



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

TESIS

**“PROBLEMA DE ESTABILIZACIÓN EN TIEMPO FINITO DE
SISTEMAS NO LINEALES”**

Para obtener el título de Licenciado en ciencias fisicomatemáticas

Por: Iván Pavlovich Naumkin Kaikin

Asesor: Dr. Abdón Eddy Choque Rivero

Diciembre 2008

Índice general

1. Introducción.	1
2. Estabilidad	9
2.1. Estabilidad asintótica según Lyapunov.	10
2.2. Teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov.	12
2.3. Teorema de Krasovsky-Barbashin.	13
3. Estabilización de sistemas controlables.	17
3.1. Función de control de Lyapunov.	18
4. Estabilización en tiempo finito	21
4.1. Teorema fundamental de Korobov.	22
4.2. Construcción de función de controlabilidad	24
5. Estabilización de sistemas no linealizables	35
5.1. Construcción del control y la función de controlabilidad. . . .	37
A. Condición suficiente de controlabilidad	55

Capítulo 1

Introducción.

El objetivo central de la Teoría del Control es proporcionar estrategias para conducir el proceso que nos ocupe a un objetivo deseado y/o prescrito. Tareas tales como la colocación de un satélite en la órbita adecuada, la reducción del ruido en los vehículos de transporte o la estabilización de estructuras, son problemas propios de la Teoría del Control. Tanto si adoptamos un punto de vista frecuencial como si optamos por modelizar el fenómeno en cuestión a través de ecuaciones diferenciales, la cuestión acaba siendo por tanto conducir el estado, la variable que nos interesa, al objetivo prefijado mediante la elección de un mecanismo de control adecuado.

Para todos nosotros la palabra “control” implica “actuación”. Es verdad también que, a veces, en nuestra sociedad, la palabra “control” puede ser percibida con un matiz un tanto negativo, en la medida en que puede asociarse a “falta de libertad”. Pero no es éste el sentido en el que ha de entenderse en el contexto de la Teoría del Control. En este caso la palabra “control” refleja el esfuerzo humano para intervenir en el medio que le rodea con vistas a garantizar su supervivencia y una permanente mejora en la calidad de vida.

Como ocurre en muchas disciplinas, ésta, la Teoría del Control, existía desde mucho antes de que se le pusiera nombre. En efecto, en el mundo de lo viviente, los organismos están dotados de mecanismos de regulación que garantizan el mantenimiento de las variables esenciales. La esencia de la Teoría del Control está inspirada en algunas nociones que a todos nos resultan familiares. Una de ellas es la de “feedback”. Este término se incorporó a lo que hoy conocemos como Teoría del Control en los años 20 por los ingenieros del “Bell Telephone Laboratory”. La traducción del término “feedback” al castellano produce palabras mucho más largas tales como “realimentación”

o “retroalimentación”. Pero, como decíamos, este término se adopta en los años 20 para la Teoría del Control pero no se acuña en esta disciplina. Se trataba de un concepto ya consolidado en otras áreas tales como la Economía Política. Tal y como se menciona en 1907 en [1], por ejemplo, es un hecho curioso que, mientras que los economistas políticos reconocen que para un correcto funcionamiento de la ley de la oferta y la demanda ha de haber fluctuaciones, ésto no ha sido reconocido por los mecánicos en relación a la máquina de vapor. El objetivo de los economistas no es suprimir estas fluctuaciones completamente sino disminuirlas lo más posible, permitiéndoles que sean lo bastante grandes como para mantener suficiente poder regulador.

La estabilidad de un sistema dinámico es un concepto de suma importancia en el estudio del sistema ya que provee ciertas restricciones para poder hacer simplificaciones a la hora de dar la descripción matemática de un fenómeno. A principios de siglo XX los métodos usuales de estudio de estabilidad no eran lo suficientemente buenos, ya que los errores debidos a la linealización hacían de ellos una aproximación no muy válida. Para salvar estas dificultades, el matemático ruso Aleksandr Mikhailovich Lyapunov desarrolló su propio concepto de estabilidad, además de dar teoremas generales de estabilidad basados en encontrar una función de Lyapunov. También ideó métodos importantes de aproximación que proveen formas de determinar la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Este ejemplo desvela un principio que es válido en muchos aspectos de la vida diaria, como cuando, yendo a velocidad alta, deseamos frenar un vehículo, no lo haremos de una sola vez sino que el frenado habrá de ejercerse de manera intermitente para no perder el control del vehículo. En el ámbito de las relaciones humanas no cabe tampoco ninguna duda que insistir continuada y permanentemente sobre lo mismo no es necesariamente la mejor manera de convencer a nadie de nada. En el control de sistemas ocurre exactamente lo mismo. De alguna manera, hemos de renunciar a la regla básica que todos hemos aceptado y hasta considerado obvia en nuestra concepción euclídeana del universo y asumir que, en la práctica, “la distancia más corta entre dos puntos no es necesariamente la línea recta”. Para adentrarnos en la teoría del control hemos pues de aceptar que, para controlar los sistemas que surgen en la naturaleza o en el desarrollo tecnológico, frecuentemente muy complejos y con un gran número de parámetros, no se trata simplemente de forzar el sistema para conducirlo de manera monótona e ininterrumpida al objetivo buscado sino que, a menudo, hemos primero de alejarnos del objetivo buscado en armonía con el sistema para después alcanzar el objetivo con

un esfuerzo adecuado pero no excesivo.

Otra de las nociones que subyace en todo lo que hoy puede considerarse parte del ámbito de la Teoría del Control es la de “optimización”. La optimización es una técnica que tiene como objetivo aumentar o mejorar el valor de una variable que, en la práctica, puede tomar las formas más variadas: temperatura, flujo de aire, velocidad, rentabilidad, beneficio, información, capacidad de destrucción, etc. Las técnicas de optimización son tan variadas que resulta imposible hacer una presentación global y unificada de todas ellas. Por otra parte, la tecnología informática y de la computación han jugado un papel crítico en las aplicaciones de las técnicas de optimización, tal y como ocurre en el control óptimo de cohetes y proyectiles. En efecto, en vista de la complejidad de los sistemas a los que la Teoría del Control ha de hacer en la actualidad, es imposible realizar una implementación eficiente de los métodos de control, sin previamente realizar un riguroso trabajo de simulación numérica.

James Watt adaptó los mecanismos para la regulación de la velocidad en los molinos de viento, a la máquina de vapor, dando así un enorme impulso a la revolución industrial. En este caso, a medida que la velocidad de las bolas aumentaba, las válvulas se abrían, dejando escapar el vapor. Al disminuir la presión de la caldera, la velocidad disminuía. El problema que se planteó fue entonces el de mantener constante la velocidad de la máquina. El astrónomo inglés Georges Airy fue el primero en intentar realizar un análisis del regulador de bolas de Watt. Pero fue sólo en 1868 que el físico escocés James Clerk Maxwell realizó el primer análisis matemático convincente de la máquina de vapor, explicó algunos de los comportamientos un tanto erráticos que se observaban en las máquinas de entonces y propuso diversos mecanismos de control.

A partir de 1960 todo lo que acabamos de describir comenzó a conocerse como la Teoría del Control “clásica”. En la década de los 60 comienza una nueva era en la que se pretende hacer frente a algo que se había puesto de manifiesto durante la guerra: los modelos utilizados hasta ese momento eran inadecuados para representar la complejidad del mundo real puesto que los sistemas reales son no-lineales y están sujetos frecuentemente a perturbaciones ruidosas, no deterministas. Las contribuciones de R. Bellman [4] (programación dinámica), de R. Kalman [5] (filtrado y análisis algebraico de problemas de control) en los Estados Unidos y de L. Pontryagin [2] (Principio del Máximo en el control óptimo no-lineal) en la Unión Soviética establecieron los pilares fundamentales de la investigación en Teoría del Control de las úl-

timas décadas. Hemos comentado aquí los orígenes y algunos hitos históricos de la Teoría del Control que justifican plenamente su reconocimiento como disciplina con nombre propio y su denominación de Ingeniería del Control. Pero cualquier persona familiarizada con las Matemáticas habrá adivinado entre líneas que éstas también han sido protagonistas de excepción de esta historia. En efecto, tal y como mencionábamos anteriormente, a finales de los años 30 ya se adivinaban dos modos de abordar los problemas de control. Uno, pasaba por la utilización de las ecuaciones diferenciales y, por lo tanto, los desarrollos matemáticos notables que se habían producido en este terreno en los siglos XVIII y XIX de la mano de los científicos más célebres de la historia jugaban un papel central. El otro, basado en el análisis frecuencial, sería impensable sin la utilización de las técnicas desarrolladas por el genial matemático francés Joseph Fourier. De ahí que la Teoría del Control permita dos interpretaciones: una desde el punto de vista de la Ingeniería y otra más Matemática.

Hay muchas aplicaciones de la Teoría de Control tanto en la vida diaria como en los procesos tecnológicos e industriales más sofisticados. Algunas son tan simples como el mecanismo de funcionamiento de la cisterna de nuestro cuarto de baño. Son muchas las variantes, pero todas ellas funcionan sobre los mismos principios básicos. Lo que es más sorprendente es que en un mecanismo tan simple y cotidiano encontremos ya algunos de los elementos básicos de todos los procesos de control. Efectivamente, la cisterna está dotada de válvulas reguladoras, de mecanismos que desencadenan el proceso de control, de mecanismos de feedback que en función del nivel de agua captado por los sensores suministra más o menos agua al depósito y mecanismos que, en caso de algún fallo en el proceso, eviten las siempre tan desagradables inundaciones.

Los sistemas de calefacción, ventilación y de aire acondicionado en los grandes edificios son procesos a gran escala consistentes en la interconexión de subsistemas termo-fluidos y electromecánicos. El objetivo de estos sistemas en los grandes centros comerciales es mantener un ambiente confortable en su interior y una buena calidad del aire para sus ocupantes en cualquier circunstancia, con un costo operacional bajo y con una alta fiabilidad. La importancia de estos sistemas de control es evidente tanto desde el punto de vista del impacto en la economía y el medio ambiente, como en la salud de sus ocupantes.

Antes de diseñar un sistema de control para un proceso es imprescindible entender como funciona. Estos edificios están dotados de una planta central

que proporciona aire o agua caliente a diversas unidades periféricas. Estas a su vez proporcionan aire acondicionado en distintas zonas de características y tamaños diversos. Frecuentemente, paredes y muros separan a las distintas zonas y en algunas de ellas, incluso en invierno, a causa de sus condiciones de aislamiento y por la gran presencia de público es imprescindible proceder a su enfriamiento. Todo esto hace que el sistema en su globalidad sea sumamente complejo y dotado de diversos mecanismos que incluyen sensores, actuadores, intercambiadores, etc. Podemos pensar que se trata de una cisterna muy compleja y evolucionada. Hemos hablado aquí de los sistemas de calefacción y refrigeración de grandes edificios. No hemos de olvidar a su antecesor: el termostato, que regula la temperatura en casa. Ni que decir tiene que todos estos sistemas son sumamente importantes tanto en lo que respecta al ahorro energético, el respeto al medio ambiente y a la salud de sus habitantes. Sería innumerable la lista de ámbitos industriales en los que la Teoría del Control interviene de manera decisiva. Cabe por ejemplo mencionar el control del pH en las reacciones químicas, la industria papelera, la industria automovilística, seguridad nuclear, defensa, etc. Por ejemplo, en el caso de la producción de papel, se trata de un proceso a gran escala, fuertemente no lineal y estocástico y dominado por los efectos de retardo. No se trata de un sistema lineal, invariante en el tiempo, sino más bien de un sistema caótico.

El control del caos es un tema de gran actualidad. Los puntos de vista son a veces duales o incluso contrapuestos. La naturaleza caótica de un sistema puede ser un serio obstáculo para su control pero también puede convertirse en un aliado. Por ejemplo, las impresionantes piruetas a las que estamos acostumbrados en las trayectorias de aviones de combate, están basadas en el control a lo largo de trayectorias inestables. Es sin duda sumamente difícil controlar un vehículo de este tipo. Pero las posibilidades que se le presentan a un piloto experto son muy diversas e insospechadas. Precisamente en el campo de la aeronáutica, el control de la turbulencia juega un papel fundamental. Se puede consultar [16] para una descripción del estado del arte en las técnicas de control activo en este ámbito.

Hablando de los vehículos de uso común, el control de mecanismos de automoción se encuentra frecuentemente ante requerimientos diversos que, a veces, pueden entrar en conflicto. Se trata de optimizar el consumo de combustible, proporcionando a su vez rendimientos cada vez más altos y de modo que los vehículos sean fáciles de manejar y seguros. Una de las mayores diferencias entre el automóvil de nuestros días en relación a los existentes hace dos o tres décadas reside precisamente en los mecanismos digitales de

control basados en el uso de microprocesadores que hoy incorporan. En este ámbito cabe, por ejemplo, mencionar los mecanismos antibloqueo de los que frenos están hoy en día dotados. Lo mismo puede decirse de los aviones. Sin embargo, en este último caso, también son necesarios los mecanismos de control para controlar su posición y trayectoria.

Las estaciones espaciales que incorporan plataformas, reflectores ópticos de grandes dimensiones, sistemas de comunicación mediante satélites, etc. son ejemplos aún más sofisticados pero que van a ser cada vez más frecuentes y relevantes. El control de robots, desde los más simples, hasta los bípedos que reproducen la capacidad locomotriz del ser humano es otro de los temas que atrae buena parte de la atención de la Teoría del Control que se desarrolla en nuestros días.

Otro de los mecanismos que se ha convertido en un habitual de nuestros hogares es el de los lectores de discos compactos. Este elemento indispensable de nuestra cadena de música es un mecanismo óptico de descodificación que reproduce una señal acústica de alta fidelidad a partir de una señal codificada grabada en un conducto espiral implantado en el disco. En estos dispositivos uno de los retos más importantes es obtener mayores velocidades de rotación que permitan una lectura más rápida pero sin que eso afecte a la estabilidad del disco. Los mecanismos de control propios de estos dispositivos han de ser aún mucho más robustos cuando se trata de equipos portátiles.

Seguimos hablando de sistemas sofisticados. Pero si observamos el funcionamiento del mecanismo de apertura y cierre de la puerta de un garaje, veremos que, también ahí, la Teoría del Control está presente.

Las redes de generación y suministro eléctrico son sin duda alguna otra de las aplicaciones más comunes de la Teoría del Control y que más afectan nuestra vida cotidiana.

Antes hemos mencionado alguno de los ámbitos de aplicación de la Teoría del Control que puede ser importante para la salud del ser humano. A este respecto no cabe olvidar las crecientes aplicaciones en la medicina actual que van desde los corazones artificiales o los mecanismos de suministro de insulina.

Como se sabe (ver [2]), al resolver problemas de control óptimo con la ayuda del principio de máximo de Pontryagin, se construye una función $H(\varphi, x, t, u)$, que es mejor conocida como el Hamiltoniano del sistema. Al resolver ese problema se usan también métodos, basados en la construcción de otro tipo de funciones, funciones de Bellman (ver [3]). Para estudiar la estabilidad de dicha solución se utiliza la función de Lyapunov (ver [4]).

Nosotros trataremos al problema de síntesis para algunos sistemas no lineales usando una cierta función $\Theta(x)$, introducida por Korobov, que se llama función de controlabilidad. En ciertos casos, $\Theta(x)$ coincide con la función de Lyapunov.

Se tratará el problema de síntesis para un conjunto de sistemas no lineales que no se puede estudiar, resolviendo el problema de síntesis para la parte lineal. Se construirá la función de controlabilidad, así como el control posicional, acotado que controla dicho conjunto de sistemas.

En el primer capítulo se presenta la teoría de estabilidad, así como la estabilidad asintótica según Lyapunov y además se presentan teoremas que garantizan que cierto sistema es estable o no. Además se presentan teoremas con condiciones un tanto más relajados de estabilidad e inestabilidad asintótica.

En el capítulo dos se aborda el problema sobre la estabilización de un sistema controlable, se introduce la función de control de Lyapunov. Mediante la función de control de Lyapunov (ver definición 12) es posible construir el control que estabiliza un sistema dado.

En el capítulo tres se estudia un método de solución de estabilización en tiempo finito, o problema de síntesis, en este capítulo se construye una función del tipo de Lyapunov y un control posicional, los cuales bajo ciertas condiciones solucionan el problema de síntesis o estabilidad en tiempo finito. Este problema tiene el siguiente planteamiento:

Sea dado un sistema de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in M,$$

donde x es un vector de dimension n , u es de dimensión r y M es un subconjunto cerrado del espacio de dimensión r , se busca encontrar un control u de la forma $u = u(x)$, que toma valores en M , tal que la trayectoria del sistema

$$\dot{x} = f(x, u(x)),$$

que comienza en un punto x_0 , acabe en un punto dado x_1 en tiempo T finito. Se discute la solución dicho problema para ciertos sistemas no lineales.

En el capítulo cuatro se resuelve el problema de estabilización en tiempo finito para un conjunto de sistemas no lineales, los cuales no se pueden linealizar. Se extiende el método de la función de controlabilidad para los sistemas mencionados. De acuerdo con nuestros conocimientos, esta extensión es original. Finalmente se resuelve un ejemplo particular, se presentan gráficas para la trayectoria del sistema, el control y la función de controlabilidad.

Capítulo 2

Estabilidad

Para poder dar una descripción matemática para cualquier fenómeno es inevitable hacer simplificaciones, tomando en cuenta solo los factores más influyentes y despreciando los demás, no tan importantes. Pero, obviamente, surge la duda de que si la simplificación que se hizo, fue la correcta. Puede ser, que los factores que se despreciaron afectan al sistema, modificando de manera considerable sus características cualitativas o cuantitativas. A fin de cuenta, ese problema se resuelve practicamente, comparando la conclusión analítica, con los datos experimentales, pero en muchos casos se pueden dar condiciones, bajo las cuales, ciertas simplificaciones son imposibles.

Si un sistema es decrito por un cierto sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde $\Phi_i \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$, con condiciones iniciales $y_i(t_0) = y_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), las cuales se obtienen de una medición y, por ello tienen un grado de error, entonces surge la pregunta de que tanto afecta a la solución de nuestro sistema ese error.

Si resulta que un error muy insignificante en nuestras mediciones, es capaz de alterar de manera considerable la solución, entonces la solución, determinada por las condiciones con error, comunmente no tiene ninguna aplicación y hasta de manera aproximada no puede describir el fenómeno.

Entonces surge una pregunta, importante para la aplicación, de poder encontrar condiciones, para las cuales la suficientemente pequeña alteracion de condiciones iniciales provoca una alteración como se quiera pequeña en la solución. Esta pregunta, cuando el tiempo puede tomar valores como sea

grandes, la resuelve la teoría de estabilidad.

2.1. Estabilidad asintótica según Lyapunov.

Consideramos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.1)$$

donde $\Phi_i \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$.

Definición 1 La solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (2.1) se llama **estable** en el sentido de Lyapunov si para cualquier número $\varepsilon > 0$ se puede encontrar $\delta > 0$ tal que para cualquier solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del mismo sistema, las condiciones iniciales del cual satisfacen las desigualdades

$$|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

entonces para cualquier $t \geq t_0$ se cumplen las desigualdades

$$|y_i(t) - \phi_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2)$$

es decir, las soluciones cercanas para condiciones iniciales permanecen cercanas para valores de $t \geq t_0$. Si la solución no es estable, se dice que es **inestable**.

Definición 2 Si la solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) además de ser estable cumple la condición

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \phi_i(t)| = 0,$$

si $|y_i(t_0) - \phi_i(t_0)| < \delta_1$, $\delta_1 > 0$, entonces la solución $\phi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se llama **asintóticamente estable**.

Ejemplo 3 Verificar la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y, \quad a \neq 0,$$

con la condición inicial $y(t_0) = y_0$. La solución

$$y = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

es asintóticamente estable, ya que

$$\left| y_0 e^{-a^2(t-t_0)} - \bar{y}_0 e^{-a^2(t-t_0)} \right| = e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

para $t \geq t_0$, si $|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon e^{-a^2 t_0}$ y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| = 0.$$

Ejemplo 4 Verificar la estabilidad de la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y, \quad a \neq 0,$$

con la condición inicial $y(t_0) = y_0$. La solución

$$y = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$$

no es estable, ya que no se puede escoger un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tal que de $|y_0 - \bar{y}_0| < \delta$ se siga que

$$\left| y_0 e^{a^2(t-t_0)} - \bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)} \right| < \varepsilon$$

o que

$$e^{a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

para todos $t \geq t_0$.

Notamos que el estudio sobre estabilidad de una cierta solución

$$y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

del sistema (2.1) puede ser llevado al estudio sobre la estabilidad de la solución trivial, que se encuentra en el origen. Esto se puede lograr haciendo el cambio de variable

$$x_i = y_i - \bar{y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.3)$$

Las nuevas funciones desconocidas x_i resultan ser desviaciones $y_i - \bar{y}_i$ de la misma función desconocida, de la función $\bar{y}_i$, que define la solución que queremos estudiar.

Debido a (2.3) en las nuevas variables el sistema (2.1) se transforma en

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), \dots, x_n + \bar{y}_n(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.4)$$

Es claro que a la solución $y_i = \bar{y}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (2.1), que queremos estudiar, le corresponde, debido a la transformación (2.3), la solución trivial $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (2.4). El estudio de estabilidad de la solución del sistema (2.1) puede ser sustituido por un análisis de la solución trivial del sistema (2.4).

2.2. Teorema de estabilidad asintótica de Lyapunov.

El método de Lyapunov consiste en encontrar una función que cumple con ciertas condiciones y que garantiza la estabilidad de la solución del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Dicho método resulta bastante general para estudiar la estabilidad de una solución y se conoce como el segundo método de Lyapunov.

Cabe mencionar que el primer método de Lyapunov consiste en estudiar la parte lineal del sistema, es decir encontrando los valores propios de la matriz del sistema, pero este método resulta incapaz de estudiar sistemas, que tienen valores propios con parte real igual a cero, por ello este método no resulta útil en este trabajo.

Teorema 5 (*Teorema de estabilidad de Lyapunov*). Si existe una función diferenciable $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, llamada la función de Lyapunov, que satisface en cierta vecindad del origen las siguientes condiciones:

- 1) $V(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$, además $v = 0$ solo cuando $x_i = 0$ para toda i ;
- 2) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, \dots, x_n) \leq 0$ para $t \geq t_0$,

entonces el punto $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es estable.

Si aparte de estas dos condiciones pedimos que afuera de una vecindad como sea pequeña del origen, es decir cuando

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \delta_i^2 > 0, \quad t \geq T_0 \geq t_0,$$

la derivada $\frac{dV}{dt} \leq -\beta < 0$, donde $\beta = \text{const}$, entonces la estabilidad es asintótica.

Ejemplo 6 *Estudiemos la estabilidad de la solución trivial del sistema*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - x^3 \\ \frac{dy}{dt} = x - y^3 \end{cases}$$

La función $V(x, y) = x^2 + y^2$ satisface las condiciones del teorema de Lyapunov de la estabilidad asintótica:

- 1) $V(x, y) \geq 0$ para cualquier (x, y) y $V(0, 0) = 0$;
- 2) $\frac{dV}{dt} = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$.

Fuera de una vecindad del origen, $\frac{dV}{dt} \leq -\beta < 0$. Por lo tanto la solución trivial del sistema es asintóticamente estable.

El teorema de Chetaev nos garantiza la inestabilidad de la solución trivial en un sistema. El teorema y su demostración se pueden consultar en [11].

2.3. Teorema de Krasovsky-Barbashin.

El teorema de estabilidad de Lyapunov como ya vimos resulta bastante útil para estudiar la estabilidad de ciertos sistemas. Pero las condiciones del teorema exigen que la función de Lyapunov tenga un mínimo estricto en el origen. Resulta que esta condición se puede relajar permitiendo que el origen no sea el único punto donde la función de Lyapunov se puede anular. El siguiente teorema garantiza la estabilidad asintótica y resulta más sencillo hallar la función que satisfaga sus condiciones.

Teorema 7 *(Teorema de Krasovsky sobre la estabilidad asintótica). Si para un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma*

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.5)$$

se puede encontrar una función V positiva definida en el dominio

$$\sum_j x_j^2 \leq \eta \quad \text{donde } \eta \text{ es una constante positiva}$$

tal que su derivada $\dot{V}$ satisface en ese dominio las condiciones siguientes:

- 1) $V < 0$ fuera de K ,
- 2) $\dot{V} = 0$ en K ,

donde K es una variedad de puntos, que no contiene trayectorias completas del sistema para $0 \leq t \leq \infty$, entonces el sistema es asintóticamente estable.

Demostración. Denotemos por M un punto del sistema de ecuaciones (2.5). Por las condiciones del teorema, en todos los puntos de la vecindad de cero, $\dot{V} \leq 0$ ($\dot{V} < 0$ fuera de K y $\dot{V} = 0$ en K). De esto se sigue, que la trayectoria γ , que describe el punto M no puede pasar el nivel $V = c$ de adentro hacia afuera. Si el punto M se encuentra fuera de K , entonces su trayectoria γ va a intersectar los niveles $V = c_1$ de afuera hacia adentro. Esto se sigue de las condiciones del teorema, ya que la función V es definida positiva, y fuera de K la derivada $\dot{V} < 0$. Supongamos ahora que durante su movimiento, el punto M se metió a la variedad K . Es claro ver que sobre la variedad el punto se mueve sobre un nivel $V = c_2$ (en K la derivada $\dot{V} = 0$). Como la variedad K no contiene trayectorias completas del sistema, entonces el punto M tiene que salir de la variedad, y en el lugar donde suceda la trayectoria γ , tangente al nivel $V = c_2$, se adentrará al dominio que encierra la curva $V = c_2$. La situación presentada le puede volver a suceder al punto M a lo largo de su movimiento, en cuyo caso el punto se movería sobre un nuevo nivel $V = c_3$, que se encuentra mas cerca del origen que el nivel $V = c_2$ (ya que $\dot{V} < 0$). Este proceso se puede repetir, pero el punto M estará acercándose ilimitadamente al origen, lo que demuestra la estabilidad asintótica. ■

Teorema 8 (*Teorema de Barbashin-Krasovsky*). Si para un sistema de ecuaciones diferenciales se puede encontrar una función positiva definida $V(x)$, que satisface la condición

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

la derivada de la cual, satisface para todos x dos condiciones:

- 1) $\dot{V} < 0$ fuera de K ,
- 2) $\dot{V} = 0$ sobre K ,

donde K -una variedad de puntos, que no contienen trayectorias completas del sistema para $0 \leq t < \infty$, entonces el punto $x = 0$ es completamente estable (el simbolo $x \rightarrow \infty$ en el limite significa que por lo menos una coordenada x_j tiende como sea a infinito).

Krasovsky también dió una generalización del teorema de Chetaev sobre la inestabilidad asintótica.

Teorema 9 (*Teorema de sobre la inestabilidad asintótica*). Si para un sistema de ecuaciones diferenciales se puede encontrar una función $V(x)$ tal, que su derivada $\dot{V}$ satisface las condiciones:

- 1) $\dot{V} > 0$ fuera de K ,
- 2) $\dot{V} = 0$ sobre K ,

y si aparte se puede encontrar puntos, que estan en cualquier vecindad del origen, tales que $V(x) > 0$ en esos puntos, entonces el sistema es inestable.

La demostración de ambos teoremas es análoga a la demostración del teorema 7.

Capítulo 3

Estabilización de sistemas controlables.

Ahora estudiaremos sistemas no lineales controlables. Se llaman sistemas controlables descritas por ecuaciones diferenciales al sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la posición, y f en general, es no lineal con respecto a x y u , donde u es una función $u = u(t)$ o $u = u(x)$, la cuál se llama control preprogramado o control posicional, respectivamente. El control posicional tiende a corregir posibles perturbaciones, a diferencia del control preprogramado.

Asumimos también que

$$f(0, 0) = 0$$

y $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$.

Definición 10 *El sistema de control (3.1) es **asintóticamente estabilizable**, si existe $u \in C^0(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ que satisface*

$$u(0) = 0,$$

tal que, para el sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$, el origen es un punto asintóticamente estable.

Definición 11 *Llamaremos **punto de equilibrio** a una pareja (x, u) tal que $f(x, u) = 0$.*

3.1. Función de control de Lyapunov.

Una herramienta básica para estudiar la estabilidad asintótica del punto de equilibrio es la función de Lyapunov. En el caso de un sistema de control, el control esta en nuestra disposición, por eso existen muchas posibilidades de que la función dada pueda ser la función de Lyapunov para dicha elección del control.

Definición 12 La función $V \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ se dice que es la **función de control de Lyapunov** para el sistema de control (3.1) si

$$V(x) \rightarrow +\infty, \text{ cuando } |x| \rightarrow +\infty,$$

$$V(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } f(x, u) \cdot \nabla V(x) < 0.$$

Más aún, V satisface la **propiedad de control pequeño** si, para cualquier número positivo ε , existe un número positivo η tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ con $0 < |x| < \eta$, existe $u \in \mathbb{R}^m$ tal que $|u| < \varepsilon$ y $f(x, u) \cdot \nabla V(x) < 0$.

Con esta definición tenemos el siguiente teorema según Artstein [12]:

Teorema 13 Si el sistema de control (3.1) es asintóticamente estabilizable, entonces el sistema admite una función de control de Lyapunov que satisface la propiedad de control pequeño. Por otro lado, si el sistema (3.1) admite una función de Lyapunov que satisface la propiedad de control pequeño, entonces el sistema puede ser asintóticamente estabilizable.

Notamos que en la demostración del teorema de Arstein no se da un control, que estabilice el sistema, explícito, sin embargo Sontag [14] probó el siguiente resultado:

Teorema 14 Sea V función de control de Lyapunov que satisface la propiedad de control pequeño para el sistema (3.1). Supongamos también que el sistema (3.1) es de la siguiente forma

$$f(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(x), \quad \forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

para algunos $f_0, \dots, f_m$ en $C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Entonces $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$u_i := -\varphi \left(f_0(x) \cdot \nabla V(x), \sum_{i=1}^m (f_i(x) \cdot \nabla V(x))^2 \right) f_i(x) \cdot \nabla V(x),$$

donde

$$\varphi(a, b) = \begin{cases} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} & \text{si } b \neq 0, \\ 0 & \text{si } b = 0, \end{cases}$$

es continua y estabiliza globalmente el sistema (3.1).

El método de control de Lyapunov es una herramienta muy poderosa para diseñar funciones estabilizadoras. Pero para aplicar la fórmula de Sontag es necesario tener candidatos para la función de Lyapunov. Para sistemas mecánicos el candidato natural para la función de Lyapunov esta dado por la energía total del sistema, es decir la suma de la energía potencial y la energía cinética. Pero, en general, esto no funciona.

Ejemplo 15 Considere el sistema clásico de masa-resorte. El sistema de control es

$$\dot{x}_1 = x_2, m\dot{x}_2 = -kx_1 + u,$$

donde m es la masa de la partícula atada al resorte, x_1 es el desplazamiento de la masa, x_2 es la velocidad de la masa, k es la constante del resorte, y u es la fuerza aplicada a la masa. La energía total E del sistema es

$$E = \frac{k}{2}x_1^2 + \frac{m}{2}x_2^2.$$

entonces con la notación del teorema 14, tenemos

$$f_0(x) \cdot \nabla E(x) = 0,$$

$$f_1(x) \cdot \nabla E(x) = x_2.$$

Entonces, si $x_2 = 0$, no existe un control u tal que $(f_0(x) + uf_1(x)) \cdot \nabla E(x) < 0$. Por lo tanto la energía total no es función de control de Lyapunov. Pero tenemos que

$$(f_0(x) + uf_1(x)) \cdot \nabla E(x) = uf_1(x) \cdot \nabla E(x) = ux_2.$$

20 CAPÍTULO 3. ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS CONTROLABLES.

Entonces podríamos considerar el siguiente control

$$u(x) = -\nu \nabla E(x) \cdot f_1(x) = -\nu x_2.$$

Con este control, el sistema cerrado es

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\nu}{m}x_2.$$

Con este control $\nabla E(x) \cdot (f_0(x) + u(x)f_1(x)) \leq 0$, entonces $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ es estable para el sistema cerrado. Más aún, $(0,0)$ es asintóticamente estable para el sistema.

Capítulo 4

Estabilización en tiempo finito para algunos sistemas no lineales.

En este capítulo principalmente se consideraran los resultados del trabajo [13], relacionados con sistemas no lineales.

Consideramos el sistema

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in M, \quad (4.1)$$

donde $f(x, u)$ satisface a la condición de Lipshitz con respecto a las dos variables, x es un vector de dimensión n , u es de dimensión r y M es un subconjunto cerrado del espacio de dimensión r .

Para el sistema (4.1), se busca un control u de la forma $u = u(x)$, que toma valores en M , tal que la trayectoria del sistema

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (4.2)$$

que comienza en un punto x_0 , acabe en un punto dado x_1 en tiempo T finito. Más adelante consideraremos $x_1 = 0$ y $f(0, 0) = 0$.

Para resolver este problema, V.I.Korobov propuso el método de la función de controlabilidad, que consiste en la construcción de una función $\Theta(x)$ ($\Theta(x) > 0$ para $x \neq 0$ y $\Theta(0) = 0$) y control $u(x) = \tilde{u}(x, \Theta(x))$, tales, que se cumpliera la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \quad (4.3)$$

en cierta vecindad del origen, para algunos $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Esta desigualdad nos garantiza que la trayectoria llegue al origen en tiempo finito. La función $\Theta(x)$ la suponemos continuamente diferenciable para $x \neq 0$. En la desigualdad (4.3) para el caso de $\alpha = \infty$ tenemos que la función $\Theta(x)$ es una función de Lyapunov.

Definición 16 Diremos que el sistema (4.1) es *enteramente controlable*, si dados cualquier par de puntos del espacio x_0 y x_1 , se puede encontrar una función $u(x)$ tal que la trayectoria del sistema (4.2) que empieza en x_0 , termina en x_1 en tiempo finito.

4.1. Teorema fundamental de Korobov.

El siguiente teorema, propuesto por V.I.Korobov, nos garantiza que la trayectoria del sistema que comienza en un punto dado x_0 llegue al 0 en tiempo finito.

Veamos el caso cuando la función de controlabilidad es suave en todas partes, a excepción quizás del 0.

Teorema 17 (Teorema fundamental de Korobov). Sea un sistema controlable, dado por la ecuación

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.4)$$

donde $x \in E_n$, $u \in M \subset E_r$, $f \in E_n$, la función vectorial f en cualquier dominio de la forma $\{(x, u) : 0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1, u \in M\}$ satisface a la condición de Lipshitz

$$\|f(x'', u'') - f(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_1)(\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Supongamos, además que existe una función $\Theta(x)$, que satisface las siguientes condiciones:

- 1) $\Theta(x) \geq 0$ y $\Theta(x) = 0$ solo para $x = 0$,
- 2) $\Theta(x)$ es continua en todas partes y continuamente derivable, a excepción de $x = 0$,
- 3) Existe una función $u(x)$, para $x \in Q$, donde $Q = \{x : \Theta(x) \leq C, C > 0\}$ (C tal que el conjunto Q es acotado), que satisface a la desigualdad

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x) \quad (4.5)$$

para algunos $\alpha > 0$, $\beta > 0$, aparte $u(x)$, para $0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1$ y $x \in Q$, satisface a la condición de Lipshitz, e.d.

$$\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho, \rho_1) \|x'' - x'\|.$$

Entonces la trayectoria del sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$, que empieza en un punto dado $x_0 \in Q$ para $t = 0$, termina en el punto $x = 0$ para algún valor de tiempo finito

$$T \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0).$$

Demostración. Calculemos la derivada de la función $\Theta(x)$ por el sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$, en la trayectoria $x(t)$, que empieza en un punto $x_0 \in Q$. Tenemos

$$\dot{\Theta}(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t), u(x(t))).$$

Entonces, por (4.5)

$$\dot{\Theta}(x(t)) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x(t)).$$

Como $\Theta(x) > 0$ para $x \neq 0$, se sigue que para $x(t) \neq 0$

$$\frac{d}{dt} \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x(t)) \leq -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Sea $\tau > 0$ —un número cualquiera, pero tal que, la solución $x(t)$ exista en el segmento $[0, \tau]$. Integremos la última desigualdad de 0 a τ , entonces

$$\Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x(\tau)) \leq \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \tau. \quad (4.6)$$

Denotemos por $S(\varepsilon)$ y $S(\rho_0)$ las bolas de centro en 0 y radio ε y ρ respectivamente, además $\varepsilon \leq \|x_0\|$, y ρ_0 tal que $Q \subset S(\rho_0)$. Como cualquier solución, que empiece en el punto $x_0 \in Q$, se queda en Q (ya que $\Theta(x(t)) \leq 0$) y como para $x', x'' \in Q \setminus S(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad

$$\|f(x'', u(x'')) - f(x', u(x'))\| \leq L_1(\varepsilon, \rho_0) (1 + L_2(\varepsilon, \rho_0)) \|x'' - x'\|,$$

entonces la solución de la ecuación $x(t)$, que empieza en un punto $x_0 \in Q$, se puede extender al segmento $[0, T_1]$ tal que para $t \in [0, T_1]$, $x(t) > \varepsilon$, por ello para esos valores de t la desigualdad (4.6) es cierta.

Ahora mostremos que para $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, la trayectoria $x(t)$ llega a la frontera de la bola $S(\varepsilon)$. Suponiendo lo contrario, obtenemos que $\|x(t)\| > \varepsilon$

para $0 \leq t \leq T_1$ y $T_1 > \frac{\alpha}{\beta} \Theta_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, pero para $\tau = T_1$, la parte derecha de la desigualdad (4.6) es no positiva y la parte izquierda de la misma desigualdad es positiva, ya que $\|x(t)\| > \varepsilon$. Como el tiempo de llegada a la frontera de la bola de radio ε crece monotonamente, al disminuir ε , y como $T(\varepsilon) \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, entonces existe $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, pero entonces $\lim_{t \rightarrow T} x(t) = 0$. ■

Korobov en [13] dió un método general para la construcción de la función de controlabilidad $\Theta(x)$ y el control acotado $u(x)$ para el sistema de la forma

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

con un control acotado $|u| \leq d$, donde la matriz A es de $n \times n$, b un vector de dimensión n .

4.2. Construcción de función de controlabilidad para algunos sistemas no lineales.

Algunos sistemas no lineales controlables de la forma

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (4.7)$$

con $f \in C^2(\mathbb{R}^{n+m})$, haciendo un cambio de variables y de control pueden ser llevados a un sistema lineal. Por ejemplo el sistema controlable

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \varphi_i(x_1, \dots, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u), \end{aligned} \quad (4.8)$$

tiene esa propiedad si suponemos que

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{i+1}} \right| \geq a > 0, \quad \left| \frac{\partial \varphi_n}{\partial u} \right| \geq a > 0.$$

Haciendo el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 \equiv F_1(x_1), \\ z_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial F_{i-1}}{\partial x_j} \varphi_j(x_1, \dots, x_i) = F_i(x_1, \dots, x_i) \end{aligned}$$

e introduciendo un nuevo control

$$v = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F_n}{\partial x_j} \varphi_j(x_1, \dots, x_j) + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u),$$

obtenemos el sistema

$$\dot{z}_i = z_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1), \quad \dot{z}_n = v.$$

Para este sistema lineal la función de controlabilidad se puede hallar de la ecuación (ver [13]):

$$2a_0\Theta^{1+\frac{2n-1}{\alpha}} = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}\Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} z_i z_j, \quad (4.9)$$

con $\alpha > 0$ y $a_0 > 0$ por determinar. El control se propone como

$$v(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\Theta(x)^{(n-i+1)/\alpha}} z_i. \quad (4.10)$$

En términos de las variables x_i , es decir del sistema (4.8), las relaciones (4.9) y (4.10) tienen la siguiente forma:

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\Theta^{(2n-i-j+1)/\alpha}} F_i(x_1, \dots, x_i) F_j(x_1, \dots, x_j),$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\Theta(x)^{(2n-i+1)/\alpha}} F_i(x_1, \dots, x_i).$$

Veamos nuevamente el sistema (4.7). Supongamos que $f(0,0) = 0$. Si suponemos que f además tiene segundas derivadas continuas con respecto a x y u , entonces el sistema (4.4) puede ser llevado a la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(x, u),$$

donde

$$A = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}, B = \frac{\partial f(0,0)}{\partial u}, \|g(x, u)\| \leq C_1 (\|x\|_{E_n}^2 + \|u\|_{E_r}^2).$$

Construiremos la función de controlabilidad para el sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ y con su ayuda encontraremos el control acotado $u(x)$, que lleva a cualquier punto de una cierta vecindad del origen a 0, según el sistema $\dot{x} = Ax + Bu(x)$. Mostraremos, que para elección correcta de $\Theta(x)$, garantizando que el control sea pequeño en una vecindad de origen, el mismo $u(x)$ lleva a 0 a cualquier punto de una vecindad del origen, pero según el sistema (4.4).

Veremos el caso de un sistema con control unidimensional. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 18 *Sea dado el sistema*

$$\dot{x} = Ax + bu + g(x, u), \quad (4.11)$$

donde A es una matriz constante de $n \times n$, b -un vector de dimension n , $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n$, $u \in E_1, |u| \leq d, \|g(x, u)\| \leq C_1(\|x\|^{s_1} + |u|^{s_2})$ ($s_1 > 1, s_2 > 1$), la función $g(x, u)$ en cualquier dominio $\{(x, u) : 0 \leq \rho \leq \|x\| \leq \rho_0, \rho_0\text{-fijo}, |u| \leq d\}$ satisface a la condición de Lipshitz

$$\|g(x'', u'') - g(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_0)(\|x'' - x'\| + |u'' - u'|).$$

Definamos al control $u(x)$ por la igualdad

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \Theta(x)^{(-n+i-1)/\alpha} (c, A^{i-1}x) + \sum_{i=1}^n p_i (c, A^{i-1}x), \quad (4.12)$$

donde c es una vector ortogonal a $b, Ab, \dots, A^{n-2}b$ y $(c, A^{n-1}b) = 1$, α -constante positiva, los coeficientes a_i se eligen, buscando la estabilidad asintótica del 0 del sistema

$$\dot{z}_i = z_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad \dot{z}_n = \sum_{i=1}^n a_i z_i, \quad (4.13)$$

los coeficientes p_i son los coeficientes del polinomio característico de A y la función $\Theta(x)$ se define para $x \neq 0$ como la solución positiva, continuamente derivable, de la ecuación

$$2a_0 \Theta^{1+\frac{n+m-1}{\alpha}} - \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} (c, A^{i-1}x) (c, A^{j-1}x) = 0. \quad (4.14)$$

donde los coeficientes f_{ij} se determinan del sistema

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad i < j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = i+1, i+2, \dots, n,$$

$$\begin{aligned} a_i f_{jn} + a_j f_{in} + f_{i-1j} (1 - \delta_{i1}) + f_{ij-1} (1 - \delta_{1j}) &= 2\delta_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ j &= i, i + 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.15)$$

δ_{ij} es el simbolo de Kroeneker.

Existe a_0 lo suficientemente pequeño, un m lo suficientemente grande y una vecindad del origen tales, que de cualquier punto x_0 de esa vecindad se puede llegar al origen en un tiempo finito $T(x_0) \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}^\alpha \Theta^{\frac{1}{\alpha}}(x_0)$, según el sistema $\dot{x} = f(x, u(x))$.

Demostración. Hacemos el cambio de variables

$$z_i = (c, A^{i-1}x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.16)$$

donde el vector c esta dado según condiciones del teorema, y lo denotamos vectorialmente por $z = Lx$, además introducimos un nuevo control dado por

$$v = - \sum_{i=1}^n p_i z_i + u.$$

Entonces el sistema (4.11) pasa a ser

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1} + \varphi_i(z, v), \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \dot{z}_n &= v + \varphi_n(z, v), \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde las componentes φ_i del vector φ se determinan de la igualdad

$$\varphi = Lg \left(L^{-1}z, v + \sum_{i=1}^n p_i z_i \right),$$

por lo que

$$\begin{aligned} |\varphi_i(z, v)| &\leq C_1 \|L\| \left(\|L^{-1}\|^{s_1} \|z\|^{s_1} + |v + (p, z)|^{s_2} \right) \leq \\ C_1 \|L\| &\left(\|L^{-1}\|^{s_1} \|z\|^{s_1} + 2^{s_2^2/(s_2-1)} (|v|^{s_2} + \|p\|^{s_2} \|z\|^{s_2}) \right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

donde p -vector de componentes p_i .

De aqui en adelante consideraremos, que $\|z\| \leq 1$, por lo que en la desigualdad (4.18), cambiaremos $\|z\|^{s_1}$ y $\|z\|^{s_2}$ por $\|z\|^s$, donde $s = \min(s_1, s_2)$.

Denotemos ahora por

$$C_2 = C_1 \|L\| \cdot \max \left\{ \|L^{-1}\|^{s_1} + 2^{s_2^2/(s_2-1)} \|p\|^{s_2}, 2^{s_2^2/(s_2-1)} \right\},$$

entonces la desigualdad (4.18) se transforma en

$$|\varphi_i(z, v)| \leq C_2 (\|z\|^s + |v|^{s_2}).$$

En las nuevas variables (4.16) la ecuación (4.14) tiene la forma

$$2a_0\Theta^{1+\frac{n+m-1}{\alpha}} - \sum_{i,j=1}^n f_{ij}\Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} z_i z_j = 0. \quad (4.19)$$

Mostremos ahora que la derivada temporal de la función $\Theta(z)$, según el sistema (4.17), la cual denotaremos por $\dot{\Theta}_1(z)$, para

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \Theta(x)^{(-n+i-1)/\alpha} z_i \quad (4.20)$$

satisface para algún $\beta > 0$ a la condición

$$\dot{\Theta}_1(z) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(z). \quad (4.21)$$

Esto significará, por el teorema fundamental 17, que de cualquier punto de cierta vecindad del origen se puede llegar a cero, según el sistema (4.17). Por otro lado, debido a que el cambio de variables y de control no son degenerados, esto significa que se puede llegar a 0 de una cierta vecindad, debido a (4.11) con el control $u(x)$, que se define por la igualdad (4.12), es decir se cumpliría el teorema fundamental.

Para obtener la desigualdad (4.21) denotemos la ecuación (4.19) como $\Phi(\Theta, z) = 0$, entonces

$$\dot{\Theta}_1(z) = -\frac{(\Phi_z, z)}{\Phi_0}, \quad (4.22)$$

donde $\dot{z}$ se determina por la igualdad (4.17) para v , que a su vez es determinado por la relación (4.20).

La igualdad (4.22) tiene la forma

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_1(z) = & \frac{1}{2a_0 \left(1 + \frac{n+m-1}{\alpha}\right) \Theta^{\frac{n+m-1}{\alpha}} - \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \frac{i+j-2}{\alpha} \Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}-1} z_i z_j} \times \\ & \times \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \Theta^{(i+j-2)/\alpha} z_i (z_{j+1} + \varphi_j(z, v)) + \sum_{i=1}^n f_{in} \Theta^{(i+n-2)/\alpha} z_i (v + \varphi_j(z, v)) \right]. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Usando la forma de v , obtenemos, que el numerador de esa expresión se transforma en

$$-\Theta^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^n \left(\Theta^{(i-1)/\alpha}(z) z_i \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{(i+j-2)/\alpha} z_i \varphi_j(z, v).$$

En el denominador, la expresión $2a_0 \left(1 + \frac{n+m-1}{\alpha}\right) \Theta^{\frac{n+m-1}{\alpha}}$ la determinamos de la ecuación (4.14), entonces la ecuación (4.23) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}_1(z) = & \frac{-\Theta^{-\frac{1}{\alpha}} \sum_{i=1}^n \left(\Theta^{\frac{i-1}{\alpha}} z_i \right)^2}{\Theta^{-1} \sum_{i,j=1}^n \left(1 + \frac{n+m-i-j+1}{\alpha} \right) f_{ij} \Theta^{\frac{i-j-2}{\alpha}} z_i z_j} + \\ & + \frac{\sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} z_i \varphi_j(z, v)}{\Theta^{-1} \sum_{i,j=1}^n \left(1 + \frac{n+m-i-j+1}{\alpha} \right) f_{ij} \Theta^{\frac{i-j-2}{\alpha}} z_i z_j}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Se puede ver, que el primer sumando se estima por arriba con la expresión $-\frac{1}{\lambda_{\max}^\alpha} \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}$, donde $\lambda_{\max}^\alpha$ es el valor propio más grande de la matriz

$$F^\alpha = \left\| \left(1 + \frac{n+m-i-j}{\alpha} \right) f_{ij} \right\|_{i,j=1,\dots,n}, \quad (4.25)$$

α tal que la matriz F^α es definida positiva.

Estimemos ahora el segundo sumando. Haremos la estimación sobre el conjunto $Q = \{z : \Theta(z) \leq 1\}$.

Veamos S -superficie de nivel de la función $\Theta(z)$,

$$S = \{z : \Theta(z) \leq q, 0 < q \leq 1\},$$

y sobre cada una de estas superficies, estimemos el segundo sumando.

Obtenemos:

$$\Theta^{-1} \sum_{i,j=1}^n \left(1 + \frac{n+m-i-j+1}{\alpha} \right) \Theta^{(i+j-2)/\alpha} z_i z_j \geq \Theta^{-1} \lambda_{\min}^\alpha \sum_{i=1}^n \left(\Theta^{\frac{i-1}{\alpha}} z_i \right)^2.$$

Estimemos por abajo la cantidad $\sum_{i=1}^n (\Theta^{(i-1)/\alpha} z_i)^2$ sobre S . Para eso resolvemos el problema de encontrar $\min \sum_{i=1}^n (\Theta^{(i-1)/\alpha} z_i)^2$, si

$$\left(\frac{1}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{(i+j-2)/\alpha} z_i z_j \right)^{\alpha/(\alpha+n+m-1)} = q.$$

Sea $y_i = \Theta^{(i-1)/\alpha} z_i$; con esas denotaciones el problema se transforma en encontrar $\min \sum_{i=1}^n y_i^2$, si

$$\frac{1}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} y_i y_j = q^{1+\frac{n+m-1}{\alpha}}.$$

Para resolverlo, usaremos los multiplicadores de Lagrange. De las condiciones necesarias de extremo obtenemos

$$2y_i = \frac{\mu}{a_0} \sum_{j=1}^n f_{ij} y_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.26)$$

es decir

$$Fy = \frac{2a_0}{\mu} y.$$

De esta igualdad se sigue que $\lambda = \frac{2a_0}{\mu}$ es un valor propio para la matriz F .

Multiplicando la igualdad (4.26) por y_i y sumando, obtenemos

$$2 \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{\lambda}{a_0} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} y_i y_j = 2\mu q^{1+\frac{n+m-1}{\alpha}},$$

por lo que

$$\min \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{2a_0}{\lambda_{\max}} q^{1+\frac{n+m-1}{\alpha}},$$

donde $\lambda_{\max}$ -el mayor valor propio de la matriz F .

Consecuéntemente, para E -denominador del segundo sumando de la igualdad (4.24)- es cierta la siguiente estimación:

$$E \geq \frac{\lambda_{\min}^\alpha}{\lambda_{\max}} \cdot 2a_0 q^{(n+m-1)/\alpha}. \quad (4.27)$$

Para D -numerador del segundo sumando en la igualdad (4.24)-tenemos la desigualdad

$$D = \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{(i+j-2)/\alpha} z_i \varphi_j(z, v) \leq C_2 \max_{1 \leq i,j \leq n} f_{ij} (\|z\|^s + |v|^{s_2}) \sum_{i,j=1}^n |z_i| \Theta^{(i+j-2)/\alpha}. \quad (4.28)$$

Pidamos que a_0 sea tal que $\sqrt{2a_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}}} \sqrt{n} \leq 1$, entonces $\|z\| \leq 1$; además, pidamos que $\sqrt{2a_0} (F^{-1}a, a) + \sqrt{2a_0 \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{n}{\lambda_{\min}}} \leq d$, entonces el control $u = v + \sum_{i=1}^n p_i z_i$ será acotado en valor absoluto por d . Tomando en cuenta las estimaciones

$$|z_i| \leq \sqrt{2a_0} q^{\frac{1}{2} + \frac{n+m-2i+1}{2\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}^\alpha}}, |v| \leq \sqrt{2a_0} (F^{-1}a, a) q^{\frac{1}{2} + \frac{m-n-1}{\alpha}},$$

de (4.28) obtenemos

$$\begin{aligned} D &\leq C_2 \max_{i \leq i, j \leq n} f_{ij} \left(\left(\frac{2na_0}{\lambda_{\min}} q^{1 + \frac{m-n+1}{\alpha}} \right)^{\frac{s}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(2a_0 (F^{-1}a, a) q^{1 + \frac{m-n-1}{\alpha}} \right)^{\frac{s_2}{2}} \right) \sum_{i,j=1}^n q^{\frac{i+j-2}{\alpha}} q^{\frac{1}{2} + \frac{n+m-2i+1}{2\alpha}} \sqrt{\frac{2a_0}{\lambda_{\min}}}. \end{aligned}$$

De la desigualdad obtenida y de la desigualdad (4.27) se sigue, que H -el segundo sumando en la igualdad (4.24)- satisface la desigualdad

$$H \leq C_3 C_4 (a_0) \left(q^{\frac{m(s-1)-n(s-1)+(s+1)(\alpha+1)}{2\alpha}} + q^{\frac{m(s_2-1)-n(s_2+1)+s_2\alpha-s_2+\alpha+1}{2\alpha}} \right),$$

donde

$$\begin{aligned} C_3 &= \frac{\lambda_{\max}}{2\lambda_{\min}^\alpha} C_2 \max f_{ij} \frac{n^2}{\sqrt{\lambda_{\min}}}, \\ C_4(a_0) &= \max \left\{ \left(\frac{2a_0 n}{\lambda_{\min}} \right)^{\frac{s}{2}} \sqrt{2a_0}, (2a_0 (F^{-1}a, a))^{s_2/2} \sqrt{2a_0} \right\}. \end{aligned}$$

Escojamos ahora m y a_0 de la condición, que el valor H no sobrepase a la mitad del valor del primer sumando de la igualdad (4.24), es decir $H \leq$

$\frac{1}{2\lambda_{\max}^\alpha} q^{1-\frac{1}{\alpha}}$. Para ello, a las restricciones para a_0 le añadimos la restricción $C_3 C_4(a_0) \leq \frac{1}{2\lambda_{\max}^\alpha}$, y que el número m satisfaga las desigualdades $m \geq n$,

$$\frac{m(s-1) - n(s+1) + (s+1)(\alpha+1)}{2\alpha} \geq 1 - \frac{1}{\alpha},$$

$$\frac{m(s_2-1) - n(s_2+1) + s_2\alpha - s_2 + \alpha + 1}{2\alpha} \geq 1 - \frac{1}{\alpha}.$$

De aquí tenemos que

$$m \geq \max \left\{ n, \frac{n(s+1) - s - 3}{s-1}, \frac{n(s_2+1) + s_2 - 3}{s_2-1} \right\}. \quad (4.29)$$

Primero escogemos m , de tal manera que se satisfaga (4.29). Después se elige α de tal manera que (4.25) sea positiva definida y $\alpha > -\nu_1^0$, donde ν_1^0 es la raíz mas pequeña de

$$\begin{vmatrix} f_{11}(2n-1-\nu) & f_{12}(2n-2-\nu) & \dots & f_{1n}(n-\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(n-\nu) & f_{n2}(n-1-\nu) & \dots & f_{nn}(1-\nu) \end{vmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Después, elegimos a_0 de tal forma que

$$\sqrt{\frac{2a_0 n}{\lambda_{\min}^\alpha}} \leq 1 \text{ y } \sqrt{2a_0(F^{-1}a, a)} + \sqrt{2a_0 \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{n}{\lambda_{\min}^\alpha}} \leq d. \quad (4.31)$$

Finalmente obtenemos

$$\dot{\Theta}_1(z) \leq -\frac{1}{2\lambda_{\max}^\alpha} \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(z).$$

Ejemplo 19 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1^3, \end{cases}$$

con $|u| \leq 1$. Tenemos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $g(x_1, x_2, u) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que $\text{rank}(b, Ab) = 2$ y que $g(x_1, x_2, u)$ satisface las condiciones

del teorema 18, con $s = 3, s_2 = 0$. Sea $a_1 = -1, a_2 = -2$. El sistema (4.15) tiene la forma

$$f_{12} = f_{21}, \quad -f_{22} - 2f_{12} + f_{11} = 0, \quad -f_{12} = 1, \quad -2f_{22} + f_{12} = -1.$$

De aquí, $f_{11} = 3, f_{12} = f_{21} = f_{22} = 1$. Para la ecuación (4.30) tenemos

$$\begin{vmatrix} 3(3-\nu) & 2-\nu \\ 2-\nu & 1-\nu \end{vmatrix} = 0.$$

Entonces $\nu_1^0 = 2 - \frac{\sqrt{6}}{6}$. Ahora escogemos $m = 3$, para que se satisfaga (4.29). Entonces, con $\alpha = 1$ la matriz (4.25) es positiva definida. Ahora, como $F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ y por las desigualdades (4.31), tomamos $a_0 = \frac{1}{9}$. Finalmente, obtenemos

$$u(x_1, x_2) = -\frac{2x_1}{\Theta^{\frac{1}{2}}(x_1, x_2)} - \frac{x_2}{\Theta(x_1, x_2)},$$

donde Θ es la solución positiva de

$$\frac{2}{9}\Theta^5 - \Theta x^4 - 2\Theta - 3y^2 = 0.$$

■

Capítulo 5

Solución de problema de síntesis para sistemas no linealizables.

Ahora estudiaremos el problema de estabilización en tiempo finito para una familia de ecuaciones no lineales, no linealizables, aplicando el método de la función de controlabilidad. Para ello propondremos una función y un control y probaremos que dichas funciones satisfacen el teorema fundamental de Korobov.

Sea dado un sistema controlable de la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k+1}, \end{cases} \quad \text{donde } |u| \leq 1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5.1)$$

con la posición inicial $x(0) = x_0$.

Para el sistema (5.1) encontraremos un conjunto de funciones posicionales $u(x)$, donde $x := (x_1, x_2)$, continuas tales que el sistema cerrado

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(x), \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k+1}, \end{cases} \quad (5.2)$$

que comienza en un punto $x(0) = x_0$, termine en el origen en un tiempo finito $T(x_0)$, es decir

$$\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0,$$

donde $x(t)$ es la trayectoria del sistema cerrado (5.2).

36CAPÍTULO 5. ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALIZABLES

Usaremos el método de la función de controlabilidad de Korobov, es decir construiremos una pareja $(u(x), \Theta(x))$ tales que el sistema fundamental 17 se satisfaga.

Primero estudiemos el problema de estabilización del sistema (5.1). Para ello escogemos $u(x)$ tal que el sistema (5.2) sea asintoticamente estable. Tomamos $u(x) = -x_1 - \frac{1}{k+1}x_2$, entonces el sistema (5.2) adquiere la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - \frac{1}{k+1}x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k+1}. \end{cases} \quad (5.3)$$

Escogemos $V = x_1^{2k+2} + x_2^2$ como función de Lyapunov para el sistema (5.3). Notamos que $V \geq 0$ y $V = 0$ solo para $x = 0$. Ahora

$$\dot{V} = (2k+2)x_1^{2k+1}\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2,$$

de donde, usando el sistema (5.3) tenemos

$$\dot{V} = -(2k+2)x_1^{2k+2}.$$

La derivada de V es siempre negativa y se vuelve cero sobre un conjunto $K = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Sobre K el sistema tiene la forma

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ \dot{x}_2 = 0, \end{cases}$$

pero en K , $x_2 \neq 0$, entonces K no contiene trayectorias completas del sistema. Por lo tanto V cumple las condiciones del teorema de Krasovsky y por ello el sistema (5.3) es enteramente estable. Mas aún podemos afirmar que el sistema es enteramente controlable. [Ver apéndice A].

Observación 20 *Remarquemos que el sistema de la forma*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^{2k}, \end{cases}$$

no es asintoticamente estabilizable, lo cuál se puede verificar tomando $V = x_2$ en el teorema de inestabilidad de Krasovsky (ver teorema 9).

5.1. Construcción del control y la función de controlabilidad.

Tomaremos el conjunto de controles dado por

$$U = \{u(x) \mid u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta(x)^{2k+2}} + \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}},$$

con $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}\}$.

La función de controlabilidad $\Theta(x)$ es la solución positiva de la ecuación

$$2a_0\Theta^{4k+4} = f_{11}x_1^2\Theta^{4k+2} + 2f_{12}x_1x_2\Theta^{2k+1} + f_{22}x_2^2. \quad (5.4)$$

donde

$$F := \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{12} & f_{22} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

es positiva definida.

Para asegurar que la función $u(x)$ esta bien definida, probaremos que la solución de la ecuación (5.4) es única.

Lema 21 *Supongamos que la matriz F y la matriz $\mathcal{B}$, dado por*

$$\mathcal{B} := \begin{pmatrix} f_{11} & \frac{2k+3}{2}f_{12} \\ \frac{2k+3}{2}f_{12} & 4f_{22} \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

son positivas definidas. Entonces la ecuación (5.4) admite una única solución positiva $\Theta(x)$ para todos x .

Demostración. Podemos escribir la ecuación (5.4) en la siguiente forma

$$2a_0\Theta = (D_\Theta F D_\Theta x, x), \quad (5.7)$$

donde

$$D_\Theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Theta^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Theta^{\frac{4k+3}{2}}} \end{pmatrix}.$$

Primero probaremos que $\Theta(x)$ toma todos los valores positivos. Para ello tomamos $\Theta = C$, donde $C > 0$ en la igualdad (5.7). Notamos que la parte derecha de la igualdad se vuelve $(D_C F D_C x, x)$, donde D_C es la

matriz D_Θ con $\Theta = C$. La expresión anterior representa una forma cuadrática positiva definida, ya que $(D_C F D_C x, x) = (F D_C x, D_C x) = (F y, y)$. Esta forma cuadrática toma todos los valores positivos, incluyendo el valor C , por lo que la igualdad

$$C = (D_C F D_C x, x)$$

es posible para todos los valores de $C > 0$. Además, todos los valores de x forman una superficie de nivel de la función $\Theta(x)$, es decir $\Theta(x) = C$. ■

Ahora veremos que para cualquier $x \neq 0$, la ecuación tiene solución positiva. Fijamos x_1 y x_2 y sea $x_2 \neq 0$. Veamos la función

$$\Phi(\Theta) = 2a_0\Theta^8 - f_{11}x_1^2\Theta^6 - 2f_{12}x_1x_2\Theta^3 - f_{22}x_2^2.$$

Para valores suficientemente grandes de Θ tenemos que $\Phi(\Theta) > 0$, por otro lado $\Phi(0) < 0$. Entonces existe Θ^* tal que $\Phi(\Theta^*) = 0$ y por lo tanto existe una raíz de la ecuación para Θ . Ahora si $x_2 = 0$, entonces la ecuación se transforma en

$$2a_0\Theta^2 - f_{11}x_1^2 = 0,$$

para la cual hacemos la misma deducción que para el caso $x_2 \neq 0$.

Entonces nuestra ecuación tiene solución positiva. Demostraremos ahora que dicha raíz es única. Calculando la derivada de $\Phi(\Theta)$ tenemos

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(\Theta) &= 2a_0(8\Theta^7) - f_{11}x_1^2(6\Theta^5) - 2f_{12}x_1x_2(3\Theta^2) \\ &= \frac{2a_0(8\Theta^8) - f_{11}x_1^2(6\Theta^6) - 2f_{12}x_1x_2(3\Theta^3)}{\Theta}, \end{aligned}$$

usando (5.4)

$$\dot{\Phi}(\Theta) = \frac{f_{11}\Theta^6x_1^2 + 5f_{12}\Theta^3x_1x_2 + 4f_{22}x_2^2}{2\Theta},$$

de donde, haciendo el cambio $y_1 = x_1\Theta$ y $y_2 = x_2$

$$\dot{\Phi}(\Theta) = \frac{1}{2\Theta}(\mathcal{B}y, y)$$

Como $\mathcal{B} > 0$, entonces para $\Theta > 0$ tenemos que $\dot{\Phi}(\Theta) > 0$. Suponemos ahora que la solución positiva no es única. Entonces podemos considerar dos soluciones consecutivas Θ_1 y Θ_2 . Como $\dot{\Phi}(\Theta) > 0$ entonces $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\Phi(\Theta) > 0$ si $\Theta \in (\Theta_1, \Theta_1 + \delta_1)$ y $\exists \delta_2 > 0$ tal que $\Phi(\Theta) < 0$ si $\Theta \in (\Theta_2 - \delta_2, \Theta_2)$. Pero esto es imposible ya que $\Phi(\Theta)$ es continua, entonces $\exists \Theta_3 \in (\Theta_1, \Theta_2)$: $\Phi(\Theta_3) = 0$ y nosotros supusimos que Θ_1 y Θ_2 eran soluciones consecutivas. Así probamos la unicidad.

Lema 22 Sea S el subconjunto de U , dado por

$$S = \{u(x) \mid u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta(x)^{2k+2}} + \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}},$$

$$\text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_- \text{ y } k \in \mathbb{N}\}.$$

Sea

$$f_{11} = \frac{a_1}{a_2} f_{12}, \quad f_{22} = -f_{12} a_3 \quad (5.8)$$

en (5.7), con $f_{12} > 0$. Entonces si

$$\frac{a_1}{a_2} a_3 + \frac{(2k+3)^2}{16} < 0 \quad (5.9)$$

obtenemos que

$$\dot{\Theta}(x) \leq -\gamma,$$

donde $\Theta(x)$ es la solución positiva de la ecuación (5.4) y $\gamma > 0$.

Demostración. Notamos que según las igualdades (5.8), la matriz (5.7) tiene la siguiente forma

$$F = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} f_{12} & f_{12} \\ f_{12} & -f_{12} a_3 \end{pmatrix}.$$

La matriz F es positiva definida, ya que por las condiciones del lema $\frac{a_1}{a_2} f_{12} > 0$ y por la desigualdad (5.9) tenemos

$$\begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_2} f_{12} & f_{12} \\ f_{12} & -f_{12} a_3 \end{vmatrix} = -\frac{a_1}{a_2} a_3 - 1 > 0.$$

Ahora, derivando la ecuación (5.4) obtenemos para $\dot{\Theta}$:

$$\begin{aligned} (8k+8) a_0 \Theta^{4k+3} \dot{\Theta} &= (4k+2) f_{11} x_1^2 \Theta^{4k+1} \dot{\Theta} + 2 f_{11} x_1 \dot{x}_1 \Theta^{4k+2} + \\ &+ (2k+1) f_{12} x_1 x_2 \Theta^{2k} \dot{\Theta} + 2 f_{12} \dot{x}_1 x_2 \Theta^{2k+1} + 2 f_{12} x_1 \dot{x}_2 \Theta^{2k+1} + 2 f_{22} x_2 \dot{x}_2 \\ \dot{\Theta} &= \frac{2 f_{11} x_1 \dot{x}_1 \Theta^{4k+2} + 2 f_{12} \dot{x}_1 x_2 \Theta^{2k+1} + 2 f_{12} x_1 \dot{x}_2 \Theta^{2k+1} + 2 f_{22} x_2 \dot{x}_2}{(8k+8) a_0 \Theta^{4k+3} - (4k+2) f_{11} x_1^2 \Theta^{4k+1} - (2k+1) f_{12} x_1 x_2 \Theta^{2k}} \\ &= \frac{2 f_{11} x_1 \dot{x}_1 \Theta^{4k+3} + 2 f_{12} \dot{x}_1 x_2 \Theta^{2k+2} + 2 f_{12} x_1 \dot{x}_2 \Theta^{2k+2} + 2 f_{22} x_2 \dot{x}_2 \Theta}{(8k+8) a_0 \Theta^{4k+4} - (4k+2) f_{11} x_1^2 \Theta^{4k+2} - (2k+1) f_{12} x_1 x_2 \Theta^{2k+1}}. \end{aligned}$$

Denotamos por

$$B_1 = 2f_{11}x_1\dot{x}_1\Theta^{4k+3} + 2f_{12}\dot{x}_1x_2\Theta^{2k+2} + 2f_{12}x_1\dot{x}_2\Theta^{2k+2} + 2f_{22}x_2\dot{x}_2\Theta$$

$$B_2 = (8k+8)a_0\Theta^{4k+4} - (4k+2)f_{11}x_1^2\Theta^{4k+2} - (2k+1)f_{12}x_1x_2\Theta^{2k+1}$$

Note que

$$\dot{\Theta} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Sustituyendo $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ y u en B_1 , según el sistema (5.1) y la forma de $\mathcal{B}$, obtenemos

$$\begin{aligned} B_1 = & f_{11}a_1x_1^2\Theta^{4k+2} + f_{11}a_2x_1x_2\Theta^{2k+1} + f_{11}a_3x_1^{2k+2}\Theta^{2k+2} + f_{12}a_1x_1x_2\Theta^{2k+1} + \\ & + f_{12}a_2x_2^2 + f_{12}a_3x_1^{2k+1}x_2\Theta + f_{12}x_1^{2k+2}\Theta^{2k+2} + f_{22}x_2x_1^{2k+1}\Theta \end{aligned}$$

Usando nuevamente la ecuación (5.4) en B_2 tenemos

$$\begin{aligned} B_2 = & (2k+2)(f_{11}x_1^2\Theta^{4k+2} + 2f_{12}x_1x_2\Theta^{2k+1} + f_{22}x_2^2) - \\ & - (2k+1)f_{11}x_1^2\Theta^{4k+2} - (2k+1)f_{12}x_1x_2\Theta^{2k+1} = \\ & f_{11}x_1^2\Theta^{4k+2} + (2k+3)f_{12}x_1x_2\Theta^{2k+1} + 4f_{22}x_2^2. \end{aligned}$$

Haciendo la sustitución

$$y_1 = x_1\Theta^{2k+1}, y_2 = x_2,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} B_1 = & f_{11}a_1y_1^2 + (f_{11}a_2 + f_{12}a_1)y_1y_2 + f_{12}a_2y_2^2 + \\ & + (f_{11}a_3 + f_{12})\frac{y_1^{2k+2}}{\Theta^{4k^2+4k}} + (f_{22} + f_{12}a_3)\frac{y_1^{2k+1}y_2}{\Theta^{4k^2+4k}} \end{aligned}$$

y

$$B_2 = f_{11}y_1^2 + (2k+3)f_{12}y_1y_2 + 4f_{22}y_2^2.$$

Introduciendo la denotación

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} f_{11}a_1 & \frac{f_{11}a_2+f_{12}a_1}{2} \\ \frac{f_{11}a_2+f_{12}a_1}{2} & f_{12}a_2 \end{pmatrix},$$

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.41

finalmente obtenemos

$$B_1 = \mathcal{A}(y, y) + (f_{11}a_3 + f_{12})\frac{y_1^{2k+2}}{\Theta^{4k^2+4k}} + (f_{22} + f_{12}a_3)\frac{y_1^{2k+1}y_2}{\Theta^{4k^2+4k}}$$

$$B_2 = (\mathcal{B}y, y),$$

donde $\mathcal{B}$ esta dado por (5.6).

Usando, nuevamente las condiciones (5.8) y el hecho de que $f_{12} > 0$, $a_i < 0$ para $i = 1, 2, 3$, obtenemos

$$f_{22} + f_{12}a_3 = 0,$$

$$(\mathcal{A}y, y) \leq 0$$

y

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{2}f_{12} & \frac{2k+3}{2}f_{12} \\ \frac{2k+3}{2}f_{12} & -4f_{12}a_3 \end{pmatrix}.$$

Finalmente usando (5.9), obtenemos

$$f_{11}a_3 + f_{12} < 0,$$

$$(\mathcal{B}y, y) > 0.$$

Usando los resultados obtenidos, llegamos a

$$\dot{\Theta} = \frac{B_1}{B_2} < 0.$$

Haciendo la sistitución $x_2 = C\Theta^{2k+1}x_1$, donde $C \in \mathbb{R}$, en la ecuación (5.4) tenemos

$$x_1^2 = \frac{2a_0\Theta^2}{f_{11} + 2f_{12}C + f_{22}C^2} \quad (5.10)$$

$$x_2^2 = C^2 \frac{2a_0\Theta^{4k+4}}{f_{11} + 2f_{12}C + f_{22}C^2}. \quad (5.11)$$

Finalmente, usando las igualdades (5.10) y (5.11) obtenemos

$$\dot{\Theta} = \frac{f_{11}a_1 + (f_{11}a_2 + f_{12}a_1)C + f_{12}a_2C^2}{f_{11} + (2k+3)f_{12}C + 4f_{22}C^2} +$$

$$(2a_0)^k \frac{f_{12} + a_3f_{11}}{(f_{22}C^2 + 2f_{12}C + f_{11})^k (f_{11} + (2k+3)f_{12}C + 4f_{22}C^2)}. \quad (5.12)$$

Note que el denominador no se puede anular para ningún valor de C en ninguno de los sumandos, ya que, como vimos anteriormente las formas cuadráticas F y $\mathcal{B}$ resultan ser positivas definidas. El primer sumando es cero cuando C es solución de

$$f_{11}a_1 + (f_{11}a_2 + f_{12}a_1)C + f_{12}a_2C^2 = 0. \quad (5.13)$$

Sea C_{12} soluciones de la ecuación (5.13). Para C_{12} , el segundo sumando es estrictamente negativo. Para $C \rightarrow \infty$, el segundo sumando tiende a 0, pero el primer sumando tiende a $\frac{f_{12}a_2}{4f_{22}} < 0$. Ya que $\dot{\Theta}(C)$ es continua para todos $C \in \mathbb{R}$, entonces es posible encontrar un $\gamma > 0$, tal que $\dot{\Theta}(x) \leq -\gamma$ para todos x . ■

Lema 23 *Lema 24* Sea a_0 solución positiva de

$$2a_0\lambda_{\max} + 2\lambda_{\max}ba_0^{\frac{2k+1}{2}} + b^2a_0^{2k+1} - 1 = 0, \quad (5.14)$$

donde

$$b = |a_3| \left(\frac{2f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} \right)^{\frac{2k+1}{2}},$$

$$\lambda_{\max} = a_1a_2 \frac{a_2 + a_1a_3}{a_1a_3f_{12} - a_2f_{12}}.$$

Entonces, si se satisface el lema 1 tenemos

$$|u(x)| \leq 1.$$

Demostración. Note primero que por el lema 21

$$\frac{2f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2} > 0, \lambda_{\max} > 0.$$

Entonces la ecuación (5.14) tiene solución positiva.

Podemos escribir el control $u(x)$ usando la matriz D_{Θ} ,

$$u(x) = \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x + \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}},$$

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.43

donde $a^T = (a_1, a_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left(\Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x + \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}}, \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x + \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} \right) = \\ &= \left(\Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x, \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x \right) + 2 \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} + \left(\frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} \right)^2 \\ &= \frac{2a_0}{2a_0 \Theta(x)} (aa^T D_{\Theta(x)} x, D_{\Theta(x)} x) + 2 \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} + \left(\frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Usando la ecuación (5.7) obtenemos

$$|u(x)|^2 = \frac{2a_0}{(F D_{\Theta(x)} x, D_{\Theta(x)} x)} (aa^T D_{\Theta(x)} x, D_{\Theta(x)} x) + 2 \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} + \left(\frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} \right)^2.$$

De las propiedades de las formas cuadráticas, se puede hacer la siguiente estimación

$$\frac{(aa^T D_{\Theta(x)} x, D_{\Theta(x)} x)}{(F D_{\Theta(x)} x, D_{\Theta(x)} x)} \leq \lambda_{\max},$$

donde $\lambda_{\max}$ es la mayor solución de

$$\det(aa^T - \lambda F) = 0.$$

Resolviendo para λ , obtenemos

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{\frac{a_1}{a_2} f_{12} (-f_{12} a_3) + f_{12}^2} \left(a_2^2 \frac{a_1}{a_2} f_{12} + a_1^2 (-f_{12} a_3) - 2a_1 a_2 f_{12} \right),$$

sustituyendo

$$\lambda_{\max} = a_1 a_2 \frac{a_2 + a_1 a_3}{a_1 a_3 f_{12} - a_2 f_{12}}.$$

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} 2 \Theta(x)^{-\frac{1}{2}} a^T D_{\Theta(x)} x \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} + \left(\frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} \right)^2 &= \\ 2 \left(\frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta(x)^{2k+2}} \right) \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} + \left(\frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}} \right)^2. \end{aligned}$$

Usando (5.10) obtenemos

$$|x_1| = \sqrt{\frac{2a_0\Theta^2}{f_{11} + 2f_{12}C + f_{22}C^2}}.$$

Sustituyendo $|x_1|$ llegamos a la desigualdad

$$2\Theta^{-\frac{1}{2}}a^T D_{\Theta}x \frac{a_3x_1^{2k+1}}{\Theta^{2k+1}} + \left(\frac{a_3x_1^{2k+1}}{\Theta^{2k+1}}\right)^2 \leq$$

$$2\lambda_{\max}|a_3| \left(\frac{2a_0}{f_{11} + 2f_{12}C + f_{22}C^2}\right)^{\frac{2k+1}{2}} + a_3^2 \left(\frac{2a_0}{f_{11} + 2f_{12}C + f_{22}C^2}\right)^{2k+1}.$$

Maximizando $\frac{2}{f_{11}+2f_{12}C+f_{22}C^2}$ obtenemos que

$$2\Theta^{-\frac{1}{2}}a^T D_{\Theta}x \frac{a_3x_1^{2k+1}}{\Theta^{2k+1}} + \left(\frac{a_3x_1^{2k+1}}{\Theta^{2k+1}}\right)^2 \leq$$

$$2\lambda_{\max}|a_3| \left(\frac{2f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}\right)^{\frac{2k+1}{2}} a_0^{\frac{2k+1}{2}} + a_3^2 \left(\frac{2f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}\right)^{2k+1} a_0^{2k+1}.$$

Finalmente, tenemos

$$|u(x)|^2 \leq 2a_0\lambda_{\max} + 2\lambda_{\max}a_3 \left(\frac{2f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}\right)^{\frac{2k+1}{2}} a_0^{\frac{2k+1}{2}} +$$

$$a_3^2 \left(\frac{2f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}^2}\right)^{2k+1} a_0^{2k+1}.$$

Entonces, si a_0 es solución de la ecuación (5.14) tenemos

$$|u(x)| \leq 1.$$

Con ello probamos el lema. ■

Observación 25 Usamos la transformación $x_2 = C\Theta^{2k+1}x_1$ en nuestras estimaciones. Esta transformación es posible para los valores x_1, x_2 tales que $x_1 \neq 0$. Es fácil ver que los lemas 1, 2 y 3 se cumplen para los puntos $(0, x_2)$.

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.45

El siguiente teorema resuelve el problema de estabilización en tiempo finito para la familia de sistemas controlables (5.1). Remarquemos que estos sistemas son no linealizables y de acuerdo a nuestros conocimientos, este resultado es original.

Teorema 26 Sea $u(x) \in S$, donde

$$S = \{u(x) \mid u(x) = \frac{a_1 x_1}{\Theta(x)} + \frac{a_2 x_2}{\Theta(x)^{2k+2}} + \frac{a_3 x_1^{2k+1}}{\Theta(x)^{2k+1}},$$

$$\text{con } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_- \text{ y } k \in \mathbb{N}\}.$$

Sea además $\Theta(x)$, la solución positiva de la ecuación (5.4), donde a_0 es la solución positiva de (5.14) y

$$F = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{a_2} f_{12} & f_{12} \\ f_{12} & -f_{12} a_3 \end{pmatrix},$$

con $f_{12} > 0$. Entonces, si la desigualdad (5.9) se cumple, la pareja $(u(x), \Theta(x))$ resuelve el problema de síntesis para el sistema (5.1).

Demostración. Veamos primero si la función $f(x, u)$ del sistema (5.1), dada por

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} u \\ x_1^{2k+1} \end{pmatrix},$$

es Lipshitz-continua. Tenemos

$$\|f(x', u') - f(x'', u'')\| = \sqrt{(u' - u'')^2 + (x_1'^3 - x_1''^3)^2} \leq$$

$$|u' - u''| + |x_1''^3 - x_1'^3| = |u' - u''| + |3\xi^2| |x_1'' - x_1'|,$$

donde $\xi \in (x_1', x_1'')$. Ahora como $0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1 \Rightarrow |x_1| < \rho_1$ entonces

$$\begin{aligned} \|f(x', u') - f(x'', u'')\| &\leq |u' - u''| + 3\rho_1^2 |x' - x''| \\ &\leq (1 + 3\rho_1^2) (|u' - u''| + |x' - x''|). \end{aligned}$$

Así, entonces $f(x, u)$ es Lipshitz continua.

La continuidad y derivabilidad de la función $\Theta(x)$, para $x \neq 0$, la estableceremos aplicando el teorema de la función implícita. Para ello calculemos la derivada de la función.

$$F(\Theta, x_1, x_2) = 2a_0\Theta^{4k+4} - f_{11}x_1^2\Theta^{4k+2} - 2f_{12}x_1x_2\Theta^{2k+1} - f_{22}x_2^2,$$

con respecto a Θ .

La derivada viene dada por

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta} = (8k + 8) a_0 \Theta^{4k+3} - (4k + 2) f_{11} x_1^2 \Theta^{4k+1} - (4k + 2) f_{12} x_1 x_2 \Theta^{2k}.$$

Multiplicamos por Θ^{-1} la ecuación (5.4), tenemos

$$2a_0 \Theta(x)^{4k+3} = f_{11} x_1^2 \Theta^{4k+1} + 2f_{12} x_1 x_2 \Theta^{2k} + f_{22} x_2^2 \Theta^{-1}.$$

Usando la igualdad para $2a_0 \Theta(x)^{4k+3}$ en la derivada, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta} = 2f_{11} x_1^2 \Theta^{4k+1} + (4k + 6) f_{12} x_1 x_2 \Theta^{2k} + f_{22} x_2^2 \Theta^{-1}.$$

Haciendo el cambio $y_1 = x_1 \Theta^{2k+\frac{1}{2}}$, $y_2 = x_2 \Theta^{-\frac{1}{2}}$, llegamos a

$$\frac{\partial F}{\partial \Theta} = (F_1 y, y),$$

donde

$$F_1 = \begin{pmatrix} 2f_{11} & (2k + 3) f_{12} \\ (2k + 3) f_{12} & f_{22} \end{pmatrix}.$$

Notamos que F_1 es positiva definida, debido a la forma de F y a la desigualdad (5.9), entonces llegamos a que $\frac{\partial F}{\partial \Theta} > 0$, $\forall x \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, resulta que $\Theta(x)$ es continua y derivable para cualquier punto fuera del origen.

Para demostrar la continuidad de $\Theta(x)$ para $x = 0$, tomamos el elipsoide P_γ de la forma $P_\gamma = \left\{ x : \frac{1}{2a_0} \left(\frac{1}{\Theta} x_1^2 + \frac{1}{\Theta^7} x_2^2 \right) = \gamma \right\}$ y encontraremos γ máximo, tal que $Q \subset P_\gamma$. Para eso resolveremos el problema

$$\max \frac{1}{2a_0} (D_C^2 x, x) = \max \frac{1}{2a_0} \left(\frac{1}{\Theta} x_1^2 + \frac{1}{\Theta^{4k+3}} x_2^2 \right),$$

cuando $\Theta(x) = \frac{1}{2a_0} (F_C x, x) = C$. Aplicando condiciones necesarias de un extremo a la función

$$\frac{1}{2a_0} (D_C^2 x, x) - \mu \left[\frac{1}{2a_0} (F_C x, x) - C \right]$$

obtenemos

$$D_C^2 x = \mu F_C x.$$

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.47

Entonces tenemos que

$$\gamma = \frac{1}{2a_0} (D_C^2 x, x) = \frac{\mu}{2a_0} (F_C x, x) = \mu C.$$

Recordamos que $F_C = D_C F D_C$. Tomando $y = D_C x$ obtenemos

$$F y = \frac{1}{\mu} y.$$

Entonces $\gamma = \frac{1}{\lambda_{\min}} C$, donde $\lambda_{\min}$ es el valor propio más pequeño de la matriz F . El diametro del elipsoide $\frac{1}{2a_0} (D_C^2 x, x) = \frac{C}{\lambda_{\min}}$ tiende a cero, cuando $C \rightarrow 0$. Asi obtenemos la continuidad de $\Theta(x)$ en $x = 0$. Entonces, usando el lema 21, obtenemos una función $\Theta(x)$ única, positiva, que además es continua para todos x y derivable para $x \neq 0$. Usando el lema 22 llegamos a que

$$\dot{\Theta}(x) \leq -C_0,$$

donde $C_0 > 0$. Asi, obtuvimos una función que satisface a las condiciones del teorma fundamental.

Mostraremos que $u(x)$ es también de Lipshitz. Notamos que u es diferenciable excepto el origen, entonces

$$|u(x') - u(x'')| = \left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \Delta x_2 + o(\Delta x) \right| \leq \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right| + C \right) \|\Delta x\|.$$

Donde C es una constante. Como $0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1 \Rightarrow |x_1| < \rho_1$ y $|x_2| < \rho_1$, entonces las derivadas estan acotadas, por ello existe una constante $C_1(\rho, \rho_1)$ tal que

$$|u(x') - u(x'')| \leq C_1 \|\Delta x\|.$$

Por ello $u(x)$ satisface la condición de Lipshitz.

Entonces la pareja $(\Theta(x), u(x))$ resuelve el problema de síntesis para el sistema (5.1), donde $|u(x)| \leq 1$, debido a que el lema 24 se satisface. ■

Observación 27 Para el tiempo se puede hacer una estimación, usando el resultado del lema 22. Tenemos que $\dot{\Theta} \leq -\gamma$, donde γ es una constante

48CAPÍTULO 5. ESTABILIZACIÓN DE SISTEMAS NO LINEALIZABLES

positiva. Entonces, integrando del tiempo inicial $t_0 = 0$ al tiempo final T obtenemos

$$\Theta(x(T)) - \Theta(x_0(0)) \leq -\gamma t.$$

Usando que en el tiempo final T la trayectoria del sistema alcanza el origen, se puede concluir que $\Theta(x(T)) = 0$ y entonces, despejando t se tiene

$$T \leq \frac{\Theta(x_0(0))}{\gamma}. \quad (5.15)$$

Ejemplo 28 Consideramos el sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^3, \end{cases} \quad \text{donde } |u| \leq 1.$$

Tomamos $a_1 = -0,2$, $a_2 = -0,01$ y $a_3 = -0,1$. De acuerdo con los resultados obtenidos el control tiene la forma

$$u(x) = -0,2 \frac{x_1}{\Theta(x)} - 0,01 \frac{x_2}{\Theta(x)^4} - 0,1 \frac{x_1^3}{\Theta(x)^3}.$$

Para este ejemplo tomamos $F = \begin{pmatrix} 20 & 1 \\ 1 & 0,1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -4 & -0,2 \\ -0,2 & -0,01 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 20 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 0,4 \end{pmatrix}$. Notese que la relación (5.9) se satisface:

$$\frac{a_1}{a_2} a_3 + \frac{(2k+3)^2}{16} = -\frac{7}{16} < 0.$$

Encontraremos $\gamma > 0$ tal que

$$\dot{\Theta} \leq \gamma.$$

El valor a_0 , según el lema 2.1, lo obtenemos de la ecuación

$$8,0001 \times 10^{-5} a_0^3 + 1,0733 \times 10^{-4} a_0^{\frac{3}{2}} - 0,7218 = 0.$$

Su solución es:

$$a_0 = 23,183.$$

La parte derecha de la igualdad (5.12), para los valores dados es

$$\frac{-4 - 0,4C - 0,01C^2}{20 + 5C + 0,4C^2} - \frac{139,10}{(0,1C^2 + 2C + 10)(0,4C^2 + 5C + 20)}.$$

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.49

El máximo de esta expresión se encuentra en el punto $C = -41,385$ y entonces

$$\gamma = 1,2015 \times 10^{-2},$$

que verifica la desigualdad $\dot{\Theta} \leq -\gamma$ (ver (4.5)), con $\alpha = 1$ y $\beta = \gamma$.

Para las condiciones iniciales $x_{10}(0) = 1$ y $x_{20}(0) = 1$ calculamos $\Theta(x_0)$, es decir resolvemos la ecuación

$$46,366\Theta^8 - 20\Theta^6 - 2\Theta^3 - 0,1 = 0.$$

La solución es $\Theta(x_0) = 0,74165$.

Usando la formula (5.15) tenemos la estimación para el tiempo

$$T \leq 61,727.$$

Finalmente la trayectoria del sistema cerrado

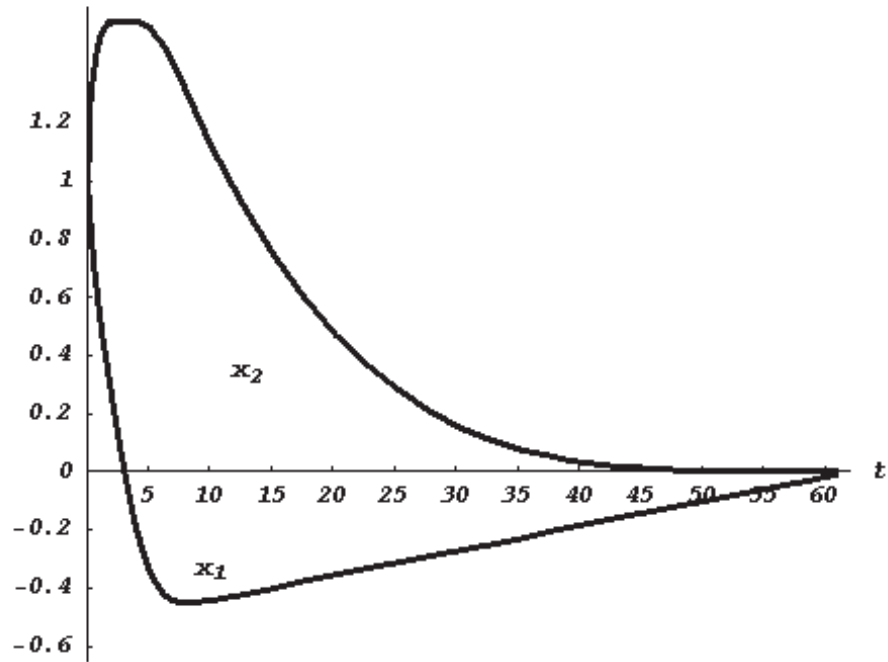
$$\dot{x}_1 = u(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = x_1^3,$$

la obtenemos del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -0,2 \frac{x_1}{\Theta(x)} - 0,01 \frac{x_2}{(\Theta(x))^4} - 0,1 \frac{(x_1)^3}{(\Theta(x))^3}, \\ \dot{x}_2 &= (x_1)^3, \\ \dot{\Theta} &= \frac{-4(x_1)^2 (\Theta(x))^6 - 0,4x_1x_2 (\Theta(x))^3 - 0,01(x_2)^2 - (x_1)^4 (\Theta(x))^4}{20(x_1)^2 (\Theta(x))^6 + 5x_1x_2 (\Theta(x))^3 + 0,4(x_2)^2}, \end{aligned}$$

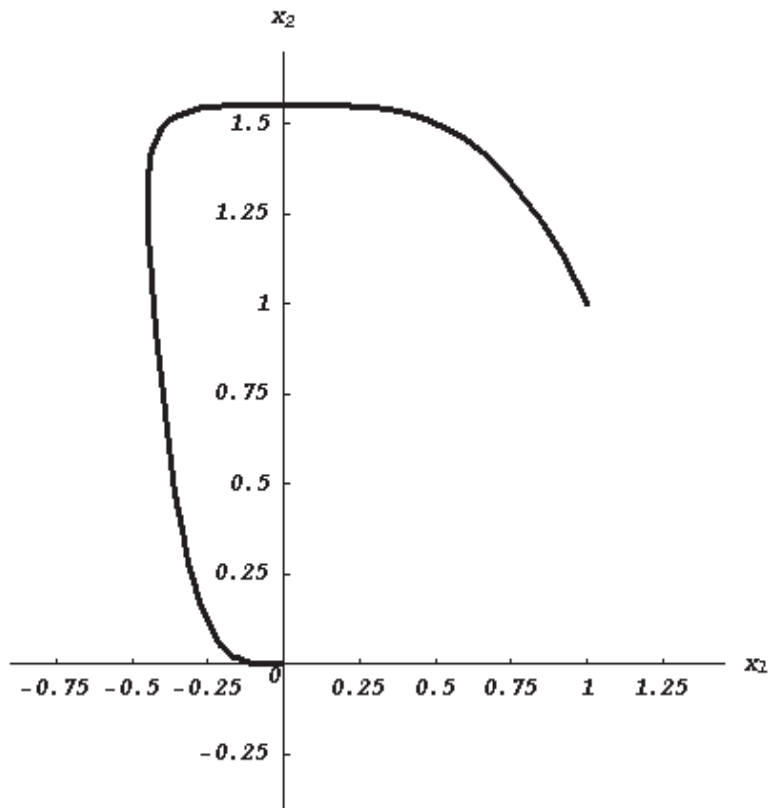
donde $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$ y $\Theta(x_0) = 0,74165$.

A continuación se presentan las gráficas de la trayectoria, de las curvas integrales $x_1(t)$ y $x_2(t)$, de la función de controlabilidad y del control para el sistema dado.

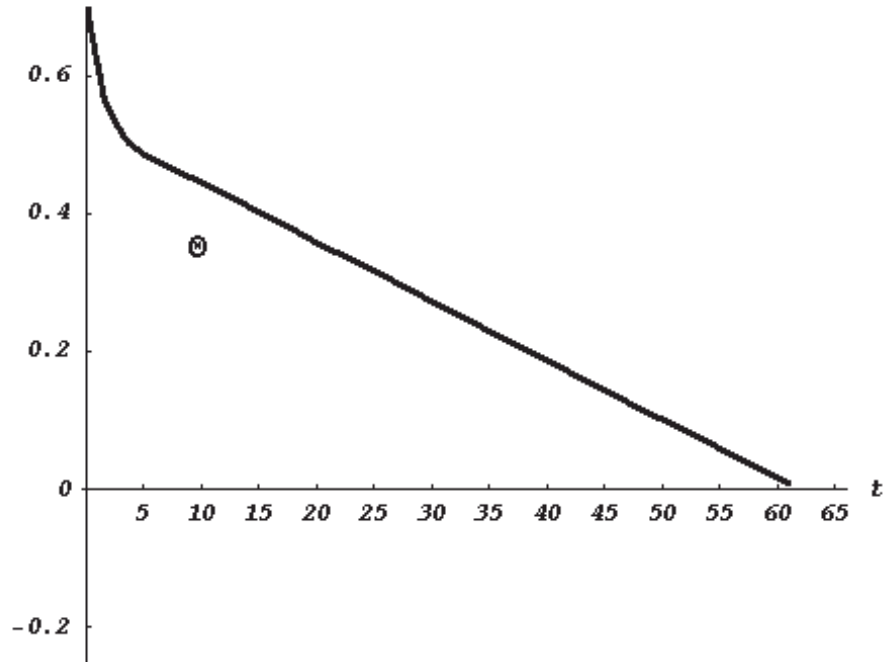


Trayectorias $x_1(t)$ y $x_2(t)$ del sistema

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.51

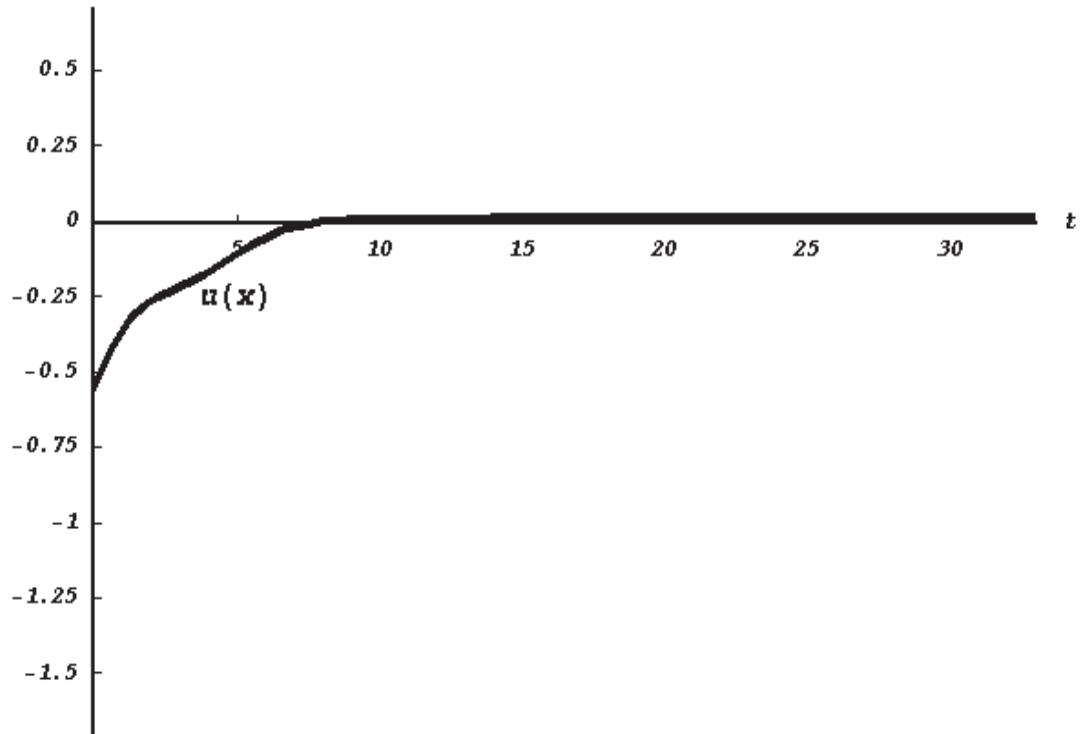


Gráfica de $(x_1(t), x_2(t))$



Gráfica de la función de controlabilidad $\Theta(x)$

5.1. CONSTRUCCIÓN DEL CONTROL Y LA FUNCIÓN DE CONTROLABILIDAD.53



Gráfica del control $u(x)$

Apéndice A

No existen criterios generales para checar la controlabilidad de un sistema. Sin embargo para ciertos sistemas existen resultados que nos garantizan la controlabilidad. A continuacion anunciamos un resultado de [23].

Teorema 29 *Consideramos un sistema controlable de la forma*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I = [t_0, T], \quad (\text{A.1})$$

donde $u \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_{\nu+1}}$ es el control, $x = (x_1, \dots, x_{\nu})^T \in \mathbb{R}^n$ es el estado con $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $m_i \leq m_{i+1}$, $n = m_1 + \dots + m_{\nu}$, y la función f tiene la forma triangular

$$f(t, x, u) = (f_1(t, x_1, x_2), \dots, f_{\nu}(t, x_1, \dots, x_{\nu}, u))^T$$

con $f_i(t, x_1, \dots, x_{i+1}) \in \mathbb{R}^{m_i}$ y satisface las condiciones:

(I) $f \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, $\frac{\partial f}{\partial x} \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{n \times n})$, $\frac{\partial f}{\partial u} \in C(I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^{n \times m})$.

(II) Para cada $i = 1, \dots, \nu$, y cada $(t, x_1, \dots, x_i) \in I \times \mathbb{R}^{m_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_i}$, tenemos $f_i(t, x_1, \dots, x_i) \in C^{m_{i+1}-m_i+1}(\mathbb{R}^{m_{i+1}}; \mathbb{R}^{m_i})$ y $f_i(t, x_1, \dots, x_i, \mathbb{R}^{m_{i+1}}) = \mathbb{R}^{m_i}$.

Entonces el sistema (A.1) es enteramente controlable en un tiempo I , por funciones de clase $C(I; \mathbb{R}^m)$.

Es fácil ver que el sistema (5.1) cumple las condiciones del teorema y por ello se puede controlar.

Bibliografía

- [1] Hall H.R. , Governors and governing mechanisms, The Technical Publishing Co., Manchester, 2nd ed., (1907).
- [2] Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G, Gamkrelidze R.V., Mishenko E.F., teoría matemática de procesos optimales, Moscú, Fismatgiz, (1961).
- [3] Krotov V.F, Métodos de solución de problemas variacionales con ayuda de condiciones suficientes del mínimo absoluto. I, Automatica y telemecánica, XXIII, #12 (1962).
- [4] Bellman R, Programación dinámica, Moscú, IL, (1960).
- [5] Kalman R. E., A new approach to linear filtering and prediction problems, ASME Trans., 82D (1960), 33-45.
- [6] Lyapunov A.M, Problema general sobre la estabilidad del movimiento, Moscú-Leningrado, Gostekizdat, (1950).
- [7] Wilkinson G.H, Problema algebraico de valores propios, Moscú, Nauka (1970).
- [8] Luenberger D.G, IEEE Trans. Automatic Control, AC-12, (1967).
- [9] Korobov V.I, Controlabilidad, Estabilidad de algunos sistemas no lineales, Ecuaciones Diferenciales, IX, #4 (1973).
- [10] Korobov V.I, Transformación del problema de controlabilidad al problema de frontera, Ecuaciones Diferenciales, XII, #7 (1976).
- [11] Elsgoltz L., Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional., QA374 E58, (1969), MIR Moscú URSS.

- [12] Arstein Z, Stabilization with relaxed controls, *Nonlinear Analysis, TMA*, 7 (1983), p.1163-1173.
- [13] Korobov, V. I. A general approach to the solution of the problem of synthesizing bounded controls in a control problem. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* 109(151) (1979), no. 4, 582–606, 647. (Reviewer: P. Brunovsky) 93B50 (34H05)
- [14] Sontag E.D, A universal construction of Arstein's theorem on nonlinear stabilization, *Systems and Control Letters*, 13 (1989).
- [15] Korobov, V. I.; Sklyar, G. M. Methods for constructing positional controls, and a feasible maximum principle. (Russian) *Differentsialnye Uravneniya* 26 (1990), no. 11, 1914–1924, 2020; translation in *Differential Equations* 26 (1990), no. 11, 1422–1431 (1991) (Reviewer: Manfred Goebel) 49N35 (93B50)
- [16] Moin P.y Bewley Th., Feedback control of turbulence, en *Mechanics USA 1994*, A. S.Kobayashi ed., *Appl. Mech. Rev.*, 47 (6) (1994), S3-S13.
- [17] Korobov, V. I.; Ivanova, T. I. Nonsmooth mapping of linear control systems. *J. Optim. Theory Appl.* 108 (2001), no. 2, 389–405. (Reviewer: Bozhidar Cheshankov) 93C15 (49J52)
- [18] Korobov, V. I.; Skorik, V. A. Synthesis of inertial controls for time-dependent systems. (Russian) *Prikl. Mat. Mekh.* 67 (2003), no. 5, 739–751. 93B50 (49N35)
- [19] Choque Rivero A.E.; Korobov V.I.; Skoryk V.O.: Controllability function as time of motion I. *Mat. Fiz. Anal. Geom* (in Russian), Kharkov, Ukraine; ISSN 1027-1767, No.2, Vol. 11, (2004), 208-225.
- [20] Choque Rivero A.E.; Korobov V.I.; Skoryk V.O.: Controllability function as time of motion II. *Mat. Fiz. Anal. Geom* (in Russian) Kharkov, Ukraine; ISSN 1027-1767, No. 3, Vol.11, (2004), 341-354.
- [21] Coron Jean-Michael: *Control and Nonlinearity, Mathematical Surveys and Monographs*, Vol 136, (2007).
- [22] Korobov V.I., *Método de la función de controlabilidad, R&C dynamics*, Moscú, (2007).

- [23] Korobov V.I.; Pavlichkov S.S. Global properties of triangular systems in the singular case, J.Math.Anal.Appl. 342(2008).