

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“ECUACIONES DE AMPLITUD EN CONVECCIÓN ISOTÉRMICA
DOBLE DIFUSIVA”

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
ALMA LILIA DENI FLORES TINOCO

ASESOR:
DR. RICARDO BECERRIL BÁRCENAS

Morelia, Mich., septiembre 2008.

Agradecimientos

Mi agradecimiento especial a Dios por haberme dado la oportunidad de estudiar Ciencias, haber puesto en mi camino profesores tan brillantes y darme una familia tan paciente y comprensiva. Mi agradecimiento a todos mis maestros de la escuela de ciencias Físico Matemáticas y en especial al profesor Ricardo Becerril Bárcenas por su gran paciencia y apoyo para la realización de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	6
2. Descripción del Sistema	12
2.1. Introducción	12
2.2. Ecuaciones de Movimiento	16
3. Análisis de Estabilidad Lineal	23
3.1. Introducción	23
3.2. Caso 1-dimensional	24
3.3. Caso n-dimensional	26
3.4. Estabilidad Lineal	28
4. Convección en la Rama Estacionaria	34
4.1. Introducción	34
4.2. Teoría de Perturbaciones Regulares	36
4.3. Derivación de la ecuación de Amplitud	39
4.4. Análisis de las Ecuaciones	42
4.5. Punto Tricrítico, y Ciclo de Histéresis	44
5. Convección en la vecindad del PC2	51
5.1. Introducción	51

5.2. Ecuación de Amplitud en la vecindad del PC-2	51
6. Convección en la rama oscilatoria	56
6.1. Introducción	56
6.2. Derivación del sistema de ecuaciones	56
6.3. Análisis de las Ecuaciones	61
7. Conclusiones	64
A. Concentraciones en el Estado Conductivo	66
B. Aproximación Hele-Shaw	68
C. Ecuaciones de Movimiento Adimensionales	72
D. Deducción de las Ecuaciones de Amplitud para la Rama Os- cilaria	80
E. Operador Adjunto	87

Resumen

Esta tesis tiene por objetivo la revisión de la aplicación del formalismo de ecuaciones de amplitud al estudio de las inestabilidades que se presentan en el sistema isotérmico doble difusivo. Específicamente:

(A) Se explica como se derivan las ecuaciones de amplitud a lo largo de la rama estacionaria y oscilatoria utilizando la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples.

(B) Con base en estas ecuaciones, se hace un análisis de los diferentes fenómenos que este sistema presenta. Se muestra la existencia de un punto tricrítico (PTC) en la rama estacionaria que está suficientemente separado del punto de codimensión-2 (PC2) lo que haría accesible el estudio experimental de la dinámica del sistema cerca de estos puntos.

(C) Se explica el fenómeno de histéresis que aparece en la rama estacionaria.

(D) Se muestra que las ecuaciones de amplitud en la rama oscilatoria predicen que las ondas viajeras existen sólo en la rama en sí, indicándose la necesidad de un cálculo a quinto orden, con el cual sería posible predecir la estabilidad de las ondas viajeras.

(E) Se bosqueja el comportamiento del sistema alrededor del PC2.

Capítulo 1

Introducción

La convección es una noción vieja que se remonta al siglo XVIII, fué usada por Lomonossov y Hadley [1] para explicar movimientos atmosféricos, que ciertamente es uno de los factores que determinan cambios climáticos. El fenómeno de convección también desempeña un papel fundamental en la dinámica de las placas tectónicas que determina el movimiento continental; así como en la circulación en los océanos; y en un contexto astrofísico, la convección juega un papel importante en la transferencia de calor y materia en las estrellas.

El trabajo científico de la convección térmica comenzó con el trabajo de Bénard (1905) y el análisis teórico de Rayleigh (1916). Bénard estudió un sistema convectivo simple, en muchos experimentos usó fluido calentado desde abajo (en la base del contenedor del fluido) y expuesto al ambiente en la parte superior (que es menos caliente), con este arreglo la parte superior del fluido, es libre de moverse y deformarse. Esta situación es llamada convección de Bénard-Marangoni.

Bénard observó que al ir aumentando la temperatura del sistema, en la superficie libre del fluido se formaban celdas de figuras regulares, casi-polígonos de

cuatro a siete lados evolucionando a hexágonos regulares e igualmente espaciados, tal fenómeno se debe a la convección térmica. Cuando la capa del fluido es muy delgada (menos de un milímetro), van desapareciendo los hexágonos y se presenta una deformación que rompe la capa de fluido, este fenómeno se debe en este caso, a la variación de la tensión superficial que aumenta al disminuir la temperatura. Este último fenómeno se conoce como convección Marangoni de onda larga, y por raro que parezca, su implementación y comprobación experimental se llevó a cabo hace poco mas de una década, lo que condujo a estudios teóricos que modelaran lo observado [2].

En 1900, la convección se volvió el principal tema de investigación de Rayleigh, en uno de sus artículos publicados en 1916 explicó lo que ahora es conocido como la convección Rayleigh-Bénard. La convección Rayleigh-Bénard es el estudio de la inestabilidad de una capa de fluido confinado entre dos placas horizontales separadas una distancia d y sometido a un gradiente vertical de temperatura. Llamaremos T_2 y T_1 a la temperatura de la placa inferior y superior del contenedor del fluido respectivamente. Se dice que el sistema se encuentra en el estado conductivo cuando el fluido está en reposo, y la temperatura varía linealmente de acuerdo a la ley de Fourier $T(z) = T_2 - \beta z$, donde $\beta = \Delta T/d$ y $\Delta T = T_2 - T_1$ para una altura d de la celda. Como $T_2 > T_1$ el fluido que se encuentra mas cerca de la placa inferior será menos denso que el que se encuentra cerca de la placa superior, esta es una situación de inestabilidad, pues fluido pesado se encuentra en la parte superior del contenedor de fluido mientras que fluido más ligero en la parte inferior, en algún momento esta situación se revertirá. Si al iniciarse el movimiento, poco después el sistema llega nuevamente al reposo, se dice que el sistema es estable, pero habrá un valor de $\beta = \beta_c$ para el que el sistema ya no regrese al reposo, y entonces se dice que el sistema es inestable.

Para entender las causas de la convección térmica, fijémonos en un elemento de fluido que está más caliente (y por tanto menos denso) en una región

más fría (y por tanto más densa), este elemento, por ser menos denso que la región que lo rodea experimentará una fuerza de empuje hacia arriba de Arquímedes y empezará a subir. Sin embargo, por efectos de difusión de calor, el elemento de fluido irá equilibrando su temperatura con sus alrededores, esto se realizará rápida o lentamente de acuerdo al coeficiente de difusión del fluido, y esa fuerza de empuje disminuirá y el elemento se empezará a parar, a esta desaceleración también contribuirá la viscosidad. Así que habrá una “competencia” entre el gradiente de temperatura por un lado (que desestabiliza al sistema) y la difusión y viscosidad que lo estabiliza. Dependiendo de estos mecanismos, el movimiento permanecerá o desaparecerá. Este gradiente, no necesariamente debe ser de temperatura, podría ser de la concentración de una sustancia que se difunde en el fluido convectivo, por ejemplo la salinidad en los mares. O pueden estar las dos presentes: gradientes de salinidad y temperatura. Dependiendo de como sean estos gradientes, éstos pueden ser estabilizadores o desestabilizadores.

El estudio de la dinámica de una capa de fluido en el que hay gradientes de dos propiedades con diferentes coeficientes de difusión que tienen efectos opuestos en la distribución de densidad del sistema, es conocido como *Convección Doble Difusiva*. Su estudio inició pensando en una aplicación a oceanografía [3]. Pero sus aplicaciones se han expandido hacia campos como la ingeniería química, la astrofísica, la metalurgia y la ciencia de materiales, y en geofísica. Los componentes más comúnmente usados en sistemas doble difusivos han sido la temperatura y la salinidad. Nosotros nos interesamos en el estudio experimental llevado a cabo por A. Predtechensky *et al* que fueron isotérmicos, y el flujo convectivo se originó por el gradiente de dos concentraciones. El sistema consiste de una capa delgada de fluido confinada entre dos contenedores paralelos horizontales de longitud L y ancho w separados una distancia d (celda Helle-Shaw). En este sistema se impone una concentración fija c_{f0} de una sustancia que se difunde rápido en la parte superior de la celda, y una concentración fija c_{s0} de una sustancia que se di-

funde lentamente desde la base del contenedor. La sustancia que se difunde desde arriba crea un efecto desestabilizador, la que se difunde desde abajo crea un efecto estabilizador.

A diferencia de la convección térmica en este sistema convectivo isotérmico se observan 3 tipos de movimientos: el movimiento estacionario, el movimiento oscilatorio y una región donde hay una lucha de estas inestabilidades.

Por otra parte, las concentraciones c_f y c_s en el estado convectivo, varían con la posición y el tiempo: $c_f = c_f(x, z, t)$ y $c_s = c_s(x, z, t)$. Sin embargo, en el estado conductivo, cuando el fluido está en reposo (recuérdese que c_{f0} y c_{s0} están fijas en la parte superior e inferior de la celda respectivamente) se tiene el siguiente comportamiento (ver apéndice A):

$$c_s^{(c)}(z) = c_{s0} \left(1 - \frac{z}{d}\right)$$

$$c_f^{(c)}(z) = c_{f0} \left(\frac{z}{d}\right)$$

$$\vec{v} = 0$$

de modo que

$$c_f^{(c)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad c_s^{(c)}(d) = 0$$

El superíndice “c” significa que la concentración corresponde al “comportamiento conductivo”, donde la concentración es lineal como se muestra en la figura (1.1). Cuando se tienen una perturbación del estado conductivo, existe movimiento, y la concentración ya no tiene un carácter lineal, y entonces escribimos

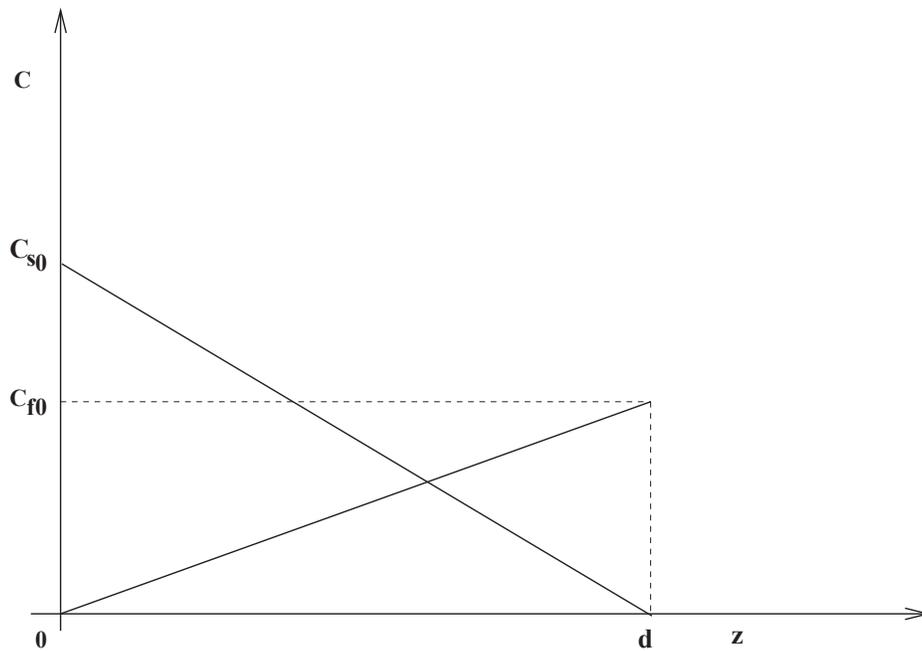


Figura 1.1: Comportamiento lineal de las concentraciones en el estado conductivo.

$$c_s(x, z, t) = c_s^{(c)}(z) + \eta_s(x, z, t)$$

$$c_f(x, z, t) = c_f^{(c)}(z) + \eta_f(x, z, t)$$

donde η_s y η_f son las desviaciones en las concentraciones del estado conductivo, si las perturbaciones no mueren, se dice que estamos en el estado convectivo.

Como las concentraciones son fijas en la parte superior e inferior de la celda, las perturbaciones de las concentraciones en $z = 0, 1$ deben anularse, se asume también que la velocidad se anula en las fronteras verticales. Así

las *condiciones de frontera* son:

$$\eta_s = \eta_f = 0 \quad , \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \text{en} \quad z = 0,1 \quad (1.1)$$

Además como $L \gg d$ se asume *periodicidad en la dirección x*. El valor típico en los experimentos de Predtechensky de L/d es de 20.

En el capítulo 2 se introducirán las ecuaciones de movimiento para las concentraciones, además la ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes. Es conveniente trabajar sin unidades ya que facilita el manejo de las expresiones en los cálculos, en este capítulo adimensionalizaremos las ecuaciones de movimiento que describen al sistema y esto nos llevará a la introducción de los números de Rayleigh, Lewis y Schmidth.

En el capítulo 3 se realizará un análisis de estabilidad lineal del sistema de ecuaciones de movimiento, este análisis nos permitirá establecer el diagrama de estabilidad en el espacio de parámetros (los números de Rayleigh) y localizar el punto de competencia entre la inestabilidad estacionaria y oscilatoria.

En los capítulos 4-6 se derivan las ecuaciones de amplitud para los tres tipos de fenómenos que aparecen en el umbral de la convección, estas ecuaciones son modelos matemáticos que describen el comportamiento de la amplitud de las perturbaciones del sistema en regiones cercanas a tal umbral de convección. Finalizamos con algunas conclusiones. Los cálculos omitidos en el texto de los capítulos se encuentran en mayor detalle en los apéndices.

Capítulo 2

Descripción del Sistema

2.1. Introducción

El estudio de la dinámica de capas de fluido en el que hay dos gradientes de propiedades que tienen coeficientes de difusión diferentes se conoce como convección doble difusiva. La más conocida y estudiada es la que involucra la difusión de calor y salinidad, la así llamada convección termosalina. El estudio en este trabajo se enfoca en la convección de un fluido isotérmico en una geometría Hele-Shaw, la convección se genera debido a la imposición de dos gradientes de concentraciones de dos especies con coeficientes de difusión distintos. En este sistema, el fluido está confinado en una celda Hele-Shaw, un paralelepípedo de altura d , longitud L y anchura w dos placas paralelas de longitud L separados una distancia d (ver figura 2.1). En este sistema dos sustancias se difunden en el fluido, una se difunde lentamente (desde el fondo de la celda) mientras la segunda sustancia se difunde rápidamente (desde la parte superior de la celda). El sistema se considerará dos dimensional ya que $w \ll d$. Esta celda Hele-Shaw había sido considerada únicamente en estudios teóricos y no se había usado en experimentos de convección térmica por el problema de conducción de calor a través de las paredes laterales, en nuestro problema isotérmico la condición correspondiente de paredes imper-

meables se satisfacen plenamente.

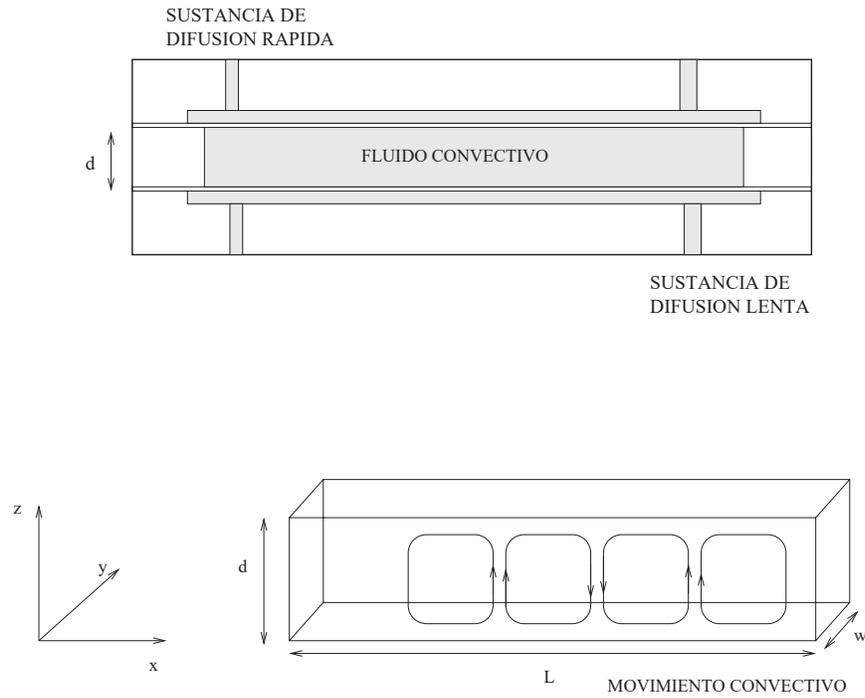


Figura 2.1: Sistema de convección. Arriba: Se muestra el diseño experimental de una celda Hele-Shaw para la convección isotérmica doble difusiva, se muestra el fluido confinado y las dos reservas de las sustancias que se disuelven. Abajo: Se muestra el movimiento convectivo del sistema y las dimensiones de la celda Hele-Shaw .

En el experimento de Predtechensky que se describe en la referencia [5] la concentración en la parte superior e inferior de la celda se mantienen fijas, c_{f0} y c_{s0} respectivamente. Las dos concentraciones son dos parámetros que pueden variarse experimentalmente y para manejarlos sin dimensiones introducimos los números de Rayleigh que se definen como

$$R_i = \alpha_i c_{i0} g d w^2 / 12 \nu D_f \quad (2.1)$$

donde α_i es la derivada de la densidad con respecto a c_i y dividido entre la densidad del fluido convectivo cuando no se han disuelto las dos sustancias ($i = s, f$), D_f es el coeficiente de difusión de la sustancia que se difunde rápidamente, d es la altura de la celda, w es la separación de las dos paredes verticales (anchura de la celda), g es la aceleración de la gravedad y ν es la viscosidad cinemática.

Es en el caso doble difusivo en el que se observa la bifurcación Hopf, es decir, la convección oscilatoria. En la convección puramente térmica sin salinidad, o en su equivalente, la convección en que sólo se difunde una especie desde la parte superior de la celda, en el umbral de la convección sólo aparece el caso estacionario. Trataremos primero de explicar el mecanismo de convección en el caso puramente térmico. Consideremos un elemento de fluido (e.f.) situado en una altura z con temperatura $T(z)$, si por una perturbación se coloca este elemento en la posición $z + h$ donde la temperatura del entorno es menor ($T(z + h) < T(z)$), se encontrará por tanto en un entorno mas pesado que el elemento mismo, y tenderá a subir (ver figura 2.2) con una velocidad V , la magnitud de esta velocidad dependerá de la diferencia de densidades entre las posiciones z y $z + h$, y esa diferencia dependerá también de la diferencia de temperatura. Pero al mismo tiempo su temperatura se difundirá al entorno, si esto lo hace rápidamente, entonces se equilibrarán las temperaturas del entorno y del e.f. adquiriendo ambos la misma densidad y el movimiento tenderá a cesar. La viscosidad también ayuda a disminuir la magnitud de la velocidad. Así que el gradiente de temperatura es desestabilizador (promueve el movimiento de perturbaciones) y la difusión y viscosidad son estabilizadores (promueven el reposo de perturbaciones). Habrá un valor crítico del gradiente de temperatura entre la base y la parte superior del recipiente para el cual el movimiento no se detendrá y tendremos convección.

La interacción entre los campos de velocidades y las concentraciones que causan la convección es muy complicada. No obstante, el mecanismo básico que produce convección oscilatoria propia de sistemas doble difusivos, puede explicarse considerando nuevamente un e.f. en un medio con los dos gradientes de concentraciones. Si el e.f. se desplaza por una perturbación hacia arriba desde su posición inicial z donde tiene concentraciones $c_s(z)$ y $c_f(z)$, se mueve a una vecindad de fluido que tiene una concentración $c_f(z+h)$ mayor que la que tiene el e.f, pero menor de la especie que se difunde lentamente $c_s(z+h)$. En la figura (2.3), el círculo punteado representa el e.f. que tiene un c_f interior menor que el c_f de su entorno, así que habrá un flujo rápido de tal sustancia rápida al e.f. Habrá también un flujo lento de c_s desde el interior hacia el entorno externo, el efecto neto será que el e.f se pondrá más pesado que su entorno y descenderá (la viscosidad también ayuda a detener el movimiento siempre). Al descender, con valores adecuados de los parámetros, pasará más allá de su posición original, y al mismo tiempo irá difundiendo la especie rápida hacia su exterior haciéndose más ligera, y volverá a subir. Tales oscilaciones se han observado en sistemas doble difusivos.

Un estado del sistema se fija, fijando estos parámetros experimentales, R_s y R_f . Si el estado conductivo (es decir, cuando el fluido está en reposo) se perturba ligeramente, estas perturbaciones crecerán o decaerán, dependiendo de los valores de los números de Rayleigh. Si la perturbación crece, el sistema saltará del estado conductivo a uno en el que la velocidad es diferente de cero. Así que este estado lo veremos como la superposición del estado conductivo más una perturbación. Las ecuaciones de movimiento que escribiremos en la siguiente sección, son las ecuaciones hidrodinámicas que gobiernan la dinámica de esta perturbación.

2.2. Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones de movimiento que describen el sistema son la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles (2.2), la ecuación de Navier-Stokes (2.3) y otras dos ecuaciones que describen la evolución de las concentraciones de difusión rápida c_f y lenta c_s en el tiempo (2.5), (2.4).

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{\vec{g} \Delta \rho}{\rho_0} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) c_s = D_s \nabla^2 c_s \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial c_f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) c_f = D_f \nabla^2 c_f \quad (2.5)$$

Donde $\vec{v}(x, z, t)$ es el campo vectorial de velocidades del fluido, ρ_0 es la densidad del fluido convectivo cuando no se han disuelto las dos sustancias, $\Delta \rho = \rho(c_s, c_f) - \rho(c_s^{(c)}, c_f^{(c)})$.

La especificación completa de un experimento de convección requiere información de las propiedades físicas y geométricas de las paredes que encierran al fluido, en nuestro sistema las paredes verticales aislan al fluido y sólo las paredes horizontales participan en el proceso de difusión, esto hace posible que el movimiento de este sistema esté descrito en dos dimensiones y que la aproximación de Hele Shaw se ajuste a este sistema, ya que el movimiento de transferencia de las concentraciones esta dado en las direcciones z y x . Matemáticamente la aproximación Hele Shaw consiste en reemplazar el término $\nu \nabla^2 \vec{v}$ por el término $-12 \frac{\nu \vec{v}}{w^2}$ (ver apéndice B), así la ecuación (2.3) adquiere la forma:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - 12 \frac{\nu \vec{v}}{w^2} + \frac{\vec{g} \Delta \rho}{\rho_0} \quad (2.6)$$

Si las concentraciones de las sustancias no son muy grandes, aplicamos la aproximación de Boussineq que consiste en ignorar las variaciones de la densidad en todos los términos de las ecuaciones de movimiento, excepto en el término de la fuerza externa [13].

Es conveniente usar las ecuaciones de movimiento sin unidades con este fin utilizamos el siguiente cambio de variable.

$$\hat{t} = \frac{D_f}{d^2} t \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{d} \quad \hat{v} = \frac{d}{D_f} \vec{v}$$

$$\hat{\eta}_s = \frac{\eta_s}{c_{s0}} \quad \hat{\eta}_f = -\frac{\eta_f}{c_{f0}}$$

Donde las unidades con gorrito son unidades sin dimensiones. Como $D_f > D_s$, el tiempo característico para las sustancias de difusión rápida $t_f = \frac{d^2}{D_f}$ es más pequeño que el tiempo característico para las sustancias de difusión lenta $t_s = \frac{d^2}{D_s}$ y en cuanto a medición de tiempo es mejor comparar con intervalos de tiempo más pequeños, por esta razón usamos el tiempo característico t_f para adimensionalizar:

$$\hat{t} = \frac{D_f}{d^2} t \quad (2.7)$$

El movimiento convectivo se realiza en la dirección x, z ($w \ll d$) pero es en la dirección z donde se tienen los gradientes de concentración que provocan el movimiento, por tanto adimensionalizaremos las variables espaciales con d . Para adimensionalizar velocidades utilizamos:

$$\hat{v} = \frac{d}{D_f} \vec{v}$$

Para adimensionalizar las expresiones $\eta_s(x, z, t)$ y $\eta_f(x, z, t)$ se multiplican por $\frac{1}{c_{s0}}$ y $-\frac{1}{c_{f0}}$ respectivamente, donde el signo menos es usado por convención ya que las concentraciones tienen un efecto estabilizador y desestabilizador respectivamente .

Para problemas 2-dimensionales, es conveniente introducir la así llamada función de corriente $\psi(x, z)$, su definición esta dada por: $\vec{v} = (\partial_z \psi, 0, -\partial_x \psi)$ de este modo se tendrán ecuaciones para ψ (una función escalar) en lugar de \vec{v} (un campo vectorial). Además, como el fluido se considera incompresible, la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ se satisface automáticamente al introducir la función de corriente, y así ya no la consideraremos en nuestro estudio. Para quitar dimensiones a ψ se utiliza: $\hat{\psi} = \frac{\psi}{D_f}$.

Con estos cambios de variables, los operadores adquieren la forma :

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \quad \nabla \times \rightarrow \frac{1}{d} \hat{\nabla} \times \quad \nabla \rightarrow \frac{1}{d} \hat{\nabla}$$

Después de aplicar el rotacional a la ecuación de Navier Stokes, y de adimensionalizar las ecuaciones en la forma arriba indicada, obtenemos el sistema de ecuaciones de movimiento (2.8), (2.9) y (2.10) el cual es equivalente a las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5) respectivamente (ver apéndice C para los detalles).

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\hat{\nabla}^2 \hat{\psi} \right) - J \left(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} \right) \right] = -\hat{\nabla}^2 \hat{\psi} + [-R_f \partial_{\hat{x}} \hat{\eta}_f + R_s \partial_{\hat{x}} \hat{\eta}_s] \quad (2.8)$$

$$-\tau \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_s + \frac{\partial \hat{\eta}_s}{\partial \hat{t}} + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} = J \left(\hat{\psi}, \hat{\eta}_s \right) \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_f}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_f + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} = J \left(\hat{\psi}, \hat{\eta}_f \right) \quad (2.10)$$

Donde $J(f, g) = (\partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g)$ es el parentesis de Poisson, σ es el número de Schmidt definido como:

$$\sigma = 12\nu d^2 / D_f w^2 \quad (2.11)$$

y τ el número de Lewis que es la razón entre las constantes de difusión $\tau = D_s / D_f$. Las ecuaciones (2.8), (2.9) y (2.10) tambien se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 + \partial_t & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 + \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta_s \\ \eta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} J(\psi, \nabla^2 \psi) \\ J(\psi, \eta_s) \\ J(\psi, \eta_f) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

donde hemos omitido los “gorritos” a las variables.

En los experimentos realizados por Predtechensky, el número de Schmidt es del orden de 10^5 [5] entonces el sistema de ecuaciones adimensionales, en la aproximación de Boussineq, en el límite $\sigma \rightarrow \infty$ queda de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 + \partial_t & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 + \partial_t \end{pmatrix} \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ J(\psi, \eta_s) \\ J(\psi, \eta_f) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Donde $\vec{\xi}(x, z, t)$ es un campo vectorial cuyas componentes son la función de corriente ψ y las desviaciones de las concentraciones η_s y η_f con respecto al estado conductivo, es decir, el campo vectorial $\xi(x, z, t)$ esta dado por:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \eta_s \\ \eta_f \end{pmatrix}$$

Nosotros trabajaremos con estas ecuaciones junto con las condiciones de frontera discutidas anteriormente

$$\psi = \eta_s = \eta_f = 0 \quad \text{en } z = 0,1 \quad (2.14)$$

y periodicidad en la dirección x . En el capítulo siguiente haremos el análisis de estabilidad lineal de estas ecuaciones de movimiento.

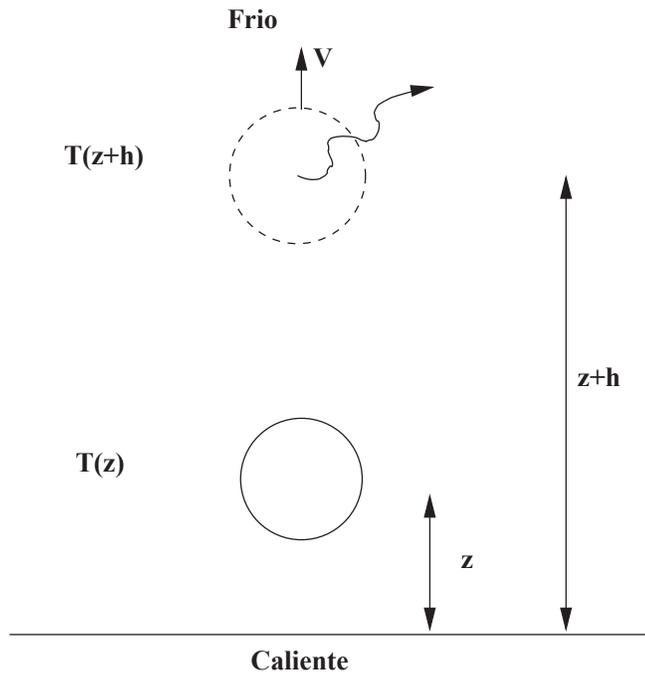


Figura 2.2: Si un elemento de fluido (círculo continuo) se desplaza hacia arriba, sus alrededores estarán más fríos y por tanto más pesados que él, lo que ocasionará que lo empujen hacia arriba con una velocidad V , entre más grande sea la diferencia de temperatura $T(z) - T(z + h)$ más grande será la diferencia de la densidad y mayor el empuje hacia arriba del e.f. Además decrecerá su temperatura por difusión haciendo que decrezca la fuerza de flotación ascendente. La viscosidad también tratará de parar el movimiento.

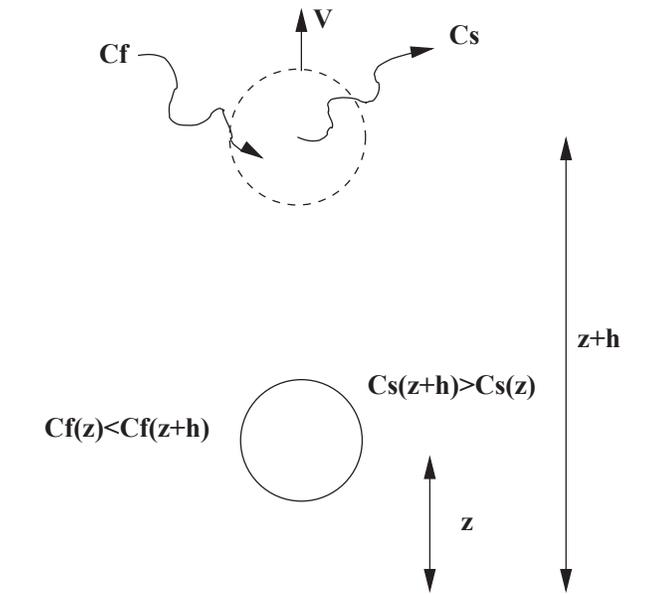


Figura 2.3: Si un elemento de fluido (círculo continuo) se desplaza hacia arriba a la posición indicada por el círculo punteado, sus alrededores tendrán c_f mayor y c_s menor, así que habrá un flujo rápido de tal sustancia rápida hacia el interior del e.f. Habrá también un flujo lento de c_s desde el interior hacia el entorno externo, el efecto neto será que el e.f se pondrá más pesado que su entorno y descenderá. Al descender, con valores adecuados de los parámetros, pasará más allá de su posición original, y al mismo tiempo irá difundiendo la especie rápida hacia su exterior haciéndose más ligera, y volverá a subir.

Capítulo 3

Análisis de Estabilidad Lineal

3.1. Introducción

La dinámica de un sistema ya sea físico, biológico, químico, económico, etc., generalmente se modela a través de un sistema de ecuaciones diferenciales que pueden surgir de leyes más fundamentales ó modelos empíricos. En nuestro caso, la dinámica de nuestro sistema es gobernada por las ecuaciones (2.12), para un sistema mecánico, la dinámica será gobernada por las ecuaciones de Newton, Lagrange ó Hamilton, y así sucesivamente. El propósito de la teoría de estabilidad lineal, es estudiar bajo que condiciones un estado de un sistema (en nuestro caso, por ejemplo, el estado conductivo) es inestable ante pequeñas perturbaciones, es decir, las circunstancias bajo las cuales un estado del sistema sufrirá una transición a otro estado de movimiento (o solución de las ecuaciones). En cualquier sistema físico es inevitable la presencia de perturbaciones, aun cuando se tengan experimentos cuidadosamente controlados, éstas estarán presentes. Entonces la pregunta es si estas perturbaciones crecerán llevando al sistema a otro estado, en cuyo caso se dice que el sistema es inestable, ó si estas perturbaciones no crecerán y eventualmente se anularán, permaneciendo el sistema de este modo, en el mismo estado, en cuyo caso el sistema se dice que es estable.

En este capítulo realizaremos el análisis de estabilidad lineal del estado conductivo. Para tener una idea más clara al respecto, expondremos brevemente la idea central de la teoría de estabilidad lineal como aparecen en los libros de texto de dinámica no lineal y caos [7]. Dicho análisis se hace alrededor de sus puntos fijos, que definiremos en la siguiente sección (en nuestro caso, el “punto” fijo sería el estado conductivo). En los textos, generalmente se realiza el análisis a ecuaciones de la forma $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, esto no debe extrañarnos pues siempre es posible escribir ecuaciones de orden superior en esta forma, por ejemplo, la ecuación del oscilador armónico amortiguado y forzado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0 x = F \cos(\omega t) \quad (3.1)$$

se puede escribir en la forma indicada introduciendo la variable $y = \dot{x}$, de este modo se tendría el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\gamma y - \omega_0 x + F \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Aunque como veremos, no es absolutamente indispensable escribir las ecuaciones de esta forma. En la siguiente sección, trataremos el caso en que tenemos sólo una ecuación diferencial, y después el caso de n ecuaciones diferenciales.

3.2. Caso 1-dimensional

Consideremos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(x), \quad (3.2)$$

donde f es una función de una sola variable real bien comportada (continua y su primera derivada también continua). Decimos que \tilde{x} es un punto fijo si $f(\tilde{x}) = 0$.

Una vez localizados los puntos fijos, uno puede colocarse "cerca" de uno de ellos (en el punto $x(t)$) y preguntarse por la evolución de $x(t)$. Este punto $x(t)$ puede alejarse, acercarse, o mantenerse moviendo alrededor del punto fijo \tilde{x} . La clasificación de los puntos fijos se da en base a estos comportamientos de un punto "cercano" $x(t)$. Iniciemos analizando la estabilidad de un punto fijo \tilde{x} de la ecuación diferencial (3.2) considerando una perturbación alrededor del punto fijo \tilde{x} , que llamaremos η , la cual expresaremos como

$$\eta(t) = x(t) - \tilde{x}$$

así que $x(t) = \eta(t) + \tilde{x}$ es un punto alejado de \tilde{x} por una "distancia" η , que consideraremos pequeña. Una pregunta natural es cómo evoluciona $\eta(t)$ en el tiempo (o equivalentemente, cómo evoluciona un punto 'cercano' $x(t)$). Deseamos entonces obtener una ecuación para η , que será

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{d\eta}{dt} = \frac{d}{dt} [x(t) - \tilde{x}] = \frac{dx}{dt} \\ &= \dot{x}(t) = f(x) = f(\eta + \tilde{x}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Hagamos una linealización de $\dot{\eta}$ (es decir, despreciaremos los términos de orden iguales y superiores a η^2) por medio de la expansión en serie de Taylor de $f(\eta + \tilde{x})$

$$\dot{\eta} = f(\tilde{x}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{\tilde{x}} (x - \tilde{x}) + \vartheta[(x - \tilde{x})^2]. \quad (3.4)$$

Si consideramos que $\eta \ll 1$ podremos despreciar los términos de orden 2 y mayores, así la ecuación (3.4) nos queda

$$\dot{\eta} = f'(\tilde{x})\eta$$

Resolviendo esta ecuación diferencial tendremos que $\eta = \eta_0 e^{f'(\tilde{x})t}$, donde η_0 , la perturbación inicial, es una constante. Podemos ahora observar que su solución está determinada por el signo que tome $f'(\tilde{x})$ entonces: si $f'(\tilde{x}) > 0$, η crece, decimos que \tilde{x} es un punto inestable. Si $f'(\tilde{x}) < 0$, η decrece, decimos que \tilde{x} es punto estable.

Notamos que la estabilidad de un punto fijo, en el caso 1-dimensional, depende del signo de la primera derivada de la función f en el punto fijo bajo consideración. Para el caso de n variables, la derivada de la función ya no es simplemente un número, y necesitaremos otro criterio. A continuación analizamos el caso n -dimensional.

3.3. Caso n-dimensional

Ahora analizaremos el caso de n variables. Consideremos al sistema

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (3.5)$$

donde $f : R^n \rightarrow R^n$, es una función de clase C^1 . En componentes (3.5) se ve como

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

decimos que \tilde{x} es un punto fijo si $\vec{f}(\tilde{x}) = 0$.

Si consideramos un punto $\vec{x}(t)$ cercano a \tilde{x} , éste lo escribiremos como

$$\vec{x}(t) = \tilde{x} + \vec{\eta} \quad (3.6)$$

Las componentes de cada vector son

$$\vec{x} = (x_1 x_2 \dots x_n), \quad \tilde{x} = (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_n), \quad \vec{\eta} = (\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n)$$

Ahora analicemos como cambia $\vec{\eta}$ con respecto al tiempo. Derivando la ecuación (3.6) tenemos

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{dt} + \frac{d\vec{\eta}}{dt} = \frac{d\vec{\eta}}{dt}$$

Desarrollando en serie de Taylor la i -ésima componente de $\vec{f}(\vec{x})$ uno llega a

$$\dot{\eta}_i = f_i(\tilde{x}) + \frac{1}{j!} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(\tilde{x})}{\partial x_j} \eta_j + \vartheta(\eta^2) \quad (3.7)$$

donde $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Si consideramos que $\eta \ll 1$ despreciaremos los términos de orden 2 en η , conservando sólo los términos lineales. De esta manera encontramos que la ecuación para $\vec{\eta}(t)$ es

$$\dot{\eta}_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\tilde{x}} \eta_j \quad (3.8)$$

La matriz Jacobiana

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\tilde{x}} = J \quad (3.9)$$

se evalúa en el punto fijo \tilde{x} . La ecuación (3.8) escrita en forma matricial es

$$\dot{\vec{\eta}} = J\vec{\eta}$$

con la experiencia en el caso 1-dimensional, proponemos una solución de la forma

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}_0 e^{\lambda t} \quad (3.10)$$

Este resultado nos conduce a un problema de valores propios: $J\vec{\eta}_0 = \lambda\vec{\eta}_0$. Los valores propios determinarán el carácter de un punto fijo.

Un ejemplo de linearización alrededor del punto fijo $\vec{0}$, lo veremos con el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y) = \mu x - y + xy^2 \\ \dot{y} &= f_2(x, y) = x + \mu y + y^3\end{aligned}\tag{3.11}$$

La matriz Jacobiana es,

$$J = \left(\begin{array}{cc} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{array} \right)_{\vec{0}} = \left(\begin{array}{cc} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{array} \right)$$

Donde $f_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ y $x_1 = x$, $x_2 = y$. Como puede verse inmediatamente, la ecuación linearizada $\dot{\vec{x}} = J\vec{x}$ es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x, y) = \mu x - y \\ \dot{y} &= f_2(x, y) = x + \mu y\end{aligned}$$

que equivale a simplemente despreciar los términos no-lineales en la (3.11).

Una clasificación completa para el caso 2-dimensional se encuentra en [7]. Ya no la haremos aquí, el propósito de estas primeras secciones era dar nociones generales de la teoría de estabilidad lineal, necesarias para prepararnos para la siguiente sección, en el que realizaremos el análisis de estabilidad lineal al estado conductivo.

3.4. Estabilidad Lineal

Para realizar el análisis de estabilidad lineal, escribimos la solución como una superposición de ondas viajeras a la derecha y a la izquierda

$$\vec{\xi}(x, z, t) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} iA_R \\ C_{s1R} \\ C_{f1R} \end{pmatrix} \exp(\lambda t - iqx) + \begin{pmatrix} -iA_L \\ C_{s1L} \\ C_{f1L} \end{pmatrix} \exp(\lambda t + iqx) \right] \sin(\pi z) + cc \quad (3.12)$$

Este campo vectorial cumple con la condiciones de frontera impuestas en el capitulo 1. Sustituiremos este campo vectorial en las ecuaciones linearizadas

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + 1 \right) \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 + \partial_t & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 + \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta_s \\ \eta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

que se obtuvieron de (2.13) simplemente despreciando los términos no lineales.

La evolución temporal $\exp(\lambda t)$ esta determinada por el valor de $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, cuando $\lambda_r > 0$, la perturbación crecerá hasta que el sistema no pueda ser descrito por una aproximación lineal, en esta situación decimos que este modo es inestable. Si $\lambda_r = 0$, se dice que el modo es neutralmente estable, si $\lambda_r < 0$ decimos que el modo es asintóticamente estable ó linealmente estable. Si $\lambda_i \neq 0$ mientras $\lambda_r \rightarrow 0$ para alguna perturbación se tiene una inestabilidad oscilatoria. Si $\lambda_i = 0$ mientras $\lambda_r \rightarrow 0$ tenemos una inestabilidad estacionaria.

Introduciendo (3.12) en el sistema lineal (3.13), obtenemos un sistema de ecuaciones para los coeficientes A_R, C_{s1R} y C_{f1R} (similarmente para A_L, C_{s1L} y C_{f1L}) para cada modo.

$$\left(\frac{\lambda}{\sigma} + 1 \right) k^2 A_R - R_s q C_{s1R} + R_f q C_{f1R} = 0 \quad (3.14)$$

$$q A_R + (\lambda + \tau k^2) C_{s1R} = 0 \quad (3.15)$$

$$q A_R + (\lambda + k^2) C_{f1R} = 0 \quad (3.16)$$

O bien:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\sigma} + 1\right) & -R_s q & R_f q \\ q & (\lambda + \tau k^2) & 0 \\ q & 0 & (\lambda + k^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1R} \\ C_{s1R} \\ C_{f1R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Donde $k^2 = \pi^2 + q^2$. Este sistema tiene solución distinta de la trivial si el determinante de la matriz del sistema (3.17) es igual a cero, de aquí se obtiene la siguiente relación de dispersión.

$$\frac{\lambda}{\sigma} + 1 = \frac{q^2}{k^2} \left(\frac{R_f}{\lambda + k^2} - \frac{R_s}{\lambda + \tau k^2} \right) \quad (3.18)$$

De esta ecuación en términos de λ se obtiene la ecuación cúbica $\lambda^3 - a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda - a_0 = 0$ con coeficientes reales a_2 , a_1 y a_0 .

$$\lambda^3 - \lambda^2(-\tau k^2 - k^2 - \sigma) + \lambda(\tau k^4 + \sigma k^2 + \sigma \tau k^2 - R_f \frac{q^2 \sigma}{k^2} + R_s \frac{q^2 \sigma}{k^2}) - (-\sigma \tau k^4 + R_f q^2 \sigma \tau - R_s q^2 \sigma) = 0$$

Para el modo estacionario ($\lambda = 0$) se tiene que $a_0 = 0$ y de aquí se obtiene :

$$R_{fc}^{(s)} = \frac{R_s}{\tau} + \frac{k^4}{q^2} \quad (3.19)$$

Para la inestabilidad oscilatoria $\lambda = \pm i \lambda_i$

$$\mp i \lambda_i^3 + a_2 \lambda_i^2 \pm a_1 i \lambda_i - a_0 = 0$$

se deben cumplir dos condiciones sobre los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 , la primera condición: $a_0 = a_1 a_2$ y la segunda condición: $a_1 = \lambda_i^2$. De la primera condición se obtiene el siguiente valor crítico de $R_{fc}^{(o)}$, el cual determina el comienzo del movimiento en la rama oscilatoria.

$$R_{fc}^{(o)} = \frac{k^2 \tau + \sigma}{k^2 + \sigma} R_s + \frac{k^4}{q^2 + \sigma} (\tau + 1) (\tau k^2 + \sigma) \quad (3.20)$$

Mientras que de la segunda condición obtenemos la frecuencia de oscilación,

$$\lambda_i^2 = \omega_0^2 = \tau k^2 (k^2 + \sigma) + \sigma k^2 + \frac{q^2 \sigma}{k^2} (R_s - R_f^o) \quad (3.21)$$

$$\omega_0^2 = -\tau^2 k^4 + \frac{q^2 \sigma}{k^2 + \sigma} (1 - \tau) R_s \quad (3.22)$$

Para la inestabilidad estacionaria el mínimo valor de q_c a la cual la inestabilidad ocurre es π , se obtiene encontrando el mínimo de la ecuación (3.18) y es independiente del valor de σ , sin embargo el valor mínimo q_c para la inestabilidad oscilatoria es π sólo cuando $\sigma^{-1} \rightarrow 0$. En esta aproximación, el valor crítico del número Rayleigh para las inestabilidades estacionaria y oscilatoria son:

$$R_{fc}^{(s)} = \frac{R_s}{\tau} + 4\pi^2 \quad \text{y} \quad R_{fc}^{(o)} = R_s + 4\pi^2 (1 + \tau) \quad (3.23)$$

Sustituyendo $q_c = \pi$ en la ecuación (3.22), en el límite $\sigma^{-1} \rightarrow 0$ tenemos:

$$\omega_0^2 = -4\pi^2 \tau^2 + \pi^2 (1 - \tau) R_s \quad (3.24)$$

Igualando $R_{fc}^{(s)}$ y $R_{fc}^{(o)}$ de las ecuaciones (3.23) obtenemos el punto de codimensión-2 definido como el punto de intersección de la rama estacionaria y la rama oscilatoria. Los números de Rayleigh en este punto están dados por:

$$R_s^{(c2)} = \frac{4\pi^2 \tau^2}{1 - \tau} \quad \text{y} \quad R_{fc}^{(c2)} = \frac{4\pi^2}{1 - \tau} \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.25) en la ecuación de la frecuencia (3.24) se obtiene $\omega_0^2 = 0$. La frecuencia se hace compleja para R_s menores al punto de codimensión-2, por lo que la rama estacionaria se termina precisamente ahí.

La figura (3.1) resume lo visto en este capítulo, es el diagrama de estabilidad lineal en el espacio de los parámetros R_f, R_s .

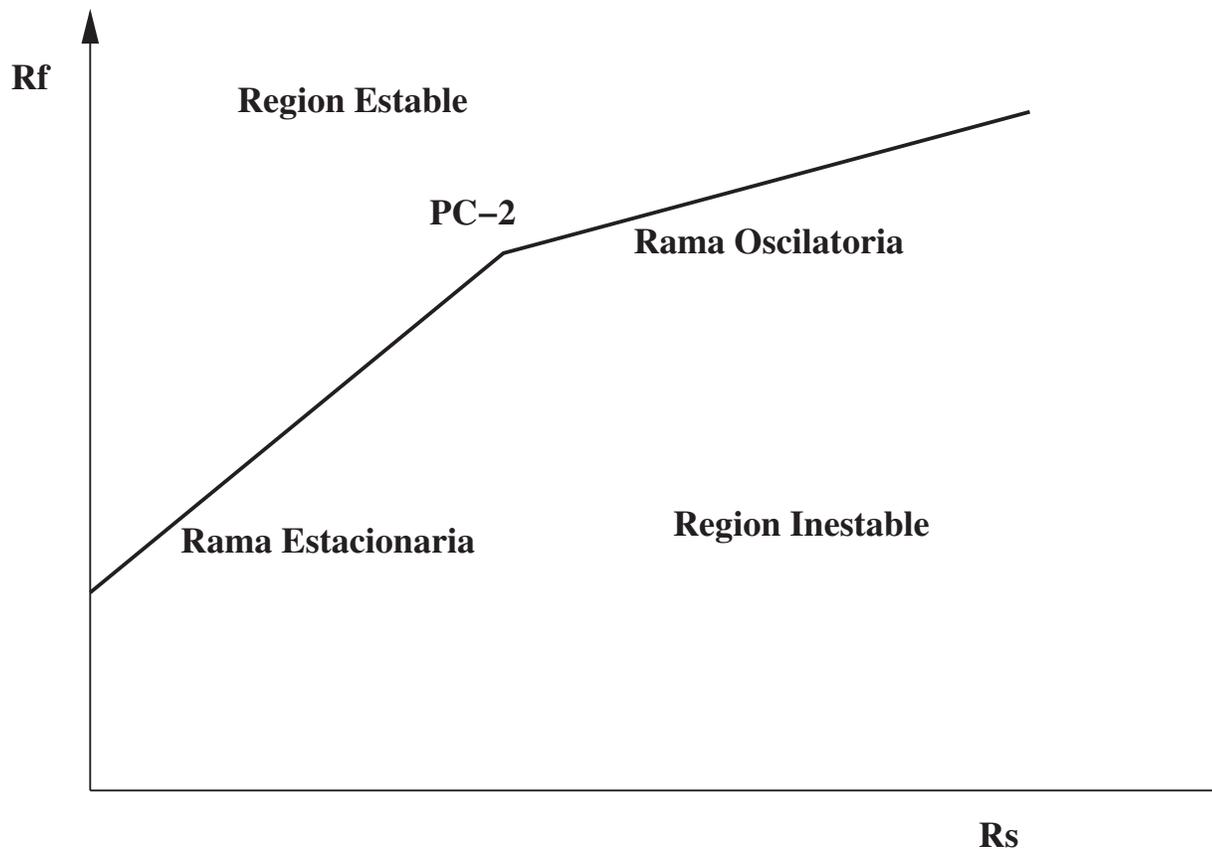


Figura 3.1: Diagrama de estabilidad lineal, como función de los números de Rayleigh R_s y R_f , la gráfica divide el plano (R_s, R_f) en 2 regiones una estable y una inestable. La gráfica esta compuesta de dos rectas de diferente pendiente, la recta de pendiente mayor es la Rama Estacionaria, la recta de pendiente menor es la Oscilatoria, el punto de intersección de ambas rectas ó punto de codimensión-2 donde hay una competencia de las dos inestabilidades.

Capítulo 4

Convección en la Rama Estacionaria

4.1. Introducción

Hasta ahora lo que hemos hecho es describir el sistema físico, objeto del estudio, adimensionalizando las ecuaciones de movimiento de las perturbaciones respecto al estado conductivo, y realizando el análisis de estabilidad lineal que nos permite dibujar el diagrama de estabilidad del sistema. Con este diagrama, tenemos una idea de la dinámica que uno espera encontrar dependiendo de los parámetros experimentales con los que preparemos al sistema. Pero el análisis de estabilidad lineal ya no nos proporciona más información del comportamiento del sistema, así que no podemos evitar lidiar con las ecuaciones completas no lineales para poder decir más de la dinámica. Como es bien sabido, encontrar soluciones exactas a las ecuaciones hidrodinámicas es en la mayoría de los casos de interés, simplemente imposible. Así que uno puede resolver las ecuaciones por métodos numéricos, que por cierto no es una tarea nada sencilla, ni rápida. Pero aún así, si ya tuviéramos un código, uno se pregunta, qué parámetros usaríamos, que esperaríamos encontrar con éstos?. Hay un camino analítico que nos da un poco más

de luz y que puede servir de guía incluso a las simulaciones numéricas, al menos, en la vecindad de las ramas de bifurcación, ya sea la estacionaria, o la oscilatoria, o bien en su intersección, donde éstas compiten. Este camino es el de los métodos aproximados. Para nuestro caso, ya tenemos la solución del estado conductivo (el fluido en reposo), y la solución en el umbral de la inestabilidad que esta dada por la solución que usamos para realizar el análisis de estabilidad lineal (3.12). Lo único que no conocemos en esa expresión, son las amplitudes, A_R y A_L , que experimentalmente se observa que varían lentamente en el tiempo hasta que adquieren un valor fijo, al menos en la rama oscilatoria [5], [6]. De modo que en este sistema, se tienen al menos dos escalas de tiempo, la de la oscilación dadas por el valor de $\lambda = \omega_0$ que aparece en (3.12), y la de la amplitud. De modo que si queremos buscar una solución aproximada en la vecindad del umbral de la inestabilidad, debemos tomar en cuenta el hecho de la existencia de varias escalas de tiempo.

Es sabido que la teoría de perturbaciones regulares falla en problemas con más de una escala temporal. En la sección siguiente, se expondrá muy brevemente un ejemplo de falla de esta teoría en un ejemplo muy simple, y cómo se corrige con la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples. No pretendemos realizar una exposición en detalle, sólo clarificar las ideas. Estudios muy detallados se encuentran por ejemplo en la tesis doctoral de D. Williams [8], o en el trabajo de Dangelmayr *et al* [9], o en algunos libros de texto avanzado [1]. Las aplicaciones del formalismo de las ecuaciones de amplitud, van mas alla del ámbito de la dinámica de los fluidos, incluyen aplicaciones en Biología [10], en óptica [11], etc., por mencionar solo un par de trabajos. Mas referencias se encuentran en [12].

4.2. Teoría de Perturbaciones Regulares

Ilustraremos la teoría de perturbaciones con osciladores debilmente no-lineales, esto es, ecuaciones de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \epsilon f(x, \dot{x}) = 0 \quad (4.1)$$

donde $\epsilon \ll 1$ y f es una función suave de sus argumentos. Dos de los ejemplos clásicos son la ecuación de van der Pol $d\dot{x}/dt + x + \epsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$, y la ecuación de Duffing $d\dot{x}/dt + x + \epsilon x^3 = 0$. Cuando $\epsilon = 0$, lo que nos queda es la ecuación del oscilador cuya solución es bien conocida. Así que la solución de (4.1), cuando ϵ es pequeño, se esperaría que fuera muy cercana a la respectiva del oscilador armónico simple. Como una primera aproximación, buscamos soluciones de (4.1) de la forma

$$x(t, \epsilon) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (4.2)$$

Lo que se espera es que toda la información relevante se capture en los primeros términos. Esta aproximación se conoce como teoría de perturbaciones regulares. Si funciona en algunos casos, pero aquí solamente daremos un ejemplo de cuando no funciona. Para ello consideremos el oscilador debilmente amortiguado

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\epsilon \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (4.3)$$

con las condiciones $x(0) = 0$ y $\dot{x}(0) = 1$. La solución exacta se conoce y es

$$x(t, \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon t} \sin[\sqrt{1 - \epsilon^2} t] = A(\epsilon t) \sin[\sqrt{1 - \epsilon^2} t] \quad (4.4)$$

Si ahora sustituimos (4.2) en (4.3) y agrupamos los coeficientes de las diferentes potencias de ϵ , se obtiene

$$\left[\frac{d^2x_0}{dt^2} + x_0 \right] + \epsilon \left[\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2 \frac{dx_0}{dt} + x_1 \right] + O(\epsilon^2) = 0 \quad (4.5)$$

y esto para toda ϵ , por lo que cada coeficiente debe anularse y así se tiene una serie de ecuaciones a diferentes ordenes en ϵ , las primeras dos son precisamente las dos entre paréntesis en (4.5) igualadas a cero. Aplicando las condiciones iniciales, la solución a orden cero en ϵ es

$$x_0(t) = \sin t \tag{4.6}$$

Sustituyendo esta x_0 en la ecuación a orden 1 en ϵ , es decir en

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + 2\frac{dx_0}{dt} + x_1 = 0 \tag{4.7}$$

Se tiene

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + x_1 = -2 \cos t \tag{4.8}$$

Pero el lado derecho es un término que producirá resonancia. Usando las condiciones iniciales, la solución de esta última ecuación es $x_1(t) = -t \sin t$ que crece cuando t crece. Así, la solución que arroja la teoría de perturbaciones es

$$x(t, \epsilon) = \sin t - \epsilon t \sin t + O(\epsilon^2) \tag{4.9}$$

que sólo se aproxima bien a la solución exacta para tiempos muy pequeños, y se aleja desastrosamente de la solución exacta para tiempos mayores. Donde estuvo la falla? cabe señalar dos puntos: la solución exacta exhibe dos escalas de tiempo, un tiempo rápido t que es de orden 1 para la oscilación sinusoidal, y un tiempo lento sobre el cual la amplitud varía (ver la solución exacta (4.4)). El segundo punto a indicar es que, la frecuencia de oscilación en la solución exacta $\omega = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ se aproxima a $\omega = 1 - \frac{1}{2}\epsilon^2$ cambia un poquito. De la frecuencia $\omega = 1$ que aparece en la solución aproximada (4.9). Después de un tiempo muy largo, este error en la frecuencia tendrá un efecto acumulado importante.

La teoría de tiempos multiples trata de remediar esta situación, introduciendo dos tiempos desde el principio, un tiempo rápido $\tau = t$, y uno lento $T = \epsilon t$. En esta teoría, se trata a los tiempos múltiples como si fueran variables independientes. Aquí no trataremos de justificar rigurosamente esta suposición, solo indicaremos que sí funciona.

Ahora entonces se buscan soluciones de la forma

$$x(t, \epsilon) = x_0(\tau, T) + \epsilon x_1(\tau, T) + O(\epsilon^2) \quad (4.10)$$

El único cuidado que debe tenerse ahora es en el operador derivada, que queda, usando la regla de la cadena, como

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T} \quad (4.11)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.3), y agrupando los terminos en las potencias de ϵ , a orden cero se tiene la ecuación para x_0

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + x_0 = 0 \quad (4.12)$$

cuya solución es simplemente

$$x_0 = A \sin \tau + B \cos \tau \quad (4.13)$$

Y la ecuación a orden 1 es

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau \partial T} - 2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau} \quad (4.14)$$

que se convierte en

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \tau^2} + x_1 = -2(A' + A) \cos \tau + 2(B' + B) \sin \tau \quad (4.15)$$

donde la prima denota derivada con respecto a T . Pero ahora enfrentamos el mismo problema que arruinó a la teoría regular de perturbaciones, el lado

derecho de (4.15) nos llevará a la resonancia, a menos que los coeficientes de los terminos resonantes se forcen a anularse, dando por resultado, dos *ecuaciones de amplitud* para los coeficientes. Tales ecuaciones tienen por solución $A(T) = A(0)e^{-T}$ y $B(T) = B(0)e^{-T}$. Si utilizamos las condiciones iniciales, se obtiene finalmente que

$$x = e^{-T} \sin \tau + O(\epsilon) \quad (4.16)$$

Que es la solución predicha por la teoría de tiempos múltiples, y que se acerca mucho a la solución exacta. Ahora aplicaremos lo aprendido en este ejemplo simple a nuestro caso de estudio. El primer caso lo tenemos en la rama estacionaria.

4.3. Derivación de la ecuación de Amplitud

Como bosquejamos en la sección anterior, las ecuaciones de amplitud son modelos matemáticos que describen las pequeñas variaciones temporales (aunque podrían incluir las variaciones espaciales también) de las variables originales que caracterizan cualquier sistema cerca de los valores críticos. Derivaremos las ecuaciones de amplitud de las ecuaciones hidrodinámicas de movimiento cerca del umbral de las inestabilidades estacionarias, oscilatorias y el punto de codimensión-2 (este último sólo lo describiremos en esta tesis). En esta sección analizaremos la ecuación de amplitud para la rama estacionaria :

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A - g_3 A |A|^2 \quad (4.17)$$

donde $\epsilon = (R_{fc} - R_{fc}^{ss})/R_{fc}^{ss}$ es la distancia relativa a la rama estacionaria.

Para calcular g_3 y τ_0 , expandemos el número de Rayleigh y $\vec{\xi}$ en términos de un parámetro pequeño η .

$$R_f = R_{fc}^{ss} + \eta R_1^{ss} + \eta^2 R_2^{ss} + \eta^3 R_3^{ss} + \dots \quad (4.18)$$

$$\vec{\xi} = \eta \vec{\xi}_1 + \eta^2 \vec{\xi}_2 + \eta^3 \vec{\xi}_3 + \dots \quad (4.19)$$

reemplazando ∂_t por $\eta^2 \partial_T$, y sustituyendo (4.18) y (4.19) en el sistema de ecuaciones (2.13) se tiene una serie de problemas lineales. A orden η se tiene la siguiente ecuación :

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

O bien:

$$\vec{L}_0 \vec{\xi}_1 = \vec{0}$$

el cual tiene solución

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{2} \sin \pi z \begin{pmatrix} i(A \exp(-i\pi x) - A^* \exp(i\pi x)) \\ -\frac{1}{2\pi\tau}(A \exp(-i\pi x) + A^* \exp(i\pi x)) \\ -\frac{1}{2\pi}(A \exp(-i\pi x) + A^* \exp(i\pi x)) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Agrupando términos de orden η^2 se tiene:

$$\vec{L}_0 \vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -R_1 \partial_x \eta_{f1} \\ J(\psi_1, \eta_{s1}) \\ J(\psi_1, \eta_{f1}) \end{pmatrix} \equiv \vec{F}_2(x, y) \quad (4.22)$$

Por teorema de Fredholm [12] el sistema (4.22) tiene una solución para $\vec{\xi}_2$ si y sólo si \vec{F}_2 es ortogonal a la solución de $\vec{L}_0^\dagger \vec{\xi}^\dagger = \vec{0}$, donde \vec{L}_0^\dagger es el operador adjunto de \vec{L}_0 , la ecuación adjunta es (ver apéndice E):

$$\vec{L}_0^\dagger \vec{\xi}^\dagger = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -\partial_x & -\partial_x \\ R_s \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ -R_{fc} \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \vec{\xi}^\dagger = \vec{0} \quad (4.23)$$

cuya solución es:

$$\vec{\xi}^\dagger = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -R_s q/k^2 \tau \\ R_{fc} q/k^2 \end{pmatrix} A^\dagger \exp(-i\pi x) \sin \pi z + c.c \quad (4.24)$$

La condición de ortogonalidad (ver apéndice E) $(\vec{F}_2, \vec{\xi}^\dagger) = 0$ implica $R_1 = 0$, bajo esta condición la solución de la ecuación (4.22) esta dada por:

$$\vec{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -|A|^2/16\tau^2\pi \\ -|A|^2/16\pi \end{pmatrix} \sin(2\pi x)$$

A orden η^3

$$\vec{L}_0 \vec{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -R_2 \partial_x \eta_{f1} \\ -\partial_T \eta_{s1} + J(\psi_1, \eta_{s2}) + J(\psi_2, \eta_{s1}) \\ -\partial_T \eta_{f1} + J(\psi_1, \eta_{f2}) + J(\psi_2, \eta_{f1}) \end{pmatrix} \equiv \vec{F}_3(x, y) \quad (4.25)$$

De la condición de integrabilidad a orden η^3 : $(\vec{F}_3, \vec{\xi}^\dagger) = 0$, se obtiene

$$R_2 = -\frac{|A|^2}{16} \left(\frac{R_s}{\tau^3} - \frac{R_s}{\tau} - 4\pi^2 \right) = -\frac{|A|^2}{16} \left(\frac{R_s}{\tau^3} - R_{fc} \right)$$

La ecuación de amplitud para la rama estacionaria y los coeficientes g_3 y τ_0 correspondientes:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= -\frac{1}{2\pi^2 R_{fc}} \left(\frac{R_s}{\tau^2} - R_{fc} \right) \\ g_3 &= -\frac{1}{16R_{fc}} \left(\frac{R_s}{\tau^3} - R_{fc} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.4. Análisis de las Ecuaciones

Una vez que tenemos la ecuación de amplitud a tercer orden (4.17) nos interesamos en su solución y que nos dice dicha solución respecto a la dinámica del sistema. Para estudiar su solución, escribimos A en su forma polar, $A = \mathcal{A}e^{i\theta}$ en la ecuación anterior (4.17):

$$\begin{aligned} \tau_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} e^{i\theta} + \tau_0 i \mathcal{A} e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt} &= \epsilon \mathcal{A} e^{i\theta} - g_3 \mathcal{A} e^{i\theta} \mathcal{A}^2 \\ \tau_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \epsilon \mathcal{A} - g_3 \mathcal{A}^3 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Haciendo el cambio $(\mathcal{A})^2 = B(t)$ la ecuación (4.27) toma la forma de una ecuación de Bernoulli,

$$\frac{dB(t)}{dt} = \frac{2\epsilon}{\tau_0} B(t) - \frac{2g_3}{\tau_0} B(t)^2$$

la cual tiene por solución:

$$(\mathcal{A})^2 = B(t) = \frac{\epsilon B(0) \exp\left(\frac{2\epsilon t}{\tau_0}\right)}{B(0)g_3(\exp\left(\frac{2\epsilon t}{\tau_0}\right) - 1) + \epsilon} \quad (4.28)$$

Analizaremos dos casos : $g_3 > 0$ y $g_3 < 0$.

Caso I. Consideremos $g_3 > 0$, en la región $\epsilon < 0$ cuando $t \rightarrow \infty$, se tiene: $B(t) \rightarrow 0$.

Por otra parte, si $\epsilon > 0$, cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos $B(t) \rightarrow \epsilon/g_3$.

Los puntos $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}$ que satisfacen $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = 0$, son puntos fijos de la ecuación (4.27):

$$\tilde{\mathcal{A}} = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}} \quad (4.29)$$

Analizaremos el comportamiento de una pequeña perturbación alrededor del punto fijo $\tilde{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$, en la región $\epsilon > 0$ y considerando $g_3 > 0$, sustituyendo $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + \delta\mathcal{A}$ en la ecuación (4.27) se tiene:

$$\tau_0 \partial_t (\tilde{\mathcal{A}} + \delta \mathcal{A}) = \epsilon (\tilde{\mathcal{A}} + \delta \mathcal{A}) - g_3 (\tilde{\mathcal{A}} + \delta \mathcal{A})^3$$

$$\tau_0 \partial_t (\tilde{\mathcal{A}} + \delta \mathcal{A}) = \epsilon \tilde{\mathcal{A}} + \epsilon \delta \mathcal{A} - g_3 (\tilde{\mathcal{A}}^3 + \delta \mathcal{A}^3 + 3\tilde{\mathcal{A}}\delta \mathcal{A}^2 + 3\tilde{\mathcal{A}}^2\delta \mathcal{A}) \quad (4.30)$$

Como $\tilde{\mathcal{A}}$ es punto fijo:

$$\epsilon \tilde{\mathcal{A}} - g_3 \tilde{\mathcal{A}}^3 = 0$$

Como la perturbación $\delta \mathcal{A}$ es pequeña despreciaremos los términos de orden mayor ó igual a 2, entonces la ecuación (4.30) queda como:

$$\tau_0 \partial_t \delta \mathcal{A} = \epsilon \delta \mathcal{A} - 3g_3 \tilde{\mathcal{A}}^2 \delta \mathcal{A}$$

Como $\tilde{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ tenemos la ecuación:

$$\tau_0 \partial_t \delta \mathcal{A} = -2\epsilon \delta \mathcal{A}$$

La cual tiene por solución:

$$\delta \mathcal{A} = (\delta \mathcal{A})_0 e^{-2(\epsilon/\tau_0)t} \quad (4.31)$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ las perturbaciones decrecen y así este punto fijo: $\tilde{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ es estable.

Ahora analizaremos el comportamiento de una pequeña perturbación alrededor del punto fijo $\tilde{\mathcal{A}} = 0$, en la región $\epsilon < 0$ y considerando $g_3 > 0$, sustituyendo $\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}} + \delta \mathcal{A} = \delta \mathcal{A}$ en la ecuación (4.27) se tiene:

$$\tau_0 \partial_t \delta \mathcal{A} = \epsilon \delta \mathcal{A}$$

la cual tiene la solución :

$$\delta \mathcal{A} = e^{(\epsilon/\tau_0)t} \quad (4.32)$$

y en este caso las perturbaciones $\delta\mathcal{A} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$: entonces en esta región $\epsilon < 0$ tenemos que el punto fijo: $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ es estable, sin embargo cuando $\epsilon > 0$ la ecuación (4.32) diverge por lo que en la región $\epsilon > 0$ tenemos que $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ es un punto fijo inestable. Así cuando $g_3 > 0$ diremos que tenemos una bifurcación supercrítica (ver figura 4.1).

Caso II. Cuando $g_3 < 0$ el punto fijo $\tilde{\mathcal{A}} = \pm\sqrt{\epsilon/g_3}$ esta definido sólo cuando $\epsilon < 0$, llevando a cabo el mismo análisis perturbativo que en el caso I, se obtiene la ecuación (4.31) sin embargo en esta región $\epsilon < 0$ las perturbaciones $\delta\mathcal{A}$ crecen, por lo que este punto fijo es un punto fijo inestable. Similarmente para el punto fijo: $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ se obtiene la ecuación (4.32), la cual para $\epsilon < 0$ se tiene que las perturbaciones $\delta\mathcal{A}$ decrecen y por lo tanto el punto fijo $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ es estable, sin embargo para $\epsilon > 0$ las perturbaciones $\delta\mathcal{A}$ crecen y por lo tanto en esta región se tiene un punto fijo inestable. Bajo estas condiciones se tiene una bifurcación subcrítica (ver figura 4.2).

El punto donde hay un cambio de una bifurcación supercrítica ($g_3 > 0$) a una subcrítica ($g_3 < 0$) es el punto tricrítico y se determina cuando $g_3 = 0$. Igualando a cero la ecuación (4.26), se tiene el punto tricrítico.

$$R_s^{tp} = \frac{4\pi^2\tau^2}{1 - \tau^2}$$

4.5. Punto Tricrítico, y Ciclo de Histéresis

Para $R_s < R_s^{tp}$ la ecuación de amplitud (4.17) nos dice que al incrementar el valor de R_f , el movimiento convectivo iniciará cuando R_f alcance la valor de R_{fc}^{ss} . La amplitud de la función de corriente será $A \sim \epsilon^{\frac{1}{2}}$. Sin embargo, para $R_s > R_s^{tp}$, la ecuación de amplitud a tercer orden (4.17) predice que cuando R_f alcanza el valor de R_{fc} (es decir para $\epsilon > 0$) no hay una amplitud estable, ni siquiera $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ es estable. Así que para $R_s > R_s^{tp}$, la ecuación

de amplitud a tercer orden nos da información errónea. Para corregir esta situación se requiere la inclusión de un término a quinto orden,

$$\tau_0 \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \epsilon \mathcal{A} - g_3 \mathcal{A}^3 - g_5 \mathcal{A}^5 \quad (4.33)$$

que hará que la figura (4.2) se convierta en la figura (4.3), con una rama estable para $\epsilon > 0$.

Los puntos fijos satisfacen :

$$\mathcal{A}(\epsilon - g_3 \mathcal{A}^2 - g_5 \mathcal{A}^4) = 0$$

El primer punto fijo es $\tilde{A} = 0$. Para encontrar el segundo punto fijo debemos resolver:

$$g_3 \mathcal{A}^2 + g_5 \mathcal{A}^4 - \epsilon = 0 \quad (4.34)$$

Cuya solución es:

$$\mathcal{A}^2 = -\frac{g_3}{2g_5} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{g_3}{g_5}\right)^2 + \frac{4\epsilon}{g_5}} \quad (4.35)$$

En la figura (4.3) se presenta la gráfica de los puntos fijos. Lo que nos dice esta gráfica es que para $R_s > R_s^{tp}$ existe un ciclo de histéresis, es decir, cuando se incrementa el valor de R_f la convección iniciará hasta que R_f alcance el valor de R_{fc}^{ss} , para $R_f > R_{fc}^{ss}$ (es decir $\epsilon > 0$) la amplitud de la función de corriente saltará de cero a un valor finito igual a $2\mathcal{A}^{tp}$ y continuará creciendo cuando R_f crezca. Si R_f ahora la disminuimos, cuando R_f ahora la disminuimos, cuando R_f (al decrecer) alcance el valor R_{fc}^{ss} la convección no terminará en $\epsilon = 0$, continuará hasta que $\epsilon = \epsilon^{tp} < 0$, donde la amplitud saltará de \mathcal{A}^{tp} a cero. El valor de \mathcal{A}^{tp} y ϵ^{tp} están dados por:

$$\mathcal{A}^{tp} = \pm \sqrt{-\frac{g_3}{2g_5}} \quad (4.36)$$

$$\epsilon^{tp} = \frac{R_f^{tp} - R_{fc}}{R_{fc}} = -\frac{g_3^2}{4g_5} \quad (4.37)$$

En el espacio de parámetros, la convección iniciará cuando al incrementar R_f desde cero, R_f “toque” la rama estacionaria $R_{fc}^{(ss)}$. Al disminuir R_f , la convección no terminará cuando R_f “toque” a $R_{fc}^{(ss)}$ sino hasta que alcance la curva subcrítica (ver figura 4.4).

El valor explícito de g_5 se calculó en la referencia [14]

$$g_5 = \frac{1}{R_{fc}^{ss}} \left[\frac{g_3}{8} + \frac{3}{640} \left(\frac{R_s}{\tau} - R_{fc}^{ss} \right) - \frac{11g_3^2}{120\pi^2} \right] \quad (4.38)$$

Como $\epsilon^{tp} = -g_3^2/4g_5 < 0$, g_5 debe ser positivo, y en efecto lo es. En el punto tricrítico

$$g_5 = \frac{3(1 - \tau^2)}{640\tau^2}.$$

Tenemos así que para $R_s < R_s^{tp}$ la amplitud $\mathcal{A} \sim \epsilon^{1/2}$ y para $R_s > R_s^{tp}$, $\mathcal{A} \sim \epsilon^{1/4}$.

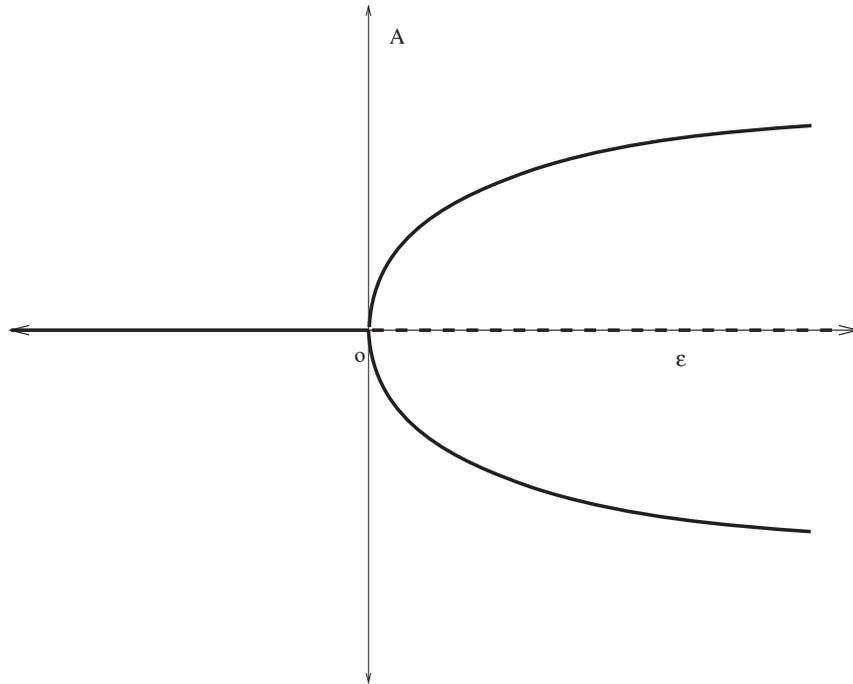


Figura 4.1: Diagrama de bifurcación supercrítica, para el caso $g_3 > 0$, se muestra la gráfica de los puntos fijos \mathcal{A} como función de ϵ , para $\epsilon > 0$ $\tilde{\mathcal{A}} = \pm\sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ y para $\epsilon > 0$ $\tilde{\mathcal{A}} = 0$, la línea punteada representa la inestabilidad del punto fijo $\tilde{\mathcal{A}} = 0$ para $\epsilon > 0$.

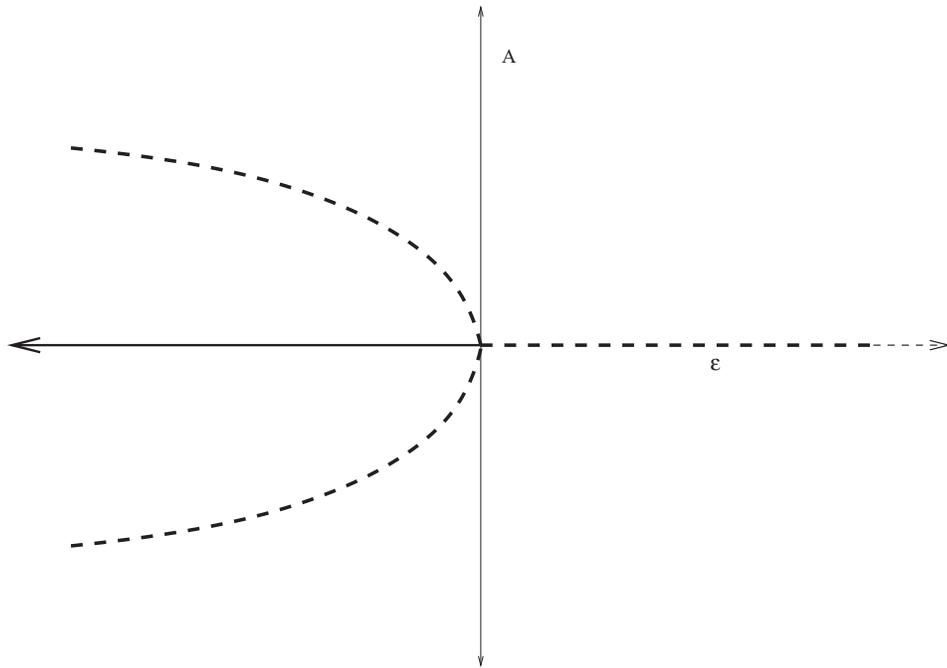


Figura 4.2: Diagrama de bifurcación subcrítica , para el caso $g_3 < 0$, se muestran los puntos fijos como función de ϵ , las curvas punteadas representan la inestabilidad de los puntos fijos : $\tilde{\mathcal{A}} = \pm \sqrt{\frac{\epsilon}{g_3}}$ y $\mathcal{A} = 0$ en las regiones $\epsilon < 0$ y $\epsilon > 0$ respectivamente , mientras que $\mathcal{A} = 0$ es un punto fijo estable para la región $\epsilon < 0$ y su estabilidad esta representada por una línea continua.

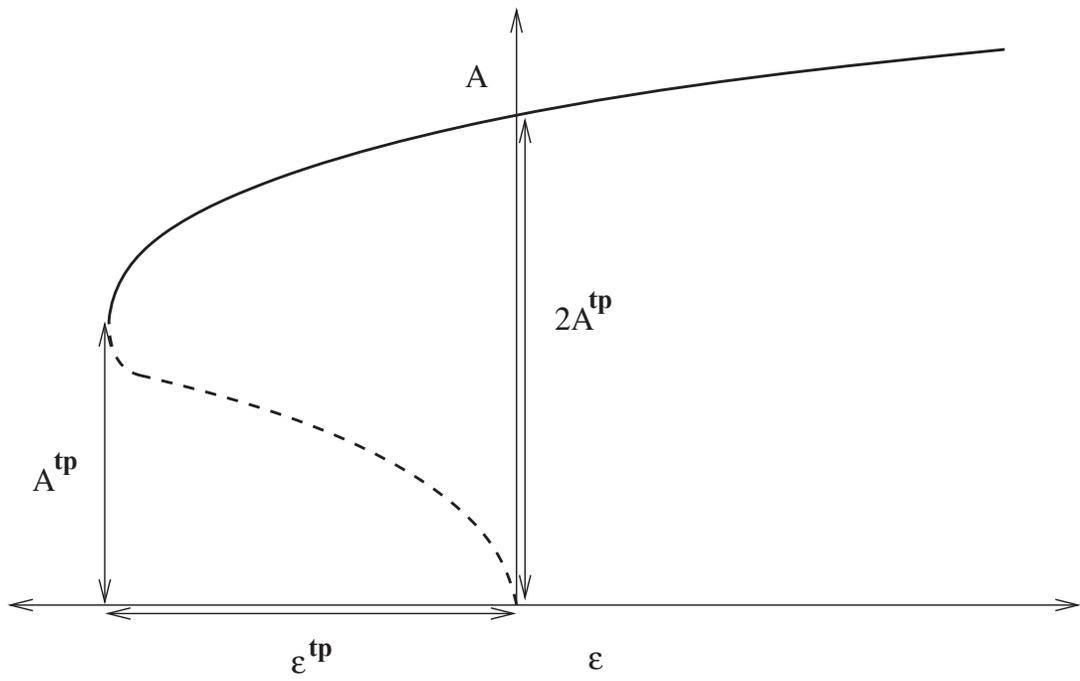


Figura 4.3: Gráfica de la amplitud como función de ϵ , construida a partir de la ecuación de amplitud a quinto orden.

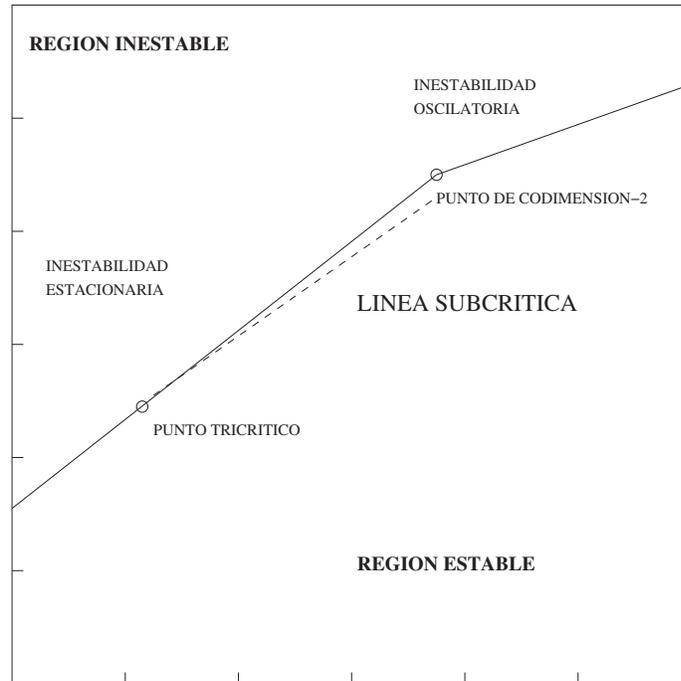
R_f  R_s

Figura 4.4: Esta es la predicción arrojada por la ecuación de amplitud en la rama estacionaria. Si R_f se incrementa desde cero, el sistema permanece en su estado conductivo hasta que toca a la rama estacionaria, y su amplitud crece como $\epsilon^{1/4}$, si R_f decrece, el sistema “brinca” del estado convectivo al conductivo cuando R_f toca la línea punteada, que es la predicción de la ecuación de amplitud a quinto orden. Para R_s menor al punto tricrítico, no se presenta este fenómeno de histéresis, y la amplitud es del orden $\epsilon^{1/2}$

Capítulo 5

Convección en la vecindad del PC2

5.1. Introducción

En el punto donde las inestabilidades estacionarias y oscilatorias colapsan se llama punto de codimensión-2. En la vecindad de este punto hay una competencia de estas dos inestabilidades. En esta sección describiremos la dinámica alrededor de este punto.

No se pretende dar una deducción de la ecuación de amplitud en la vecindad de este punto, sólo la mostraremos y describiremos lo que ésta nos dice.

5.2. Ecuación de Amplitud en la vecindad del PC-2

Cerca del punto de codimensión 2, los dos eigenvalores del problema lineal son cero y el estado conductivo se vuelve inestable en contra de los modos

estacionario y oscilatorio. En la vecindad de este punto la dinámica es descrita por (ver referencias [9] y [15]) :

$$\begin{aligned}\dot{A} &= B \\ \dot{B} &= \mu_1 A + \mu_2 B + f(A, B)\end{aligned}\tag{5.1}$$

Donde $f(A, B)$ es una función no lineal de A y \dot{A} .

La relación de dispersión (3.18) cuando $\sigma^{-1} \rightarrow 0$ adquiere la forma:

$$\lambda^2 + \left[2\pi^2(1 + \tau) + \frac{R_s - R_f}{2} \right] \lambda + 4\pi^4\tau + \pi^2(R_s - \tau R_f) = 0.$$

O abreviadamente $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ donde $a_1 = 2\pi^2(1 + \tau) + \frac{1}{2}(R_s - R_f)$ y $a_0 = 4\pi^2\tau + \pi^2(R_s - \tau R_f)$.

Como hemos dicho, se tiene una inestabilidad oscilatoria cuando $a_1 = 0$ y $a_0 > 0$, así que $a_1 = 0 \Leftrightarrow R_f^o = R_s + 4\pi^2(1 + \tau)$. Y se tiene una inestabilidad estacionaria cuando $a_0 = 0$ y $a_1 > 0$, pues en este caso $\lambda^2 + a_1\lambda = \lambda(\lambda + a_1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ó $\lambda = -a_1 < 0$. Esto ocurre en $R_{fc}^{ss} = \frac{R_s}{\tau} + 4\pi^2$.

En el punto “bi-crítico” $a_1 = a_0 = 0$

$$R_s^{c2} = \frac{4\pi^2\tau^2}{1 - \tau} \quad \text{y} \quad R_f^{c2} = \frac{4\pi^2}{1 - \tau}$$

y $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ tiene una doble raíz en $\lambda = 0$, y la podemos escribir como:

$$\lambda^2 - \mu_2\lambda - \mu_1 = \lambda^2 + \frac{1}{2} \left[R_{fc}^{(o)} - R_f \right] \lambda + \pi^2\tau \left[R_{fc}^{ss} - R_f \right] = 0.$$

Si uno escribe:

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} A(t) \\ B(t) \\ C(t) \end{pmatrix} \exp(-i\pi x) \sin \pi z,$$

$A(t)$ satisfecerá $\ddot{A} - \mu_2 \dot{A} - \mu_1 A + f(A, \dot{A}) = 0$ que es (5.1), donde f se debe determinar. La forma de f debe ser (ver referencias [9] y [15]):

$$f = f_1 A |A|^2 + f_2 B |A|^2 + f_3 A^2 B^* + f_4 A |B|^2 + f_5 A^* B^2 + f_6 B |B|^2 + \dots \quad (5.2)$$

donde $B = \dot{A}$.

Tambien se expande $\vec{\xi}$ en serie de potencias de A y B

$$\vec{\xi} = \frac{1}{2} \left(\vec{\xi}_1 A + \vec{\phi}_1 B + \sum_{i,j,k,l} \vec{\xi}_{ijkl} A^i B^j A^{*k} B^{*l} + c.c. \right) \quad (5.3)$$

Insertando las ecuaciones (5.2) y (5.3) en (2.12) e igualando las diferentes potencias de las amplitudes se obtiene una secuencia de problemas que pueden ser resueltos orden por orden. A primer orden $\vec{\xi}_1$ continua siendo como en (4.21) y $\vec{\phi}_1$ esta dado por :

$$\vec{\phi}_1 = \frac{1}{4\pi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{r^2} \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-i\pi x) \sin \pi z \quad (5.4)$$

Los coeficientes de $f(A, B)$ aparecen en las ecuaciones de tercer orden, cuyas condiciones de solución dan los valores de los coeficientes f_j :

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{\pi^4}{4} \\
f_2 &= f_3 = -\frac{\pi^2}{8} \frac{1+\tau}{\tau} \\
f_4 &= f_5 = -\frac{1+\tau^2}{16\tau^2} \\
f_6 &= 0
\end{aligned} \tag{5.5}$$

El comportamiento de la ecuación (5.1) en la vecindad del punto de codimensión 2 ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) puede ser clasificado en el plano (μ_1, μ_2) . Encontramos una bifurcación Hopf en $\mu_2 = 0$ y una bifurcación estacionaria en $\mu_1 = 0$. Los cuadrantes I ($\mu_1, \mu_2 > 0$) y IV ($\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$) tienen un punto fijo inestable el cual corresponde a el estado conductivo. En el cuadrante III ($\mu_1, \mu_2 < 0$) el estado conductivo es estable y los puntos fijos ($B = 0, |A|^2 = -\mu_1/f_1$) son inestables.

Cuando $\mu_1 < 0$, la estabilidad de $(B, A) = (0, 0)$ depende del valor de μ_2 . Comenzando en el cuadrante III, mientras μ_2 pasa a través de cero, se encuentra que una bifurcación supercrítica Hopf y una convección oscilatoria es posible. Mientras μ_2 se incrementa, el tamaño del ciclo límite crece hasta que alcanza el punto fijo inestable en el valor μ_{2c} donde desaparece. Este valor de μ_{2c} es (ver referencias [9] y [15]):

$$\mu_{2c} = -\frac{f_2\mu_1}{5f_1} = -\frac{1+\tau}{10\tau\pi^2}\mu_1 \equiv -\alpha(\tau)\mu_1 \tag{5.6}$$

En el plano (R_s, R_f) la ecuación (5.6) corresponde a una línea L_c localizada por arriba de R_{fc}^{osc} pero por abajo de R_{fc}^{ss} para $R_s > R_s^{c2}$. Específicamente, la ecuación L_c esta dada por:

$$R_f = R_s \frac{1 + 2\alpha\pi^2}{1 + 2\alpha\pi^2\tau} + \frac{4\pi^2(1 + \tau + 2\alpha\pi^2\tau)}{1 + 2\alpha\pi^2\tau} \tag{5.7}$$

La dinámica descrita en este capítulo se resume en la figura (5.1).

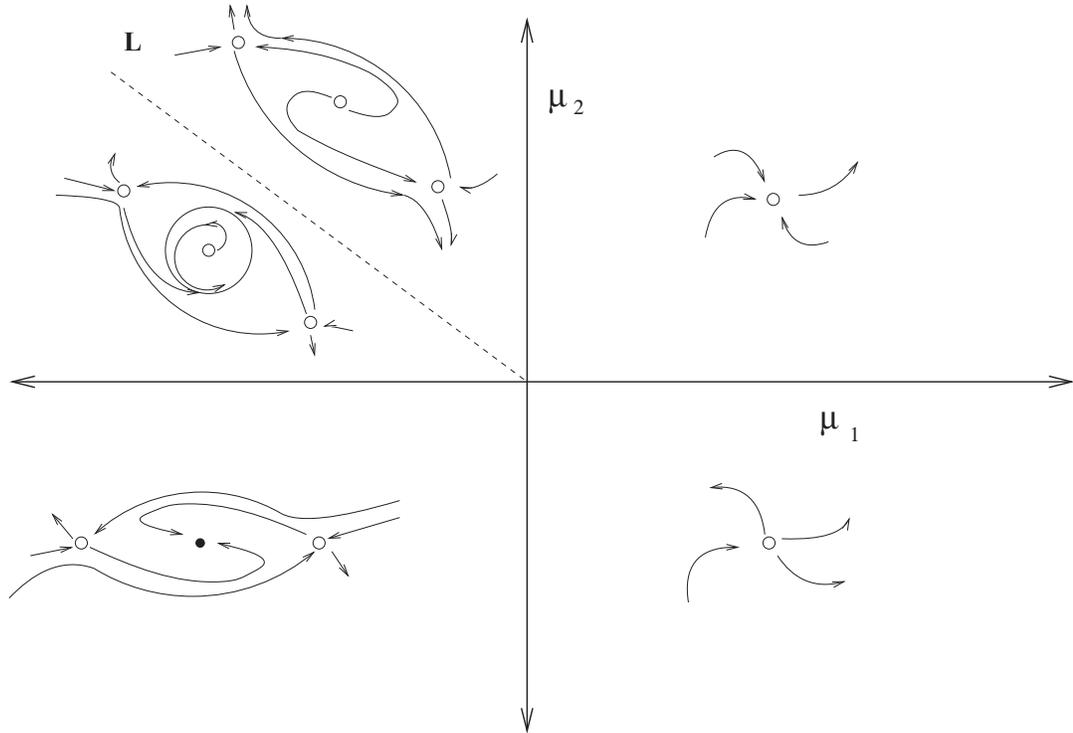


Figura 5.1: Comportamiento esquemático de la ecuación de amplitud alrededor de la bifurcación del punto de codimensión-2, el espacio μ_1, μ_2 es dividido en cuatro regiones con diferentes comportamientos característicos, círculos oscuros representan puntos fijos estables, y puntos abiertos representan puntos fijos inestables. una bifurcación Hopf esta localizada en $\mu_2 = 0$ y una bifurcación estacionaria en $\mu_1 = 0$. Cuadrantes I ($\mu_1, \mu_2 > 0$) y IV ($\mu_1 > 0, \mu_2 < 0$) tienen un punto fijo inestable el cual corresponde al estado conductivo. En el cuadrante III ($\mu_1, \mu_2 < 0$) el estado conductivo es estable y los puntos fijos inestables. El ciclo límite en el cuadrante II desaparece en la línea L donde el periodo de oscilación diverge.

Capítulo 6

Convección en la rama oscilatoria

6.1. Introducción

Como hemos visto, para $R_s > R_s^{c2}$, el estado conductivo pierde estabilidad al alcanzar la rama $R_{fc}^{(o)}$. En este capítulo deduciremos las ecuaciones de amplitud en esta rama oscilatoria. Veremos que esta bifurcación oscilatoria ó de Hopf, produce dos clases de soluciones no triviales, soluciones de ondas viajeras y estacionarias.

6.2. Derivación del sistema de ecuaciones

Con el fin de derivar las ecuaciones de amplitud a tercer orden dentro de la rama oscilatoria se utiliza la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples de esta forma se tienen las siguientes expansiones :

$$\vec{\xi} = \sum_n \eta^n \vec{\xi}_n \quad R_f = R_{fc}^{osc} + \sum_n \eta^n R_{fn} \quad (6.1)$$

$$p = \omega_0 + \sum_n \eta^n p_n \quad (6.2)$$

Donde $R_{fc}^{osc} = R_s + 4\pi^2(\tau + 1)$ y η es el parámetro de pequeñez.

Para R_s fija se introduce $t' = pt$ por lo que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = p \frac{\partial}{\partial t'} = (\omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 + \eta^3 p_3 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} \quad (6.3)$$

Introduciendo estas expansiones en el sistema de ecuaciones (6.4) se tiene una serie de ecuaciones de distinto orden en el parámetro η .

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t'} + 1\right) \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 + \partial_t & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 + \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta_s \\ \eta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} J(\psi, \nabla^2 \psi) \\ J(\psi, \eta_s) \\ J(\psi, \eta_f) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

Agrupando términos de primer orden con respecto al parámetro η se tiene el siguiente sistema (ver apéndice D.1) :

$$\frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t'} \nabla^2 \psi_1 + \nabla^2 \psi_1 - R_s \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial x} + R_{fc} \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} = 0 \quad (6.5)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \tau \nabla^2 \eta_{s1} = 0 \quad (6.6)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \nabla^2 \eta_{f1} = 0 \quad (6.7)$$

Introduciendo

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{\nabla^2}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las ecuaciones (6.5), (6.6) y (6.7) se escriben :

$$\left(\omega_0 \hat{M} \partial_{t'} + \hat{L}_0\right) \vec{\xi}_1 = \vec{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_1 = \vec{0} \quad (6.8)$$

cuya solución esta dada por la combinación de dos ondas viajeras (ver apéndice D.1):

$$\vec{\xi}_1 = Re \left[\left(\begin{array}{c} i \\ -\frac{q}{i\omega_0 + \tau k^2} \\ -\frac{q}{i\omega_0 + k^2} \end{array} \right) A_R \exp(it' - iqx) + \left(\begin{array}{c} -i \\ -\frac{q}{i\omega_0 + \tau k^2} \\ -\frac{q}{i\omega_0 + k^2} \end{array} \right) A_L \exp(it' + iqx) \right] \sin \pi z \quad (6.9)$$

Agrupando términos de orden 2 en el parámetro η se tienen las siguientes ecuaciones (ver apéndice D.1):

$$\frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t'} \nabla^2 \psi_2 + \nabla^2 \psi_2 - R_s \frac{\partial \eta_{s2}}{\partial x} + R_{fc} \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial x} = -\frac{p_1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} - R_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} J(\psi, \nabla^2 \psi_1) \quad (6.10)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{s2}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \tau \nabla^2 \eta_{s2} = -p_1 \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial t'} + J(\psi_1, \eta_{s1}) \quad (6.11)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x} - \nabla^2 \eta_{f2} = -p_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial t'} + J(\psi_1, \eta_{f1}) \quad (6.12)$$

Que puede escribirse en forma matricial como :

$$\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_1) = \left(\begin{array}{c} -\frac{p_1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} - R_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \frac{1}{\sigma} J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1) \\ -p_1 \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial t'} + J(\psi_1, \eta_{s1}) \\ -p_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial t'} + J(\psi_1, \eta_{f1}) \end{array} \right) \quad (6.13)$$

donde $\hat{\mathcal{L}}_0$ esta definida en (6.8)

Pretendemos encontrar $\vec{\xi}_2$, por el teorema de Fredholm la ecuación (6.13) es integrable si $(\vec{F}_2, \vec{\xi}_2^\dagger) = 0$ donde $\vec{\xi}_2^\dagger$ es solución de $\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger \vec{\xi}_2^\dagger = 0$ y donde $\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger$ es el operador dual :

$$\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger = \left(-\omega_0 \hat{M} \partial_{t'} + \hat{L}_0^\dagger \right)$$

$$\hat{\mathcal{L}}_0^\dagger = \begin{pmatrix} \left(-\frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t'} + 1\right) \nabla^2 & -\partial_x & -\partial_x \\ R_s \partial_x & -\tau \nabla^2 - \omega_0 \partial_{t'} & 0 \\ -R_f \partial_x & 0 & -\nabla^2 - \omega_0 \partial_{t'} \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

Donde

$$\vec{\xi}^\dagger = Re \left[\begin{pmatrix} iA_R^\dagger \\ B_R^\dagger \\ C_R^\dagger \end{pmatrix} \exp(it' - iqx) + \begin{pmatrix} -iA_L^\dagger \\ B_L^\dagger \\ C_L^\dagger \end{pmatrix} \exp(it' + iqx) \right] \sin \pi z$$

Para aplicar el teorema de Fredholm se requiere conocer explícitamente \vec{F}_2 y $\vec{\xi}^\dagger$. \vec{F}_2 está dado en términos de $\vec{\xi}_1$ que ya tenemos.

Sustituyendo (6.9) en la ecuación (6.13) se obtiene explícitamente \vec{F}_2 . Recuérdese que:

$$(\vec{F}_2, \vec{\xi}^\dagger) \equiv \int \int \int \left\{ (\vec{F}_2)_1^* (\xi_1^\dagger) + (\vec{F}_2)_2^* (\xi_2^\dagger) + (\vec{F}_2)_3^* (\xi_3^\dagger) \right\} dx dz dt \quad (6.15)$$

Realizando la operación (6.15) se tiene que para que $(\vec{F}_2, \vec{\xi}^\dagger) = 0$ se cumpla se requiere que p_1 y R_1 de (6.13) sean ambos cero.

La solución de $\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2$, tomando en cuenta que $p_1 = R_1 = 0$, está dada por

$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} \exp(2it') \sin \pi z + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B_2^* \\ C_2^* \end{pmatrix} \exp(-2it') \sin \pi z + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} \sin 2\pi z \quad (6.16)$$

Los coeficientes se encuentran sustituyendo esta $\vec{\xi}_2$ en $\hat{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_2 = \vec{F}_2$ y resulta que

$$B_2 = -\frac{\pi q^2 A_R A_L}{2(i\omega_0 + \tau k^2)(i\omega_0 + 2\pi^2\tau)} \quad C_2 = -\frac{\pi q^2 A_R A_L}{2(i\omega_0 + k^2)(i\omega_0 + 2\pi^2)}$$

$$\tilde{B}_2 = -\frac{k^2 q^2 (|A_R|^2 + |A_L|^2)}{4\pi(\omega_0^2 + \tau^2 k^4)} \quad \tilde{C}_2 = -\frac{k^2 q^2 (|A_R|^2 + |A_L|^2)}{4\pi(\omega_0^2 + k^4)}$$

A tercer orden la condición de integrabilidad $(\vec{F}_3, \vec{\xi}^\dagger) = 0$ nos conduce al sistema

$$\tau_0^{osc} \dot{A}_R = \epsilon^o (1 + ic_o) A_R - (K|A_R|^2 + M|A_L|^2) A_R \quad (6.17)$$

$$\tau_0^{osc} \dot{A}_L = \epsilon^o (1 + ic_o) A_L - (K|A_L|^2 + M|A_R|^2) A_L \quad (6.18)$$

donde

$$\epsilon^o \equiv (R_f - R_{fc}^{osc}) / R_{fc}^{osc}$$

$$\tau_0^{osc} = \frac{4}{R_{fc}^{osc}}$$

$$c_0 = \frac{2\pi^2\tau}{\omega_0}$$

$$K = \frac{i\pi^4}{2\omega_0 R_{fc}^{osc}}$$

$$M = \frac{2\pi^6(1 + \tau)(\omega_0^2 + 4\pi^4\tau)}{R_{fc}^{osc}(\omega_0^2 + 4\pi^4)(\omega_0^2 + 4\pi^4\tau^2)} + \frac{i\pi^4(\omega_0^4 - 16\pi^8\tau^2)}{R_{fc}^{osc}\omega_0(\omega_0^2 + 4\pi^4)(\omega_0^2 + 4\pi^4\tau^2)}$$

Que son las ecuaciones de amplitud para la rama oscilatoria. Nótese que la parte real del coeficiente K se anula a lo largo de la rama oscilatoria, y esto para todos los valores de σ , de hecho hasta esta etapa, no hemos realizado la aproximación $\sigma^{-1} = 0$. La parte real de M es siempre positiva

6.3. Análisis de las Ecuaciones

Si escribimos A_R y A_L en su forma polar: $A_R = R \exp(i\phi_R)$ y $A_L = L \exp(i\phi_L)$ y sustituyendo en las ecuaciones (6.17) y (6.18) se tiene:

$$\tau_0^{osc}(\dot{R} \exp(i\phi_R) + iR\dot{\phi}_R \exp(i\phi_R)) = \epsilon^\circ(1+ic_0)R \exp(i\phi_R) - (KR^2 + ML^2)R \exp(i\phi_R)$$

$$\tau_0^{osc}(\dot{L} \exp(i\phi_L) + iL\dot{\phi}_L \exp(i\phi_L)) = \epsilon^\circ(1+ic_0)L \exp(i\phi_L) - (KL^2 + MR^2)L \exp(i\phi_L)$$

Separando partes reales e imaginarias, se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\tau_0^{osc}\dot{R} = \epsilon^\circ R - M_r L^2 R \quad (6.19)$$

$$\tau_0^{osc}\dot{L} = \epsilon^\circ L - M_r R^2 L \quad (6.20)$$

$$\tau_0^{osc}\dot{\phi}_R = \epsilon^\circ c_0 - K_i R^2 - M_i L^2 \quad (6.21)$$

$$\tau_0^{osc}\dot{\phi}_L = \epsilon^\circ c_0 - K_i L^2 - M_i R^2 \quad (6.22)$$

Hay dos puntos fijos para (6.19) y (6.20), a saber: $(R, L) = (0, 0)$ que representa el estado conductivo. Para $\epsilon > 0$ (omitiremos ya el superíndice “o” en ϵ°), cuando las dos amplitudes $A_R = A_L$, se tienen ondas estacionarias, y el punto fijo correspondiente es $(R, L) = (\sqrt{\frac{\epsilon}{M_r}}, \sqrt{\frac{\epsilon}{M_r}})$ lo que requiere que $M_r > 0$, y como hemos señalado, esto es así en nuestro caso. Si $R = 0$ y $L \neq 0$ tenemos ondas viajeras, viajando hacia la izquierda. Si $R \neq 0$ y $L = 0$ tendríamos ondas viajeras, viajando hacia la derecha. Para $L = 0$ y $R \neq 0$, es decir para ondas viajeras a la derecha, se tiene $\tau_0\dot{R} = \epsilon R$ es decir, no hay puntos fijos no-triviales de ondas viajeras. Si $\epsilon = 0$ entonces $R(t)$ permanece constante, y sólo en ese caso hay ondas viajeras. Así que las ondas viajeras sólo existen en $\epsilon = 0$ es decir sólo sobre la rama $R_{fc}^{(o)}$.

Para determinar la estabilidad de las ondas viajeras ya sea a la derecha o a la izquierda, debemos considerar las ecuaciones de quinto orden.

$$\tau_0 \dot{A}_R = \epsilon(1 + ic_0)A_R - (K|A_R|^2 + M|A_L|^2 + N|A_R|^4)A_R \quad (6.23)$$

$$\tau_0 \dot{A}_L = \epsilon(1 + ic_0)A_L - (K|A_L|^2 + M|A_R|^2 + N|A_L|^4)A_L \quad (6.24)$$

Esto es, debemos calcular el coeficiente N en las ecuaciones anteriores. Este cálculo lo estamos realizando y esperamos reportar el resultado en alguna revista.

Si escribimos $A_R = R \exp(i\phi_R)$ y $A_L = L \exp(i\phi_L)$, las ecuaciones (6.23) y (6.24) para R y L quedarían como

$$\tau_0^{osc} \dot{R} = \epsilon R - M_r L^2 R - N_r R^5 \quad (6.25)$$

$$\tau_0^{osc} \dot{L} = \epsilon L - M_r R^2 L - N_r L^5 \quad (6.26)$$

Los puntos fijos son $(R, L) = (0, 0)$ el estado conductivo, $(R, L = R)$ ondas estacionarias, que se encuentran al resolver $-\epsilon + M_r R^2 + N_r R^4 = 0$, esto es

$$R = \sqrt{-\frac{M_r}{2N_r} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{M_r}{N_r}\right)^2 + \frac{4\epsilon}{N_r}}} \quad (6.27)$$

Es muy probable que $N_r > 0$, si este es el caso, la amplitud de las ondas estacionarias presentará simplemente una bifurcación hacia adelante (super-crítica).

La ecuación de amplitud a quinto orden nos permite ver lo que la ecuación a tercer orden no podía predecir, que hay ondas viajeras no sólo exactamente sobre la rama oscilatoria ($\epsilon = 0$). Para $\epsilon > 0$ el punto fijo correspondiente

a ondas viajeras a la derecha es $(R, L = 0) = ([\epsilon/N_r]^{1/4}, 0)$, y a la izquierda $(R =, L) = (0, [\epsilon/N_r]^{1/4})$. Entonces ya sea para ondas viajeras a la derecha o a la izquierda, la amplitud se incrementa como $\epsilon^{1/4}$ pero nunca como $\epsilon^{1/2}$ arriba de $R_{fc}^{(osc)}$.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se realizó una revisión de la dinámica que exhibe el sistema de convección isotérmico doble difusivo cerca del umbral de sus inestabilidades. Se describió el sistema, se escribieron las ecuaciones apropiadas para su estudio, y utilizando el formalismo de ecuaciones de amplitud, se analizó la dinámica entorno a la rama estacionaria, oscilatoria y en la vecindad del punto de codimensión-2. Para hacer esto, se hizo una breve exposición de un tema poco o nada conocido entre estudiantes a nivel licenciatura, a saber, la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples, que conduce a las ecuaciones de amplitud. Este formalismo de ecuaciones de amplitud ha sido usado en varias áreas de la física y no sólo en dinámica de fluidos.

De la ecuación de amplitud a lo largo de la rama estacionaria, se predice que en esta rama, en la región $R_s^{tp} < R_s < R_s^{pc2}$, el sistema presenta un fenómeno de histéresis, donde R_s^{tp} es el punto tricrítico es el punto donde la bifurcación cambia de supercrítica a subcrítica, y la amplitud cambia de ser proporcional a $\epsilon^{1/2}$ a ser proporcional a $\epsilon^{1/4}$. En la tesis se explicó en detalle como calcular los parámetros que aparecen en este ciclo: ϵ^{tp} así como A^{tp} .

También se expuso en forma heurística y descriptiva, la dinámica en la

vecindad del punto de codimensión-2, que es el punto donde colapsan las dos inestabilidades, la oscilatoria y la estacionaria, y se menciona la aparición de un ciclo límite en su vecindad que aparece o desaparece de acuerdo a los valores de los parámetros μ_1 y μ_2 .

En la rama oscilatoria se indicó la necesidad de calcular los coeficientes de las ecuaciones de amplitud a quinto orden con el propósito de establecer la estabilidad de las ondas viajeras. Pensamos que la parte real del coeficiente N será positiva, y entonces podremos concluir sin lugar a dudas que ya sea para ondas viajeras a la derecha o a la izquierda, la amplitud se incrementa como $\epsilon^{1/4}$ pero nunca como $\epsilon^{1/2}$ arriba de $R_{fc}^{(osc)}$. Esto contrasta con la rama estacionaria donde la amplitud si podía ser del orden $\epsilon^{1/2}$. En la rama oscilatoria, otra predicción de las ecuaciones de amplitud es que no se presentaría un fenómeno de histéresis como ocurre en la estacionaria.

El cálculo de la ecuación a quinto orden lo estamos llevando a cabo, y una vez concluido, esperamos reportarlo en alguna revista.

Apéndice A

Concentraciones en el Estado Conductivo

En este apéndice se establece la dependencia de las concentraciones con respecto a la altura en el estado conductivo. Partimos de la ecuación de difusión:

$$\frac{Dc_i(z, t)}{Dt} = D_i \nabla^2 c_i(z, t) \quad (\text{A.1})$$

Donde $c_i(z, t)$ es la concentración de la sustancia que se difunde, D_i es el coeficiente de difusión y

$$\frac{Dc_i(z, t)}{Dt} = \frac{\partial c_i(z, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla c_i(z, t)$$

en el estado estacionario la concentración de la sustancia que se difunde no depende del tiempo :

$$\frac{\partial c_i(z, t)}{\partial t} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{v} = \vec{0}$$

Por tanto la ecuación (A.1) se reduce a la ecuación :

$$\nabla^2 c_i = \frac{d^2 c_i}{dz^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

La cual tiene solución:

$$c_i^{(c)}(z) = az + b \quad (\text{A.3})$$

Como la concentración de la sustancia de difusión lenta en $z = 0$ es c_{s0} :

$$c_s^{(c)}(0) = c_{s0} = b$$

y en $z = d$, $c_{s0}(d) = 0$

$$c_s^{(c)}(z = d) = ad + c_{s0} = 0$$

$$\Rightarrow a = -c_{s0}/d \quad (\text{A.4})$$

Por tanto se obtiene la ecuación:

$$c_s^{(c)}(z) = c_{s0} \left(1 - \frac{z}{d}\right)$$

Similarmente para la sustancia de difusión rápida se obtiene :

$$c_f^{(c)}(z) = c_{f0} \left(\frac{z}{d}\right)$$

Estas dos últimas expresiones son las de las concentraciones como función de la altura, para el estado conductivo.

Apéndice B

Aproximación Hele-Shaw

En este trabajo se reemplazo $\nabla^2 \vec{v}$ en las ecuaciones de Navier Stokes por el término $-12 \frac{\vec{v}}{w^2}$. En este apéndice se justifica esa sustitución.

Se considera un fluido moviéndose entre dos placas paralelas separadas a una distancia w . Si $w \ll d$ suponemos $v_y = 0$ ya que la contribución al campo vectorial de velocidades en la dirección y es mucho menor que las contribuciones al campo vectorial en la dirección x y z , sin embargo las velocidades $v_x(x, y, z, t)$ y $v_z(x, y, z, t)$ sigue teniendo dependencia en y , $v_x(x, y, z, t)$ y $v_z(x, y, z, t)$ alcanzan su valor máximo en $y = w/2$ y en $y = 0$ alcanzan su valor mínimo.

Cuando las fuerzas viscosas son más grandes que las fuerzas inerciales tenemos un movimiento lento.

$$|\mathbf{v}| \ll 1 \Rightarrow f_v \propto v > f_i \propto v^2 \quad (\text{B.1})$$

En la ecuación de Návier-Stokes (B.2) se elimina el término $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ ya que el fluido es estacionario y $\vec{F} = 0$ dado que no hay una superficie libre y el fluido se considera homogéneo.

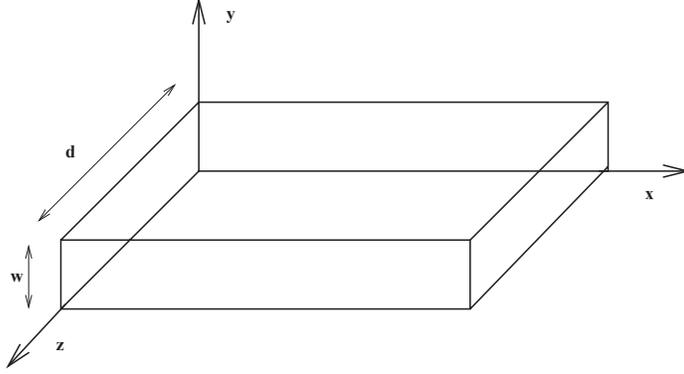


Figura B.1: Celda Hele-Shaw , en $y = w/2$ la velocidad es máxima, mientras que en $y = 0$ y $y = w$ la velocidad es nula.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (\text{B.2})$$

Y nuestra ecuación se reduce a:

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} \right) \quad i=1,2,3$$

Como el movimiento es muy lento en las direcciones x y z , $v_x(x, y, z, t) = v_x(y)$, $v_z(x, y, z, t) = v_z(y)$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x(y)}{\partial y^2} \Rightarrow v_x = A_1 + B_1 y - \frac{p_1}{2\mu} y^2$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 v_z(y)}{\partial y^2} \Rightarrow v_z = A_2 + B_2 y - \frac{p_2}{2\mu} y^2$$

de la condición $v_x = v_z = 0$ en $y = 0, w$.

$$v_x = B_1 w - \frac{p_1}{2\mu} w^2 = 0 \Rightarrow B_1 = p_1 w / 2\mu$$

$$v_x = \frac{p_1 w}{2\mu} y - \frac{p_1}{2\mu} y^2 = \frac{p_1 y}{2\mu} (w - y)$$

Similarmente

$$v_y = \frac{p_2}{2\mu} y (w - y)$$

El valor promedio a través de una sección perpendicular a x es:

$$v_{x0} = \frac{1}{w} \int_0^w v_x dy = \frac{p_1 w^2}{12\mu}$$

Similarmente $v_{z0} = \frac{p_2 w^2}{12\mu}$

$$\Rightarrow v_x = \frac{-6v_{x0}y(y-w)}{w^2}$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -6 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_{x0}}{w^2} [2y - w] \right) = -12 \frac{v_{x0}}{w^2}$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = -12\mu \frac{v_{x0}}{w^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} = -12\mu \frac{v_{z0}}{w^2} = \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\mu \nabla^2 v = -12 \frac{\mu v}{w^2}$$

$$\nabla^2 \vec{v} = -12 \frac{\vec{v}}{w^2} \quad (\text{B.3})$$

Apéndice C

Ecuaciones de Movimiento Adimensionales

En este apéndice se adimensionalizarán las ecuaciones de movimiento. Dadas las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p - 12\nu \vec{v}/w^2 + \frac{\vec{g}\rho}{\rho_0} \quad (\text{C.1})$$

y las dos ecuaciones de concentración

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) c_s = D_s \nabla^2 c_s \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial c_f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) c_f = D_f \nabla^2 c_f \quad (\text{C.3})$$

se quiere usar el cambio de variables siguiente, para trabajar con ecuaciones adimensionales.

$$\hat{t} = \frac{D_f}{d^2} t \quad \hat{r} = \frac{\vec{r}}{d} \quad \hat{v} = \frac{d}{D_f} \vec{v}$$
$$\hat{\eta}_s = \frac{\eta_s}{c_{s0}} \quad \hat{\eta}_f = -\frac{\eta_f}{c_{f0}} \quad \hat{\psi} = \frac{\psi}{D_f}$$

Con estos cambios, los operadores que aparecen en la ecuaciones hidrodinámicas adquieren la forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \quad \nabla \times \rightarrow \frac{1}{d} \hat{\nabla} \times \quad \nabla \rightarrow \frac{1}{d} \hat{\nabla}$$

Aplicando el rotacional a cada uno de los términos de la ecuación (C.1) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{v}) \rightarrow \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\frac{1}{d} \hat{\nabla} \times \frac{D_f}{d} \hat{v} \right) = \frac{D_f^2}{d^4} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (\hat{\nabla} \times \hat{v})$$

$$\nabla \times [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}] \rightarrow \frac{1}{d} \hat{\nabla} \times \left[\left(\frac{D_f}{d} \hat{v} \cdot \frac{\hat{\nabla}}{d} \right) \frac{D_f}{d} \hat{v} \right] = \frac{D_f^2}{d^4} \hat{\nabla} \times [(\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}]$$

$$\nabla \times \nabla p \rightarrow \vec{0}$$

$$-\frac{12\nu}{w^2} \nabla \times \vec{v} \rightarrow -\frac{12\nu}{w^2} \frac{D_f}{d^2} \hat{\nabla} \times \hat{v}$$

Con lo que la presión p se elimina de las ecuaciones simplificando el estudio de las ecuaciones de movimiento. Realizando una expansión en serie de Taylor alrededor de las concentraciones en el estado conductor : $(c_s^{(c)}, c_f^{(c)})$ en el último término de la ecuación (C.1) ,

$$\begin{aligned} \rho(c_s, c_f)/\rho_0 &= \left(\rho(c_s^{(c)}, c_f^{(c)}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_s} \right) (c_s - c_s^{(c)}) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_f} \right) (c_f - c_f^{(c)}) \right) / \rho_0 \\ &= \left(\rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_s} \right) \eta_s + \left(\frac{\partial \rho}{\partial c_f} \right) \eta_f \right) / \rho_0 \\ &\Rightarrow \rho/\rho_0 = (1 + \alpha_s \eta_s + \alpha_f \eta_f) \end{aligned}$$

donde :

$$\alpha_i = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial c_i} \quad \text{con } i = s, f$$

Así el último término de la ecuación (C.1) adquiere la forma:

$$\vec{g}\rho/\rho_0 = \vec{g}(1 + \alpha_s\eta_s + \alpha_f\eta_f) \quad (\text{C.4})$$

Aplicando el rotacional a la ecuación (C.4):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\nabla}}{d} \times \left(\frac{\vec{g}\rho}{\rho_0} \right) &= \frac{1}{d} \hat{\nabla} \times (g(1 + \eta_s\alpha_s + \eta_f\alpha_f) \hat{e}_z) \\ &= \frac{1}{d} \left[\hat{\nabla} \times (-c_{s0}g\hat{\eta}_s\alpha_s\hat{e}_z) + \hat{\nabla} \times (c_{f0}g\hat{\eta}_f\alpha_f\hat{e}_z) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

De la definición de número de Rayleigh

$$R_i = \frac{\alpha_i c_{i0} g d w^2}{12\nu D_f}$$

Despejando α_i

$$\alpha_i = \frac{12\nu D_f R_i}{c_{i0} g d w^2}$$

Así introduciendo α_i en la ecuación (C.5), tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\nabla}}{d} \times \left(\frac{\vec{g}\rho}{\rho_0} \right) &= \frac{1}{d} \left[\hat{\nabla} \times \left(-c_{s0}g\hat{\eta}_s \left(\frac{12\nu D_f R_s}{c_{s0}g d w^2} \right) \hat{e}_z \right) + \hat{\nabla} \times \left(c_{f0}g\hat{\eta}_f \left(\frac{12\nu D_f R_f}{c_{f0}g d w^2} \right) \hat{e}_z \right) \right] \\ &= \frac{12\nu D_f}{d^2 w^2} [-\hat{e}_x \partial_y (\hat{\eta}_s R_s - \hat{\eta}_f R_f) + \hat{e}_y \partial_x (-\hat{\eta}_f R_f + \hat{\eta}_s R_s) + \hat{e}_z(0)] \end{aligned}$$

Así después de haber aplicado el cambio de variable a cada uno de los terminos de la ecuación (C.1) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{D_f^2}{d^4} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\nabla} \times \hat{v}) + \frac{D_f^2}{d^4} \hat{\nabla} \times \left[(\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v} \right] &= -\frac{12\nu}{w^2} \frac{D_f}{d^2} \hat{\nabla} \times \hat{v} \\ + \frac{12\nu D_f}{d^2 w^2} [-\hat{e}_x \partial_y (\hat{\eta}_s R_s - \hat{\eta}_f R_f) + \hat{e}_y \partial_x (-\hat{\eta}_f R_f + \hat{\eta}_s R_s)] &\quad (C.6) \end{aligned}$$

Introduciendo el número de Schmidth $\sigma := \frac{12\nu d^2}{D_f w^2}$, la ecuación (C.6) toma la forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\nabla} \times \hat{v}) + \hat{\nabla} \times \left[(\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v} \right] \right] &\quad (C.7) \\ = -\hat{\nabla} \times \hat{v} + [-\hat{e}_x \partial_y (\hat{\eta}_s R_s - \hat{\eta}_f R_f) + \hat{e}_y \partial_x (-\hat{\eta}_f R_f + \hat{\eta}_s R_s)] &\end{aligned}$$

Como el término $(\hat{\eta}_s R_s - \hat{\eta}_f R_f)$ de la ecuación (C.7) no depende de y ,

$$\partial_y (\hat{\eta}_s R_s - \hat{\eta}_f R_f) = 0$$

así tenemos la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\nabla} \times \hat{v}) + \hat{\nabla} \times \left[(\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v} \right] \right] = -\hat{\nabla} \times \hat{v} - [\hat{e}_y \partial_x (\hat{\eta}_f R_f - \hat{\eta}_s R_s)] \quad (C.8)$$

Introduciremos la función de corriente $\psi(x, z)$ que describe sólo el flujo de fluidos bidimensionales, definida como la función que satisface:

$$\vec{v} = (\partial_z \psi, 0, -\partial_x \psi)$$

Así el rotacional de \vec{v} tiene la forma:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \partial_z \psi & 0 & -\partial_x \psi \end{vmatrix} = \hat{e}_z (\partial_{xx} \psi + \partial_{zz} \psi) \Rightarrow \nabla \times \vec{v} = \hat{e}_y \nabla^2 \psi$$

Lo cual es equivalente a:

$$\frac{D_f}{d^2} \hat{\nabla} \times \hat{v} = \frac{D_f}{d^2} \hat{e}_y \hat{\nabla}^2 \psi$$

Ahora el término:

$$\begin{aligned} \nabla \times ((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) &= (\vec{v} \cdot \nabla) \nabla \times \vec{v} - (\nabla \times \vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = (\vec{v} \cdot \nabla) \nabla^2 \psi \hat{e}_y - (\nabla^2 \psi \hat{e}_y \cdot \nabla) \vec{v} \\ &= (\partial_z \psi \partial_x \nabla^2 \psi - \partial_x \psi \partial_z \nabla^2 \psi) \hat{e}_y - ((\nabla^2 \partial_y) (\partial_z \psi, 0, -\partial_x \psi)) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Dado que el último término de la ecuación (C.9) no depende de y dicho término se anula, así tenemos:

$$\nabla \times ((\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}) = (\partial_z \psi \partial_x \nabla^2 \psi - \partial_x \psi \partial_z \nabla^2 \psi) \hat{e}_y = -J(\psi, \nabla^2 \psi) \hat{e}_y$$

O bien

$$\begin{aligned} \frac{D_f^2}{d^4} \hat{\nabla} \times ((\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}) &= \frac{D_f^2}{d^4} (\partial_z \hat{\psi} \partial_x \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} - \partial_x \hat{\psi} \partial_z \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \hat{e}_y = -\frac{D_f^2}{d^4} J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \hat{e}_y \\ \Rightarrow \hat{\nabla} \times ((\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{v}) &= -J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \hat{e}_y \end{aligned}$$

donde $J(f, g) = (\partial_x f \partial_z g - \partial_z g \partial_x f)$ es el parentesis de Poisson.

Con la introducción de la función de corriente la ecuación (C.8) queda de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) - J(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi}) \right] = -\hat{\nabla}^2 \hat{\psi} + [-R_f \partial_x \hat{\eta}_f + R_s \partial_x \hat{\eta}_s] \quad (\text{C.10})$$

La cual es equivalente a la ecuación de Navier-Stokes (C.1). Ahora pasamos a las ecuaciones de difusión

Por otra parte la ecuación (C.2):

$$\frac{\partial c_s}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) c_s = D_s \nabla^2 c_s$$

Es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(c_s^{(c)}(z) + \eta_s(x, z, t) \right) + \frac{D_f}{d^2} \left(\hat{v} \cdot \hat{\nabla} \right) \left(c_s^{(c)}(z) + \eta_s(x, z, t) \right) \\ = \frac{D_s}{d^2} \hat{\nabla}^2 \left(c_s^{(c)}(z) + \eta_s(x, z, t) \right) \end{aligned} \quad (C.11)$$

Donde:

$$c_s = \hat{c}_s c_{s0} = \left((c_s^{(c)}(z) + \eta_s(x, y, t)) \right) = c_{s0} \left(1 - \frac{z}{d} \right) + c_{s0} \hat{\eta}_s(x, y, t)$$

Sustituyendo en (C.11) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(c_{s0} \left(1 - \frac{z}{d} \right) + c_{s0} \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) + \frac{D_f}{d^2} \left(\hat{v} \cdot \hat{\nabla} \right) \left(c_{s0} \left(1 - \frac{z}{d} \right) + c_{s0} \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) \\ = \frac{D_s}{d^2} \hat{\nabla}^2 \left(c_{s0} \left(1 - \frac{z}{d} \right) + c_{s0} \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) \end{aligned}$$

O bien:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\left(1 - \frac{z}{d} \right) + \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) + \left(\hat{v} \cdot \hat{\nabla} \right) \left(\left(1 - \frac{z}{d} \right) + \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) \\ = \frac{D_s}{D_f} \hat{\nabla}^2 \left(\left(1 - \frac{z}{d} \right) + \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_s(x, z, t)}{\partial \hat{t}} + \left(\partial_z \hat{\psi}(x, z) \partial_{\hat{x}} - \partial_{\hat{x}} \hat{\psi}(x, z) \partial_z \right) \left(\left(1 - \frac{z}{d} \right) + \hat{\eta}_s \right) = \tau \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_s(x, z, t)$$

Donde $\tau = \frac{D_s}{D_f}$ es el número de Lewis.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\eta}_s(x, z, t)}{\partial \hat{t}} + \left(\partial_z \hat{\psi}(x, z) \partial_{\hat{x}} \hat{\eta}_s(x, z, t) - \partial_{\hat{x}} \hat{\psi}(x, z) \partial_z \hat{\eta}_s(x, z, t) \right) + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} \\ & = \tau \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_s(x, z, t) \end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$-\tau \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_s(x, z, t) + \frac{\partial \hat{\eta}_s(x, z, t)}{\partial \hat{t}} + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \hat{\eta}_s) \quad (\text{C.12})$$

Que es la forma adimensional de la ecuación de difusión para la especie que se difunde lentamente. Repitiendo el procedimiento anterior para (C.3) esta ecuación tiene la forma equivalente:

$$-c_{f0} \frac{D_f}{d^2} \frac{\partial \hat{c}_f}{\partial \hat{t}} - c_{f0} \frac{D_f}{d^2} (\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{c}_f = -c_{f0} \frac{D_s}{d^2} \hat{\nabla}^2 \hat{c}_f$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(c_f^{(c)}(z) / (-c_{f0}) + \eta_f(x, z, t) / (-c_{f0}) \right) + (\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \hat{c}_f = \hat{\nabla}^2 \hat{c}_f$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(-\frac{z}{d} + \hat{\eta}_f(x, z, t) \right) + (\hat{v} \cdot \hat{\nabla}) \left(-\frac{z}{d} + \hat{\eta}_f(x, z, t) \right) = \hat{\nabla}^2 \left(-\frac{z}{d} + \hat{\eta}_f(x, z, t) \right)$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_f(x, z, t)}{\partial \hat{t}} + \left(\partial_z \hat{\psi}(x, z) \partial_{\hat{x}} - \partial_{\hat{x}} \hat{\psi}(x, z) \partial_z \right) \left(\left(-\frac{z}{d} \right) + \hat{\eta}_f \right) = \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_f(x, z, t)$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_f(x, z, t)}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_f + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} = J(\hat{\psi}, \hat{\eta}_f) \quad (\text{C.13})$$

En resumen, las ecuaciones (C.1), (C.2) y (C.3) son equivalentes a el conjunto de ecuaciones:

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \hat{t}} \left(\hat{\nabla}^2 \hat{\psi} \right) - J \left(\hat{\psi}, \hat{\nabla}^2 \hat{\psi} \right) \right] = -\hat{\nabla}^2 \hat{\psi} + [-R_f \partial_{\hat{x}} \hat{\eta}_f + R_s \partial_{\hat{x}} \hat{\eta}_s] \quad (\text{C.14})$$

$$-\tau \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_s(x, z, t) + \frac{\partial \hat{\eta}_s(x, z, t)}{\partial \hat{t}} + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} = J \left(\hat{\psi}, \hat{\eta}_s \right) \quad (\text{C.15})$$

$$\frac{\partial \hat{\eta}_f(x, z, t)}{\partial \hat{t}} - \hat{\nabla}^2 \hat{\eta}_f + \partial_{\hat{x}} \hat{\psi} = J \left(\hat{\psi}, \hat{\eta}_f \right) \quad (\text{C.16})$$

Apéndice D

Deducción de las Ecuaciones de Amplitud para la Rama Oscilatoria

Usando la teoría de perturbaciones obtendremos expansiones de las expresiones R_f , $\vec{\xi}$ y sustituyendo tales expansiones en el sistema matricial de ecuaciones de movimiento se obtienen una serie de sistemas de ecuaciones a distintos ordenes con respecto al parámetro de pequeñez η , en este apéndice deduciremos a detalle el sistema de ecuaciones a primer orden y encontraremos su solución.

Las ecuaciones de movimiento en la Geometría Hele-Shaw con la aproximación de Boussineq estan dadas en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} + 1\right) \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 + \partial_t & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 + \partial_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \eta_s \\ \eta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma} J(\psi, \nabla^2 \psi) \\ J(\psi, \eta_s) \\ J(\psi, \eta_f) \end{pmatrix} \quad (\text{D.1})$$

O bien :

$$(\hat{L}_0 + \hat{M}\partial_t)\vec{\xi} = \hat{N}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) \quad (\text{D.2})$$

Donde los operadores \hat{L}_0 , \hat{M} , \hat{N} y el campo vectorial $\vec{\xi}$ están dados por:

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s\partial_x & R_f\partial_x \\ \partial_x & -\tau\nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{\nabla^2}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{N}(\vec{\xi}, \vec{\xi}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}J(\psi, \nabla^2\psi) \\ J(\psi, \eta_s) \\ J(\psi, \eta_f) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \eta_s \\ \eta_f \end{pmatrix}$$

Donde el paréntesis de Poisson se define como: $J(\psi, \eta_i) := \partial_x\psi\partial_z\eta_i - \partial_z\psi\partial_x\eta_i$ con $i = s, f$

De acuerdo a la teoría de perturbaciones de tiempos múltiples se hacen las siguientes expansiones:

$$\vec{\xi} = \sum_n \eta^n \vec{\xi}_n \quad R_f = R_{fc}^{osc} + \sum_n \eta^n R_n \quad (\text{D.3})$$

$$p = \omega_0 + \sum_n \eta^n p_n \quad (\text{D.4})$$

Donde $R_{fc}^{osc} = R_s + 4\pi^2(\tau + 1)$ y η : es el parámetro de pequeñez.

Para R_s fija se introduce $t' = pt$ por lo que:

$$\frac{\partial}{\partial t} = p \frac{\partial}{\partial t'} = (\omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 + \eta^3 p_3 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} \quad (\text{D.5})$$

Llamarémos componentes del sistema (D.1) a la multiplicación de cada uno de los renglones del operador $(\hat{L}_0 + \hat{M}\partial_t)$ por el vector $\vec{\xi}$ (las componentes estarán denotadas como: $(i, 1)_{i=1,2,3}$).

La componente (1,1) del sistema (D.1) esta dada por :

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \nabla^2 \psi - R_s \frac{\partial \eta_s}{\partial x} + R_s \frac{\partial \eta_f}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} J(\psi, \nabla^2 \psi) \quad (\text{D.6})$$

Sustituyendo las expansiones (D.3), (D.4) y (D.5) en el sistema (D.6) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} (\omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 + \eta^3 p_3 + \eta^4 p_4 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} [\nabla^2 (\eta \psi_1 + \eta^2 \psi_2 + \eta^3 \psi_3 + \eta^4 \psi_4 + \dots)] \\ & + \nabla^2 (\eta \psi_1 + \eta^2 \psi_2 + \eta^3 \psi_3 + \eta^4 \psi_4 + \dots) - R_s \frac{\partial}{\partial x} (\eta \eta_{s1} + \eta^2 \eta_{s2} + \eta^3 \eta_{s3} + \eta^4 \eta_{s4} + \dots) \\ & + (R_{fc}^{osc} + \eta R_1 + \eta^2 R_2 + \eta^3 R_3 + \eta^4 R_4 + \dots) \frac{\partial}{\partial x} (\eta \eta_{f1} + \eta^2 \eta_{f2} + \eta^3 \eta_{f3} + \eta^4 \eta_{f4} + \dots) = \\ & \frac{1}{\sigma} J(\sum_n \eta^n \psi_n, \sum_n \eta^n \nabla^2 \psi_n) \end{aligned}$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} & \eta \frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} + \eta^2 \frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_2}{\partial t'} + \eta^3 \frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_3}{\partial t'} + \eta^4 \frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_4}{\partial t'} + \dots \\ & \eta^2 \frac{p_1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} + \eta^3 \frac{p_1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_2}{\partial t'} + \eta^4 \frac{p_1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_3}{\partial t'} + \eta^5 \frac{p_1}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_4}{\partial t'} + \dots \\ & \eta^3 \frac{p_2}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} + \eta^4 \frac{p_2}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_2}{\partial t'} + \eta^5 \frac{p_2}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_3}{\partial t'} + \eta^6 \frac{p_2}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_4}{\partial t'} + \dots \\ & \eta^4 \frac{p_3}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} + \eta^5 \frac{p_3}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_2}{\partial t'} + \eta^6 \frac{p_3}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_3}{\partial t'} + \eta^7 \frac{p_3}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_4}{\partial t'} + \dots \\ & \eta^5 \frac{p_4}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} + \eta^6 \frac{p_4}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_2}{\partial t'} + \eta^7 \frac{p_4}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_3}{\partial t'} + \eta^8 \frac{p_4}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_4}{\partial t'} + \dots \\ & + \eta \nabla^2 \psi_1 + \eta^2 \nabla^2 \psi_2 + \eta^3 \nabla^2 \psi_3 + \eta^4 \nabla^2 \psi_4 + \dots \\ & - \eta^2 R_s \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial x} - \eta^3 R_s \frac{\partial \eta_{s2}}{\partial x} - \eta^4 R_s \frac{\partial \eta_{s3}}{\partial x} - \eta^5 R_s \frac{\partial \eta_{s4}}{\partial x} - \dots \\ & + \eta R_{fc}^{osc} \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \eta^2 R_{fc}^{osc} \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial x} + \eta^3 R_{fc}^{osc} \frac{\partial \eta_{f3}}{\partial x} + \eta^4 R_{fc}^{osc} \frac{\partial \eta_{f4}}{\partial x} + \dots \\ & + \eta^2 R_1 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \eta^3 R_1 \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial x} + \eta^4 R_1 \frac{\partial \eta_{f3}}{\partial x} + \eta^5 R_1 \frac{\partial \eta_{f4}}{\partial x} + \dots \\ & + \eta^3 R_2 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \eta^4 R_2 \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial x} + \eta^5 R_2 \frac{\partial \eta_{f3}}{\partial x} + \eta^6 R_2 \frac{\partial \eta_{f4}}{\partial x} + \dots \\ & + \eta^4 R_3 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \eta^5 R_3 \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial x} + \eta^6 R_3 \frac{\partial \eta_{f3}}{\partial x} + \eta^7 R_3 \frac{\partial \eta_{f4}}{\partial x} + \dots \\ & + \eta^5 R_4 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} + \eta^6 R_4 \frac{\partial \eta_{f2}}{\partial x} + \eta^7 R_4 \frac{\partial \eta_{f3}}{\partial x} + \eta^8 R_4 \frac{\partial \eta_{f4}}{\partial x} + \\ & = \frac{\eta^2}{\sigma} J(\psi_1, \nabla^2 \psi_1) + \frac{\eta^3}{\sigma} J(\psi_1, \nabla^2 \psi_2) + \frac{\eta^4}{\sigma} J(\psi_1, \nabla^2 \psi_3) + \frac{\eta^5}{\sigma} J(\psi_1, \nabla^2 \psi_4) \\ & + \frac{\eta^3}{\sigma} J(\psi_2, \nabla^2 \psi_1) + \frac{\eta^4}{\sigma} J(\psi_2, \nabla^2 \psi_2) + \frac{\eta^5}{\sigma} J(\psi_2, \nabla^2 \psi_3) + \frac{\eta^6}{\sigma} J(\psi_2, \nabla^2 \psi_4) \\ & + \frac{\eta^4}{\sigma} J(\psi_3, \nabla^2 \psi_1) + \frac{\eta^5}{\sigma} J(\psi_3, \nabla^2 \psi_2) + \frac{\eta^6}{\sigma} J(\psi_3, \nabla^2 \psi_3) + \frac{\eta^7}{\sigma} J(\psi_3, \nabla^2 \psi_4) \\ & + \frac{\eta^5}{\sigma} J(\psi_4, \nabla^2 \psi_1) + \frac{\eta^6}{\sigma} J(\psi_4, \nabla^2 \psi_2) + \frac{\eta^7}{\sigma} J(\psi_4, \nabla^2 \psi_3) + \frac{\eta^8}{\sigma} J(\psi_4, \nabla^2 \psi_4) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

la componente (2,1) del sistema (D.1) esta dada por:

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \tau \nabla^2 \eta_s = J(\psi, \eta_s) \quad (\text{D.8})$$

Sustituyendo las expansiones (D.3), (D.4) y (D.5) en el sistema (D.8) se tiene:

$$\begin{aligned} & (\omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 + \eta^3 p_3 + \eta^4 p_4 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} (\eta \eta_{s1} + \eta^2 \eta_{s2} + \eta^3 \eta_{s3} + \eta^4 \eta_{s4} + \dots) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\eta \psi_1 + \eta^2 \psi_2 + \eta^3 \psi_3 + \eta^4 \psi_4 + \dots) - \tau (\eta \nabla^2 \eta_{s1} + \eta^2 \nabla^2 \eta_{s2} + \eta^3 \nabla^2 \eta_{s3} + \eta^4 \nabla^2 \eta_{s4} + \dots) \\ & = J(\sum_n \eta^n \psi_n, \sum_n \eta^n \eta_{sn}) \end{aligned}$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} & \omega_0 \sum_{n=1} \eta^n \frac{\partial \eta_{sn}}{\partial t'} + p_1 \sum_{n=1} \eta^{n+1} \frac{\partial \eta_{sn}}{\partial t'} + p_2 \sum_{n=1} \eta^{n+2} \frac{\partial \eta_{sn}}{\partial t'} + p_3 \sum_{n=1} \eta^{n+3} \frac{\partial \eta_{sn}}{\partial t'} \\ & + p_4 \sum_{n=1} \eta^{n+4} \frac{\partial \eta_{sn}}{\partial t'} + \sum_{n=1} \eta^n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \tau \sum_{n=1} \eta^n \nabla^2 \eta_{sn} = \sum_{n=1} \eta^{n+1} J(\psi_1, \eta_{sn}) \\ & + \sum_{n=1} \eta^{n+2} J(\psi_2, \eta_{sn}) + \sum_{n=1} \eta^{n+3} J(\psi_3, \eta_{sn}) + \sum_{n=1} \eta^{n+4} J(\psi_4, \eta_{sn}) \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

la componente (3,1) del sistema (D.1) esta dada por:

$$\frac{\partial \eta_f}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - \nabla^2 \eta_f = J(\psi, \eta_f) \quad (\text{D.10})$$

Sustituyendo las expansiones (D.3), (D.4) y (D.5) en el sistema (D.10) se tiene:

$$\begin{aligned} & (\omega_0 + \eta p_1 + \eta^2 p_2 + \eta^3 p_3 + \eta^4 p_4 + \dots) \frac{\partial}{\partial t'} (\eta \eta_{f1} + \eta^2 \eta_{f2} + \eta^3 \eta_{f3} + \eta^4 \eta_{f4} + \dots) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} (\eta \psi_1 + \eta^2 \psi_2 + \eta^3 \psi_3 + \eta^4 \psi_4 + \dots) - (\eta \nabla^2 \eta_{f1} + \eta^2 \nabla^2 \eta_{f2} + \eta^3 \nabla^2 \eta_{f3} + \eta^4 \nabla^2 \eta_{f4} + \dots) \\ & = J(\sum_n \eta^n \psi_n, \sum_n \eta^n \eta_{fn}) \end{aligned}$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} & \omega_0 \sum_{n=1} \eta^n \frac{\partial \eta_{fn}}{\partial t'} + p_1 \sum_{n=1} \eta^{n+1} \frac{\partial \eta_{fn}}{\partial t'} + p_2 \sum_{n=1} \eta^{n+2} \frac{\partial \eta_{fn}}{\partial t'} + p_3 \sum_{n=1} \eta^{n+3} \frac{\partial \eta_{fn}}{\partial t'} \\ & + p_4 \sum_{n=1} \eta^{n+4} \frac{\partial \eta_{fn}}{\partial t'} + \sum_{n=1} \eta^n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \sum_{n=1} \eta^n \nabla^2 \eta_{fn} = \sum_{n=1} \eta^{n+1} J(\psi_1, \eta_{fn}) \\ & + \sum_{n=1} \eta^{n+2} J(\psi_2, \eta_{fn}) + \sum_{n=1} \eta^{n+3} J(\psi_3, \eta_{fn}) + \sum_{n=1} \eta^{n+4} J(\psi_4, \eta_{fn}) \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Agrupando los términos lineales de las expansiones (D.7), (D.9) y (D.11) se obtiene el siguiente sistema:

$$\frac{\omega_0}{\sigma} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t'} + \nabla^2 \psi_1 - R_s \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial x} + R_{fc} \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial x} = 0 \quad (\text{D.12})$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{s1}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \tau \nabla^2 \eta_{s1} = 0 \quad (\text{D.13})$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta_{f1}}{\partial t'} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \nabla^2 \eta_{f1} = 0 \quad (\text{D.14})$$

Introduciendo

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s \partial_x & R_f \partial_x \\ \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{\nabla^2}{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

las ecuaciones (D.12), (D.13) y (D.14) se escriben:

$$\left(\omega_0 \hat{M} \partial_{t'} + \hat{L}_0 \right) \vec{\xi} = \vec{\mathcal{L}}_0 \vec{\xi}_1 = \vec{0} \quad (\text{D.15})$$

cuya solución es:

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \eta_{s1} \\ \eta_{f1} \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\begin{pmatrix} iA_R \\ B_R \\ C_R \end{pmatrix} \exp(it' - iqx) + \begin{pmatrix} -iA_L \\ B_L \\ C_L \end{pmatrix} \exp(it' + iqx) \right] \sin \pi z \quad (\text{D.16})$$

Sustituyendo (D.16) en cada una de las ecuaciones (D.12), (D.13) y (D.14) se obtienen las relaciones entre los coeficientes A , B y C de la ecuación (D.16), a continuación se desarrolla lo anteriormente explicado:

Sustituyendo (D.16) en la ecuación (D.12) se tiene:

$$\begin{aligned}
& -\omega_0 \frac{k^2}{2\sigma} (-A_R \exp(-iqx) + A_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z \\
& -\frac{k^2}{2} (iA_R \exp(-iqx) - iA_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z \\
& -\frac{R_s}{2} (-iqB_R \exp(-iqx) + iqB_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z \\
& +\frac{R_{fc}}{2} (-iqC_R \exp(-iqx) + iqC_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z + \frac{1}{2}cc. = 0
\end{aligned} \tag{D.17}$$

Para que se cumpla la relación (D.17) se debe cumplir que los coeficientes de $\exp(-iqx + it')$ $\sin \pi z$ y $\exp(iqx + it')$ $\sin \pi z$ sean cero así se obtienen las siguientes relaciones:

$$\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}k^2 + k^2\right) A_R - qR_s B_R + qR_{fc}^{osc} C_R = 0 \tag{D.18}$$

$$\left(i\frac{\omega_0}{\sigma}k^2 + k^2\right) A_L - qR_s B_L + qR_{fc}^{osc} C_L = 0 \tag{D.19}$$

Sustituyendo (D.16) en (D.13) se tiene:

$$\begin{aligned}
& i\frac{\omega_0}{2} (B_R \exp(-iq) + B_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z \\
& +\frac{q}{2} (A_R \exp(-iq) + A_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z \\
& +\frac{\tau k^2}{2} (B_R \exp(-iq) + B_L \exp(iqx)) \exp(it') \sin \pi z + \frac{1}{2}cc.
\end{aligned} \tag{D.20}$$

Para que se cumpla la relación (D.20) se debe cumplir que los coeficientes de $\exp(-iqx + it')$ $\sin \pi z$ y $\exp(iqx + it')$ $\sin \pi z$ sean cero así se obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
(\omega_0 i + \tau k^2) B_R + qA_R &= 0 \\
(\omega_0 i + \tau k^2) B_L + qA_L &= 0
\end{aligned} \tag{D.21}$$

O bien:

$$B_R = -\frac{qA_R}{i\omega_0 + \tau k^2} \quad B_L = -\frac{qA_L}{i\omega_0 + \tau k^2} \tag{D.22}$$

De forma similar sustituyendo (D.16) en la ecuación (D.14) se llega a las ecuaciones:

$$C_R = -\frac{qA_R}{i\omega_0+k^2} \quad \text{y} \quad C_L = -\frac{qA_L}{i\omega_0+k^2} \quad (\text{D.23})$$

Sustituyendo (D.22) y (D.23) en la solución (D.16), se llega a la siguiente relación :

$$\vec{\xi}_1 = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \eta_{s1} \\ \eta_{f1} \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\left(\begin{pmatrix} i \\ -\frac{q}{i\omega_0+\tau k^2} \\ -\frac{q}{i\omega_0+k^2} \end{pmatrix} \exp(it' - iqx) + \begin{pmatrix} -i \\ -\frac{q}{i\omega_0+\tau k^2} \\ -\frac{q}{i\omega_0+k^2} \end{pmatrix} \exp(it' + iqx) \right) \sin \pi z \right] \quad (\text{D.24})$$

Hasta aquí se explicó en detalle la obtención de la serie de ecuaciones usando teoría de perturbaciones, y sus soluciones a primer orden, esto nos sirve para ilustrar el procedimiento. En el capítulo 6, se explica sin detallar, como se obtiene las ecuaciones de amplitud, de hecho, ya sólo escribimos la solución de las ecuaciones a orden 2, es decir se obtiene $\vec{\xi}_2$, con este apéndice, se ve cual es el procedimiento para su obtención que ya no escribimos. Para la obtención de las ecuaciones de amplitud, se requiere solamente de \vec{F}_3 que es función de $\vec{\xi}_1$ y de $\vec{\xi}_2$, no se necesita $\vec{\xi}_3$. El cálculo del coeficiente N a quinto orden requerirá de $\vec{\xi}_3$ y $\vec{\xi}_4$ explícitamente.

Apéndice E

Operador Adjunto

En este apéndice definiremos y deduciremos al operador adjunto \hat{L}_0^\dagger [16], a partir de \hat{L}_0 definido en el capítulo 4.

Definición:

Sea \mathbf{A} una transformación lineal de X a Y . Si X tiene un producto interior $(\cdot, \cdot)_X$ y Y tiene un producto interior $(\cdot, \cdot)_Y$ y si existe una transformación lineal \mathbf{A}^\dagger de Y a X tal que

$$(\mathbf{A}\vec{x}, \vec{y})_Y = (\vec{x}, \mathbf{A}^\dagger\vec{y})_X \quad (\text{E.1})$$

para toda $\vec{x} \in X$ y $\vec{y} \in Y$, entonces \mathbf{A}^\dagger se llama operador adjunto de \mathbf{A} .

En nuestro caso $\mathbf{A} = \hat{L}_0$ donde \hat{L}_0 esta definido como:

$$\begin{pmatrix} \nabla^2 & -R_s\partial_x & R_f\partial_x \\ \partial_x & -\tau\nabla^2 & 0 \\ \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix}$$

donde \vec{x} y \vec{y} son de la forma:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, z, t) \\ f_2(x, z, t) \\ f_3(x, z, t) \end{pmatrix}$$

con f_1, f_2, f_3 funciones C^2 .

El producto en el espacio X esta definido como:

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \equiv \int \int \int \{(\vec{x}_1)_1(\vec{x}_2)_1 + (\vec{x}_1)_2(\vec{x}_2)_2 + (\vec{x}_1)_3(\vec{x}_2)_3\} dx dz dt \quad (\text{E.2})$$

para \vec{x}_1 y \vec{x}_2 en X (similarmente para Y).

Pero nuestro objetivo es obtener \hat{L}_0^\dagger , así que empezaremos por mencionar el operador adjunto de la derivada que va de un espacio de funciones $C^1 = X$ con condiciones periódicas en las fronteras a un espacio de funciones continuas Y .

$$\left(\frac{df_1}{dx}, f_2 \right) = \left(f_1, -\frac{df_2}{dx} \right) \quad (\text{E.3})$$

De forma similar para funciones con condiciones periodicas en las fronteras y de clase $C^2 = X$ a un espacio de funciones continuas Y , se tiene:

$$\left(\frac{d^2 f_1}{dx^2}, f_2 \right) = \left(f_1, \frac{d^2 f_2}{dx^2} \right) \quad (\text{E.4})$$

Por lo tanto como en el operador \hat{L}_0 cada una de sus entradas son primeras y segundas derivadas tendremos que el operador adjunto \hat{L}_0^\dagger estará dado de la siguiente forma:

$$\hat{L}_0^\dagger = \begin{pmatrix} \nabla^2 & -\partial_x & -\partial_x \\ R_s \partial_x & -\tau \nabla^2 & 0 \\ -R_f \partial_x & 0 & -\nabla^2 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

- [1] Paul Manneville, “Dissipative Structures and Weak Turbulence”, Perspectives in Physics (1990).
- [2] Algunos de los trabajos sobre el tema son: S. Van Hook, *et al* “Long wavelength instability in surface-tension-driven Bénard convection” Phys. rev. Lett **75**, 45 (1995). R. Becerril, *et al* “The influence of interface profile on the onset of long-wavelength Marangoni convection” Phys. of Fluids **10**, 3230 (1998).
- [3] H. Stommel, A.B. Aarons, D. Blanchard “An oceanographical curiosity: The perpetual salt fountain” Deep Sea Res **3**, 152 (1956). M.E. Stern “The Salt fountain and thermohaline convection” Tellus **12**, 172 (1960).
- [4] L.D. Landau and Lifshitz , “Fluid Mechanics” , Butterworth Heinemann , Second Edition, Chap.6, Page 227.
- [5] A. A.Predtechenky,W.D McCormick,J.B. Swift, Z. Nosztcizius , and Harry L. Swinney “ Onset on Traveling Waves in Isothermal Double Diffusive Convection ” , Physical Review Letters , Vol. 72 , No.2, 1994.
- [6] A. A.Predtechenky,W.D McCormick,J.B. Swift, A.G.Rossberg and Harry L. Swinney “ Traveling wave instability in sustained double-diffusive convection ” , Phys. Fluids , Vol. 6 , No.12 , 1994.
- [7] S. Strogatz “Nonlinear Dynamics and Chaos” Westview Press. (1994).

- [8] David Williams “Solving Singular Perturbations Problems, an Amplitude Equation Approach” Ph.D Thesis, University of Washington (2005).
- [9] G. Dangelmayr, E. Knobloch “The Takens-Bogdanov bifurcation with $O(2)$ -symmetry” *Philos. Trans. R. Soc. London Ser. A*, **332**, 243 (1987).
- [10] M. Bees, N. Hill, “Non-linear bioconvection in a deep suspension of gyrotactic swimming micro-organisms” *J. Math. Biol.* **38**, 135 (1999).
- [11] M. Clerc, P. Couillet, E. Tirapegui “The Maxwell-Bloch Description of 1/1 Resonances” *Optics Communications* **167**, 159 (1999).
- [12] M. C. Cross, P. C. Hohenberg “Pattern Formation Outside of Equilibrium” *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851 (1993).
- [13] S. Chandrasekhar, “Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability” Dover Publications (1981).
- [14] R. Becerril, J. Swift “Amplitude equations for isothermal double diffusive convection” *Phy.Rev.E* **55**, 6270 (1997).
- [15] J. Guckenheimer, P. Holmes, “Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields” Springer-Verlag, New York (1983).
- [16] Evguenii Kurmyshev, Raúl E Sánchez-Yañez, “Fundamentos de metodos matematicos para fisica e Ingenieria” Editorial Limusa, (2003).