



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

Tesis profesional

Modelación Matemática de la Respuesta Acústica
de Frutos

Presenta:

María Claudia Guillén Gallegos

**Como requisito para obtener el Título de Licenciado en
Ciencias Físico-Matemáticas**

Asesor de tesis:

Dr. Jorge Isidro Aranda Sánchez

Co-asesor de tesis:

M. C. Gabriel Arroyo Correa

Morelia, Michoacán. Dic. 2008.

A mi familia y amigos por su comprensión y apoyo incondicional.

Agradecimientos.

A lo largo de mi carrera he recibido ayuda de muchas personas, por lo que resultaría muy extensa la tarea de hacer mención a cada una de ellas. Sin embargo, quiero agradecer de manera especial a aquellas que siguieron muy de cerca la realización de este trabajo:

A mis asesores, por su paciencia y guía en un terreno que conocen mucho mejor que yo;

A mis sinodales, por su confianza en mi trabajo y sus sugerencias;

Finalmente, a la Coordinación de Investigación Científica por el apoyo económico que me proporcionó dentro del proyecto 9.23 denominado "Estudio de las propiedades visco-elásticas en productos agrícolas por medio de espectroscopia ultrasónica".

Índice General

Pág.

Dedicatoria	ii
Agradecimientos	iii
0. Presentación	1
1. Propiedades Mecánicas de los Frutos	4
1.1 Introducción.....	4
1.2 Propiedades generales.....	4
1.3 Propiedades mecánicas de los frutos.....	5
1.4 Métodos no destructivos para evaluar las propiedades Mecánicas de los frutos.....	7
1.5 Teoría básica del impacto acústico.....	10
2. Modelos Unidimensionales para simular la Respuesta Acústica	14
2.1 Introducción.....	14
2.2 Ecuaciones de Lagrange.....	14
2.3 Oscilador armónico amortiguado.....	18

2.3.1 Vibraciones libres.....	18
2.3.2 Vibraciones forzadas.....	21
2.4 Osciladores armónicos acoplados	23
3. Modelos Avanzados para simular la Respuesta Acústica.....	30
3.1 Introducción.....	30
3.2 Elementos Básicos de la Teoría de la Elasticidad.....	30
3.3 Modelos Simples en 3D.....	35
3.3.1 El Modelo Esferoidal.....	35
3.3.2 El Modelo Elipsoidal.....	39
4. Resultados Numéricos y Experimentales.....	43
4.1 Introducción.....	43
4.2 Resultados con modelos unidimensionales.....	43
4.2.1 Modelo del oscilador armónico simple.....	44
4.2.2 Modelo de tres osciladores armónicos acoplados.....	47
4.3 Resultados con modelos simples en 3D.....	59
4.3.1 Modelo esférico.....	59
4.3.2 Modelo elipsoidal.....	60
5. Conclusiones.....	63
6. Referencias.....	66
Apéndices.....	69
Apéndice A.....	70
Apéndice B.....	73
Apéndice C.....	77

Capítulo 0

Presentación

La creciente demanda de los mercados internacionales por productos hortofrutícolas de alta calidad está requiriendo del sector agrícola recursos técnicos novedosos para establecer programas de aseguramiento de calidad, con base en la aplicación de prácticas agrícolas y de manejo en la producción de toda clase de frutas frescas [1]. El término calidad de un producto define el conjunto de características apropiadas para un uso en particular que permiten compararlas y diferenciarlas de otras semejantes.

Todas las propiedades de los frutos están vinculadas con su grado de calidad, y pretender disponer de un método general para cuantificar sus efectos en la calidad es un problema complejo. Sin embargo, numerosos estudios han demostrado que las diferentes variedades de frutos presentan algunas propiedades que tienen mayor influencia sobre otras en su grado de calidad, como son las propiedades mecánicas [1-10].

En México el problema de control de la calidad en productos agrícolas está lejos de estar resuelto. Es un problema que en muchos casos limita la capacidad de exportación y la ganancia de la industria agrícola mexicana.

Al tratar de modelar un fenómeno real es fundamental incluir los parámetros más relevantes que ayuden a explicar el proceso y poder predecir consecuencias derivadas del modelo establecido. Por desgracia, los modelos matemáticos de procesos reales requieren del uso de la computadora ya que las soluciones analíticas son escasas, por no decir

inexistentes. En estas circunstancias, la solución numérica del modelo propuesto resulta imprescindible. Puesto que en la modelación se buscan leyes generales que permitan reflexionar y explicar un fenómeno, puede suceder que haya varias maneras de hacerlo, obteniéndose una o varias aproximaciones generales que explican el mismo fenómeno de diferente manera. Entonces, ¿qué modelo se debe elegir? La respuesta desde luego dependerá de la información específica que se desea obtener con tal ó cual modelo.

En el caso específico de los frutos, recientemente se adoptado un índice de calidad que cuantifica su firmeza, llamado índice de firmeza, y que está basado en la medición de dos parámetros mecánicos [1]: su masa y su frecuencia de resonancia dominante. Existen varias técnicas para medir las propiedades mecánicas de los frutos [5-9]. Por otro parte, en la modelación matemática de este problema se han propuesto en la literatura modelos unidimensionales [11, 12] y modelos tridimensionales basados en la naturaleza elástica de los frutos [13-19].

El objetivo de esta tesis se enfoca en la modelación matemática de la respuesta acústica de frutos que son excitados por medio de un impacto acústico [5, 6, 9]. Se introducen dos modelos unidimensionales, uno basado en un solo oscilador armónico amortiguado y otro en donde se usan tres osciladores armónicos amortiguados acoplados. Se analizan también dos modelos tridimensionales simples: un modelo esférico y un modelo elipsoidal.

En el capítulo 1 se presenta una descripción de las propiedades generales presentes en los frutos, con un énfasis especial en las propiedades de tipo mecánicas que sirven como punto de partida para la aplicación de la técnica por impacto acústico en la determinación del índice de firmeza. En el capítulo 2 se introduce la teoría general del oscilador

armónico y se presentan los dos modelos unidimensionales que se usan en esta tesis. En el capítulo 3 se incluye la teoría básica de la elasticidad, a partir de la cual se explican los dos modelos tridimensionales que se utilizan en este trabajo. El capítulo 4 contiene los resultados numéricos derivados de los modelos presentados en los capítulos 2 y 3; los resultados numéricos predichos con los modelos se comparan con mediciones experimentales. En el capítulo 5 se explican las conclusiones del trabajo presentado en esta tesis. El capítulo 6 contiene la bibliografía empleada en el presente trabajo. Los códigos numéricos empleados en los modelos unidimensionales y en el modelo esferoidal se incluyen en los apéndices A, B y C.

Capítulo 1

Propiedades Mecánicas de los Frutos

1.1 Introducción.

En este capítulo se hace una revisión básica de las propiedades mecánicas de los frutos; se describen las técnicas no destructivas más comunes para cuantificar la firmeza, con énfasis en la llamada técnica de impacto acústico [1,4-8].

1.2 Propiedades Generales.

Las características que presentan los frutos están determinadas genéticamente y se adquieren progresivamente durante el desarrollo y maduración del fruto. Las propiedades generales de los frutos se pueden enmarcar en propiedades físicas (mecánicas, ópticas, eléctricas y magnéticas), químicas y fisiológicas [1-3]. En la tabla 1 se describen brevemente cada una de estas propiedades.

Todos los atributos presentes en los frutos (firmeza, color, aroma y sabor) son cualidades reconocidas a través de los sentidos, por lo que es posible cuantificar algunos de ellos de manera precisa. Sin embargo, las pruebas mediante mecanismos o instrumentación tecnológica son preferentes sobre las pruebas de tipo sensoriales, ya que permiten estimar con mayor precisión atributos relacionados con la calidad. Las manifestaciones vinculadas con las propiedades mecánicas son las más

estudiadas, tanto desde el punto de vista experimental como de modelación matemática.

Tabla 1. Propiedades generales de los frutos.

Propiedades	Características
Mecánicas	Aquellas relacionadas con la respuesta de los frutos a fuerzas externas. La firmeza y la textura son las manifestaciones comunes ligadas con estas propiedades.
Ópticas	Aquellas relacionadas con la interacción de la luz con los frutos. El color y el brillo de los frutos son las manifestaciones típicas asociadas con estas propiedades.
Eléctricas y Magnéticas	Aquellas relacionadas con la respuesta de los frutos a campos eléctricos y magnéticos.
Químicas	Aquellas relacionadas con la composición y propiedades internas de los frutos. El sabor y el aroma de los frutos son las manifestaciones comunes vinculadas con estas propiedades.
Fisiológicas	Aquellas relacionadas con las funciones de las estructuras orgánicas de los frutos. La madurez y descomposición de los frutos son manifestaciones comunes ligadas a estas propiedades.

1.3 Propiedades Mecánicas de los Frutos.

Los productos hortofrutícolas tienen formas geométricas irregulares y propiedades volumétricas no uniformes. Estas características se deben a las diversas condiciones de cultivo y sufren modificaciones fisiológicas durante los procesos de cosecha, poscosecha y comercialización, afectando las características de calidad de los productos. Las propiedades mecánicas de los productos frutícolas constituyen aspectos importantes de calidad; entre ellas, están su masa y el tiempo que podrían soportar antes de llegar a sus límites de elasticidad [1], de deformación plástica o de resistencia al corte en diferentes estados de madurez [2-3]. De acuerdo a Mohsenin [2] las propiedades mecánicas de los frutos pueden tener aplicaciones prácticas para la caracterización del material, la de determinación del tiempo óptimo de cosecha y del mejor método de separación del árbol o planta, la eliminación de productos con calidad indeseable, y la disminución del daño mecánico

durante su cosecha y poscosecha. De aquí la importancia del estudio de las propiedades mecánicas de los frutos.

De acuerdo a ciertos autores [1-3] las propiedades mecánicas están determinadas por cinco parámetros primarios:

a) Firmeza o dureza. Definida como la fuerza necesaria para lograr una deformación dada.

b) Elasticidad. Aunque el módulo de elasticidad de Young es una buena medida para materiales como el acero, en los frutos no es adecuado porque éstos tienen características visco-elásticas. De este modo, para los frutos resulta más útil el llamado límite de elasticidad definido como el esfuerzo más grande que puede soportar sin sufrir deformación permanente, una vez que es liberado del esfuerzo.

c) Viscosidad. Es la razón de flujo de los líquidos que integran un cuerpo por unidad de fuerza.

d) Cohesividad. Definida como la fuerza de interacción que tienen los enlaces internos que forman el cuerpo del fruto.

e) Adhesividad. Definida como la fuerza de atracción existente entre la superficie de un alimento y la de otros materiales con los que entra en contacto.

Existen métodos destructivos y no destructivos para evaluar estos parámetros, aunque, por cuestiones prácticas, sólo los tres primeros son los más ampliamente considerados en la industria agrícola.

1.4 Métodos no destructivos para evaluar las propiedades mecánicas de los frutos.

Debido a que la calidad de los frutos es determinada por sus propiedades físicas y químicas, es posible instrumentar un sistema o método de control de calidad basado en la medición de estas propiedades. Estos métodos pueden ser de naturaleza destructiva o no-destructiva [1,8]; en los destructivos el daño a la fruta es irreversible, en tanto que en los no destructivos el daño es mínimo o inexistente.

En las últimas tres décadas el rápido desarrollo de la tecnología ha permitido la adecuación de métodos de evaluación de calidad no destructiva de productos agrícolas. Entre ellos [1-8] se encuentran aquellos para la determinación de propiedades mecánicas mediante técnicas de impacto, de vibración, y de ultrasonido; métodos basados en el estudio de propiedades eléctricas y ópticas; métodos basados en el uso de rayos-x y radiación gama. Aunque algunos de los métodos han sido aplicados con relativo éxito en otros países, es factible su adaptación en México para incorporarse como técnica de control en productos agrícolas de exportación.

El índice de firmeza, un indicador de calidad aceptado ampliamente, está ligado a las propiedades mecánicas de los frutos y puede ser medido mediante las técnicas acústicas mencionadas (impacto, vibración y ultrasonido). Se conoce cualitativamente que la firmeza del producto se relaciona con la madurez, pero se desconoce la relación cuantitativa. Esto es consecuencia del hecho de que la maduración y la firmeza son características que cambian drásticamente con el tiempo. De este modo, es crítica la determinación de la calidad del producto para su almacenamiento, control y distribución óptimos. Enseguida se describen brevemente las

técnicas de evaluación no destructivas para el estudio de las propiedades mecánicas basadas en métodos acústicos.

El uso de vibraciones acústicas tiene ya una historia de más de tres décadas. Los primeros intentos en aplicar técnicas acústicas para investigar la calidad de los frutos fueron realizados por el grupo de Abbott [1]. Posteriormente Cooke [4] propuso un modelo matemático para interpretar las frecuencias de vibración de los frutos y relacionarlas con su índice de firmeza. El método está basado en el análisis de la función de respuesta a la frecuencia cuando se aplica un impulso vibratorio al fruto; las variaciones de las propiedades mecánicas como tamaño, masa y módulos elásticos, están correlacionados con su grado de calidad.

La técnica de análisis por impacto está basada en la dinámica de la colisión elástica entre dos cuerpos [5,6]. El impacto se puede realizar con una masa suspendida formando un péndulo normal, aunque también otras variantes pueden hacer uso de un martillo de impacto. En esta clase de mediciones la respuesta dinámica del fruto se detecta con los acelerómetros colocados sobre diferentes puntos sobre la superficie de la fruta, y por medio de una tarjeta de adquisición de datos se transfiere la información para ser procesados mediante un software apropiado. Se pueden usar también micrófonos en lugar de los acelerómetros, los cuales se colocan en lugares apropiados cerca de la superficie del fruto [7-9].

El uso de ultrasonido ha tenido un éxito importante en el estudio de materiales inorgánicos y la medicina; sin embargo, poca atención se le ha dado a su posible aplicación en productos agrícolas. Investigaciones realizadas por el grupo de Mizrach [10] han reportando algún éxito en la aplicación de ultrasonido en aguacates y otras frutas típicas de la región europea. Uno de los mayores problemas que encara la aplicación de este

método como técnica no destructiva de control de calidad, tiene que ver con la forma de interacción de las ondas elásticas de alta frecuencia con la corteza, pulpa y centro de la fruta; la corteza con sus propiedades rugosas y las variaciones no lineales de las propiedades mecánicas desde la corteza al centro del mismo, afectan fuertemente la atenuación de las señales ultrasónicas. El objetivo de la técnica por ultrasonido es encontrar relaciones entre las propiedades internas tales como el módulo de elasticidad, densidad y propiedades visco-elásticas con la velocidad y atenuación de las ondas de ultrasonido. Las propiedades de calidad se establecen a partir de estas relaciones.

Debemos enfatizar que las tres técnicas descritas han demostrado su potencial como métodos no destructivos de evaluación de la calidad de frutas [7-10]. En esta tesis el énfasis se enfoca en la respuesta del fruto a un impacto acústico cuya física básica se describe a continuación.

1.5 Teoría Básica del Impacto Acústico.

En la técnica por impacto las vibraciones del fruto son excitadas por la colisión entre la fruta y una pequeña masa de impacto, como se muestra en la Fig. 1.1(a). El modelo para describir el impacto entre el objeto impactador (esfera 1) y el fruto (esfera 2) se basa en la teoría de impacto entre dos esferas elásticas, Fig. 1.1(b). Si m_1 y m_2 son las masas de las esferas, con módulos de elasticidad E_1 y E_2 , y razones de Poisson μ_1 y μ_2 , la magnitud del pico de la fuerza de impacto, F , actuando sobre cada cuerpo se puede expresar como [5]:

$$F = \left(\frac{5V_0^2 m}{4} \right)^{3/5} \left[\frac{4 E_1 E_2}{3 E_2 (1 - \mu_1^2) + E_1 (1 - \mu_2^2)} \right]^{2/5} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/5}, \quad (1.1)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura en el punto de contacto de las esferas, V_0 es su velocidad relativa de aproximación y m es la masa reducida

($m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$). El pico de aceleración A de la esfera 1 es igual a F/m_1 , es decir [5]:

$$A = \left(\frac{5V_0^2 m}{4} \right)^{3/5} \left[\frac{4 E_1 E_2}{3 E_2 (1 - \mu_1^2) + E_1 (1 - \mu_2^2)} \right]^{2/5} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{1/5} \frac{1}{m_1}. \quad (1.2)$$

Así, el tiempo requerido t para alcanzar el pico de aceleración puede ser expresado como [5]:

$$t = 1.4325 \left(\frac{m^2}{V_0} \right)^{1/5} \left[\frac{E_2 (1 - \mu_1^2) + E_1 (1 - \mu_2^2)}{E_1 E_2} \right]^{2/5} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right)^{1/5}, \quad (1.3)$$

de manera que la fuerza ejercida sobre el fruto durante el impacto puede verse como una función del módulo elástico E_2 , el cual está relacionado con el índice de firmeza del fruto.

Basándose en las Ecs. (1.1)-(1.3), Chen mostró [6] que cuando se impacta el fruto con una masa esférica pequeña rígida se puede usar el cociente A/t para caracterizar las variaciones de su módulo de elasticidad (índice de firmeza). En este caso, $E_1 = \infty$, $m_1 \ll m_2$, $R_1 \ll R_2$ y $V_0 = V_1$, por lo que de las Ecs. (1.2)-(1.3) se deduce que la razón A/t está dada por [5]:

$$A/t = 0.8954 (V_1)^{1.4} \frac{1}{m_1} (m)^{0.2} \left(\frac{E_2}{1 - \mu_2^2} \right)^{0.8} \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)^{0.4}, \quad (1.4)$$

donde m es aproximadamente m_1 cuando $m_1 \ll m_2$ y $(R_1 R_2 / (R_1 + R_2))$ es aproximadamente R_1 cuando $R_1 \ll R_2$; los efectos de cambios en m_2 y R_2

disminuyen cuando m_1 es muy pequeño con respecto a m_2 . La razón de usar estos parámetros en el impactador asegura un daño mínimo al fruto. En la Fig. 1.2 se muestra una representación gráfica de la Ec. (1.4) para diferentes condiciones encontradas en la práctica: Fruto blando ($E_2 = 0.7MPa$), fruto suave ($E_2 = 5MPa$) y fruto firme ($E_2 = 6 - 7MPa$).

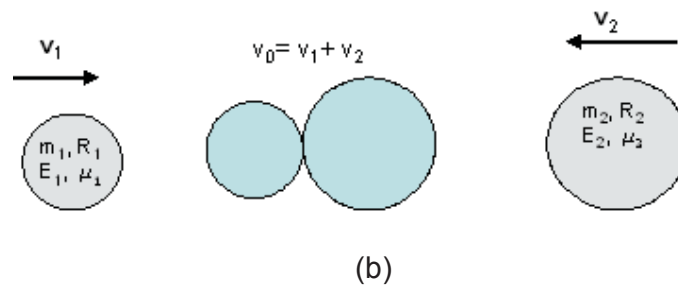
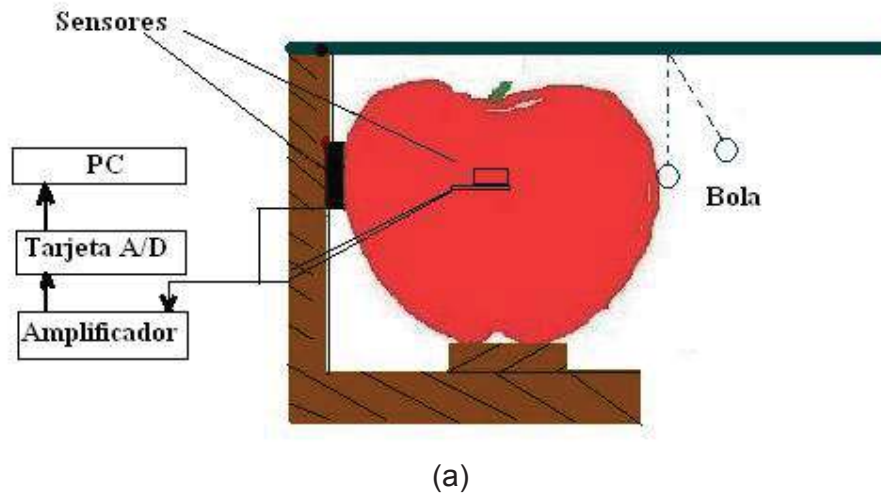


Figura 1.1: Arreglo experimental típico de la técnica por impacto acústico. (a), El impacto sobre la fruta hace que ésta vibre; las frecuencias de estas vibraciones son registradas por los sensores (acelerómetros y/o micrófonos). (b), Dos esferas elásticas colisionando; v_1 y v_2 son las velocidades antes de la colisión, y v_0 es la velocidad relativa de las dos esferas.

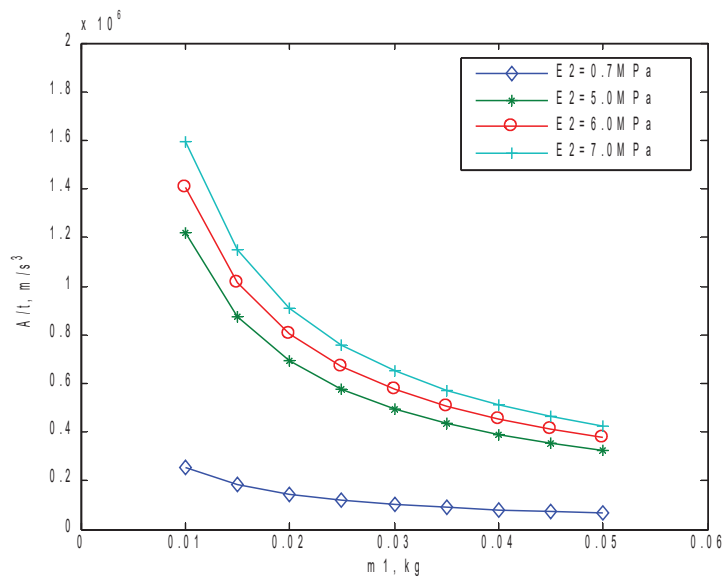


Figura 1.2: Variación del índice A/t con la masa de impacto para diferentes estados de firmeza del fruto.

De la Fig. 1.2 es evidente que un sensor de impacto de masa mínima incrementa la magnitud del cociente A/t ; además, se minimiza el error debido al movimiento de la fruta durante la colisión y el daño de la fruta causado por el impacto.

Capítulo 2

Modelos Unidimensionales para simular la Respuesta Acústica

2.1. Introducción.

En el capítulo anterior se enfatizó la técnica del impacto acústico como una herramienta de evaluación de la firmeza de los frutos. El hecho de que los frutos vibren bajo el impacto, aunado a sus estructuras materiales y geometrías diversas hace que el problema de la modelación matemática de la respuesta acústica sea complicado. Sin embargo, dependiendo de las características que se deseen extraer de la respuesta acústica, se disponen de dos clases generales de modelos matemáticos: aquellos modelos unidimensionales basados en el modelo del oscilador armónico [11], y los modelos tridimensionales basados en la naturaleza sólida y elástica de los frutos [12,13]. En este capítulo se exploran los modelos basados en la teoría del oscilador armónico, dejando los otros modelos hasta el capítulo siguiente.

2.2. Ecuaciones de Lagrange.

Las ecuaciones de Lagrange representan un modo uniforme de escribir las ecuaciones de movimiento de un sistema mecánico, que no depende del tipo de sistema de coordenadas utilizado, y constituyen un punto de partida para formulaciones más avanzadas de la mecánica, dado que reducen el problema de hallar el movimiento de cualquier sistema con s grados de libertad al problema de resolver s ecuaciones diferenciales de segundo orden.

En un sistema mecánico sujeto a condiciones particulares, es necesario un número mínimo de coordenadas independientes para especificar su configuración, es decir, la posición que ocupan todos sus puntos con respecto al sistema de referencia. Estas coordenadas denotadas por q_1, \dots, q_l son llamadas coordenadas generalizadas. Las velocidades generalizadas del sistema mecánico son las derivadas totales, respecto al tiempo, de sus coordenadas generalizadas:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}, \quad (i = 1, \dots, l). \quad (2.1)$$

El número de grados de libertad del sistema mecánico es el número s de movimientos independientes necesarios para describir su movimiento. En un sistema holónimo el número de coordenadas generalizadas es igual al número de grados de libertad del sistema: $l = s$. En un sistema no holónimo el número de coordenadas generalizadas es igual a la suma del número de ligaduras (k) y de los grados de libertad del sistema: $l = s + k$. En esta tesis se considerarán sólo sistemas holónomos. Se supondrá que en el sistema actúan fuerzas conservativas y no conservativas. Con las fuerzas conservativas derivables de una energía potencial $V(q_1, \dots, q_s)$ independiente del tiempo, y las fuerzas no conservativas, por ejemplo fuerzas de rozamiento de la forma $V'(q_1, \dots, q_s)$. El trabajo total W realizado sobre un sistema de N partículas por las fuerzas F_i que actúan sobre la j -ésima partícula está dado por:

$$dW = \sum_{j=1}^s Q_j dq_j, \quad (2.2a)$$

donde

$$Q_j = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \quad (2.2b)$$

se llama la fuerza generalizada asociada con la coordenada generalizada q_j .

Nótese que en la Ec. (2.2b) se ha usado el hecho de que las fuerzas son conservativas. Asimismo, suponemos que la energía cinética T , en el caso de ligaduras independientes del tiempo, se puede escribir como una forma cuadrática de las velocidades generalizadas $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ dada por:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (2.3a)$$

donde a_{ij} es la masa generalizada dada por

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \left(\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right), \quad (2.3b)$$

siendo m_k la masa del k -ésimo punto del sistema localizado por el radio vector \vec{r}_k .

La función de Lagrange L (o lagrangiano) de un sistema mecánico (no relativista) se define como la diferencia entre la energía cinética T y la potencial V . Así, L es una función de las coordenadas y velocidades generalizadas [14, 15]:

$$L = T - V \equiv L(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s), \quad (2.4)$$

la cual satisface, para fuerzas conservativas, las ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.5)$$

conocidas como ecuaciones de Lagrange. En el caso de que se incluyan fuerzas no conservativas, por ejemplo la fuerza de fricción, las ecuaciones de Lagrange se pueden expresar de la siguiente forma [14, 15]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = D_i, \quad (i = 1, \dots, s) \quad (2.6a)$$

donde las D_i son las fuerzas generalizadas asociadas con las fuerzas

conservativas y no conservativas que actúan sobre el sistema y dadas por [14, 15]:

$$D_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^N \vec{f}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i}. \quad (2.6b)$$

En la Ec. (2.6b) \vec{f}_k es la resultante de todas las fuerzas no conservativas que actúan sobre el k-ésimo punto material del sistema mecánico constituido por N partículas.

El modelo del oscilador armónico es una herramienta bien conocida para estudiar una variedad de problemas en física pura y aplicada, como lo es el estudio de las vibraciones mecánicas [14, 15]. Una manifestación de los cuerpos elásticos es su tendencia a vibrar cuando se someten a fuerzas mecánicas. En un problema físico real la fricción produce un amortiguamiento de las vibraciones, de modo que una elección apropiada para simular algunas situaciones reales es usar el modelo del oscilador armónico amortiguado. Las vibraciones que se presentan pueden ser de dos tipos: libres y forzadas. Las vibraciones libres se pueden producir si se impacta el cuerpo, por ejemplo un fruto, mediante una fuerza de tipo impulso (véase la Fig. 1.1); las vibraciones forzadas se pueden inducir si se excita el cuerpo mediante una fuerza armónica, como es el caso de los vibradores electromagnéticos.

A continuación se aplica el formalismo de Lagrange al caso de un oscilador armónico amortiguado y de tres osciladores acoplados, los cuales se usarán como modelos unidimensionales para modelar la respuesta acústica de frutos.

2.3. Oscilador Armónico Amortiguado.

En esta sección se aplica el formalismo de Lagrange al caso de un oscilador armónico amortiguado, tanto libre como forzado.

2.3.1 Vibraciones Libres.

Consideremos un sistema mecánico de un solo grado de libertad, descrito por la coordenada generalizada x , que consiste de una masa m y un resorte de rigidez k (cuya masa suponemos despreciable) moviéndose bajo la acción combinada de una fuerza elástica de la forma $F = -kx$, derivable de la función potencial $V = \frac{1}{2}kx^2$, y de una fuerza disipativa (fricción) de la forma $f = -\gamma \frac{dx}{dt}$, en donde γ es el coeficiente de fricción. La energía cinética está dada por $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$. De las Ecs. (2.6), con $N = 1$, se puede ver que la ecuación de movimiento de la partícula está dada por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (2.7)$$

la cual se puede reescribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.8)$$

donde

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (2.9)$$

son, respectivamente, el parámetro de amortiguamiento (2β es conocido como el coeficiente de amortiguamiento) y la frecuencia angular natural del oscilador (la frecuencia angular en ausencia de fricción). Es usual definir el parámetro adimensional ζ para caracterizar la razón de amortiguamiento del sistema:

$$\zeta = \frac{\beta}{\omega_0}. \quad (2.10)$$

La Ec. (2.7) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y homogénea, con coeficientes constantes. La solución general de esta ecuación se obtiene mediante los métodos ordinarios de resolución de esta clase de ecuaciones diferenciales. La solución de la Ec. (2.7) depende de los valores tomados por la razón de amortiguamiento definida por la Ec. (2.10). La clasificación de las soluciones es como sigue [15]: $0 < \zeta < 1$ define el caso subamortiguado; $\zeta = 1$ define el caso críticamente amortiguado; y $\zeta > 1$ define el caso sobreamortiguado. El caso de no fricción se obtiene cuando $\zeta = 0$. La Fig. 2.1 muestra una representación gráfica de estas soluciones. Es claro que una frecuencia de oscilación bien definida aparece en el caso subamortiguado (oscilatorio), lo cual no sucede en los casos sobreamortiguado y críticamente amortiguado.

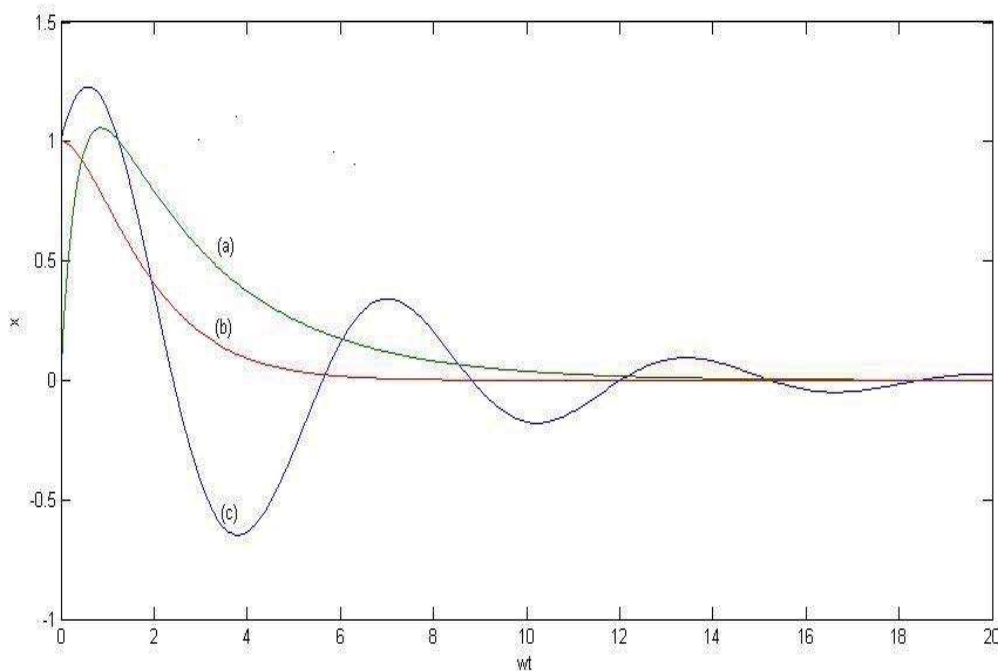


Figura 2.1: Desplazamiento en el oscilador armónico amortiguado: (a), movimiento sobre-amortiguado; (b), movimiento críticamente amortiguado; (c), movimiento oscilatorio o sub-amortiguado.

Sólo la solución del caso subamortiguado describe un comportamiento oscilatorio amortiguado. En este caso la solución de la Ec. (2.7) está dada por [15]

$$x(t) = A_0 e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega t + \phi), \quad (2.11)$$

donde A_0 y ϕ son dos constantes de integración que satisfacen las condiciones iniciales, y ω es la frecuencia angular de las oscilaciones amortiguadas dada por

$$\omega = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0. \quad (2.12)$$

De la Ec. (2.11) es claro que la amplitud de las oscilaciones cae exponencialmente con el tiempo:

$$A(t) = A_0 e^{-\zeta \omega_0 t} = A_0 e^{-\beta t}. \quad (2.13)$$

La potencia promedio disipada por el oscilador mecánico es proporcional al cuadrado de $A(t)$, de modo que esta cantidad también cae exponencialmente con el tiempo a una razón de 2β , de aquí que al factor 2β se le llame coeficiente de amortiguamiento. Los resultados experimentales muestran [7-9] que la respuesta de los frutos a un impacto acústico sigue un comportamiento similar al predicho por la Ec. (2.11).

2.3.2 Vibraciones Forzadas.

Cuando un oscilador está sometido a una excitación armónica forzada de la forma $F = F_0 \text{sen}(\omega t)$, su respuesta de vibración tiene lugar a la misma frecuencia de excitación. En este caso, adicionalmente a lo considerado en la sección anterior es necesario incluir la fuerza externa en las Ecs. (2.6), por lo que la ecuación de movimiento se puede expresar como:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \text{sen}(\omega t), \quad (2.14)$$

donde ζ y ω_0 son los parámetros definidos en las Ecs. (2.9) y (2.10), y F_0 es la amplitud de la excitación externa. La solución de la Ec. (2.14) consta de dos partes, la solución homogénea (vibración libre amortiguada) y la solución particular. La solución particular es una solución estacionaria de la misma frecuencia ω de la excitación, la cual se puede suponer de la forma

$$x(t) = X \text{sen}(\omega t - \phi), \quad (2.15)$$

en donde X es la amplitud de la oscilación y ϕ es la fase del desplazamiento con respecto a la fuerza excitatriz. La amplitud y fase en la Ec. (2.15) se calculan sustituyendo esta expresión en la ecuación diferencial (2.14). De este modo, se tiene que

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}, \quad (2.16)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (2.17)$$

Estas ecuaciones indican que la amplitud adimensional $\frac{Xk}{F_0}$ y la fase ϕ son

funciones solamente de la razón de frecuencias $\frac{\omega}{\omega_0}$ y del factor de

amortiguación ζ . La Fig. 2.2 muestra el comportamiento de $\frac{Xk}{F_0}$ y ϕ como

función de la razón de frecuencias $\frac{\omega}{\omega_0}$ para diferentes valores de ζ .

En resumen, podemos escribir la solución completa del oscilador

armónico forzado como:

$$x(t) = \frac{F_o}{k} \frac{\text{sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}} + X_1 e^{-\zeta \omega_0 t} \text{sen}\left(\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_0 t + \phi_1\right), \quad (2.18)$$

en donde X_1 y ϕ_1 son constantes que dependen de las condiciones iniciales. La Ec. (2.18) muestra como la solución estacionaria (primer término) depende de la frecuencia de excitación externa y de las características propias del oscilador, pero no de las condiciones iniciales, como es el caso de la solución transitoria (segundo término). El modelo descrito por la Ec. (2.18) es usado para simular la respuesta de frutos a una excitación armónica externa. Este modelo se presenta sólo para complementar el contenido del tema, pero no se usará en el resto de la tesis dado que en los resultados experimentales propuestos no considera el caso de excitación externa.

2.4 Osciladores Armónicos Acoplados.

Debido a que la naturaleza sólida y elástica de los frutos es complicada, se pone de manifiesto la necesidad de mejores modelos que los descritos en la sección anterior para simular la respuesta a un agente externo (impacto acústico o movimiento forzado). De aquí que un enfoque basado en la mecánica de los medios continuos daría una mejor aproximación con un modelo que contenga varios osciladores acoplados, identificados con las partes principales del fruto (cáscara, pulpa y centro), moviéndose en ciertos modos normales de vibración [14-15].

Si el sistema mecánico tiene s grados de libertad descritos por las coordenadas generalizadas q_i ($i = 1, \dots, s$), su lagrangiano se puede representar

como [14-15]:

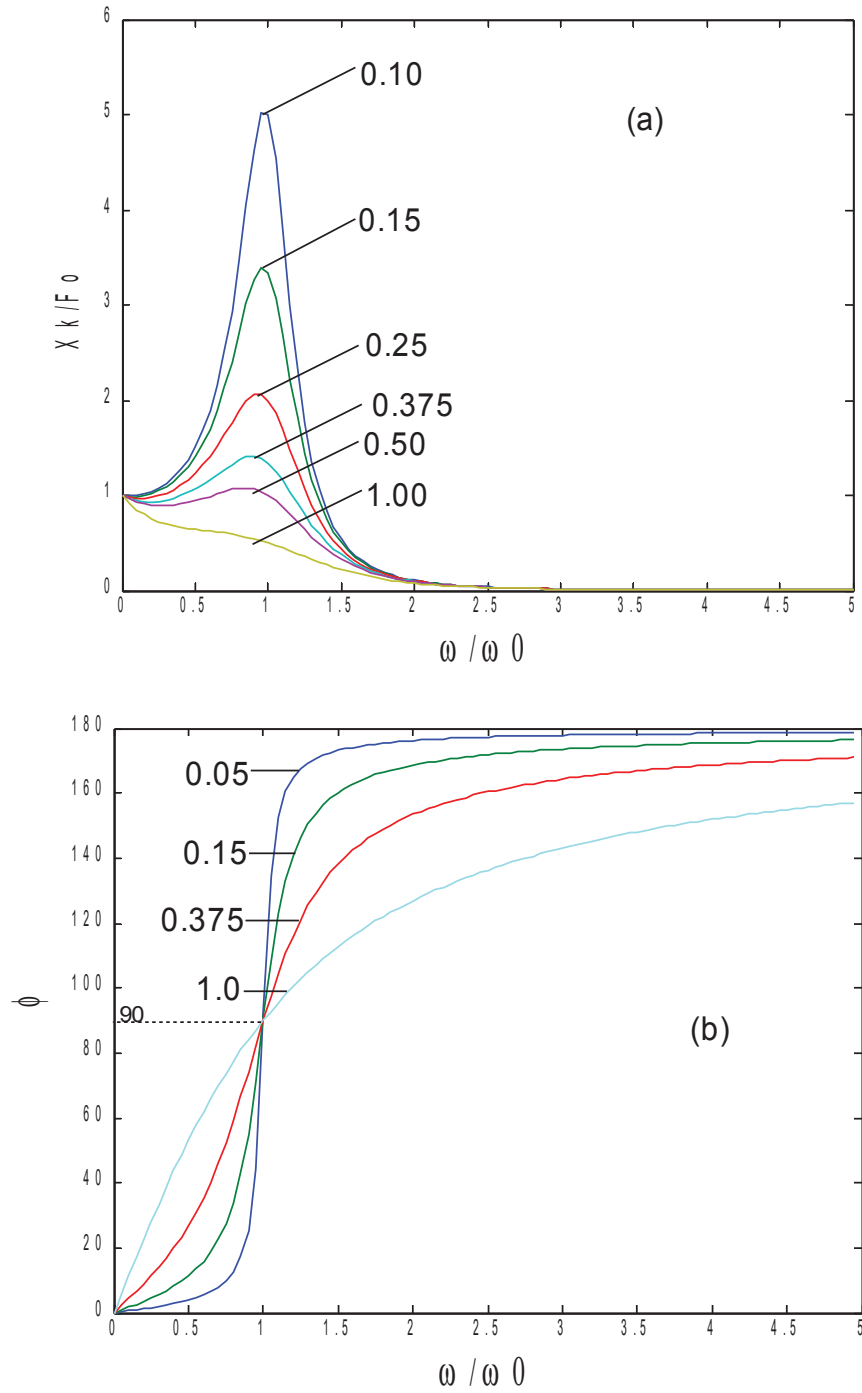


Figura 2.2: Respuesta del oscilador armónico a una fuerza armónica externa como función de la razón de frecuencias ω/ω_0 : (a), amplitud de la respuesta forzada; (b), variación de la fase.

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^s (b_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \beta_{ij} x_i x_j), \quad (2.19)$$

donde los coeficientes b_{ij} y β_{ij} satisfacen las condiciones

$$b_{ij} = b_{ji} = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right)_{x_1, x_2, \dots, x_s = 0}, \quad (2.20a)$$

$$\beta_{ij} = \beta_{ji} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x_1, x_2, \dots, x_s = 0}. \quad (2.20b)$$

En las Ecs. (2.19)-(2.20) se supone $x_i = q_i - q_{i0}$, en donde las q_{i0} definen las posiciones de equilibrio del sistema. En los casos de oscilaciones pequeñas se puede considerar que las fuerzas de rozamiento generalizadas $F_{i \text{ roz}}$, correspondientes a las coordenadas generalizadas q_i son funciones lineales

de las velocidades generalizadas, esto es, $F_{i \text{ roz}} = - \sum_{j=1}^s \alpha_{ij} \dot{x}_j$, donde α_{ij} son los coeficientes de rozamiento generalizados ($\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$). Las ecuaciones de Lagrange para este sistema tienen la forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = F_{i \text{ roz}}, \quad (i = 1, \dots, s),$$

las cuales conducen al siguiente sistema de s ecuaciones de segundo orden:

$$\sum_{j=1}^s (b_{ij} \ddot{x}_j + \alpha_{ij} \dot{x}_j + \beta_{ij} x_j) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (2.21)$$

El sistema de ecuaciones (2.21) se puede representar en forma matricial como [14, 15]:

$$M \ddot{X} + B \dot{X} + K X = 0, \quad (2.22)$$

en donde M es la matriz de masa, B es la matriz de amortiguamiento, K es la

matriz de rigidez, y X, \dot{X} y \ddot{X} son, respectivamente, los vectores de desplazamiento, de velocidad y de aceleración.

La solución general de las Ecs. (2.21) o (2.22) se obtiene buscando soluciones (modos normales) de la forma $x_j = A_j e^{\lambda t}$. De esta forma, estas ecuaciones llevan a la siguiente ecuación secular para el parámetro λ [14, 15]:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11} + \lambda \alpha_{11} + \lambda^2 b_{11} & \beta_{12} + \lambda \alpha_{12} + \lambda^2 b_{12} & \dots & \beta_{1s} + \lambda \alpha_{1s} + \lambda^2 b_{1s} \\ \beta_{21} + \lambda \alpha_{21} + \lambda^2 b_{21} & \beta_{22} + \lambda \alpha_{22} + \lambda^2 b_{22} & \dots & \beta_{2s} + \lambda \alpha_{2s} + \lambda^2 b_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{s1} + \lambda \alpha_{s1} + \lambda^2 b_{s1} & \beta_{s2} + \lambda \alpha_{s2} + \lambda^2 b_{s2} & \dots & \beta_{ss} + \lambda \alpha_{ss} + \lambda^2 b_{ss} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.23)$$

Esta ecuación tiene $2s$ raíces λ_i ($i=1, \dots, s$), las cuales, como los coeficientes β_{ij} , α_{ij} y b_{ij} son reales, son a su vez reales o forman pares conjugados complejos, es decir, $\lambda_j = \mu_j + i\omega_j$ y $\lambda_j^* = \mu_j - i\omega_j$ ($\mu_j < 0$, $\omega_j \geq 0$). Los valores de $A_j = A_j(\lambda_j)$ que se obtienen del sistema (2.23) para cada par de raíces conjugadas complejas son complejos conjugados [14, 15].

La solución general del sistema (2.21) o (2.22), en el caso en que todas las raíces sean diferentes y conjugadas complejas está dada por la superposición de los modos normales de vibración:

$$x_j = \sum_{l=1}^s e^{\lambda_l t} \operatorname{Re}\{A_j(\lambda_l) C_l e^{i\omega_l t}\}, \quad (2.24)$$

donde los C_l son las constantes complejas de integración que se obtienen a partir de las condiciones iniciales para la posición x_l y la velocidad \dot{x}_l .

Una aplicación del formalismo expresado por las Ecs. (2.19)-(2.24) es determinar los diferentes modos de vibración de frutos. Los modos de vibración de diferentes tipos de frutos han sido investigados con el objetivo de realizar una mejor clasificación y análisis de los datos experimentales

obtenidos sobre los mismos. La motivación para dichos estudios radica en el hecho de que la frecuencia de vibración dominante del fruto está fuertemente correlacionada a su firmeza [1, 4, 7]. Una aproximación a este problema es usar un modelo de tres masas como se muestra en la Fig. 2.3 [11]. Aunque este modelo es sólo una aproximación de los verdaderos movimientos de las diferentes partes de la fruta, los resultados experimentales muestran que en el caso de excitación por impacto acústico, a lo más tres frecuencias de resonancia aparecen en el espectro de frecuencias medido. Con la técnica de impacto que hemos aplicado [9], se ha observado que cuando el impacto se hace en la región ecuatorial del fruto (manzana, mango, naranja, guayaba) el espectro de frecuencia muestra claramente una frecuencia de resonancia dominante que corresponde básicamente al segundo modo de vibración.

El modelo considera tres masas m_1, m_2 y m_3 relacionadas con la cáscara y pulpa del fruto, que vibran en la dirección horizontal, donde se sostiene de pie la fruta sobre una base fija contra una superficie rígida vertical en forma de escuadra. El impacto se induce en el lado izquierdo y las vibraciones se registran con sensor de sonido colocado en el lado derecho entre la escuadra de la pared rígida vertical. La rigidez y humedad características del fruto en el área de contacto están representadas por k_j y b_j ($j = 1,2,3$). Las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas, de acuerdo a la Ec. (2.21), como:

$$m_1 \ddot{y}_1 + k_1 y_1 + b_1 \dot{y}_1 + k_2 (y_1 - y_2) + b_2 (\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = 0, \quad (2.25a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + k_2 (y_2 - y_1) + b_2 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_3 (y_2 - y_3) + b_3 (\dot{y}_2 - \dot{y}_3) = 0, \quad (2.25b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + k_3 (y_3 - y_2) + b_3 (\dot{y}_3 - \dot{y}_2) = 0. \quad (2.25c)$$

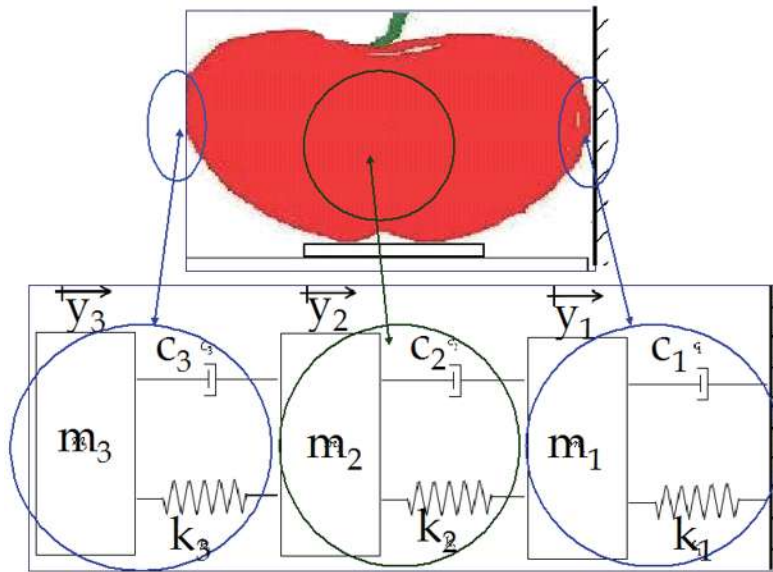


Figura 2.3: Modelo unidimensional de tres masas usado para estudiar las vibraciones de frutos.

Para resolver las Ecs. (2.25) numéricamente, se hace un cambio de variables ($y_4 = \dot{y}_1, y_5 = \dot{y}_2, y_6 = \dot{y}_3$) para traducir el sistema de 3 ecuaciones de segundo orden a uno de 6 ecuaciones de primer orden:

$$m_1 \dot{y}_4 + k_1 y_1 + b_1 y_4 + k_2 (y_1 - y_2) + b_2 (y_4 - y_5) = 0, \quad (2.26a)$$

$$m_2 \dot{y}_5 + k_2 (y_2 - y_1) + b_2 (y_5 - y_4) + k_3 (y_2 - y_3) + b_3 (y_5 - y_6) = 0, \quad (2.26b)$$

$$m_3 \dot{y}_6 + k_3 (y_3 - y_2) + b_3 (y_6 - y_5) = 0, \quad (2.26c)$$

$$y_4 = \dot{y}_1, \quad (2.26d)$$

$$y_5 = \dot{y}_2, \quad (2.26e)$$

$$y_6 = \dot{y}_3. \quad (2.26f)$$

Este sistema se resuelve con un algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden escrito en Matlab a partir de los parámetros específicos de cada fruto y de las condiciones iniciales respectivas. Conviene notar que en realidad los parámetros mecánicos involucrados en el problema (masas, constantes elásticas y constantes de amortiguamiento) son funciones del tiempo ya que

se modifican a medida que el proceso de maduración. Las evidencias experimentales reportadas en la literatura [1-4, 7] y las propias que hemos realizado [9] muestran este aspecto.

Capítulo 3

Modelos Avanzados para simular la Respuesta Acústica

3.1. Introducción.

En el capítulo anterior se enfatizó la exploración de dos modelos basados en la teoría del oscilador armónico. Estos modelos son las aproximaciones más simples que se pueden utilizar para modelar la respuesta acústica de frutos excitados por un impacto acústico. El problema de la modelación matemática para la simulación de la respuesta acústica es complicado. Sin embargo, existen modelos avanzados, basados en la naturaleza sólida y elástica de los frutos, los cuales permiten aproximarse al problema de una manera más realista. En este capítulo se discutirán dos modelos en tres dimensiones, el modelo esferoidal y el modelo elipsoidal. Por ello, antes de abordar la solución del problema de la vibración de frutos mediante estos modelos, se describirá a continuación los aspectos básicos de la teoría de la elasticidad en medios isotrópicos [16-17].

3.2. Elementos Básicos de la Teoría de Elasticidad.

Consideremos un cuerpo de volumen V y superficie S (Fig. 3.1). Sean P y Q dos puntos cercanos sobre el cuerpo sin deformación. Cuando el cuerpo sufre una deformación, los puntos P y Q adquieren las nuevas posiciones P' y Q' , respectivamente, y el volumen V y la superficie S alcanzan los valores V' y S' . Si r y r' los radios vectores antes y después de la deformación (con

componentes x_i y x'_i , respectivamente). El desplazamiento de este punto debido a la deformación está determinado por el vector $r' - r$ que llamaremos el vector de desplazamiento u , como se muestra en la Fig. 3.1. En el caso de un cuerpo elástico esta magnitud es en realidad un tensor que define las deformaciones internas del sólido. La distancia entre los puntos antes y después de la deformación es $dr^2 = dx_i^2$ y $dr'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 = dr^2 + 2\varepsilon_{ik} dx_i dx_k$, donde el tensor ε_{ik} recibe el nombre de tensor de deformación, el cual está definido como [17]:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right). \quad (3.1)$$

Este tensor es simétrico y como tal puede ser diagonalizado en cualquier punto. De hecho, al considerar la segunda ley de Newton para el caso de la fuerza ejercida sobre un cuerpo se obtiene como resultado de tal aplicación un tensor de deformación ε_{ik} y un tensor de tensiones σ_{ik} asociado al proceso. De tal modo que la energía libre E de un cuerpo como función del tensor de deformaciones, puede desarrollarse en términos de series de potencias de ε_{ik} de la forma $E = E_0 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_{ii}^2 + \mu \varepsilon_{ik}^2$ [17].

Considerando, por definición, que $\sigma_{ik} = \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ik}}$ se obtiene una expresión para el tensor de tensiones en términos del tensor de deformación dado por [17]:

$$\sigma_{ik} = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(\varepsilon_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \varepsilon_{ll} \right), \quad (3.2)$$

donde las cantidades λ y μ se denominan coeficientes de Lamé. Por lo que el tensor de tensiones σ_{ik} es una función lineal del tensor de deformaciones ε_{ik} , o sea, la deformación es proporcional a las fuerzas aplicadas al cuerpo. Si se analiza experimentalmente la relación deformación-tensión de un

cuerpo, se obtienen curvas características como la que muestra la Fig. 3.2. De la figura se puede notar que en la región donde es válida la ley de Hooke la deformación es proporcional a la tensión, por lo que la Ec. (3.2) puede entenderse como una generalización de la ley de Hooke para cuerpos sólidos [17].

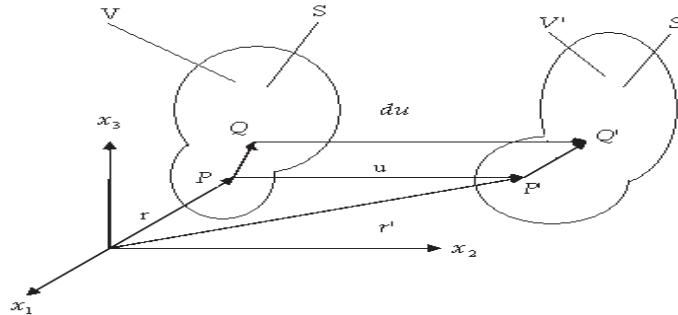


Figura 3.1: Deformación de un medio continuo de volumen V y superficie S en nuevas dimensiones V' y S', respectivamente, en un sistema de coordenadas generalizadas.

La ecuación de movimiento de un medio elástico continuo está dada como [17, 18]:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \mu\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) + \rho \vec{f} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

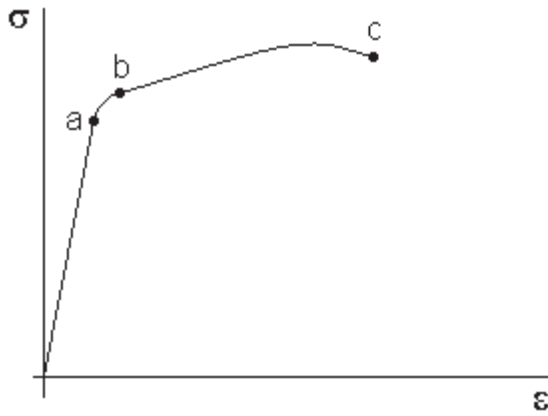


Figura 3.2: Relación típica de deformación-tensión. El punto a, llamado límite de proporcionalidad, marca el límite de validez de la Ley de Hooke. El punto b, llamado límite elástico, marca el punto hasta el cual se tiene un comportamiento elástico. El punto c es el punto de ruptura, a partir del cual el comportamiento es plástico.

donde \vec{u} es el vector de desplazamiento, \vec{f} es el vector de fuerza que obra sobre el cuerpo y ρ es la densidad de masa. Nosotros estamos interesados en el caso de vibraciones libres en donde $\vec{f} = 0$. La Ec. (3.3) se puede desacoplar en dos ecuaciones de onda si el vector de desplazamiento \vec{u} se descompone en términos de un potencial escalar Φ y un potencial vectorial $\vec{\psi}$, dados por:

$$\vec{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \vec{\psi} \quad , \quad (3.4)$$

donde

$$\nabla \cdot \vec{\psi} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (3.4) y (3.5), así como la identidad vectorial $\nabla \times \nabla \times \vec{\psi} = \nabla (\nabla \cdot \vec{\psi}) - \nabla^2 \vec{\psi}$, podemos expresar la Ec. (3.3) como:

$$c_i^2 \nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad , \quad (3.6)$$

y

$$c_t^2 \nabla^2 \vec{\psi} = \frac{\partial^2 \vec{\psi}}{\partial t^2} \quad (3.7)$$

donde c_l y c_t son las llamadas velocidades de fase longitudinal y transversal, respectivamente, definidas como [17]:

$$c_l = [(\lambda + 2\mu) / \rho]^{1/2}, \quad (3.8)$$

y

$$c_t = (\mu / \rho)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.6) y (3.7), en las que considerando la dependencia temporal de la forma $e^{-i\omega t}$, donde ω es la frecuencia de vibración, se pueden expresar en la forma:

$$(\nabla^2 + k_l^2)\Phi = 0, \quad k_l \equiv \frac{\omega}{c_l}; \quad (3.10)$$

y

$$(\nabla^2 + k_t^2)\vec{\psi} = 0, \quad k_t \equiv \frac{\omega}{c_t}; \quad (3.11)$$

Las Ecs. (3.10) y (3.11), que son ecuaciones de Helmholtz, se resuelven de acuerdo a la simetría involucrada en el problema y considerando las condiciones a la frontera particulares. En este trabajo estamos interesados particularmente en el análisis basado en un modelo de tipo esferoidal y su generalización como un modelo elipsoidal, los cuales se describen a continuación.

3.3 Modelos Simples en 3D.

3.3.1 El Modelo Esferoidal.

En el caso de simetría esférica, considerando que algunos frutos son modelados con un eje de simetría como eje de revolución, al resolver la Ec. (3.10) por separación de variables, obtenemos una solución para el campo escalar, dada por [17-20]:

$$\Phi = A_n j_n(k_t r) P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

donde los A_n son coeficientes desconocidos a ser determinado por las condiciones de frontera, $j_n(\cdot)$ son las funciones de Bessel esféricas de primer orden y $P_n(\cdot)$ son las funciones de Legendre asociadas.

Asimismo, la solución para la Ec. (3.11) que corresponde al campo vectorial puede ser construida como [18, 19]:

$$\vec{\psi} = \nabla \times \left(\vec{r} \Pi \right), \quad (3.13)$$

donde la función Π satisface la ecuación

$$(\nabla^2 + k_t^2)\Pi = 0. \quad (3.14)$$

Nótese que la forma definida para $\vec{\psi}$, dada por la Ec. (3.13), satisface la Ec. (3.5). La solución para Π se expresa, en analogía con la Ec. (3.12), como:

$$\Pi = B_n j_n(k_t r) P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

en donde los B_n son coeficientes desconocidos a ser determinados por las condiciones de frontera.

Finalmente, considerando que las condiciones de frontera respectivas para la simetría esférica son [17-19]:

$$\sigma_{rr} |_{r=a} = 0, \quad \sigma_{r\theta} |_{r=a} = 0. \quad (3.16)$$

los coeficientes A_n y B_n pueden ser determinados, salvo por una constante adicional presente, lo cual permite determinar completamente la solución. Para el análisis de los modos de vibración es conveniente definir los

parámetros $\alpha = k_1 a = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}} \beta$, $\beta = k_1 a = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \omega a$, donde a es el radio de la esfera y ν es la razón de Poisson [18, 19].

Es usual en el problema esférico dividir las soluciones en dos clases de modos de vibración, el esferoidal (ψ) y el torsional ($\phi = 0$) [13, 18, 19]. De éstos, sólo los modos esferoidales (radiales) son los que se miden experimentalmente con mayor facilidad [1, 6, 13] y se calcularán para alcanzar los objetivos planteados en este trabajo. Los estudios reportados en la literatura han mostrado que las primeras frecuencias radiales son las que intervienen en la cuantificación del llamado índice de firmeza S_c y el módulo de elasticidad Y de los frutos [1, 6, 13], los cuales están definidos por las expresiones:

$$S_c = f^2 m^{2/3}, \quad (3.17a)$$

$$Y = f^2 m^{2/3} \rho^{1/3}, \quad (3.17b)$$

donde f es la frecuencia de resonancia, m es la masa y ρ es la densidad del fruto. De este modo, es fundamental que los valores asociados a las frecuencias de resonancia sean determinados como primer paso para poder cuantificar resultados y caracterizar la firmeza de un fruto en particular como parámetro de calidad [1, 4, 6, 9].

Las condiciones de frontera, Ec. (3.16), para los modos esferoidales asociadas a las Ecs. (3.10) y (3.11) permiten obtener un determinante en términos de β para obtener la frecuencia de vibración ω de manera

numérica [18, 19]. De las Ecs. (3.12) y (3.15) puede notarse que para obtener soluciones linealmente independiente para los coeficientes A_n y B_n , la siguiente condición debe de cumplirse [18, 19]:

$$\mathbf{M} \equiv \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = \mathbf{O} , \quad (3.18)$$

donde

$$a_n = \frac{(-1)^n \alpha^{-n-2}}{2n+1} [\beta^2 j_n(\alpha) - 2(n-1)\alpha j_{n+1}(\alpha)], \quad (3.19a)$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} \alpha^{-n}}{2n+1} \left[\frac{\beta^2}{\alpha^2} j_n(\alpha) - \frac{2(n+2)}{\alpha} j_{n+1}(\alpha) \right], \quad (3.19b)$$

$$c_n = \left(\frac{-1}{\beta} \right)^n [\beta^2 j_n(\beta) - 2(n-1)\beta j_{n+1}(\beta)], \quad (3.19c)$$

$$d_n = \left(\frac{-1}{\beta} \right)^n \frac{n}{n+1} [\beta^2 j_n(\beta) - 2(n+2)\beta j_{n+1}(\beta)]. \quad (3.19d)$$

En estas ecuaciones las funciones j_n, j_{n-1}, j_{n+1} son las funciones esféricas de Bessel de primera clase que están relacionadas con las funciones de Bessel de orden semientero de acuerdo a [20]:

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x), \quad (3.20a)$$

$$j_{n-1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n-1/2}(x), \quad (3.20b)$$

$$j_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+3/2}(x). \quad (3.20c)$$

En las Ecs. (3.20) las J representan las funciones de Bessel de primera clase (el orden no entero de la función de Bessel depende del modo de vibración n). Asimismo, la frecuencia angular (lineal) de vibración ω (f) puede determinarse de la siguiente relación:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left(\frac{\beta}{a} \right), \quad (3.21a)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \left(\frac{\beta}{a} \right). \quad (3.21b)$$

Nótese que para cada valor de n habrá un número infinito de raíces que satisfacen la condición (3.18), por lo que las Ecs. (3.21) deberán interpretarse como un conjunto infinito de frecuencias asociadas con cada valor entero de n (0,1,2,...). Esto se indica escribiendo ω_{np} y f_{np} . En la práctica, sólo las frecuencias de los modos más bajos son las que se miden experimentalmente. Las frecuencias de vibración estimadas mediante este modelo son sólo una aproximación al problema real ya que en la Ec. (3.21) se considera el radio constante. Sin embargo, muchos frutos presentan una pequeña variación en el radio, por tal motivo es importante introducir un modelo que considere dichas variaciones. Este modelo se analiza a continuación.

3.3.2 El Modelo Elipsoidal.

Para el análisis del modelo elipsoidal, las Ecs. (3.6) y (3.7) se resuelven en un sistema de coordenadas esferoidales prolatas o alargadas (r, θ, φ) [21]. En la Fig. 3.3 se muestra una representación gráfica de este sistema coordenado definido por las ecuaciones [21]:

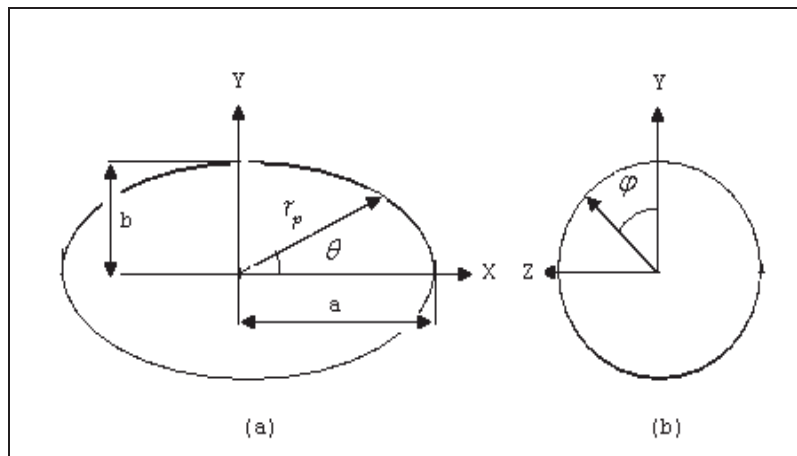


Figura 3.3: Coordenadas en el modelo elipsoidal; (a), vista frontal y (b), vista lateral. El cociente $q = \frac{a}{b}$ es el factor de forma.

$$\begin{aligned}x &= r_p \cos(\theta), \quad y = r_p \sin(\theta) \cos(\varphi) \\z &= r_p \sin(\theta) \sin(\varphi),\end{aligned}$$

con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\frac{x}{a^2} + \frac{(y^2 + z^2)}{b^2} &= 1, \\r_p^2 &= \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)}.\end{aligned}$$

Enseguida se busca desacoplar la ecuación general de movimiento (Ec. (3.3)) en dos ecuaciones de onda independientes en las componentes espacial y temporal mediante una separación de variables. Para este tipo de geometría más compleja, la solución para el vector de desplazamiento se describe como una función de la forma [21]:

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ijk} \sin\left(\frac{(2i+1)\pi}{2r_p} r\right) \cos(j\theta + \beta_j) \cos(k\varphi + \eta_k), \quad (3.22)$$

donde el coeficiente α_{ijk} y los ángulos β_j y η_k son funciones del eje radial. Las condiciones de frontera libre en $u(r, \theta, \varphi)$ deben satisfacer $u(0, \theta, \varphi) = 0$ (desplazamiento central nulo) y $\partial u(r_p, \theta, \varphi) / \partial r = 0$ (esfuerzo de torsión nulo sobre la superficie).

Básicamente, la componente radial ($u_1(r, \theta, \varphi)$) y torsional ($u_2(r, \theta, \varphi)$) principales de la Ec. (3.22) que domina las energías cinética y potencial, pueden ser identificadas como [21]:

$$u_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2r_p} r\right) |\cos(\theta)|, \quad (3.23a)$$

y

$$u_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2r_p} r\right) \sin(\theta) \cos(2\theta) \quad . \quad (3.23b)$$

El esfuerzo normal ε_{r1} y tangencial $\varepsilon_{\theta 1}$ atribuido al movimiento del modo radial (3.23a) están dados por [21]:

$$\varepsilon_{r1} = \frac{du_1}{dr} = \frac{\pi}{2r_p} \cos\left(\frac{\pi}{2r_p} r\right) |\cos(\theta)| \quad , \quad (3.24a)$$

$$\varepsilon_{\theta 1} = \frac{u_1}{r} = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2r_p} r\right) |\cos(\theta)| \quad . \quad (3.24b)$$

La energía potencial U_1 y energía cinética T_1 se obtienen integrando sobre el volumen total V del elipsoide [21]:

$$U_1 = \frac{E}{2} \iiint_V (\varepsilon_{r1}^2 + \varepsilon_{\theta 1}^2) dV = E\pi^2 \left(\frac{\pi^2 - 4}{16} + \int_0^r \frac{1}{r} \sin^2\left(\frac{r\pi}{2r_p}\right) dr \right) \equiv E\pi^2 \left(\frac{\pi^2 - 4}{16} + \lambda \right) \approx 1.191E\pi^2 \quad , \quad (3.25a)$$

$$T_1 = \frac{\rho}{2} \iiint_V u_1^2 dV = \frac{\rho(\pi^2 + 4)a^2b}{2(a+b)} \quad . \quad (3.25b)$$

En las Ecs. (3.25) E es el módulo de elasticidad. El método variacional de Rayleigh-Ritz [20] permite estimar la frecuencia de vibración más baja. La aplicación directa de este método, utilizando las Ecs. (3.25), da la frecuencia lineal de vibración radial f_1 :

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{U_1}{T_1}} = 0.2072 \sqrt{\frac{E(a+b)}{\rho a^2 b}} \quad . \quad (3.26)$$

La Ec. (3.26), cuando $a = b$, reproduce la Ec. (3.21) del modelo esférico. Similarmente, el esfuerzo normal radial ε_{r2} y el esfuerzo normal tangencial o angular $\varepsilon_{\theta 2}$ atribuido al movimiento de modo torsional (3.23b) están dados por [21]:

$$\varepsilon_{r2} = \frac{du_2}{dr} = \frac{\pi}{2r_p} \cos\left(\frac{\pi}{2r_p} r\right) |\sin(\theta)| \cos(2\varphi) , \quad (3.27a)$$

$$\varepsilon_{\theta 2} = \frac{u_2}{r} = \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi}{2r_p} r\right) |\sin(\theta)| \cos(2\varphi) . \quad (3.27b)$$

La energía potencial y cinética total están dadas por:

$$U_2 = \frac{E}{2} \iiint_V (\varepsilon_{r2}^2 + \varepsilon_{\theta 2}^2) dV = \frac{E\pi^2}{2} \left(\frac{\pi^2 - 4}{16} + \lambda \right) \approx 0.5955E\pi^2 , \quad (3.28a)$$

$$T_2 = \frac{\rho}{2} \iiint_V u_2^2 dV = \frac{\rho(\pi^2 + 4)ab^2}{4(a+b)} . \quad (3.28b)$$

Finalmente, la frecuencia natural del modo torsional puede expresarse como:

$$f_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_2}{T_2}} = 0.2072 \sqrt{\frac{E(a+b)}{\rho ab^2}} . \quad (3.29)$$

Cabe señalar que no serán consideradas las frecuencias asociadas a los modos torsionales dentro de este trabajo de tesis debido a la dificultad de medirlas experimentalmente y compararlas con las predicciones teóricas.

Los resultados numéricos derivados de las Ecs. (3.21) y (3.26) se usarán en las secciones 4.3 y 4.4 del siguiente capítulo.

Capítulo 4

Resultados Numéricos y Experimentales

4.1 Introducción

En el capítulo 2 se presentaron dos modelos unidimensionales (1D), de un oscilador armónico amortiguado y de tres osciladores armónicos amortiguados acoplados, para predecir las frecuencias de resonancia de frutos sometidos a un impacto acústico. De manera similar, en el capítulo 3 se presentaron dos modelos simples en tres dimensiones (3D), el esférico y el elipsoidal, para estimar las frecuencias de vibración más bajas de frutos sometidos también a un impacto acústico. En este capítulo se muestran los resultados numéricos de las frecuencias de resonancia para diferentes frutos predichos por estos modelos y se comparan con los valores medidos experimentalmente. Se enfatiza en las limitaciones de cada modelo. El capítulo termina con una comparación entre las mediciones experimentales y los valores numéricos estimados por los diferentes modelos, 1D y 3D, para el fruto de la manzana durante un tiempo alrededor de un mes.

4.2 Resultados con Modelos Unidimensionales.

En la sección 4.2.1 se reportan los resultados obtenidos con el modelo de un oscilador armónico amortiguado simple unidimensional (sección 2.3). Posteriormente, en la sección 4.2.2 analizamos el modelo de tres osciladores armónicos amortiguados acoplados (sección 2.4).

4.2.1 Modelo del Oscilador Armónico Simple.

El modelo propuesto para simular la respuesta de frutos a un impacto acústico (Fig. 4.1) se describe a partir de la Ec. (2.11). La justificación del modelo [22] se basa en el hecho de que las señales acústicas registradas presentan una frecuencia de resonancia dominante bien determinada, dado que los frutos típicos analizados rara vez presentan más de una frecuencia dominante en un rango de valores cercanos entre sí. La metodología que se sigue al aplicar este modelo es la siguiente. Primeramente, se captura la señal de la respuesta acústica registrada por el sensor de sonido. Después, la información se guarda en un archivo de texto (ASCII). Finalmente, con un programa escrito en *Mathematica 5.0*, se lee el archivo de texto, se ajustan los datos experimentales a la función de ajuste dada por la Ec. (2.11) y se obtienen los parámetros fundamentales: la frecuencia de resonancia dominante y el coeficiente de amortiguamiento de la señal.



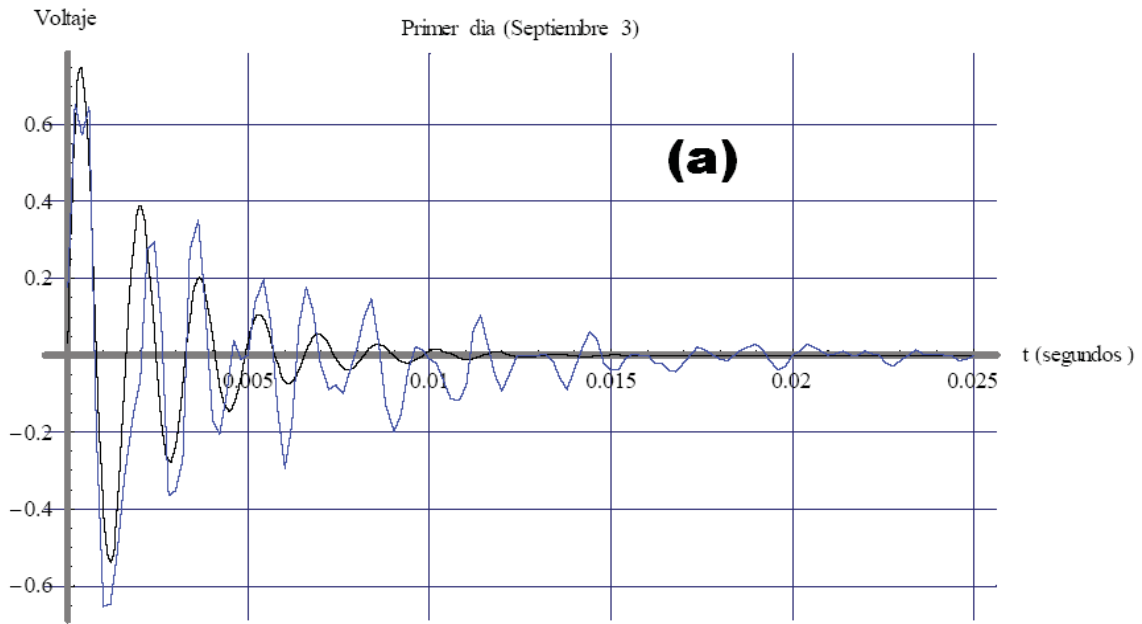
Figura 4.1: Representación gráfica del modelo teórico propuesto para predecir las frecuencias de resonancia características de la respuesta acústica típica de frutos sometidos a un impacto acústico.

En la Fig. 4.2 se muestran los resultados experimentales y numéricos de la señal de respuesta acústica típica registrada durante un periodo de 25 días consecutivos para un fruto consistente en manzana Golden [16]. La línea en azul corresponden a los resultados experimentales y la línea en negro es el ajuste de acuerdo al modelo 1D de un oscilador armónico

amortiguado, Ec. (2.11). De la figura se observa una buena concordancia entre los resultados experimentales y numéricos a medida que transcurre el proceso de maduración del fruto. Con la expresión “buena concordancia” entendemos que las predicciones del modelo están dentro de las incertidumbres experimentales. Resultados similares se obtuvieron en otras clases de manzanas.

En el caso de frutos suaves y formas no esferoidales, como es el caso del tomate tipo Saladet (de forma oblonga) y en donde su periodo de anaquel es muy corto (del orden de dos semanas si no se cuenta con refrigeración) la situación cambia. En la Fig. 4.3 se presentan los resultados obtenidos en el caso del tomate saladet analizado durante casi dos semanas. Se observa que el modelo presenta limitaciones ya que el ajuste es aceptable durante los primeros días pero no en los últimos días de su vida de anaquel. Esto se debe al reblandecimiento de la pulpa por la acumulación de agua en el interior del tomate, por lo que otras frecuencias de resonancia pueden estar presentes. Esto fue comprobado experimentalmente al observar que la señal temporal era débil y estaba enmascarada con el ruido ambiental. Al analizar el espectro de frecuencia del tomate se pudo notar una segunda frecuencia de resonancia en los últimos días, cuando el ablandamiento del tomate fue evidente.

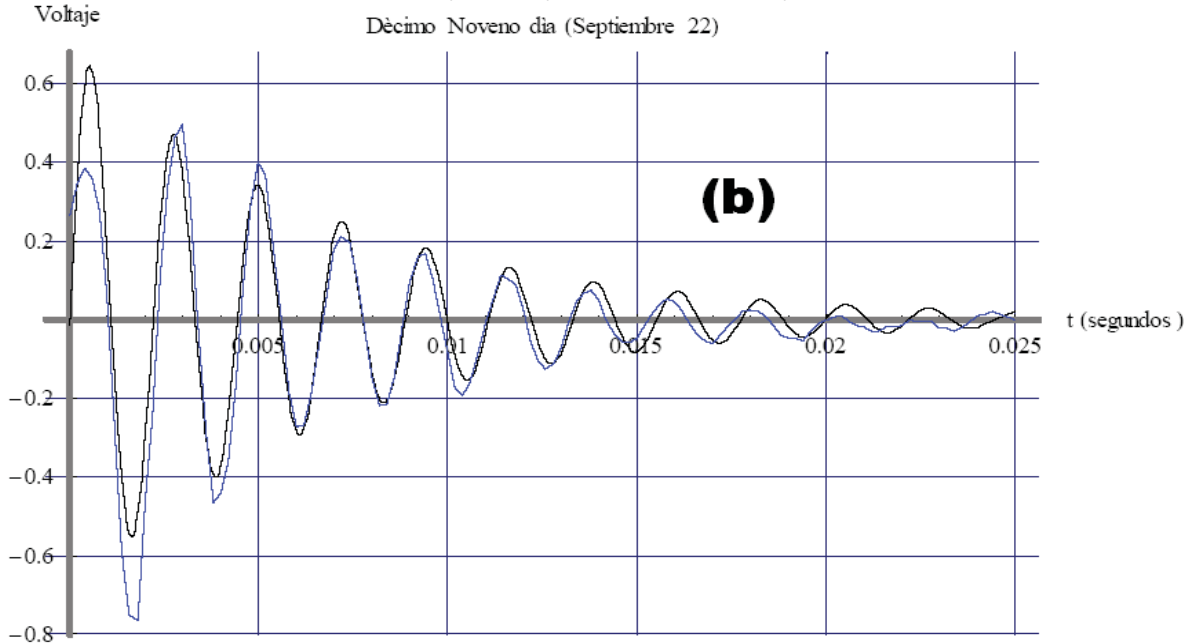
MANZANA GOLDEN



Línea azul: Experimental

Línea negra: Predicha por el Modelo

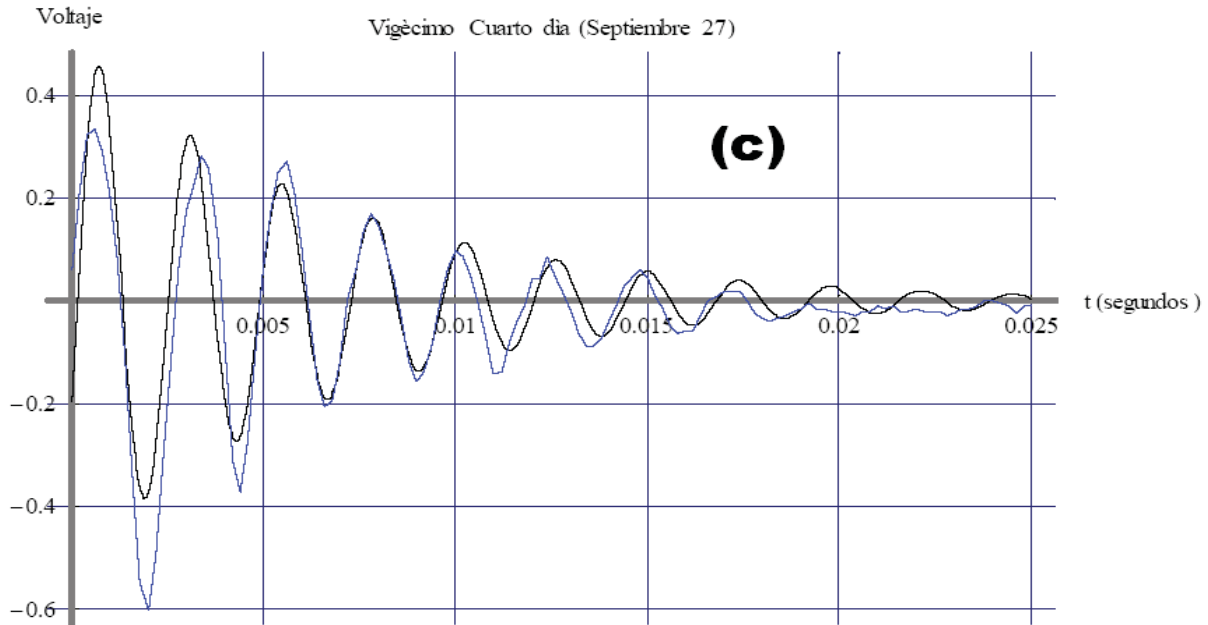
MANZANA GOLDEN



Línea azul: Experimental

Línea negra: Predicha por el Modelo

MANZANA GOLDEN



Línea azul: Experimental

Línea negra: Predicha por el Modelo

Figura 4.2: Evolución de la respuesta acústica para la manzana tipo Golden durante un periodo de 25 días: (a), primer día; (b), décimo noveno día; (c), vigésimo quinto día de medición.

En base a los resultados obtenidos podemos concluir que el modelo propuesto, aunque es bastante simple, se ajusta razonablemente bien en frutos de consistencia dura como las manzanas cuando son sometidos a un impacto acústico. En el caso de frutos blandos de forma no esférica, el modelo predice buenos resultados durante los primeros días de su tiempo de anaquel, pero presenta limitaciones para predecir una frecuencia de resonancia dominante en los últimos días de su vida de anaquel.

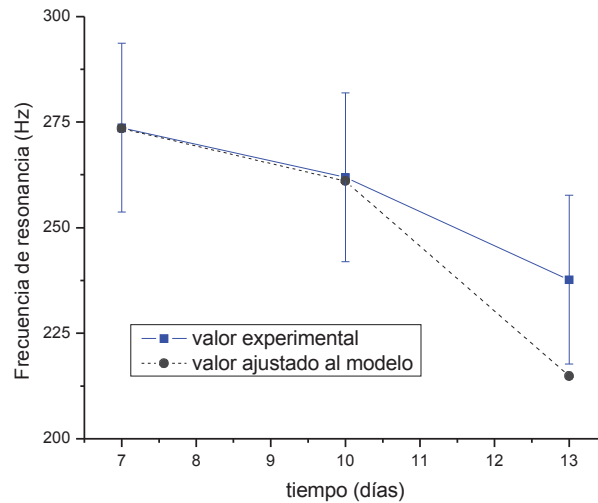


Figura 4.3: Evolución de la frecuencia de resonancia para el tomate tipo Saladet durante un periodo de 14 días. Las barras de error son una estimación de la incertidumbre experimental.

4.2.2 Modelo de Tres Osciladores Armónicos Acoplados.

Las Ecs. (2.26) de la sección 2.4 describen la evolución dinámica del modelo 1D de 3 osciladores armónicos amortiguados. De la teoría expuesta en esa sección se puede entender que en el modelo empleado para simular la respuesta acústica de frutos, existen tres tipos de modos normales de vibración, los cuales se muestran gráficamente en la Fig. 4.4. En el primer modo de vibración, Fig. 4.4(a), todas las masas se mueven en fase; en el segundo modo, Fig. 4.4 (b), las masas m_3 y m_2 se mueven en fase, mientras que m_1 está en oposición o fuera de fase; en el tercer modo, Fig. 4.4(c), las masas m_3 y m_1 se mueven en fase, mientras que m_2 está en oposición o fuera de fase.

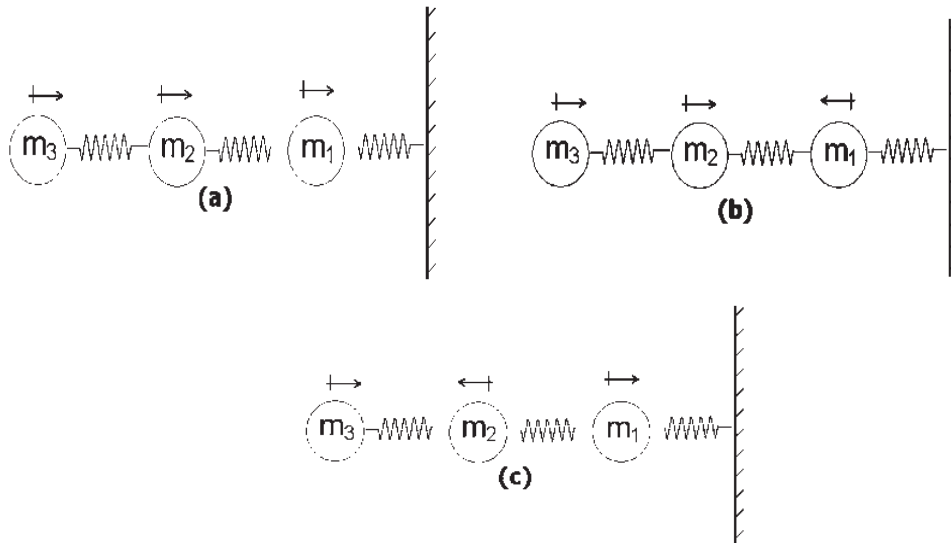


Figura 4.4: Modos normales de vibración en un sistema 1D con tres osciladores acoplados: (a), primer modo; (b), segundo modo; (c), tercer modo.

Para verificar la operación correcta del programa escrito en Matlab para resolver numéricamente las Ecs. (2.26), se partió de los datos sugeridos en la Ref. 11. En la tabla 1 se anotan los valores para frutos de tipo duro, como la manzana, y suave, como la naranja.

Tabla 1.-Parámetros de simulación para fruto de tipo duro (manzana) y suave (naranja)

<i>Manzana</i>		<i>Naranja</i>	
$m^1 = m^3$ (kg.)	0.139	$m^1 = m^3$ (kg.)	0.066
m^2 (kg.)	0.210	m^2 (kg.)	0.236
$k_1(10^5$ N/m)	1.55	$k_1(10^5$ N/m)	1.39
$k^2 = k^3(10^5$ N/m)	5.0	$k^2 = k^3(10^5$ N/m)	1.18
b_1 (Ns/m)	33.0	b_1 (Ns/m)	4.5
b^2 (Ns/m)	1.0	b^2 (Ns/m)	0.0
b^3 (Ns/m)	1.0	b^3 (Ns/m)	9.0

Al resolver numéricamente las Ecs. (2.26) con los valores de referencia de la tabla 1, se obtienen las respuestas acústicas correspondientes a los 3 modos normales de vibración para la manzana (Fig. 4.5) y para la naranja

(Fig. 4.6). De estas gráficas es evidente el desplazamiento relativo de las masas asociadas con cada modo de vibración.

El mismo programa calcula también los espectros de frecuencia de cada modo normal de resonancia. En las Figs. 4.7-4.9 se muestran los espectros de Fourier para el primer, segundo y tercer modo normal de vibración de la manzana y la naranja. Las alturas de los picos en cada gráfico es un indicativo de las amplitudes relativas de las oscilaciones de cada oscilador.

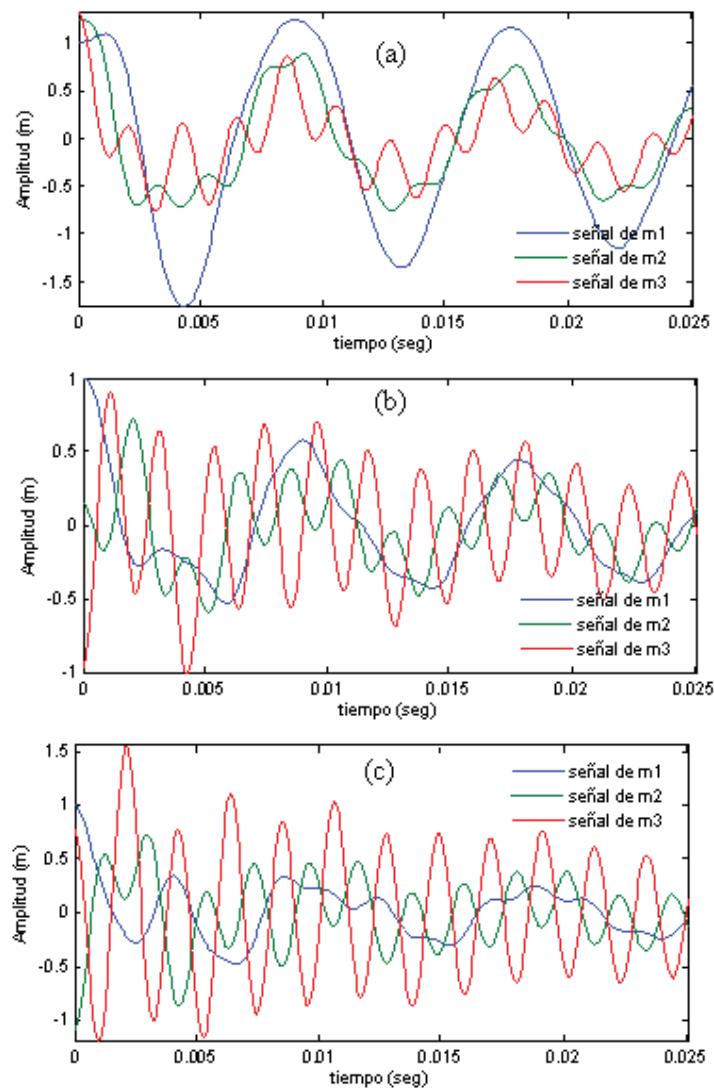


Figura 4.5: Señales temporales correspondientes a los 3 modos normales de vibración para la manzana, según los parámetros de la tabla 1: (a), primer modo; (b), segundo modo; (c), tercer modo.

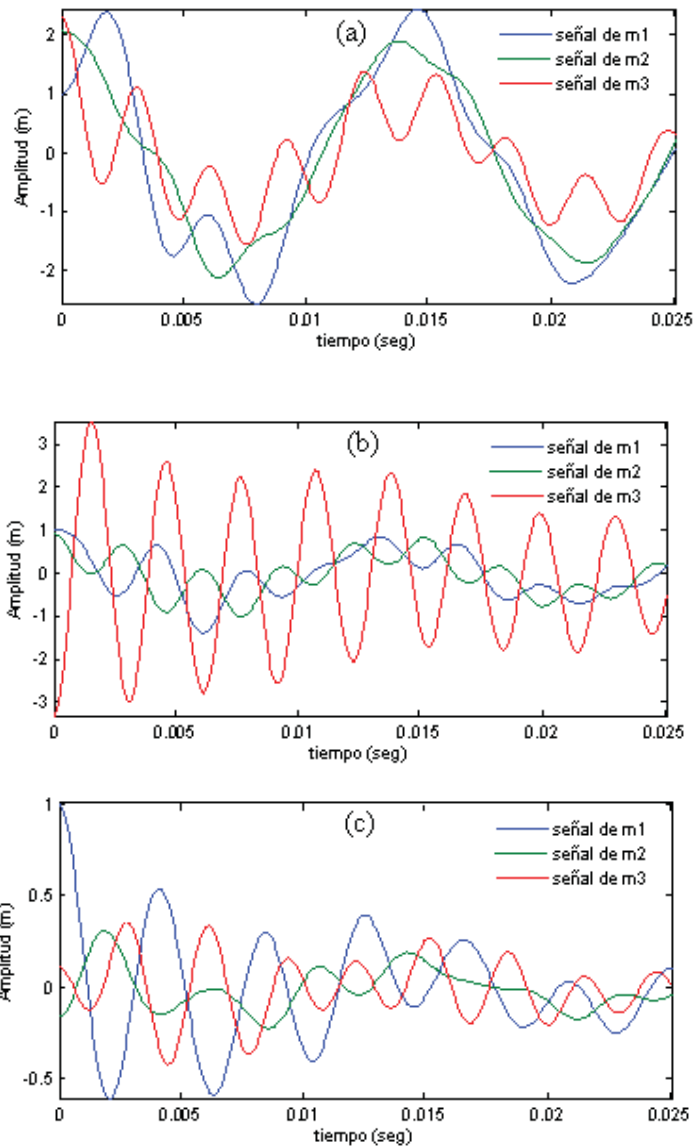


Figura 4.6: Señales temporales correspondientes a los 3 modos normales de vibración para la manzana, según los parámetros de la tabla 1: (a), primer modo; (b), segundo modo; (c), tercer modo.

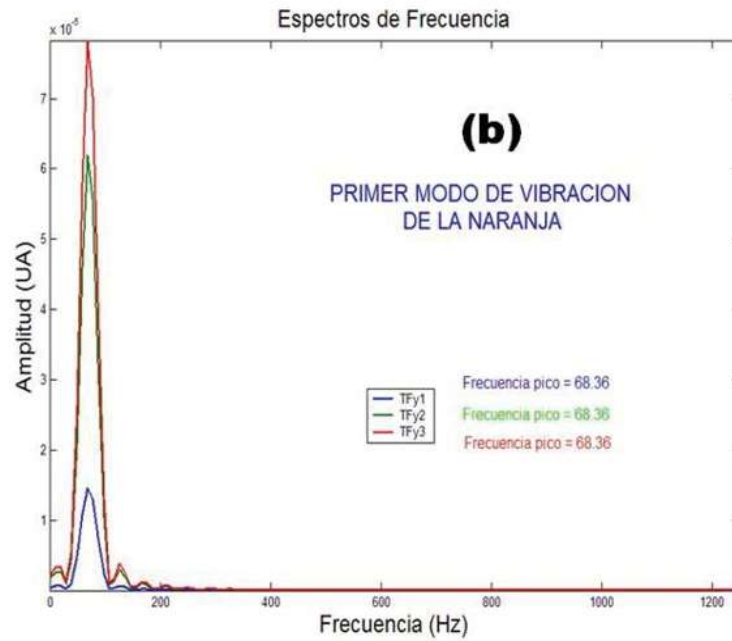
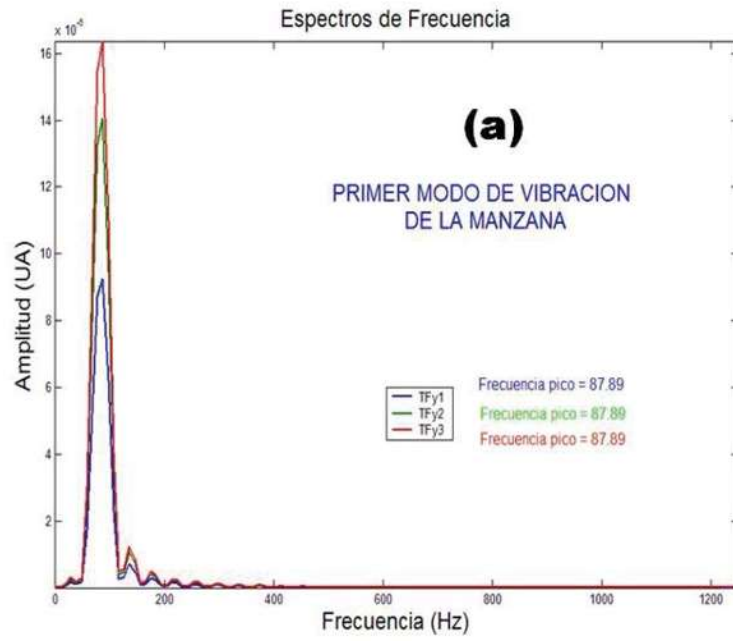


Figura 4.7: Espectros de Fourier para el primer modo normal de vibración: (a), manzana; (b), naranja.

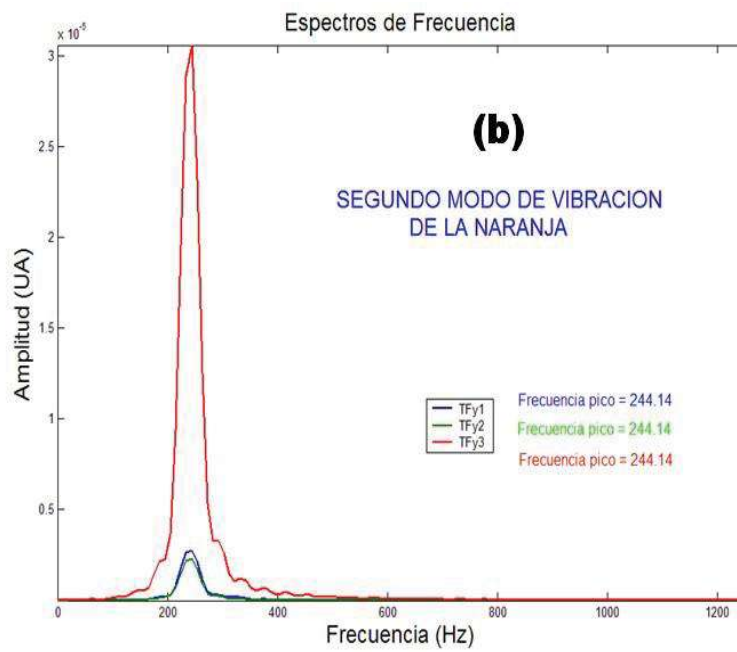
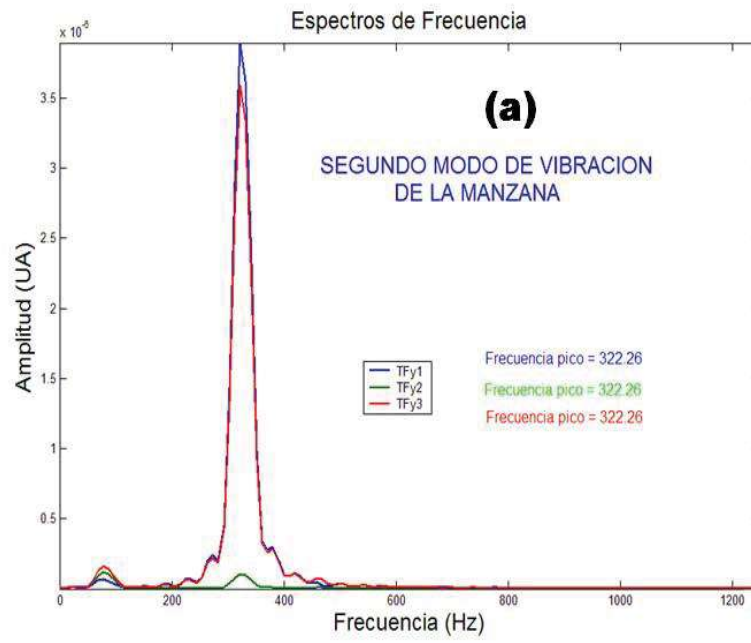


Figura 4.8: Espectros de Fourier para el segundo modo normal de vibración: (a), manzana; (b), naranja.

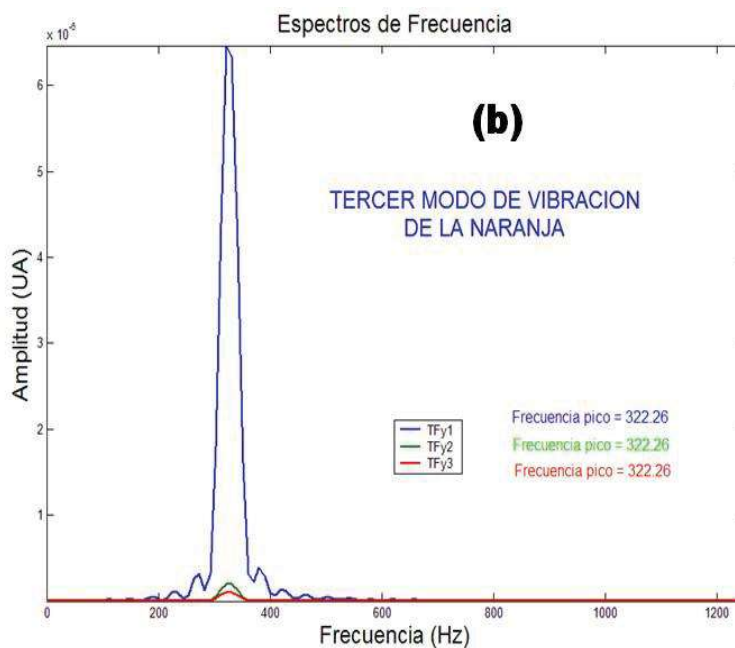
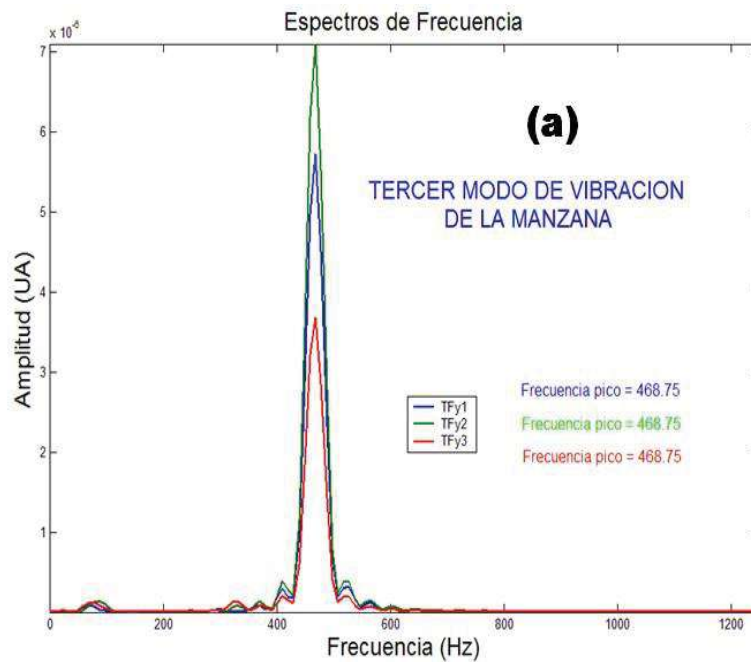


Figura 4.8: Espectros de Fourier para el tercer modo normal de vibración: (a), manzana; (b), naranja.

Con el objeto de establecer parámetros de comparación entre las predicciones hechas por el modelo y las mediciones experimentales, se consiguieron en el mercado local manzanas y naranjas con masas totales ($m_1+m_2+m_3$) muy cercanas a las de la tabla 1. En la tabla 2 se presentan los

valores experimentales (promediados) y numéricos de las frecuencias de resonancia dominante para estos frutos. De la tabla se nota que las predicciones del modelo están en buena concordancia con los resultados experimentales.

Tabla 2.- Frecuencias dominantes asociadas al modelo unidimensional de 3 osciladores acoplados para fruto de tipo duro (manzana) y suave (naranja).

<i>Fruto</i>	<i>Frecuencia Experimental (Hz)</i>	<i>Frecuencia Numérica (Hz)</i>
<i>Manzana</i>	325 ± 5	322.26
<i>Naranja</i>	250 ± 5	244.14

El modelo de los 3 osciladores acoplados permite también analizar la sensibilidad de la frecuencia de resonancia a variaciones de los parámetros mecánicos involucrados en el problema. Esto se muestra gráficamente en las Figs. 4.9 y 4.10.

En la Fig. 4.9 se muestra la variación de la frecuencia de resonancia dominante al variar las masas m_1 , m_2 y m_3 . El trazo en color verde corresponde a variaciones en el valor de m_1 ($=m_3$) manteniendo fijo el valor de m_2 ; el trazo en azul corresponde a variaciones en el valor de m_2 manteniendo fijo los valores de m_1 y m_3 ($m_1=m_3$). Los demás parámetros que aparecen en la tabla 1 permanecieron constantes.

De manera análoga, la Fig. 4.10 muestra la variación de la frecuencia de resonancia dominante al variar las constantes k_1 , k_2 y k_3 . El trazo en color verde corresponde a variaciones en el valor de k_2 ($=k_3$) manteniendo fijo el valor de k_1 ; el trazo en azul corresponde a variaciones en el valor de k_1 manteniendo fijo los valores de k_2 y k_3 ($k_2=k_3$). Todos los demás parámetros que aparecen en la tabla 1 permanecieron constantes.

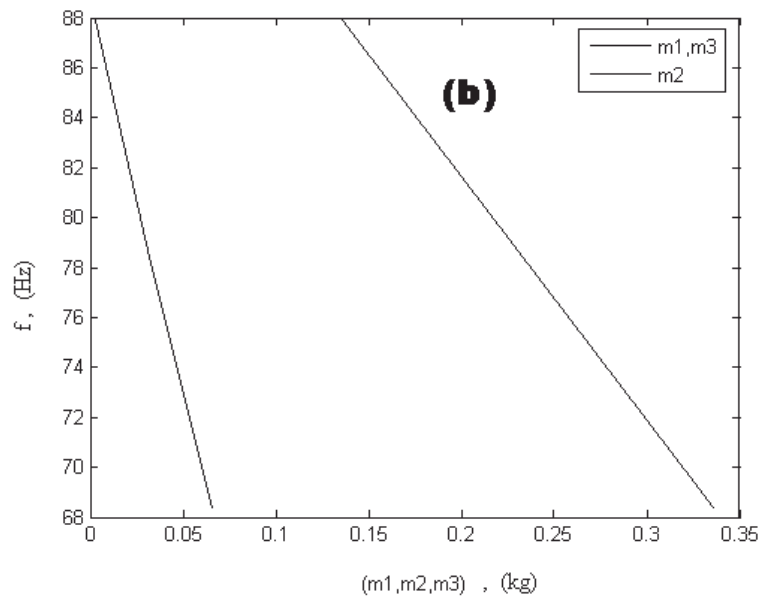
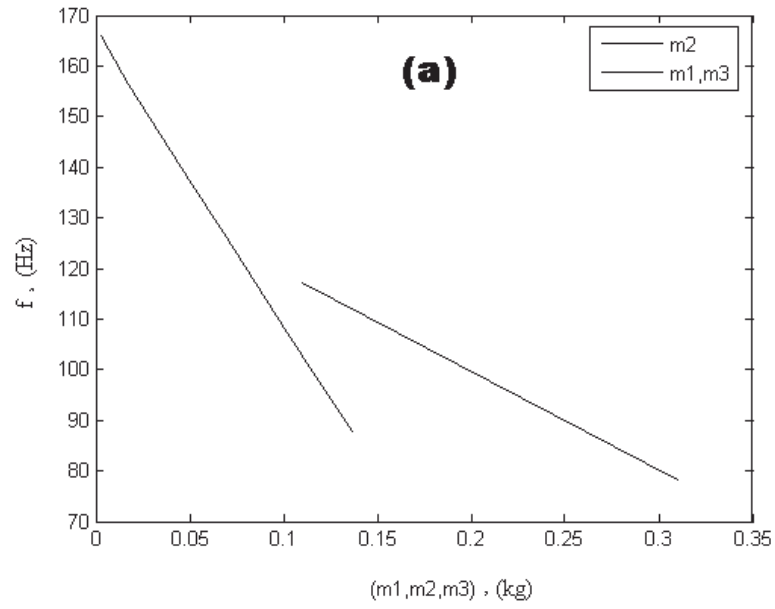


Figura 4.9: Variación de la frecuencia dominante f con las masas: (a), manzana; (b) naranja. Para más detalles véase el texto principal.

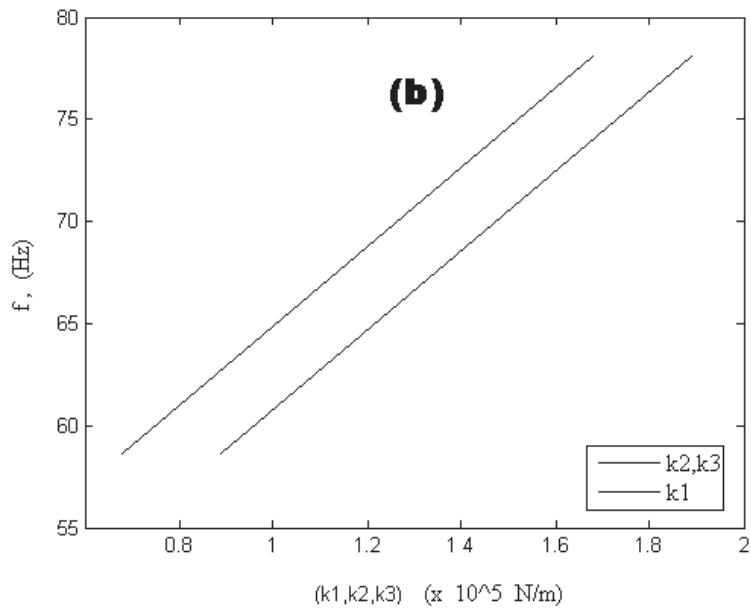
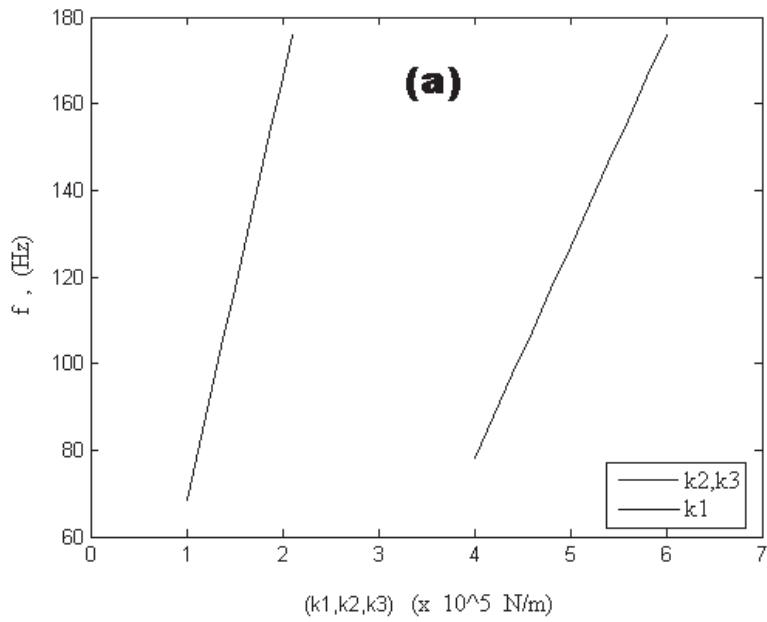


Figura 4.10: Variación de la frecuencia dominante f con las constantes elásticas: (a), manzana; (b), naranja. Para más detalles véase el texto principal.

4.3 Resultados con Modelos Simples en 3D.

En esta sección se presentan los resultados derivados del modelo esférico y del modelo elipsoidal.

4.3.1. Modelo Esférico.

En la Fig. 4.10 se muestran gráficamente la tendencia que adoptan las raíces del determinante exacto de la Ec. (3.18) asociadas a cada orden de la función de Bessel relacionada con cada modo de vibración esférica en forma numérica.

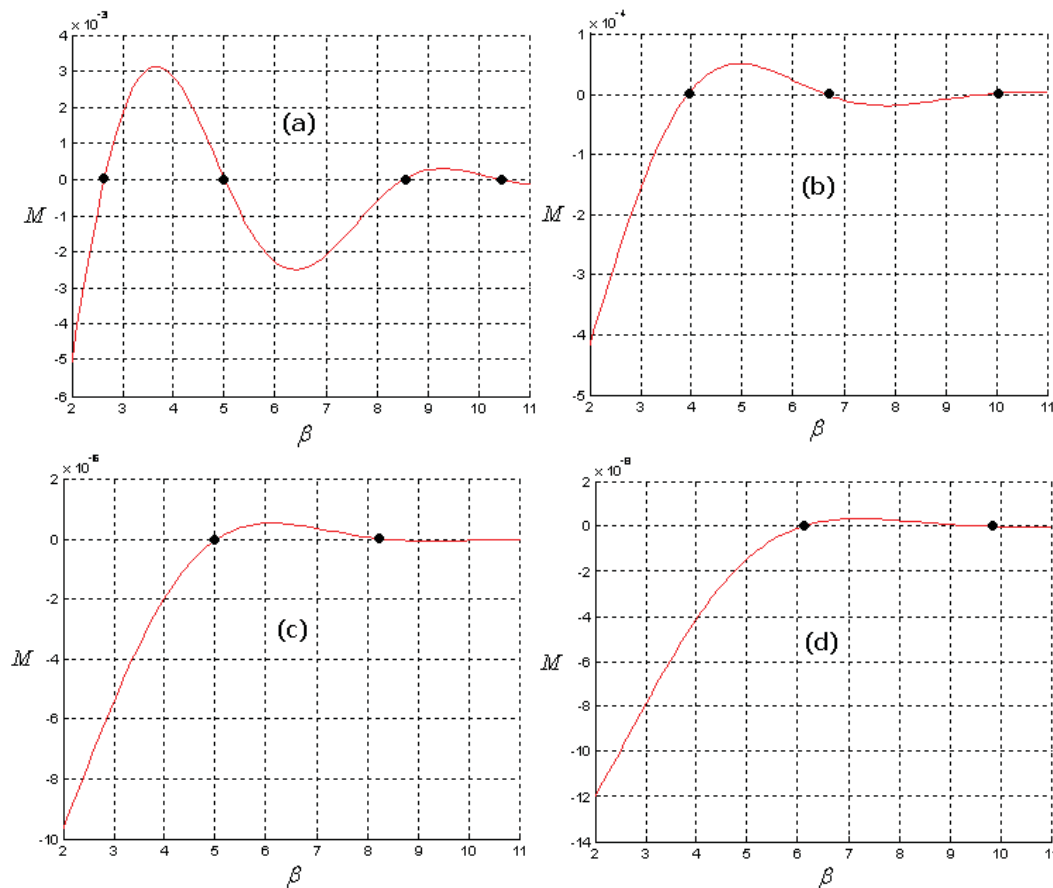


Fig. 4.10. Representación gráfica de la variación del determinante M de la Ec. (3.18) con el modo de vibración n : a) $n=2$; b) $n=3$; c) $n=4$; y d) $n=5$. Las raíces β están marcadas por los puntos negros en cada gráfico (donde $M=0$).

Con énfasis en lo anterior, se registraron (Tabla 3) los valores numéricos correspondientes dados por la solución de la Ec. (3.18), mediante los cuales es posible expresar la frecuencia de vibración ω de manera numérica en la forma de la Ec. (3.21).

Tabla 3.- Modos esferoidales correspondientes a los primeros valores de n (modo), considerando el valor de la razón de Poisson $\nu = 0.301575$. Asimismo se incluyen los valores asociados a las frecuencias naturales de vibración f obtenidas en forma numérica a partir de la Ec. (3.21).

n	β_{n1} f (Hz)	β_{n2} f (Hz)	β_{n3} f (Hz)
2	2.646406 (516.3858)	5.011286 (977.8383)	8.532458 (1664.9149)
3	3.938027 (651.8249)	6.613305 (1094.6388)	9.887379 (1736.5658)
4	5.047009 (760.5131)	8.219319 (1238.5355)	14.181043 (2136.8833)
5	6.084973 (825.2228)	9.781298 (1326.5055)	17.492090 (2372.2162)

4.3.2. Modelo Elipsoidal.

Análogo a la sección anterior, se reportan (Tabla 4) las frecuencias naturales f_1 y f_2 asociadas al modelo elipsoidal para manzana de la variedad perón-golden de la región de Chihuahua (GC) y, además, golden importada del estado norteamericano de Washington (GW) [9]. Los resultados presentados corresponden a una muestra de 10 manzanas de cada clase analizadas en un periodo aproximado de un mes. Las manzanas se eligieron de manera que sus características fueran similares. Nótese que las irregularidades de los frutos quedan de manifiesto en las ligeras variaciones del factor de forma q (véase la Fig. 3.3).

Tabla 4.- Frecuencias naturales correspondientes al modelo elipsoidal para manzana perteneciente a la variedad golden de la región de Chihuahua y del estado de Washington.

q	f ₁ (GC)	q	f ₁ (GW)
1.15	397.2044152	1.00	352.972538
1.15	398.7607351	1.00	354.325417
1.16	413.507836	1.00	363.788998
1.16	414.0370115	1.00	364.992106
1.16	414.5231705	1.00	365.615357
1.16	414.5348319	1.00	366.269573
1.16	417.2406033	1.00	367.470078
1.17	421.2586597	1.01	368.406168
1.17	421.5199101	1.01	372.402183
1.17	423.8203197	1.01	372.635809

Finalmente, en la tabla 5 se reporta la comparación de los resultados obtenidos en relación a la frecuencia dominante experimental presente y las diferentes frecuencias teóricas correspondientes a cada modelo analizado con anterioridad, con la intención de destacar los distintos beneficios, que en un futuro, podría aportar cada uno de ellos en su aplicación. En este caso el monitoreo se hizo con un fruto de manzana tipo golden alrededor de un mes. Las incertidumbres en los valores experimentales de las frecuencias es del orden de 19 Hz. La tabla proporciona una pauta para contrastar las predicciones de los distintos modelos analizados en esta tesis. Los valores predichos por los modelos se redondean al valor entero más próximo. En la tabla 6 se muestran los resultados del índice de firmeza, según la Ec. (3.17a), para el mismo fruto de la tabla 5. Las incertidumbres en los valores experimentales del índice de firmeza es del orden de $5413 \text{ Hz}^2 \text{ kg}^{2/3}$.

Tabla 5.- Frecuencias dominantes experimental (f_{exp}) y teóricas para la manzana Golden predichas por los distintos modelos para simular la respuesta acústica: Modelo de un oscilador (f_{1m}), modelo de tres osciladores acoplados (f_{3m}), modelo esferoidal (f_{esf}) y modelo elipsoidal (f_{elp}).

Día	f_{exp} (Hz)	f_{1m} (Hz)	f_{3m} (Hz)	f_{esf} (Hz)	f_{elp} (Hz)
0	508	510	500	516	517
6	430	424	435	438	439
13	391	380	386	399	400
20	352	360	346	359	361
27	313	305	310	320	322
31	313	300	305	319	320

Tabla 6.- Índice de firmeza experimental (S_{exp}) y teóricos para la manzana Golden predichas por los distintos modelos para simular la respuesta acústica: Modelo de un oscilador (S_{1m}), modelo de tres osciladores acoplados (S_{3m}), modelo esferoidal (S_{esf}) y modelo elipsoidal (S_{elp}).

Día	S_{exp} (Hz ² kg ^{2/3})	S_{1m} (Hz ² kg ^{2/3})	S_{3m} (Hz ² kg ^{2/3})	S_{esf} (Hz ² kg ^{2/3})	S_{elp} (Hz ² kg ^{2/3})
0	70504	71060	68301	73024	72742
6	49877	48494	51043	51986	51750
13	40490	38244	39461	42376	42164
20	32073	33548	30989	33734	33361
27	24808	23553	24331	26252	25927
31	24466	22476	23231	25573	25413

Capítulo 5

Conclusiones

El problema de la modelación de la respuesta acústica de frutos a un impacto acústico es un problema complejo debido a la variación de sus parámetros mecánicos con el tiempo. Aunado a esto, la geometría relativamente complicada en las formas de los frutos complica también el problema. Sin embargo, los modelos simples analizados en esta tesis, tanto en una dimensión como en tres dimensiones, han mostrado una buena concordancia con los resultados experimentales para algunos frutos. Los resultados obtenidos nos permiten concluir lo siguiente:

- ❖ El presente trabajo es un ejemplo palpable de las ventajas de la aplicación del diseño de experimentos basados en la metodología de la técnica del impacto acústico, en el cual un número relativamente bajo de pruebas físicas (medición de masas y frecuencias de resonancia) nos permite la cuantificación del índice de firmeza de frutos como factor de calidad.
- ❖ La aplicación de una metodología ya establecida, como es el caso de la técnica de impacto acústico, mejora enormemente la eficiencia de un estudio teórico, facilitando a su vez que el proceso de modelación se realice sobre bases más confiables.
- ❖ Los resultados obtenidos con los modelos unidimensionales mostraron buena concordancia con los resultados experimentales en el caso de frutos duros como la manzana. En el caso de frutos blandos y de

formas oblongas, como el tomate tipo Saladet, la concordancia con los valores experimentales no es aceptable en los últimos días de vida de anaquel. La consecuencia directa del rápido reblandecimiento induce una señal ruidosa cuyo espectro de Fourier no presenta frecuencias de resonancia bien definidas. Las limitaciones de estos modelos radica en que sólo frecuencias de resonancia se pueden predecir, pero los módulos de elasticidad del material son difíciles de obtener dados los problemas técnicos para medir con precisión los volúmenes.

- ❖ En el caso de los modelos esférico y elipsoidal, los resultados muestran también buena correspondencia con los resultados experimentales. La limitación de estos modelos se hace más evidente cuando las formas de los frutos se desvían fuertemente de estas geometrías. No obstante, la ventaja de los modelos 3D sobre los modelos 1D es que, en principio, se podría tener información acerca del módulo de elasticidad del material de una forma más directa (aunque esto no se hizo en este trabajo).
- ❖ Aún cuando el estudio se enfocó al caso de cierto tipo de frutos, los resultados experimentales presentados muestran el gran potencial de dicha técnica para implementarse en ciertas variedades que cumplan con el rango de aplicabilidad correspondiente, dada a la flexibilidad y adaptabilidad que se desprende de dicha técnica.
- ❖ Consideramos que los resultados preliminares obtenidos en esta tesis pueden extenderse en una investigación futura para disponer de un panorama más general y detallado sobre el tema. Por ejemplo, en el caso de los modelos en 1D sería interesante investigar más en detalle las curvas de tendencia de las frecuencias de resonancia y de las constantes de amortiguamiento para clases específicas de frutos.

Desde luego que esto debe hacerse aplicando un enfoque estadístico con muestras representativas de cada espécimen. Esto llevaría a una mejora sustancial de los modelos al momento de predecir los índices de firmeza de los frutos. En el caso de los modelos 3D, también con muestreos estadísticos apropiados, se podría disponer de una forma no destructiva para medir volúmenes de frutos con cierta precisión, sobre todo en aquellos frutos en donde una inmersión en líquidos no es apropiada.

Capítulo 6

Bibliografía

1. Abbott, J. A. 1999. Quality measurement of fruits and vegetables. *Post Harvest Biol. Tech.* **15**: 207-225.
2. Mohsenin, N.N. 1974, Mechanical Properties of fruits and vegetables. Review of a decade of research applications and future needs. *Trans. ASAE* **15**: 1064-1070.
3. Fekete, A. 1994. Elasticity characteristics of fruits. *Acta Hort.* **368**: 199-205.
4. Cooke, J. R. 1972. An interpretation of the resonant behavior of intact fruits and vegetables. *Trans. ASAE* **15**: 1075-1080.
5. Chen, P. 2000. Application of elastic theory to high-speed impact sensing of fruits. No publicado.
6. Duprat, F., Grotte, M., Pietri, E., and D. Loonis. 1997. The acoustic impulse response method for measuring the overall firmness of fruit. *J. Agric. Eng. Res.* **66**: 251-259.
7. Gan-Mor, S., and N. Galili. 2000. Rheological model of fruit collision with an elastic plate. *J. Agric. Eng. Res.* **75**: 139-147.
8. Aranda, J. I., Arroyo, G., and A. Baltasar. 2004. Técnicas de control de calidad no destructivas aplicadas a la industria agrícola. *Ciencia Nicolaita* **39**: 217-226.
9. G. Arroyo et al. 2005. Técnica de impacto para el estudio del índice de firmeza de manzanas. *Ciencia Nicolaita* **41**: 187-196.

10. Mizrach, A. 2000. Determination of avocado and mango fruit properties by ultrasonic technique. *Ultrasonics* **38**: 717-722.
11. Kimmel E., Peleg K. and Hinga S. 1992. Vibration modes of spheroidal fruits. *J. Agric. Eng. Res.* **52**: 201-213.
12. Chen H. and De Baerdemaeker J. 1995. Total least square technique for estimating the vibration parameters of the apple from the time domain response signal. *J. Agric. Eng. Res.* **61**: 283-290.
13. Cooke, J. R. and Rand R. H. 1973. A mathematical study of resonance in intact fruits and vegetables using a 3-media elastic sphere model. *J. Agric. Eng. Res.* **18**: 141 -157.
14. K. R. Symon, *Mecánica*. Ed. Aguilar, Madrid, 1974. Capítulos 2, 4, 9.
15. W. T. Thomson, *Theory of Vibrations with Applications*, Prentice-Hall International, Englewood Cliffs, NJ, 1993. Capítulos 1-5.
16. R. P. Feynman et al., *Física. Vol. II*, Fondo Educativo Interamericano, 1972. Capítulos 38 y 39.
17. L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Teoría de la Elasticidad*, Ed. Reverté, S.A., Barcelona, 1982. Capítulos I y III.
18. Ye, Z. 2000. On the Low Elastic Response of a Spherical Particle. *Chinese Jour. Phys.* **38**: 103-110.
19. K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Ed. Dover, 1991. pp. 400-409.
20. G. Arfken, *Métodos Matemáticos para Físicos*, Ed. Diana, S.A., México, 1981. Capítulos 2, 11 y 12.

21. Cherng, A. Ouyang, F., Blot, L., and R. Zwiiggelaar. 2005. An estimation of firmness for solid ellipsoidal fruits. *Biosyst. Eng.* **91**: 257-259.
22. G. Arroyo Correa et al. 2006. Modelando la Respuesta Acústica de Frutos. *Ciencia Nicolaita.* **44**:121-130.
23. M. C. Guillén-Gallegos et al. 2007. Modelo unidimensional de tres masas acopladas para estudiar la respuesta acústica de frutos. *Memorias del L Congreso Nacional de Física, Boca del Río, Ver. Trabajo 3MG01*, p. 194.
24. M. C. Guillén-Gallegos et al. 2006. Estudio comparativo de la firmeza de frutos con un modelo en 3D. *Memorias del XLIX Congreso Nacional de Física, San Luis Potosí, SLP. Trabajo 3MH03*, p. 37.

Apéndices

En los siguientes tres apéndices se muestran los programas de simulación empleados en el capítulo 4.

En el apéndice A se presenta el programa AnalisisFruto.nb que es un programa escrito en Mathematica 5.0 para obtener la información de los parámetros de ajuste, según el modelo unidimensional de la sección 2.3.

En el apéndice B se presenta el programa Sistema3M.m que es un programa escrito en Matlab 6.5 para obtener la información de las señales temporales de los modos de vibración y de sus espectros, según el modelo unidimensional de la sección 2.3.2.

En el apéndice C se presentan los programas ModosEsferoidales1y2.m y findraizBeta.m, programas escritos en Matlab 6.5, para obtener la información de las raíces del determinante, según el modelo esferoidal de la sección 3.3.1, necesarias para determinar las frecuencias de vibración.

APENDICE A

Ruta del directorio que contiene el folder con el programa AnalisisFruto.nb, de los archivos de las señales acústicas y de las masas del fruto. Esta ruta deberá modificarse apropiadamente según la ubicación del folder:

```
SetDirectory["C:\Documents and Settings\...\Claudia\Tesis"];
```

Definición de la función de ajuste:

```
formula=A Exp[-β t] Cos[ω t + φ];
```

Lectura de las señales acústicas y ajuste de los datos al modelo sugerido (golden0.txt,

golden6.txt,...,golden31.txt son las señales acústicas registradas en el día 0, 6, ...,30):

```
datos=Import["golden0.txt","Table"];
a1=FindFit[datos,formula,{A,φ,β,ω},t];
datos=Import["golden6.txt","Table"];
b1=FindFit[datos,formula,{A,φ,β,ω},t];
datos=Import["golden13.txt","Table"];
c1=FindFit[datos,formula,{A,φ,β,ω},t];
datos=Import["golden20.txt","Table"];
d1=FindFit[datos,formula,{A,φ,β,ω},t];
datos=Import["golden27.txt","Table"];
e1=FindFit[datos,formula,{A,φ,β,ω},t];
datos=Import["golden30.txt","Table"];
f1=FindFit[datos,formula,{A,φ,β,ω},t];
```

Despliegue en forma tabular de los parámetros de ajuste para una visualización previa:

```
TableForm[{{FECHA,{{A,φ,β,ω}},{septiembre0,a1},{septiembre6,b1},
{septiembre13,c1},{septiembre20,d1},{septiembre27,e1},{septiembre30,f1}}]
```

Definición de los parámetros de ajuste como un arreglo de datos:

```
datos={a1,b1,c1,d1,e1,f1};
```

Lectura de las masas del fruto y calculo del factor $m^{2/3}$:

```
mGolden=Import["masasG.txt","List"];
mG=({%[[1]], %[[2]], %[[3]], %[[4]], %[[5]], %[[6]]})2/3
```

Análisis de los datos del fruto:

Parámetro β (coeficiente de amortiguamiento), su evolución temporal ajustada a un modelo lineal y despliegue gráfico del resultado:

```
funcionβ=A t+B;
```

```
β/.datos;
```

```
datosβ={{0,%[[1]]},{6,%[[2]]},{13,%[[3]]},{20,%[[4]]},{27,%[[5]]},{30,%[[6]]}};
```

```
ajusteβ=FindFit[datosβ,funcionβ,{A,B},t];
```

```
Show[ListPlot[datosβ,PlotRange→All,PlotStyle->{Hue[.7],PointSize[.02]},
```

```
Frame→True,FrameLabel→{"t (Días)", "β (s-1)"},RotateLabel→True,
```

```
PlotLabel→"Coeficiente de Amortiguamiento",
```

```

TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12}, GridLines→Automatic,
AxesStyle→{RGBColor[0.5,.5,.5],Thickness[0.006]}, Plot[A t + B/.ajusteβ, {t,0,30},
PlotRange→All, PlotStyle→{Hue[.7], PointSize[.02]}, Frame→True, FrameLabel→{"t
(Días)", "β (s-1)"}, RotateLabel→True, PlotLabel→"Coeficiente de Amortiguamiento",
TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12}, GridLines→Automatic,
AxesStyle→{RGBColor[0.5,.5,.5], Thickness[0.006]}}];

```

Parámetro ω (frecuencia angular de vibración). Cálculo del índice de firmeza S_c , su evolución temporal ajustada a un modelo exponencial y despliegue grafico del resultado:

```

funcionω=A Exp[-B*t];
ω/.datos;
Sc=({%[[1]], %[[2]], %[[3]], %[[4]], %[[5]], %[[6]]}/2/π)2*mG;
datosω={{0,%[[1]]},{6,%[[2]]},{13,%[[3]]},{20,%[[4]]},{27,%[[5]]},{30,%[[6]]}};
ajusteω=FindFit[datosω, funcionω, {A,B}, t];
Show[Plot[A Exp[-B*t]/.ajusteω, {t,0,30}, Frame→True, FrameLabel→{"t (Días)", "Sc
(kg2/3 Hz2)"}, RotateLabel→True, PlotLabel→"Indice de
Firmeza",TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12}, GridLines→Automatic,
AxesStyle→{RGBColor[0.5,.5,.5], Thickness[0.006]}, ListPlot[Plot[ A*Exp[-
B*t]/.ajusteω, {t,0,30}, PlotRange→All, PlotStyle→{Hue[.7], PointSize[.02]},
Frame→True, FrameLabel→{"t (Días)", "Sc (kg2/3 Hz2)"}, RotateLabel→True,
PlotLabel→"Indice de Firmeza",TextStyle→{FontFamily→"Times", FontSize→12},
GridLines→Automatic, AxesStyle→{RGBColor[0.5,.5,.5],Thickness[0.006]}}];

```

APENDICE B

```

clear, clf
%Datos manzana, artículo Kimmel et al.
%M1 = .139; M2 = .21; M3 = .139;
%K1 = 1.55e+05; K2 = 5e+05; K3 = 5e+05;
%B1 = 33.; B2=1.; B3 =1.;
%Datos naranja, artículo Kimmel et al.

```



```
%M1 = .066; M2 = .236; M3 = .066;
%K1 = 1.39e+05; K2 = 1.18e+05; K3 = 1.18e+05;
%B1 = 4.5; B2=0.0; B3 =9.0;
```

```
%Se definen los datos de entrada de los conjuntos de datos anteriores, o
%según el fruto en particular de que se trate
```

```
M1 = .139; M2 = .21; M3 = .139;
K1 = 1.55e+05; K2 = 5e+05; K3 = 5e+05;
B1 = 33.; B2=1.; B3 =1.;
```

```
%En la matriz F se definen las componentes de las fuerzas externas
%aplicadas a cada masa. En el vector y(:,1) se definen las condiciones iniciales: los
%tres primeros elementos definen las amplitudes de oscilación asociadas con
%cada modo de vibración. h es el paso en tiempo. La ecuación matricial a resolver tiene
la forma:  $dy/dt = Cy + F$ .
```

```
F1 = 0.0; F2 = 0.0; F3 = 0.0; F = [0, 0, 0, F1/M1, F1/M2, F3/M3]';
y(:,1)= [0.001; 0.00124; 0.00133; 0.; 0.; 0.0]; t(1) = 0; n = 1;
h = 0.0001;
C = [0, 0, 0, 1, 0, 0; ...
0, 0, 0, 0, 1, 0; ...
0, 0, 0, 0, 0, 1; ...
-(K1+K2)/M1, K2/M1, 0, -(B1+B2)/M1, B2/M1, 0; ...
K2/M2,-(K2+K3)/M2,K3/M2, B2/M2, -(B2+B3)/M2, B3/M2; ...
0, K3/M3, -K3/M3, 0, B3/M3, -B3/M3];
```

```
%Se resuelven las ecuaciones de movimiento hasta un tiempo de 25 ms,
%usando un esquema de Runge-Kutta de orden 4.
```

```
while t<=0.025
    k1 = h*F3m(y(:,n),C, F);
    k2 = h*F3m(y(:,n)+k1/2, C, F);
    k3 = h*F3m(y(:,n)+k2/2, C, F);
    k4 = h*F3m(y(:,n)+k3, C, F);
    y(:, n+1) = y(:, n)+ (1/6)* (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);
    t(n+1) = n*h;
    n=n+1;
```

end

%Se inicia el despliegue gráfico de las señales temporales de los modos
%normales de vibración.

fig=figure(1);

set(fig,'Position',[200, 410, 600, 285], ...

'NumberTitle','off','Name', 'Desplazamientos');

plot(t,y(1:3,:));

ley=legend('y1','y2','y3',0);

legend(ley,'boxoff');

title('Señales temporales');

xlabel('tiempo (seg)');

ylabel('Amplitud (m)');

axis tight

%Se calculan los espectros de Fourier de cada señal temporal usando 1024
%puntos.

TF1 = fft(y(1,:),1024);

Pyy1 = TF1.* conj(TF1) / 1024;

TF2 = fft(y(2,:),1024);

Pyy2 = TF2.* conj(TF2) / 1024;

TF3 = fft(y(3,:),1024);

Pyy3 = TF3.* conj(TF3) / 1024;

%(razón de muestro (Hz)/ número de puntos de la FFT) da la escala de
%frecuencia correcta.

f = 10000*(0:512)/1024;

FrecMax1=0.0; TF1YMax=0.0;FrecMax2=0.0; TF2YMax=0.0;FrecMax3=0.0;

TF3YMax=0.0;

%Se localiza la frecuencia máxima para su despliegue en la ventana del gráfico
%correspondiente.

for i=1:512

if (Pyy1(i)>= TF1YMax)

TF1YMax=Pyy1(i);

FrecMax1=f(i);

```

end
if (Pyy2(i)>= TF2YMax)
    TF2YMax=Pyy2(i);
    FrecMax2=f(i);
end
if (Pyy3(i)>= TF3YMax)
    TF3YMax=Pyy3(i);
    FrecMax3=f(i);
end
end
end

```

```

F1max=FrecMax1;
Y1max=TF1YMax;
F2max=FrecMax2;
Y2max=TF2YMax;
F3max=FrecMax3;
Y3max=TF3YMax;
YMax=max(max(Y1max,Y2max),Y3max);

```

%Se inicia el despliegue gráfico de los espectros de Fourier de las señales
%temporales de los modos normales de vibración.

```

ffty=figure(2);
set(ffty,'Position',[200, 40, 600, 285], ...
    'NumberTitle','off','Name', 'Espectros');
plot(f(1:129),Pyy1(1:129),f(1:129),Pyy2(1:129),f(1:129),Pyy3(1:129));
ley=legend('TFy1','TFy2','TFy3',0);
legend(ley,'boxoff');
text(500, 0.3*YMax, ['Fpico = ', num2str(F1max)], 'Color', [0 0 1],
'HorizontalAlignment', 'center');
text(500, 0.2*YMax, ['Fpico = ', num2str(F2max)], 'Color', [0 1 0],
'HorizontalAlignment', 'center');
text(500, 0.1*YMax, ['Fpico = ', num2str(F3max)], 'Color', [1 0 0],
'HorizontalAlignment', 'center');
title('Espectros de Frecuencia');
xlabel('frecuencia (Hz)');

```

```
ylabel('Amplitud (UA)');
```

```
axis tight
```

APENDICE C

```
%En este programa se calculan las raíces beta del determinante exacto M,  
%variando el valor de n, que aquí se denota por x. También se obtienen las  
%gráficas del determinante para cada valor de n. Las dos primeras raíces  
%para cada n se escriben en el archivo de datos ModosEsferoidales1y2.dat.  
%El programa usa la subrutina findzraizBeta(x0,n,v) para encontrar las raíces.
```

```
clear
```

```
fid = fopen(' ModosEsferoidales1y2.dat','w');
```

```
i=0;
```

```
for i=2:5
```

```
  n=i
```

```
  v=0.301575; %(Valor de la razón de Poisson)
```

```
  x=2:.1:11;
```

```
  al=(((1-(2*v))/(2-(2*v)))^0.5).*x;
```

```
  an=((-1)^(n)).*(al.^(-n-2))/((2*n)+1)).*((x.^2).*((pi./(2.*al)).^0.5))...
```

```
    .*besselj(n+0.5,al)-(2.*(n-1).*al.*((pi./(2.*al)).^0.5)).*besselj(n-0.5,al));
```

```
  bn=((-1)^(n+1)).*(al.^(-n))/((2*n)+1)).*((x.^2./al.^2).*((pi./(2.*al)).^0.5))...
```

```
    .*besselj(n+0.5,al)-(((2*(n+2))./al).*((pi./(2.*al)).^0.5)).*besselj(n+1.5,al));
```

```
  cn=((-1)^(n))./x.^n).*((x.^2).*((pi./(2.*x)).^0.5))...
```

```
    .*besselj(n+0.5,x)-((2*(n-1).*x.*((pi./(2.*x)).^0.5)).*besselj(n-0.5,x));
```

```
  dn=((-1)^(n))./x.^n).*(n/(n+1)).*((x.^2).*((pi./(2.*x)).^0.5))...
```

```
    .*besselj(n+0.5,x)-(2*(n+2).*x.*((pi./(2.*x)).^0.5)).*besselj(n+1.5,x));
```

```
  s=an.*dn-bn.*cn;
```

```
%Se inicia el despliegue gráfico.
```

```
figure(n)
```

```
plot(x,s,'r')
```

```
grid on
```

```
x00=n+1;
```

```
x0=[x00];        % Dar un valor cercano a la primera raíz.
```

```

[x1]=findzraizBeta(x0,n,v) % Llamar a la subrutina findzraizBeta.
x001=n
x01=[x0+x001]; % Dar un valor cercano a la segunda raíz.
[x2]=findzraizBeta(x01,n,v) % Llamar a la subrutina findzraizBeta.
fprintf(fid,'%12.6f %12.6f %12.6f\n',n,x1,x2);
end
fclose (fid)

```

%Subrutina **findzraizBeta**.

```

function [n]=findzraizBeta(x0,n,v)
options=optimset();
[x,fval] = fsolve(@mifuncion,x0,options); % Call optimize
n=x(1);
function F = mifuncion(x)
    al=(((1-(2*v))/(2-(2*v)))^0.5).*x;
F=((((-1/2).*(x(1).^2)).*((2*(n^2))-n-1-((1/2).*(x(1).^2)))).*(((pi./(2.*al)).^0.5))...
.*besselj(n+0.5,al).*(((pi./(2.*x(1))).^0.5)).*besselj(n+0.5,x(1))+...
(((n^3)+ (2*(n^2))-n-2-(x(1).^2)).*al.*(((pi./(2.*al)).^0.5))...
.*besselj(n+1.5,al).*(((pi./(2.*x(1))).^0.5)).*besselj(n+0.5,x(1))+...
(((n^3)+ (n^2)-(2*n)-((1/2).*(x(1).^2))).*x(1).*(((pi./(2.*al)).^0.5))...
.*besselj(n+0.5,al).*(((pi./(2.*x(1))).^0.5)).*besselj(n+1.5,x(1))+...
(((2-(n^2)-n)).*al.*x(1).*(((pi./(2.*al)).^0.5))...
.*besselj(n+1.5,al).*(((pi./(2.*x(1))).^0.5)).*besselj(n+1.5,x(1)));
end
end

```