$ , entonces  $q = \lambda p$  para algún  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ , entonces  $f(q) = f(\lambda p) = \lambda^d f(p) = 0$ , es decir, si  $f(p) = 0$ , entonces todo punto  $q$  equivalente a  $p$  satisface que  $f(q) = 0$ . Así pues de la relación de equivalencia sobre  $\mathbb{P}^n$  y la homogeneidad de  $f$  se tiene que el conjunto  $V(f) := \{[p] \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0\} \subset \mathbb{P}^n$  está bien definido.

**Definición 1.2.10** Sea  $T \subset S$  un subconjunto de polinomios homogéneos de  $S$ , definimos  $V(T) := \{p \in \mathbb{P}^n \mid f(p) = 0, \forall f \in T\}$ . Si  $I \subset S$  es un ideal, definimos  $V(I) = V(T)$ , donde  $T$  es el conjunto de todos los polinomios homogéneos de  $I$ . Se tiene que  $V(T) = V(F_1, \dots, F_r)$  para un número finito de polinomios homogéneos  $F_i$  no necesariamente del mismo grado.

**Definición 1.2.11** Un subconjunto  $Y$  de  $\mathbb{P}^n$  se llama conjunto algebraico proyectivo (ó simplemente )conjunto proyectivo, si existe un subconjunto  $T$  de polinomios homogéneos de  $S$  tal que  $Y = V(T)$ .

*Ejemplo.* (i).- Sea  $f(z_1, \dots, z_6) = z_1^5 + z_2^5 + \dots + z_6^5$ .  $f$  es homogéneo de grado  $d = 5$ , entonces  $V(f)$  define un conjunto proyectivo (irreducible) en  $\mathbb{P}^5$ .

(ii).- Sea  $F(z_1, z_2, z_3) = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ ,  $G(z_1, z_2, z_3) = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ . Sea  $T = \{F, G\} \subset \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3]$ , entonces  $V(T)$  es un conjunto algebraico en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ .

De manera análoga al caso afín se tiene que:

- (i).- La unión de conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo.
- (ii).- La intersección arbitraria de conjuntos algebraicos proyectivos es un conjunto algebraico proyectivo.
- (iii).- El conjunto vacío y todo  $\mathbb{P}^n$  son conjuntos algebraicos proyectivos.

Definimos la topología de Zariski sobre  $\mathbb{P}^n$  definiendo como conjuntos abiertos para esta topología los conjuntos que son complementos de conjuntos algebraicos proyectivos.

Una **Variedad (algebraica) proyectiva** es un conjunto algebraico proyectivo irreducible en  $\mathbb{P}^n$  con la topología inducida. Un abierto de una variedad proyectiva se llama variedad cuasi-proyectiva.

Además de la topología de Zariski, el espacio proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  tiene otra topología la cual es inducida de la topología euclidiana  $\mathbb{C}^{n+1}$  al considerar la proyección canónica al cociente

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\} / \sim$$

es decir, declaramos a un conjunto  $U \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  abierto si y sólo  $\pi^{-1}(U)$  es abierto en  $\mathbb{C}^{n+1}$  en la topología euclidiana. Con esta topología,  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  tiene una

estructura de variedad compacta compleja de dimensión compleja  $n$ . De esta manera podemos hacer uso del calculo diferencial y de este modo dar la siguiente definición:

**Definición 1.2.12** Sea  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio homogéneo de grado  $d$ . Decimos que  $F$  es no singular en un punto  $p \in \mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  si la derivada de  $F$  en  $p$ ,  $DF(p) \neq 0$ . Decimos que la curva proyectiva  $X = V(F)$  es no singular si para todo  $p \in X$ ,  $DF(p) \neq 0$ . Si además el polinomio  $F$  es irreducible, a  $X$  le llamamos curva proyectiva plana irreducible plana no singular de grado  $d$ .

Sea  $F : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  un polinomio homogéneo irreducible no singular de grado  $d$  y  $X = V(F)$ . Se tiene que  $X$  tiene estructura de superficie de Riemann compacta. En este caso el género  $g$  de  $X$  viene dada por la fórmula  $g_X = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$  (Ver [9], pag. 69). Por ejemplo si el grado de  $F$  es tres, tenemos que el género de  $X = V(F)$  es uno, es decir, topológicamente  $X$  es un toro complejo.

*Ejemplo.* Sea  $F(x, y, z) = ax + by + cz = 0$  con  $a, b, c$  no todos cero. Supongamos sin pérdida de generalidad que  $a \neq 0$ . La función  $\phi : \mathbb{P}^1 \rightarrow V(F) = X_F$  dada por  $\phi([u : v]) = [-\frac{bu+cv}{a} : u : v]$  es un isomorfismo, es decir,  $V(F) \simeq \mathbb{P}^1$ . Como  $F$  es una ecuación lineal es natural llamar a  $\mathbb{P}^1$  línea proyectiva compleja.

**Definición 1.2.13** Sea  $f(z_1, z_2) = \sum_{n_1, n_2} a_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2}$  un polinomio no constante de grado  $d := \max\{n_1 + n_2 | a_{n_1 n_2} \neq 0\}$ . Definimos la homogenización de  $f$  como el polinomio homogéneo dado por  $\tilde{F}(z_1, z_2, z_3) = \sum a_{n_1 n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} z_3^{d-n_1-n_2}$ .

Notemos que  $\tilde{F}(z_1, z_2, 1) = f(z_1, z_2)$ .

Sea  $U_i : \{[z_1 : z_2 : z_3] : z_i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2, i = 1, 2, 3$ . Es fácil ver que los conjuntos  $U_i$  son abiertos cuya unión es todo  $\mathbb{P}^2$ . El conjunto  $X := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 | f(z_1, z_2) = 0\}$  definen una curva plana algebraica (afín) en  $\mathbb{C}^2$ , y  $\tilde{X} := \{[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 | \tilde{F}(z_1, z_2, z_3) = 0\}$  define una curva proyectiva plana en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ . La aplicación  $(z_1, z_2) \rightarrow [z_1 : z_2 : 1]$  es un biholomorfismo de  $V(f) = X$  sobre la intersección  $\tilde{X} \cap U_3$  de  $\tilde{X}$  con la parte finita de  $\mathbb{P}^2$ , donde  $U_3 = \{[z_1 : z_2 : z_3] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 | z_3 \neq 0\}$ . Sólo hay un número finito de puntos de  $\tilde{X}$  en la "línea al infinito" dada por  $z_3 = 0$ . A  $\tilde{X}$  se le llama *cerradura proyectiva* de la curva (afín)  $X$ .

## 1.3. Curvas elípticas

### 1.3.1. Funciones elípticas

**Definición 1.3.1** Una función elíptica respecto a una retícula  $\Lambda$  es una función meromorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty$  con la propiedad que  $f(z+w) = f(z)$  para  $w \in \Lambda$  y  $z \in \mathbb{C}$ .

Cada elemento  $v \in \Lambda$  se escribe como  $v = n_1v_1 + n_2v_2$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ . Se tiene que una función elíptica satisface  $f(z + v_1) = f(z + v_2) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . En este caso decimos que  $f$  es doblemente periódica. Esto hace ver que si  $p \in \mathbb{C}$  es un polo (respectivamente un cero) de  $f$ , entonces  $p + v$  es un polo (respectivamente un cero) de  $f$  para todo  $v \in \Lambda$ . Si  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  es una función elíptica, existe una única función  $\tilde{f} : T = \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{CP}^1$  tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{CP}^1 \\ & \searrow \pi & \uparrow \tilde{f} \\ & & T \end{array}$$

La aplicación  $\tilde{f}$  está bien definida, es decir,  $\tilde{f}([z]) = f(z)$  no depende del representante de la clase  $[z]$ . Esto nos permite ver que una función elíptica la podemos definir sobre un toro complejo,  $f : T \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . La siguiente proposición nos caracteriza a las funciones elípticas:

**Lema 1.3.1** *Sea  $f$  doblemente periódica en  $\Lambda$  y  $P$  el paralelogramo fundamental de  $\Lambda$ .*

(i).- *Si  $f$  no tiene polos entonces  $f$  es constante.*

(ii).-  $\sum_{w \in P} \text{Res}_w f = 0$ .

(iii).- *Si  $f \neq 0$ ,  $\sum_{w \in P} \text{ord}_w f = 0$ .*

(iv).- *Si  $f$  no es constante,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$  es sobreyectiva. Si  $n$  es la suma de los órdenes de los polos de  $f$  en  $P$  y  $z_0 \in \mathbb{C}$ , entonces  $f(z) - z_0 = 0$  tiene  $n$  soluciones contando multiplicidades.*

(v).- *Si  $f$  tiene sólo un polo, éste no puede ser simple.*

**Demostración 1** *Ver ([13])*

### 1.3.2. La función de Weierstrass, toros complejos y curvas elípticas.

Notemos que si  $f$  es una función elíptica,  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  una retícula y  $p$  es un polo de  $f$ , entonces se tiene que  $p + w$  es un polo de  $f$  para todo  $w \in \Lambda$ . Vamos a construir una función elíptica que tenga (módulo  $\Lambda$ ) dos polos simples cuya suma de residuos sea cero, ó bien un polo de orden 2 en  $z = 0$  (módulo  $\Lambda$ ) cuyo residuo sea cero.

**Proposición 1.3.1** *La serie doble*

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m^2 + n^2)^t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

*converge si y sólo si  $t > 1$ .*

*Demostración.* Consideremos la integral  $I = \int_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^t}$ . En coordenadas polares  $x = r \sin \theta, y = r \cos \theta$  tenemos que  $I = \int_0^{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{r dr d\theta}{r^{2t}} = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2t-1}}$ . Por el criterio de la integral  $I$  converge si y solo si  $2t - 1 > 1$ . ■

De manera analoga se prueba el siguiente resultado:

**Lema 1.3.2** *Para cualquier retícula  $\Lambda = \mathbb{Z} \cdot w_1 + \mathbb{Z} \cdot w_2$  se tiene que la serie*

$$\sum_{w \in \Lambda - \{0\}} \frac{1}{|w|^t}$$

*converge para  $t \geq 3$ .*

*Demostración.* Ver [13].

**Proposición 1.3.2** *La serie*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda, w \neq 0} \left[ \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right]$$

*converge absolutamente y uniformemente en subconjuntos compactos de  $\mathbb{C}$  que no contengan elementos de  $\Lambda$ .*

**Demostración 2** *Sea  $A$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$  y sea  $M = \{|z| : z \in A\}$ . Si  $z \in A$  y  $w \in \Lambda$  es tal que  $|w| \geq 2M$ , entonces  $|z-w| \geq \frac{|w|}{2}$  y  $|2w-z| \leq \frac{5|w|}{2}$ , por lo tanto*

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right| &= \frac{|z||2w-z|}{|w|^2|z-w|^2} \leq \frac{|z|(2|w|+|z|)}{|w|^2|(z-w)^2|} \\ &\leq \frac{|z|(\frac{5}{2}|w|)}{|w|^2(|w|-|z|)^2} \\ &\leq \frac{10|w||z|}{|w|^2|w|^2} = 10 \frac{|z|}{|w|^3} \\ &\leq \frac{10M}{|w|^3}. \end{aligned}$$

*Por comparación de series y la proposición anterior, es fácil ver que para  $|w| \geq 2M$  esta serie converge absolutamente y uniformemente para todo  $z \in A$ . Dado que sólo se omiten un número finito de elementos  $w \in \Lambda$  que cumplen  $|w| < 2M$  la proposición es inmediata.*

**Corolario 1.3.1** *La serie de Eisenstein de peso  $k$  se define por*

$$G_k = G_k(\Lambda) = \sum_{w \in \Lambda, w \neq 0} \frac{1}{w^k}.$$

*Esta serie converge para  $k \geq 3$ . Además cuando  $k = 2n + 1, n \geq 0$  los términos  $w$  y  $-w$  se cancelan por lo que  $G_k = 0$  para  $k$  impar. La serie de Eisenstein de peso  $2k$  con respecto a  $\Lambda$  esta dada por  $G_{2k} = \sum_{w \in \Lambda, w \neq 0} w^{-2k}$ .*

**La función de Weierstrass** con respecto a la retícula  $\Lambda$  se define por

$$\mathcal{P}(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in \Lambda - \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right).$$

Por convergencia uniforme se tiene que  $\mathcal{P}$  es una función holomorfa bien definida en los puntos  $z \in \mathbb{C} - \Lambda$ , es decir,  $\mathcal{P}$  tiene sus polos en la retícula  $\Lambda$ . Es evidente que si  $w \in \Lambda$ , entonces  $-w \in \Lambda$ , es decir,  $\mathcal{P}$  es par. Por convergencia uniforme en conjuntos compactos podemos derivar término a término la función de Weierstrass, y por lo tanto  $\mathcal{P}'(z) = \sum_{w \in \Lambda} \frac{-2}{(z-w)^3}$ . Si  $v$  varia en la retícula  $\Lambda$ , también varia  $w-v$  en  $\Lambda$ , entonces  $\mathcal{P}'(z+w) = \mathcal{P}'(z)$ , es decir,  $\mathcal{P}'$  es periódica y meromorfa (notemos que  $\mathcal{P}'$  tiene polos de orden 3 en elementos de la retícula), es decir,  $\mathcal{P}'$  satisface la definición de función elíptica. Al considerar primitivas de  $\mathcal{P}'$  tenemos que para todo  $w \in \Lambda$ ,  $\mathcal{P}(z+w) - \mathcal{P}(z) = c(w)$ ,  $c(w)$  una constante que depende de  $w$ . Podemos suponer que  $w \in \Lambda$  es un elemento de la base tal que  $\frac{1}{2}w \notin \Lambda$ . Como  $\mathcal{P}$  es par y periódica, para  $z = -\frac{w}{2}$ , se tiene que  $\mathcal{P}(-\frac{1}{2}w + w) - \mathcal{P}(-\frac{1}{2}w) = \mathcal{P}(\frac{1}{2}w) - \mathcal{P}(-\frac{1}{2}w) = 0$ . Esto prueba que la constante  $c(w) = 0$ , es decir,  $\mathcal{P}$  es una función par de período dos.

Del hecho que  $\mathcal{P}$  es par, entonces su derivada,  $\mathcal{P}'$  es impar. Sea  $z_0 \notin \Lambda$  tal que  $2z_0 \in \Lambda$ , entonces  $\mathcal{P}'(z_0) = \mathcal{P}'(z_0 - 2z_0)$  ( pues  $2z_0 \in \Lambda$ ), por lo tanto  $\mathcal{P}'(z_0) = \mathcal{P}'(z_0 - 2z_0) = \mathcal{P}'(-z_0) = -\mathcal{P}'(z_0)$  ( $\mathcal{P}'$  es impar), esto hace ver que  $2\mathcal{P}'(z_0) = 0$ , es decir,  $\mathcal{P}'(z_0) = 0$ . De esta manera hemos probado el siguiente resultado:

**Lema 1.3.3** *1.- La función de Weierstrass  $\mathcal{P}$  es una función elíptica par de orden dos. Además la derivada de  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}'$ , está dada por*

$$\mathcal{P}'(z) = -2 \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}.$$

*$\mathcal{P}'$  tiene polos de orden tres en los puntos de la retícula  $\Lambda$ , además  $\mathcal{P}'$  es una función elíptica impar de orden tres.*

*2.- Un punto  $z_0 \in \mathbb{C}$  es un cero de  $\mathcal{P}'$  si y sólo si  $z_0 \notin \Lambda$  y  $2z_0 \in \Lambda$ . Hay exactamente tres ceros de  $\mathcal{P}'$  sobre el toro  $\mathbb{C}/\Lambda$  los cuales son ceros simples, es decir, son ceros de orden uno.*

El lema 1.3.3 muestra que  $\mathcal{P}'$  tiene tres raíces (modulo la reticula  $\Lambda$ ) dadas por  $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$ , donde  $w_1, w_2$  son los generadores de la reticula  $\Lambda$ . Como  $\mathcal{P}'$  tiene sólomente un polo de orden tres en 0 (módulo  $\Lambda$ ) y como la suma de los ordenes de los polos más la suma de los ordenes de los ceros contando multiplicidades de una función meromorfa debe ser exactamente cero, se deduce que  $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_1+w_2}{2}$  son los los únicos ceros de  $\mathcal{P}'$  (módulo  $\Lambda$ ) y estos ceros son simples, es decir, cada uno es de orden uno. Sean  $e_1 = \wp(\frac{w_1}{2}), e_2 = \wp(\frac{w_2}{2}), e_3 = \wp(\frac{w_1+w_2}{2})$ .

**Proposición 1.3.3** *La función de Weierstrass satisface la siguiente ecuación diferencial:*

$$(\mathcal{P}'(z))^2 = 4(\mathcal{P}(z))^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3,$$

donde  $g_2 = g_2(\Lambda) = 60G_4(\Lambda)$  y  $g_3 = g_3(\Lambda) = 140G_6(\Lambda)$ .

*Demostración.* Ver [13]

**Definición 1.3.2** *Sea  $P(z)$  es un polinomio complejo cúbico de la forma  $P(z) = cz^3 + \alpha z + \beta$ . Tomando  $c = 4, \alpha = -a$  y  $\beta = -b$ , decimos que  $P(z) = 4z^3 - az - b$  esta en la forma normal de Weierstrass. Supongamos que  $P(z)$  tiene tres raíces distintas  $e_1, e_2, e_3$ , entonces al factorizar tenemos que,  $P(z) = 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$ . Un cálculo directo prueba que  $a_2^3 - 27b_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2$ , como las raíces  $e_1, e_2, e_3$  son distintas se tiene que  $a_2^3 - 27b_3^2 \neq 0$ . Al número  $\Delta_P := a_2^3 - 27b_3^2$  le llamamos discriminante de  $P$ .*

Para el siguiente resultado denotamos por  $g_2 = g_2(\Lambda) = 60G_4(\Lambda)$  y  $g_3 = g_3(\Lambda) = 140G_6(\Lambda)$ .

**Lema 1.3.4** *Consideremos la ecuación diferencial  $(\mathcal{P}'(z))^2 = 4\mathcal{P}(z)^3 - g_2\mathcal{P}(z) - g_3$ . Entonces  $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$  y  $e_1 = \frac{w_1}{2}, e_2 = \frac{w_2}{2}, e_3 = \frac{w_3}{2}, w_3 = w_1 + w_2$  son las raíces de la ecuación  $4z^3 - g_2z - g_3 = 0$ .*

*Demostración.* Sabemos que  $\mathcal{P}'(-z) = -\mathcal{P}'(z)$ , entonces  $\mathcal{P}'(\frac{w_i}{2}) = \mathcal{P}'(\frac{w_i}{2} - w_i) = \mathcal{P}'(-\frac{w_i}{2}) = -\mathcal{P}'(\frac{w_i}{2})$ , es decir,  $\mathcal{P}'(\frac{w_i}{2}) = 0, i = 1, 2, 3$ .  $\mathcal{P}(\frac{w_i}{2})$  es raíz de  $4z^3 - g_2z - g_3$  ya que el punto  $(\mathcal{P}(z), \mathcal{P}'(z)) \in C := \{(z, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = P(z)\}$ , donde  $P(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$ . Sea  $h_i(z) = \mathcal{P}(z) - \mathcal{P}(\frac{w_i}{2})$ .  $h_i$  tiene un cero de al menos orden dos en  $\frac{w_i}{2}$ , pero  $h_i(z)$  tiene sólomente un polo en el paralelogramo fundamental de la reticula, y éste es un polo doble en  $z = 0$ . Por propiedades de funciones elípticas se tiene que  $\frac{w_i}{2}$  es el único cero de  $h_i(z)$ , entonces  $h_i(\frac{w_j}{2}) \neq 0$  para  $i \neq j$ , por lo tanto  $e_i = \mathcal{P}(\frac{w_i}{2}), i = 1, 2, 3$  son raíces distintas, es decir,  $P(z) = 4z^3 - g_2z - g_3$  tiene tres raíces distintas, por lo tanto el discriminante de  $P(z)$ ,  $\Delta_P$ , es distinto de cero, es decir,  $\Delta_P := g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ . ■

Sea  $C_0$  la superficie de Riemann asociada al polinomio irreducible en  $\mathbb{C}^2$ ,  $f(z, w) = w^2 - 4z^3 - g_2z - g_3$ . La aplicación  $\phi = (\mathcal{P}, \mathcal{P}') : \mathbb{C}/\Lambda - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2$  dada por

$\phi(u) = (z, w) := (\mathcal{P}(u), \mathcal{P}'(u))$  induce un isomorfismo entre  $\mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$  y  $C_0$ . Al homogeneizar ( proyectivizar ) la ecuación  $w^2 = 4z^3 - g_2z - g_3$  obtenemos la ecuación  $F(z, w, y) = yw^2 - 4z^3 + g_2y^2z + g_3y^3$ , y los ceros de  $F$  nos da la compactificación de  $C_0$  la cual es una curva proyectiva  $E$  irreducible no singular en  $\mathbb{CP}^2$  de grado tres dada como los ceros de  $F(z, w, y) = yw^2 - 4z^3 + g_2y^2z + g_3y^3$ , es decir,  $E = V(F)$ .

Del hecho que  $\mathcal{P}'$  tiene sólo tres ceros simples, ningún punto  $u \in \mathbb{C}/\Lambda - \{0\}$  satisface simultaneamente  $\mathcal{P}'(u) = \mathcal{P}''(u) = 0$ , por lo que ó bien  $\mathcal{P}$  ó  $\mathcal{P}'$  son cartas locales sobre  $E = \phi(\mathbb{C}/\Lambda)$ . Los puntos al infinito de  $E$  satisfacen la ecuación  $y = 0$ . Al sustituir  $y = 0$  en  $F$  tenemos que  $y = 0, z = 0$ . Como todos los puntos  $(0, w, 0)$  están en la clase del  $[0 : 1 : 0]$  tenemos que  $E$  contiene exactamente un "punto al infinito"  $[0 : 1 : 0]$ . Todo esto hace ver que  $\phi$  se extiende de manera biholomorfa a  $\tilde{\phi} : \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^2$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} z \rightarrow [\mathcal{P}(z) : \mathcal{P}'(z) : 1] \quad \text{si } z \notin \Lambda, \\ 0 \rightarrow [0 : 1 : 0]. \end{array} \right\}$$

**Observación.** La imagen del toro  $\mathbb{C}/\Lambda$  es una curva proyectiva irreducible  $E_\Lambda$  no singular de grado tres. Todo este proceso de asignar a un toro  $\mathbb{C}/\Lambda$  una curva proyectiva irreducible no singular de grado tres se obtiene de fijar una retícula  $\Lambda$ . Tenemos la siguiente siguiente definición natural.

**Definición 1.3.3** Sea  $E := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x^3 + ax + b\}$ . Decimos que  $E$  es una curva elíptica sobre  $\mathbb{C}$  si las raíces  $e_1, e_2, e_3$  del polinomio  $h(x) = x^3 + ax + b$  son todas distintas entre si, es decir,  $e_i \neq e_j, i \neq j$ .

Esto es equivalente a decir que  $E$  es una curva algebraica no singular definida por  $y^2 = x^3 + ax + b, a, b \in \mathbb{C}$ .

Como  $E$  es una curva elíptica no singular esto hace ver que la homogeneización ( compactificación ) de  $E$  en  $\mathbb{CP}^2$  dada por  $F(x, y, z) = zy^2 - x^3 - axz^2 - bz^3 = 0$  es una curva cúbica no singular.

### 1.3.3. El invariante $j$ .

En esta sección vamos a ver cual es el espacio que parametriza a las curvas elípticas.

**Definición 1.3.4** Dos retículas  $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$  son equivalentes y escribimos  $\Lambda_1 \sim \Lambda_2$  si y sólo si existe un número complejo  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$  tal que  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ .

Notemos que  $X_1 = \mathbb{C}/\Lambda_1 \simeq X_2 = \mathbb{C}/(\alpha\Lambda_1)$  mediante la aplicación dada por  $f : X_2 \rightarrow X_1, f(v) = \frac{v}{\alpha}$ . Como cualquier retícula  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  es equivalente a una retícula de la forma  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau$  donde  $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ . Esto permite ver que dos retículas son equivalentes,  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau_1 \sim \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau_2$ , si y sólo si existe un número complejo  $\alpha \neq 0$  tal que  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau_1 = \alpha(\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \tau_2)$ , en particular esto implica que para ciertos enteros  $a, b, c, d, \tau_2 = \frac{a\tau_1 + b}{c\tau_1 + d}$ . Esto hace

ver que para estudiar clases de isomorfismo de curvas elípticas (toros complejos) debemos estudiarlas por medio de transformaciones de Möbius del tipo:

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \tau \in \mathbb{H},$$

para valores reales  $a, b, c, d$ . Un cálculo sencillo nos hace ver que podemos tomar la transformación de Möbius de tal forma que  $ad - bc = 1$ . Consideremos el grupo  $SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$  y el grupo modular  $PSL(2, \mathbb{Z}) := SL(2, \mathbb{Z}) / (\pm I)$ . Tenemos una acción:

$$\mathbb{H} \times PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}, \quad (\tau, M) \rightarrow M \cdot \tau := \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Denotamos por  $[\tau]$  la órbita de  $\tau$  mediante esta clase de equivalencia, y denotamos  $\mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z}) := \{[\tau] \mid \tau \in \mathbb{H}\}$ , el espacio de órbitas de la acción anterior. Sea  $g_i(\tau) = g_i(\Lambda)$  para  $i = 2, 3$  y  $\Delta(\tau) = g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$  (Ver proposición 1.3.3).

**Definición 1.3.5** *Definimos la función el  $j$ -invariante  $j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  como la función dada por  $j(\tau) := \frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)} = \frac{g_2(\tau)^3}{g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2}$ .*

Una de las propiedades que tiene  $j$  es que para una matriz  $M \in PSL(2, \mathbb{Z})$ ,  $j(M \cdot \tau) = j(\tau)$ , esto es,  $j$  es *invariante* por el grupo modular (transformaciones de Möbius). Esto a su vez nos permite tener una aplicación que denotaremos por  $j$ :

$$j : \mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}.$$

**Teorema 1.3.1** *La función  $j : \mathbb{H}/PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$  es un isomorfismo.*

La demostración de este resultado se encuentra en ([6], capítulo 4, sección 4). Este resultado nos dice que el espacio (*moduli*) que parametriza a los toros complejos es isomorfo a  $\mathbb{C}$ . En la próxima sección veremos como esta teoría de curvas elípticas está estrechamente ligada de manera natural con el espacio moduli de funciones racionales de grados dos con un punto periódico de periodo tres.

## Capítulo 2

# Iteración de Funciones Racionales

### 2.1. Iteración de funciones racionales

Comenzemos por describir lo que es la iteración de una función analítica  $f(z)$  de variable compleja. Específicamente, seleccionamos un punto inicial  $z_0 \in \mathbb{C}$  y aplicamos  $f$  repetidamente construyendo, la sucesión de puntos

$$z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f(z_1), \dots$$

a este proceso le llamamos iteración y denotamos por  $f^n(z)$  a la  $n$ -ésima composición de  $f$  consigo misma, es decir:

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$$

así  $z_n = f^n(z)$  y por convención  $f^0 = I$  donde  $I$  es la función identidad.

Ahora podemos hacernos muchas preguntas acerca de este proceso, preguntas como: ¿Para que valores de  $z_0$  converge la sucesión  $\{z_n\}$ ? En caso de que  $z_n$  no converga ¿qué más podemos decir sobre su comportamiento? ¿Qué tanto depende la convergencia de la elección de  $z_0$ ? También podríamos preguntarnos por la historia del punto  $z_0$  representada por la sucesión

$$\dots, z_{-2}, z_{-1}, z_0,$$

donde otra vez  $z_{n+1} = f(z_n)$ . En general para un  $z_0$  dado existen muchos candidatos para  $z_{-1} \in f^{-1}(z_0)$  y aun más para  $z_{-2}$ , y así sucesivamente.

Los puntos fijos de  $f$  juegan un papel muy importante en el desarrollo de nuestra teoría, pero en este momento solo daremos su definición y la clasificación más elemental.

**Definición 2.1.1** Sea  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfa no constante y distinta de la identidad. Un punto  $\xi \in \mathbb{C}$  se llama punto periódico de periodo  $n$  si  $f^n(\xi) = \xi$  y  $f^m(\xi) \neq \xi$  para todo  $1 \leq m < n$ . Si  $n = 1$ , a  $\xi$  le llamamos punto fijo de  $f$ .

Podemos ver de la definición anterior que si  $\xi$  es un punto periódico de periodo  $n$ , estos es,  $f^n(\xi) = \xi$  y si  $n|k$ , entonces  $f^k(\xi) = \xi$ .

Decimos que un punto periódico  $\xi \in \mathbb{C}$  es:

1. Punto atractor si  $|f'(\xi)| < 1$ ;
2. Punto repelente(o repulsor ) si  $|f'(\xi)| > 1$ ; y
3. Punto indiferente si  $|f'(\xi)| = 1$ ;
4. Punto super-atractor si  $|f'(\xi) = 0|$ .

**Definición 2.1.2** Una aplicación racional es una función  $R(z) : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

donde  $P$  y  $Q$  son polinomios primos relativos, es decir, tales que  $(P, Q) = 1$ . Esto implica que  $P$  y  $Q$  no tienen raíces comunes.  $P$  y  $Q$  quedan determinados de forma única hasta multiplicación de  $R$  por un escalar complejo distinto de cero. El grado de  $R$  que denotamos por  $\deg(R)$  es definido por

$$\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\},$$

donde el grado  $\deg(S)$  es el grado usual de un polinomio  $S$ . Si  $R$  es una aplicación constante  $\alpha$  y  $\alpha \neq 0, \infty$ , entonces  $\deg(R) = 0$  y es conveniente que definamos  $\deg(R) = 0$  si  $\alpha$  es  $0$  o  $\infty$ .

**Observación.** Esta definición de grado coincide con la definición topológica de grado cuando consideramos a  $R : \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1$  como aplicación holomorfa ramificada entre superficies de Riemann(Ver definición 1.2.6).

**Proposición 2.1.1** Sea  $R$  una función racional de grado  $d$  y sea  $w \in \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty$ . La ecuación  $R(z) = w$  tiene  $d$  soluciones en  $z$  contando multiplicidades.

**Demostración 3** Supongamos que  $R$  es no constante y que

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

con  $\deg(P) = n$ ,  $\deg(Q) = m$  y recordemos que  $P$  y  $Q$  son primos relativos.

Si  $m = n$ , entonces todos los ceros y polos de  $R$  están en  $\mathbb{C}$ ; hay  $n$  de cada uno (los ceros de  $P$  y  $Q$  respectivamente) y  $R$  tiene el mismo número tanto de ceros como de polos, es decir,  $\deg(R)$ .

Si  $m \neq n$ . Supongamos por ejemplo  $n > m$ . entonces  $R$  tiene  $n$  ceros y  $m$  polos en  $\mathbb{C}$  y  $R(\infty) = \infty$  el número de polos en  $\infty$  es por definición, el número de ceros de la aplicación  $z \mapsto 1/R(1/z)$  en el cero y, se calcula facilmente que este es  $n - m$ . Un argumento similar se usa cuando  $m > n$  y encontramos que en todos los casos,  $R$  tiene precisamente  $\deg(R)$  polos y  $\deg(R)$  ceros en  $\mathbb{C}_\infty$ .

Para  $w \in \mathbb{C}$ , el número de soluciones de  $R(z) = w$  es por definición, el número de ceros de  $R(z) - w$ . Ahora

$$R(z) - w = \frac{P(z) - wQ(z)}{Q(z)},$$

es claro (por el hecho de que  $P$  y  $Q$  son primos relativos) que  $\deg(P(z) - wQ(z)) = \max\{\deg(P(z)), \deg(Q(z))\} = \deg(R(z))$  por lo que  $\deg(R(z) - w) = \deg(R(z))$  de donde concluimos que la ecuación  $R(z) = w$  tiene precisamente  $\deg(R(z))$  soluciones en  $z$  sin importar el valor de  $w \in \mathbb{C}_\infty$ .

■

**Proposición 2.1.2** Sea  $R : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  una aplicación racional entonces tenemos que

$$\deg(R^n) = [\deg(R)]^n,$$

donde  $R^n$  denota la  $n$ -ésima iterada de  $R$ .

**Demostración 4** Este hecho proviene de la relación más general

$$\deg(R \circ S) = \deg(R)\deg(S).$$

Sean  $R$  y  $S$  dos funciones racionales de grados  $p$  y  $q$  respectivamente por la proposición 2.2.1, para todos los valores de  $w \in \mathbb{C}_\infty$  el conjunto  $R^{-1}\{w\}$  tiene precisamente  $p$  valores contando multiplicidades, digamos  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$  y  $S^{-1}\{\xi_j\}$  tiene  $q$  elementos contando multiplicidades entonces  $(RS)^{-1}\{w\}$  tiene exactamente  $pq = \deg(RS)$  elementos contando multiplicidades y por lo tanto  $\deg(R \circ S) = \deg(R)\deg(S)$ .

■

**Definición 2.1.3** Diremos que dos funciones racionales  $R$  y  $S$  son conjugadas si y solo si existe una transformación de Möbius  $g$  tal que  $S = gRg^{-1}$  (composición de funciones).

**Observación.** Notemos que la conjugación nos determina una relación de equivalencia entre funciones racionales. Desde un punto de vista cualitativo, o topológico, solo las propiedades invariantes por conjugación son de nuestro interés, y quizás la más importante de estas sea el grado: Si  $R$  y  $S$  son conjugadas entonces

$$\deg(R) = \deg(S)$$

esta es una consecuencia inmediata de la proposición 2.1.2. Otra propiedad importante de conjugación es respecto a la iteración, es decir, si  $S = gRg^{-1}$ , entonces.

$$S^n = gR^n g^{-1}.$$

Esto significa que podemos transferir un problema concerniente de  $R$  a un problema, posiblemente más simple, concerniente a un conjugado  $S$  y resolverlo en terminos de  $S$ . Si así lo deseamos podemos reescribir la solución en terminos de  $R$ , pero es mejor que procuremos expresar la solución en una forma de conjugación invariante.

Otra propiedad de conjugación es respecto a los puntos fijos: explicitamente, si  $S = gRg^{-1}$ , entonces  $S$  fija  $g(z)$  si y solo si  $R$  fija a  $z$ . Todas estas observaciones son elementales; sin embargo, son importantes por que, en general, no debemos molestarnos en distinguir entre funciones racionales conjugadas.

**Teorema 2.1.1** *Sea  $\xi$  un punto fijo de una aplicación racional  $R$  y sea  $g$  una transformación de Möbius. Entonces  $gRg^{-1}$  tiene el mismo número de puntos fijos en  $g(\xi)$  como  $R$  tiene en  $\xi$ .*

Notemos que la invarianza de número de puntos fijos expresada en el lema anterior nos provee de una definición de puntos fijos en  $\infty$ , para  $R(\infty) = \infty$  podemos conjugar  $R$  de tal manera que  $\infty$  sea transferido a un punto  $\xi$  y contamos los puntos de la función conjugada.

**Teorema 2.1.2** *Si  $d \geq 1$ , una aplicación racional de grado  $d$  tiene precisamente  $d + 1$  puntos fijos en  $\mathbb{C}_\infty$ .*

Demostración. Sea  $R$  una función racional podemos suponer sin perdida de generalidad que  $R$  no fija a  $\infty$  y escribamos  $R = \frac{P}{Q}$  con  $P$  y  $Q$  primos relativos y sea  $\xi$  un punto fijo de  $R$ , como  $R$  no fija  $\infty$  entonces  $Q(\xi) \neq 0$  y  $\deg(P) \leq \deg(Q) = \deg(R)$  además el número de ceros de  $R(z) - z$  en  $\xi$  es exactamente el número de ceros de  $P(z) - zQ(z)$  en  $\xi$  mientras el número de puntos fijos es exactamente el número de soluciones de  $P(z) - zQ(z)$  en  $\mathbb{C}$  que es igual al  $\deg(P(z) - zQ(z)) = d + 1$ . ■

**Definición 2.1.4** *Cada punto fijo  $\xi$  de una aplicación racional  $R$  tiene asociado un número complejo al que llamamos multiplicador  $m(R, \xi)$  de  $R$  en  $\xi$ . Si  $\xi \in \mathbb{C}$  el multiplicador es simplemente la derivada  $R'(\xi)$  y esta es invariante bajo conjugación. Cuando  $\xi = \infty$  entonces conjugamos  $R$  con una transformación de Möbius  $g$  tal que  $g(\xi)$  sea finito y definimos  $m(R, \infty) = m(gRg^{-1}, g(\infty))$*

*Notemos que por los resultados anteriores esta definición es independiente de la elección de  $g$ .*

Entonces el multiplicador  $m(R, \xi)$  de una aplicación racional  $R$  en un punto fijo  $\xi$  esta dado por

$$m(R, \xi) = \begin{cases} R'(\xi) & \text{if } \xi \neq \infty \\ 1/R'(\infty) & \text{if } \xi = \infty \end{cases}$$

en el caso  $\xi = \infty$  conjugamos  $R$  con la transformación de Möbius  $\frac{1}{z}$  y calculamos la derivada en  $\infty$  para obtener la expresión anterior.

**Definición 2.1.5** *Un punto  $p$  es un punto crítico de una aplicación racional  $R$  si  $R'(p) = 0$ , notemos que  $R$  no es inyectiva en ninguna vecindad de  $z$ , es decir, las soluciones de  $R'(p) = 0$  y los polos de  $R$  son de orden mayor o igual que dos, y si  $R$  es no constante, estos puntos son precisamente los puntos en los cuales  $b_p(R) > 1$  (Ver 1.2.6).*

*Un punto  $w$  es un valor crítico de  $R$ , si  $w$  es la imagen de algún punto crítico de  $R$ , esto es, si  $w = R(p)$  para algún punto crítico  $p$ .*

**Teorema 2.1.3** *Un aplicación racional de grado positivo  $d$  tiene a lo mas  $2d-2$  puntos críticos en  $\mathbb{C}_\infty$ . Un polinomio de grado positivo  $d$  tiene a lo mas  $d-1$  puntos críticos en  $\mathbb{C}$ .*

**Demostración 5** *Primero consideremos  $R$  de grado  $d$  tal que  $\infty$  no es un valor ni un punto crítico. Sin perder generalidad podemos suponer que  $R(\infty) = 0$ . Esto último lo podemos hacer ya que siempre podemos conjugar  $R$  con una transformación de Möbius para que  $R$  mande el  $\infty$  al 0. Escribimos*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{az^{d-1} + \dots}{bz^d + \dots}$$

y supongamos  $a, b \neq 0$ . Como

$$R'(z) = \frac{Q(z)P'(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2} = \frac{-abz^{2d-2} + \dots}{Q(z)^2},$$

entonces  $R'(z) = 0$  tiene a lo mas  $2d-2$  soluciones contando multiplicidades.

■

## 2.2. Propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou

A continuación presentaremos los conceptos básicos de la dinámica holomorfa tales como los conjuntos de Fatou, Julia y del conjunto de Mandelbrot. La dinámica de estos conjuntos nos permitira caracterizar las dinamicas de las funciones racionales.

Recordemos que en  $\mathbb{C}_\infty$  una familia de funciones es equicontinua si y solo si es normal.

**Definición 2.2.1** *Sea  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  una función racional no constante y distinta de la identidad. El conjunto de Fatou de  $R$  denotado por  $F(R)$  es el conjunto abierto maximal de  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty$  en el cual la sucesión de iterados  $\{R^n\}$  es equicontinua. El conjunto de Julia de  $R$  se define como el complemento de  $F(R)$  en  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C}_\infty$  y lo denotamos por  $J(R)$ . Esta definición incluye a las funciones analíticas  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .*

**Observación 2.2.1** Por definición el conjunto de Fatou es un conjunto abierto y el conjunto de Julia es su cerrado complementario. En la definición anterior podemos cambiar equicontinua por normal debido a que  $\mathbb{C}_\infty$  es un compacto. Entonces por definición la familia de iteradas de  $\{R^n\}$  no es una familia normal en cualquier punto  $z_0 \in J(R)$ .

**Definición 2.2.2** Sea  $f$  una función analítica sobre  $\mathbb{C}$ . Dado  $z_0 \in \mathbb{C}$ , la órbita de  $z_0$  bajo la aplicación  $f$  es la sucesión de puntos  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$  donde

$$z_n = f(z_{n-1}) \text{ para } n \in \mathbb{N}$$

Nótese que  $z_n = f^n(z_0)$  donde  $f^n(z_0) = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$   $n$  veces.

**Teorema 2.2.1** Sea  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función analítica y supóngase que  $z_0$  es un punto fijo repulsor para  $f$ , entonces la familia de iteradas  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  de  $f$  no es normal en  $z_0$ .

Demostración. Supóngase que la familia de funciones  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  es normal sobre alguna vecindad  $U$  de  $z_0$ . Entonces  $f^n(z_0) = z_0$  para toda  $n$ , se sigue que  $f^n(z)$  no converge a  $\infty$  en  $U$ . Por lo tanto existe alguna subsucesión de  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$ ,  $\{f^{n_i}\}_{i=1}^\infty$  que converge uniformemente a una función  $g$  sobre  $U$ , así  $|(f^{n_i})'(z_0)| \rightarrow |g'(z_0)|$  por convergencia analítica. Sea  $\lambda = f'(z_0)$ . Tenemos que  $|(f^{n_i})'(z_0)| = |(f)'(z_0)| \cdot \dots \cdot |(f)'(z_0)| = |\lambda|^{n_i} \rightarrow \infty$  ya que  $|\lambda| > 1$  por ser  $z_0$  un punto repulsor de  $f$ , pero esto es una contradicción porque  $|(f^{n_i})'(z_0)| \rightarrow |g'(z_0)|$ .

Por lo tanto la familia de iteradas de  $f$  no es normal en  $z_0$ . ■

**Corolario 2.2.1** Sea  $f : U \rightarrow U$  una función analítica y supóngase que  $z_0$  es un punto periódico repulsor de  $f$ . Entonces la familia de iteradas  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  de  $f$  no es normal en  $z_0$ .

**Teorema 2.2.2** Sea  $f$  una función analítica. Sea  $z_0 \in J(f)$  y sea  $U$  una vecindad de  $z_0$ . Entonces  $\bigcup_{n=1}^\infty f^n(U)$  omite a lo más un punto en  $\mathbb{C}$ .

Demostración. Si  $f^n(U)$  omite dos puntos, entonces  $\{f^n\}_{n=1}^\infty$  será una familia normal en  $U$  por el teorema de Montel, lo cual es una contradicción. ■

**Corolario 2.2.2** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto de Fatou  $F(f^n)$  de la  $n$ -ésima iterada coincide con el conjunto de Fatou  $F(f)$ .

Demostración. Sea  $z \in F(f)$  y sea  $U$  una vecindad de  $z$  sobre la cual las iteradas  $f^n(U)$  formen una familia normal. Por el teorema de la función abierta  $f^n(U)$  es abierto, si  $\{f^{n_i}\}$  es una subsucesión convergente en  $U$ ,  $\{f^{n_i-1}\}$  es una subsucesión convergente sobre  $f(U)$ . Similarmente  $f^{-1}(U)$  es un abierto y sobre cada componente de  $f^{-1}(U)$ ,  $\{f^{n_i+1}\}$  es una subsucesión convergente. Por lo tanto para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto de Fatou  $F(f^n)$  de la  $n$ -ésima iterada coincide con el conjunto de Fatou  $F(f)$ . ■

**Corolario 2.2.3** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , el conjunto de Julia  $J(f^n)$  de la  $n$ -ésima iterada coincide con el conjunto de Julia  $J(f)$ .

**Teorema 2.2.3** Sea  $R : U \rightarrow U$  una aplicación racional si  $\deg(R) \geq 2$ , entonces el conjunto de Julia  $J(R)$  es no vacío.

Demostración: Si  $J(R)$  es vacío entonces la familia  $\{R^n\}$  es normal en  $\mathbb{C}_\infty$  y como la función grado es continua esto implica existe una subsecuencia de funciones de  $R^n$  en la cual cada función tiene el mismo grado. Sin embargo  $\deg(R^n) = [\deg(R)]^n$  y esto implica que  $R$  tiene grado uno contrario a nuestra suposición inicial. ■

### 2.2.1. Clasificación de componentes de Fatou

Antes de clasificar las componentes de Fatou conviene dar dos caracterizaciones muy importantes del conjunto de Julia para funciones polinomiales  $f$ . La caracterización 1 que daremos es válida también para funciones racionales en general, pero la caracterización 2 solo es válida para funciones polinomiales ya que para funciones racionales el punto al  $\infty$  no necesariamente es un punto superatractor, ni siquiera atractor (ver [2]).

**Definición 2.2.3** El conjunto de Julia lleno de un polinomio  $f$ , denotado por  $K(f)$ , es el conjunto de puntos que sus órbitas son acotadas bajo la iteración de  $f$ .

#### Caracterización 1.

El conjunto de Julia  $J(f)$  de cualquier función polinomial  $f$  es igual a la cerradura del conjunto de puntos periódicos repulsores de  $f$ .

#### Caracterización 2.

Si el conjunto de Julia no es todo el plano complejo, entonces el conjunto de Julia  $J(f)$  es la frontera del conjunto de Julia lleno  $K(f)$ , es decir, la frontera del conjunto de órbitas acotadas y el de las órbitas que escapan al infinito.

**Definición 2.2.4** Supóngase que  $z_0$  es un punto periódico de  $f$  de periodo  $n$ , entonces la órbita de  $z_0$  es:

1. Atractora si  $0 < |(f^n)'(z_0)| < 1$ .
2. Superatractora si  $(f^n)'(z_0) = 0$ .
3. Repulsora si  $|(f^n)'(z_0)| > 1$ .
4. Neutral si  $|(f^n)'(z_0)| = 1$ .

El número  $\lambda = (f^n)'(z_0)$  es el multiplicador de la órbita periódica (notemos que esto es una generalización del multiplicador de puntos fijos y además nos da una definición más detallada de los mismos).

Del hecho que el conjunto de Fatou es completamente invariante, la imagen de una de sus componentes conexas es otra componente conexa. Una componente conexa  $U$  del conjunto de Fatou es periódica si existe un entero  $n$  tal que  $f^{(n)}(U) = U$ . La dinámica de  $f^{(n)}$  en una componente periódica  $U$  puede ser una de las siguientes:

- Existe un punto fijo atractor de  $f^n$  en  $U$  y  $U$  está contenido en el dominio de atracción del punto fijo.
- Existe un punto super-atractor de  $f^n$  en  $U$  y  $U$  está contenido en el dominio de atracción del punto fijo.
- Existe un único punto fijo de  $f^n$  en  $\partial U$ , el cual es racional indiferente, y  $U$  está contenido en el dominio de atracción de este punto fijo.
- La restricción de  $f^n$  a  $U$  es conformemente conjugada a una rotación irracional del disco unitario abierto en el mismo dado por  $z \rightarrow \lambda z$ .
- La restricción de  $f^n$  a  $U$  es conformemente conjugada a una rotación irracional de una región anular en si mismo.

**Definición 2.2.5** Decimos que un conjunto  $A$  es errante si  $f^n(A) \cap f^m(A) = \emptyset$  para toda  $n > m \geq 0$ .

Un teorema muy importante sobre componentes errantes es el siguiente (ver [11]):

**Teorema de Sullivan.** El conjunto de Fatou de una aplicación racional no tiene componentes errantes, dicho de otra manera, cada componente del conjunto de Fatou es eventualmente periódica.

## 2.2.2. El Conjunto de Mandelbrot

En esta sección consideraremos un polinomio cuadrático de la forma  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ .

**Proposición 2.2.1** Para cada polinomio cuadrático  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$  existe,  $c \in \mathbb{C}$ , tal que  $P$  y  $P_c = z^2 + c$  son conjugados via una transformación de Mobius y de hecho esta conjugación es una función afín de la forma  $az + b$  con  $a, b \in \mathbb{C}$ .

**Demostración 6** Sean  $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ ,  $P_c = z^2 + c$  y  $\psi = az + b$  con  $a_0, a_1, a_2, a, b, c \in \mathbb{C}$  tales que  $aa_1 \neq 0$ . Queremos probar que  $(\psi \circ P)(z) = (P_c \circ \psi)(z)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \psi(a_0 + a_1z + a_2z^2) &= (\psi(z))^2 + c. \\ a(a_0 + a_1z + a_2z^2) + b &= (az + b)^2 + c. \\ aa_0 + b + aa_1z + aa_2z^2 &= a^2z^2 + 2abz + b^2 + c. \end{aligned}$$

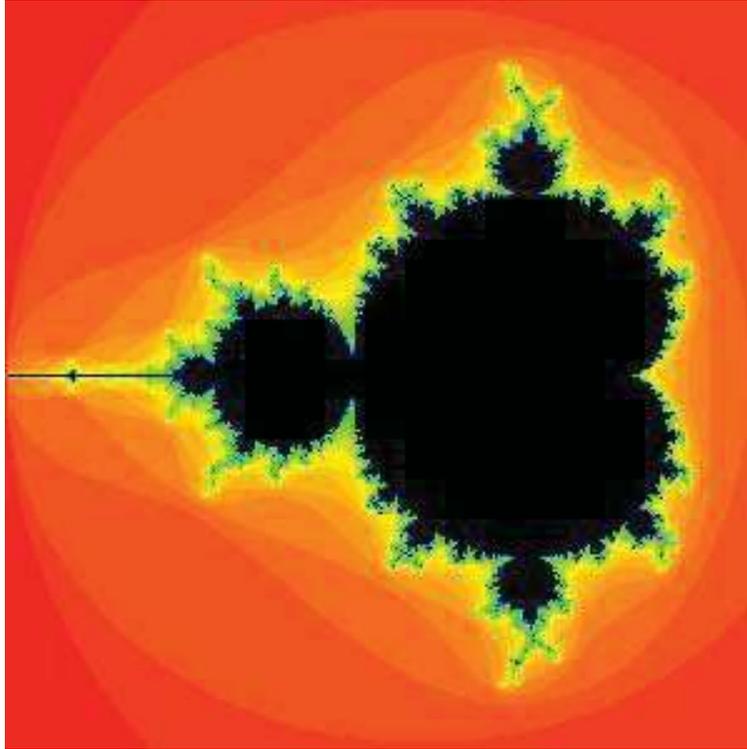
De aquí se obtienen las siguientes ecuaciones:  $aa_0 + b = b^2 + c$ ,  $aa_1 = 2ab$ ,  $aa_2 = a^2$ . Resolviendo obtenemos que  $a = a_2$ ,  $b = \frac{a_1}{2}$  y  $c = a_0a_2 + \frac{a_1}{2} - \frac{a_1^2}{2}$ .

■.

**observación.** Esta proposición nos muestra que el estudio dinámico de los polinomios cuadráticos lo podemos reducir al estudio de los polinomios de la forma  $P_c$ , con la ventaja de que estos últimos están parametrizados por  $\mathbb{C}$ .

**Definición 2.2.6** El conjunto de Mandelbrot en el  $c$  - plano se define como  $\mathcal{M} = \{c : K(f_c) \text{ es conexo}\} \subset \mathbb{C}$ .

Recordemos que  $K(f)$  denota el conjunto de Julia lleno asociado a  $f$  (ver definición 2.2.3). Notemos que el conjunto de Mandelbrot (espacio de parámetros) es el conjunto  $\mathcal{M}$  de todos los  $c$ -valores para los cuales la órbita del punto crítico bajo  $f_c$  es acotada. Si  $|c| > 2$ , entonces se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_c^n(z) = \infty$ . De esto resulta que  $\mathcal{M} \subset \overline{D_2(0)} = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 2\}$ . La estructura de este conjunto al igual que la de los conjuntos de Julia es muy complicada como se aprecia en la figura:



**Definición 2.2.7** Una aplicación racional  $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grado  $d \geq 2$  se dice hiperbólica si las órbitas de los puntos críticos convergen a los ciclos periódicos atractores de  $R$ .

Aplicando esta definición a nuestro polinomio  $f_C(z) = z^2 + c$  tenemos los siguientes conceptos.

**Definición 2.2.8** • Una componente  $U$  del interior del conjunto de Mandelbrot se llama hiperbolica si  $f_c(z)$  es hiperbólico para alguna  $c \in U$ .

- La parte hiperbolica del conjunto de Mandelbrot consiste en todos los  $c$ -valores para los cuales  $f_c$  es hiperbólico.

- Una componente conexa  $U$  del interior del conjunto de Mandelbrot se llama hiperbolica si  $f_c(z)$  es hiperbólico para alguna  $c \in U$ . A las componentes hiperbólicas de  $\mathcal{M}$  también se les llaman bulbos.

Mediante cálculos hechos con computadora se obtuvieron los periodos de las órbitas para ciertos  $c$ , dichos periodos corresponden a los bulbos que contienen a cada  $c$ .

$c$	Periodo del Bulbo
$-0,12 + 0,75i$	3
$-0,5 + 0,56i$	5
$0,28 + 0,54i$	4
$0,38 + 0,333i$	5
$-0,62 + 0,43i$	7
$-0,36 + 0,62i$	8
$-0,67 + 0,34i$	9
$0,39 + 0,22i$	6

Para calcular el número de componentes hiperbolicas, es decir, el número de bulbos, de periodo  $n$  utilizamos la la definición de centro de un bulbo:

**Definición 2.2.9** Decimos que  $c$  es el centro de un bulbo de periodo  $n \iff f_c^n(0) = 0$

Notemos que la definición anterior nos ayuda a localizar los centros de los bulbos de periodo  $n$ , pero claro que un bulbo de periodo  $n$  también lo es de  $2n, 3n, \text{etc}, \dots$  por lo que tendremos que descartar algunas raíces de  $f_c^n(0) = 0$  para encontrar los bulbos de periodo exactamente  $n$ . Para los casos  $n = 1, 2, 3$  tenemos que:

$$\begin{aligned} f_c^1(0) &= c. \\ f_c^2(0) &= c^2 + c. \\ f_c^3(0) &= c^4 + 2c^3 + c^2 + c. \end{aligned}$$

Los bulbos estaran dados por las raíces de los polinomios:

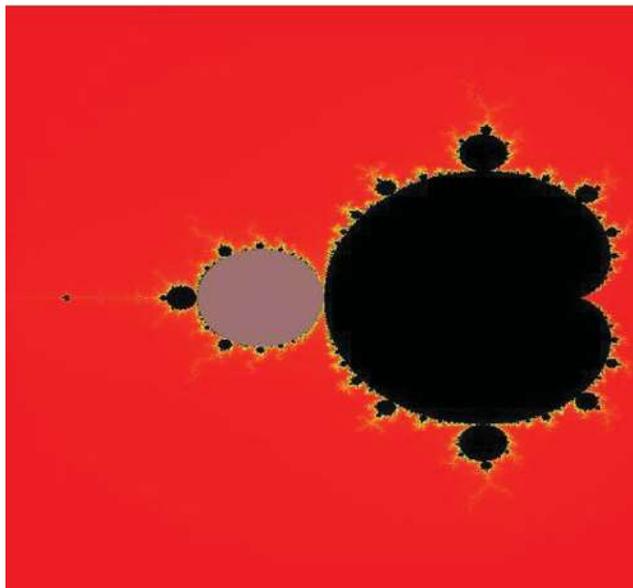
$$P_c = c$$

para el caso  $n = 1$  solo hay un bulbo donde el centro esta en  $c = 0$

$$Q_c = c + 1$$

para el caso  $n = 2$ , tenemos un solo bulbo y el centro esta en  $c = -1$

$$T_c = c^3 + 2c^2 + c + 1$$

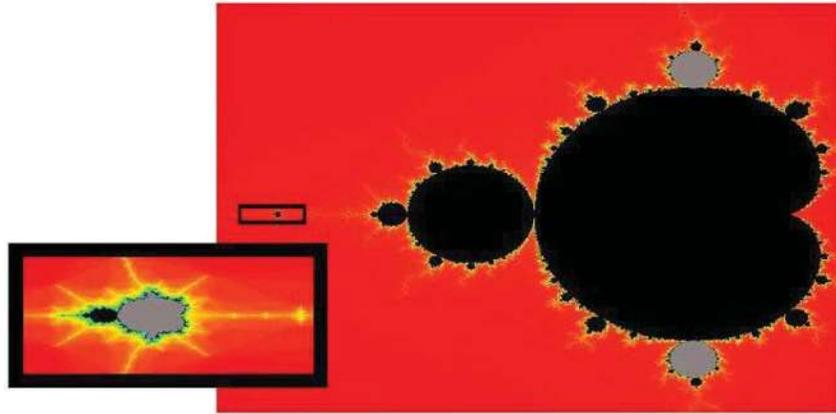


para el caso  $n = 3$  hay tres bulbos y los centros de estos bulbos (componentes hiperbólicas) estan en:

$$c_1 = \frac{(9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (-\sqrt{3}i - 1) + 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{5}{6}} i - 4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{6}} (9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}}}{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{6}} (9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}},$$

$$c_2 = \frac{(9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (\sqrt{3}i - 1) - 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{5}{6}} i - 4 \cdot 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{6}} (9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}}}{6 \cdot 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{6}} (9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}},$$

$$c_3 = \frac{(9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} - 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{6}} (9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{6}} (9\sqrt{23} - 25\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}}]$$



## Capítulo 3

# El Moduli de aplicaciones racionales sobre la esfera de Riemann.

### 3.1. Descripción del espacio $\mathcal{Rat}_d$ de funciones racionales de grado $d$ .

Para cada entero  $d \geq 1$  consideramos el espacio  $\mathcal{Rat}_d$  de todas las funciones racionales  $R = \frac{p}{q}$  de grado  $d$ .

Para  $k \in \mathbb{N}$ , sea  $P_k$  el espacio de polinomios complejos de grado  $k$  con coeficientes complejos. Como espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ ,  $P_k$  tiene dimensión  $k+1$ , el cual está generado por  $\{1, z, z^2, \dots, z^k\}$ . Denotando por  $O$  el polinomio idénticamente cero, entonces se tiene que  $P_k \times P_k - \{(O, O)\} \simeq \mathbb{C}^{2k+2} - \{(0, 0, \dots, 0)\}$ . Entonces la proyectivización de  $P_k \times P_k - \{(O, O)\}$  es lo mismo que proyectivizar  $\mathbb{C}^{2k+2} - \{(0, 0, \dots, 0)\}$ , es decir,  $\mathbb{P}(P_k \times P_k - \{(O, O)\}) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{2k+1}$ .

Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $p(z) = a_n z^n + \dots + a_0 \in P_n$ ,  $q(z) = b_m z^m + \dots + b_0 \in P_m$ . Sean  $z_1, \dots, z_n$  las raíces de  $p$  y  $w_1, \dots, w_m$  las raíces de  $q$ . Definimos la función Resultante, Result, dada por:

$$\text{Result}_{n,m} : P_n \times P_m \rightarrow \mathbb{C}, \quad (p, q) \rightarrow a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (z_i - w_j)$$

Notemos que  $\text{Result}_{n,m}(p, q) = 0$  si y sólo si  $p(z)$  y  $q(z)$  tienen al menos una raíz en común.

Sean  $p(z) = a_d z^d + \dots + a_0, q(z) = b_d z^d + \dots + b_0 \in P_d$ . Consideremos la función  $\tau : P_d \times P_d - \{(O, O)\} \simeq \mathbb{C}^{2d+2} - \{(0, 0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathcal{Rat}_d$  dada por  $\tau(p, q) = \frac{p}{q}$ . Notemos que si  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ ,  $\tau(\lambda p, \lambda q) = \tau(p, q)$ , en particular  $\tau$  no es inyectiva. Sea  $\mathcal{W}_d := \{f = \frac{p}{q} \in \mathcal{Rat}_d : \text{Result}(p(z), q(z)) = 0\}$ .

Para  $f(z) = \frac{a_d z^d + \dots + a_0}{b_d z^d + \dots + b_0} \in \mathcal{Rat}_d$ , definimos  $\pi : \mathcal{Rat}_d \rightarrow (\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1} - \mathcal{W}_d)$  dada por

$$\pi(f) = \pi\left(\frac{a_d z^d + \dots + a_0}{b_d z^d + \dots + b_0}\right) := [a_d : \dots : a_0 : b_d : \dots : b_0].$$

Es fácil ver que  $\pi$  es un isomorfismo y por lo tanto tenemos que  $\mathcal{Rat}_d$  tiene una estructura compleja de dimensión  $2d+1$  con la topología euclidiana. Por otra lado, como  $\mathcal{W}_d$  viene determinada por ecuaciones de la forma  $\text{Result}(p, q) = 0$ , entonces  $\mathcal{W}_d$  es un conjunto algebraico en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1}$ , esto es,  $\mathcal{W}_d$  es un cerrado en la topología de Zariski en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1}$ , por lo tanto con esta topología  $\mathcal{Rat}_d$  es un abierto de Zariski en  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2d+1}$  (Ver definición 1.2.7). En este sentido un elemento arbitrario de  $\mathcal{Rat}_d$  se le llama génerico.

Para  $d = 1$  el espacio  $\mathcal{Rat}_1$  puede ser identificado con el grupo modular  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/(\pm I)$ . Nosotros nos centraremos en el caso  $d = 2$ , donde el espacio  $\mathcal{Rat}_2$ , consiste de todas las funciones racionales cuadráticas

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}$$

por lo que identificamos  $\mathcal{Rat}_2$  como un conjunto abierto del espacio complejo proyectivo  $\mathbb{C}\mathbb{P}^5$  que consiste de los puntos  $[a_0 : a_1 : a_2 : b_0 : b_1 : b_2] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^5$  para los cuales el resultante

$$\text{Result}(p, q) = \det \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} \neq 0$$

### 3.1.1. El Espacio $\mathcal{M}_2$ de Clases de Conjugación Holomorfas

Sea  $\nu_d(n)$  el número de puntos periodicos de periodo  $n$  de un polinomio complejo  $f$  de grado  $d \geq 2$  sabemos que sus puntos fijos estan dados por la ecuación  $f^n(z) - z = 0$  de grado  $d^n$  y que los puntos fijos de periodo exactamente  $m$  dividen  $n$  si

$$d^n = \sum_{m|n} \nu_d(m).$$

Nosotros podemos calcular facilmente de manera inductiva  $\nu_d(n)$  por ejemplo,

$$\begin{aligned} d &= \sum_{m|1} \nu_d(1) \\ d &= \nu_d(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2 &= \sum_{m|2} \nu_d(m) \\
d^2 &= \nu_d(1) + \nu_d(2) \\
d^2 &= d + \nu_d(2) \\
\nu_d(2) &= d^2 - d \\
\nu_d(3) &= d^3 - d \\
\nu_d(4) &= d^4 - d^2
\end{aligned}$$

Ahora regresemos al estudio de las funciones racionales cuadráticas, escojamos por ejemplo la siguiente forma normal de una aplicación racional de grado dos:

$$f(z) = \frac{1}{a(z + z^{-1}) + b}$$

y escribamos la  $n$ -ésima iterada de  $f$ ,  $f^n$ , como el cociente de dos polinomios  $f^n(z) = \frac{p_n(z)}{q_n(z)}$  con  $\deg(q_n) = 2^n \geq \deg(p_n)$ . Las soluciones de  $f^n(z) = z$ , es decir, las soluciones de la ecuación

$$zq_n(z) - p_n(z) = 0$$

son los puntos fijos de  $f^n(z)$  que tiene grado  $2^n + 1$  y definimos los polinomios  $\Phi_n$  como los polinomios tales que las raíces de  $\Phi_n$  son los puntos periódicos de periodo exactamente  $n$  y entonces

$$zq_n(z) - p_n(z) = \prod_{m|n} \Phi_m$$

y además podemos calcular inductivamente  $\Phi_n$  como sigue

$$\Phi_n = \frac{zq_n(z) - p_n(z)}{\prod_{\substack{m \neq n \\ m|n}} \Phi_m}$$

donde  $\Phi_1(z) = zq(z) - p(z)$ . Notemos que  $\Phi_1(z)$  tiene grado 3 y  $\Phi_n(z)$  tiene grado  $\nu_2(n)$ . En particular,  $\Phi_3(z)$  tiene grado  $\nu_2(3) = 2^3 - 2 = 6$ .

**Definición 3.1.1** *Decimos que  $f, g \in \mathcal{Rat}_d$  son conformemente equivalentes si existe un biholomorfismo  $h : \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{P}^1$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ .*

El grupo  $PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/(\pm I)$  actúa en  $\mathcal{Rat}_d$  por conjugación:

$$PSL(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{Rat}_d \rightarrow \mathcal{Rat}_d, (g, f) \rightarrow g \circ f \circ g^{-1} \in \mathcal{Rat}_d.$$

Al espacio cociente de esta acción lo denotamos por

$$\mathcal{M}_d := \mathcal{Rat}_d / PSL(2, \mathbb{C}),$$

A este cociente le llamamos *espacio moduli de transformacionales racionales de grado d*. Por medio de esta acción decimos que dos funciones en  $\text{Rat}_d$  son holomorfaamente conjugadas si pertenecen a la misma orbita.

**Observaciones.-** (i).- Para el caso  $d = 2$ , tenemos que todo polinomio cuadrático es conjugado a un polinomio de la forma  $P_c(z) = z^2 + c, c \in \mathbb{C}$  (Ver proposición 2.2.1). Así para estudiar  $\mathcal{M}_2$  debemos estudiar la dinámica del conjunto de Mandelbroth.

(ii).- La acción anterior no es libre. Por ejemplo  $g(z) = -z$  actúa trivialmente en cualquier función impar, por ejemplo si  $f(z) = a(z + z^{-1})$ , entonces  $gfg^{-1} = -(-z + (-z)^{-1}) = z + z^{-1}$ . Por lo que es posible que el espacio cociente  $\mathcal{M}_2$  tenga singularidades, sin embargo en esta sección veremos que es posible identificar  $\mathcal{M}_2$  con el espacio afín  $\mathbb{C}^2$ .

Para describir la estructura afín de  $\mathcal{M}_2$  primero estudiemos los puntos fijos. Toda aplicación  $f \in \text{Rat}_2$  tiene tres puntos fijos  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ . Sea  $\mu_i$  el multiplicador de  $f$  en  $z_i, i = 1, 2, 3$ , es decir,  $\mu_i = f'(z_i), i = 1, 2, 3$ . Sean

$\sigma_1 = \sigma_1(\mu_1, \mu_2, \mu_3) := \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \sigma_2 = \sigma_2(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3, \sigma_3 = \sigma_3(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \mu_1\mu_2\mu_3$  las funciones elementales simétricas de estos multiplicadores, es decir  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$  son las raíces del polinomio mónico

$$z^3 - \sigma_1 z^2 + \sigma_2 z - \sigma_3 = 0. \quad (3.1)$$

En general si tenemos un polinomio mónico de grado  $n$

$$P(z) = (z - t_1)(x - t_2) \cdots (z - t_n) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$$

entonces tenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} a_0 &= (-1)^n t_1 t_2 \cdots t_n \\ a_1 &= (-1)^{n-1} t_1 t_2 + t_1 t_3 + \cdots + t_{n-1} t_n \\ &\vdots \\ a_{n-r} &= (-1)^r \sum_{i_1 < \cdots < i_r} t_{i_1} \cdots t_{i_r} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= (-1)^1 \sum_{i=1}^n t_i \end{aligned}$$

Al polinomio

$$\sigma_r = \sum_{i_1 < \cdots < i_r} t_{i_1} \cdots t_{i_r}$$

se le llama  $r$ -ésimo polinomio simétrico elemental en  $t_1, \dots, t_n$ .

**Proposición 3.1.1** *Sea  $f$  una función racional de grado  $d$  y  $\mu_i$  los multiplicadores de sus respectivos puntos fijos, entonces,  $\mu_i = 1$  si y solo si  $z_i$  es un punto fijo múltiple tal que  $z_i = z_j$  para algún  $i \neq j$ .*

*Demostración.* Como ya hemos visto toda función racional de grado  $d$  tiene  $d + 1$  puntos fijos entonces la ecuación  $f(z) - z = 0$  tiene  $d + 1$  raíces contando multiplicidades, es decir,  $d + 1$  puntos fijos, entonces podemos escribir  $f(z) - z = a_0 \prod_{i=1}^{d+1} (z - z_i)$  y al derivar obtenemos  $f'(z) - 1 = a_0 \sum_{i=1}^{d+1} \prod_{j=1, j \neq i}^{d+1} (z - z_j)$  con lo que concluimos que  $f'(z_i) - 1 = 0 \Leftrightarrow z_i = z_j$  para  $i \neq j$ , es decir,  $\mu_i = 1 \Leftrightarrow z_i = z_j$  para  $i \neq j$ . ■

**Definición 3.1.2** Sea  $f$  una aplicación racional no constante. Sea  $p$  un punto fijo de  $f$ , es decir,  $f(p) = p$ . El índice holomorfo,  $\text{indh}_p(f)$ , de  $f$  en  $p$ , se define como el residuo en  $p$  de la 1-forma  $\frac{dz}{z-f(z)}$ , es decir,  $\text{indh}_p(f) := \text{res}_p(\frac{dz}{z-f(z)})$ , el cual es independiente de la elección de coordenada. En este caso dicho índice es igual a  $\frac{1}{1-\lambda}$  si el multiplicador  $\lambda$  en  $p$  es diferente de uno.

**Lema 3.1.1** Sea  $f$  una función racional de grado dos con multiplicadores  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ . Estos tres multiplicadores determinan  $f$  hasta conjugación, y solo están sujetos a la siguiente condición

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2 = 0, \quad (3.2)$$

o en otras palabras

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2. \quad (3.3)$$

Por lo tanto el espacio  $\mathcal{M}_2$  con coordenadas  $(\sigma_1, \sigma_2)$  es canónicamente isomorfo a  $\mathbb{C}^2$ .

**Demostración 7** A veces usaremos la notación  $\langle f \rangle = \langle \mu_1, \mu_2, \mu_3 \rangle$  para la clase de conjugación de la aplicación  $f$  que tiene puntos fijos con multiplicadores  $\mu_1, \mu_2$  y  $\mu_3$ . Si  $\mu_1 \mu_2 \neq 1$  entonces podemos resolver (3.2) para

$$\mu_3 = \frac{2 - \mu_1 - \mu_2}{1 - \mu_1 \mu_2} \quad (3.4)$$

Ahora si  $\mu_1 \mu_2 = 1 \Rightarrow \mu_1 = 1/\mu_2$  y 3.2)- se reduce a

$$\mu_3 - \left(\frac{1}{\mu_2} + \mu_2 + \mu_3\right) + 2 = \frac{-1 - \mu_2^2 + 2\mu_2}{\mu_2} = \frac{-(\mu_2 - 1)^2}{\mu_2} = 0,$$

de donde concluimos  $\mu_2 = \mu_1 = 1 \Rightarrow z_1 = z_2$  es un doble punto fijo. En este caso  $\mu_3$  puede ser arbitrario.

Primero supongamos que  $\mu_i \neq 1$  es decir no hay punto fijo doble. Tenemos la identidad fundamental

$$\sum \frac{1}{1 - \mu_i} = 1 \quad (3.5)$$

la cual se prueba de la siguiente manera:

Sabemos por variable compleja que  $\int_{\mathbb{C}_\infty} \frac{dz}{z-f(z)} = 2\pi i \sum \text{residuos de } (\frac{1}{z-f(z)})$ . Notemos que los polos de  $\frac{1}{z-f(z)}$  son exactamente los puntos fijos de  $f$ . Para calcular el residuo en  $z_1$  por ejemplo, por un lado evaluamos  $(z-z_1)\frac{1}{z-f(z)}$  en  $z_1$  para obtener  $\frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}$ . Pero por otro lado, esto es exactamente  $\frac{1}{1-\mu_1}$ . Así la integral anterior es igual a  $2\pi i \sum \frac{1}{1-\mu_i}$ . Ahora notemos que

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-f(z)} \right) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{-f(z)}{z(z-f(z))}.$$

Por medio de una transformación de Möbius podemos suponer que  $f(\infty)$  es finito, por lo tanto el límite anterior es igual a 0. Así tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}_\infty} \frac{dz}{z-f(z)} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z-f(z)} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Y conseguimos la igualdad  $\sum \frac{1}{1-\mu_i} = 1$ . Sustituyendo esta última igualdad en (3.2) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\mu_1} + \frac{1}{1-\mu_2} + \frac{1}{1-\mu_3} &= 1 \\ (1-\mu_2)(1-\mu_3) + (1-\mu_1)(1-\mu_3) + (1-\mu_1)(1-\mu_2) &= (1-\mu_1)(1-\mu_2)(1-\mu_3) \\ 3 + \mu_2\mu_3 - \mu_2 - \mu_3 + \mu_1\mu_3 - \mu_1 - \mu_3 + \mu_1\mu_2 - \mu_1 - \mu_2 &= 1 + \mu_1\mu_2 - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 \\ &\quad - \mu_1\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 \\ 2 - 2(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= -(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) - (\mu_1\mu_2\mu_3) \\ 2 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) &= -(\mu_1\mu_2\mu_3) \\ \mu_1\mu_2\mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2 &= 0 \end{aligned}$$

que es el resultado esperado.

Ahora si suponemos  $\mu_1 = 1$  entonces  $z_1$  es un punto fijo doble es decir  $z_1 = z_2$  y  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  y veamos que

$$\mu_1\mu_2\mu_3 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + 2 = \mu_3 - (2 + \mu_3) + 2 = 0$$

es decir, se cumple (3.2)

Ahora veamos que  $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$  determinan  $f$  hasta conjugación. Primero consideremos una aplicación  $f$  con al menos dos puntos fijos distintos. Después conjugamos con una transformación de Möbius tal que estos dos puntos fijos sean 0 y  $\infty$ , es fácil ver que  $f$  es de la forma

$$f(z) = z \frac{az+b}{cz+d},$$

con  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , y  $ab - bc \neq 0$  entonces  $f$  tiene grado dos. Despues multiplicando el numerador y denominador por una constante, podemos asumir que  $d = 1$ . Si reemplazamos  $f(z)$  por  $f(kz)/k$ , el efecto de multiplicar  $a$  y  $c$  por  $k$ . Asi hay un único valor de  $k$  con el efecto de reemplazar  $a$  por 1 y esto nos da la siguiente forma normal

$$f(z) = z \frac{z+b}{cz+1} \quad \text{con } 1 - bc \neq 0 \quad (3.6)$$

con  $b = \mu_1$  y  $c = \mu_2$  son evidentemente los multiplicadores en 0 y  $\infty$  respectivamente. Asi  $f$  esta unicamente determinada hasta conjugación holomorfa por los multiplicadores  $\mu_1$  y  $\mu_2$  asociados a cualquiera dos puntos fijos distintos. Aqui el determinante  $1 - \mu_1\mu_2$  no puede anularse, pero no hay otras restricciones en  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . El multiplicador del tercer punto fijo esta determinado por 3.2.

Ahora supongamos que  $f$  tiene un solo punto fijo. Despues podemos conugar a  $f$  con una transformación de Möbius tal que el punto fijo  $z_1 = z_2 = z_3$  es el punto al infinito, y con  $f^{-1}(\infty) = \{0, \infty\}$ . Sabemos por variable compleja que si una función holomorfa  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  satisface que  $\lim_{z \rightarrow \infty} p(z) = \infty$  entonces  $p$  un polinomio complejo. Esto implica que  $f$  es de la forma  $f(z) = p(z)/z$  para algún polinomio cuadrático  $p(z)$ . La diferencia  $f(z) - z = \frac{p(z) - z^2}{z}$  no puede tener ceros en el plano finito, asi  $p(z) - z^2$  debe ser constante de modo que  $f(z) = z + \frac{c}{z}$  con puntos criticos  $\pm\sqrt{c}$  si normalizamos de modo tal que los puntos criticos de  $f$  sean  $\pm 1$  entonces  $c = 1$  y

$$f(z) = z + z^{-1}. \quad (3.7)$$

En este caso el multiplicador en el único punto fijo esta dado por  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$  y otra vez las clases de conjugación estan unicamente determinadas por estos multiplicadores.

Evidentemente podemos hacer una tripleta que cumpla con 3.1. Finalmente notemos que la coleccion no ordenada de multiplicadores  $\{\mu_i\}$  es determinada por las tres funciones elementales simetricas  $\sigma_j = \sigma_n(\mu_1, \mu_2, \mu_3), j = 1, 2, 3$ , mientras la ecuacion 3.2 muestra que  $\sigma_3$  esta determinado por  $\sigma_1$  y esto completa la prueba del lema. ■

**Definición 3.1.3** Para cada  $\eta \in \mathbb{C}$  sea  $Per_1(\eta) \subset \mathcal{M}_2$  el conjunto de todas las clases de conjugación  $\langle f \rangle$  de funciones  $f$  que tienen un punto fijo con multiplicador igual a  $\eta$

**Lema 3.1.2** Para cada  $\eta \in \mathbb{C}$  el lugar geométrico de  $Per_1(\eta) \subset \mathcal{M}_2$  es una línea recta con respecto a las coordenadas  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , y la ecuación de esta línea viene dada dado por

$$\sigma_2 = (\eta + \eta^{-1})\sigma_1 - (\eta^2 + 2\eta^{-1}) \quad (3.8)$$

mientras  $Per_1(0)$  es la línea vertical  $\sigma_1 = +2$ .

*Demostración.* Por definición de  $\sigma_i$  los multiplicadores son las raíces de 3.1, es decir, si  $\eta$  es multiplicador,  $\eta$  satisface 3.1 y así tenemos que

$$\eta^3 - \sigma_1\eta^2 + \sigma_2\eta - \sigma_3 = 0$$

y recordemos que de  $\sigma_3 = \sigma_1 - 2$ . ■

Se tiene que las curvas  $Per_2(\eta)$  son líneas paralelas de pendiente  $-2$  dadas por la ecuación

$$2\sigma_1 + \sigma_2 = \eta$$

**Definición 3.1.4** Para un entero  $n \geq 1$  y cualquier número  $\eta \neq 1$  en  $\mathbb{C}$ , sea  $Per_n(\eta)$  el conjunto de  $\langle f \rangle \in \mathcal{M}_2$  que tienen un punto periódico de periodo  $n$  y multiplicador  $\eta$ .

Sea  $N$  el número de ciclos de periodo  $n$  de una aplicación racional (genérica) de grado dos. El locus  $Per_n(\eta)$  se identifica con el conjunto de ceros de la ecuación  $\eta^N + \sigma_{n,1}\eta^{N-1} + \dots \pm \sigma_{n,N} = 0$ , donde  $\{\sigma_{n,r}, r = 1, \dots, N\}$  son las funciones simétricas elementales de los multiplicadores de los ciclos de periodo  $n$ . Josep Silverman (ver [10]) demostró que las funciones  $\{\sigma_{n,r}\}$  son funciones polinomiales en las variables  $\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}$  con coeficientes enteros.

**Teorema 3.1.1** Para cualquier  $\eta \in \mathbb{C}$ , el grado de la curva  $Per_n(\eta) \subset \mathcal{M}_2$  es  $\frac{1}{2}v_2(n)$ , donde los números  $v_2(n)$  están definidos inductivamente por la fórmula  $2^n = \sum_{m|n} v_2(m)$ . Donde esta suma es sobre todos los enteros positivos  $m$  que dividen a  $n$ . Equivalentemente, este grado es igual al número de componentes hiperbólicas de periodo  $n$  en el conjunto de Mandelbroth.

Daremos un bosquejo de la demostración. Una prueba completa se encuentra en ([8], pag. 44-45). En tal prueba, Milnor hace uso de algunos resultados de la tesis doctoral de T. Bousch: "Sur quelques problèmes de dynamique holomorphe"

Sabemos que  $Per_n(\eta)$  es una curva algebraica en  $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{C}^2$ . Consideremos la compactificación de  $\mathcal{M}_2$ ,  $\widehat{\mathcal{M}}_2$ . Sea  $\widehat{Per}_n(\eta)$  la cerradura proyectiva de  $Per_n(\eta)$  en  $\widehat{\mathcal{M}}_2 \simeq \mathbb{CP}^2$ . Por el teorema de Bezout (ver [6], pag. 47) se tiene que el grado de una curva en  $\mathbb{CP}^2$  es igual al número de intersecciones con cualquier línea proyectiva contando multiplicidades. Para calcular el grado de  $\widehat{Per}_n(\eta)$  vamos a considerar la cerradura de  $Per_1(0)$  con ecuación  $\sigma_1 = 2$  ó  $\sigma_3 = \mu_1\mu_2\mu_3 = 0$ . Notemos que esta línea se puede identificar con el conjunto de todos los polinomios cuadráticos  $f(z) = z^2 + c$  que tienen multiplicador cero en el punto  $\infty$  (aquí  $\sigma_2 = 4c$ ). La cerradura  $\widehat{Per}_1(0)$  dentro de  $\widehat{\mathcal{M}}_2$  contiene un punto al infinito  $[1 : 0 : 0]$ . Por el lema anterior  $\widehat{Per}_n(\eta)$  no contiene a este punto. Por lo tanto podemos considerar la intersección de estas dos curvas en la parte finita de  $\mathbb{CP}^2$ , es decir, consideraremos la intersección antes descrita en  $\mathbb{C}^2$ .

Primer caso  $\eta = 0$ :

Los puntos en  $Per_1(0) \cap Per_n(0)$  se pueden describir como clases de equivalencia de aplicaciones  $f_c(z) = z^2 + c$ , donde  $z = 0$  es punto crítico que tiene periodo  $n$  bajo  $f_c$  (Ver proposición 2.3.1). Por definición estos son los centros de las distintas componentes hiperbólicas de periodo  $n$  en el conjunto de Mandelbroth. Se sigue que  $c$  no puede ser una solución múltiple a la ecuación  $f_c^{\circ n}(0) = 0$  (ver [5]), por lo tanto la intersección es transversal con multiplicidad de intersección uno. Una idea análoga para  $|\eta| < 1$  muestra que las curvas  $Per_1(0)$  y  $Per_n(0)$  se intersectan transversalmente, con exactamente un punto de intersección en cada componente de periodo  $n$  del conjunto de Mandelbroth.

Para demostrar que este número de intersección es  $\frac{1}{2}v_2(n)$ , notemos que la ecuación  $f_c^{\circ n}(0) = 0$  es un polinomio en  $c$  de grado  $2^{n-1}$  (notemos que  $f_c^{\circ n}(z) - z$  tiene grado  $2^n$  en  $z$ ), es decir, el número de centros en el conjunto Mandelbroth con periodo que divide a  $n$  es  $2^{n-1}$ . Como podemos eliminar aquellos centros de periodo  $m$ , donde  $m$  divide a  $n$ , obtenemos el número  $\frac{1}{2}v_2(n)$ .

Caso  $|\eta| \geq 1$ :

Sea  $Q_n^* := \{(c, z) | f_c^{\circ n}(z) = z\} \subset \mathbb{C}^2$ . Los puntos de  $Q_n^*$  corresponde a puntos  $z$  de periodo  $m$  bajo  $f_c$  con  $m|n$ . Sea  $Q_n \subset Q_n^*$  la unión de aquellas componentes irreducibles de  $Q_n^*$  para las cuales un punto generico  $(c_0, z_0)$  tiene periodo exactamente  $n$  bajo  $f_{c_0}$ . Por un resultado de T. Bousch,  $Q_n$  es irreducible. Notemos que podemos escribir  $Q_n^* = \bigcup_{m|n} Q_m$  donde la unión se toma sobre todos los enteros  $m$  que dividen a  $n$ . El grupo  $\mathbb{Z}_n$  induce una acción sobre  $Q_n$ , es decir,

$$\mathbb{Z}_n \times Q_n \rightarrow Q_n : ([k], (c, z)) \rightarrow (c, f_c^k),$$

Consideremos la variedad cociente  $P_n$  por esta acción. De esta manera un punto de  $P_n$  (el cual es una clase de equivalencia) se puede describir como un par  $(c, \{z_i\})$ . dicho par consiste de un parametro  $c$  y una orbita periódica  $\{z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots\}$  bajo  $f_c$  el cual, al menos para un punto genérico de  $P_n$  tiene periodo exactamente  $n$ . Notemos que fijando  $z$  la ecuación  $f_c^{\circ n}(z) = z$  tiene grado  $2^n - 1$  en  $c$ . Esto hace ver que la proyección  $\pi : Q_n^* \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\pi(c, z) = z$  tiene grado  $2^n - 1$  (Recordar que el grado de una aplicación es la cardinalidad de la imagen inversa de cada punto en  $\mathbb{C}$  contando multiplicidades. Ver definición 1.2.6.). Si restringimos  $\pi|_{Q_n} : Q_n \rightarrow \mathbb{C}$  se tiene que la correspondiente proyección tiene grado  $\frac{1}{2}v_2(n)$  ya que  $\frac{1}{2}v_2(n)$  es el grado en la variable  $c$  del polinomio  $Q_n$ . Si  $\{z = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3 \rightarrow \dots\}$  es la orbita de  $z$  bajo  $f_c$ , se sigue que cada proyección  $\pi_j : Q_n \rightarrow \mathbb{C}, \pi_j(c, z_j) = z_j$  es de grado  $\frac{1}{2}v_2(n)$ . Se tiene además que módulo una constante, el multiplicador  $\eta = (2z_1)(2z_2) \dots (2z_n)$  de la anterior orbita periódica es el producto  $z_1 \dots z_n$ . Notemos que  $Q_n \subset \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ . Así  $Q_n$  es una curva algebraica de grado de  $\frac{1}{2}v_2(n)$  en  $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ .

Sea  $h : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $h(z_1, \dots, z_n) = z_1 \dots z_n$ .  $h$  es un polinomio homogéneo en  $n$  variables de grado  $n$ . Sea  $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ , el conjunto  $H := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n | h(z_1, \dots, z_n) = z_1 \dots z_n = a \neq 0\} = h^{-1}(a)$  es una hipersuperficie de grado  $n$  en  $\mathbb{C}^n$ . Dado que el grado de  $Q_n$  es  $\frac{1}{2}v_2(n)$  y el grado de  $H$  es  $n$ , se tiene que la

intersección de  $H$  con  $Q_n$  contando multiplicidades es  $\frac{1}{2}nv_2(n)$  (teorema de Bezout). Estas intersecciones se tienen en  $\mathbb{C}^n$  ya que como cualquier  $z_i$  que tienda a infinito dentro de  $Q_n$  las restantes  $z_i$  tienden también a infinito. Sea  $\mathbb{C}_\eta$  el espacio vectorial complejo generado por  $\eta$ . De lo anterior tenemos que la proyección al  $\eta$ -plano dada por  $Q_n \rightarrow \mathbb{C}_\eta, (c, z) \rightarrow \eta$  tiene grado  $\sum_1^n \frac{1}{2}v_2(n) = \frac{1}{2}nv_2(n)$ .

Notemos que la aplicación  $Q_n \rightarrow P_n$  dada por  $(c, z) \rightarrow (c, \{z_i\})$  tiene grado  $n$ , entonces la proyección  $(c, \{z_i\}) \rightarrow \eta$  de  $P_n$  al  $\eta$ -plano  $\mathbb{C}_\eta$  es de grado  $\frac{1}{2}v_2(n)$ , es decir, para una elección genérica de  $\eta$  tenemos  $\frac{1}{2}v_2(n)$  puntos en  $P_n$  los cuales corresponden a  $\frac{1}{2}v_2(n)$  puntos distintos del  $c$ -plano. Esto hace ver que la curva  $Per_n(\eta) \subset \mathcal{M}_2$  tiene grado  $\frac{1}{2}v_2(n)$ .

■

Así, cada  $Per_n(\eta)$  es una curva algebraica en  $\mathcal{M}_2$  con grado igual al número de componentes hiperbólicas de periodo  $n$  en el conjunto de Mandelbrot. Nosotros vamos a considerar el caso  $Per_3(\eta)$ .

### 3.1.2. Cálculo de $\sigma_{3,1}$ y $\sigma_{3,2}$

En este capítulo calcularemos las funciones simétricas elementales  $\sigma_{3,1}$  y  $\sigma_{3,2}$ , mostrando las dificultades que esto ocasiona. También, analizamos a fondo las curvas algebraicas cúbicas  $Per_3(\eta)$ .

**Proposición 3.1.2** Sea  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  una aplicación racional de grado dos. Las funciones simétricas elementales de los multiplicadores de los 3-ciclos de  $f^{\circ 3}(z)$  satisfacen las relaciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{3,1} &= \sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^2 + 3\sigma_1 + 2 \\ \sigma_{3,2} &= \sigma_2^3 + 4\sigma_2^2\sigma_1 + 5\sigma_2\sigma_1^2 + 2\sigma_1^3 - 2\sigma_2\sigma_1 - \sigma_1^2 + 12\sigma_1 + 28\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Una función racional cuadrática es conjugada a una de la forma

$$f_{a,b}(z) = \frac{z}{az^2 + bz + a}, \quad a \neq 0$$

donde 0 es un punto fijo, es decir,  $f_{a,b}(0) = 0$ . De la definición de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , un cálculo sencillo muestra que

$$\sigma_1 = a^{-1}(-b^2 + 1 - 2a + 4a^2) \quad (3.9)$$

$$\sigma_2 = a^{-2}(-b^2 + 5a^2 - 2a - b^2a^2 + 4a^4 - 4a^3) \quad (3.10)$$

y

$$f'_{a,b}(z) = a(1-z)(1+z) \left( \frac{f_{a,b}(z)}{z} \right)^2. \quad (3.11)$$

Sean  $z_o \mapsto z_1 \mapsto z_2 \mapsto z_o$  y  $w_o \mapsto w_1 \mapsto w_2 \mapsto w_o$  los elementos de los dos 3-ciclos de  $f$  que se comportan de la forma indicada. Denotemos por  $\mu_{3,1}$ ,  $\mu_{3,2}$  los respectivos multiplicadores de estos dos 3-ciclos.

Por definición  $\sigma_{3,2} = \mu_{3,1}\mu_{3,2}$  y esto es dado por

$$\begin{aligned}
\sigma_{3,2} &= \prod_i f'_{a,b}(z_i) \prod_j f'_{a,b}(w_j) \\
&= \prod_i a(1-z_i)(a+z_i) \left( \frac{f_{a,b}(z_i)}{z_i} \right)^2 \prod_j a(1-w_j)(a+w_j) \left( \frac{f_{a,b}(w_j)}{w_j} \right)^2 \\
&= a^6 \prod_{k=0}^2 (1-z_k)(1+z_k)(1-w_k)(1+w_k) \left( \prod_i \frac{z_{i+1}}{z_i} \right)^2 \left( \prod_i \frac{w_{i+1}}{w_i} \right)^2
\end{aligned}$$

Aquí los subíndices  $i, j$  de los últimos dos productos están dados módulo tres. Los últimos dos productos se reducen a 1 de modo que reordenando los subíndices obtenemos:

$$\sigma_{3,2} = a^6 \prod_{k=0}^2 (1-z_k)(1-w_k) \prod_{k=0}^2 (1+z_k)(1+w_k)$$

y podemos reescribirlo como

$$\sigma_{3,2} = a^{-6} \left( a^6 \prod_{\xi} (1-\xi) \right) \left( a^6 \prod_{\xi} (1+\xi) \right) \quad (3.12)$$

donde el producto es sobre todos los puntos  $\xi$  de periodo 3. Sea  $\Phi_{a,b}(z) := \Phi_3(z)$ . Recordemos que el grado de  $\Phi_3(z)$  tiene grado  $\nu_2(3) = 2^3 - 2 = 6$  (ver sección 3.1.1). Un punto  $z \in \mathbb{C}_{\infty}$  tiene exactamente periodo 3 si y solo si satisface el polinomio  $\Phi_{a,b}(z) = 0$ , donde  $\Phi_{a,b}(z)$  está dado por  $\Phi_{a,b}(z) = \frac{f_{a,b}^{\circ 3}(z)}{f_{a,b}(z)}$ , el cual es igual a:

$$\begin{aligned}
&a^6 z^6 + (-ba^3 - 3ba^5 - 2ba^4)z^5 \\
&\quad + (-2a^4 - 3a^6 - 3b^2a^2 - a^2 - a^5 + a^3 - 3a^4b^2 - 4b^2a^3 - ab^2)z^4 \\
&\quad + (-ba - 2b^3a^2 - 2b^3a - b^3 - 6ba^4 - ba^2 - 6ba^5 - a^3b^3 - 6ba^3)z^3 \\
&\quad + (-2ab^2 - 5b^2a^3 - 2a^5 - 3a^6 - 3a^4 - 3a^4b^2 - 5b^2a^2 - a^2)z^2 \\
&\quad + (-ba^2 - 4ba^3 - 4ba^4 - 3ba^5)z - a^5 - a^6 - a^4
\end{aligned}$$

por otro lado, el polinomio  $\Phi_{a,b}(z)$  también lo podemos ver como

$$\Phi_{a,b}(z) = a^6 \prod_{\xi} (z - \xi) \quad (3.13)$$

donde el producto es sobre todos los puntos  $\xi$  de periodo 3 y reescribimos la ecuación 3.12 de la siguiente forma

$$a^6 \sigma_{3,2} = \Phi_{a,b}(+1)\Phi_{a,b}(-1) \quad (3.14)$$

Por un lado podemos considerar la ecuación 3.14 como un polinomio en la variable  $b$ . Resolvemos 3.9 para  $b^2$  y obtenemos

sustituimos en 3.14 y obtenemos la siguiente ecuación:

$$a^6 \sigma_{3,2} - Q_1 = 0 \quad (3.15)$$

donde  $Q_1$  es el polinomio en  $a$  y  $\sigma_1$ :

$$\begin{aligned} & (-6\sigma_1^2 - 8 + \sigma_1^3 + 12\sigma_1)a^9 + (4\sigma_1^3 + 16\sigma_1 - 16\sigma_1^2)a^8 + (8\sigma_1^3 + 16\sigma_1 - 24\sigma_1^2)a^7 \\ & + (10\sigma_1^3 + 16 - 20\sigma_1^2 + 24\sigma_1)a^6 + (8\sigma_1^3 - 16\sigma_1^2 + 16\sigma_1)a^5 \\ & + (4\sigma_1^3 + 14\sigma_1 - 11\sigma_1^2)a^4 + (-6 - 8\sigma_1^2 + \sigma_1^3 + 3\sigma_1)a^3 \\ & (-3\sigma_1^2 + 4\sigma_1)a^2 + 3\sigma_1 a - 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

de nuevo resolvemos 3.9 para  $b^2$  y sustituimos en 3.10 con lo que obtenemos

$$Q_2 := (2 - \sigma_1)a^3 + \sigma_2 a^2 - \sigma_1 a + 1 = 0 \quad (3.17)$$

Finalmente podemos eliminar el coeficiente  $a$  al calcular el resultante del lado izquierdo de las ecuaciones 3.15 y 3.17 con respecto a  $a$ . Dicho resultante es

$$(2 - \sigma_1)^3 (\sigma_2^3 + 4\sigma_2^2 \sigma_1 + 5\sigma_2 \sigma_1^2 + 2\sigma_1^3 - 2\sigma_2 \sigma_1 - \sigma_1^2 + 12\sigma_1 + 28 - \sigma_{3,2})^3.$$

Es fácil ver que el primer factor no se anula en el caso genérico. Así, el segundo factor debe anularse, es decir,  $\sigma_2^3 + 4\sigma_2^2 \sigma_1 + 5\sigma_2 \sigma_1^2 + 2\sigma_1^3 - 2\sigma_2 \sigma_1 - \sigma_1^2 + 12\sigma_1 + 28 - \sigma_{3,2} = 0$ . Esto último nos da la expresión para  $\sigma_{3,2}$ .

Notemos que si  $z_1, z_2, z_3$  son los puntos fijos de  $f$  y  $\mu_i = f'(z_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  son los respectivos multiplicadores asociados a estos puntos fijos, por la regla de la cadena tenemos que  $(f^{\circ 3})'(z_i) = f'(f^{\circ 2}(z_i)) \cdot (f^{\circ 2})'(z_i) = f'(z_i) \cdot f'(f(z_i)) f'(z_i) = f'(z_i) \cdot f'(z_i) \cdot f'(z_i) = \mu_i^3$ . Para el cálculo de  $\sigma_{3,1}$  aplicamos la fórmula del índice holomorfo pero para el caso  $f^{\circ 3}$  y se tiene que:  $\sum_{p, f(p)=p} \text{indhol}_p(f) = 1$  (cuya

prueba se dio en el lema 3.1.1) para  $f^{\circ 3}$  la cual es

$$\frac{3}{1 - \mu_{3,1}} + \frac{3}{1 - \mu_{3,2}} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{1 - \mu_j^3} = 1. \quad (3.18)$$

Usando la definición de  $\sigma_{3,1}$  y  $\sigma_{3,2}$  obtenemos

$$\frac{3}{1 - \mu_{3,1}} + \frac{3}{1 - \mu_{3,2}} = 3 \left( \frac{2 - \sigma_{3,1}}{1 - \sigma_{3,1} + \sigma_{3,2}} \right) \quad (3.19)$$

Por medio del paquete SF de MAPLE(ver [12]) el cual hace calculos de expresiones que envuelven funciones simetricas, se obtiene que

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{1 - \mu_j^3} = \frac{3 - 6\sigma_3 + 6\sigma_2 \sigma_1 - 2\sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2}{1 - 3\sigma_3 + 3\sigma_2 \sigma_1 - \sigma_1^3 - 3\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_2^3 + 3\sigma_3^2 - \sigma_3^3} \quad (3.20)$$

y sustituyendo 3.19, 3.20 y la relación  $\sigma_3 = \sigma_1 - 2$  en la ecuación 3.18 y resolviendo para  $\sigma_{3,1}$  obtenemos

$$\sigma_{3,1} = \sigma_2\sigma_1 + 2\sigma_1^2 + 3\sigma_1 + 2$$

y con esto concluimos la prueba. ■

**Teorema 3.1.2** *Per<sub>3</sub>( $\eta$ ) es no singular para  $\eta \neq -8, 0, 1$ . Para cada  $\eta$  el  $j$ -invariante de Per<sub>3</sub>( $\eta$ ) esta dado por*

$$j(\eta) = \frac{1}{1728} \frac{(\eta + 2)^3(\eta^3 + 6\eta^2 + 228\eta + 8)^3}{\eta(\eta + 8)^3(\eta - 1)^6} \quad (3.21)$$

DEMOSTRACIÓN: Para llegar a la expresión  $j(\eta)$  se hace la siguiente sucesión cambios proyectivos de variable en  $\mathbb{CP}^2$ :

$$\begin{array}{lll} \sigma_1 = x_1 - y_1 & x_1 = \frac{x_2}{y_2} & x_2 = \frac{x_3}{y_3 - \frac{1}{2}(\eta - 4)(x_3 + 3)} \\ \sigma_2 = 2y_1 - x_1 & y_1 = \frac{y_2}{(x_2 + 3)} & \\ x_3 = 4x_4(\eta - 1) & x_4 = x + \frac{-\frac{1}{4}\eta^2 - 4\eta + 11}{12(\eta - 1)^2} & \\ y_3 = 4y_4(\eta - 1)^2 & y_4 = y & \end{array}$$

Estos cambios de variable nos lleva Per<sub>3</sub>( $\eta$ ) a la forma normal de Weierstrass  $y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3 = 0$  donde

$$g_2 = \frac{1}{192} \frac{(\eta + 2)(\eta^3 + 6\eta^2 + 228\eta + 8)}{(\eta - 1)^4}$$

y

$$g_3 = \frac{1}{13824} \frac{(\eta^2 - 20\eta - 8)(\eta^4 + 32\eta^3 + 168\eta^2 + 536\eta - 8)}{(\eta - 1)^6}.$$

Tomando en cuenta que el  $j$ -invariante esta dado por  $j(\eta) = \frac{g_2^3(\eta)}{g_3^2(\eta) - 27g_3^2(\eta)}$ , usando MAPLE se obtiene 3.21 y con eso concluimos la prueba. ■

Esto nos hace ver que cada Per<sub>3</sub>( $\eta$ ) es una curva eliptica donde el  $j$ -invariante esta en terminos del multiplicador  $\eta$  lo cual es sorprendente ya que relaciona a los multiplicador  $\eta$  con curvas elipticas mediante la aplicación  $\eta \rightarrow j(\eta)$ . Un resultado dado en ([3]) afirma que la aplicación  $\eta \rightarrow j(\eta)$  es un cubriente 12 a 1 de la superficie modular  $\mathbb{H}/(PSL(2, \mathbb{Z}))$ , dicha prueba esta fuera de los alcances teóricos de este trabajo.

# Bibliografía

- [1] M. F. Atiyah, I.G. McDonald, Introduction to commutative algebra, Addison wesley, 1983.
- [2] Alan F. Beardon, Iteration of Rational Functions , Springer Verlag, 1991.
- [3] Selim Berker, Adam L. Epstein and Kevin M. Pilgrim, Remarks on the period three cycles of quadratic rational maps, Nonlinearity 16 93-100, 2003.
- [4] John B. Conway, Functions of One Complex Variable I, Springer Verlag, 1991.
- [5] A. Douady, J.H. Hubbard. "Étude Dynamique des polinomes complexes",deuxieme partie. Publicatines mathematiques d' Orsa, 85-04.
- [6] R. Hartshorne. Algebraic geometry. Springer-Verlag 1997.
- [7] W. Massey, Introducción a la Topología Algebraica. Reverté, 1982.
- [8] John Milnor, Geometry and Dynamics of Quadratic Rational Maps, Experiment Math 2 37-83, 1993.
- [9] Rick Miranda. Algebraic curves and Riemann surfaces. Monographs of theAMS. 1995.
- [10] Joseph Silverman, The space of rational maps on  $\mathbb{P}^1$ . Duke Mathematical Journal, vol. 94, No. 1. 1998.
- [11] D. Sullivan. Quasiconformal homeomorphism and dynamics I, Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains, Annals of Mathematics 122, (1985), 401-418.
- [12] SF package of MAPLE. [http://www.df.uba.ar/~ jakubi/maple.html](http://www.df.uba.ar/~jakubi/maple.html)
- [13] Lawrence C. Washington, Elliptic Curves, Chapman & Hall/Crc, 2003.