UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

ESPACIOS CLÁSICOS DE BANACH

TESIS PARA OBTENER EL GRADO DE

LIC. EN CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA

Humberto Saul Pino Villela

ASESOR

Dr. Salvador García Ferreira

AGOSTO 2008

Este trabajo fué realizado con el apoyo de una beca de tesis de Proyecto PAPIIT-UNAM con número IN 105206 cuyo responsable es el Dr. Daniel Juan Pineda.

Índice general

1. Introducción **1**

2. Espacios de Banach **3**
2.1. Propiedades Básicas y Ejemplos 4
2.2. Operadores Lineales 11
2.3. Operadores Compactos 17

3. Bases de Schauder **19**
3.1. Definición y Ejemplos 19
3.2. Sucesiones Básicas y Equivalencia de Bases 30
3.3. Construcción de Sucesiones Básicas 31
3.4. Sucesiones Bloque y Sucesiones Simétricas 35
3.5. Bases de Schauder y Dualidad 36
3.6. Bases de Schauder y la Propiedad de la Aproximación 38

4. Un subespacio ℓ_1-hereditario de L_1 sin la propiedad de Schur **41**

5. Espacios de Erdős **53**

6. Subespacios de ℓ_p sin la Propiedad de la Aproximación **63**
6.1. Algo de Combinatoria Finita. 66
6.2. Un subespacio de ℓ_p sin la Propiedad de la Aproximación . . . 68

Terminología y Notación

Terminología	**Significado**
$\mathbb{R}$	*Números reales*
$\mathbb{N}$	*Números naturales*
$\mathbb{Q}$	*Números racionales*
$\mathbb{P}$	*Números irracionales*
$\overline{A}$	*Cerradura del conjunto* A
$Fr(A)$	*Frontera del conjunto* A
X, Y	*Denotan espacios de Banach*
$B(X, Y)$	*Espacio de Banach de todos los operadores continuos* $T : X \to Y$
X^*	*Espacio dual del espacio de Banach* X
T^*	*Denota el operador adjunto de* T
$< \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} >$	*Subespacio lineal generado por el conjunto* $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$
$[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$	*Denota la cerradura de el subespacio* $< \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} >$
$dim(X)$	*Dimensión topológica del espacio* X

Capítulo 1

Introducción

Los *Espacios Clásicos de Banach* son aquellos espacios de Banach X cuyo espacio dual es isométrico a $L_p(\mu, \mathbb{R})$, para algún $1 \leq p \leq \infty$. Es bien sabido que si $1 < p < \infty$ entonces $X = L_q(\mu, \mathbb{R})$, en donde q es un número real que cumple $1/p + 1/q = 1$, y si $p = \infty$ se obtiene $X = L_1(\mu, \mathbb{R})$. En particular, nosotros concentraremos nuestra atención en el estudio de los espacios ℓ_p. El objetivo principal de esta tesis es estudiar algunas técnicas de construcción de espacios de Banach y presentar la solución de A. Szankowski a dos de los problemas centrales del Análisis Funcional.

En el Capítulo 2 recordaremos algunas definiciones y teoremas básicos de la teoría de espacios de Banach que estaremos utilizando a todo lo largo de este trabajo.

En el Capítulo 3 estudiamos el concepto de una base de Schauder. Existen muchas razones para estudiar las bases de Schauder. Al igual que las bases de Hamel en espacios lineales, las bases de Schauder nos proporcionan una perspectiva más profunda de las propiedades de los espacios de Banach, además de facilitar la solución de muchos problemas. Por otro lado, se pueden conocer ciertas características de los espacios de Banach, con sólo averiguar lo que sucede con los elementos de la base. Finalmente, también nos permiten reformular muchos problemas clásicos del Análisis Funcional, de tal manera que resulten ser problemas involucrándolas. Ésto ha permitido resolver problemas clásicos que permanecieron abiertos por muchos años.

En el Capítulo 4 presentamos un ejemplo de M. M. Popov de un espacio de Banach ℓ_1-hereditario sin la propiedad de Schur.

En 1940 Paul Erdős definió el espacio racional de Hilbert como el subespacio de ℓ_2 que consiste de todas las sucesiones con entradas en los números racionales, análogamente introdujo el subespacio de todos los vectores en ℓ_2 con sólo coordenadas irracionales. Demostró que estos espacios tienen dimensión topológica 1 y que son totalmente disconexos. Sabemos que los números racionales e irracionales son $0-$dimensionales como subconjuntos de $\mathbb{R}$. En el Capítulo 5, estudiamos la generalización de estos espacios hecha por Jan J. Dijkstra, es decir, consideraremos todos los subespacios $\mathcal{E}$ de ℓ_p que se construyen como *producto* de subconjuntos $0-$dimensionales de los números reales. Presentamos un criterio dado por Dijkstra para determinar qué condiciones debe cumplir un espacio de este tipo para tener dimensión topológica 1. Una aplicación de este criterio presenta las condiciones necesarias para que un espacio de el tipo $\mathcal{E}$ sea homeomorfo al espacio de Erdős completo y por lo tanto preserve sus propiedades.

No es difícil probar que todo espacio de Banach con una base de Schauder es separable. Ésto permite preguntarnos si el inverso de esta afirmación es cierto. Es decir, todo espacio de Banach separable admite una base de Schauder? Esta pregunta fue formulada por S. Banach y es uno de los problemas clásicos del Análisis Funcional conocido como el *Problema de la Base.* Otra característica importante de los espacios de Banach con una base de Schauder es que tienen la Propiedad de la Aproximación. Un resultado de los comienzos del Análisis Funcional es que todo espacio de Hilbert cumple con esta propiedad. La pregunta de si todo espacio de Banach separable tiene esta propiedad es otro de los problemas clásicos de la teoría de espacios de Banach, conocido como el *Problema de la Aproximación.* P. Enflo respondió a ambos problemas negativamente. En el Capítulo 5, presentamos la solución a estos dos problemas dada por A. Szankowski.

Capítulo 2

Espacios de Banach

En nuestro trabajo sólo consideramos espacios vectoriales sobre el campo escalar de los números reales, por lo que a menudo nos referiremos a ellos sin hacer mención del campo escalar subyacente. A continuación presentaremos las definiciones y teoremas básicos del Análisis Funcional, los cuales enunciaremos sin demostrar. Para una demostración de los teoremas se puede consultar [9].

Sea X un espacio vectorial. Consideremos el conjunto de todas las sucesiones infinitas en X, podemos identificar de una manera natural a este conjunto con el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to X$ que denotamos por $X^{\mathbb{N}}$ de tal manera que x_n denota el valor de la función f en el elemento $n \in \mathbb{N}$, esto es, $f(n) = x_n$. Entonces, podemos dotar de una estructura de espacio vectorial a $X^{\mathbb{N}}$ definiendo la suma vectorial de dos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} + (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

y la multiplicación por un escalar α como

$$\alpha(x_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\alpha x_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Todos los espacios de sucesiones que consideraremos serán subespacios de este espacio vectorial.

2.1. Propiedades Básicas y Ejemplos

Definición 2.1 *Una norma en un espacio vectorial X es una función real $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ cuyo valor en $x \in X$ denotaremos por $\|x\|$, satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1. $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

para cualesquiera $x, y \in X$ y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una norma $\|\cdot\|$ definida en X.

El ejemplo más conocido de un espacio normado es $\mathbb{R}$ con la norma del valor absoluto.

Definición 2.2 *Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ converge en la norma si existe $x \in X$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Escribiremos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

ó simplemente

$$x_n \to x,$$

y diremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Definición 2.3 *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $(X, \|\cdot\|)$ es una sucesión de Cauchy si para toda $\varepsilon > 0$ existe un número entero positivo n_0 tal que*

$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon \ \textit{ para cada } \ m, n > n_0.$$

Proposición 2.4 *Sea* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $(X, \|\cdot\|)$*. Entonces, la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es acotada. Es decir, existe un número real* $C > 0$ *tal que* $\|x_n\| \leq C$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 2.5 *Si una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *es convergente, entonces es una sucesión de Cauchy.*

Como lo enuncia la Proposición anterior toda sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, pero no en todos los espacios normados una sucesión de Cauchy es una sucesión convergente lo cual nos permite definir un espacio normado completo.

Definición 2.6 *Se dice que un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *es completo si toda sucesión de Cauchy en* $(X, \|\cdot\|)$ *es una sucesión convergente. Es decir, si para toda sucesión de Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, existe* $x \in X$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*.*

Definición 2.7 **[Banach]** *Decimos que un espacio normado* $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach, si es un espacio normado completo. En tal caso diremos que la norma respecto a la cual* $(X, \|\cdot\|)$ *es completo es una norma completa.*

De aquí en adelante escribiremos simplemente X para denotar a un espacio de Banach y $\|\cdot\|$ para denotar su norma.

Teorema 2.8 *Sea* X *un espacio de Banach y* $Y \subset X$ *un subespacio de* X*. Entonces,* Y *es un espacio de Banach si y sólo si* Y *es cerrado en* X *respecto de la topología inducida por la norma* $\|\cdot\|$*.*

A continuación presentamos y comentamos algunos ejemplos de espacios de Banach.

Ejemplo 2.9 *El espacio Euclideano* $\mathbb{R}^n$ *es un espacio de Banach con la norma definida por*

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2},$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$*.*

Ahora veremos uno de los ejemplos más importantes de espacios de Banach, que son los espacios de sucesiones. En particular los espacios ℓ_p, que son el tema principal de esta tesis.

Ejemplo 2.10 Espacios de Sucesiones.
(1) **Espacios ℓ_p.** *Sea $p \geq 1$ un número real fijo. Consideremos el espacio vectorial ℓ_p que consiste de todas las sucesiones $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

Entonces, ℓ_p es un espacio de Banach con la norma definida por

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}.$$

Para ver esto, primero probamos que la función $\|\cdot\|_p$ es realmente una norma. Las condiciones (1) y (2) de la Definición 2.1 se siguen trivialmente. Para probar la condición (3) se requiere de la desigualdad de Minkowski:

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

(una demostración de la desigualdad de Minkowski se puede encontrar en [9]) *donde $p \geq 1$ es un número real y $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, para cada $i \leq n$. Tomemos $x, y \in \ell_p$ y sea $n \leq m$, por la desigualdad de Minkowski tenemos*

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{m} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{m} |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Si hacemos que $m \to \infty$, obtenenemos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Si ahora hacemos que $n \to \infty$, tenemos que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$. Veamos ahora que toda sucesión de Cauchy converge en ℓ_p. Sea $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión *de Cauchy en ℓ_p, donde para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_i^k)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Entonces, dado $\varepsilon > 0$, existe k_0 tal que*

$$\|x^k - x^l\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k - x_i^l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon, \tag{2.2}$$

para cada $k, l \geq k_0$. En particular, $|x_i^k - x_i^l| \leq \varepsilon$ para toda $k, l \geq k_0$ y cada $i \in \mathbb{N}$, por lo que $(x_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto convergente a algún $x_i \in \mathbb{R}$ según el Ejemplo 2.9. Definamos $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Probaremos primero que $x \in \ell_p$. Como la sucesión $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, es acotada, es decir $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y algún número real positivo C. Por consiguiente, $(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C$ para cualesquiera $k, n \in \mathbb{N}$. Poniendo $k \to \infty$, obtenemos $(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C$. Y por lo tanto, $(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq C$, es decir $x \in \ell_p$. Finalmente, veamos que $x^k \to x$. Por la desigualdad 2.2, tenemos que $(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i^l|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$, si hacemos que $l \to \infty$, obtenemos $(\sum_{i=1}^{n} |x_i^k - x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $k \geq k_0$. Por último, dejando que $n \to \infty$, se obtiene

$$\|x^k - x\|_p = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^k - x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

siempre que $k \geq k_0$. Como tomamos ε arbitrariamente podemos concluir que $x^k \to x$ en ℓ_p. En este caso nos referiremos a la norma $\|\cdot\|_p$ como la p-norma.

(2) **Espacio ℓ_∞.** *El espacio vectorial ℓ_∞ es el subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ que consiste de todas las sucesiones acotadas, es decir si $x \in \ell_\infty$ significa que*

$$|x_n| \leq c(x) \quad \text{para toda} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces, ℓ_∞ con la norma definida por

$$\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

es un espacio de Banach.

(3) *Los espacios c y c_0 se definen como*

$$\begin{aligned} c &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión convergente}\}, \\ c_0 &= \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Notemos que c y c_0 son subespacios cerrados de ℓ_∞ y por lo tanto son espacios de Banach con la norma $\|\cdot\|_\infty$.

El siguiente ejemplo generaliza la idea de los espacios ℓ_p. Es decir, espacios de sucesiones las cuales toman valores en espacios de Banach.

Ejemplo 2.11 *Sea* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de espacios de Banach y denotemos por* $\|\cdot\|_n$ *la norma en* X_n *para toda* $n \in \mathbb{N}$. *Definimos la suma* $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_p$, *en el sentido* ℓ_p, *como el espacio de todas las sucesiones* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $x_n \in X_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$, *que cumplen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p < \infty.$$

De esta manera, $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n)_p$ *con la norma definida por*

$$\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^p)^{1/p},$$

es un espacio de Banach.
Análogamente, podemos definir $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_\infty$ *como la suma de la sucesión* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *en el sentido* ℓ_∞. *Esto es,* $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_\infty$ *es el espacio de Banach que consiste de todas las sucesiones* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *con* $x_n \in X_n$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tales que* $(\|x_n\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión acotada. La norma en este espacio está dada por*

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|x_n\|_n\},$$

para cada $x \in (\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_\infty$. *Notemos que el subespacio de* $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_\infty$ *de todas las sucesiones que satisfacen* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_n = 0$, *es precisamente* $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_0$, *es decir la suma de la sucesión* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *en el sentido* c_0, *que es un espacio de Banach con la norma heredada de* $(\sum_{n=1}^{\infty} X_n)_\infty$.

Ejemplo 2.12 Espacios de Funciones Continuas.
(1) *Sea* K *un subconjunto compacto de un espacio topológico Hausdorff. El espacio vectorial* $C(K)$ *definido por*

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} : f \textit{ es continua}\},$$

con la norma $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in K} |f(t)|$ *es un espacio de Banach.*

(2) *El espacio de funciones* $C_0(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f \textit{ es continua y } \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\},$$

con la norma $\|f\| = \sup_{t\in\mathbb{R}^n} |f(t)|$ *es un espacio de Banach.*

(3) *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $[a, b] \subset \mathbb{R}$*. Los conjuntos* $C^{(n)}[a, b]$ *definidos por*

$$C^{(n)}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \textit{ es continua y su enésima derivada existe y es continua}\},$$

son espacios de Banach con la norma

$$\|f\|_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \|f^{(i)}\|_\infty.$$

En seguida introducimos los espacios clásicos de Banach $L_p(\mu)$. Para su definición necesitaremos algunos conceptos de Teoría de la Medida que no enunciamos aquí, para un repaso de estas definiciones se puede consultar [15].

Ejemplo 2.13 *Sean* $(E, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida y* $p \geq 1$ *un número real fijo. Pensemos en el conjunto de todas las funciones medibles* $f : E \to \mathbb{R}$ *que cumplen lo siguiente*

$$\int_E |f|^p d\mu < \infty.$$

Definimos ahora una relación de equivalencia en este conjunto en donde dos funciones medibles están relacionadas si y solamente si son iguales casi donde quiera. Entonces, denotando por $L_p(\mu)$ *al conjunto de las clases de equivalencia definidas así, y dotándolo con la p-norma para funciones:*

$$\|f\|_p = (\int_E |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}},$$

para cada $f \in L_p(\mu)$*, el conjunto* $L_p(\mu)$ *resulta ser un espacio de Banach. Note que los elementos de* $L_p(\mu)$ *son en realidad clases de equivalencia, pero nos podemos tomar un representante de cada clase para poder evaluar la función norma. Además, en el contexto de teoría de la medida no se hace* *distinción entre dos funciones que son iguales casi donde quiera, es decir, excepto en un conjunto de medida cero. Un ejemplo concreto de este tipo de espacios de Banach es cuando tomamos $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y a μ la medida de Lebesgue. Lo denotamos por $L_p[0, 1]$ y la norma de un elemento $f \in L_p[0, 1]$ es la siguiente:*

$$\|f\|_p = (\int_0^1 |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}.$$

A veces se escribe simplemente L_p para referirse al espacio $L_p[0, 1]$.

Es importante notar que los ℓ_p son espacios de Banach particulares de el tipo $L_p(\mu)$ y se obtienen cuando escojemos $E = \mathbb{N}$ y μ es la medida del conteo.

Definición 2.14 *Un espacio de Banach X se dice separable si tiene un subconjunto denso y numerable. Es decir, si existe un subconjunto numerable $D \subset X$ tal que $\overline{D} = X$, con respecto a la topología norma.*

Teorema 2.15 *El espacio de Banach ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, es separable.*

Demostración: Consideremos el conjunto D cuyos elementos son todas las sucesiones y de la forma $y = (y_1, y_2, ..., y_n, 0, 0, ...)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, donde $y_i \in \mathbb{Q}$ para toda $i \leq n$. Evidentemente D es un subconjunto numerable de ℓ_p. Nos queda probar que D es un subconjunto denso. Escojamos $x \in \ell_p$ y $\varepsilon > 0$ arbitrariamente. Por definición, podemos encontrar un número natural N de tal manera que $\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon^p/2$. Construiremos un elemento en el conjunto D que se encuentre lo suficientemente cercano a x. Para cada $i \in \mathbb{N}$ escojamos un número racional y_i, tal que si $1 \leq i \leq N$, cumpla que $|x_i - y_i| < (2N)^{-1/p}\varepsilon$, y para $i > N$ hacemos $y_i = 0$. Es claro que $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in D$, y observemos que

$$\begin{aligned}
(\|x - y\|_p)^p &= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \\
&= \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p + \sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p \\
&< N\varepsilon^p/(2N) + \varepsilon^p/2 \\
&= \varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\|x-y\|_p < \varepsilon$. En otras palabras D es un subconjunto denso y numerable de ℓ_p. ■

Teorema 2.16 *El espacio de Banach ℓ_∞ no es separable.*

Demostración: Sea $A = \{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto numerable de ℓ_∞. Probaremos que A no puede ser un subconjunto denso. Para hacer esto, construiremos un elemento $y \in \ell_\infty$ que no se pueda aproximar por ningún elemento de A. Como $a^n \in \ell_\infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, escribamos $a^n = (a_i^n)_{i\in\mathbb{N}}$. Definamos entonces $y \in \ell_\infty$ como sigue:

$$y_i = \begin{cases} a_i^i + 1 & \text{si } |a_i^i| \leq 1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Es ahora claro que $\|y - a^n\|_\infty \geq |y_n - a_n^n| \geq 1$,para toda $n \in \mathbb{N}$. ■

2.2. Operadores Lineales

Los operadores lineales acotados entre espacios de Banach son aplicaciones que preservan tanto la estructura algebraica como la topológica. Dados dos espacios de Banach X y Y, recordemos que un operador $T : X \to Y$ es un operador lineal si satisface

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y \in X$.

Definición 2.17 *Sean X y Y espacios de Banach. Decimos que el operador lineal $T : X \to Y$ es acotado, si existe un número real M tal que*

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \tag{2.3}$$

para cada $x \in X$.

Definimos la norma de un operador lineal acotado T como el valor más pequeño posible para el cual la ecuación 2.3 se cumpla, es decir

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ x\neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|T(x)\|.$$

Como consecuencia tenemos que si T es un operador lineal acotado, entonces se cumple

$$\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|,$$

para cada $x \in X$.

Teorema 2.18 *Si X y Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *T es continuo.*
2. *T es continuo en 0.*
3. *T es uniformemente continuo en X.*
4. *T es acotado.*

Dados dos espacios de Banach X y Y, escribimos $B(X, Y)$ para denotar al espacio vectorial de todos los operadores lineales acotados $T : X \to Y$, el cual resulta ser un espacio normado.

Teorema 2.19 *Si X y Y son espacios de Banach, entonces el espacio normado de todos los operadores lineales acotados $B(X, Y)$ es también un espacio de Banach con la norma definida por*

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|=1}} \|T(x)\|. \tag{2.4}$$

Si $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ son espacios normados y $T : (X, \|\cdot\|_1) \to (Y, \|\cdot\|_2)$ es un operador lineal, inyectivo, continuo y con inverso continuo, decimos que T es un *isomorfimo*, mas aún diremos que T es un *isomorfismo isométrico* si preserva la norma, es decir si se cumple $\|T(x)\|_2 = \|x\|_1$, para cada $x \in X$. Dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_1)$ y $(Y, \|\cdot\|_2)$ se dicen *isomorfos* (*isométricos* respectivamente) si existe un isomorfismo suprayectivo (isomorfismo isométrico respectivamente) entre ellos. También decimos que $(X, \|\cdot\|_1)$ se *encaja* en $(Y, \|\cdot\|_2)$, si existe un isomorfismo inyectivo T entre ellos dos. Notemos que si T es un isomorfismo y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|_1)$, entonces $T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $(Y, \|\cdot\|_2)$. Por lo tanto, si X es un espacio de Banach y T un isomorfismo definido en X, entonces $T[X]$ es también un espacio de Banach.

Un *funcional lineal* es un operador lineal $f : X \to \mathbb{R}$. Denotaremos por X^* al espacio normado (con la norma definida en la ecuación 2.4) de todos los funcionales acotados definidos en el espacio de Banach X y llamamos a este espacio el espacio dual de X. Como X^* es un caso especial del espacio de Banach $B(X, Y)$ cuando tomamos $Y = \mathbb{R}$, tenemos como consecuencia del Teorema 2.19 el siguiente corolario:

Corolario 2.20 *El espacio dual X^* de un espacio de Banach X es también un espacio de Banach.*

Corolario 2.21 *Sea f un funcional lineal definido en un espacio de Banach X. Entonces f es continuo si y sólo si es acotado.*

Mediante un isomorfismo isométrico se puede calcular de manera explícita el espacio dual de un espacio de Banach. A continuación enunciamos algunos de los ejemplos más importantes.

Ejemplo 2.22 *El espacio dual de ℓ_1 es isométrico al espacio de Banach ℓ_∞.*

Ejemplo 2.23 *El espacio dual de ℓ_p, para $1 < p < \infty$, es isométrico al espacio de Banach ℓ_q, en donde q es tal que se cumple $1/p + 1/q = 1$.*

Ejemplo 2.24 *El espacio dual de c_0 se identifica de una manera isométrica con ℓ_1.*

Definición 2.25 *Para una sucesión de operadores* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* $B(X,Y)$ *definimos dos tipos de convergencia:*

1. **[Convergencia uniforme]** *Se dice que la sucesión* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente a un operador* $T \in B(X,Y)$ *si se satisface lo siguiente:*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

2. **[Convergencia puntual]** *La sucesión* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge puntualmente a un operador* $T \in B(X,Y)$ *si se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(x) - T(x)\| = 0,$$

para toda $x \in X$.

Claramente la convergencia uniforme de una sucesión $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *implica su convergencia puntual.*

Teorema 2.26 **[Banach-Steinhaus]** *Sea* X *un espacio de Banach y* Y *un espacio normado. Si* $\mathcal{F}$ *es una familia no vacía de operadores lineales acotados de* X *en* Y*, tal que*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\{\|T(x)\| : T \in F\} < \infty$$

para cada $x \in X$*. Entonces*

$$\sup_{T\in\mathcal{F}}\{\|T\| : T \in F\} < \infty.$$

En otras palabras, una familia puntualmente acotada de operadores lineales continuos es uniformemente acotada.

Corolario 2.27 *Sea* X *un espacio de Banach y* Y *un espacio normado. Una sucesión* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de operadores en* $B(X,Y)$ *que converge puntualmente para cada* $x \in X$ *define un operador lineal acotado dado por la fórmula*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

para cada $x \in X$.

Corolario 2.28 *Sea X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $B(X,Y)$ que converge puntualmente a un operador continuo T. Entonces, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a T en conjuntos compactos.*

Teorema 2.29 **[Hahn-Banach]** *Supongamos que X y Y son espacios de Banach, que M es un subespacio denso de X, y que $T_0 : M \to Y$ es un operador lineal acotado. Entonces, existe un único operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que la restricción de T a M es T_0, y además $\|T\| = \|T_0\|$. Mas aún, si T_0 es un isomorfismo (isomorfismo isométrico respectivamente) entonces T es también un isomorfismo (isomorfismo isométrico respectivamente).*

Todo operador lineal continuo $T : X \to Y$ induce un operador lineal continuo $T^* : Y^* \to X^*$, que llamamos el operador adjunto T^*. Dado $f \in Y^*$ definimos $T^*(f) = f \circ T$. Es claro que T^* es lineal. Para ver que T^* es continuo, basta probar que $\|T\| = \|T^*\|$. Notemos que $\|T^*(f)\| \leq \|f\|\|T\|$ y si tomamos el supremo sobre todas las $f \in Y^*$ se tiene que $\|T^*\| \leq \|T\|$. Para la otra desigualdad, dado $\varepsilon > 0$, escojamos $x \in X$ de norma 1 tal que $\|T(x)\| \geq \|T\| - \varepsilon$, después, escojamos $f \in Y^*$ tal que $\|f\| = 1$, y tal que $(T^*f)(x) = f(T(x)) = \|T(x)\|$. De esta manera, obtenemos

$$\|T^*\| \geq \|T^*(f)\| \geq (T^*f)(x) = \|T(x)\| \geq \|T\| - \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\|T\| \leq \|T^*\|$.

Definición 2.30 **[Convergencia débil]** *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se dice que converge debilmente a un punto $x \in X$ si para todo $f \in X^*$, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Y escribimos

$$x_n \xrightarrow{w} x.$$

Definición 2.31 **[Convergencia débil*]** *Decimos que una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funcionales lineales acotados en X converge débilmente*, si existe una $f \in X^*$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para toda $x \in X$. Escribiremos*

$$f_n \xrightarrow{w^*} f.$$

Teorema 2.32 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces, la convergencia en la norma de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implica su convergencia débil con el mismo límite.*

Teorema 2.33 *En el espacio de Banach ℓ_p, con $1 < p < \infty$, tenemos que $x^n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si:*

1. *La sucesión $(\|x^n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada,*
2. *Para cada $j \in \mathbb{N}$, $x_j^n \to x_j$; en donde $x^n = (x_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ y $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.*

Teorema 2.34 [Teorema de la Aplicación Abierta] *Sean X y Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo y suprayectivo. Entonces, T es un operador abierto, es decir $T[V]$ es un conjunto abierto en Y siempre que V sea abierto en X.*

El Teorema de la Aplicación Abierta permite caracterizar los espacios de Banach separables en términos de cocientes de ℓ_1.

Corolario 2.35 *Todo espacio de Banach separable es isomorfo a un cociente de ℓ_1.*

Corolario 2.36 [Teorema de los Isomorfismos de Banach] *Sean X y Y espacios de Banach. Entonces, todo operador lineal continuo y biyectivo $T : X \to Y$ es un isomorfismo.*

Recordemos que dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ sobre un mismo espacio vectorial X se dicen equivalentes si existen números reales positivos $0 < a < b$ tales que

$$a\|x\|_1 < \|x\|_2 < b\|x\|_1,$$

para cada $x \in X$. Notemos que dos normas son equivalentes si y sólo si inducen en X la misma topología. El Teorema de los Isomorfismos de Banach nos permite identificar normas equivalentes en espacios de Banach.

Corolario 2.37 *Supongamos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas en un espacio de Banach X y que el operador identidad I de $(X, \|\cdot\|_1)$ en $(X, \|\cdot\|_2)$ es continuo. Entonces, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes.*

La gráfica de un operador continuo T es el conjunto

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, T(x)) : x \in X\} \subset X \times Y,$$

en donde tomamos en $X \times Y$ la topología producto.

Teorema 2.38 **[Teorema de la Gráfica Cerrada]** *Sean X y Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *T es acotado.*
2. *La gráfica $\mathcal{G}(T)$ es cerrada en $X \times Y$.*
3. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que satisface $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ en X y $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$ en Y, entonces $y = 0$.*

2.3. Operadores Compactos

Definición 2.39 *Un operador $T \in B(X,Y)$ se dice compacto si para cada subconjunto acotado M de X, el conjunto $\overline{T[M]}$ es compacto en Y.*

Teorema 2.40 **[Schauder]** *Un operador T es compacto si y sólo si T^* es compacto.*

Teorema 2.41 *Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de operadores compactos en el espacio de Banach $B(X,Y)$. Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a un operador T, entonces, T es compacto.*

Si Llamamos $K(X, Y)$ al espacio vectorial de todos los operadores compactos en $B(X, Y)$, el Teorema anterior nos muestra que $K(X, Y)$ es un subespacio cerrado de $B(X, Y)$, y es por lo tanto un espacio de Banach.

Cuando decimos que un operador T tiene rango finito, significa que la dimensión lineal como espacio vectorial de el rango de el operador es finita.

Teorema 2.42 *Todo operador acotado de rango finito es compacto.*

Un corolario del Teorema anterior es que, si T es un operador acotado entre dos espacios de Banach X y Y, y la dimensión lineal de Y es finita, entonces todo operador $T : X \to Y$ es compacto.

Capítulo 3

Bases de Schauder

En este capítulo introducimos y estudiamos el concepto de una base de Schauder en un espacio de Banach. Muchos de los espacios clásicos de Banach que estudiaremos admiten una base de Schauder por lo que es importante estudiarlas para un mejor entendimiento de éstos. Las bases de Schauder serán de importancia fundamental en capítulos posteriores de nuestro trabajo. En el capítulo 4, por ejemplo, utilizamos la noción de equivalencia de bases para construir espacios de Banach isomorfos.

3.1. Definición y Ejemplos

Sean $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X y $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Para cada $y \in X$ que cumpla la condición $\lim\limits_{n\to\infty} \|y - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i\| = 0$, escribimos $y = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i$.

Definición 3.1 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X si para toda $y \in X$ existe una única sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de escalares tal que $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.*

A diferencia de las bases de Hamel en espacios lineales, las bases de Schauder además de propiedades algebraicas requieren ciertas propiedades topológicas. Para un espacio de Banach de dimensión lineal infinita con una base de Hamel, cada vector en el espacio se puede escribir de manera única como una combinación lineal *finita* de elementos de la base. Por otro lado, para una base de Schauder permitimos *combinaciones lineales* infinitas, donde la suma infinita se entiende como una serie infinita, convergente en la topología norma de el espacio de Banach. Todo espacio vectorial de dimensión lineal infinita tiene una base de Hamel, pero no se pueden construir sin el Axioma de Elección. Sin embargo, existen ejemplos concretos de bases de Schauder para la mayoria de los espacios de Banach separables. A continuación veamos algunos ejemplos.

De aquí en adelante el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ denotará una base de Schauder.

Ejemplo 3.2 ℓ_p **y** c_0. *La sucesión* $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *en* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *donde para cada* $i \in \mathbb{N}$ *definimos* $e_i = (e_{i,j})_{j\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *por*

$$e_{i,j} = \begin{cases} 1 & si\ i = j, \\ 0 & si\ i \neq j, \end{cases}$$

es una base de Schauder para los espacios ℓ_p *y* c_0.

Si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p$, entonces

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|_p = (\sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p},$$

así que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|_p = 0,$$

y es claro que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión de escalares para la cual pasa todo esto.

De manera similar, si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$, se tiene que

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| = \sup_{i>n}\{|x_{n+1}|, |x_{n+2}|, |x_{n+3}|, ...\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Se sigue de la definición de c_0 que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\| = 0.$$

Esto muestra que $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para ℓ_p y c_0. A esta base la llamamos la *base canónica*.

Ejemplo 3.3 *Una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para el espacio de sucesiones c, está dada por*

$$x_n = \begin{cases} (1,1,1,...) & \text{if } n = 1, \\ e_{n-1} & \text{si } n > 1. \end{cases}$$

Si denotamos por s a el límite de la sucesión $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c$, entonces cada $y \in c$ tendrá una expansión en términos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dada por los coeficientes

$$a_i = \begin{cases} s & \text{if } i = 1, \\ y_{n-1} - s & \text{si } i > 1. \end{cases}$$

Para ver esto notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $y \in c$

$$\|y - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| = \sup_{i\geq n}\{|y_n - s|, |y_{n+1} - s|, |y_{n+2} - s|, ...\},$$

de esta manera es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \|y - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| = 0,$$

y que la sucesión de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es única.

El siguiente ejemplo muestra que la base canónica $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ no es una base de Schauder para ℓ_∞. Más adelante probaremos que este resultado en general es cierto.

Ejemplo 3.4 *La sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es una base de Schauder para ℓ_∞.*

Para probar esto, consideremos la sucesión $(1,1,1,...) \in \ell_\infty$ y sea $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria de escalares. Entonces,

$$\|(1,1,1,...) - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_\infty = \sup\{|1-a_1|, |1-a_2|, ..., |1-a_n|, 1, 1, 1, ...\} \geq 1,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \|(1,1,1,...) - \sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|_\infty \geq 1,$$

es decir la sucesión constante $(1,1,1,...) \in \ell_\infty$ no puede ser expresada en terminos de la sucesión $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$, por ello $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es una base de Schauder para ℓ_∞.

Ejemplo 3.5 La Base de Schauder Clásica para C[0,1]. *Definamos una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C[0,1]$ como sigue. Sea $s_0(t) = 1$ y $s_1(t) = t$. Para $n \geq 2$, definamos s_n por:*

$$s_n(t) = \begin{cases} 2^m(t - (\frac{2n-2}{2^m} - 1)) & si\ \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1; \\ 1 - 2^m(t - (\frac{2n-1}{2^m} - 1)) & si\ \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1; \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

en donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $2^{m-1} < n \leq 2^m$. Observe la Figura 3.1.

Afirmamos que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $C[0,1]$. Para probarlo, tomemos $f \in C[0,1]$. Definamos una sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $C[0,1]$ de manera inductiva como sigue:

$$\begin{aligned}
p_0 &= f(0)s_0, \\
p_1 &= p_0 + (f(1) - p_0(1))s_1, \\
p_2 &= p_1 + (f(1/2) - p_1(1/2))s_2, \\
p_3 &= p_2 + (f(1/4) - p_2(1/4))s_3, \\
p_4 &= p_3 + (f(3/4) - p_3(3/4))s_4, \\
p_5 &= p_4 + (f(1/8) - p_4(1/8))s_5, \\
p_6 &= p_5 + (f(3/8) - p_5(3/8))s_6, \\
p_7 &= p_6 + (f(5/8) - p_6(5/8))s_7, \\
p_8 &= p_7 + (f(7/8) - p_7(7/8))s_8,
\end{aligned}$$

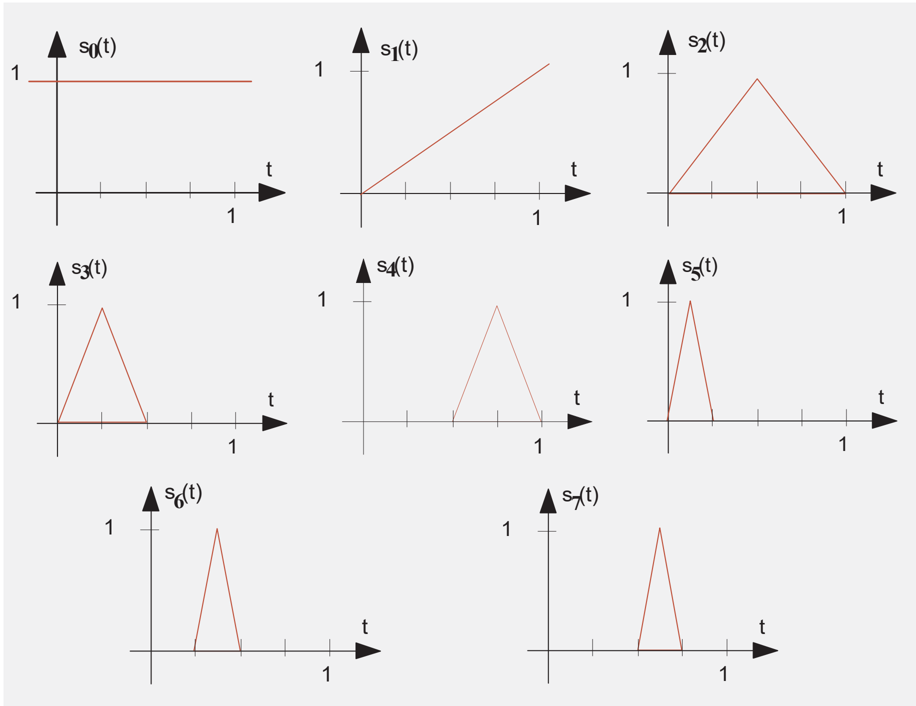

Figura 3.1: Los primeros ocho términos de la base de Schauder clásica para $C[0,1]$.

y así sucesivamente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, si hacemos que α_n sea el coeficiente de s_n en la fórmula para p_n, entonces claramente se tiene $p_m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_n s_n$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Además, como $\{0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, ...\}$ es un conjunto denso en $[0,1]$ y por la continuidad uniforme de f obtenemos que $\lim\limits_{m\to\infty} \|p_m - f\|_\infty = 0$, y por lo tanto, $f = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n s_n$.

Veamos ahora la unicidad de la sucesión de escalares en la expansión. Sea $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que $f = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n s_n$. Entonces, se cumple $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) s_n = 0$, lo que implica que $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) s_n(t) = 0$, para cada $t = 0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8, ...$, de lo cual se sigue que $\alpha_n = \beta_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existe una única sucesión de escalares α_n que satisface $f = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n s_n$, y la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ resulta ser una base de Schauder para $C[0,1]$.

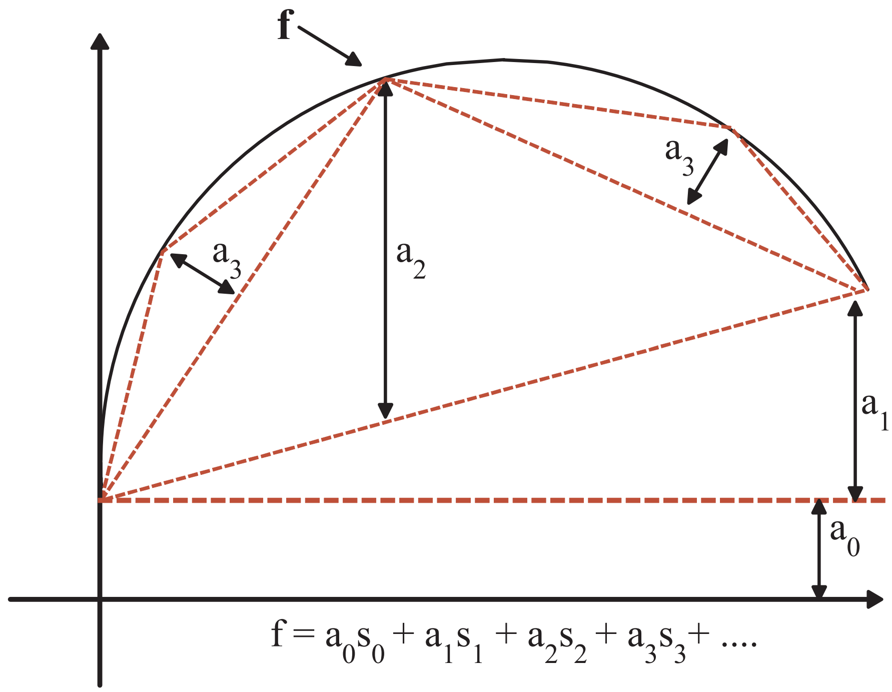

Figura 3.2: La expansión de una función f en términos de la base de Schauder $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Enunciamos ahora algunas propiedades básicas de las bases de Schauder que estaremos utilizando continuamente.

Proposición 3.6 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X, y sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Entonces, la sucesión $\{\alpha_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también una base de Schauder para X.*

Demostración: La demostración es inmediata. Para cada $y \in X$ es claro que $y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\alpha_i x_i)$, en donde para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos $b_i = a_i/\alpha_i$ en donde $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de escalares que aparece en la expansión de y en términos de la base de Schauder $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. La unicidad de $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ se deduce de la de $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. ■

Proposición 3.7 *Toda base de Schauder es un conjunto linealmente independiente.*

Demostración: Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X. Supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 0$ para alguna sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sabemos que la combinación $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es una solución para el elemento 0 de X y además es única por la unicidad de la sucesión de escalares en la definición de base de Schauder. ■

Si X es un espacio de Banach con una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, notemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ genera un subespacio denso en X. Esto es, el subespacio

$$< \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} >= \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}\}$$

es denso en X. Más aún, el conjunto

$$\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}\}$$

es denso en X.

Teorema 3.8 *Si X tiene una base de Schauder, entonces es separable.*

Demostración: Siguiendo con la notación del párrafo anterior, el conjunto

$$\{\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X : a_i \in \mathbb{Q}\},$$

es un subconjunto denso y numerable de X. ■

En el ejemplo 3.4 vimos que la base canónica $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ no es una base de Schauder para ℓ_∞. Como consecuencia del Teorema 3.8 y del Teorema 2.16 podemos afirmar ahora que ℓ_∞ es un espacio de Banach que no admite una base de Schauder.

Corolario 3.9 *ℓ_∞ no es separable y por lo tanto no puede tener una base de Schauder.*

Una característica importante de los espacios de Banach con una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es que podemos considerarlos como espacios de sucesiones, identificando a cada $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ con la única sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si denotamos por Y al espacio de todas las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y lo dotamos con la norma $\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n\|$ entonces Y es un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y el operador que se obtiene de aplicar $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un isomorfismo isométrico que aplica la base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X en la base canónica $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de Y. Esto resulta ser una propiedad general de los isomorfimos en espacios de Banach.

Proposición 3.10 *Sean X y Y espacios de Banach y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X. Si T es un isomorfimo de X sobre Y, entonces $\{T(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para Y.*

Demostración: La demostración se sigue trivialmente del hecho de que $T(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n)$. ■

Observación 3.11 *Si $(r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, y $r \in \mathbb{R}$ cumplen con la relación $r = \lim\limits_{i\to\infty} r_i$, entonces:*

(i) *El conjunto $\{r_i : i \in \mathbb{N}\}$ es acotado. Esto es una consecuencia directa de la definición de límite.*

(ii) *Sea $s = \sup_{i\in\mathbb{N}}\{r_i : i \in \mathbb{N}\}$, entonces $s \geq r$. Si suponemos que $s < r$, entonces por definición de límite existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $s < r_k \in \{r_i : i \in \mathbb{N}\}$ y por ello el número s no sería cota superior de $\{r_i : i \in \mathbb{N}\}$.*

Definición 3.12 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ los operadores lineales $P_n : X \to X$ definidos por:*

$$P_n(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k,$$

son las proyecciones canónicas asociadas a la base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 3.13 *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n^* : X \to \mathbb{R}$ denotará a las funciones definidas por:*

$$x_n^*(\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k) = a_n.$$

Estas funciones son claramente funcionales lineales y los llamaremos los funcionales lineales coordenados asociados a la base $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Observemos que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X, entonces

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(y) x_n$$

para toda $y \in X$.

Para demostrar que cada una de las proyecciones canónicas P_n asociadas a una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en X son continuas, utlizamos el hecho de que X es un espacio de Banach. Para ver esto primero definimos una nueva función norma en X.

Fijemos $x \in X$. Por definición de base de Schauder es claro que

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x$$

y como consecuencia de la parte (i) de la observación 3.11 el conjunto de números reales $\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado, por lo que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Esto nos permite definir para cada $x \in X$ el número

$$\rho(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que:

(i) $\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ es claramente un conjunto de numeros reales no negativos por lo que $\rho(x) \geq 0$ para toda $x \in X$. $\rho(x) = 0$ implica que $P_n(x) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y entonces $x = 0$. Si $x = 0$ es claro que $\rho(x) = 0$.

(ii) Es evidente por las propiedades de el supremo que $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$ para cada $x \in X$ y cada escalar α.

(iii) Se cumple la desigualdad $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ para cada $x, y \in X$ porque:

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n(x+y)\| : n \in \mathbb{N}\} &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n(x)\| + \|P_n(y)\| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\} + \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n(y)\| : n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

Esto demuestra que ρ es una norma en X.

Lema 3.14 *La norma ρ es una norma completa equivalente a la norma original $\|\cdot\|$ de X y además $\rho(x) \geq \|x\|$ para cada $x \in X$.*

Demostración: La desigualdad $\rho(x) \geq \|x\|$ es evidente de la parte (ii) de la Observación 3.11. Para ver que ρ es una norma completa, sea $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X con respecto a ρ, entonces $y_m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(y_m)x_i$. Probaremos que $(x_i^*(y_m)x_i)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en la norma original, por lo que tiene límite $a_i x_i$ para algún a_i, entonces demostraremos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ converge y definiremos $y = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. Finalmente veremos que $y_m \to y$ en ρ.

Si $j > k$ tenemos que

$$\|(P_j - P_k)(y_m - y_n)\| \leq \|P_j(y_m - y_n)\| + \|P_k(y_m - y_n)\| \leq 2\rho(y_m - y_n).$$

En particular, si $j = k+1$ obtenemos que

$$\|x_j^*(y_m - y_n)x_j\| = |x_j^*(y_m - y_n)|\|x_j\| \leq 2\rho(y_m - y_n).$$

Esto es, $(x_j^*(y_m)x_j)_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en la norma original y por lo tanto tiene límite, es decir $\lim\limits_{m\to\infty} x_j^*(y_m)x_j = a_j x_j$ para algún escalar a_j. Ahora, dado $\varepsilon > 0$ escojamos $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m \geq m_0$, tengamos $\rho(y_m - y_n) < \varepsilon$. Entonces, si $n \to \infty$ se tiene que

$$\|(P_j - P_k)(y_m - y_n)\| = \|(P_j - P_k)y_m - \sum_{i=k+1}^{j} a_i x_i\| \leq 2\varepsilon.$$

Además, $\lim\limits_{k\to\infty} \|P_k(y_m) - y_m\| = 0$ implica que $(P_j(y_m))_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo que existe k_0 tal que si $j > k \geq k_0$, entonces

$$\|(P_j - P_k)y_m\| < \varepsilon.$$

Por lo cual tenemos que

$$\|\sum_{i=k+1}^{j} a_i x_i\| < 3\varepsilon,$$

cuando $j > k \geq k_0$. Es decir, la sucesión de las sumas parciales de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ es de Cauchy, y por la completitud de la norma original, converge a algún elemento y en X. Por la unicidad de la expansión de y, se sigue que $a_i = x_i^*(y)$ y $(P_j - P_k)y = \sum_{i=k+1}^{j} a_i x_i$. Como $\rho(y_m - y_n) < \varepsilon$, haciendo $n \to \infty$ tenemos que $\rho(y_m - y) \leq \varepsilon$ cuando $m \geq m_0$. Esto prueba que ρ es una norma completa.

Finalmente, el operador identidad $I : (X, \rho) \to (X, \|\cdot\|)$ es un operador lineal biyectivo, continuo porque $\rho(x) \geq \|x\|$. Por el Corolario 2.37, se sigue que I^{-1} es continuo, lo cual significa que ρ es una norma equivalente a la norma original en X. ■

Teorema 3.15 *Cada proyección canónica asociada a una base de Schauder de X es acotada, y por lo tanto continua.*

Demostración: Supongamos que $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X, y fijemos $n \in \mathbb{N}$. Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$ para alguna sucesión de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\rho(P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i)) = \rho(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) \leq \rho(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i),$$

donde la última desigualdad se sigue trivialmente de la definición de ρ. ■

Teorema 3.16 *Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal coordenado x_n^* es acotado y por lo tanto continuo.*

Demostración: Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Nótese que:

$$|x_n^*(x)| = \|P_n(x) - P_{n-1}(x)\| \leq 2\rho(x),$$

para toda $x \in X$ con $\|x\| = 1$. Así, x_n^* es un funcional acotado y por lo tanto continuo. ■

Llamaremos a $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión biortogonal asociada a la base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Teorema 3.17 *Si $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la familia de las proyecciones canónicas asociadas a una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de un espacio de Banach X, entonces:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Demostración: Si I es el operador identidad de (X, ρ) sobre $(X, \|\cdot\|)$, entonces

$$\|P_m(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n)\| \leq \|I\|\, \rho(P_m(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n)) \leq \|I\|\, \rho(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n)$$

$$\leq \|I\|\, \|I^{-1}\|\, \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\|,$$

tomando $\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\| = 1$ obtenemos que

$$\|P_m\| = \sup\{\|P_m(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n)\| : \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\| = 1\} \leq \|I\|\, \|I^{-1}\|,$$

siempre que $m \in \mathbb{N}$. Esto significa que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $\|P_m\| \leq C$ para toda $m \in \mathbb{N}$. ■

3.2. Sucesiones Básicas y Equivalencia de Bases

Definición 3.18 *Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una sucesión básica si es una base de Schauder para $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$.*

Definición 3.19 *Supongamos que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son sucesiones básicas en* X *y* Y *respectivamente. Decimos que* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son equivalentes si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ *converge en* X *si y sólo si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ *converge en* Y.

Teorema 3.20 *Dos sucesiones básicas* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son equivalentes si y sólo si existe un isomorfismo continuo* $T : [x_n]_{n\in\mathbb{N}} \to [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que* $Tx_n = y_n$ *para toda* $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Pongamos $X = [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y $Y = [y_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Necesidad. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes. Definamos $T : X \to Y$ por $T(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$. Es claro que T es un operador lineal biyectivo. Para probar que T es continuo usamos el Teorema de la Gráfica Cerrada 2.38. Supongamos que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a u en X y $T(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a v en Y. Escribamos $u_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u_j)x_n$ y $u = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u)x_n$. Se sigue de la continuidad de los funcionales biortogonales asociados a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ respectivamente que $x_n^*(u_j) \to x_n^*(u)$ y $y_n^*(T(u_j)) = x_n^*(u_j) \to y_n^*(v)$ cuando $j \to \infty$ y para cada $n \in \mathbb{N}$. Lo cual implica que $x_n^*(u) = y_n^*(v)$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $T(u) = v$ y T es continuo.

Suficiencia. Es claro que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son equivalentes si existe un isomorfismo T de X sobre Y tal que $T(x_n) = y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. ∎

Corolario 3.21 *Sean* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones básicas en* X *y* Y *respectivamente. Entonces,* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es equivalente a* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *si y solo si existe una constante* $C > 0$ *tal que para cualquier sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de escalares tenemos que*

$$C^{-1}\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\| \le \|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\| \le C\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n\|.$$

3.3. Construcción de Sucesiones Básicas

En esta sección, presentamos algunos criterios para construir bases de Schauder.

Teorema 3.22 *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X de vectores no cero. Entonces, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica si y sólo si existe $K \geq 1$ tal que para cada sucesión finita de escalares $(a_i)_{i=1}^n$, se satisface*

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$$

para todo $m \leq n$.

Demostración: Necesidad. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica. Entonces,

$$\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| = \|P_m(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i)\| \leq \|P_m\| \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq K \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|,$$

donde $K = sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\}$.

Suficiencia. Para cada sucesión finita de escalares $(a_i)_{i=1}^n$ y cada número entero $m < n$, definimos $p_m(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^m a_i x_i$. Se sigue por la hipótesis que cada p_m es un operador lineal acotado en el espacio $< \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} >$, con norma no mayor a K. Por el Teorema de Hahn-Banach 2.29, existe un único operador lineal continuo P_m que extiende a p_m a todo $[x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y tal que $\|P_m\| \leq K$. Dado $x \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$, escojamos $y = \sum_{i=1}^m a_i x_i \in< \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} >$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Entonces, para cada $n > m$,

$$\begin{aligned} \|P_n(x) - x\| &\leq \|P_n(x) - P_n(y)\| + \|P_n(y) - y\| + \|y - x\| \\ &\leq (\|P_n\| + 1) \cdot \varepsilon \leq (K + 1) \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

es decir, $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x$.

Es ahora sencillo demostrar que cada $x \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una expansión en terminos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Fijemos $x \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ y sea a_1 tal que $P_1(x) = a_1 x_1$. Notemos que $P_1 P_2(y) = P_1(y)$ para toda $y \in< \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} >$, y por lo tanto $P_1 P_2 = P_1$. Por lo cual, existe a_2 tal que $P_2(x) = \sum_{n=1}^2 a_n x_n$. Continuando de esta manera inductiva obtenemos una sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $P_m(x) = \sum_{n=1}^m a_n x_n$, para toda $m \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$x = \lim_{m\to\infty} P_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n.$$

Para ver la unicidad de la expansión, supongamos primero que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de escalares tales que

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i.$$

Entonces, si la condición se cumple, debemos tener la desigualdad

$$|\, a_1 - b_1|\, \|x_1\| \leq K\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i - \sum_{i=1}^{n} b_i x_i\|,$$

tomando el límite cuando $n \to \infty$ hallamos que

$$|\, a_1 - b_1|\, \|x_1\| \leq K\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i - \sum_{i=1}^{\infty} b_i x_i\| = 0,$$

así que $a_1 = b_1$. Se sigue facilmente por inducción que $a_i = b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para toda $x \in [x_n]_{n\in\mathbb{N}}$ existe una única sucesión de escalares $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ que cumple la condición $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$. ■

Teorema 3.23 *Sean $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en X y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ su correspondiente sucesión biortogonal. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no cero en X, y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|\, \|x_n^*\| = a < 1$, entonces $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Demostración: Sea $a_1, ..., a_{n+m}$ una sucesión finita de escalares. Entonces, para cada $i = 1, ..., n$, tenemos que

$$|a_i| = |x_i^*(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j)| \leq \| \sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|\, \|x_i^*\|,$$

por ser x_i^* acotado. Además,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\| &= \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + \sum_{j=1}^{n} a_j (y_j - x_j)\| \\
&\leq \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\| + \sum_{j=1}^{n} |a_j| \, \|x_j - y_j\| \\
&\leq \|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\| + \sum_{j=1}^{n} \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \, \|x_j - y_j\| \, \|x_j^*\| \\
&\leq (1+a)\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|.
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^{n+m} a_i y_i\| &= \|\sum_{i=1}^{n+m} a_i (x_i + y_i - x_i)\| \\
&\geq \|\sum_{i=1}^{n+m} a_i x_i\| - \|\sum_{i=1}^{n+m} a_i (y_i - x_i)\| \\
&\geq \|\sum_{i=1}^{n+m} a_i x_i\| - \sum_{i=1}^{n+m} |a_i| \|y_i - x_i\| \\
&\geq \|\sum_{i=1}^{n+m} a_i x_i\| - \sum_{i=1}^{n+m} (\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j x_j\| \|x_i^*\| \|y_i - x_i\|) \\
&\geq (1-a)\|\sum_{i=1}^{n+m} a_i x_i\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\| &\leq (1+a)\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\| \leq K(1+a)\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j x_j\| \\
&\leq K(\frac{1+a}{1-a})\|\sum_{j=1}^{n+m} a_j y_j\|,
\end{aligned}$$

donde K es la constante del Teorema 3.22 para $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, por ello $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, y claramente equivalente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ porque

$$\|\sum_{j=1}^{n} a_j y_j\| \leq (1+a)\|\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\|$$

y

$$\|\sum_{i=1}^{n+m} a_i y_i\| \geq (1-a)\|\sum_{i=1}^{n+m} a_i x_i\|.$$

■

3.4. Sucesiones Bloque y Sucesiones Simétricas

Definición 3.24 *Dada una sucesión básica $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X. Decimos que una sucesión no cero $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ en X es una sucesión bloque respecto de $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, si es de la forma:*

$$y_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_i x_i,$$

con escalares a_i y alguna sucesión de numeros naturales $p_1 < p_2 < \cdots$.

Proposición 3.25 *Una sucesión bloque $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ respecto de una sucesión básica $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica.*

Demostración: Para $m \leq n$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|\sum_{j=1}^{m} b_j y_j\| &= \|\sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_i x_i\| = \|\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} b_j a_i x_i\| \\
&\leq K\|\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} b_j a_i x_i\| = K\|\sum_{j=1}^{n} b_j y_j\|,
\end{aligned}$$

donde K es la constante del Teorema 3.22 para $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. ■

Definición 3.26 *Una sucesión básica* $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *se llama 1-simétrica si es equivalente a* $(x_{\tau(i)})_{i\in\mathbb{N}}$*, para todas las permutaciones* τ *de* $\mathbb{N}$*.*

Ejemplo 3.27 *La base canónica* $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de* ℓ_p*, es 1-simétrica. Esto es claro ya que*

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^{\infty} |a_{\tau(i)}|^p)^{\frac{1}{p}},$$

para cualquier permutación τ *de* $\mathbb{N}$*.*

3.5. Bases de Schauder y Dualidad

Dado un espacio de Banach X con una base de Schauder $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, podemos preguntarnos si la sucesión de funcionales biortogonales $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ asociados a $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ forman una base de Schauder para X^*. Hemos visto que este no es siempre el caso, por ejemplo si $X = \ell_1$ entonces $X^* = \ell_\infty$. Sin embargo, $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ resulta ser siempre una sucesión básica. A continuación veamos porque:

Dados escalares $a_1, a_2, ..., a_n$ y $\varepsilon > 0$, por la definición de $\|x_i^*\|$ podemos escoger $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i \in X$, con $\|x\| = 1$ de tal manera que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_i = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^\star(x) > \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\| - \varepsilon.$$

Si K es la constante del Teorema 3.22 para $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces

$$K = K\|x\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\|,$$

por lo cual, para $m > n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} K\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\| &\geq \|\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\|\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\| \geq \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i c_i > \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Como tomamos ε arbitrariamente, concluimos que

$$K\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*\| \geq \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\|,$$

es decir, la sucesión $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica.

Podemos ver también que si P_n es la proyección canónica asociada a $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces el operador adjunto P_n^* es la proyección canónica asociada a la sucesión básica $\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$. Sean m, k, n números naturales, con $m, k > n$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} P_n^*(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*)(\sum_{j=1}^{k} b_j x_j) &= \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*(P_n(\sum_{j=1}^{k} b_j x_j)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^*(\sum_{j=1}^{n} b_j x_j) = \sum_{i=1}^{n} b_i a_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*(\sum_{j=1}^{k} b_j x_j). \end{aligned}$$

Es decir, $P_n^*(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i x_i^*) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i^*$. El siguiente Teorema nos proporciona una condición necesaria y suficiente para saber cuando la sucesión $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X^*.

Teorema 3.28 *Sea $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para X y $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ su correspondiente sucesión biortogonal. Entonces, $(x_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X^* si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \|x^*\|_n = 0$, para cada $x^* \in X^*$, donde $\|x^*\|_n$ es la norma del funcional x^* restringida al conjunto $< \{x_i : i > n\} >$.*

Demostración: Necesidad. Si $\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para X^* y $x^* = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^* \in X^*$, es claro que

$$\lim_{n\to\infty} \|x^*\|_n = \lim_{n\to\infty} \|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i^*\| = 0,$$

para cada $x^* \in X^*$.

Suficiencia. Si $x^* \in X^*$, notemos que el funcional $x^* - \sum_{i=1}^n x^*(x_i)x_i^*$ se anula en el conjunto $< \{x_i : i \leq n\} >$. Si $y = \sum_{i=1}^n b_i x_i \in < \{x_i : i \leq n\} >$, se tiene que

$$(x^* - \sum_{i=1}^n x^*(x_i)x_i^*)(y) = \sum_{i=1}^n b_i x^*(x_i) - \sum_{i=1}^n b_i x^*(x_i) = 0,$$

porque $x^*(x_i)x_i^*(y) = b_i x^*(x_i)$ para cada $i \leq n$. Por lo que, si tomamos $x = \sum_{i=1}^\infty a_i x_i \in X$ y $\|x\| = 1$, se tiene para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\| \sum_{i=n+1}^\infty a_i x_i \| = \|x - \sum_{i=1}^n a_i x_i\| \leq \|x\| + \| \sum_{i=1}^n a_i x_i\| \leq 1 + K,$$

donde K es la constante del Teorema 3.22 para $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y además

$$\begin{aligned} |(x^* - \sum_{i=1}^n x^*(x_i)x_i^*)(x)| &= |x^*(\sum_{i=n+1}^\infty a_i x_i)| \leq \|x^*\|_n \| \sum_{i=n+1}^\infty a_i x_i\| \\ &\leq (1+K)\|x^*\|_n, \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\lim_{n\to\infty} \|x^* - \sum_{i=1}^n x^*(x_i)x_i^*\| \leq (1+K) \lim_{n\to\infty} \|x^*\|_n = 0.$$

Podemos concluir entonces que,

$$x^* = \sum_{i=1}^\infty x^*(x_i)x_i^*,$$

y así, $\{x_i^*\}_{i\in\mathbb{N}}$ resulta ser una base de Schauder para X^*. ■

3.6. Bases de Schauder y la Propiedad de la Aproximación

Definición 3.29 *Se dice que un espacio de Banach X tiene la Propiedad de la Aproximación, si para cada subconjunto compacto K de X y toda $\varepsilon > 0$, existe un operador acotado de rango finito $T : X \to X$ tal que $\|T(x) - x\| < \varepsilon$, para toda $x \in K$.*

Un corolario de los Teoremas 2.41 y 2.42 es que, si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de operadores de rango finito convergiendo uniformemente a un operador T, entonces T es compacto. La recíproca de esta afirmación es en realidad la Propiedad de la Aproximación. A. Grothendieck [5] mostró que un espacio de Banach X tiene la Propiedad de la Aproximación, si y sólo si para cada espacio de Banach Y, cada operador compacto $T : Y \to X$ y toda $\varepsilon > 0$ existe un operador de rango finito $S : Y \to X$ tal que $\|T - S\| < \varepsilon$. Una relación importante entre las bases de Schauder y la Propiedad de la Aproximación se enuncia en el siguiente teorema.

Teorema 3.30 *Si X tiene una base de Schauder, entonces X posee la Propiedad de la Aproximación.*

Demostración: Supongamos que X admite una base de Schauder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y que $M = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{\|P_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ donde $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de proyecciones canónicas asociadas a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Sea K un subconjunto compacto no vacío de X y tomemos $\varepsilon > 0$. Claramente la dimensión lineal de el rango de P_n es finita para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo que, será suficiente encontrar un número natural n_0 que satisfaga $\|P_{n_0}(x) - x\| < \varepsilon$, siempre que $x \in K$. Sean $y_1, ..., y_m$ elementos de K tal que para todo $y \in K$ tengamos que $d(y, y_j) < \varepsilon/(M+2)$ para algún $j \in \{1, ..., m\}$. Como $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = x$ para toda $x \in X$ podemos escoger $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|P_{n_0}(y_j) - y_j\| < \varepsilon/(M + 2)$ cuando $j = 1, ..., m$. Tomemos cualquier $x \in K$. Sea j_0 tal que $\|x - y_{j_0}\| < \varepsilon/(M + 2)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|P_{n_0}(x) - x\| &\leq \|P_{n_0}(x - y_{j_0})\| + \|P_{n_0}(y_{j_0}) - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - x\| \\
&\leq \|P_{n_0}\|\|x - y_{j_0}\| + \|P_{n_0}(y_{j_0}) - y_{j_0}\| + \|y_{j_0} - x\| \\
&\leq M\varepsilon/(M + 2) + \varepsilon/(M + 2) + \varepsilon/(M + 2) = \varepsilon,
\end{aligned}$$

lo cual termina la demostración. ■

Capítulo 4

Un subespacio ℓ_1-hereditario de L_1 sin la propiedad de Schur

Antes de comenzar daremos algunas definiciones y teoremas que estaremos utilizando en este capítulo.

Definición 4.1 *Supongamos que X y Y son espacios de Banach, y que X tiene dimensión lineal infinita. Entonces, X se dice Y-hereditario si cada subespacio X_0 de dimensión lineal infinita de X contiene a su vez un subespacio $Y_0 \subset X_0$ el cual es isomorfo a Y.*

Definición 4.2 *Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Schur si la convergencia débil y la convergencia en la norma de sucesiones son equivalentes, es decir, si una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X converge al elemento 0 débilmente si y sólo si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 en la norma.*

Teorema 4.3 **[Schur]** *El espacio de Banach ℓ_1 tiene la propiedad de Schur.*

Demostración: Demostraremos el Teorema por contradicción. Supondremos que existe una sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en ℓ_1 tal que $x^n \xrightarrow{w} 0$, pero que $\|x^n\|_1 \nrightarrow 0$. Entonces construiremos un funcional $f \in \ell_1^* = \ell_\infty$, tal que $f(x^n) \nrightarrow 0$.

Si suponemos $\|x^n\|_1 \nrightarrow 0$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente de números enteros $n_1 < n_2 < ...$ tal que $\|x^{n_j}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{n_j}| > \varepsilon$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Escojamos N_1 de tal manera que $\sum_{i=N_1+1}^{\infty} |x_i^{n_1}| < \varepsilon/5$. Entonces $\sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_1}| \geq 4\varepsilon/5$, que podemos reescribir como $\sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon_i^{n_1} x_i^{n_1} \geq 4\varepsilon/5$, donde $\varepsilon_i^{n_1} = |x_i^{n_1}|/x_i^{n_1}$ para cada $i \leq N_1$. Notemos que para cualquier sucesión $\{\varepsilon_i = \pm 1\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{n_1}$ si $i \leq N_1$ y para $i > N_1$ escojemos a ε_i de manera arbitraria, se tiene que

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i^{n_1}| &= |\sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon_i^{n_1} x_i^{n_1} + \sum_{i=N_1+1}^{\infty} \varepsilon_i x_i^{n_1}| \geq |\sum_{i=1}^{N_1} \varepsilon_i^{n_1} x_i^{n_1}| - \sum_{i=N_1+1}^{\infty} |x_i^{n_1}| \\ &\geq \frac{4}{5}\varepsilon - \frac{1}{5}\varepsilon = \frac{3}{5}\varepsilon. \end{aligned}$$

Ahora, como $x^n \xrightarrow{w} 0$, en particular $x_i^n = x_i^*(x^n) \to 0$, por lo que podemos encontrar n_{j_2} tal que $\sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_{j_2}}| < \varepsilon/5$. A continuación, escojamos $N_2 > N_1$ tal que tengamos $\sum_{i=N_2+1}^{\infty} |x_i^{n_{j_2}}| \leq \varepsilon/5$ y por consiguiente $\sum_{i=1}^{N_2} |x_i^{n_{j_2}}| \geq 4\varepsilon/5$. Entonces, para cualquier sucesión $\{\varepsilon_i = \pm 1\}_{i\in\mathbb{N}}$ que satisfaga $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{n_1}$ para $i \leq N_1$ y $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{n_{j_2}}$ cuando $N_1 < i \leq N_2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i^{n_{j_2}}| &\geq |\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \varepsilon_i x_i^{n_{j_2}}| - \sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_{j_2}}| - \sum_{i=N_2+1}^{\infty} |x_i^{n_{j_2}}| \\ &\geq |\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \varepsilon_i x_i^{n_{j_2}}| - \frac{2}{5}\varepsilon = \sum_{i=1}^{N_2} |x_i^{n_{j_2}}| - \sum_{i=1}^{N_1} |x_i^{n_{j_2}}| - \frac{2}{5}\varepsilon \\ &\geq \frac{4}{5}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{2}{5}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{5}. \end{aligned}$$

Si repetimos este proceso obtenemos una sucesión creciente de números enteros $1 \leq N_1 < N_2 < ...$ tal que $\sum_{i=1}^{N_{k-1}} |x_i^{n_{j_k}}| < \varepsilon/5$, $\sum_{i=N_k+1}^{\infty} |x_i^{n_{j_k}}| \leq \varepsilon/5$ y que implican $\sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_i^{n_{j_k}}| \geq 3\varepsilon/5$. Definiendo $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ por $u_i = \varepsilon_i^{n_k}$ para $N_{k-1} \leq i \leq N_k$, es claro que $u \in \ell_\infty$. Consideremos ahora el funcional correspondiente a u definido sobre ℓ_1 por la fórmula $f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i u_i$ para cada $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
|f(x^{n_{j_k}})| &= |\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i^{n_{j_k}}| \\
&\geq \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_i^{n_{j_k}}| - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} |x_i^{n_{j_k}}| - \sum_{i=N_k+1}^{\infty} |x_i^{n_{j_k}}| \\
&\geq \frac{3}{5}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{5},
\end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Es decir $f(x^{n_{j_k}}) \nrightarrow 0$ contradiciendo nuestra hipótesis. ■

En el presente capítulo presentamos la construcción hecha por M. M. Popov de subespacios de L_1 que son ℓ_1-hereditarios y que no tienen la propiedad de Schur. La construcción se realiza en el espacio de Banach

$$W = (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_{p_n})_1,$$

donde $\infty > p_1 > p_2 > \cdots > 1$. Como W encaja isométricamente en L_1 para $p_1 \leq 2$, la construcción proporciona los ejemplos que buscamos.

Fijemos una sucesión decreciente de numeros reales $p_1 > p_2 > \cdots > 1$, y consideremos el espacio correspondiente W definido anteriormente. Para toda $n \in \mathbb{N}$, $(\overline{e}_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$ denotará la base canónica de ℓ_{p_n} y $(e_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$ indicará su copia natural en W, esto es, para toda $i \in \mathbb{N}$:

$$e_{i,n} = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, \overline{e}_{i,n}, 0, \cdots) \in W.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escojamos $\delta_n > 0$ tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n = 1$. Para cada $i \geq 1$ hagamos $z_i = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n e_{i,n}$. Evidentemente $\|z_i\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\,\delta_n|\,\|e_{i,n}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n = 1$.

Sea $Z = [z_i]_{i\in\mathbb{N}}$. Afirmamos que Z es un subespacio ℓ_1-hereditario de L_1 sin la propiedad de Schur. El paso más complicado de la construcción es probar que Z es ℓ_1-hereditario. Dado un subespacio Z_0 de Z, de dimensión lineal infinita, la técnica de M. M. Popov es construir una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en

Z_0 y una sucesión básica $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en Z, que sea una sucesión bloque respecto de la sucesión básica $(z_i)_{i\in\mathbb{N}}$, de tal manera que se encuentre lo suficientemente cerca de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y que sea equivalente a la base canónica de ℓ_1. La estabilidad de las bases de Schauder nos asegurará que $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sea también equivalente a la base canónica de ℓ_1.

Para cada $I \subseteq \mathbb{N}$, por P_I nos estaremos refiriendo a la proyección natural de W sobre el conjunto $\{e_{i,n} : i \in \mathbb{N}, n \in I\}$.

Proposición 4.4 *Para toda sucesión finita de escalares $(a_i)_{i=1}^m$ y cada permutación de enteros $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tenemos que*

$$\|\sum_{i=1}^m a_i z_{\tau(i)}\| = \sum_{n=1}^\infty \delta_n (\sum_{i=1}^m |a_i|^{p_n})^{\frac{1}{p_n}}.$$

Por consiguiente, $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica 1-simétrica.

Demostración: La demostración es inmediata:

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i=1}^m a_i z_{\tau(i)}\| &= \|\sum_{i=1}^m a_i \sum_{n=1}^\infty \delta_n e_{\tau(i),n}\| = \|\sum_{n=1}^\infty \delta_n \sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),n}\| \\
&= \|\delta_1 \sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),1} + \delta_2 \sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),2} + \cdots + \delta_n \sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),n} + \cdots\| \\
&= \delta_1 \|\sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),1}\| + \delta_2 \|\sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),2}\| + \delta_3 \|\sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),3}\| + \cdots + \\
&= \sum_{n=1}^\infty \delta_n \|\sum_{i=1}^m a_i e_{\tau(i),n}\| = \sum_{n=1}^\infty \delta_n (\sum_{i=1}^m |a_i|^{p_n})^{\frac{1}{p_n}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si la serie $\sum_{i=1}^\infty a_i z_i$ converge, entonces $\sum_{i=1}^\infty |a_i|^{p_n} < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. ■

Proposición 4.5 *La sucesión $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a cero.*

Demostración: Tomemos $z^* \in Z^*$, $\|z^*\| = 1$, y $\varepsilon > 0$. Escojamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora, por el Teorema 2.33, $e_{i,n} \xrightarrow{w} 0$ cuando $i \to 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo cual podemos escoger un número entero K tal que si $n = 1, ..., N$ y $k \geq K$, entonces,

$$|z^*(e_{k,n})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como además $\sum\limits_{n=1}^{N} \delta_n < 1$, tenemos entonces que para cada $k \geq K$,

$$\begin{aligned}
|z^*(z_k)| &= |z^*(\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n e_{k,n})| = |z^*(\sum_{n=1}^{N} \delta_n e_{k,n}) + z^*(\sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n e_{k,n})| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N} \delta_n |z^*(e_{k,n})| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n |z^*(e_{k,n})| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{N} \delta_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.6 *Sean Z_0 un subespacio de Z de dimensión lineal infinita, n, m, $j \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existen $(x_i)_{i=1}^m \subset Z_0$ y $(u_i)_{i=1}^m \subset Z$ de la forma*

$$u_i = \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} a_{i,s} z_s \ \text{ donde } \ j = j_1 < j_2 < ... < j_{m+1},$$

tal que

$$\sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} |a_{i,s}|^{p_{n-1}} = 1 \ \text{ y } \ \|u_i - x_i\| < \frac{\varepsilon}{m} \|u_i\|,$$

para cada $i = 1, ..., m$.

Demostración: Consideremos el subespacio $[z_i]_{i=j+1}^{\infty}$ de Z. Como Z_0 tiene dimensión lineal infinita y el subespacio $Z \backslash [z_i]_{i=j+1}^{\infty}$ está generado por el conjunto $\{z_i : i \leq j\}$, entonces $Z_0 \cap [z_i]_{i=j+1}^{\infty}$ tiene dimensión lineal infinita también, por lo que existe $x \in Z_0 \cap [z_i]_{i=j+1}^{\infty}$, con $\|x\| = 1$. Construiremos inductivamente las sucesiones deseadas.

Hagamos $j_1 = j$ y escojamos de manera arbitraria

$$\overline{x}_1 = \sum_{s=j_1+1}^{\infty} \overline{a}_{1,s} z_s \in Z_0 \cap [z_i]_{i=j+1}^{\infty} \setminus \{0\},$$

para alguna sucesión de escalares $(\overline{a}_{1,s})_{s=j_1+1}^{\infty}$.

Sin perdida de generalidad, podemos suponer que

$$\sum_{s=j_1+1}^{\infty} |\overline{a}_{1,s}|^{p_{n-1}} = 1.$$

A continuación escojamos $j_2 > j_1$ de tal manera que para

$$\overline{u}_1 = \sum_{s=j_1+1}^{j_2} \overline{a}_{1,s} z_s$$

se cumplan las siguientes condiciones:

$$\|\overline{u}_1 - \overline{x}_1\| < \frac{\varepsilon \|\overline{x}_1\|}{4m}, \quad \lambda_1 = (\sum_{s=j_1+1}^{j_2} |\overline{a}_{1,s}|^{p_{n-1}})^{\frac{1}{p_{n-1}}} \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{y} \quad \|\overline{u}_1\| \geq \frac{\|\overline{x}_1\|}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\|\overline{u}_1 - \overline{x}_1\| < \frac{\varepsilon \|\overline{x}_1\|}{4m} \leq \frac{\varepsilon \|\overline{u}_1\|}{2m}.$$

Ahora, hagamos $a_{1,s} = \lambda_1^{-1} \overline{a}_{1,s}$, $x_1 = \lambda_1^{-1} \overline{x}_1$ y $u_1 = \lambda_1^{-1} \overline{u}_1$. De esta manera podemos concluir que,

$$\sum_{s=j_1+1}^{j_2} |a_{1,s}|^{p_{n-1}} = \frac{1}{\lambda_1^{p_{n-1}}} \sum_{s=j_1+1}^{j_2} |\overline{a}_{1,s}|^{p_{n-1}} = 1,$$

y también

$$\|u_1 - x_1\| = \frac{1}{\lambda_1}\|\overline{u}_1 - \overline{x}_1\| < \frac{\varepsilon\|\overline{u}_1\|}{2\lambda_1 m} \leq \frac{\varepsilon\|\overline{u}_1\|}{m} \leq \frac{\varepsilon\|u_1\|}{m}.$$

Si continuamos con este procedimiento obtenemos las sucesiones deseadas. ■

Lema 4.7 *Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $m \in \mathbb{N}$ satisface*

$$\frac{1}{\delta_n} m^{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}} < \varepsilon.$$

Entonces,

(i) $\|P_{\mathbb{N}\setminus n}(u)\| \geq (1-\varepsilon)\|u\|$,

(ii) $\|x - u\| < \varepsilon\|u\|$,

con

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i \quad y \quad u = \sum_{i=1}^{m} u_i,$$

donde $(x_i)_{i=1}^m \subset Z_0$ y $(u_i)_{i=1}^m \subset Z$ están dadas por el Lema 4.6.

Demostración: Primero probemos la parte (ii). Por la Proposición 4.4, la base $\{z_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ es 1-simétrica, lo cual implica que $\|u_i\| \leq \|u\|$, para $i = 1, ..., m$ y además

$$\|x - u\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|x_i - u_i\| < \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon\|u_i\|}{m} < \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon\|u\|}{m} = \varepsilon\|u\|.$$

Para probar la parte (i), notemos primero que

$$\begin{aligned}
\|u\| - \|P_{\mathbb{N}\setminus n}(u)\| &= \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \| \sum_{i=1}^{m} P_{\{k\}}(u_i)\| = \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k \| \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} a_{i,s} e_{s,k}\| \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k (\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} |a_{i,s}|^{p_k})^{\frac{1}{p_k}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k (\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} |a_{i,s}|^{p_{n-1}})^{\frac{1}{p_{n-1}}} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k (\sum_{i=1}^{m} 1)^{\frac{1}{p_{n-1}}} = m^{\frac{1}{p_{n-1}}} \sum_{k=1}^{n-1} \delta_k < m^{\frac{1}{p_{n-1}}},
\end{aligned}$$

es decir, $\|u\| - \|P_{\mathbb{N}\setminus n} u\| < m^{\frac{1}{p_{n-1}}}$. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\|u\| &= \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k \| \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} a_{i,s} e_{s,k}\| \geq \delta_n \| \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} a_{i,s} e_{s,k}\| \\
&= \delta_n (\sum_{i=1}^{m} \sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} |a_{i,s}|^{p_n})^{\frac{1}{p_n}} \\
&\geq \delta_n (\sum_{i=1}^{m} (\sum_{s=j_i+1}^{j_{i+1}} |a_{i,s}|^{p_{n-1}})^{\frac{p_n}{p_{n-1}}})^{\frac{1}{p_n}} \\
&= \delta_n (\sum_{i=1}^{m} 1)^{\frac{1}{p_n}} = \delta_n m^{\frac{1}{p_n}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, juntando estos dos últimos resultados hallamos que

$$1 - \frac{\|P_{\mathbb{N}\setminus n}(u)\|}{\|u\|} \leq \frac{1}{\delta_n} m^{\frac{1}{p_{n-1}} - \frac{1}{p_n}} < \varepsilon,$$

ó lo que es lo mismo, $\|P_{\mathbb{N}\setminus n}(u)\| \geq (1-\varepsilon)\|u\|$.

Teorema 4.8 *Z es ℓ_1-hereditario y no tiene la propiedad de Schur.*

Demostración: Por la Proposición 4.5, Z no tiene la propiedad de Schur. Probemos entonces que Z es ℓ_1-hereditario. Dado un subespacio Z_0 de Z de dimensión lineal infinita, usamos el Lema 4.7 para construir inductivamente sucesiones $(x_s)_{s\in\mathbb{N}}$ en Z_0, $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ en Z de la forma

$$u_s = \sum_{i=j_s+1}^{j_{s+1}} a_i z_i,$$

donde $j_1 < j_2 < ...$ y $\|u_s\| = 1$, y una sucesión $1 \leq n_1 < n_2 < ...$, de manera que se satisfaga lo siguiente:

(*i*) $\|P_{\mathbb{N}\setminus n_s}(u_s)\| \geq \frac{7}{8}$,

(*ii*) $\|u_s - x_s\| \leq 2^{-s-1}$,

(*iii*) $\|P_{\mathbb{N}\setminus n_{s+1}}(u_s)\| < \frac{1}{8}$.

Veamos que ésto se puede hacer. Sean $j_1 = n_1 = 1$ y $\varepsilon_1 = \frac{1}{8}$. Escojamos por el Lema 4.7 un elemento $x_1 \in Z \setminus \{0\}$ y

$$u_1 = \sum_{i=j_1+1}^{j_2} a_i z_i,$$

tal que $\|u_1\| = 1$, $\|P_{\mathbb{N}\setminus n_1}(u_1)\| \geq 1 - \epsilon_1 = \frac{7}{8}$ y $\|x_1 - u_1\| < \varepsilon_1 < \frac{1}{4}$. Tomemos n_2 de tal modo que $\|P_{\mathbb{N}\setminus n_2}(u_1)\| < \frac{1}{8}$. Repitiendo este proceso, construimos las sucesiones deseadas.

Por la parte (iii) y dado que $\|u_s\| = 1$, obtenemos

(*iv*) $\|u_s - P_{\mathbb{N}\setminus n_s}(u_s)\| \leq \frac{1}{8}$.

Afirmamos que $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a la base vectorial unitaria $\{\overline{e}_{i,1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de ℓ_1. Efectivamente, para $s \geq 1$, pongamos $v_s = P_{\mathbb{N}\setminus n_s}(u_s) - P_{\mathbb{N}\setminus n_{s+1}}(u_s)$. Sabemos que $\|v_s\| \geq \frac{3}{4}$, y para cada sucesión de escalares $(a_s)_{s=1}^{m}$ tenemos

$$\|\sum_{s=1}^{m} a_s v_s\| = \sum_{s=1}^{m} |a_s| \|v_s\| \geq \frac{3}{4} \sum_{s=1}^{m} |a_s|,$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned}
\|\sum_{s=1}^{m} a_s u_s\| &\geq \|\sum_{s=1}^{m} a_s v_s\| - \|\sum_{s=1}^{m} a_s (u_s - v_s)\| \\
&\geq \frac{3}{4}\sum_{s=1}^{m} |a_s| - \|\sum_{s=1}^{m} a_s (u_s - P_{\mathbb{N}\setminus n_s}(u_s)) + \sum_{s=1}^{m} a_s P_{\mathbb{N}\setminus n_{s+1}}(u_s)\| \\
&\geq \frac{3}{4}\sum_{s=1}^{m} |a_s| - \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{m} |a_s| - \frac{1}{8}\sum_{s=1}^{m} |a_s| = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m} |a_s| = \frac{1}{2}\|\sum_{s=1}^{m} a_s \overline{e}_{s,1}\|.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\|\sum_{s=1}^{m} a_s u_s\| \leq \sum_{s=1}^{m} |a_s|\,\|u_s\| = \sum_{s=1}^{m} |a_s| = \|\sum_{s=1}^{m} a_s \overline{e}_{s,1}\|.$$

Esto es, $(u_s)_{s\in\mathbb{N}}$ es una sucesón básica equivalente a la base canónica $\{\overline{e}_{i,1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de ℓ_1.

Notemos ahora que, si $y \in [u_s]_{s\in\mathbb{N}}$ es tal que $\|y\| = 1$, entonces

$$\|u_s^*\| = \sup_{\|y\|=1} \{\|u_s^*(y)\|\} \leq 1,$$

donde $\{u_s^*\}_{s\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funcionales biortogonales asociados a la sucesión básica $\{u_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, ésto porque debido a la construcción de $\{u_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ cada $y \in [u_s]_{s\in\mathbb{N}}$ estará expresado en terminos de la base $(e_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$ y así ningún y con $\|y\| = 1$ podrá tener coeficientes mayores que 1.

Finalmente, usando este último hecho y además que $\|u_s - x_s\| \leq 2^{-s-1}$, tenemos que

$$\sum_{s=1}^{\infty} \|u_s - x_s\|\,\|u_s^*\| < 1,$$

por lo que como resultado del Teorema 3.23, $\{x_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{u_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ y por lo tanto tambien es equivalente a la base unitaria $\{e_{i,1}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de ℓ_1. ■

Teorema 4.9 [12] *El espacio de Banach $W = (\sum_{n=1}^{\infty} \ell_{p_n})_1$ se encaja isométricamente en L_1.*

Corolario 4.10 *L_1 contiene subespacios ℓ_1-hereditarios sin la propiedad de Schur.*

Capítulo 5

Espacios de Erdős

Antes de comenzar recordemos brevemente algunas nociones topológicas. Un conjunto en un espacio topológico es *abierto y cerrado* si y sólo si tiene frontera vacía. Un espacio tiene dimensión topológica 0, o es $0-$*dimensional*, si tiene una base de abiertos y cerrados. Si A es un subespacio de un espacio de Hausdorff localmente compacto y A es abierto o cerrado, entonces es localmente compacto. Es bien sabido que en espacio topológico Hausdorff localmente compacto es $0-$dimensional si y sólo si es totalmente disconexo.

Fijemos un número real $p \geq 1$. En este capítulo la topología sobre el espacio de Banach ℓ_p será la generada por la p-norma $\|\cdot\|_p$.

Sea $E_1, E_2, ...$ una sucesión fija de subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, consideremos entonces el siguiente subespacio de ℓ_p,

$$\mathcal{E} = \{z \in \ell_p : z_n \in E_n \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $p = 2$ y $E_n = \mathbb{Q}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ llamamos a $\mathcal{E}$ el *Espacio de Erdős* $\mathfrak{E}$, esto es,

$$\mathfrak{E} = \{z \in \ell_2 : z_n \in \mathbb{Q} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\},$$

y si $E_n = \mathbb{P}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos el *Espacio de Erdős completo*, $\mathfrak{E}_c$

$$\mathfrak{E}_c = \{z \in \ell_2 : z_n \in \mathbb{P} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Comenzaremos estudiando la relación existente entre las topologias producto y la generada por la p-norma sobre ℓ_p.

Lema 5.1 *Sea τ la topología generada por la p-norma sobre ℓ_p, y sea τ' la topología producto sobre ℓ_p heredada como subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Entonces τ es más fina que τ'.*

Demostración: Consideremos un elemento básico $W = \prod_{i\in\mathbb{N}} W_i$ para la topología producto de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sabemos que W_i es abierto en $\mathbb{R}$ y $W_i = \mathbb{R}$ para toda $i \in \mathbb{N}$ excepto para una cantidad finita de índices $i_1, ..., i_k$, con $k \in \mathbb{N}$. Un elemento básico de ℓ_p en la topología producto es de la forma $V = W \cap \ell_p$. Dado $x \in V$ encontraremos una bola abierta U en la topología norma, tal que $x \in U \subset V$. Escojamos un intervalo $(x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i)$ contenido en V_i para cada $i = i_1, ..., i_k$, tal que $\varepsilon_i < 1$ y definamos

$$\varepsilon = min\{\varepsilon_i : i = i_1, ..., i_k\}.$$

Ahora veamos que la bola de radio ε centrada en x definida por la topología norma está contenida en V, esto es $B(x,\varepsilon) \subset V$. Tomemos $y \in B(x,\varepsilon)$. Entonces,

$$\|y - x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

y como

$$|y_i - x_i| \leq (\sum_{i=1}^{\infty} |y_i - x_i|^p)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \leq \varepsilon_i,$$

tenemos que $y_i \in (x_i - \varepsilon_i, x_i + \varepsilon_i) \subseteq V_i$ para toda $i = i_1, ..., 1_k$. Por lo tanto, $y \in V$ y concluimos que $\tau' \subset \tau$. ■

No es difícil ver que éstas dos topologías no son equivalentes. Siguiendo la misma notación del Lema 5.1, sea $\varepsilon > 0$ y $B(0,\varepsilon) \in \tau$. Tomemos $y \in B(0,\varepsilon)$. Si V es cualquier básico en la topología producto sobre ℓ_p, tal que $y \in V$, entonces $z = (0,0,0,...,0,\varepsilon,0,0,...) \in V$, en donde el escalar ε se encuentra en la entrada j para cualquier $j \notin \{i_1, ..., i_k\}$. Tenemos entonces que $\|z\| = \varepsilon$ y por lo tanto $z \notin B(0,\varepsilon)$, es decir $V \nsubseteq B(0,\varepsilon)$ y por consecuencia $\tau \nsubseteq \tau'$.

Lema 5.2 *Sea $k \in \mathbb{N}$, sea C el conjunto definido por:*

$$C = \{x \in \mathcal{E} : a_i < x_i < b_i \text{ para todo } i < k\},$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{R}\backslash E_i$. Entonces, C es abierto y cerrado como subconjunto de $\mathcal{E}$ en la topología generada por la p-norma.

Demostración: Probemos primero que C es abierto. Sea $U = V \cap \ell_p$, donde $V = \prod_{i\in\mathbb{N}} V_i$ con $V_i = (a_i, b_i)$ si $i < k$ y $V_i = \mathbb{R}$ si $i \geq k$, entonces U es subconjunto abierto de ℓ_p en la topología producto y además U es también abierto en la topología norma como consecuencia del Lema 5.1. Notemos que $C = U \cap \mathcal{E}$, por ello C es abierto en $\mathcal{E}$.

La demostración de que C es un conjunto cerrado es muy similar. Sea F el conjunto cerrado en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dado por:

$$F = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots.$$

Entonces $F \cap \ell_p$ es cerrado en ℓ_p con la topología producto y por lo tanto también en la topología norma por Lema 5.1. Por lo que $C = F \cap \mathcal{E}$ es cerrado en $\mathcal{E}$. ■

El siguiente teorema nos permite saber cuando un espacio $\mathcal{E}$ tiene dimensión topológica positiva.

Teorema 5.3 *Supongamos que $\mathcal{E}$ es no vacío y que cada E_n es 0-dimensional. Para todo $k \in \mathbb{N}$ definamos una sucesión $\eta^k \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ como sigue:*

$$\eta_n^k = \sup\{|a| : a \in E_n \cap [-1/k, 1/k]\}, \text{ donde } \sup\emptyset = 0.$$

Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|\eta^n\| < \infty$, entonces dim $\mathcal{E} = 0$.

Demostración: Procedamos por contradicción. Sea n un número natural que cumpla $\|\eta^n\| < \infty$. Tomemos $z \in \mathcal{E}$ y $\varepsilon \in (0, 1/n)$. Escojamos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} (\eta_i^n)^p < \frac{\varepsilon^p}{2} \quad \text{y} \quad \sum_{i=k}^{\infty} |z_i|^p < \varepsilon^p.$$

Definimos $z' \in \ell_p$ por $z'_i = z_i$ si $i < k$, y $z'_i = 0$ si $i \geq k$, por lo que

$$\|z - z'\| = \sum_{i=k}^{\infty} |z_i|^p < \varepsilon^p.$$

Hagamos $\delta = \varepsilon/(2k)^{1/p}$ y sea $i < k$. Como E_i es 0-dimensional, podemos escoger a_i y b_i en $\mathbb{R} \setminus E_i$ tal que $z_i - \delta < a_i < z_i = z'_i < b_i < z_i + \delta$. Consideremos el siguiente subconjunto de $\mathcal{E}$:

$$C = \{x \in \mathcal{E} : a_i < x_i < b_i \text{ para todo } i < k\},$$

el cual por el Lema 5.2 es una vecindad abierta y cerrada de z en $\mathcal{E}$. Sea $U = \{x \in C : \|x - z'\| \leq \varepsilon\}$. Es claro que U es una vecindad cerrada de z en $\mathcal{E}$ con diámetro menor o igual a 2ε. Veamos que U es también abierto en $\mathcal{E}$. Tomemos $x \in U$. Si $i \geq k$, entonces $|x_i| = |x_i - z_i'| \leq \|x - z'\| \leq \varepsilon < 1/n$. Esto significa que $x_i \in E_i \cap [-1/n, 1/n]$ y por definición de supremo tenemos $|x_i| \leq \eta_i^n$, por lo cual

$$\sum_{i=k}^{\infty} |x_i - z_i'|^p = \sum_{i=k}^{\infty} |x_i|^p \leq \sum_{i=k}^{\infty} (\eta(n)_i)^p < \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Por otra parte, como $x \in C$ tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k-1} |x_i - z_i'|^p < k\delta^p = \frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\|x - z'\| = \sum_{i=1}^{k-1} |x_i - z_i'|^p + \sum_{i=k}^{\infty} |x_i - z_i'|^p < \varepsilon$$

y x es entonces punto interior de U. Como U es una vecindad abierta y cerrada de z con menor diámetro, tenemos que $dim\,\mathcal{E} = 0$. ■

Teorema 5.4 *Supongamos que $\mathcal{E}$ es no vacío y que cada E_n es 0-dimensional. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) $\|\eta^k\| = \infty$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*;*

(2) *Existe una* $x \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$*, con* $\|x\| = \infty$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$*;*

(3) *Todo subconjunto no vacío, abierto y cerrado de* $\mathcal{E}$ *es no acotado; y*

(4) $dim\,\mathcal{E} > 0$.

Demostración: (1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que, $\|\eta^k\| = \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Queremos encontrar una $x \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ con $\|x\| = \infty$ y $lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Para lograr ésto, construiremos sucesiones $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}$ creciente y $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en

$\mathbb{R}$, a partir de las cuales definiremos x, y que cumplan dos cosas para todo $k \in \mathbb{N}$:

(i) $y_m \in \{0\} \cup \{E_m \cap [-1/k, 1/k]\}$, para $n_{k-1} \leq m < n_k$, y

(ii) $\sum_{m=1}^{n_k-1} |y_m|^p \geq k$.

Hacemos $n_0 = 1$ para poder definir y_1, y suponemos que ya hemos construido n_0,...,n_{k-1} y y_1,...,$y_{n_{k-1}-1}$. Por definición de supremo podemos escoger para toda $m \in \mathbb{N}$ un $a_m \in \{0\} \cup \{E_m \cap [-1/k, 1/k]\}$, con $|a_m| \geq \frac{1}{2}\eta^k_m$. Como $\|a\| \geq \frac{1}{2}\|\eta^k\| = \infty$, podemos escoger el n_k tal que

$$\sum_{m=n_{k-1}}^{n_k-1} |a_m|^p \geq 1.$$

Si definimos $y_m = a_m$ para $n_{k-1} \leq m < n_k$, las hipótesis (i) y (ii) se satisfacen claramente. Además por (i), $lim_{m\to\infty} y_m = 0$, y por (ii), vemos que $\|y\| = \infty$. Fijamos ahora una $z \in \mathcal{E}$ y definamos $x \in \prod_{m=1}^{\infty} E_m$ por $x_m = y_m$ si $y_m \neq 0$, y $x_m = z_m$ si $y_m = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que existe una $x \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ con $\|x\| = \infty$ y $lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Demostraremos que todo subconjunto A no vacío y acotado de $\mathcal{E}$ tiene frontera no vacía y por lo tanto no es abierto y cerrado en $\mathcal{E}$. Sea entonces A un subconjunto no vacío y acotado de $\mathcal{E}$. Escojamos una $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|z\| \leq M$ para toda $z \in A$. Para $i \in \mathbb{N}$ consideremos la proyección $\chi_i : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \ell_p$, dada por $\chi_i(z) = (z_1, ..., z_i, 0, 0, ...)$. Mediante inducción construiremos sucesiones $a^0, a^1, ...$ en A y $n_0 < n_1 < ...$ en $\mathbb{N}$ tal que, para toda $i \geq 1$, se cumpla lo siguiente:

(a) $\chi_{n_i}(a^i) = \chi_{n_i}(a^{i-1})$,

(b) $\|a^{i-1} - \chi_{n_i}(a^{i-1})\| < 2^{-i}$, y

(c) la distancia entre a^i y el conjunto $\mathcal{E}\backslash A$ sea menor que 2^{-i}.

Hagamos $n_0 = 1$ y escojamos $a^0 \in A$. Supongamos que ya hemos construido hasta a^{i-1} y n_{i-1}. Seleccionamos un número natural n_i tal que $n_i > n_{i-1}$, $|x_j| < 2^{-i-1}$ para toda $j > n_i$, y $\|a^{i-1} - \chi_{n_i}(a^{i-1})\| < 2^{-i-1}$, satisfaciendo de esta manera la condición (b). Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos $b^j \in \mathcal{E}$ como sigue:

$$b^j_m = \begin{cases} x_m, \ si \ n_i < m \leq n_i + j, \\ a^{i-1}_m, \ en \ otro \ caso. \end{cases}$$

Es claro que $b^0 = a^{i-1} \in A$, y como por hipótesis $\|x\| = \infty$, se sigue facilmente que

$$\lim_{j\to\infty} \|b^j\| \geq (\sum_{m=n_i+1}^{\infty} |x_m|^p)^{\frac{1}{p}} = \infty.$$

Como A es acotado existe una $j \in \mathbb{N}$ tal que $b^j \in A$ y $b^{j+1} \notin A$. Si definimos $a^i = b^j$ la hipótesis (a) se cumple. Para probar (3) notemos que para $j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|b^{j+1} - b^j\| &= |x_{n_i+j+1} - a^{i-1}_{n_i+j+1}| \leq |x_{n_i+j+1}| + |a^{i-1}_{n_i+j+1}| \\ &< 2^{-i-1} + \|a^{i-1} - \mathcal{E}_{n_i}(a^{i-1})\| < 2^{-i}. \end{aligned}$$

Esto completa la inducción.

Por hipótesis (a) existe una $c \in \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ tal que $\chi_{n_{i+1}}(c) = \chi_{n_{i+1}}(a^i)$ para todo $i \geq 0$. Y por lo tanto,

$$\|c\| = \lim_{i\to\infty} \|\chi_{n_{i+1}}(a^i)\| \leq \lim_{i\to\infty} \|a^i\| \leq M,$$

esto es $c \in \mathcal{E}$. Para finalizar observemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{i\to\infty} \|c - a^i\| &\leq \lim_{i\to\infty}(\|c - \chi_{n_{i+1}}(c)\| + \|\chi_{n_{i+1}}(a^i) - a^i\|) \\ &\leq 0 + \lim_{i\to\infty} 2^{-i-1} = 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $c \in \overline{A}$. Por otro lado, por (c), $d(a^i, \mathcal{E}\backslash A) < 2^{-i}$ y cuando $i \to \infty$ tenemos que $d(c, \mathcal{E}\backslash A) = 0$ esto es, $c \in \overline{\mathcal{E}\backslash A}$. Por lo cual podemos concluir que $c \in Fr(A)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Supongamos que $dim\, \mathcal{E} = 0$. Escojamos una $x \in \mathcal{E}$ y sea $B(x,r)$ la bola centrada en x de radio r. Como $\mathcal{E}$ tiene una base de abiertos y cerrados, podemos encontrar un conjunto C abierto y cerrado en $\mathcal{E}$ y tal que $x \in C \subset B(x,r)$. Claramente C es acotado. Y por lo tanto, existe un subconjunto no vacío de $\mathcal{E}$ abierto, cerrado y acotado.

(4) $\Rightarrow$ (1). Es una consecuencia directa del Teorema 5.3. ■

Sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio X entonces definimos:

$$\text{lím sup}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}.$$

Corolario 5.5 *Si* 0 *es un punto límite de* $limsup_{n\to\infty}E_n$*, entonces todo subconjunto no vacío, abierto y cerrado de* $\mathcal{E}$ *es no acotado (y por lo tanto* $dim\,\mathcal{E} > 0$*).*

Demostración: Si $\mathcal{E} = \emptyset$ el resultado es obvio. Supongamos que $\mathcal{E} \neq \emptyset$ y $n \in \mathbb{N}$. Por hipótesis podemos elegir $t \in limsup_{k\to\infty}E_k$ tal que $0 < |t| < 1/n$. Escojamos una sucesión $k_0 < k_1 < k_2 < ...$ en $\mathbb{N}$ de manera que exista, para toda $j \in \mathbb{N}$, una $t_j \in E_{k_j}$ con $lim_{j\to\infty}t_j = t$. Podemos suponer que para cada $j \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}|t| < |t_j| < 1/n$. Como $t_j \in E_{k_j} \cap [-1/n, 1/n]$ tenemos que $\eta(n)_{k_j} \geq |t_j| > \frac{1}{2}|t|$ para toda $j \in \mathbb{N}$ y por ello $\|\eta(n)\| = \infty$. El resultado del corolario se sigue como consecuencia del Teorema 5.4. ■

La topología norma sobre ℓ_p es la topología más débil que hace a todas las proyecciones coordenadas $z \to z_i$ y a la función norma continuas. Esto significa que la gráfica de la función p-norma de ℓ_p con la topología producto a $\mathbb{R}$, es homeomorfa a ℓ_p. Pero esto simplemente nos dice que la topología norma sobre las esferas $S_{\mathcal{E}} = \{x \in \ell_p : \|x - a\| = 1\}$ coincide con la topología producto, por lo cual las esferas en $\mathcal{E}$ son 0-dimensionales siempre que los E_n sean 0-dimensionales. Por lo tanto, $dim\,\mathcal{E} \leq 1$ en éste caso particular.

A continuación presentamos los conceptos de una *función de Lelek* y un *fan de Lelek* los cuales usaremos para demostrar más adelante un criterio de fácil aplicación para saber cuando un espacio de el tipo $\mathcal{E}$ es homeomorfo al espacio de Erdős completo.

Denotemos por $\widehat{\mathbb{R}}$ la compactificación $[-\infty, \infty]$ de $\mathbb{R}$. Podemos extender la p-norma a $\widehat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ poniendo $\|z\| = \infty$, si $z \in \widehat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}} \setminus \ell_p$.

Sea X un espacio topológico, $\varphi : X \to \widehat{\mathbb{R}}$ una función. Definimos los siguientes subespacios de el producto $X \times \widehat{\mathbb{R}}$:

$$L_\varphi = \{(x, t) \in X \times \hat{\mathbb{R}} : \varphi(x) \leq t\}$$

y

$$G_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \in X \times \hat{\mathbb{R}} : \varphi(x) < \infty\}.$$

Sea C un espacio compacto 0-dimensional no vacío y sea $\varphi : C \to \hat{\mathbb{R}}$ una función inferiormente semicontinua[1]. Si G_φ es denso es L_φ, llamamos a φ una *función de Lelek*. Si φ es una función de Lelek, entonces al espacio cociente L_φ/∞ que se obtiene al identificar al conjunto $C \times \{\infty\}$ con un punto en L_φ lo llamamos *fan de Lelek*.

Lema 5.6 *Si $\mathcal{E} \neq \emptyset$, entonces cada E_n es encajable en $\mathcal{E}$.*

Demostración: Construiremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función f_n, tal que $f_n : E_n \to f_n(E_n) \subset \mathcal{E}$ sea un homeomorfismo. Fijemos $z = (z_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $f_n : E_n \to \mathcal{E}$ por:

$$f_n(x) = (f_{1,n}(x), f_{2,n}(x), ..., f_{k,n}(x), ...),$$

donde:

$$f_{i,n} : E_n \to E_i, \quad y \quad f_{i,n}(x) = \begin{cases} x, \ si \ i = n, \\ z_i, \ si \ i \neq n. \end{cases}$$

Esto es, $f_{i,n}$ es la función identidad $I : E_n \to E_n$ cuando $i = n$, y es la función constante $f_{i,n}(E_n) = \{z_i\}$ para $i \neq n$. Por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{f_{i,n}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de funciones continuas, y son las funciones coordenadas de f_n. Se sigue entonces que f_n es continua para toda $n \in \mathbb{N}$. Observemos también que para cada $n \in \mathbb{N}$, f_n^{-1} es la función proyección sobre la enésima coordenada, y por lo tanto es continua. Claramente f_n es inyectiva para toda $n \in \mathbb{N}$. Por ello, f_n es un homeomorfismo. ■

Lema 5.7 [4] *El espacio de Erdős completo $\mathfrak{E}_c$ es 1-dimensional y totalmente disconexo.*

Lema 5.8 [8] *Si φ es una* función de Lelek*, el espacio de Erdős completo $\mathfrak{E}_c$ es homeomorfo a G_φ.*

---

[1] Una función $\varphi : X \to \hat{\mathbb{R}}$ de un espacio topológico X en los números reales extendidos $\hat{\mathbb{R}}$ se dice inferiormente semicontinua si $\varphi^{-1}((t, \infty])) = \{x \in X : \varphi(x) > t\}$ es un conjunto abierto en X para toda $t \in \mathbb{R}$

Teorema 5.9 *Si cada E_i es cerrado en $\mathbb{R}$, entonces $\mathcal{E}$ es homeomorfo al espacio Erdős completo si y sólo si $\dim \mathcal{E} > 0$ y cada E_n es 0-dimensional.*

Demostración: Necesidad. Supongamos que $\mathcal{E}$ es homeomorfo a $\mathfrak{E}_c$. Entonces $\mathcal{E}$ es también 1-dimensional y totalmente disconexo. Si $\mathcal{E} \neq \emptyset$, cada E_n es totalmente disconexo y, por lo tanto, 0-dimensional como subconjunto de $\mathbb{R}$.

Suficiencia. Para la segunda parte del teorema, representaremos a $\mathcal{E}$ como un conjunto de puntos finales G_φ de un fan de Lelek. Sea $\overline{E_n}$ la cerradura de E_n en $\widehat{\mathbb{R}}$ y consideremos el espacio compacto 0-dimensional $C = \prod_{n=1}^{\infty} \bar{E}_n$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. Definimos $\varphi : C \to [0, \infty]$ por $\varphi(x) = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p}$. Como $\mathcal{E} = \{x \in C : \varphi(x) < \infty\}$, $\mathcal{E}$ es homeomorfo a G_φ, por lo que resta mostrar que G_φ es denso en L_φ. Sea $x \in C$, y U una vecindad típica de x en C:

$$U = U_1 \times \cdots \times U_k \times \overline{E}_{k+1} \times \overline{E}_{k+2} \times \cdots$$

Como cada E_n es 0-dimensional también lo es cada $\overline{E}_n$. Por esta razón, podemos suponer que los U_i son conjuntos abiertos y cerrados. Consideremos el subespacio abierto y cerrado $\mathcal{E} \cap U$ de $\mathcal{E}$. Fijemos $a \in \mathcal{E}$ y elijamos, para cada $i \leq k$, una $b_i \in E_i \cap U_i$. Si hacemos $b_i = a_i$ para $i > k$, entonces $\|b\| = \|(b_i)_{i \in \mathbb{N}}\| < \infty$ y $b \in \mathcal{E} \cap U$, es decir $\mathcal{E} \cap U$ es no vacío. Tomemos entonces $y \in \mathcal{E} \cap U$ y sea $\varphi(y) < t < \infty$. Entonces existe una $z \in \mathcal{E} \cap U$ con $\|z\| = \varphi(z) = t$, por que de lo contrario el conjunto $\{y \in \mathcal{E} \cap U : \|y\| < t\}$ sería un subconjunto no vacío, abierto y cerrado, acotado en $\mathcal{E}$ lo que contradeciría el Teorema 5.3. Así, $\{\varphi(y) : y \in \mathcal{E} \cap U\}$ es un subintervalo no vacío y no acotado de $[0, \infty)$. Lo que significa que si $(x, t) \in L_\varphi$ con $\varphi(x) < t < \infty$, entonces para cualquier vecindad abierta $U \times V$ de (x, t) con V abierto en $\widehat{\mathbb{R}}$ y $t \in V$, se tiene $(U \times V) \cap G_\varphi \neq \emptyset$ pués, $(y, t) \in (U \times V) \cap G_\varphi$, donde $t = \varphi(y)$. Además también se deduce, por ser $\{\varphi(y) : y \in \mathcal{E} \cap U\}$ no acotado que toda vecindad abierta $U \times (t, \infty]$ de $(x, \infty) \in L_\varphi$ tiene intersección no vacía con G_φ.

Podemos concluir que:

$$\bigcup_{x \in C} (\{x\} \times (\varphi(x), \infty]) \subset \overline{G}_\varphi,$$

y por Lema 5.8 encontramos que, $\mathcal{E}$ es homeomorfo al espacio Erdős completo. ■

Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 5.10 1. *Consideremos el siguiente subgrupo cerrado de* $(\ell_p, +)$:

$$\mathcal{E} = \{z \in \ell_p : nz_n \in \mathbb{Z} \ \text{para cada} \ n \in \mathbb{N}\},$$

en este caso, $E_n = \{m/n \in \mathbb{Q} : m \in \mathbb{Z}\}$, *por el Corolario 5.5 sabemos que* $\dim \mathcal{E} \neq 0$ *y como claramente cada* E_n *es 0-dimensional,* $\mathcal{E}$ *es homeomorfo al espacio de Erdős completo por el Teorema 5.9.*

2. *Sea* $E_n = \{0\} \cup \{1/i : i \in \mathbb{N}\}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $p = 2$, *es decir:*

$$\mathcal{E} = \{z \in \ell_2 : z_n \in \{0\} \cup \{1/i : i \in \mathbb{N}\} \ \text{para cada} \ n \in \mathbb{N}\},$$

la cual resulta ser otra representación del espacio de Erdős completo.

3. *Sea* $p = 1$ *y* $E_n = \{0, 1/n\}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$. *Como* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$ *y por el enunciado* (2) *del Teorema 5.4, tenemos que* $\dim \mathcal{E} > 0$. *Se concluye entonces del Teorema 5.9 que* $\mathcal{E}$ *es homeomorfo a* $\mathfrak{E}_c$.

Corolario 5.11 *Si cada* E_n *es* 0*-dimensional y cerrado en* $\mathbb{R}$, *y* $\mathcal{E} \neq \emptyset$. *Entonces,* $\mathcal{E} \times \mathfrak{E}_c$ *es homeomorfo a* $\mathfrak{E}_c$.

Demostración: La demostración se sigue aplicando el Teorema 5.9 a la sucesión de conjuntos $(E_n')_{n\in\mathbb{N}}$, en donde definimos $E_{2k-1}' = E_k$ y $E_{2k}' = \{0\} \cup \{1/i : i \in \mathbb{N}\}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. ■

Capítulo 6

Subespacios de ℓ_p sin la Propiedad de la Aproximación

En este capítulo presentamos la solución de Szankowski al problema de la aproximación que mencionamos en el Capítulo 1. Lo que Szankowski hace es construir un espacio de Banach separable que falla a tener una propiedad más débil que la Propiedad de la Aproximación. Sabemos por el Teorema 3.30 que todo espacio de Banach con una base de Schauder tiene la Propiedad de la Aproximación. Su ejemplo por lo tanto, también resuelve el problema de la Banach.

Definición 6.1 *Decimos que un espacio de Banach Z tiene la Propiedad de la Aproximación Compacta, si para cada subconjunto compacto $K \subset Z$ y para toda $\varepsilon > 0$, existe un operador compacto $T : Z \to Z$ tal que $\|T(z) - z\| < \varepsilon$, para cada $z \in K$.*

Notemos que la Propiedad de la Aproximación Compacta es una propiedad más débil que la Propiedad de la Aproximación. Es decir, la Propiedad de la Aproximación implica la Propiedad de la Aproximación Compacta. Sin embargo, las dos propiedades no son equivalentes, George Willis [17].

A lo largo de este capítulo usaremos los siguientes conjuntos para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \{2^n, 2^n + 1, ..., 2^{n+1} - 2, 2^{n+1} - 1\}$$

y

$$I_n^r = \{i \in I_n : i \equiv r \pmod 4\}, \quad \text{para } r = 0, 1, 2, 3.$$

Comenzamos presentando un criterio para saber cuando un espacio de Banach no tiene la Propiedad de la Aproximación Compacta.

Proposición 6.2 *Un espacio de Banach Z no tiene la propiedad de la aproximación compacta si existen sucesiones acotadas $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z^*, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en Z y subconjuntos finitos $F_n \subset Z$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple:*

(1) $z_n^* z_n = 1$,

(2) $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$,

(3) *para todo operador $T : Z \to Z$,*

$$|2^{-n} \sum_{i\in I_n} z_i^* T(z_i) - 2^{-n-1} \sum_{i\in I_{n+1}} z_i^* T(z_i)| \leq max\{\|T(f)\| : f \in F_n\},$$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} max\{\|f\| : f \in F_n\} < \infty.$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$\beta_n(T) = 2^{-n} \sum_{i\in I_n} z_i^* T(z_i) \quad \text{y} \quad \alpha_n = max\{\|f\| : f \in F_n\}.$$

Supongamos que T es un operador acotado, entonces por (3) y (4) tenemos que $|\beta_n(T) - \beta_{n+1}(T)| \leq \|T\|\alpha_n$, es decir, la sucesión $(\beta_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ será convergente si T es acotado y en tal caso hacemos

$$\beta(T) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(T),$$

para $T \in B(Z, Z)$. Si I es el operador identidad sobre Z, por (1) se tiene que

$$\beta(I) = 2^{-n} \sum_{i\in I_n} 1 = 1.$$

Ahora veamos que β aniquila a los operadores compactos, es decir: $\beta(T) = 0$ si T es compacto. Como $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, $\sup_{i\in\mathbb{N}} |z_n^* T(z_i)| < \infty$. Ya que T es compacto, el conjunto $\overline{\{T(z_i)\}}_{i\in\mathbb{N}}$ es compacto y entonces $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ uniformemente en $\{T(z_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ según el Corolario 2.28, por consiguiente $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{i\in\mathbb{N}} |z_n^* T(z_i)| = 0$, y ya que $z_n^* T(z_n) \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} |z_n^* T(z_i)|$, tenemos

$$\beta(T) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(T) = 0,$$

cuando T es compacto. Ahora escojamos un escalar ξ_n con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = \infty$ pero $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n < \infty$, tomemos

$$K = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \xi_n)^{-1} F_n \cup \{0\}.$$

Es claro que K es una sucesión convergente a 0, y por lo tanto es entonces un conjunto compacto. Notemos que para toda $n \in \mathbb{N}$

$$\beta_n(T) = \sum_{k=n}^{\infty} (\beta_k(T) - \beta_{k+1}(T)),$$

y que

$$\begin{aligned} max\{\|T(f)\| : f \in F_n\} &\leq (\alpha_n \xi_n) max\{\|T(f)\| (\alpha_n \xi_n)^{-1} : f \in F_n\} \\ &\leq (\alpha_n \xi_n) \sup\{\|T(f)\| : f \in K\}. \end{aligned}$$

Entonces por (3),

$$\beta_n(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k(T) - \beta_{k+1}(T)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \xi_k) \sup\{\|T(f)\| : f \in K\},$$

y como esto se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$, obtenemos finalmente que

$$\beta(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \xi_k) \sup\{\|T(f)\| : f \in K\}.$$

Para concluir, supogamos que T es compacto y que $\|T(z) - z\| < \epsilon$ para toda $z \in K$, entonces

$$1 = |\beta(I - T)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \xi_k) \sup\{\|(I - T)z\| : z \in K\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \xi_k) \cdot \epsilon.$$

Podemos llegar a la conclusión ahora de que ϵ no puede estar lo suficientemente cercano a 0. Por lo tanto Z no tiene la Propiedad de la Aproximación Compacta. ■

6.1. Algo de Combinatoria Finita.

En esta sección demostraremos dos resultados de combinatoria finita que utilizaremos en la construcción del contraejemplo. Sean $A \subset \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ recordemos la notación,

$$A + b = \{a + b : a \in A\} \quad \text{y}$$
$$A \cdot b = \{ab : a \in A\}.$$

Lema 6.3 *Para toda $n \in \mathbb{N}$ y cada $m \in \mathbb{N}$:*

1.
$$I_{n+m} = \bigcup_{b=0}^{2^m-1} (2^m I_n + b).$$

2.
$$I^0_{n+m} = \bigcup_{b=0}^{2^m-1} (2^m I^0_n + 4b).$$

Demostración: 1. Procedamos por inducción sobre m.
Si $m = 0$, el resultado es claro. Si $m = 1$,

$$I_{n+1} = \{2^{n+1}, 2^{n+1} + 1, ..., 2^{n+2} - 2, 2^{n+2} - 1\},$$

y por otro lado,

$$\begin{aligned}\bigcup_{b=0}^{1} (2I_n + b) &= 2I_n \cup (2I_n + 1) \\ &= \{2^{n+1}, 2^{n+1} + 2, ..., 2^{n+2} - 2\} \\ &\quad \cup \{2^{n+1} + 1, 2^{n+1} + 3, ..., 2^{n+2} - 1\} \\ &= \{2^{n+1}, 2^{n+1} + 1, ..., 2^{n+2} - 2, 2^{n+2} - 1\}.\end{aligned}$$

Por lo que queda probado el caso para $m = 1$ y tenemos que $I_{n+1} = 2I_n \cup (2I_n + 1)$.

Ahora supongamos que la fórmula es cierta para m, usando la hipótesis, tenemos las identidades

$$\begin{aligned} I_{(n+m)+1} &= 2I_{n+m} \cup (2I_{n+m} + 1) \\ &= 2 \bigcup_{b=0}^{2^m-1} (2^m I_n + b) \cup (2 \bigcup_{b=0}^{2^m-1} (2^m I_n + b) + 1) \\ &= \bigcup_{b=0}^{2^m-1} (2^{m+1} I_n + 2b) \cup (\bigcup_{b=0}^{2^m-1} 2^{m+1} I_n + 2b + 1) \\ &= \bigcup_{b=0}^{2^{m+1}-1} (2^{m+1} I_n + b), \end{aligned}$$

lo que prueba la validez de la fórmula para $m + 1$.

2. La demostración es muy similar a la primera identidad. Para $m = 0$ el resultado es obvio. Si $m = 1$,

$$\begin{aligned} I^0_{n+1} &= \{2^{n+1}, 2^{n+1} + 4, ..., 2^{n+2} - 8, 2^{n+2} - 4\} \\ &= \{2^{n+1}, 2^{n+1} + 8, ..., 2^{n+2} - 8\} \\ &\quad \cup \{2^{n+1} + 4, 2^{n+1} + 12, ..., 2^{n+2} - 4\} \\ &= 2I^0_n \cup (2I^0_n + 4) \\ &= \bigcup_{b=0}^{1} (2I^0_n + 4b). \end{aligned}$$

y queda probado este caso.

Probemos el caso para $m+1$,

$$\begin{aligned}
I^0_{(n+m)+1} &= 2I^0_{n+m} \cup (2I^0_{n+m}+4) \\
&= 2\bigcup_{b=0}^{2^m-1}(2^m I^0_n + 4b) \cup (2\bigcup_{b=0}^{2^m-1}(2^m I^0_n + 4b)+4) \\
&= \bigcup_{b=0}^{2^m-1}(2^{m+1} I^0_n + 4(2b)) \cup (\bigcup_{b=0}^{2^m-1} 2^{m+1} I^0_n + 4(2b+1)) \\
&= \bigcup_{b=0}^{2^{m+1}-1}(2^{m+1} I^0_n + 4b),
\end{aligned}$$

que es lo que queriamos demostrar. ∎

Corolario 6.4 *Para toda $n \in \mathbb{N}$, cada $m \in \mathbb{N}$ y $r = 0,1,2,3$:*

$$I^r_{n+m} = \bigcup_{b=0}^{2^m-1}(2^m I^0_n + 4b + r).$$

Esto es claro sólo basta notar que $I^r_n = I^0_n + r$. ∎

6.2. Un subespacio de ℓ_p sin la Propiedad de la Aproximación

Sea Δ_n una partición de I_n que definiremos más adelante.

Consideremos el espacio de Banach:

$$Y = (\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{A\in\Delta_n} \ell_2^A)_p,$$

es decir, Y es el espacio de todas las sucesiones $t = (t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\|t\| = (\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{A\in\Delta_n}(\sum_{i\in A} t_i^2)^{p/2})^{1/p} < \infty.$$

Veamos ahora que Y es isomorfo a un subespacio de ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$. Observemos que $(\sum_{i \in A} t_i^2)^{1/2} < \infty$ para toda $A \in \Delta_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$; por lo que a cada $t \in Y$ le asociamos la sucesión en ℓ_p formada por las entradas $(\sum_{i \in A} t_i^2)^{1/2}$ para toda $A \in \Delta_n$ y para cada $n \in \mathbb{N}$. Esta correspondencia es claramente un isomorfismo. Entonces haremos nuestra construcción en el espacio Y, y así obtendremos el subespacio de ℓ_p sin la Propiedad de la Aproximación Compacta. Sea $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ la base canónica de Y y $\{e_i^*\}_{i \in \mathbb{N}}$ su sucesión biortonormal correspondiente; tenemos entonces que

$$\|\sum_{i=1}^{\infty} t_i e_i^*\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{A \in \Delta_n} (\sum_{i \in A} t_i^2)^{q/2}\right)^{1/q} \quad , \text{ donde } \ (\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1).$$

Ahora definamos $z_i = e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}$ y $Z = [z_i]_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$. Probaremos que para una elección apropiada de las particiones Δ_n, Z no tiene la Propiedad de la Aproximación Compacta. Notemos que $(e_{2i}^* - e_{2i+1}^*) = \frac{1}{2}(e_{4i}^* + e_{4i+1}^* + e_{4i+2}^* + e_{4i+3}^*)$, porque si evaluamos ambos lados en el elemento z_i tenemos

$$(e_{2i}^* - e_{2i+1}^*)(z_i) = e_{2i}^*(e_{2i}) + e_{2i+1}^*(e_{2i+1}) = 2$$

y

$$\frac{1}{2}(e_{4i}^* + e_{4i+1}^* + e_{4i+2}^* + e_{4i+3}^*)(z_i) = \frac{1}{2}(4) = 2$$

y evaluando en z_j, con $j \neq i$

$$(e_{2i}^* - e_{2i+1}^*)(z_j) = 0,$$

$$\frac{1}{2}(e_{4i}^* + e_{4i+1}^* + e_{4i+2}^* + e_{4i+3}^*)(z_j) = 0.$$

Definamos $z_i^* \in Z^*$ como sigue:

$$z_i^* = \frac{1}{2}(e_{2i}^* - e_{2i+1}^*) = \frac{1}{4}(e_{4i}^* + e_{4i+1}^* + e_{4i+2}^* + e_{4i+3}^*).$$

Para $T \in B(Z, Z)$, observemos que

$$\beta_{n+1}(T) - \beta_n(T) = 2^{-n-2} \sum_{j \in I_{n+1}} (e_{2j}^* - e_{2j+1}^*) T(e_{2j} - e_{2j+1} + e_{4j} + \cdots + e_{4j+3})$$

$$-2^{-n-2}\sum_{i\in I_n}(e^*_{4i}+e^*_{4i+1}+e^*_{4i+2}+e^*_{4i+3})T(e_{2i}-e_{2i+1}+e_{4i}+e_{4i+1}+e_{4i+2}+e_{4i+3}),$$

tomando $m=1$ en el Lema 6.3 esto es igual a:

$$2^{-n-2}\sum_{i\in I_n}\{e^*_{4i}T(e_{4i}-e_{4i+1}+e_{8i}+\cdots+e_{8i+3}-e_{2i}+e_{2i+1}-e_{4i}-\cdots-e_{4i+3})$$

$$+e^*_{4i+1}T(-e_{4i}+e_{4i+1}-e_{8i}-\cdots-e_{8i+3}-e_{2i}+e_{2i+1}-e_{4i}-\cdots-e_{4i+3})$$

$$+e^*_{4i+2}T(e_{4i+2}-e_{4i+3}+e_{8i+4}+\cdots+e_{8i+7}-e_{2i}+e_{2i+1}-e_{4i}-\cdots-e_{4i+3})$$

$$+e^*_{4i+3}T(-e_{4i+2}+e_{4i+3}-e_{8i+4}-\cdots-e_{8i+7}-e_{2i}+e_{2i+1}-e_{4i}-\cdots-e_{4i+3})\}.$$

Ahora haremos un pequeño cambio de notación. A los elementos en paréntesis de la ecuación anterior, los que estan siendo evaluados por el operador T los llamaremos y_{4i}, y_{4i+1}, y_{4i+2}, y_{4i+3} respectivamente, y así nuevamente por el Lema 6.3 con $m=2$ obtenemos

$$\beta_{n+1}(T)-\beta_n(T)=2^{-n-2}\sum_{i\in I_{n+2}}e^*_iT(y_i). \tag{6.1}$$

Sea ∇_n una partición de I_n distinta a Δ_n. Suponemos por conveniencia, que los elementos de ∇_n tienen el mismo número de elementos m_n. Es decir $|\nabla_n|=2^n m_n^{-1}$.

A continuación, definamos $\sum_\epsilon$ como la suma con respecto a todos los $\epsilon_i=\pm1$, tal que $i\in B\in\nabla_n$. Entonces

$$\sum_\epsilon(\sum_{i\in B}\epsilon_ie^*_i)(\sum_{i\in B}\epsilon_iTy_i)=2^{m_n}\sum_{i\in B}e^*_iTy_i.$$

En efecto, si $i\neq j$

$$\sum_\epsilon\epsilon_i\epsilon_je^*_iTy_j=(1+1-1-1)e^*_iTy_j=0,$$

y si $i=j$

$$\sum_\epsilon\epsilon_i\epsilon_je^*_iTy_j=\sum_\epsilon\epsilon_i^2e^*_iTy_i=(1)^2e^*_iTy_i+(-1)^2e^*_iTy_i=2e^*_iTy_i.$$

Así, podemos reescribir la ecuación 6.1 de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\beta_n(T)-\beta_{n-1}(T) &= 2^{-n-1}\sum_{i\in I_{n+1}} e_i^*T(y_i) = 2^{-n-1}\sum_{B\in\nabla_{n+1}}\sum_{i\in B} e_i^*Ty_i \\ &= 2^{-n-1}\sum_{B\in\nabla_{n+1}} 2^{-m_{n+1}}\sum_{\epsilon}(\sum_{i\in B}\epsilon_i e_i^*)(\sum_{i\in B}\epsilon_i Ty_i).\end{aligned}$$

Por la linealidad de T, $\sum\limits_{i\in B}\epsilon_i Ty_i = T\sum\limits_{i\in B}\epsilon_i y_i$ y como $2^{m_n}>1$ obtenemos

$$|\beta_n(T)-\beta_{n-1}(T)|$$

$$\leq 2^{-n-1}|\nabla_n|\,\text{máx}\{\|\sum_{i\in B}\epsilon_i e_i^*\|\,\|T\sum_{i\in B}\epsilon_i y_i\| : \epsilon_i=\pm1, B\in\nabla_n\}. \quad (6.2)$$

La idea ahora es encontrar particiones Δ_n, ∇_n tal que para toda $B\in\nabla_n$, para cada $n\in\mathbb{N}$ y cada elección de $\epsilon_i=\pm1$, cumplan las siguientes condiciones:

$$\|\sum_{i\in B}\epsilon_i e_i^*\| = m_n^{1/q}, \text{ donde } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad (6.3)$$

$$\|\sum_{i\in B}\epsilon_i y_i\| \leq 10 m_n^{1/2}, \quad (6.4)$$

$$m_n \leq 2^{n/100}. \quad (6.5)$$

Demostremos primero que lo anterior implica que Z no tenga la Propiedad de la Aproximación Compacta.

Supongamos que ya construimos las particiones Δ_n y ∇_n, y tomemos $F_n=\{m_n^{(1/q)-1}\sum_{i\in B}\epsilon_i y_i : \epsilon_i=\pm1, B\in\nabla_n\}$; por (6.2) y (6.3) y haciendo algunos cálculos obtenemos

$$|\beta_{n+1}(T)-\beta_n(T)| \leq \frac{1}{4}\,\text{máx}\{\|T(f)\| : f\in F_n\}$$

y, por (6.4) y (6.5),

$$\alpha_n = \text{máx}\{\|f\| : f \in F_n\} \leq 10 m_n^{1/q-1+1/2} \leq C 2^{Sn}$$

para alguna $S < 0$. Por lo tanto se cumplen las hipótesis (3) y (4) de la Proposición 6.2, los enunciados (1) y (2) son inmediatos de las definiciones de z_i y z_i^*, por lo tanto Z no tiene la Propiedad de la Aproximación Compacta.

Para finalizar, necesitamos construir las particiones Δ_n y ∇_n. Lo cual realmente es lo más difícil y laborioso de la demostración.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos funciones $\varphi_n^r : I_n^0 \to I_n^r$ y $\psi_{n,\alpha} : I_n^0 \to I_{n+1}^0$ por

$$\varphi_n^r(i) = i + r \quad \text{ y } \quad \psi_{n,\alpha}(i) = 2i + 4\alpha,$$

con $r = 0, 1, 2, 3$ y $\alpha = 0, 1$.

Representaremos a I_n^0 por $I_n^0 = E_n \times F_n$. Para aclarar un poco esto, notemos que $I_0^0 = I_1^0 = \emptyset$ de tal manera que $E_n = \emptyset$ o $F_n = \emptyset$ para $n = 0, 1$. Para $n = 2$, $I_2^0 = \{4\}$ y hacemos $E_2 = F_2 = \{4\}$. Así, para $n \geq 3$ definimos inductivamente

$$E_{n+1} = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n,\alpha}(F_n) \ \text{ y } \ F_{n+1} = \psi_{n,0}(E_n),$$

o bien

$$F_{n+1} = \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n,\alpha}(E_n) \ \text{ y } \ E_{n+1} = \psi_{n,0}(F_n).$$

Nota: Acordamos a lo largo de este capítulo que $A \times B = B \times A$.

Lema 6.5 *Para cada $n \geq 2$, se cumplen los siguientes enunciados:*

(1) *Las funciones φ_n^r y $\psi_{n,\alpha}$ son inyectivas.*

(2) a) *Para toda $f \in F_n$, existe $e \in E_{n+1}$ tal que*

$$\psi_{n,0}(E_n) \times \psi_{n,0}\{f\} \subset \{e\} \times F_{n+1}$$

b) *Para toda $f \in F_n$, existe $e \in E_{n-1}$ tal que*

$$E_n \times \{f\} \subset \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n-1,\alpha}\{e\} \times \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n-1,\alpha}(F_{n-1}).$$

(3) $|E_n| \geq 2^{\frac{n-3}{2}}$, $|F_n| \geq 2^{\frac{n-3}{2}}$.

Demostración: (1) Sean $i, j \in I_n^0$ con $i \neq j$ entonces:

$$\varphi_n^r(i) = i + r \neq j + r = \varphi_n^r(j),$$

y

$$\psi_{n,\alpha}(i) = 2i + 4\alpha \neq 2j + 4\alpha = \psi_{n,\alpha}(j)$$

para toda $r = 0, 1, 2, 3$ y $\alpha = 0, 1$.

(2) *a*) Sea $f \in F_n$ y tomemos $\{e\} = \psi_{n,0}\{f\}$. Por definición tenemos que $\psi_{n,0}(E_n) = F_{n+1}$. Es claro que,

$$\psi_{n,0}(E_n) \times \psi_{n,0}\{f\} \subset \{e\} \times F_{n+1}.$$

b) Para cada $f \in F_n$ escojamos $e \in E_{n-1}$ tal que $\psi_{n-1,0}\{e\} = \{f\}$. De donde vemos que

$$\{f\} \subset \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n-1,\alpha}\{e\},$$

y como $E_n = \bigcup\limits_{\alpha=0}^{1} \psi_{n-1,\alpha}(F_{n-1})$, concluimos que

$$E_n \times \{f\} \subset \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n-1,\alpha}\{e\} \times \bigcup_{\alpha=0}^{1} \psi_{n-1,\alpha}(F_{n-1}).$$

(3) Procederemos por inducción. Si $n = 2$,

$$|E_2| = |F_2| = 1 \geq 2^{\frac{2-3}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Supongamos ahora que el resultado es valido para $1, 2, ..., n$, probemos la misma conclusión para el caso $n + 1$. Usando las hipótesis y las definiciones de E_n, F_n respectivamente, obtenemos lo que deseamos,

$$\begin{aligned}
|E_{n+1}| &= 2|F_n| \geq 2\cdot 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{\frac{n-1}{2}} \geq 2^{\frac{(n+1)-3}{2}},\\
|F_{n+1}| &= |E_n| = 2|F_{n-1}| \geq 2\cdot 2^{\frac{n-4}{2}} = 2^{\frac{n-2}{2}} = 2^{\frac{(n+1)-3}{2}}.
\end{aligned}$$

■

Por último, para cada $n \in \mathbb{N}$ expresaremos a E_n como sigue:

$$E_n = \prod_{r=0}^{3} E_n^r,$$

donde pedimos que $|E_n^r| \geq 2^{\frac{n-12}{8}}$ para cada $r = 0, 1, 2, 3$.

Definamos entonces las particiones de la siguiente manera:

$$\nabla_n = \big\{\varphi_n^r(E_n^r \times \{f\}) : f \in \prod_{s\neq r} E_n^s \times F_n;\ r = 0,1,2,3\big\}$$

y

$$\Delta_n = \big\{\varphi_n^r(\{e\} \times \prod_{s\neq r} E_n^s \times F_n) : e \in E_n^r;\ r = 0,1,2,3\big\}.$$

Tomemos $B \in \nabla_n$ entonces

$$B = \varphi_n^r(E_n^r \times \{f\}), \quad \text{con} \quad f = \prod_{s\neq r} f_s \times f', \text{en donde } f' \in F_n.$$

Notemos que para cada $A \in \Delta_n$, $|A \cap B| \leq 1$. Para ver esto, observemos que

$$A = \varphi_n^r(\{e\} \times \prod_{s\neq r} E_n^s \times F_n).$$

Si $t \neq r$, entonces $A \cap B = \emptyset$. Si $t = r$, se tiene que $A \cap B = \{\varphi_n^r(e \times f)\}$. De esta manera tendremos

$$\begin{aligned}
\|\sum_{i\in B} \epsilon_i e_i^*\| = (\sum_{A\in\Delta_n} |A\cap B|^q)^{1/q} &= |\{A \in \Delta_n : A \cap B \neq \emptyset\}|^{1/q}\\
&= |B|^{1/q} = m_n^{1/q},
\end{aligned}$$

lo que prueba la condición 6.3.

Para demostrar 6.4, observamos de las fórmulas para y_i que para toda ε_i podemos reescribir

$$\begin{aligned}\sum_{i\in B}\varepsilon_i y_i &= -\sum_{s\neq r} a_s \sum_{i\in\varphi_n^s(E_n^r\times\{f\})}\varepsilon_i e_i + (-1)^r\sum_{s=0}^{3}\sum_{i\in\varphi_{n+1}^s\psi_{n,\alpha}(E_n^r\times\{f\})}\varepsilon_i e_i \\ &\quad - \sum_{i\in\varphi_{n-1}^{\beta}\psi_{n-1,\gamma}^{-1}(E_n^r\times\{f\})}\varepsilon_i e_i + \sum_{i\in\varphi_{n-1}^{\beta+1}\psi_{n-1,\gamma}^{-1}(E_n^r\times\{f\})}\varepsilon_i e_i; \qquad (6.6)\end{aligned}$$

donde $a_s \in \{1,2\}$ y $\alpha,\beta,\gamma \in \{0,1,2\}$.

Probaremos ahora que todos los conjuntos de índices en la ecuación 6.6 están contenidos en algunos elementos de $\Delta_{n-1},\Delta_n,\Delta_{n+1}$ respectivamente:

i) Para $s\neq r$, $E_n^r\times\{f\} = E_n^r\times f_s\times\prod_{t\neq s,t\neq r} f_t\times f' \subset f_s\times\prod_{t\neq s}E_n^t\times F_n$, y entonces tenemos

$$\varphi_n^s(E_n^r\times\{f\}) \subset \varphi_n^s(\{f_s\}\times\prod_{t\neq s}E_n^t\times F_n)\in\Delta_n,$$

ii) Por (2) del Lema 6.5, $\varphi_{n+1}^s\psi_{n,\alpha}(E_n^r\times\{f\}) \subset \varphi_{n+1}^s\psi_{n,\alpha}(E_n\times\{f\}) \subset \varphi_{n+1}^s(\{e\}\times F_{n+1})$, para algún $e=\prod_{s=0}^3 e_s$ con $e_s\in E_{n+1}^s$. Entonces

$$\varphi_{n+1}^s(\{e\}\times F_{n+1}) \subset \varphi_{n+1}^s(\{e_s\}\times\prod_{t\neq s}E_{n+1}^t\times F_{n+1})\in\Delta_{n+1},$$

iii) Por (2) del Lema 6.5, $\varphi_{n-1}^{\beta}\psi_{n-1,\gamma}^{-1}(E_n^r\times\{f\}) \subset \varphi_{n-1}^{\beta}\psi_{n-1,\gamma}^{-1}(E_n\times\{f\}) \subset \varphi_{n-1}^{\beta}(\{e\}\times F_{n-1})$, para algún $e=\prod_{s=0}^3 e_s$ con $e_s\in E_{n-1}^s$. Entonces

$$\varphi_{n-1}^{\beta}(\{e\}\times F_{n-1}) \subset \varphi_{n-1}^{\beta}(\{e_\beta\}\times\prod_{s\neq\beta}E_{n-1}^s\times F_{n-1})\in\Delta_{n-1}.$$

Notemos que en la igualdad del lado derecho de la ecuación 6.6 tenemos 10 términos, y si $A_1,....,A_{10}$ son subconjuntos de algunos elementos de $\Delta_{n-1},\Delta_n,\Delta_{n+1}$, entonces podemos reescribir 6.6 como

$$\sum_{i\in B}\varepsilon_i y_i = \sum_{j=1}^{10}\pm\sum_{i\in A_j}\varepsilon_i e_i,$$

con $|A_j| = |B|$, para cada $j \leq 10$. Por lo tanto

$$\| \sum_{i \in A_j} \varepsilon_i e_i \| = |A_j|^{1/2} = |B|^{1/2} = m_n^{1/2}.$$

Y por último

$$\| \sum_{i \in B} \varepsilon_i y_i \| \leq 10 m_n^{1/2}.$$

Finalmente notemos que 6.5 es clara para n lo suficientemente grande. ■

Bibliografía

[1] J. J. Dijkstra: *A Criterion for Erdős Spaces*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 48, 595-601, 2005.

[2] R. Engelking: *Theory of Dimension Finite and Infinite*, Helderman Verlag, Berlin, 1995.

[3] R. Engelking: *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin, 1989.

[4] P. Erdős: *The dimension of the rational points in Hilbert space*, Ann. of Math. 41, 734-736, 1940.

[5] A. Grothendieck: *Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16, New York, 1955.

[6] R. C. James: *Bases in Banach Spaces*, The American Mathematical Monthly, Vol. 89, No. 9, 625-640, 1982.

[7] W. B. Johnson y J. Lindenstrauss: *Handbook of the Geometry of Banach Spaces Volume 1*, Elsevier, Amsterdam, 2001.

[8] K. Kawamura, L. G. Oversteegen y E. D. Tymchatyn: *On homogeneous totally disconnected 1-dimensional spaces*, Fund. Math. 150, 97-112, 1996.

[9] E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications*, The Macmillan Company, New York, 1964.

[10] H. E. Lacey: *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[11] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[12] J. Lindenstrauss y L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces II*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[13] R. E. Megginson: *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[14] M. M. Popov: *A Hereditarily ℓ_1 Subspace of L_1 without the Schur Property*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 133, No.7, 2023-2028, 2005.

[15] H. L. Royden: *Real Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1989.

[16] A. Szankowski: *Subspaces without the Approximation Property*, Israel Journal of Mathematics 30, 123-129, 1978.

[17] G. Willis: *The Compact Approximation Property does not imply the Approximation Property*, Studia Math. 103, 99-108, 1992.