



UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

COCIENTES DEL POLITOPO $2s^{k-1}$

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
MAESTRO EN CS. MATEMÁTICAS

PRESENTA:
LUIS ANTONIO RUIZ LÓPEZ

ASESOR:
DR. DANIEL PELLICER COVARRUBIAS

MORELIA, MICHOACÁN, JUNIO DE 2013

Agradecimientos

Primero quiero agradecer el gran apoyo que he recibido de mis padres, Luis y Martha, que han estado ahí para empujarme durante toda mi carrera y durante toda mi vida. A mis hermanos: Erick y Carlos. A Fernando, por todos los años. A mis primos: Úrsula, Carlos, Araceli, Javier, etc., mis tíos Javier, Bertha, Mariana, Lola, Chely etc., y a toda mi familia en general. Thanks to the Urquizas: Susan, Cynthia, Rigo, Rigo Jr. Sulema, Marky, Gabriel, Isabella, etc., you guys are like a second family to me.

Quiero agradecer a mi asesor Daniel Pellicer, por llevar esto a un proyecto concluído y haberme apoyado en los momentos difíciles. A mis sinodales: Miguel Raggi, Maria Luisa Pérez, Isabel Hubard y Eugenia O'Reilly, porque sus comentarios fueron muy valiosos para este trabajo.

A mis profesores: Gerardo Raggi, Florian Luca, Daniel P., Daniel Juan, Ernesto Vallejo y Miguel R., porque de ellos aprendí bastante durante la maestría. I would like to thank Asia Weiss, Florian L. and Daniel P. for the recommendation letters. Thanks to all the people I met at Cuernavaca, Huatulco and/or Boston: Egon Schulte, Asia W., Barry Monson, Mark Mixer, Marston Conder, Dimitri Leemans, Gordon Williams, Francisco Zaragoza and Cipriano Santos for the inspiration.

A mis amigos: Poke, Daniel Raggi, Miguel R., Tere, Tero, Pelayo, Khépani, Mike, Poncho, Charly, Soffer, A. Tavera, Denae, Vigneo, Leo, Daniel Martinez, Arturo Díaz, Ricardo Gutierrez, Osvaldo Tellez, Osvaldo Guzmán, Manuel Sedano, Lucas, Jonathan Cancino (grupo *análisis funcional*), Vianey, Bosco, Naila, Pepe-Toño, Jimmy, Memo, Marevna, Hugo, Laura, etc. A Bety. A Ana, por el tiempo. Gracias a Héctor Tellez y Julián Jara, por ser grandes amigos y excelentes anfitriones. A Suky, Casiopea, Skithiryx, Tarox y Fido, que nunca me dejaron solo. Quiero agradecer especialmente a Isela Ruiz y Abdón Calderón por todas las horas que invirtieron conmigo intentando entender la vida, gracias por ayudarme a llenarla de significados.

Este trabajo fue realizado con el apoyo de los proyectos PAPIIT IB100312 (UNAM), PAPIIT IN106811-3 (UNAM) y CONACYT 166951.

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
Capítulo 1. Conceptos básicos de códigos lineales	3
1. Códigos lineales y parámetros	3
2. Códigos de Hamming	9
3. Códigos ternarios de Golay	10
Capítulo 2. Politopos abstractos	13
1. Definiciones y ejemplos	13
2. Politopos regulares	23
3. Politopos de dos órbitas	27
4. Cocientes	28
Capítulo 3. Los politopos $2^{\mathcal{K}}$ y $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$	31
1. Latices	31
2. El politopo $2^{\mathcal{K}}$	34
3. El politopo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$	41
Capítulo 4. Politopos abstractos construidos a partir de códigos lineales	57
1. Cocientes de $2^{\mathcal{K}}$	57
2. Cocientes de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$	63
Capítulo 5. Ejemplos a partir del código ternario de Golay	71
1. Politopos del Atlas de Michael Hartley	71
Apéndice 1	75
Apéndice 2	83
Bibliografía	85
Glosario de notación	87

Introducción

Históricamente muchos matemáticos han participado en descifrar mensajes, así como en detectar y corregir errores en estos, pero el estudio de la teoría de códigos formalmente comienza con un artículo publicado por C. Shannon en 1948 llamado “A mathematical theory of communication”. Desde entonces los códigos no sólo se han utilizado para la detección y corrección de errores en los mensajes, también han jugado un papel importante en muchas áreas de las matemáticas y las ciencias computacionales, como la teoría de grupos, combinatoria, criptografía, compresión de datos, etcétera. Dentro de la combinatoria, E. Schulte utilizó códigos binarios para construir una familia de politopos abstractos en un artículo publicado en 1988.

L. Danzer y E. Schulte comenzaron el estudio de los politopos abstractos a inicios de la década de 1980 con la tesis de E. Schulte titulada “Regulare Inzidenzkomplexe”, y los artículos “Regulare Inzidenzkomplexe II” y “Regulare Inzidenzkomplexe III”, donde introducen una clase especial de estructuras combinatorias con un gran parecido a los politopos regulares tradicionales. Dicha teoría despertó interés en la comunidad y pronto comienzan a aparecer trabajos de otros autores en este tema. En 2002 se publica el título “Abstract regular polytopes” de E. Schulte y P. McMullen, donde se encuentra gran parte de la teoría desarrollada hasta ese momento.

A pesar de que los politopos abstractos son complejos de incidencia más restrictivos que sus predecesores, aún es una labor compleja construir familias de ejemplos con propiedades representativas que guíen hacia la solución de problemas del área.

En esta tesis se le dará continuidad a [10] donde E. Schulte construye una familia de politopos, usando otra familia previamente descrita por L. Danzer en [1], y tomando el cociente por códigos binarios apropiados. Generalizaremos estos resultados a cocientes por códigos sobre \mathbb{F}_p , para cualquier p primo. Implementaremos esa misma idea en una familia descrita por D. Pellicer en [8], que generaliza a la construcción de L. Danzer y, usando técnicas nuevas y propias de la teoría de politopos abstractos, logramos mejorar versiones de los resultados que obtiene E. Schulte en su trabajo.

El trabajo se divide en cinco capítulos. En el primer capítulo damos una breve introducción a la teoría de códigos lineales. Definimos los conceptos que son necesarios en los capítulos posteriores y damos algunos ejemplos que son usados al final de la tesis.

En el segundo capítulo introducimos los conceptos básicos de la teoría de politopos abstractos tratando de motivarla mediante la teoría de politopos convexos. Damos algunos resultados que facilitan su estudio y que nos son de mucha ayuda más adelante.

En el tercer capítulo describimos combinatoriamente las construcciones de L. Danzer y D. Pellicer. Damos sus propiedades y mostramos cómo describir y cómo actúan sus grupos de automorfismos.

En el cuarto capítulo construimos familias de politopos a partir de las descritas en el capítulo 3, como cocientes de estos por códigos lineales. Describimos algunas de sus propiedades, su grupo de automorfismos y su acción de éste en el politopo.

En el quinto capítulo estudiamos a los politopos que se encuentran en el Atlas de M. Hartley buscando a todos aquellos para los que es posible hacer las construcciones previamente descritas tomando cociente por el código ternario de Golay extendido.

En esta tesis todas las funciones serán evaluadas por izquierda, y si n es un número natural, $[n]$ denotará al conjunto $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Por ejemplo, si $j \in [m]$ y $\sigma \in S_n$, denotaremos por $(j)\sigma$ a la imagen de j bajo la permutación σ .

Capítulo 1

Conceptos básicos de códigos lineales

En este primer capítulo introduciremos los conceptos elementales de la teoría de códigos lineales y daremos dos ejemplos que nos serán especialmente útiles en los Capítulos 4 y 5. La teoría aquí contenida puede ser encontrada con mayor detalle en los Capítulos 1 y 10 de [5].

1. Códigos lineales y parámetros

En una situación de comunicación entre dos entidades, un emisor y un receptor, el emisor le envía un mensaje al receptor mediante un canal de transmisión.

Con el inicio de las telecomunicaciones surgió un gran problema: los canales de transmisión no transfieren de manera fiel los mensajes que son enviados a través de ellos, el ruido que hay en dichos canales los altera. Aparte de las formas que se desarrollaron para, en algunos casos, reducir la intensidad del ruido, también se tuvieron que desarrollar herramientas para que el receptor pueda recuperar el mensaje original enviado por el emisor a través del canal, a pesar de los daños que el ruido le pueda ocasionar al mensaje. Una solución es crear un proceso de codificación para añadir redundancia al mensaje enviado, y otro proceso de decodificación para recuperar el mensaje original.

Un código, como objeto matemático, es un subconjunto de un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo finito, cuyos elementos, llamados palabras, están en correspondencia uno a uno con los posibles mensajes que el emisor envía al receptor, por ejemplo, cadenas de caracteres de determinada longitud.

La estructura de subconjunto de un espacio vectorial es pobre, pero cuando se trata de un subespacio vectorial, tanto su estudio como sus procesos de codificación y decodificación se facilitan.

Definición.

Definición 1.1. *Código lineal*

Sea \mathbb{F} un campo finito y sean $n, k \in \mathbb{N}$, con $k \leq n$. Un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F} es un subespacio vectorial C de \mathbb{F}^n de dimensión k . En este caso decimos que k es la dimensión del

código y n es su longitud. Si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$, se dice que C es un código binario; si $\mathbb{F} = \mathbb{F}_3$, se dice que es un código ternario.

En esta tesis trabajaremos con códigos lineales, así que cuando se utilice la palabra código nos referiremos a códigos lineales a menos que se especifique lo contrario. Un *subcódigo* C' de C es un subespacio vectorial $C' \leq C$. A los elementos de un código C les llamaremos *palabras*. Dada una palabra $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in C$, el *peso* de w , denotado por $WT(w)$, es la cantidad de entradas de w distintas de cero. El *peso mínimo* de C , denotado por $WT(C)$ es el mínimo de los pesos de sus palabras distintas de cero. Para $u, w \in \mathbb{F}^n$ se define la *distancia de Hamming* entre u y w como el número de entradas en las que difieren, y se denota por $d(u, w)$. La *distancia mínima* de C es el mínimo de las distancias de Hamming entre palabras distintas del código. A continuación presentaremos algunos resultados que relacionan la distancia mínima con el peso mínimo.

Observación 1.2. Sean $u, w \in C$. Entonces $WT(w) = d(w, \bar{0})$ y $d(u, w) = WT(w - u)$.

Proposición 1.3. Sea C un $[n, k]$ -código sobre un campo finito \mathbb{F} . Entonces la distancia mínima de C es igual a su peso mínimo.

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in C$ una palabra de peso mínimo, entonces, dado que $d(w, \bar{0}) = WT(w)$, la distancia mínima de C es menor o igual a $WT(w)$.

Ahora, sean $u, w \in C$ tales que $d(u, w)$ es mínimo. Entonces, dado que $d(u, w) = WT(w - u)$, tenemos que $WT(C)$ es menor o igual a $d(u, w)$.



Observación 1.4. Sea C un código lineal. Entonces para todo $C' \leq C$, se tiene que C' es un código lineal tal que $WT(C') \geq WT(C)$.

Como ya dijimos, cuando una palabra es recibida, ésta puede tener errores. Un *decodificador de distancia mínima* trata de “adivinar” el mensaje que fue enviado originalmente, encontrando las palabras del código con mayor “parecido”, es decir, se supone que se cometió una cantidad mínima de errores para poder recuperar el mensaje original. Si $WT(C)$ es el peso mínimo del código, los decodificadores pueden detectar la presencia de $(WT(C) - 1)$ errores, y pueden corregir $\lfloor \frac{WT(C)-1}{2} \rfloor$ errores. Para la detección de errores en códigos binarios es útil lo siguiente.

Definición 1.5. Sea C un $[n, k]$ -código binario. Decimos que una palabra $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in C$ es una palabra par si $WT(w)$ es par, y C será un código par si todas sus palabras son pares.

Si C es un $[n, k]$ -código binario y $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in C$, entonces w es una palabra par si y sólo si $\sum_{i \in [n]} w_i = 0$. Este hecho motiva la siguiente definición.

Definición 1.6. Sea \mathbb{F} un campo finito y sea C un $[n, k]$ -código sobre \mathbb{F} . Decimos que $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in C$ es una palabra de tipo par si $\sum_{i \in [n]} w_i = 0$, y C será un código de tipo par si todas sus palabras son de tipo par.

En muchas estructuras, el concepto de *dualidad* es muy importante y en muchas ocasiones se estudian el objeto y su dual de manera conjunta.

Definición 1.7. Sea C un $[n, k]$ -código sobre un campo finito \mathbb{F} . El código dual de C es el espacio vectorial

$$C^\perp := \left\{ u = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{F}^n : \text{para toda } w \in C, \sum_{i \in [n]} u_i w_i = 0 \right\}.$$

A partir de la definición de código dual es fácil observar que para todo código C se tiene que $C = (C^\perp)^\perp$.

Matriz generadora y matriz de paridad.

Los códigos lineales fueron inventados con el objetivo de ser implementados en situaciones reales, como transmisiones de radio, comunicación satelital o entre computadoras. Es por esto que es necesario presentarlos de una forma menos abstracta para que las máquinas sean capaces de interpretarlos.

Definición 1.8. *Matriz generadora y matriz de paridad*

Sea C un $[n, k]$ -código sobre un campo finito \mathbb{F} . Una matriz generadora de C es una matriz $G \in M_{k,n}(\mathbb{F})$ cuyos renglones forman una base de C . Una matriz de paridad es una matriz $H \in M_{n-k,n}(\mathbb{F})$ cuyos renglones forman una base de C^\perp .

Hay una forma sencilla de obtener a C a partir de su matriz de paridad.

Observación 1.9. Sea \mathbb{F} un campo finito, sea C un $[n, k]$ -código sobre \mathbb{F} y sea H una matriz de paridad de C . Entonces

$$C = \{w \in \mathbb{F}^n : Hw^t = 0\}.$$

Si C es un $[n, k]$ -código, entonces a cada mensaje se le están agregando $n-k$ “grados de libertad” o “grados de redundancia”. Intuitivamente, entre más grados de libertad tenga un código, más preciso será éste, pero su eficiencia en tiempo será menor. A un conjunto de k columnas linealmente independientes de una matriz generadora se le llama *conjunto de información*, y a su complemento

se le llama *conjunto de redundancia*. Decimos que una matriz generadora G está en *forma estándar* si existe una matriz $A \in M_{n-k,k}(\mathbb{F})$ tal que

$$G = \left(I_k \mid A \right).$$

Dado que la matriz generadora de un código es de rango máximo, todo código es generado por alguna matriz en un forma estándar. El siguiente resultado es el Teorema 1.2.1 de [5].

Proposición 1.10. *Sea C un $[n, k]$ -código sobre un campo finito \mathbb{F} . Si una matriz generadora estándar de C es $G = \left(I_k \mid A \right)$, entonces $H = \left(-A^t \mid I_{n-k} \right)$ es una matriz de paridad.*

Ejemplo 1.11. Consideremos el $[n, 1]$ -código sobre cualquier campo finito \mathbb{F} cuya matriz generadora es

$$G = \left(1 \ 1 \ \cdots \ 1 \right).$$

Es claro que su peso mínimo es n . A este código se le llama el *código de repetición*. Nótese que G está en forma estándar, así que una matriz de paridad del código de repetición es

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

De la matriz H podemos observar que el dual del código de repetición tiene peso mínimo 2. Es fácil ver que el código dual está formado exactamente por todas las palabras de tipo par en \mathbb{F}^n , así que todo código de tipo par es subcódigo de éste. En el capítulo denotaremos por \mathcal{EP}_s a este código.

A partir de la matriz de paridad de un código C es posible encontrar su peso mínimo. El siguiente resultado es el Corolario 1.4.14 de [5].

Proposición 1.12. *Sea C un $[n, k]$ -código y sea H su matriz de paridad. Entonces el peso mínimo de C es la cardinalidad del mínimo conjunto de columnas de H linealmente independientes tal que no tiene subconjuntos propios linealmente independientes.*

Grupos de automorfismos y códigos equivalentes.

Como ya mencionamos anteriormente, en un $[n, k]$ -código C , un conjunto de k columnas linealmente independientes forman un conjunto de información, y el resto es un conjunto de redundancia. Intuitivamente la funcionalidad del código no depende de dónde está ubicada la redundancia ni en qué orden está dada la información, siempre y cuando el decodificador pueda recuperar la palabra

enviada, también puede recuperar el mensaje enviado. Esto motiva a la siguiente definición de equivalencia en códigos.

Definición 1.13. Sean C, C' dos $[n, k]$ -códigos lineales sobre un campo finito \mathbb{F} . Decimos que C y C' son equivalentes por permutaciones si existe una matriz de permutación $A \in GL(n, \mathbb{F})$ tal que

$$C' = CA = \{wA : w \in C\}.$$

Notemos que A actúa en C permutando las entradas de sus elementos o, alternativamente, si G es una matriz generadora para C se puede pensar que A está permutando las columnas de G , de forma que GA es una matriz generadora para C' . Esta noción de equivalencia da lugar a la siguiente definición de automorfismo.

Definición 1.14. Automorfismos por permutaciones.

Sea C un $[n, k]$ -código lineal sobre un campo finito \mathbb{F} . Una permutación $\gamma \in S_n$ es un automorfismo por permutaciones de C si para toda $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in C$, el vector

$$(w)\gamma := (w_{(0)\gamma}, w_{(1)\gamma}, \dots, w_{(n-1)\gamma})$$

es una palabra de C .

Es claro que el conjunto de automorfismos por permutación de C es un grupo isomorfo a $Stab_{\Pi}(C)$, el estabilizador de C bajo la acción del grupo Π de matrices de permutación de $GL(n, \mathbb{F})$. Respetando la notación de [5], al grupo de automorfismos por permutación de C lo vamos a denotar por $PAut(C)$.

Observación 1.15. Sea C un $[n, k]$ -código lineal sobre un campo finito \mathbb{F} . Entonces $PAut(C) = PAut(C^\perp)$.

Sea $\sigma \in S_n$ y sea A_σ la matriz de permutación definida por

$$A_\sigma[i, j] := \begin{cases} 1 & \text{si } i = (j)\sigma, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1}) \in C$ si y sólo si $(w)\sigma = (w_{(0)\sigma}, w_{(1)\sigma}, \dots, w_{(n-1)\sigma}) \in CA_\sigma$.

La siguiente proposición nos dirá cómo se comparan los grupos de automorfismos por permutaciones de C y CA_σ .

Proposición 1.16. Sea C un $[n, k]$ -código lineal sobre un campo finito \mathbb{F} . Sea $\sigma \in S_n$. Entonces $PAut(CA_\sigma) = \sigma^{-1}PAut(C)\sigma$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\gamma \in S_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\gamma \in PAut(C) &\Leftrightarrow \forall w \in C, (w_{(0)\gamma}, w_{(1)\gamma}, \dots, w_{(n-1)\gamma}) \in C \\
&\Leftrightarrow \forall w \in C, (w_{(0)\gamma\sigma}, w_{(1)\gamma\sigma}, \dots, w_{(n-1)\gamma\sigma}) \in CA_\sigma \\
&\Leftrightarrow \forall w \in C, (w_{(0)\sigma\sigma^{-1}\gamma\sigma}, w_{(1)\sigma\sigma^{-1}\gamma\sigma}, \dots, w_{(n-1)\sigma\sigma^{-1}\gamma\sigma}) \in CA_\sigma \\
&\Leftrightarrow \sigma^{-1}\gamma\sigma \in PAut(CA_\sigma).
\end{aligned}$$



La noción de grupo de automorfismo se generaliza a la acción de un grupo más grande que el de matrices de permutación. Una *matriz monomial* es una matriz cuadrada $M \in M_n(\mathbb{F})$ que tiene exactamente una entrada distinta de 0 en cada renglón y en cada columna. El conjunto de matrices monomiales de $n \times n$ es un grupo, al cual denotaremos por $Mon_n(\mathbb{F})$. Nótese que las matrices de permutación son las matrices monomiales cuyas entradas distintas de 0 son todas iguales a 1.

Definición 1.17. Sea C un $[n, k]$ -código lineal sobre un campo finito \mathbb{F} . Una matriz monomial $M \in M_n(\mathbb{F})$ es un automorfismo monomial de C si $M \in Stab_{Mon_n(\mathbb{F})}(C)$.

De aquí se desprende una noción generalizada de equivalencia, la cual estaremos usando por el resto de esta tesis.

Definición 1.18. *Códigos equivalentes*

Sean C, C' dos $[n, k]$ -códigos lineales sobre un campo finito \mathbb{F} . Decimos que C y C' son equivalentes si existe una matriz monomial $M \in Mon_n(\mathbb{F})$ tal que $C' = CM$.

Vale la pena hacer notar que si dos códigos son equivalentes por permutaciones, no necesariamente son equivalentes en el sentido de la definición anterior. Por ejemplo, tomemos el código cuya matriz generadora es

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Éste es equivalente al código de repetición, pero no son equivalentes por permutaciones.

En la teoría de códigos se extiende aún más la noción de equivalencia de códigos, permitiendo que exista, además, un automorfismo del campo.

Definición 1.19. *Códigos cíclicos.*

Sea C un $[n, k]$ -código sobre un campo finito \mathbb{F} . Decimos que C es cíclico si la permutación $(0 \ 1 \ 2 \ \dots \ n-1) \in PAut(C)$.

Los códigos cíclicos son de gran interés, dado que se han desarrollado herramientas que hacen muy eficiente su proceso de decodificación.

2. Códigos de Hamming

En esta sección definiremos a los códigos de Hamming, que serán nuestros primeros ejemplos de interés y serán utilizados en el Capítulo 4.

Sea $r \in \mathbb{N}$. Sea $M_r \in M_{r,2^r-1}(\mathbb{F}_2)$ la matriz cuya i -ésima columna sea la representación binaria de i . Es decir, para toda $1 \leq j \leq 2^r - 1$, si

$$j = a_0(2^0) + a_1(2^1) + \dots + a_{r-1}(2^{r-1}),$$

entonces la entrada

$$M_r[i, j] := a_{i-1}.$$

Definición 1.20. Sea $r \in \mathbb{N}$ y sea M_r la matriz definida anteriormente. El código de Hamming \mathcal{H}_r es el $[2^r - 1, 2^r - r - 1]$ -código cuya matriz de paridad es M_r .

Ejemplo 1.21. El código de Hamming \mathcal{H}_3 es el $[7, 4]$ -código cuya matriz de paridad es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que sus columnas son todos los posibles vectores distintos del vector cero de \mathbb{F}_2^3 , por lo tanto es equivalente al código con la siguiente matriz de paridad.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, por la Proposición 1.10, el código de Hamming \mathcal{H}_3 está generado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los siguientes resultados serán utilizados en el capítulo 4. La Proposición 1.22 es el Teorema 1.8.1 de [5], mientras que la Proposición 1.23 se deduce directamente de los resultados en 1.2.5 de [6].

Proposición 1.22. *Sea $r \in \mathbb{N}$. Entonces el $[2^r - 1, 2^r - r - 1]$ -código de Hamming \mathcal{H}_r tiene peso mínimo 3. Más aún, todo $[2^r - 1, 2^r - r - 1]$ -código binario con peso mínimo 3 es equivalente a \mathcal{H}_r .*

Proposición 1.23. *Sea $r \in \mathbb{N}$. Entonces existe un $[2^r - 1, 2^r - r - 1]$ -código binario cíclico equivalente a \mathcal{H}_r .*

3. Códigos ternarios de Golay

En esta sección definiremos a los códigos ternarios de Golay que utilizaremos en el Capítulo 5. Dichos códigos tienen una gran importancia tanto teórica como práctica, dado que el cociente entre su peso mínimo y su longitud es lo mayor posible, y sus grupos de automorfismos por permutaciones están en términos de los grupos simples esporádicos de Mathieu. La teoría aquí presentada se puede encontrar con mayor detalle en las secciones 1.8 y 10.4 de [5] y en la Sección 7 del Capítulo 20 de [11].

Definición 1.24. *El código ternario de Golay \mathcal{G}_{11} es el $[11, 6]$ -código ternario generado por la matriz*

$$G_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El código ternario de Golay extendido \mathcal{G}_{12} es el $[12, 6]$ -código ternario de tipo par generado por la matriz

$$G_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El código \mathcal{G}_{12} se obtiene a partir de \mathcal{G}_{11} agregando una *coordenada de paridad*, es decir, agregamos una coordenada a cada palabra del código para que éste sea de tipo par.

Proposición 1.25. *El peso mínimo del código del Golay \mathcal{G}_{11} es 5, mientras que el peso mínimo del código de Golay \mathcal{G}_{12} es 6.*

A partir de los parámetros conocidos hasta ahora podemos caracterizar a los códigos de Golay, salvo equivalencia.

Teorema 1.26. *Todo $[11, 6]$ -código ternario de peso mínimo 5 es equivalente al código de Golay \mathcal{G}_{11} , mientras que todo $[12, 6]$ -código ternario de peso mínimo 6 es equivalente al código de Golay \mathcal{G}_{12} .*

Los códigos de Golay han tenido una gran importancia teórica por las propiedades que tiene, como su elevado peso mínimo con respecto al número de coordenadas de sus elementos y que su grupo de automorfismos por permutaciones puede describirse en términos de un grupo bien conocido (en el caso de \mathcal{G}_{12}).

Notemos que en el teorema pasado estamos hablando de equivalencia a través de matrices monomiales. Dos códigos equivalentes no necesariamente tienen el mismo grupo de automorfismos por permutaciones. A continuación daremos presentaciones por permutaciones de sus grupos de automorfismos, calculadas usando SAGE.

Teorema 1.27.

- *El grupo de automorfismos por permutaciones del código de Golay \mathcal{G}_{12} es el grupo*

$$\langle (5, 7)(6, 11)(8, 9)(10, 12), (4, 6)(5, 10)(7, 8)(9, 12), (3, 4)(6, 8)(9, 11)(10, 12), \\ (2, 3)(5, 7)(8, 10)(9, 12), (1, 2)(5, 12)(6, 11)(7, 10) \rangle,$$

y éste es isomorfo al grupo simple esporádico de Mathieu \mathcal{M}_{11} .

- *El grupo de automorfismos por permutaciones del código de Golay \mathcal{G}_{11} es el grupo*

$$\langle (3, 4)(5, 7)(6, 9)(8, 11), (3, 7)(4, 8)(5, 11)(9, 10), (2, 3)(4, 6)(5, 8)(7, 10), (1, 2)(4, 11)(5, 8)(9, 10) \rangle,$$

y éste es isomorfo a un subgrupo de índice 12 de \mathcal{M}_{11} .

Capítulo 2

Politopos abstractos

En este capítulo daremos una introducción a la *teoría de politopos abstractos*. Haremos énfasis en los temas que usaremos en los capítulos posteriores.

1. Definiciones y ejemplos

La idea de *poliedro* es una generalización tridimensional natural del concepto de polígono, pero podemos ir aún más lejos. Un *politopo* es una generalización de estos dos conceptos hacia cualquier dimensión. Aunque han sido objeto de estudio desde hace ya mucho tiempo, es difícil alcanzar un consenso acerca de lo que es y lo que no es un politopo, dado que hay una gran cantidad de nociones y posibles generalizaciones que se tienen de polígono y poliedro.

Al igual que en la teoría de gráficas, la estructura de *incidencia* que hay entre los vértices, aristas, caras, etcétera, de un politopo, tiene propiedades combinatorias que determinan muchas otras características de éste. Un claro ejemplo es la posibilidad de demostrar que existen, a lo más, 5 poliedros convexos regulares usando únicamente algunos teoremas de teoría de gráficas. Un *politopo abstracto* es una estructura que satisface varias de las propiedades combinatorias básicas que resultan de la relación de incidencia que hay en los politopos convexos. A esta relación la representaremos como una relación de orden que, al mismo tiempo, reflejará la noción intuitiva de que un vértice es más pequeño que una arista, de que ésta, a su vez, es más pequeña que una cara, etcétera.

Conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 2.1. *Conjunto parcialmente ordenado.*

Un conjunto parcialmente ordenado (abreviado copo) es una pareja $\mathcal{P} := (P, \leq)$, donde P es un conjunto, llamado el conjunto de los elementos de \mathcal{P} , y " \leq " es una relación de orden entre elementos de P , es decir, una relación con las siguientes propiedades:

- Reflexividad: para todo $f \in P$, $f \leq f$.
- Antisimetría: para todos $f, g \in P$, si $f \leq g$ y $g \leq f$, entonces $f = g$.
- Transitividad: para todos $f, g, h \in P$, si $f \leq g$ y $g \leq h$, entonces $f \leq h$.

Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo. Si $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in P$ son tales que $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$, o $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$, diremos que \mathbf{f} y \mathbf{g} son *comparables* o *incidentes*. Un elemento $\mathbf{f} \in P$ es llamado *maximal* si para todo $\mathbf{g} \in P$, $\mathbf{g} \geq \mathbf{f}$ implica $\mathbf{g} = \mathbf{f}$; un elemento \mathbf{f} es *máximo* si para toda $\mathbf{g} \in P$, $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$. De manera análoga se define elemento *minimal* y elemento *mínimo*. Un conjunto $\mathcal{T} \subseteq P$ es una *cadena* si cualesquiera dos elementos $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{T}$ son comparables. Si P es una cadena diremos que \mathcal{P} es *totalmente ordenado*. La *longitud* de una cadena es el número de elementos de ésta. Si la longitud de una cadena \mathcal{T} es λ diremos que \mathcal{T} es una λ -*cadena*. Una cadena $\mathcal{T} \subseteq P$ será *cadena maximal* si para toda cadena $\mathcal{T}' \subseteq P$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ implica que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$. Si $\mathcal{T} = \{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\lambda-1}\} \subseteq P$ es una cadena donde $\mathbf{f}_0 < \mathbf{f}_1 < \dots < \mathbf{f}_{\lambda-1}$, entonces la denotaremos con corchetes en ese orden, es decir, $\mathcal{T} = [\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{\lambda-1}]$.

Definición 2.2. Decimos que un copo finito es un copo graduado si todas sus cadenas maximales tienen el mismo tamaño.

Ejemplo 2.3.

- El conjunto \mathbb{N} de los números naturales, con el orden usual, forma un copo. Más aún, es totalmente ordenado.
- Notemos que la relación de divisibilidad entre naturales es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Por lo tanto $(\mathbb{N}, |)$ es un copo.
- Dado un conjunto A , el conjunto potencia de A , denotado por $\wp(A)$, es un copo con la relación de contención. Es decir, para $B, C \in \wp(A)$ definimos B menor o igual que C si y sólo si $B \subseteq C$. Si A es un conjunto finito entonces $(\wp(A), \subseteq)$ es un copo graduado.

Si $\mathfrak{X} \subset P$, denotaremos por $\mathcal{P} - \mathfrak{X}$ al copo cuyo conjunto de elementos es $P \setminus \mathfrak{X}$ y con el orden inducido por el orden de \mathcal{P} . Para $m \in \mathbb{N}$, $[m]$ denota al conjunto $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$.

Proposición 2.4. Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo graduado y sea λ la longitud de sus cadenas maximales. Entonces existe una función $r_{nat} : P \rightarrow [\lambda]$ tal que si $\mathbf{f} < \mathbf{g}$, entonces $(\mathbf{f})r_{nat} < (\mathbf{g})r_{nat}$. A esta función le llamaremos la función natural de rango de \mathcal{P} .

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción sobre λ . Si $\lambda = 1$ el resultado es obvio. Supongamos que $\lambda > 1$ y sea \mathfrak{M} el conjunto de los elementos maximales de \mathcal{P} . Es claro que toda cadena maximal de $\mathcal{P} - \mathfrak{M}$ tiene exactamente $\lambda - 1$ elementos (dado que de cada cadena maximal se eliminó su elemento máximo). Entonces, por hipótesis de inducción, existe una función de rango $r : P \setminus \mathfrak{M} \rightarrow [\lambda - 1]$. Podemos extender el dominio de esta función hacia todo P definiendo, para $\mathbf{f} \in \mathfrak{M}$, $(\mathbf{f})r = \lambda - 1$.



Ahora probaremos que todo copo con elementos máximo y mínimo para el cual existe una función de rango es un copo graduado.

Proposición 2.5. Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo con elemento máximo y elemento mínimo, y sea λ el máximo de las longitudes de sus cadenas maximales. Supongamos que λ es finito y supongamos que existe una función $s : P \rightarrow [\lambda]$ tal que para cualesquiera $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in P$ se tiene que si $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$, entonces $(\mathbf{f})_s \leq (\mathbf{g})_s$ y, si no existe $\mathbf{h} \in P$ tal que $\mathbf{f} < \mathbf{h} < \mathbf{g}$, entonces $(\mathbf{f})_s = (\mathbf{g})_s - 1$. Entonces se tiene que \mathcal{P} es un copo graduado.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{T} \subseteq P$ una cadena maximal y sea \mathcal{T}' una cadena de longitud λ . Sean \mathbf{f}_0 y $\mathbf{f}_{\lambda-1}$ los elementos mínimo y máximo, respectivamente. Es claro que \mathbf{f}_0 y $\mathbf{f}_{\lambda-1}$ son elementos tanto de \mathcal{T} como de \mathcal{T}' . Como \mathcal{T}' tiene exactamente λ elementos, para toda $i \in [\lambda]$ existe $\mathbf{g} \in \mathcal{T}'$ tal que $(\mathbf{g})_s = i$, en particular podemos deducir que $(\mathbf{f}_0)_s = 0$ y $(\mathbf{f}_{\lambda-1})_s = \lambda - 1$. Ahora, dado $0 < i < \lambda - 1$, por ser \mathcal{T} un conjunto finito tenemos que existe un elemento \mathbf{g} máximo con la propiedad $(\mathbf{g})_s < i$ y un elemento \mathbf{h} mínimo con la propiedad $(\mathbf{h})_s > i$. Como $\mathbf{h} > \mathbf{g}$ y $(\mathbf{h})_s \neq (\mathbf{g})_s + 1$, entonces existe $\mathbf{f} \in P$ tal que $\mathbf{g} < \mathbf{f} < \mathbf{h}$, por lo tanto $(\mathbf{f})_s = i$. Esto demuestra que s , restringida a \mathcal{T} , es suprayectiva. Por lo tanto \mathcal{T} tiene exactamente λ elementos. □

Para nuestros propósitos, la función de rango asignada a \mathcal{P} será $r = r_{nat} - 1$. Por el resto de esta tesis les llamaremos *caras* a los elementos de un copo graduado \mathcal{P} y *banderas* a sus cadenas maximales. Al conjunto de las banderas de \mathcal{P} lo denotaremos por $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Si una cadena no es maximal será llamada *cadena propia*. Si \mathbf{f} es una cara maximal de \mathcal{P} , diremos que $(\mathbf{f})_r$ es el *rango* de \mathcal{P} . A las caras maximales y minimales de un copo les llamaremos *caras impropias* y a las restantes les llamaremos *caras propias*. A un intervalo de la forma $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]$ le llamaremos *sección cerrada* (o sólo *sección*), si $(\mathbf{g})_r - (\mathbf{f})_r = \delta + 1$, le llamaremos δ -*sección cerrada* (o sólo δ -*sección*) y, siguiendo la notación de [7], lo denotaremos por \mathbf{g}/\mathbf{f} . A un intervalo de la forma (\mathbf{f}, \mathbf{g}) se le llamará *sección abierta*. Una sección será *propia* si está propiamente contenida en \mathcal{P} .

Observación 2.6. En un copo graduado de rango d , toda cadena de longitud $\lambda < d$ está contenida en (al menos) una cadena de longitud $\lambda + 1$. También, toda δ -sección, con $\delta < d$, está contenida en (al menos) una $(\delta + 1)$ -sección.

En general se puede representar a un copo con el dibujo de una gráfica que muestre de manera intuitiva cuándo dos elementos \mathbf{f} y \mathbf{g} son comparables y si $\mathbf{f} \geq \mathbf{g}$ o $\mathbf{g} \geq \mathbf{f}$.

Definición 2.7. *Diagrama de Hasse.*

El diagrama de Hasse $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ de un copo \mathcal{P} es la gráfica cuyos vértices son las caras de \mathcal{P} , y hay una arista entre \mathbf{f} y \mathbf{g} si y sólo si $\mathbf{f} < \mathbf{g}$ y $(\mathbf{f})_r = (\mathbf{g})_r - 1$.

A partir del diagrama de Hasse de un copo graduado \mathcal{P} podemos recuperar toda la información de éste si al dibujarlo dividimos a los vértices por rangos, ubicando de arriba a abajo a los elementos en orden decreciente de rango.

Politopos abstractos.

A continuación daremos la definición de politopo abstracto, posteriormente daremos una noción intuitiva de lo que representan los axiomas en el caso de los politopos convexos.

Definición 2.8. *Conexidad.*

Un copo graduado de rango d con una cara máxima y una cara mínima será conexo si $d \leq 1$, o bien, si el diagrama de Hasse de éste, sin sus caras impropias, es conexo. Dicho copo será fuertemente conexo si para cada $\delta \in \{2, 3, \dots, d\}$, toda δ -sección (incluyendo al copo entero) es conexa.

Definición 2.9. *Propiedad del diamante.*

Sea \mathcal{P} un copo graduado. Una 1-sección $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ de \mathcal{P} será llamada diamante si consta de exactamente 4 elementos: dos caras propias y dos caras impropias. Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ es un diamante y $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ son sus caras propias, lo denotaremos como $\langle \mathfrak{h}_{\mathfrak{f}}^{\mathfrak{g}}, \mathfrak{h}' \rangle$. Diremos que \mathcal{P} tiene la propiedad del diamante si toda 1-sección es un diamante.

Definición 2.10. *Politopo abstracto.*

Un copo graduado \mathcal{P} es llamado politopo abstracto si

- *tiene exactamente una cara máxima y una cara mínima,*
- *es fuertemente conexo,*
- *tiene la propiedad del diamante.*

*Si d es el rango de \mathcal{P} se dice que \mathcal{P} es un d -politopo abstracto. Por el resto de la tesis omitiremos la palabra *abstracto* y sólo le llamaremos *politopo* o d -politopo.*

Observación 2.11. *Sea $\delta \in \{-1, 0, 1, \dots, d\}$. Entonces toda δ -sección de un politopo es un politopo de rango δ .*

Al inicio del capítulo mencionamos que los politopos abstractos son estructuras que satisfacen las propiedades combinatorias dadas por la incidencia en los politopos convexos, donde el rango de una cara en el copo corresponde con su dimensión. Pero observar que esto se refleja en los axiomas previamente dados puede no resultar inmediato. Argumentaremos por qué esto generaliza al caso convexo.

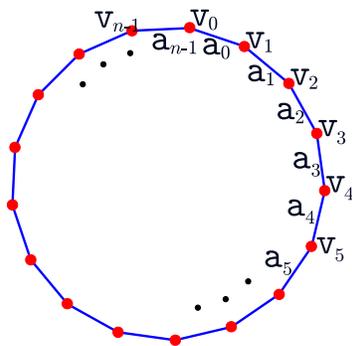


FIGURA 1. n -ágono.

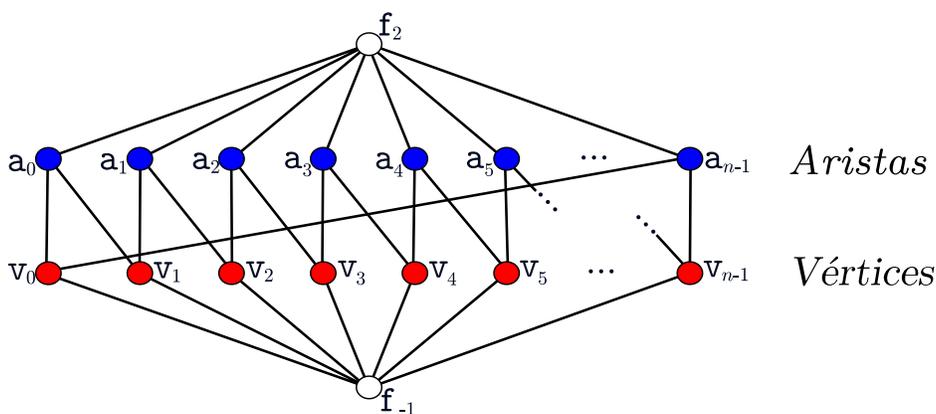


FIGURA 2. Copo asociado al n -ágono.

Comenzaremos ejemplificando a un n -ágono. Para esto tomamos, como conjunto de elementos del copo, al conjunto

$$\{v : v \text{ es vértice} \} \cup \{a : a \text{ es arista} \} \cup \{f_{-1}\} \cup \{f_2\},$$

donde f_{-1} y f_2 son símbolos auxiliares para representar las caras impropias, de rangos -1 y 2 respectivamente, del politopo abstracto. El orden en este conjunto estará dado por la relación de incidencia y la “dimensión”, es decir, un vértice será menor únicamente que las aristas a las que éste es incidente. El diagrama de Hasse del copo resultante es el siguiente.

Es fácil ver que, si eliminamos los vértices blancos de la gráfica anterior, la gráfica resultante es conexa. Para ver que también cumple la propiedad del diamante, observemos que todas las 1-secciones son diamantes de la forma $\langle v_{f_{-1}}^a v' \rangle$, donde v y v' son vértices adyacentes y a es la arista que hay entre ellos; o de la forma $\langle a_{f_2}^v a' \rangle$, donde a y a' son aristas incidentes en v .

Consideremos el cubo convexo cuyos vértices son los puntos $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)$. Sus aristas son los segmentos de recta que unen dos puntos que

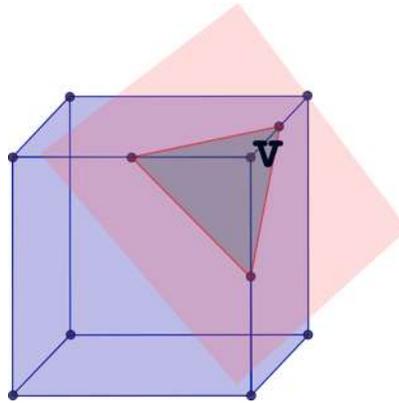


FIGURA 3. Figura de vértice del cubo.

difieren en sólo una entrada, y sus caras son las porciones de plano (cuadrados) que unen cuartetos de puntos que coinciden en una entrada. Si pensamos al cubo relleno, entonces es la intersección de 6 semiespacios, la frontera de cada uno de estos semiespacios es un plano de dimensión dos. Los vértices del cubo son los puntos que se encuentran en las intersecciones no vacías de 3 de estos planos. Las aristas son los segmentos que se encuentran dentro de las intersecciones no vacías de dos planos y que, además, están uniendo a los vértices del cubo. La porción de un plano acotada por las aristas contenidas en éste son las caras del cubo que, en este caso, son cuadrados. Dichos cuadrados son politopos maximales contenidos en el cubo. A estos politopos se les llama *facetas* del politopo convexo.

Si tomamos un vértice v del cubo, podemos encontrar un plano que separe a este vértice de los demás, precisamente por el hecho de que el politopo es convexo (ver Figura 3). Dentro de este plano se encuentra una región acotada por las intersecciones de éste con los otros planos que acotan al politopo y que pasan por v . En dicha región podemos encontrar vértices, aristas y una cara (los cuales no son parte del cubo) que forman nuevamente un politopo convexo, al cual se le llama la *figura de vértice* de v , en este caso es un triángulo. Estos se corresponden, en los politopos abstractos, con los conjuntos que definiremos en el siguiente párrafo.

De ahora en adelante denotaremos a la cara mínima de un copo de rango d como f_{-1} ; mientras que a su cara máxima la denotaremos como f_d . Las caras de rango 0 serán llamadas *vértices*, y el conjunto de vértices será denotado $\mathfrak{U}(\mathcal{P})$; las caras de rango 1 serán llamadas *aristas*, y el conjunto de aristas será denotado por $\mathfrak{C}(\mathcal{P})$; finalmente, las caras de rango $d - 1$ serán llamadas *facetas*, y el conjunto de facetas será denotado $\mathfrak{F}(\mathcal{P})$. Si f es una cara, extenderemos la notación $\mathfrak{U}(f)$, $\mathfrak{C}(f)$ y $\mathfrak{F}(f)$ para los conjuntos de vértices, aristas y facetas de la sección f/f_{-1} . Si $f \in \mathfrak{F}(\mathcal{P})$, diremos que f/f_{-1} es una *faceta* de \mathcal{P} y la identificaremos con f . Si $f = v \in \mathfrak{U}(\mathcal{P})$, le llamaremos la *figura de vértice* de v a la sección f_d/v y lo denotaremos por $\mathfrak{U}(v)$. El objetivo de dar estas definiciones

para copos en general es para poder usar los conceptos en el proceso de verificar si el copo es un politopo o no.

El proceso de verificar si un copo es un politopo abstracto es largo y computacionalmente ineficiente, dado que debemos verificar la propiedad del diamante y la conexidad de una gran cantidad de gráficas. Sin embargo es posible simplificar dicho proceso cuando ya tenemos información adicional acerca de éste, por ejemplo, cuando ya sabemos que sus figuras de vértice y sus facetas lo son. Esto nos puede dar un proceso recursivo de verificación.

Lema 2.12. *Sea \mathcal{P} un copo graduado conexo de rango $d \geq 2$ con exactamente un elemento máximo y un elemento mínimo. Si todas sus figuras de vértice y todas sus facetas son politopos entonces \mathcal{P} es politopo.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 2.6, toda sección propia está contenida en una figura de vértice o una faceta del copo, por lo tanto es conexa.

La propiedad del diamante también se cumple, dado que toda 1-sección está contenida en una sección propia.



Como se dijo en el capítulo anterior, la noción de *dualidad* es muy recurrida en muchas áreas de matemáticas, como teoría de códigos, álgebra lineal, teoría de gráficas, geometría y politopos convexos. También existe la noción de copo dual de un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 2.13. *Politopo dual.*

Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo. Un copo $\mathcal{P}^ = (P^*, \leq)$ es el copo dual de \mathcal{P} si $P = P^*$ y para todas $f, g \in P$, $f \leq g$ si y sólo si $g \leq f$.*

Notemos que los diagramas de Hasse $\mathcal{H}(\mathcal{P}^*)$ y $\mathcal{H}(\mathcal{P})$ son iguales, por lo tanto un copo \mathcal{P} es fuertemente conexo si y sólo si \mathcal{P}^* lo es. También es claro que \mathcal{P} tiene la propiedad del diamante si y sólo si \mathcal{P}^* la tiene.

Observación 2.14. *Sea \mathcal{P} un d -politopo. Entonces su dual \mathcal{P}^* también es un d -politopo.*

En politopos convexos podemos observar que existe una gráfica formada por los segmentos 1-dimensionales que delimitan al politopo. En politopos abstractos podemos formar una gráfica análoga.

Definición 2.15. *Sea \mathcal{P} un politopo. Decimos que dos vértices son adyacentes si ambos son incidentes a una misma arista. El 1-esqueleto de \mathcal{P} es la gráfica cuyos vértices son los vértices del politopo y dos de estos están unidos por una arista si son adyacentes como elementos del politopo.*

Morfismos.

Al igual que en muchas otras estructuras, también entre conjuntos parcialmente ordenados podemos definir morfismos. Un morfismo generalmente (mas no formalmente) se trata de una función entre dos objetos que respeta alguna estructura.

Definición 2.16. *Morfismo.*

Sean $\mathcal{P} = (P, \leq)$ y $\mathcal{P}' = (P', \leq)$ dos copos. Una función $\xi : P \rightarrow P'$ es un morfismo si para todos $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in P$, $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ implica que $(\mathbf{f})\xi \leq (\mathbf{g})\xi$, es un isomorfismo si es un morfismo biyectivo cuya función inversa también es un morfismo, y es un automorfismo si es un isomorfismo de \mathcal{P} en sí mismo.

Observación 2.17. Sean $\mathcal{P} = (P, \leq)$, $\mathcal{P}' = (P', \leq)$ y $\mathcal{P}'' = (P'', \leq)$ tres copos. Si $\xi : P \rightarrow P'$ y $\xi' : P' \rightarrow P''$ son dos morfismos, entonces $\xi\xi'$ también es un morfismo.

Proposición 2.18. Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo finito. Si $\xi : P \rightarrow P$ es un morfismo biyectivo, entonces es un automorfismo.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que ξ es una permutación de los elementos de P . Como elemento del grupo simétrico en P , existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\xi^m = Id_P$. Entonces $\xi^{-1} = \xi^{m-1}$ también es un morfismo.



Por la Observación 2.17 y la proposición anterior, el conjunto de automorfismos de un politopo \mathcal{P} forma un grupo. Al grupo de automorfismos de \mathcal{P} lo denotaremos por $Aut(\mathcal{P})$. Dado $\Gamma \leq Aut(\mathcal{P})$, el *estabilizador* de un elemento $\mathbf{f} \in \mathcal{P}$ en Γ es el subgrupo $Stab_{\Gamma}(\mathbf{f}) \leq \Gamma$ que consiste de los elementos γ tales que $(\mathbf{f})\gamma = \mathbf{f}$.

Definición 2.19. Sea \mathcal{P} un d -politopo y sea $\Phi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d-1}, \mathbf{f}_d]$ una bandera de \mathcal{P} . Sea $-1 < i < d$ un entero. La bandera i -adyacente de Φ es

$$\Phi^i := [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{g}, \mathbf{f}_{i+1}, \dots, \mathbf{f}_{d-1}, \mathbf{f}_d],$$

donde $\langle \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{f}_i, \mathbf{g}, \mathbf{f}_{i+1} \rangle$ es un diamante. Recursivamente defimos

$$\Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}} := (\Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-2}})^{i_{l-1}}.$$

En general, dos banderas serán adyacentes si sólo difieren en una cara.

En la siguiente proposición demostraremos que todo automorfismo respeta la relación de adyacencia entre banderas.

Proposición 2.20. Sea \mathcal{P} un d -politopo. Entonces, para todo $\xi \in Aut(\mathcal{P})$, para todo $i \in [d]$ y para toda $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, $(\Phi^i)\xi = ((\Phi)\xi)^i$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Phi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{d-1}, \mathbf{f}_d]$, y supongamos que $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_{i+1} \mathbf{g} \rangle$ es el diamante definido por \mathbf{f}_{i-1} y \mathbf{f}_{i+1} . Como ξ es una biyección, tenemos que $\mathbf{g}\xi \neq \mathbf{f}_i\xi$. Usando que $\mathbf{f}_{i+1}/\mathbf{f}_{i-1}$ es un diamante se sigue que

$$\begin{aligned} (\Phi^i)\xi &= ([\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{i-1}, \mathbf{g}, \mathbf{f}_{i+1}, \dots, \mathbf{f}_{d-1}, \mathbf{f}_d])\xi \\ &= [(\mathbf{f}_{-1})\xi, (\mathbf{f}_0)\xi, (\mathbf{f}_1)\xi, \dots, (\mathbf{f}_{i-1})\xi, (\mathbf{g})\xi, (\mathbf{f}_{i+1})\xi, \dots, (\mathbf{f}_{d-1})\xi, (\mathbf{f}_d)\xi] \\ &= [(\mathbf{f}_{-1})\xi, (\mathbf{f}_0)\xi, (\mathbf{f}_1)\xi, \dots, (\mathbf{f}_{i-1})\xi, (\mathbf{f}_i)\xi, (\mathbf{f}_{i+1})\xi, \dots, (\mathbf{f}_{d-1})\xi, (\mathbf{f}_d)\xi]^i \\ &= ((\Phi)\xi)^i. \end{aligned}$$



Ya que tenemos adyacencias entre banderas, podemos definir la conexidad de un politopo en términos de la conexidad de la gráfica cuyos vértices sean las banderas y dos de éstas son adyacentes en la gráfica si y sólo si son adyacentes en el politopo. Para que ésto sea compatible con nuestras nociones previas de conexidad, tendremos que agregarle una condición más.

Definición 2.21. *Conexidad fuerte por banderas*

Sea \mathcal{P} un d -politopo. Decimos que \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas si, para cualesquiera $\Phi, \Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$, existen $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{l-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ tales que la sucesión $\Phi_0 = \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{l-1}, \Phi_l = \Psi$ cumple que, para todo $j \in [l]$, $\Phi \cap \Psi \subseteq \Phi_j$ y, además, Φ_j es adyacente a Φ_{j+1} .

Los dos conceptos de conexidad parecen ser distintos. La siguiente definición establece una equivalencia entre ellos.

Proposición 2.22. *Sea \mathcal{P} un copo graduado de rango d con exactamente una cara máxima y una cara mínima que, además, tiene la propiedad del diamante. Entonces \mathcal{P} es fuertemente conexo si y sólo si es fuertemente conexo por banderas.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que \mathcal{P} es fuertemente conexo. Procederemos por inducción en el rango de \mathcal{P} para demostrar que éste es fuertemente conexo por banderas. Si $d \leq 1$ se sigue de la definición. Si $d = 2$, sean $\Phi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_d]$ y $\Psi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{f}_d]$ dos banderas de \mathcal{P} . Si su intersección es distinta de $\{\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_d\}$, entonces son adyacentes. Supongamos que $\Phi \cap \Psi = \{\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_d\}$ y tomemos un camino $[\mathbf{f}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{a}_l, \mathbf{g}_0]$ en el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(\mathcal{P} - \{\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_d\})$ donde, para toda $j \in [l+1]$, $(\mathbf{a}_j)r = 1$ y para toda $j \in [l]$, $(\mathbf{v}_j)r = 0$. A partir de dicho camino podemos construir la siguiente sucesión de banderas

$$[[\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_d], [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{f}_d], [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{f}_d], [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{v}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{f}_d], [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{v}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{f}_d], \dots,$$

$$[\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{v}_{l-1}, \mathbf{a}_l, \mathbf{f}_d], [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{g}_0, \mathbf{a}_l, \mathbf{f}_d], [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{f}_d],$$

la cual es una sucesión de banderas adyacentes de Φ a Ψ .

Ahora supongamos que $d > 2$ y sean $\Phi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \dots, \mathbf{f}_{d-1}, \mathbf{f}_d]$ y $\Psi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_{d-1}, \mathbf{f}_d]$ dos banderas de \mathcal{P} . Si $\Phi \cap \Psi = \{\mathbf{f}_{-1} = \mathbf{f}_{i_0}, \mathbf{f}_{i_1}, \mathbf{f}_{i_2}, \dots, \mathbf{f}_{i_{k-1}}, \mathbf{f}_{i_k} = \mathbf{f}_d\}$ contiene al menos una cara propia, entonces tenemos por hipótesis de inducción que, para cada $j \in [k]$ existe una sucesión de banderas adyacentes de $[\mathbf{f}_{i_j}, \mathbf{f}_{i_{j+1}}, \mathbf{f}_{i_{j+2}}, \dots, \mathbf{f}_{i_{j+1}}]$ a $[\mathbf{f}_{i_j}, \mathbf{g}_{i_{j+1}}, \mathbf{g}_{i_{j+2}}, \dots, \mathbf{f}_{i_{j+2}}]$ en la sección $\mathbf{f}_{i_{j+1}}/\mathbf{f}_{i_j}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{P})$, la cual se puede extender a una sucesión de banderas de \mathcal{P} . Si $\Phi \cap \Psi = \{\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_d\}$, tomemos un camino $[\mathbf{f}_0 = \mathbf{h}_{i_0}, \mathbf{h}_{i_1}, \mathbf{h}_{i_2}, \dots, \mathbf{h}_{i_{l-1}}, \mathbf{h}_l = \mathbf{g}_0]$ en $\mathcal{H}(\mathcal{P} - \{\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_d\})$, el cual existe por ser \mathcal{P} conexo. Tenemos que para cada $j \in [l]$ existe una bandera Φ_j que contiene a $\{\mathbf{h}_{i_j}, Th_{i_{j+1}}\}$. Sea $\Phi_{-1} = \Phi$ y sea $\Phi_l = \Psi$. Usando la parte anterior de la demostración tenemos que para cada $j \in [l+1]$ existe una sucesión de banderas adyacentes de Φ_{j-1} a Φ_j , ya que éstas sí se intersectan en caras propias. Concatenando estas sucesiones tenemos una sucesión de banderas adyacentes de Φ a Ψ .

Para demostrar la otra implicación, supongamos que \mathcal{P} es fuertemente conexo por banderas. Sea $\delta \geq 2$ y sea $\mathcal{S} = \mathbf{g}/\mathbf{f}$ una δ -sección de \mathcal{P} . Sean $\mathbf{h}, \mathbf{h}' \in \mathcal{S}$ dos caras impropias y consideremos dos banderas Ψ y Ψ' de \mathcal{S} tales que $\mathbf{h} \in \Psi$ y $\mathbf{h}' \in \Psi'$. Es claro que a dichas banderas las podemos extender a dos banderas Φ y Φ' de \mathcal{P} tales que coinciden en todos sus elementos de rango menor al rango de \mathbf{f} y en todos sus elementos de rango mayor al rango de \mathbf{g} . Por lo tanto podemos considerar una sucesión de banderas adyacentes $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{l-2}, \Phi_{l-1} = \Phi'$ que conserve dicha intersección. Para cada $j \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ consideremos una cara $\mathbf{h}_j \in \Phi_{j-1} \cap \Phi_j \cap \mathcal{S}$, y sean $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}$ y $\mathbf{h}_l = \mathbf{h}'$. Entonces, para cada $j \in [l]$ hay un camino en el diagrama de Hasse de \mathcal{S} que va de \mathbf{h}_j a \mathbf{h}_{j+1} , siguiendo las caras que están entre \mathbf{h}_j y \mathbf{h}_{j+1} en Phi_j . Concatenando estos caminos tenemos un camino de \mathbf{h} a \mathbf{h}' en $\mathcal{H}(\mathcal{S})$.



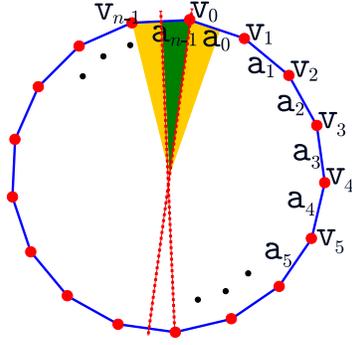
Corolario 2.23. *Sea \mathcal{P} un d -politopo abstracto y sean $\Phi, \Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Entonces existe una sucesión i_0, i_1, \dots, i_{l-1} de elementos de $[d]$ tal que $\Psi = \Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión $\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{l-1}, \Phi_l = \Psi$ de banderas adyacentes de Φ a Ψ , el cual existe por el teorema anterior. Entonces existe una sucesión i_0, i_1, \dots, i_{l-1} de elementos de $[d]$ tal que, para toda $j \in [l]$, $\Phi_{j+1} = \Phi_j^{i_j}$. Así que $\Psi = \Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}}$.



El teorema anterior lo presentamos con el objetivo de facilitarnos observar el siguiente resultado, el cual permite estudiar más fácilmente el grupo de automorfismos de un politopo.

Teorema 2.24. *Sea \mathcal{P} un politopo abstracto. Si $\xi, \xi' \in \text{Aut}(\mathcal{P})$ y $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ son tales que $(\Phi)\xi = (\Phi)\xi'$, entonces $\xi = \xi'$.*

FIGURA 4. n -ágono y sus banderas.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\Phi, \Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ y sea $\xi \in \text{Aut}(\mathcal{P})$. Por el corolario anterior existe una sucesión i_0, i_1, \dots, i_{l-1} de elementos de $[d]$ tal que $\Psi = \Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}}$ y, por la Proposición 2.20, tenemos que

$$(\Psi)\xi = (\Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}})\xi = ((\Phi)\xi)^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}} = ((\Phi)\xi')^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}} = (\Psi)\xi'.$$

Por lo tanto, para toda $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ tenemos que $(\Psi)\xi = (\Psi)\xi'$, y por lo tanto $\xi = \xi'$.



Corolario 2.25. Sea \mathcal{P} un politopo finito. Entonces $|\text{Aut}(\mathcal{P})| \leq |\mathfrak{B}(\mathcal{P})|$.

2. Politopos regulares

Los casos más sencillos de estudiar son aquellos que cuentan con más estructura. Esto es difícil de definir, por lo que se recurre a las raíces geométricas. Para los politopos convexos se puede definir regularidad de forma recursiva: un politopo es regular si todas sus facetas son congruentes y regulares, y lo mismo para las figuras de vértice. Esto nos ubica, nuevamente, en el caso de dimensión 2 donde un polígono es regular si todos sus lados son iguales y sus ángulos internos son iguales. En particular, su grupo de isometrías está generado por las dos reflexiones marcadas por las líneas punteadas rojas de la Figura 4.

Los triángulos dibujados son la versión geométrica de las banderas que hemos estado estudiando, cada uno de estos es incidente a un vértice y a una arista del polígono. Usando composiciones de dichas reflexiones es fácil ver que podemos llevar cualquier bandera del polígono en cualquier otra. Esto nos da una idea de cómo definir cuándo un politopo es regular.

Definición 2.26. *Politopos regulares.*

Decimos que un politopo \mathcal{P} es regular si su grupo de automorfismos es transitivo en su conjunto de banderas.

Es cierto que el copo asociado a un politopo convexo regular es un politopo abstracto regular. Bajo esta definición, los sólidos platónicos son los únicos poliedros convexos regulares.

Observación 2.27. Si \mathcal{P} es un politopo regular, entonces para toda $i \in [d]$ el grupo de automorfismos de \mathcal{P} actúa transitivamente en el conjunto de sus i -caras.

La siguiente observación se deriva directamente del Teorema 2.24 y de la definición de regularidad. Ésta es de suma utilidad, tanto en los capítulos sucesivos como en todo el estudio de la teoría de politopos.

Observación 2.28.

- Un politopo finito \mathcal{P} es regular si y sólo si $|Aut(\mathcal{P})| = |\mathfrak{B}(\mathcal{P})|$.
- Toda sección de un politopo regular también es un politopo regular.

Podemos notar que cada una de las reflexiones que generan al grupo de simetrías de la figura 4 mandan a la bandera verde en alguna de las dos banderas amarillas, que son las banderas adyacentes a ésta en el sentido de los politopos abstractos. A continuación definiremos automorfismos análogos a dichas reflexiones para politopos abstractos regulares.

Definición 2.29. *Generadores distinguidos.*

Sea \mathcal{P} un d -politopo, sea $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ y sea $i \in [d]$. Sea ρ_i el único automorfismo tal que $(\Phi)\rho_i = \Phi^i$. A éste automorfismo lo llamaremos el i -ésimo generador distinguido de $Aut(\mathcal{P})$ con respecto a Φ .

Notemos que dichos automorfismos dependen de la elección de Φ , así que muchas veces es conveniente tomar una bandera de referencia en el politopo. A esta bandera le llamamos la *bandera base*.

Como corolario del Teorema 2.24 tenemos lo siguiente.

Observación 2.30. Para toda $i \in [d]$, ρ_i es una involución.

Proposición 2.31. Sea \mathcal{P} un politopo, sea Φ su bandera base y sean $i_0, i_1, \dots, i_{l-1} \in [d]$. Entonces $(\Phi)\rho_{i_{l-1}}\rho_{i_{l-2}} \cdots \rho_{i_1}\rho_{i_0} = \Phi^{i_0 i_1 \dots i_{l-1}}$.

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción sobre l . Si $l = 0$, el resultado es directo de la definición de ρ_{i_0} . Sea $l \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} (\Phi)\rho_{i_{l-1}}\rho_{i_{l-2}} \cdots \rho_{i_1}\rho_{i_0} &= (\Phi^{i_{l-1}})\rho_{i_{l-2}} \cdots \rho_{i_1}\rho_{i_0} \\ &= ((\Phi_0)\rho_{i_{l-2}} \cdots \rho_{i_1}\rho_{i_0})^{i_{l-1}} \\ &= (\Phi^{i_0 i_1 \cdots i_{l-2}})^{i_{l-1}} \\ &= \Phi^{i_0 i_1 \cdots i_{l-1}}. \end{aligned}$$



Corolario 2.32. *Sea \mathcal{P} un politopo. Su grupo de automorfismos $\text{Aut}(\mathcal{P})$ está generado por $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}$.*

El siguiente resultado nos da una caracterización muy útil de regularidad en términos de la existencia de un conjunto de generadores distinguidos.

Lema 2.33. *Sea \mathcal{P} un d -politopo y sea $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Entonces \mathcal{P} es regular si y sólo si para toda $i \in [d]$, existe $\rho_i \in \text{Aut}(\mathcal{P})$ tal que $(\Phi)\rho_i = \Phi^i$.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si \mathcal{P} es regular, entonces para cada $i \in [d]$, existe dicho morfismo ρ_i tal que $(\Phi)\rho_i = \Phi^i$.

Ahora supongamos que existe un conjunto de generadores distinguidos. Sea $\Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Por el Corolario 2.23, existe una sucesión i_0, i_1, \dots, i_{l-1} de elementos de $[d]$ tal que $\Psi = \Phi^{i_0 i_1 \cdots i_{l-1}}$. Se sigue de la proposición anterior que $\Psi = (\Phi_0)\rho_{i_{l-1}}\rho_{i_{l-2}} \cdots \rho_{i_1}\rho_{i_0}$.



A partir de ciertas propiedades de los politopos es posible saber cómo son sus grupos de automorfismos, y quedarán descritos con la siguiente definición.

Definición 2.34. *Sea Γ un grupo generado por un conjunto de involuciones*

$$\text{Inv}_\Gamma = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}\},$$

tales que para todas $i, j \in [d]$ que satisface que $|i - j| \geq 2$, se tiene $(\sigma_i \sigma_j)^2 = \text{Id}_\Gamma$. Decimos que Γ tiene la propiedad de la intersección si para todos $I, J \subset [d]$ se tiene que

$$\langle \sigma_i : i \in I \rangle \cap \langle \sigma_j : j \in J \rangle = \langle \sigma_i : i \in I \cap J \rangle.$$

En este caso diremos que Γ es un C-grupo con diagrama de línea, y que d es el rango de Γ

La letra C proviene de Coxeter, dado que todo C -grupo con diagrama de línea es un cociente de un *grupo de Coxeter*, el cual es un grupo generado por involuciones $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}\}$, tales que para todas $i, j \in [d]$ que satisface que $|i - j| \geq 2$, se tiene $(\sigma_i \sigma_j)^2 = Id$. En general se supone que el orden del producto de dos generadores consecutivos es mayor que dos, de no ser así es posible separar el grupo en un producto directo y estudiar cada componente.

Es cierto que el grupo de automorfismos de todo politopo regular es un C -grupo con diagrama de línea. El regreso también es cierto. Más aún, a partir de cada uno de estos grupos es posible construir un politopo regular con éste como su grupo de automorfismos de modo que los generadores jueguen el papel de los morfismos distinguidos. La prueba de los siguientes teoremas se puede encontrar en la Sección 2E de [7].

Teorema 2.35. *Sea \mathcal{P} un politopo regular. Entonces $Aut(\mathcal{P})$ es un C -grupo con diagrama de línea, donde $Inv_{Aut(\mathcal{P})} = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d-1}\}$.*

De aquí se deriva el siguiente concepto muy conocido en la literatura usado para estudiar localmente a los politopos.

Definición 2.36. *Símbolo de Schläfli*

Sea Γ un C -grupo con diagrama de línea y sea $Inv_\Gamma = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d-1}\}$. El símbolo de Schläfli de Γ es la $(d - 1)$ -ada $\{p_1, p_2, \dots, p_{d-1}\}$, donde para toda $i \in \{1, 2, \dots, d - 1\}$, se tiene que p_i es el orden de $\rho_{i-1} \rho_i$.

Si \mathcal{P} es un politopo regular, todas las 2-secciones $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$, con $(\mathfrak{f})r = i - 1$, son isomorfas a un polígono. La $(i + 1)$ -ésima entrada del símbolo de Schläfli nos dice la longitud de dicho polígono. De esta forma también podemos definir el símbolo de Schläfli para el politopo.

A continuación haremos la construcción del copo que será el politopo abstracto derivado de un C -grupo. Vale la pena hacer notar que el orden en el que están dados los generadores del grupo es determinante en la construcción de su politopo asociado.

Definición 2.37. *Sea Γ un C -grupo con diagrama de línea de rango d . Para cada $i \in [d]$ sea Λ_i el grupo $\langle \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_{d-1} \rangle$. El copo de clases de Γ es el copo cuyo conjunto de elementos es $\{\gamma \Lambda_i : i \in [d], \gamma \in \Gamma\}$ y cuyo orden está dado por $\gamma \Lambda_i \leq \gamma' \Lambda_j$ si y sólo si $i \leq j$ y $\gamma \Lambda_i \cap \gamma' \Lambda_j \neq \emptyset$.*

Teorema 2.38. *Sea Γ un C -grupo con diagrama de línea de rango d y conjunto de generadores $Inv_\Gamma = \{\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d-1}\}$. Consideremos el copo de clases de Γ y agreguemos a los elementos \mathfrak{f}_{-1} y \mathfrak{f}_d al copo, definiendo a \mathfrak{f}_{-1} como mínimo y a \mathfrak{f}_d como máximo. Entonces dicho copo es el único politopo regular cuyo grupo de automorfismos es Γ con generadores distinguidos $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{d-1}$.*

3. Polítopos de dos órbitas

En la sección anterior vimos algunas características de los polítopos regulares, los cuales resultan ser de gran interés dada su relación con cierta clase de grupos y su estructura tan rica. El siguiente paso en la escala de simetría es estudiar a los polítopos tales que la acción de su grupo de automorfismos tiene dos órbitas en las banderas. En esta sección daremos algunos resultados que nos ayudarán a clasificarlos para su estudio. En [4] I. Hubard hace un amplio estudio acerca de estos polítopos.

Definición 2.39. Sea \mathcal{P} un polítopo. Decimos que \mathcal{P} es un polítopo de dos órbitas si la acción de su grupo de automorfismos en $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$ tiene dos órbitas.

Proposición 2.40. Sea \mathcal{P} un d -polítopo. Sea $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ y sea $\Psi \in (\Phi)Aut(\mathcal{P})$. Entonces, para toda $i \in [d]$, $\Phi^i \in (\Phi)Aut(\mathcal{P})$ si y sólo si $\Psi^i \in (\Phi)Aut(\mathcal{P})$.

DEMOSTRACIÓN. Tenemos que $\Psi \in Aut(\mathcal{P})$ si y sólo si existe $\xi \in Aut(\mathcal{P})$ tal que $\Psi = (\Phi)\xi$. Ahora

$$\begin{aligned} \Phi^i \in (\Phi)Aut(\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \exists \gamma \in Aut(\mathcal{P}) \text{ tal que } \Phi^i = (\Phi)\gamma \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma \in Aut(\mathcal{P}) \text{ tal que } ((\Psi)\xi^{-1})^i = (\Phi)\gamma \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma \in Aut(\mathcal{P}) \text{ tal que } (\Psi^i)\xi^{-1} = (\Phi)\gamma \\ &\Leftrightarrow \exists \gamma \in Aut(\mathcal{P}) \text{ tal que } \Psi^i = (\Phi)\gamma\xi \\ &\Leftrightarrow \Psi^i \in (\Phi)Aut(\mathcal{P}). \end{aligned}$$



Corolario 2.41. Sea \mathcal{P} un d -polítopo de dos órbitas. Sean $\Phi, \Psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Entonces, para toda $i \in [d]$, $\Phi^i \in (\Phi)Aut(\mathcal{P})$ si y sólo si $\Psi^i \in (\Psi)Aut(\mathcal{P})$.

A partir del corolario anterior podemos clasificar a los polítopos de dos órbitas como sigue.

Definición 2.42. Sea \mathcal{P} un d -polítopo de dos órbitas y sea $\Phi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$. Sea $I = \{i_0, i_1, \dots, i_l\} \subsetneq [d]$. Decimos que \mathcal{P} está en la clase 2_I si para toda $i \in [d]$ se satisface que $i \in I$ si y sólo si $\Phi^i \in \Phi Aut(\mathcal{P})$.

Corolario 2.43. Sea \mathcal{P} un d -polítopo de dos órbitas y sean $I, J \subseteq [d]$. Si \mathcal{P} está en las clases 2_I y 2_J entonces $I = J$.

Entre los polítopos de 2 órbitas, despiertan particular interés aquellos en la clase 2_\emptyset , a los que se les llama *polítopos quirales*.

4. Cocientes

Es común ver en otras estructuras distintas técnicas para relacionar y construir objetos a partir de otros. En teoría de grupos, por ejemplo, podemos construir un grupo a partir de otro si tomamos su cociente por un subgrupo normal. Al hacerlo estamos dividiendo al grupo en clases de equivalencia para considerar a cada una como un elemento de un nuevo grupo que “heredará” la operación del grupo original. Es natural que para los politopos abstractos se defina un concepto similar con la intención de construir nuevos ejemplos a partir de otros ya existentes.

Dado que hay una correspondencia biunívoca entre politopos regulares y C -grupos con diagrama de línea, se podría pensar en el cociente de un politopo regular como un cociente de su grupo de automorfismos, pero en esta tesis consideraremos una definición distinta que es más explícita y más natural desde un punto de vista constructivo.

Definición 2.44. Sea \mathcal{P} un politopo y sea $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathcal{P})$. Definimos el cociente \mathcal{P}/Γ de \mathcal{P} por Γ como el copo cuyo conjunto de elementos es el conjunto de órbitas de Γ

$$\{f\Gamma : f \in \mathcal{P}\},$$

y el orden está dado por

$$f\Gamma \leq g\Gamma \Leftrightarrow \text{existen } \gamma, \gamma' \in \Gamma \text{ tales que } (f)\gamma \leq (g)\gamma'.$$

La definición anterior es natural y nos da una idea general de cómo está dado el orden en el politopo cociente. Sin embargo, es computacionalmente muy ineficiente, dado que es necesario verificar las relaciones entre cada elemento en $f\Gamma$ y cada elemento en $g\Gamma$ para poder asegurar que estas dos clases son comparables como elementos del copo cociente. A continuación daremos algunos resultados que nos darán una mejor idea de cómo se hereda el orden hacia el cociente y, a su vez, harán más eficiente el proceso de verificar cuando dos clases de equivalencia son comparables.

Proposición 2.45. Sean $f, g \in \mathcal{P}$. Entonces $f \leq g$ si y sólo si para todo $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathcal{P})$ se tiene que $f\Gamma \leq g\Gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Si $f \leq g$, entonces $(f)Id_{\mathcal{P}} \leq (g)Id_{\mathcal{P}}$ y, por lo tanto, para todo $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathcal{P})$ se tiene que $f\Gamma \leq g\Gamma$.

Si para todo $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathcal{P})$ se tiene que $f\Gamma \leq g\Gamma$, en particular para $\Gamma = \{Id_{\mathcal{P}}\}$.



Lema 2.46. Sea \mathcal{P} un politopo y sea $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathcal{P})$. Sean $f, g \in \mathcal{P}$ tales que $f\Gamma \leq g\Gamma$ y sea $h \in f\Gamma$. Entonces existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $h \leq (g)\gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Si $h \in f\Gamma$ entonces existe $\gamma' \in \Gamma$ tal que $h = (f)\gamma'$. Ahora, tenemos que

$$f\Gamma \leq g\Gamma. \Leftrightarrow \text{Existen } \gamma'', \gamma''' \in \Gamma \text{ tales que } (f)\gamma'' \leq (g)\gamma''''.$$

Por lo tanto $h \leq (g)\gamma''''(\gamma'')^{-1}\gamma'$.



Por último probaremos un resultado que nos será muy útil posteriormente para, a partir del cociente, poder recuperar parte de la estructura del politopo original.

Lema 2.47. *Sea $[f_i\Gamma, f_{i+1}\Gamma, \dots, f_{i+\lambda-1}\Gamma]$ una λ -cadena de \mathcal{P}/Γ . Entonces existe una λ -cadena $[g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i+\lambda-1}]$ de \mathcal{P} tal que $[f_i\Gamma, f_{i+1}\Gamma, \dots, f_{i+\lambda-1}\Gamma] = [g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i+\lambda-1}]\Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. Construiremos a $[g_i, g_{i+1}, \dots, g_{i+\lambda-1}]$ recursivamente. Tomemos a g_i como f_i . Habiendo definido a $g_j \in (f_j)\Gamma$ tenemos que, por el Lema anterior, $(f_j)\Gamma < (f_{j+1})\Gamma$ implica que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $g_j < (f_{j+1})\gamma$. Así que podemos tomar a $(f_{j+1})\gamma$ como la $(j+1)$ -cara.



Corolario 2.48. *Sea $\Phi = [\emptyset, f_0\Gamma, f_1\Gamma, \dots, f_{d-1}\Gamma, f_d\Gamma] \in \mathfrak{B}(\mathcal{P}/\Gamma)$. Entonces existe una bandera $\varphi \in \mathfrak{B}(\mathcal{P})$ tal que $\Phi = \varphi\Gamma$.*

El siguiente corolario nos dice que en el copo resultante de tomar el cociente, todas las cadenas maximales tienen también la misma longitud.

Corolario 2.49. *Sea \mathcal{P} un politopo y sea $\Gamma \leq \text{Aut}(\mathcal{P})$. Entonces \mathcal{P}/Γ es un copo graduado.*

Capítulo 3

Los politopos $2^{\mathcal{K}}$ y $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$

En la Observación 2.11 mencionamos que todas las secciones de un politopo abstracto también son politopos abstractos. Dado un d -politopo regular \mathcal{P} , un problema de interés es saber cuándo existe un $(d+1)$ -politopo regular tal que todas sus facetas (o de manera dual, sus figuras de vértice) sean isomorfas a \mathcal{P} . En este capítulo daremos dos construcciones que resuelven parcialmente esta pregunta. Ambas construcciones están relacionadas entre sí y tienen propiedades combinatorias que son de gran interés.

1. Latices

Las latices son una clase de conjuntos parcialmente ordenados que despiertan gran interés por la gran cantidad de propiedades que tienen. En esta sección daremos una breve introducción y mencionaremos algunas propiedades de los politopos que son latices como copos.

Definición 3.1. Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo y sea $\mathfrak{X} \subseteq P$. Una cota superior de \mathfrak{X} es un elemento $f \in P$ tal que para todo $g \in \mathfrak{X}$, $f \geq g$. Decimos que f es el supremo de \mathfrak{X} si es el mínimo del conjunto de cotas superiores de \mathfrak{X} . Análogamente se define cota inferior e ínfimo.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{P} = (P, \leq)$ un copo. Decimos que \mathcal{P} es una latiz si para cualesquiera dos elementos $f, g \in P$, el conjunto $\{f, g\}$ tiene supremo e ínfimo.

Las latices tienen una estructura algebraica implícita, ya que obtener el supremo (y similarmente obtener el ínfimo) es una operación *conmutativa* y *asociativa*. Dicha estructura no será utilizada a lo largo de esta tesis, pero es muy importante en algunas áreas de la combinatoria y el álgebra.

Por definición, cualesquiera dos elementos en una latiz tienen supremo e ínfimo, pero es fácil demostrar por inducción que lo mismo es cierto para cualquier conjunto finito de elementos.

Observación 3.3. Si $\mathcal{P} = (P, \leq)$ es una latiz finita, entonces para todo $\mathfrak{X} \subseteq P$ existe una mínima cota superior (supremo) y una máxima cota inferior (ínfimo).

Por el resto de esta tesis, \mathcal{K} va a denotar un politopo que, además, es una latiz y lo llamaremos *politopo latiz*. La letra \mathcal{K} es para ser consistente con la notación en [7] y [8]. Si \mathcal{K} tiene n vértices,

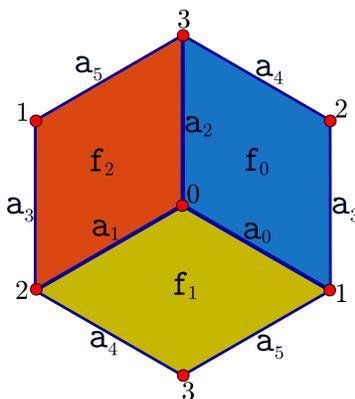


FIGURA 1. Hemicubo

entonces supondremos que el conjunto de vértices $\mathfrak{U}(\mathcal{K}) = [n]$, es decir, estamos asignando una numeración a los vértices del politopo, lo cual será muy importante en los capítulos 4 y 5.

En los politopos convexos, las aristas, las caras, etcétera, están determinadas completamente por el conjunto de vértices a los que son incidentes. Esto no pasa en general en los politopos abstractos, por ejemplo, consideremos el copo asociado a la figura 1.

Aquí se representa al *hemicubo*, el cual resulta de identificar los puntos antípodas de un cubo. Los vértices del politopo (caras de rango 0) son los vértices de la figura: 0, 1, 2, 3; sus aristas (caras de rango 1) son las aristas de la figura: a_0, a_1, \dots, a_5 ; sus caras de rango 2 son las caras de la figura: f_0, f_1 y f_2 . Es sencillo ver que el dicho copo es un politopo abstracto y que todas sus caras de rango 2 son incidentes a todos los vértices. Esto motiva a dar la siguiente definición para distinguir a aquellos politopos donde las caras distintas tienen conjuntos de vértices incidentes distintos.

Definición 3.4. Sea \mathcal{P} un politopo. Diremos que \mathcal{P} es vértice-descriptible si, para cualesquiera $f, g \in \mathcal{P}$ con $f \neq g$, tenemos que $\mathfrak{U}(f) \neq \mathfrak{U}(g)$.

Como ya vimos, no todos los politopos son vértice-descriptibles, pero es fácil ver que los politopos latiz regulares sí lo son. En esta tesis todos los copos tendrán una cantidad finita de elementos.

Proposición 3.5. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular. Entonces \mathcal{K} es vértice descriptible.

DEMOSTRACIÓN. Sea $f \in \mathcal{K}$ y sea g el supremo del conjunto $\mathfrak{U}(f)$, el cual existe por la Observación 3.3. Entonces $\mathfrak{U}(f) \subseteq \mathfrak{U}(g)$ y $|\mathfrak{U}(f)| \leq |\mathfrak{U}(g)|$. Si $f \neq g$, entonces $(f)r > (g)r$. Por la propiedad del diamante existe al menos otra cara $g' < f$ del mismo rango que g pero distinta a ésta. Es claro que $\mathfrak{U}(g') \subseteq \mathfrak{U}(f)$, y por lo tanto $|\mathfrak{U}(g')| \leq |\mathfrak{U}(f)|$. Por ser \mathcal{K} regular tenemos que f/f_{-1} también es un politopo regular y, por lo tanto, por la Observación 2.27 existe $\gamma \in \text{Aut}(f/f_{-1})$ tal que $(g)\gamma = g'$. Entonces $|\mathfrak{U}(g')| = |\mathfrak{U}(g)|$. Por lo tanto $\mathfrak{U}(g') = \mathfrak{U}(f) = \mathfrak{U}(g)$, lo que contradice que g sea un supremo

para $\mathfrak{U}(\mathfrak{f})$.



Nótemos que no requerimos la condición de regularidad completamente, sólo que cualesquiera dos caras del mismo rango tuvieran la misma cantidad de vértices incidentes.

A partir de la demostración de la proposición anterior tenemos el siguiente resultado, el cual nos dice que no sólo podemos distinguir dos caras a partir de su conjunto de vértices incidentes, sino que también podemos recuperar el orden del copo comparando los conjuntos de vértices incidentes a dos caras distintas.

Lema 3.6. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular. Sean $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{K}$. Entonces*

$$\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g} \Leftrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g}).$$

DEMOSTRACIÓN. Es claro que si $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$, entonces $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (por la propiedad de transitividad de \mathcal{K} como copo.) Ahora supongamos que $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Por la proposición anterior, \mathfrak{f} es el supremo del conjunto $\mathfrak{U}(\mathfrak{f})$, es decir, es el mínimo de los elementos que son cota superior de $\mathfrak{U}(\mathfrak{f})$. Como \mathfrak{g} es cota superior de todos los subconjuntos de su conjunto de vértices incidentes, tenemos que $\mathfrak{g} \geq \mathfrak{f}$.



Con el resultado anterior tenemos que la relación de orden en un politopo latiz regular es la inducida por la contención de los conjuntos de vértices incidentes a cada cara. Es por esto que tiene sentido considerar a la cara mínima de uno de estos politopos como el conjunto vacío, así que estaremos usando indistintamente a \mathfrak{f}_{-1} y a \emptyset para denotar a la cara mínima.

El siguiente lema nos permite definir automorfismos de cierta clase de politopos mediante permutaciones de sus vértices que induzcan biyecciones en las caras del politopo.

Lema 3.7. *Sea \mathcal{P} un politopo tal que para todas $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{P}$ tenemos que $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$ si y sólo si $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Sea $\phi : \mathfrak{U}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathfrak{U}(\mathcal{P})$ una biyección entre los vértices tal que deja invariante al conjunto $\{\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) : \mathfrak{f} \in \mathcal{P}\}$. Entonces ϕ induce un automorfismo $\hat{\phi}$ de \mathcal{P} .*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{P}$ tales que $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$. Sea $v \in \mathfrak{U}(\mathcal{P})$. Entonces

$$\begin{aligned} v \in \mathfrak{U}((\mathfrak{f})\hat{\phi}) &\Leftrightarrow \exists v' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \text{ tal que } v = (v')\hat{\phi} \\ &\Rightarrow \exists v' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \text{ tal que } v = (v')\hat{\phi} \\ &\Leftrightarrow v \in \mathfrak{U}((\mathfrak{g})\hat{\phi}). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathfrak{U}((\mathfrak{f})\hat{\phi}) \subseteq \mathfrak{U}((\mathfrak{g})\hat{\phi})$, lo que implica $(\mathfrak{f})\hat{\phi} \leq (\mathfrak{g})\hat{\phi}$.



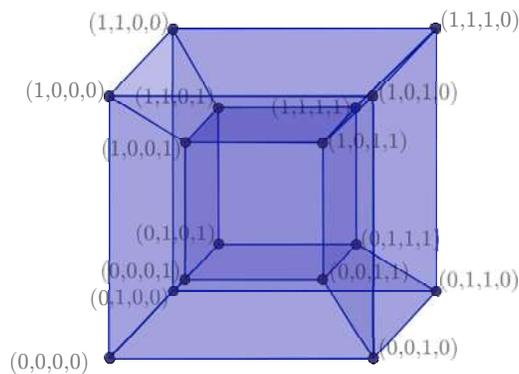


FIGURA 2. 4-cubo.

2. El politopo $2^{\mathcal{K}}$

Es fácil ver que los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(1, 1)$ en \mathbb{R}^2 son los vértices de un cuadrado; sus aristas son los segmentos de recta definidos por los pares de puntos de los conjuntos $\{(0, 0), (0, 1)\}$, $\{(1, 0), (1, 1)\}$, $\{(1, 1), (0, 1)\}$ y $\{(1, 0), (0, 0)\}$. Podemos subir una dimensión y observar que los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ y $(1, 1, 1)$ en \mathbb{R}^3 son los vértices de un cubo; sus aristas son los segmentos de recta que contienen a las parejas de puntos que difieren en una sola entrada; sus caras son porciones de plano y cada una está determinada por conjuntos de 4 puntos tales que todos coinciden en una misma entrada.

Dado n un número natural, en teoría de gráficas se define al n -cubo como la gráfica cuyos vértices son los vectores en $\{0, 1\}^n$, y dos de estos son adyacentes si difieren en una sola entrada, o alternativamente, si coinciden en $n - 1$ entradas (ver [2], Ejercicio 2 del Capítulo 1.) Esto se extiende a politopos convexos, definiendo como cara i -dimensional del n -cubo al mínimo conjunto convexo que contiene a los vectores que coinciden en $n - i$ entradas. La siguiente figura es una representación bidimensional de un 4-cubo.

Podemos ver que consta de 16 vértices, 32 aristas, 24 cuadrados y 8 cubos (celdas) formados como se describió anteriormente.

En la teoría de politopos abstractos, el politopo $2^{\mathcal{K}}$ es una generalización del n -cubo, pero tal que todas sus facetas son isomorfas a \mathcal{K} , de la misma forma como las figuras de vértice del n -cubo son isomorfas al $(n - 1)$ -simplejo. En esta sección daremos una construcción y probaremos que su grupo de automorfismos se describe de manera natural a partir del grupo de automorfismos de \mathcal{K} .

Construcción.

Recordemos que, para $f \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{U}(f)$ denota al conjunto de vértices incidentes a la cara f . Nótese que si $f = \emptyset$, entonces no existen vértices en la sección \emptyset/\emptyset , es decir $\mathfrak{U}(f) = \emptyset$.

A continuación definiremos los conjuntos que posteriormente serán las caras del copo $2^{\mathcal{K}}$.

Definición 3.8. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices. Para cada $f \in \mathcal{K}$, y cada $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ definimos el conjunto

$$f(\alpha) := \{\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n : \text{para toda } v \in (\mathfrak{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathfrak{U}(f)), \alpha_v = \varepsilon_v\}.$$

Ejemplo 3.9. Sea $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$. Si $f = \emptyset$, entonces $\emptyset(\alpha) = \{\alpha\}$. Si $f = v \in \mathfrak{U}(\mathcal{K})$, entonces $f(\alpha) = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{v-1}, 0, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1}), (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{v-1}, 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1})\}$.

A continuación definiremos el copo $2^{\mathcal{K}}$, para posteriormente demostrar que es un politopo abstracto.

Definición 3.10. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices. Al conjunto

$$\{\emptyset\} \cup \{f(\alpha) : f \in \mathcal{K}, \alpha \in \mathbb{F}_2^n\}$$

le asignaremos el orden dado por la contención, es decir, para $f, g \in \mathcal{K}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$ definimos $f(\alpha) \leq g(\beta)$ si, y sólo si $f(\alpha) \subseteq g(\beta)$, y definimos el copo

$$2^{\mathcal{K}} := (\{\emptyset\} \cup \{f(\alpha) : f \in \mathcal{K}, \alpha \in \mathbb{F}_2^n\}, \leq).$$

Notemos que los vértices de $2^{\mathcal{K}}$ son los conjuntos de la forma $\emptyset(\alpha) = \{\alpha\}$, así que, por simplicidad, los identificaremos con los elementos $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$. La siguiente observación es muy sencilla, pero a su vez es muy útil, ya que gracias a ella podemos recuperar a los elementos de $\mathfrak{U}(f)$ a partir de los vectores en $f(\alpha)$.

Observación 3.11. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices y sea $f \in \mathcal{K}$.

- Para todo $\varepsilon \in f(\alpha)$, $f(\varepsilon) = f(\alpha)$.
- Para todo $v \in \mathfrak{U}(\mathcal{K})$, $v \in \mathfrak{U}(f)$ si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ existe $\varepsilon \in f(\alpha)$ tal que $\varepsilon_v \neq \alpha_v$.
- Si $f \neq g$ entonces, para toda $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$, $f(\alpha) \neq g(\alpha)$.

Los siguientes resultados se siguen fácilmente a partir de la observación anterior. Nos explican con gran detalle cómo se relaciona el orden de \mathcal{K} con el orden de $2^{\mathcal{K}}$.

Lema 3.12. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sean $f, g \in \mathcal{K}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$. Si $f(\alpha) \leq g(\beta)$ entonces $g(\alpha) = g(\beta)$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 3.11 sólo resta observar que $\alpha \in \mathfrak{g}(\beta)$ para tener el resultado. □

Corolario 3.13. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices. Si existen $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$ y $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{K}$ tales que $\mathfrak{f}(\alpha) = \mathfrak{g}(\beta)$, entonces $\mathfrak{f} = \mathfrak{g}$.*

Lema 3.14. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sean $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{K}$ y $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$. Entonces $\mathfrak{f}(\alpha) \leq \mathfrak{g}(\alpha)$ si, y sólo si $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.6, $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$ si, y sólo si $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, pero por la Observación 3.11 se tiene que $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ si, y sólo si $\mathfrak{f}(\alpha) \subseteq \mathfrak{g}(\alpha)$. Como el orden en 2^K está dado por la contención, tenemos que $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \leq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ si, y sólo si $\mathfrak{f}(\alpha) \subseteq \mathfrak{g}(\alpha)$ □

Sea $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$. Se sigue de los lemas anteriores que la figura de vértice de α está compuesta por las caras de la forma $\mathfrak{f}(\alpha)$, con $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}$. También es fácil ver, a partir del lema anterior, que el orden en las caras de la figura de vértice de α está dado por el orden de \mathcal{K} . Nótese que esto no necesariamente es cierto si \mathcal{K} no fuera latiz.

Dados $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$, es fácil demostrar, a partir de la definición del conjunto $\mathfrak{f}(\alpha)$, que sumar β al conjunto $\mathfrak{f}(\alpha)$ nos llevará a otra cara del copo. Esto nos será de mucha utilidad más adelante.

Lema 3.15. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Sea $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}$ y sean $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$. Entonces $\beta + \mathfrak{f}(\alpha) = \mathfrak{f}(\beta + \alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$, entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (\beta + \mathfrak{f}(\alpha)) &\Leftrightarrow (\varepsilon - \beta) \in \mathfrak{f}(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \mathfrak{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathfrak{U}(\mathfrak{f}), (\varepsilon - \beta)_v = \alpha_v \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \mathfrak{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathfrak{U}(\mathfrak{f}), \varepsilon_v - \beta_v = \alpha_v \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \mathfrak{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathfrak{U}(\mathfrak{f}), \varepsilon_v = \beta_v + \alpha_v \\ &\Leftrightarrow \forall v \in \mathfrak{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathfrak{U}(\mathfrak{f}), \varepsilon_v = (\beta + \alpha)_v \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \in \mathfrak{f}(\beta + \alpha). \end{aligned}$$

Recordemos que, dado un politopo \mathcal{P} y $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{P}$ con $\mathfrak{f} \leq \mathfrak{g}$, denotamos por $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$ al politopo formado por las caras menores o iguales a \mathfrak{g} y mayores o iguales a \mathfrak{f} . Es fácil notar que si \mathcal{K} es □

un politopo latiz regular, cualquier sección \mathcal{S} propia de éste también será un politopo latiz regular, así que es posible definir al politopo $2^{\mathcal{S}}$. El siguiente lema es un resultado inmediato a partir de los resultados dados previamente.

Lema 3.16. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$. Entonces para toda $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$, la sección $\mathbf{f}(\alpha)/\emptyset$ de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfa $2^{\mathbf{f}/\emptyset}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{U}(\mathbf{f}) = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\} \subseteq \mathcal{U}(\mathcal{K}) = [n]$. Para seguir la construcción de $2^{\mathbf{f}/\emptyset}$ asignaremos una nueva numeración a los vértices incidentes a \mathbf{f} de forma natural, es decir, $i_j \mapsto j$. Esta nueva numeración induce una biyección entre los vértices de $\mathbf{f}(\alpha)/\emptyset$ y los vértices de $2^{\mathbf{f}/\emptyset}$, eliminando de cada vértice de $\mathbf{f}(\alpha)/\emptyset$ a todas las entradas que no corresponden a vértices incidentes a \mathbf{f} . A partir de los Lemas 3.12 y 3.14 es fácil ver que esta biyección induce un isomorfismo de copos.



Hasta el momento hemos dado muchas propiedades del copo $2^{\mathcal{K}}$ y probablemente ya se tenga una fuerte intuición de por qué dicho copo es un politopo. En la siguiente proposición englobaremos los detalles importantes que relacionan a \mathcal{K} con $2^{\mathcal{K}}$, previo a demostrar que éste es un politopo.

Proposición 3.17. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular.*

- *El copo $2^{\mathcal{K}}$ es un copo graduado. Si r' y r son las funciones de rango de \mathcal{K} y $2^{\mathcal{K}}$, respectivamente, entonces*

$$(\mathbf{F})r = \begin{cases} (\mathbf{f})r' + 1 & \text{si existen } \mathbf{f} \in \mathcal{K} \text{ y } \alpha \in \mathbb{F}_2^n \text{ tales que } \mathbf{F} = \mathbf{f}(\alpha), \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- *El conjunto de vértices de $2^{\mathcal{K}}$ es $\{\{\alpha\} : \alpha \in \mathbb{F}_2^n\}$.*
- *Si $\mathcal{U}(\alpha)$ es la figura de vértice de α , entonces $\mathcal{U}(\alpha) = \{\mathbf{f}(\alpha) : \mathbf{f} \in \mathcal{K}\}$, y ésta es isomorfa a \mathcal{K} .*

Corolario 3.18. *Sea $\delta \geq 0$ y sea G/F una δ -sección de $2^{\mathcal{K}}$, con $(\mathbf{F})r \geq 0$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ y g/\mathbf{f} una δ -sección de \mathcal{K} tal que $G/F = g(\alpha)/\mathbf{f}(\alpha)$.*

DEMOSTRACIÓN. Toda δ -sección de esta forma está contenida en una figura de vértice de $2^{\mathcal{K}}$. El resto se sigue la proposición anterior y de la Observación 3.11.



Corolario 3.19. *Sea $\hat{\Phi} = [\emptyset, F_0, F_1, \dots, F_d, F_{d+1}]$ una bandera de $2^{\mathcal{K}}$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ y $\Phi = [\emptyset, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d]$ una bandera de \mathcal{K} tal que $\hat{\Phi} = [\emptyset, \emptyset(\alpha), \mathbf{f}_0(\alpha), \mathbf{f}_1(\alpha), \dots, \mathbf{f}_d(\alpha)]$.*

Recordemos que el 1-esqueleto de un politopo es la gráfica cuyos vértices son los vértices del politopo y dos de éstos son adyacentes si son incidentes a una misma arista en el politopo (es decir, sus aristas son las aristas del politopo.) Es fácil ver que, para todo politopo latiz \mathcal{K} , el 1-esqueleto de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfo al n -cubo definido al inicio de la sección.

En el siguiente lema demostraremos que el copo es un copo conexo. La conexidad fuerte se deriva de manera sencilla a partir de la conexidad por el Lema 3.16 y de la Proposición 3.17.

Lema 3.20. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Entonces $2^{\mathcal{K}}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in \mathcal{K}$ dos caras propias y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$. Como $f(\alpha)$ y $g(\beta)$ son elementos de la figura de vértice de α y β , respectivamente, y éstas son isomorfas, ambas, a \mathcal{K} , entonces existe un camino de $f(\alpha)$ a α y un camino de $g(\beta)$ a β , respectivamente, en el diagrama de Hasse de $2^{\mathcal{K}}$. Ahora, como el esqueleto de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfo al cubo n -dimensional, existe un camino de α a β , también en el diagrama de Hasse de $2^{\mathcal{K}}$. Concatenando estos caminos tenemos un camino de $f(\alpha)$ a $g(\beta)$ en $\mathcal{H}(2^{\mathcal{K}})$. □

Proposición 3.21. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces el copo $2^{\mathcal{K}}$ es un $(d + 1)$ -politopo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea m la cara máxima de \mathcal{K} . Es claro que \emptyset es la única cara de rango -1 , y que $m(\alpha) = \mathcal{U}(2^{\mathcal{K}})$ es la única cara de rango $d + 1$.

Sean $f, g \in \mathcal{K}$ tales que $(f)r = (g)r - 2$. Si $f(\alpha) \leq g(\beta)$, por el Lema 3.12, $g(\beta) = g(\alpha)$. Sean $h, h' \in \mathcal{K}$ tales que $\langle h, f, h' \rangle$ es un diamante. Entonces es claro que, $\langle h(\alpha), f(\alpha), g(\alpha), h'(\alpha) \rangle$ es un diamante de $2^{\mathcal{K}}$, ya que estas caras pertenecen a $\mathcal{U}(\alpha)$. Resta verificar que, para todo $f \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$, sólo existen dos elementos en $\mathcal{U}(f(\alpha))$, pero esto es, exactamente, lo descrito en el Ejemplo 3.9.

Sea S una sección de $2^{\mathcal{K}}$. Si el rango de la cara mínima de S es mayor o igual a 0, entonces es conexa por el Corolario 3.18, dado que las figuras de vértice de $2^{\mathcal{K}}$ son isomorfas a \mathcal{K} . Si $\emptyset \in S$, la conexidad de S se sigue de los Lemas 3.16 y 3.20. □

Si $\alpha, \beta \in \mathcal{U}(2^{\mathcal{K}})$ y $f \in \mathcal{K}$, tenemos que $\alpha \leq f(\beta)$ si y sólo si $\alpha \in f(\beta)$, por lo tanto $\mathcal{U}(f(\beta)) = f(\beta)$. A partir de esto tenemos la siguiente observación.

Observación 3.22. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un politopo vértice-descriptible.*

Grupo de automorfismos y propiedades.

Dado que \mathcal{K} y $2^{\mathcal{K}}$ son politopos vértice-descriptibles, todos sus automorfismos están completamente determinados por la imagen de sus vértices. Por el resto de esta sección denotaremos

por $\text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathcal{U}}$ al grupo de permutaciones inducidas en $\mathcal{U}(\mathcal{K})$ por los automorfismos de \mathcal{K} , y demostraremos que el grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ está descrito como un producto semidirecto de $\text{Aut}(\mathcal{K})$ por \mathbb{F}_2^n . La definición formal de este producto puede ser encontrada en el Apéndice 2.

Lema 3.23. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y sea $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathcal{U}}$. Entonces la función $\hat{\gamma} : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ definida para cada $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ por*

$$(\alpha)\hat{\gamma} := (\alpha_{(0)\gamma^{-1}}, \alpha_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \alpha_{(n-1)\gamma^{-1}})$$

induce un automorfismo del politopo $2^{\mathcal{K}}$.

DEMOSTRACIÓN. Definimos $(\mathbf{F})\hat{\gamma} = \{(\alpha)\hat{\gamma} : \alpha \in \mathbf{F}\}$. Primero probaremos que $\hat{\gamma}$ manda caras en caras. Sea $\mathbf{F} \in 2^{\mathcal{K}}$. Si $\mathbf{F} = \emptyset$ entonces $(\mathbf{F})\hat{\gamma} = (\emptyset)\hat{\gamma} = \emptyset$. Si $\mathbf{F} > \emptyset$ entonces existen $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ tales que $\mathbf{F} = \mathbf{f}(\alpha)$. Sea $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ y sea $\bar{\gamma}$ el automorfismo de \mathcal{K} asociado a γ , entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (\mathbf{f}(\alpha))\hat{\gamma} &\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbf{f}(\alpha) \text{ tal que } \varepsilon = (\beta)\hat{\gamma} \\ &\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{F}_2^n \text{ tal que } (\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{U}(\mathbf{f}))(\alpha_{\mathbf{v}} = \beta_{\mathbf{v}}) \text{ y } \varepsilon = (\beta)\hat{\gamma} \\ &\Leftrightarrow \exists \beta \in \mathbb{F}_2^n \text{ tal que } (\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{U}(\mathbf{f}\gamma))(\alpha_{(\mathbf{v})\gamma^{-1}} = \beta_{(\mathbf{v})\gamma^{-1}}) \text{ y } \varepsilon = (\beta)\hat{\gamma} \\ &\Leftrightarrow (\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{U}(\mathbf{f}\gamma))(\alpha_{(\mathbf{v})\gamma^{-1}} = \varepsilon_{(\mathbf{v})\gamma^{-1}}) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \in ((\mathbf{f}\bar{\gamma})((\alpha)\hat{\gamma})) \end{aligned}$$

Tenemos que $\hat{\gamma}$ induce una función biyectiva del politopo en sí mismo dado que $2^{\mathcal{K}}$ es finito, a la cual también llamaremos $\hat{\gamma}$. Resta demostrar que es un morfismo de copos. Intuitivamente es claro, dado que al permutar a los vértices de \mathcal{K} estamos permutando las entradas de los vértices de $2^{\mathcal{K}}$, y al saber en cuáles entradas hay “libertad” de movernos, podemos determinar cuándo una cara es menor que otra. Formalmente, sean $\mathbf{F}, \mathbf{G} \in 2^{\mathcal{K}}$ tales que $\mathbf{F} \leq \mathbf{G}$. Si $\mathbf{F} = \emptyset$, es inmediato que $(\emptyset)\hat{\gamma} = \emptyset \leq (\mathbf{G})\hat{\gamma}$. Si $\mathbf{F} > \emptyset$, entonces existen $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}$ y existe $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ tales que $\mathbf{F} = \mathbf{f}(\alpha)$ y $\mathbf{G} = \mathbf{g}(\alpha)$. Sea $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$, entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon \in (\mathbf{f}(\alpha))\hat{\gamma} &\Leftrightarrow \exists \varepsilon' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}) \in \mathbf{f}(\alpha) \text{ tal que } \varepsilon = (\varepsilon'_{(0)\gamma^{-1}}, \varepsilon'_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \varepsilon'_{(n-1)\gamma^{-1}}) \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n \text{ tal que} \\ &\quad \varepsilon = (\varepsilon'_{(0)\gamma^{-1}}, \varepsilon'_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \varepsilon'_{(n-1)\gamma^{-1}}) \text{ y } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{U}(\mathbf{f}), \varepsilon'_{\mathbf{v}} = \alpha_{\mathbf{v}} \\ &\Rightarrow \exists \varepsilon' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n \text{ tal que} \\ &\quad \varepsilon = (\varepsilon'_{(0)\gamma^{-1}}, \varepsilon'_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \varepsilon'_{(n-1)\gamma^{-1}}) \text{ y } \forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{K}) \setminus \mathcal{U}(\mathbf{g}), \varepsilon'_{\mathbf{v}} = \alpha_{\mathbf{v}} \\ &\Leftrightarrow \exists \varepsilon' = (\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n-1}) \in \mathbf{g}(\alpha) \text{ tal que } \varepsilon = (\varepsilon'_{(0)\gamma^{-1}}, \varepsilon'_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \varepsilon'_{(n-1)\gamma^{-1}}) \\ &\Leftrightarrow \varepsilon \in (\mathbf{g}(\alpha))\hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $(f(\alpha))\hat{\gamma} \leq (g(\alpha))\hat{\gamma}$.



Tenemos que γ es una permutación de $[n]$, y es fácil verificar que si M_γ es la matriz de permutación asociada a γ , entonces $(\alpha)\hat{\gamma} = \alpha M_\alpha$, donde estamos viendo a α como una matriz de $1 \times n$. Por lo tanto $\hat{\gamma}$ es una función lineal en $\mathfrak{U}(2^K)$.

Lema 3.24. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$. La función $T_\beta : \mathbb{F}_2^n \rightarrow \mathbb{F}_2^n$ definida por*

$$(\varepsilon)T_\beta := \varepsilon + \beta$$

induce un automorfismo del politopo 2^K .

DEMOSTRACIÓN. Definimos $(F)T_\beta = \{(\alpha)T_\beta : \alpha \in F\}$. Es claro que T_β induce una función biyectiva del politopo en sí mismo dado que 2^K es vértice descriptible. A esta función también llamaremos T_β . Resta demostrar que es un automorfismo de copos, para lo cual procederemos de manera similar a la demostración anterior. Intuitivamente podemos pensar que las entradas que tienen en común los vértices de una cara se alteran de la misma forma. Formalmente, sean $F, G \in 2^K$ tales que $F \leq G$. Si $F = \emptyset$, es inmediato que $(\emptyset)T_\beta = \emptyset \leq (G)T_\beta$. Si $F > \emptyset$, entonces existen $f, g \in \mathcal{K}$ y existe $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$ tales que $F = f(\alpha)$ y $G = g(\alpha)$. Entonces, por el Lema 3.14,

$$\begin{aligned} f(\alpha) \leq g(\alpha) &\Leftrightarrow f \leq g \\ &\Leftrightarrow f(\alpha + \beta) \leq g(\alpha + \beta) \\ &\Leftrightarrow (f(\alpha))T_\beta \leq (g(\alpha))T_\beta. \end{aligned}$$

Lo que nos dice que $(f(\alpha))T_\beta \leq (g(\alpha))T_\beta$.



Lema 3.25. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Sea $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})$ y sea $\beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$. Entonces $\hat{\gamma}^{-1}T_\beta\hat{\gamma} = T_{(\beta)\hat{\gamma}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \mathbb{F}_2^n$. Entonces

$$\begin{aligned} (\varepsilon)\hat{\gamma}^{-1}T_\beta\hat{\gamma} &= (\varepsilon_{(0)\gamma}, \varepsilon_{(1)\gamma}, \dots, \varepsilon_{(n-1)\gamma})T_\beta\hat{\gamma} \\ &= (\varepsilon_{(0)\gamma} + \beta_0, \varepsilon_{(1)\gamma} + \beta_1, \dots, \varepsilon_{(n-1)\gamma} + \beta_{n-1})\hat{\gamma} \\ &= (\varepsilon_{(0)\gamma\gamma^{-1}} + \beta_{(0)\gamma^{-1}}, \varepsilon_{(1)\gamma\gamma^{-1}} + \beta_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \varepsilon_{(n-1)\gamma\gamma^{-1}} + \beta_{(n-1)\gamma^{-1}}) \\ &= (\varepsilon_0 + \beta_{(0)\gamma^{-1}}, \varepsilon_1 + \beta_{(1)\gamma^{-1}}, \dots, \varepsilon_{n-1} + \beta_{(n-1)\gamma^{-1}}) \\ &= (\varepsilon)T_{(\beta)\hat{\gamma}}. \end{aligned}$$



A partir del análisis hecho en los Lemas 3.23 y 3.24, podemos deducir que los grupos $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathfrak{U}} \rangle$ y $\langle T_{\beta} : \beta \in \mathbb{F}_2^n \rangle$ tienen intersección trivial, dado que todos los elementos de $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathfrak{U}} \rangle$ dejan fijo al punto $(0, 0, \dots, 0)$, mientras que para toda $\beta \in \mathfrak{U}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ distinta de $(0, 0, \dots, 0)$ se tiene que $((0, 0, \dots, 0))T_{\beta} = \beta$. Estos grupos tienen $|\text{Aut}(\mathcal{K})|$ y 2^n elementos, respectivamente. Además, el lema anterior nos dice que $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathfrak{U}} \rangle$ normaliza a $\langle T_{\beta} : \beta \in \mathbb{F}_2^n \rangle$, por lo tanto éste es un subgrupo normal en el grupo que generan ambos. Ahora, podemos observar que toda bandera de $2^{\mathcal{K}}$ es de la forma $[\emptyset, \emptyset(\alpha) = \alpha, \mathbf{f}_0(\alpha), \mathbf{f}_1(\alpha), \dots, \mathbf{f}_d(\alpha)]$, donde $[\emptyset, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d]$ es una bandera de \mathcal{K} y $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$, por lo tanto existen exactamente $|\text{Aut}(\mathcal{K})| \cdot 2^n = |\mathfrak{B}(\mathcal{K})|2^n$ banderas en $2^{\mathcal{K}}$. De esto tenemos que, por el Corolario 2.25, el grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{F}_2^n \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$. Lo anterior queda resumido en la siguiente proposición.

Proposición 3.26. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces el grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{F}_2^n \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$.*

Esto nos dice que los automorfismos del politopo $2^{\mathcal{K}}$ se obtienen a partir de sumar sus vértices y permutar las coordenadas de estos.

Corolario 3.27. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces $2^{\mathcal{K}}$ es un politopo regular.*

Ya que dimos la acción de $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathfrak{U}} \rangle$ y de $\langle T_{\beta} : \beta \in \mathbb{F}_2^n \rangle$ en los vértices de $2^{\mathcal{K}}$ hay una forma de dar una acción de $\mathbb{F}_2^n \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$ en sus caras que sea consistente con la de cada factor. Sea $F \in 2^{\mathcal{K}}$ y sea $(\beta, \gamma) \in \mathbb{F}_2^n \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$. Si $F = \emptyset$ entonces $(\emptyset)(\beta, \gamma) = \emptyset$. Si $F > \emptyset$, entonces existen $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$ tales que $F = \mathbf{f}(\alpha)$, entonces $(\mathbf{f}(\alpha))(\beta, \gamma) = ((\mathbf{f})\gamma)((\alpha)\hat{\gamma} + \beta)$.

3. El politopo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$

En la sección anterior construimos, a partir de un politopo latiz regular \mathcal{K} con n vértices, otro politopo cuyo 1-esqueleto es isomorfo al n -cubo tal que todas sus figuras de vértice son isomorfas a \mathcal{K} . También mostramos que su grupo de automorfismos es un producto semidirecto del grupo de automorfismos de \mathcal{K} con 2-grupo elemental abeliano. En esta sección generalizaremos dicha construcción. Para cada $s \in \mathbb{N}$, con $s \geq 2$, tendremos como resultado un politopo regular que también tiene a \mathcal{K} como sus figuras de vértice, pero cuyo grupo de automorfismos contiene un \mathbb{Z}_s -módulo. Las técnicas que estaremos usando y las pruebas serán muy parecidas a las dadas en la sección anterior.

Construcción.

Sea $s, n \in \mathbb{N}$ con $s \geq 2$. Sea \mathcal{EP}_s núcleo del morfismo de aumentación $\epsilon : \mathbb{Z}_s^n \rightarrow \mathbb{Z}_s$ definido por $\epsilon : (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \mapsto \sum_{i \in [n]} \alpha_i$. El nombre \mathcal{EP}_s proviene de *espacio par*, dado que es el mínimo espacio que contiene a todos los códigos de tipo par, cuando s es un número primo y dicho espacio es un espacio vectorial. Sea \mathfrak{B}_s el producto $\mathcal{EP}_s \times \mathbb{F}_2$. Este será el conjunto de vértices de nuestro politopo. Si $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{B}_s$, a la coordenada $c_{\bar{\alpha}}$ le llamaremos el *color* de $\bar{\alpha}$. A continuación definiremos un conjunto de funciones que nos indicarán cuándo dos vértices serán adyacentes en el 1-esqueleto de nuestro politopo.

Definición 3.28. Sean $s, n \in \mathbb{N}$ con $s \geq 2$ y sea $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{B}_s$. Para cada $0 \leq v < n - 1$ sea

$$(\bar{\alpha})\eta_v = \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0 \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v - 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1 \end{cases},$$

y para $v = n - 1$

$$(\bar{\alpha})\eta_{n-1} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1].$$

Observación 3.29. Para toda $v \in [n]$, el color de $\bar{\alpha}$ es distinto al color de $(\bar{\alpha})\eta_v$.

Notemos que si $v \neq u$, entonces η_v y η_u cambian entradas distintas, de esto podemos deducir la siguiente observación.

Observación 3.30.

- Para todo $(I) \subseteq [n]$, el conjunto $\{\eta_v : v \in (I)\}$ es un conjunto minimal de generadores para $\langle \eta_v : v \in (I) \rangle$.
- Para cada $v \in [n]$, la función η_v es una involución.

Las caras del politopo estarán definidas esta vez, como un subconjunto del conjunto de vértices, al igual que en el caso de $2^{\mathcal{K}}$.

Definición 3.31. Sea $s \in \mathbb{N}$ con $s \geq 2$. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y sea $\bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_s$. Definimos al conjunto $\mathbf{f}(\bar{\alpha})$ como

$$\mathbf{f}(\bar{\alpha}) := \{(\bar{\alpha})\chi : \chi \in \langle \eta_v : v \in \mathfrak{U}(\mathbf{f}) \rangle\}.$$

Al igual que en la sección anterior, definiremos el copo cuyo conjunto de elementos es $\{\mathbf{f}(\bar{\alpha}) : \mathbf{f} \in \mathcal{K}, \bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_s\} \cup \{\emptyset\}$ con el orden dado por la contención.

Definición 3.32. Sea $s \in \mathbb{N}$, con $s \geq 2$. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices. Al conjunto

$$\{\emptyset\} \cup \{\mathbf{f}(\bar{\alpha}) : \mathbf{f} \in \mathcal{K}, \bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s\}$$

le asignaremos el orden dado por la contención, es decir, para $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}$ y $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{W}_s$, definimos $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \leq \mathbf{g}(\bar{\beta})$ si y sólo si $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \subseteq \mathbf{g}(\bar{\beta})$, y definimos el copo

$$2 \cdot s^{\mathcal{K}-1} := (\{\emptyset\} \cup \{\mathbf{f}(\bar{\alpha}) : \mathbf{f} \in \mathcal{K}, \bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s\}, \leq).$$

En la Observación 3.30 dijimos que, para cada $\mathbf{v} \in [n]$, la función $\eta_{\mathbf{v}}$ es una involución, así que dados $\mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$ y $\bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s$ tenemos que $\mathbf{v}(\bar{\alpha})$ tiene exactamente dos elementos, por lo que podemos considerar la gráfica cuyos vértices son los elementos de \mathbb{W}_s , y dos de estos son adyacentes si existe $\mathbf{v} \in \mathbb{W}_s$ tal que $\eta_{\mathbf{v}}$ manda uno al otro. Ésta será el 1-esqueleto del copo. Por la Observación 3.29 tenemos que dicha gráfica es bipartita (2-coloreable,) así que los ciclos del 1-esqueleto serán de longitud par.

Ahora probaremos que las caras del copo que recién definimos tienen propiedades similares a las que tienen las caras de $2^{\mathcal{K}}$. De esta forma nos será sencillo probar que el copo que forman es un politopo abstracto regular cuyas figuras de vértice son todas isomorfas al politopo \mathcal{K} .

Proposición 3.33. Sea $s \in \mathbb{N}$ con $s \geq 2$. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sean $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y $\bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s$. Sea $\bar{\beta} \in \mathbf{f}(\bar{\alpha})$. Entonces $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) = \mathbf{f}(\bar{\beta})$.

DEMOSTRACIÓN. Si $\bar{\beta} \in \mathbf{f}(\bar{\alpha})$, entonces existe $\psi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{f}) \rangle$ tal que $\bar{\beta} = (\bar{\alpha})\psi$, pero tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\bar{\beta}) &= \{(\bar{\beta})\chi : \chi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{f}) \rangle\} \\ &= \{(\bar{\alpha})\psi\chi : \chi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{f}) \rangle\} \\ &= \{(\bar{\alpha})\psi\psi^{-1}\chi : \psi^{-1}\chi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{f}) \rangle\} \\ &= \{(\bar{\alpha})\chi : \chi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathcal{U}(\mathbf{f}) \rangle\} \\ &= \mathbf{f}(\bar{\alpha}). \end{aligned}$$



Corolario 3.34. Sea $s \in \mathbb{N}$ con $s \geq 2$. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular. Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}$ y sean $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{W}_s$. Si $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \leq \mathbf{g}(\bar{\beta})$, entonces $\mathbf{g}(\bar{\beta}) = \mathbf{g}(\bar{\alpha})$.

DEMOSTRACIÓN. A partir de la proposición anterior sólo resta notar que $\bar{\alpha} \in \mathbf{g}(\bar{\beta})$.



El siguiente lema es un resultado análogo a la Observación 3.11 para el politopo $2^{\mathcal{K}}$ que nos ayudará a caracterizar a los vértices incidentes a una cara \mathbf{f} en términos de las entradas de los vértices en cualquier conjunto de la forma $\mathbf{f}(\bar{\alpha})$. Antes de esto daremos una pequeña definición.

Definición 3.35. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices y sea $s \geq 3$. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y sea $\bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_s$. Decimos que $\mathbf{v} \in [n]$ tiene libertad en $\mathbf{f}(\bar{\alpha})$ si para cada $i \in \mathbb{Z}_s$ existe $\bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), c_{\bar{\beta}}] \in \mathbf{f}(\bar{\alpha})$ tal que $\beta_{\mathbf{v}} = i$.

Lema 3.36. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices y sea $s \geq 3$. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ una cara de rango mayor que 0 y sea $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{B}_s$. Entonces, para todo $\mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathcal{K})$ se tiene que $\mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f})$ si, y sólo si \mathbf{v} tiene libertad en $\mathbf{f}(\bar{\alpha})$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $(\mathbf{f})r > 0$, entonces $\mathfrak{U}(\mathbf{f}) \geq 2$. Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1. Supongamos que $n - 1 \in \mathfrak{U}(\mathbf{f})$. Sea $\mathbf{v} \in \mathfrak{B}_s$ tal que $\mathbf{v} \neq n - 1$. Observemos que

$$(\bar{\alpha})\eta_{\mathbf{v}}\eta_{n-1} = \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mathbf{v}-1}, \alpha_{\mathbf{v}} + 1, \alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mathbf{v}-1}, \alpha_{\mathbf{v}} - 1, \alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases}$$

es decir, sólo cambia las entradas \mathbf{v} y $n - 1$, dejando inmovil a las otras entradas y al color de $\bar{\alpha}$. Se sigue que si $\mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f})$ entonces existe $\mathbf{u} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f}) \setminus \{\mathbf{v}\}$ tal que para toda $i \in \mathbb{Z}_s$, $(\eta_{\mathbf{v}}\eta_{n-1})^i \in \langle \eta_{\mathbf{w}} : \mathbf{w} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f}) \rangle$, y en este caso se alcanzan todos los valores para las entradas \mathbf{v} y $n - 1$ en los elementos de $\mathbf{f}(\bar{\alpha})$. Inversamente es claro, dado que sólo $\eta_{\mathbf{v}}$ cambia la entrada \mathbf{v} para todos los elementos de \mathfrak{B}_s .

Caso 2. Supongamos que $n - 1 \notin \mathfrak{U}(\mathbf{f})$ y sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f})$ tales que $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Sin pérdida de generalidad, $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$. Observemos que

$$(\bar{\alpha})\eta_{\mathbf{u}}\eta_{\mathbf{v}} = \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mathbf{u}-1}, \alpha_{\mathbf{u}} + 1, \alpha_{\mathbf{u}+1}, \dots, \alpha_{\mathbf{v}-1}, \alpha_{\mathbf{v}} - 1, \alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, \alpha_{n-1}), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mathbf{u}-1}, \alpha_{\mathbf{u}} - 1, \alpha_{\mathbf{u}+1}, \dots, \alpha_{\mathbf{v}-1}, \alpha_{\mathbf{v}} + 1, \alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, \alpha_{n-1}), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases}$$

es decir, sólo cambia las entradas de \mathbf{u} y \mathbf{v} , dejando fijas a las otras entradas y al color de $\bar{\alpha}$.

Se sigue que si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f})$ entonces para toda $i \in \mathbb{Z}_s$, $(\eta_{\mathbf{u}}\eta_{\mathbf{v}})^i \in \langle \eta_{\mathbf{w}} : \mathbf{w} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f}) \rangle$, y en este caso se alcanzan todos los valores para las entradas \mathbf{v} y \mathbf{u} en los elementos de $\mathbf{f}(\bar{\alpha})$. Inversamente, si $\mathbf{v} \neq n - 1$ es claro que sólo $\eta_{\mathbf{v}}$ cambia la entrada \mathbf{v} de los elementos de \mathfrak{B}_s , y si $\mathbf{v} = n - 1$, podemos agrupar toda palabra $\eta_{\mathbf{v}_0}\eta_{\mathbf{v}_1} \dots \eta_{\mathbf{v}_l}$ en parejas $(\eta_{\mathbf{v}_i}\eta_{\mathbf{v}_{i+1}})$ que, como ya vimos, no cambian la entrada $n - 1$, así que en este caso, la entrada $n - 1$ puede alcanzar sólo dos valores (es por eso que el resultado es cierto sólo cuando $s \geq 3$).



A partir del lema anterior se puede decir de forma sencilla el siguiente resultado, que es fundamental para demostrar que las figuras de vértice son isomorfas a \mathcal{K} . Note que sólo tratamos el caso para $s \geq 3$, más adelante trataremos el caso $n = 2$ y demostraremos que $2 \cdot 2^{\mathcal{K}-1}$ es isomorfo a $2^{\mathcal{K}}$.

Corolario 3.37. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $\bar{\alpha} \in \mathfrak{W}_s$ y sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}$. Entonces $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \subseteq \mathbf{g}(\bar{\alpha})$ si y sólo si $\mathfrak{U}(\mathbf{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathbf{g})$.*

El siguiente resultado es un corolario del Lema 3.36, el cual nos dice que el politopo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es vértice-descriptible.

Proposición 3.38. *Para todo $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathfrak{W}_s$ y $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{K}$, si $\mathbf{f} \neq \mathbf{g}$ entonces $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \neq \mathbf{g}(\bar{\beta})$.*

Lema 3.39. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sean $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathfrak{C}(\mathcal{K})$ y sea $\alpha \in \mathfrak{W}_s$. Entonces $\mathbf{f}(\alpha) \leq \mathbf{g}(\alpha)$ si y sólo si $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.6 tenemos que $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ si y sólo si $\mathfrak{U}(\mathbf{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathbf{g})$, pero por el Corolario 3.37 tenemos que $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \subseteq \mathbf{g}(\bar{\alpha})$ si y sólo si $\mathfrak{U}(\mathbf{f}) \subseteq \mathfrak{U}(\mathbf{g})$.



Es claro que el copo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es un copo graduado. Podemos observar que si r' es la función de rango asignada a \mathcal{K} , entonces la función de rango asignada a $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es

$$(\mathbf{F})r = \begin{cases} (\mathbf{f})r' + 1 & \text{si existen } \mathbf{f} \in \mathcal{K} \text{ y } \bar{\alpha} \in \mathfrak{W}_s \text{ tales que } \mathbf{F} = \mathbf{f}(\bar{\alpha}), \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y que \mathfrak{W}_s es su conjunto de vértices (de elementos de rango 0). Así que tenemos derecho de hablar de las figuras de vértice de dicho copo que, por el Corolario 3.34 y lema anterior, son isomorfas a \mathcal{K} .

Corolario 3.40. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Entonces para toda $\bar{\alpha} \in \mathfrak{W}_s$, la figura de vértice en $\bar{\alpha}$ es isomorfa a \mathcal{K} .*

Corolario 3.41. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea \mathbf{G}/\mathbf{F} una δ -sección de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$, con $\delta, (\mathbf{F})r \geq 0$. Entonces existe $\bar{\alpha} \in \mathfrak{W}_s$ y \mathbf{g}/\mathbf{f} una δ -sección de \mathcal{K} tal que $\mathbf{G}/\mathbf{F} = \mathbf{g}(\bar{\alpha})/\mathbf{f}(\bar{\alpha})$.*

DEMOSTRACIÓN. Toda δ -sección \mathbf{G}/\mathbf{F} , con $(\mathbf{F})r \geq 0$ está contenida en una figura de vértice. El resto se sigue del corolario anterior y de la Observación 2.6.



Lema 3.42. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \in \mathbb{N}$. Entonces el 1-esqueleto del copo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es una gráfica conexa.*

DEMOSTRACIÓN. Sea n el número de vértices de \mathcal{K} . Sean $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}]$ y $\bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), c_{\bar{\beta}}]$ dos vértices del copo. Sabemos que $(\bar{\alpha})\eta_{n-1} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1]$, es decir, ambos vértices son adyacentes. Así que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $c_{\bar{\alpha}} = 0$.

Observamos antes, en la demostración del Lema 3.36, que

$$(\bar{\alpha})\eta_v\eta_{n-1} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 0]$$

por lo tanto podemos iterarlo tantas veces como sea necesario para cambiar cada entrada de $\bar{\alpha}$, y ajustar el color al final en caso de ser necesario. Al hacer esto nos estamos moviendo por vértices adyacentes en la gráfica. A partir de esto es fácil observar que

$$\bar{\beta} = \begin{cases} (\bar{\alpha})(\eta_{n-1}\eta_0)^{\beta_0-\alpha_0}(\eta_{n-1}\eta_1)^{\beta_1-\alpha_1} \dots (\eta_{n-1}\eta_{n-2})^{\beta_{n-2}-\alpha_{n-2}} & \text{si } c_{\bar{\beta}} = 0, \\ (\bar{\alpha})(\eta_{n-1}\eta_0)^{\beta_0-\alpha_0}(\eta_{n-1}\eta_1)^{\beta_1-\alpha_1} \dots (\eta_{n-1}\eta_{n-2})^{\beta_{n-2}-\alpha_{n-2}}\eta_{n-1} & \text{si } c_{\bar{\beta}} = 1. \end{cases}$$



Lema 3.43. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \in \mathbb{N}$. Entonces el copo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F, G \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ dos caras propias y, sin pérdida de generalidad supongamos que $(G)r \geq (F)r$. Tenemos que $F > \emptyset$, entonces sean $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{K}$ y sea $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathfrak{B}_s$ tales que $F = \mathfrak{f}(\bar{\alpha})$ y $G = \mathfrak{g}(\bar{\beta})$. Entonces podemos encontrar un camino de $\mathfrak{f}(\bar{\alpha})$ a $\bar{\alpha}$ tomando una cadena que contenga a ambos, y de igual forma podemos encontrar un camino de $\mathfrak{g}(\bar{\beta})$ a $\bar{\beta}$. Ahora, usando el lema anterior, podemos encontrar un camino en el 1-esqueleto (que es subgráfica del diagrama de Hasse de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$) de $\bar{\alpha}$ a $\bar{\beta}$. Concatenando estos caminos obtenemos un camino en $\mathcal{H}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ de F a G .



Lema 3.44. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices y sea $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}$. Sea $s \geq 3$. Entonces para todo $\bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_s$, el copo $2 \cdot s^{(\mathfrak{f}/\emptyset)-1}$ es un copo isomorfo a la sección $\mathfrak{f}(\bar{\alpha})/\emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathfrak{U}(\mathfrak{f}) = \{i_0, i_1, \dots, i_{m-1}\} \subseteq \mathcal{P} = [n]$. Para seguir la construcción de $2 \cdot s^{\mathfrak{f}/\emptyset}$ asignaremos una nueva numeración a los vértices incidentes a \mathfrak{f} de forma natural, es decir, $i_j \mapsto j$.

Esta nueva numeración induce una biyección entre los vértices de $\mathfrak{f}(\bar{\alpha})/\emptyset$ y los vértices de $2 \cdot s^{\mathfrak{f}/\emptyset}$, eliminando de cada vértice de $\mathfrak{f}(\bar{\alpha})/\emptyset$ a todas las entradas que no corresponden a vértices incidentes a \mathfrak{f} y reetiquetando en $[m]$. A partir de los Lemas 3.12 y 3.39 es fácil ver que esta biyección induce un isomorfismo de copos.



Proposición 3.45. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces el copo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es $(d+1)$ -politopo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea m la cara maximal de \mathcal{K} . Es claro que \emptyset es la única cara de rango -1 , y que $m(\bar{\alpha}) = \mathfrak{U}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ es la única cara de rango $d+1$.

Sean $F, G \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ dos caras cuyo rango difiere en 2 y, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(G)r = (F)r + 2$. Supongamos primero que $F > \emptyset$, entonces sean $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in \mathcal{K}$ y sean

$\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathfrak{B}_s$ tales que $F = f(\bar{\alpha})$ y $G = g(\bar{\beta})$. Si $f(\bar{\alpha}) \leq g(\bar{\beta})$, por el Lema 3.34, $g(\beta) = g(\alpha)$. Sean $h, h' \in \mathcal{K}$ tales que $\langle h_g^f \rangle$ es un diamante. Entonces se sigue del Corolario 3.40 que $\langle h(\bar{\alpha})_{g(\bar{\alpha})}^{f(\bar{\alpha})} h'(\bar{\alpha}) \rangle$ es un diamante, ya que estas caras pertenecen a $\mathcal{U}(\bar{\alpha})$. Resta verificar que, para todo $f \in \mathcal{U}(\mathcal{K})$, sólo existen dos elementos en $\mathcal{U}(f(\alpha))$, pero esto lo tenemos dado que, para cada $v \in [d]$, η_v es una involución. esto...

Sea \mathcal{S} una sección de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$. Si el rango de la cara mínima de \mathcal{S} es mayor o igual a 0, entonces es conexa por el Corolario 3.41. Si $\emptyset \in \mathcal{S}$, la conexidad de \mathcal{S} se sigue de los Lemas 3.43 y 3.44. □

Para terminar esta sección probaremos que el copo $2 \cdot 2^{\mathcal{K}-1}$ es isomorfo al politopo $2^{\mathcal{K}}$.

Proposición 3.46. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular. Entonces el copo $2 \cdot 2^{\mathcal{K}-1}$ es isomorfo al politopo $2^{\mathcal{K}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi : \mathcal{U}(2^{\mathcal{K}}) \rightarrow \mathcal{U}(2 \cdot 2^{\mathcal{K}-1})$ definida por

$$(\alpha)\varphi = ((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}))\varphi := [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \sum_{v=0}^{n-2} \alpha_v), \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v].$$

Es claro que ϕ es una biyección entre $\mathcal{U}(2^{\mathcal{K}})$ y $\mathcal{U}(2 \cdot 2^{\mathcal{K}-1})$. Sea $v \in [n]$ y sea $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$. Si $v < n - 1$, entonces

$$\begin{aligned} ((\alpha)\varphi)\eta_v &= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \sum_{v=0}^{n-2} \alpha_v), \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v] \right) \eta_v \\ &= [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-2}, \sum_{v=0}^{n-2} \alpha_v + 1), \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v + 1] \\ &= ((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1}))\phi. \end{aligned}$$

Si $v = n - 1$, entonces

$$\begin{aligned} ((\alpha)\varphi)\eta_v &= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \sum_{v=0}^{n-2} \alpha_v), \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v] \right) \eta_v \\ &= [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-2}, \sum_{v=0}^{n-2} \alpha_v), \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_v + 1] \\ &= ((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} + 1))\phi. \end{aligned}$$

Sea $f \in \mathcal{K}$ y sea $\varepsilon \in f(\alpha)$. Entonces, por la definición de $f(\alpha)$, el conjunto de índices en los que ε y α difieren es un conjunto $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{U}(f)$ y, por lo demostrado anteriormente tenemos que $(\varepsilon)\varphi = (\alpha) \left(\prod_{v \in \mathcal{I}} \eta_v \right) \in f((\alpha)\varphi)$. Como ambos conjuntos, $f(\alpha)$ y $f((\alpha)\varphi)$ tienen $2^{|\mathcal{U}(f)|}$ elementos, tenemos que $\varepsilon \in f(\alpha)$ si y sólo si $(\varepsilon)\varphi \in f((\alpha)\varphi)$, por lo tanto φ manda caras en caras, y como el

orden en ambos copos está dado por la contención de conjuntos, entonces es un isomorfismo de copos.



Grupo de automorfismos y propiedades.

El conjunto de vértices del politopo $2^{\mathcal{K}}$ forma un espacio vectorial. Es importante hacer notar que, en este caso, será un poco distinto. Su conjunto de vértices no formará un \mathbb{Z}_s -módulo, pero naturalmente tiene una estructura de producto semidirecto de uno de estos con \mathbb{F}_2 . Recordemos que \mathfrak{W}_s es el producto cartesiano de \mathcal{EP}_s y \mathbb{F}_2 .

Recordemos que \mathcal{EP}_s es un submódulo de \mathbb{Z}_s^n , en el cual se tiene definida la siguiente suma. Si $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), \beta = (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}) \in \mathcal{EP}_s$, entonces

$$\beta + \alpha := (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}).$$

Ahora definiremos un homomorfismo del grupo aditivo de \mathbb{F}_2 en $\text{Aut}(\mathcal{EP}_s)$ (donde $\text{Aut}(\mathcal{EP}_s)$ denota al grupo de automorfismos de \mathcal{EP}_s como grupo, no confundir con el grupo $\text{PAut}(\mathcal{EP}_s)$ de sus automorfismos por permutaciones como código, definido en el Capítulo 1 cuando s es primo). Sea $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathcal{EP}_s$ y sea $c \in \mathbb{F}_2$. Definimos

$$\alpha \odot c := \begin{cases} (-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}) & \text{si } c = 1, \\ (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) & \text{si } c = 0. \end{cases}$$

Es claro que esta operación define un homomorfismo en $\text{Aut}(\mathcal{EP}_s)$, es decir, para cada valor de c se tiene un automorfismo de \mathcal{EP}_s . Esto induce una estructura de producto semidirecto en \mathfrak{W}_s . Si $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}], \bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), c_{\bar{\beta}}] \in \mathfrak{W}_s$, definimos

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = [((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \odot c_{\bar{\beta}}) + (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + c_{\bar{\beta}}].$$

Proposición 3.47. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), 0] \in \mathfrak{W}_s$. Entonces*

$$[(0, 0, \dots, 0), 1] \cdot \bar{\alpha} \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1] = [(-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}), 0].$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} & [(0, 0, \dots, 0), 1] \cdot [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), 0] \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1] \\ &= [(0, 0, \dots, 0), 1] \cdot [(-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}), 1] \\ &= [(-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}), 0]. \end{aligned}$$



Observación 3.48. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y consideremos a $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}]$, $\bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), 0] \in \mathfrak{B}_s$. Entonces

$$\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta} = [(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}].$$

Ahora probaremos que multiplicar por elementos de color 0 por derecha conmuta, para cada $v \in [n]$, con la función η_v . Esto nos permitirá demostrar que deja invariante al conjunto de caras de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$.

Lema 3.49. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sean $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}]$, $\bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), 0] \in \mathfrak{B}_s$. Entonces para todo $v \in [n]$, $(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\eta_v = (\bar{\alpha})\eta_v \cdot \bar{\beta}$.

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1. Si $0 \leq v < n - 1$ entonces

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\eta_v &= \left([(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \right)\eta_v \\ &= \begin{cases} [(\alpha_0 + \beta_0, \dots, \alpha_{v-1} + \beta_{v-1}, \alpha_v + \beta_v + 1, \alpha_{v+1} + \beta_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} - 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0 + \beta_0, \dots, \alpha_{v-1} + \beta_{v-1}, \alpha_v + \beta_v - 1, \alpha_{v+1} + \beta_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} + 1), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1] \cdot \bar{\beta} & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v - 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0] \cdot \bar{\beta} & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1. \end{cases} \\ &= (\bar{\alpha})\eta_v \cdot \bar{\beta}. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $v = n - 1$ entonces

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\eta_v &= \left([(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \right)\eta_v \\ &= [(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1] \\ &= [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1] \cdot \bar{\beta} \\ &= (\bar{\alpha})\eta_v \cdot \bar{\beta}. \end{aligned}$$



Corolario 3.50. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sean $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}]$, $\bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), 0] \in \mathfrak{B}_s$. Entonces $f(\bar{\alpha}) \cdot \bar{\beta} = f(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\varepsilon} = [(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}), c_{\bar{\varepsilon}}] \in \mathfrak{B}_s$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} \in (\mathbf{f}(\bar{\alpha})) \cdot \bar{\beta} &\Leftrightarrow \exists \chi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f}) \rangle \text{ tal que } \bar{\varepsilon} = ((\bar{\alpha})\chi) \cdot \bar{\beta} \\ &\Leftrightarrow \exists \chi \in \langle \eta_{\mathbf{v}} : \mathbf{v} \in \mathfrak{U}(\mathbf{f}) \rangle \text{ tal que } \bar{\varepsilon} = (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\chi \\ &\Leftrightarrow \bar{\varepsilon} \in \mathbf{f}(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}). \end{aligned}$$



Para demostrar que la multiplicación por elementos de $\mathfrak{B}_s = \mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2$ induce una biyección en las caras de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ resta demostrar que la multiplicación por elementos de color 1 también deja invariante a este conjunto. Para esto es suficiente con probarlo para el elemento $[(0, 0, \dots, 0), 1]$.

Lema 3.51. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Entonces para toda $\mathbf{v} \in [n]$ y para toda $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{B}_s$ tenemos que $(\bar{\alpha} \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1])\eta_{\mathbf{v}} = ((\bar{\alpha})\eta_{\mathbf{v}}) \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1]$.*

DEMOSTRACIÓN. Dividiremos la prueba en dos casos.

Caso 1. Si $0 \leq \mathbf{v} < n - 1$ entonces

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1])\eta_{\mathbf{v}} &= ([-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}], c_{\bar{\alpha}} + 1)\eta_{\mathbf{v}} \\ &= \begin{cases} [(-\alpha_0, \dots, -\alpha_{\mathbf{v}-1}, -\alpha_{\mathbf{v}} - 1, -\alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, -\alpha_{n-1} + 1), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(-\alpha_0, \dots, -\alpha_{\mathbf{v}-1}, -\alpha_{\mathbf{v}} + 1, -\alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, -\alpha_{n-1} - 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mathbf{v}-1}, \alpha_{\mathbf{v}} + 1, \alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1] \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{\mathbf{v}-1}, \alpha_{\mathbf{v}} - 1, \alpha_{\mathbf{v}+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0] \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1. \end{cases} \\ &= ((\bar{\alpha})\eta_{\mathbf{v}}) \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1]. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $\mathbf{v} = n - 1$ entonces

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha} \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1])\eta_{n-1} &= ([-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}], c_{\bar{\alpha}} + 1)\eta_{n-1} \\ &= ([-\alpha_0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-1}], c_{\bar{\alpha}} + 1 + 1) \\ &= ([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1]) \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1] \\ &= ((\bar{\alpha})\eta_{n-1}) \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1]. \end{aligned}$$



Corolario 3.52. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sea $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{B}_s$. Entonces $\mathbf{f}(\bar{\alpha}) \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1] = \mathbf{f}(\bar{\alpha} \cdot [(0, 0, \dots, 0), 1])$.*

DEMOSTRACIÓN. La prueba es análoga a la del Corolario 3.50. □

Usando el lema anterior y el Corolario 3.50 podemos definir, para cada $\bar{\beta} \in \mathfrak{W}_s$, la función $T_{\bar{\beta}} : \mathfrak{W}_s \rightarrow \mathfrak{W}_s$ dada por

$$(\bar{\varepsilon})T_{\bar{\beta}} = \bar{\varepsilon} \cdot \bar{\beta},$$

y para $F \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ definimos $(F)T_{\bar{\beta}} = \{(\bar{\alpha})T_{\bar{\beta}} : \bar{\alpha} \in F\}$. Es claro que $T_{\bar{\alpha}}T_{\bar{\beta}} = T_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, entonces para toda $\bar{\alpha} \in \mathfrak{W}_s$ la función $T_{\bar{\alpha}}$ induce una biyección en las caras de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$, dado que ya probamos que lo hace cuando su color es cero y cuando $\bar{\alpha} = [(0, 0, \dots, 0), 1]$. Ahora, también es claro que si $\bar{\alpha} \neq \bar{\beta}$, entonces $T_{\bar{\alpha}} \neq T_{\bar{\beta}}$. Esto demuestra el siguiente lema.

Lema 3.53. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Entonces para cada $\bar{\beta} \in \mathfrak{W}_s$, la función $T_{\bar{\beta}}$ es un automorfismo de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$. Más aún, la función $T : \mathfrak{W}_s \rightarrow \text{Aut}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ definida por $(\bar{\beta})T = T_{\bar{\beta}}$ es un morfismo inyectivo.*

Ahora demostraremos que $\text{Aut}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ tiene un subgrupo isomorfo a $\text{Aut}(\mathcal{K})$. Recordemos que $\text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathfrak{U}}$ denota al grupo de permutaciones inducidas por $\text{Aut}(\mathcal{K})$ en $\mathfrak{U}(\mathcal{K})$. El siguiente lema es un resultado análogo al Lema 3.23, y nos dice que el grupo de automorfismos de \mathcal{K} es un subgrupo del grupo de automorfismos de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ de manera natural. En este caso, la noción intuitiva no es tan clara, dado que la acción del grupo en los vértices de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ dependerá del color en el vértice en el que esté actuando.

Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sea $\Phi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d]$ la bandera base de \mathcal{K} y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\mathbf{f}_0 = n - 1$ y que $\mathbf{f}_1 = \{0, n - 1\}$. Consideremos el conjunto de automorfismos distinguidos $\{\rho_i : i \in [d]\}$, y sea $\hat{\rho}_i : \mathfrak{W}_s \rightarrow \mathfrak{W}_s$ la función definida para cada $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}]$ y cada $i \in \{1, 2, \dots, d - 1\}$ por

$$(3.1) \quad (\bar{\alpha})\hat{\rho}_i := [(\alpha_{(0)\rho_i}, \alpha_{(1)\rho_i}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_i}), c_{\bar{\alpha}}],$$

y para $i = 0$ definimos

$$(3.2) \quad (\bar{\alpha})\hat{\rho}_0 := \begin{cases} [(\alpha_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0}), c_{\bar{\alpha}}] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_{(0)\rho_0} + 1, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} - 1), c_{\bar{\alpha}}] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1. \end{cases}$$

A partir de esto tenemos una acción de $\text{Aut}(\mathcal{K})$ en \mathfrak{W}_s definiendo, para cada $\gamma = \prod_i \rho_i \in \text{Aut}(\mathcal{K})$

$$(3.3) \quad (\bar{\alpha})\hat{\gamma} := (\bar{\alpha}) \left(\prod_i \hat{\rho}_i \right).$$

Lema 3.54. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sea $\Phi = [\mathbf{f}_{-1}, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d]$ la bandera base de \mathcal{K} , donde $\mathbf{f}_0 = n - 1$ y $\mathbf{f}_1 = \{0, n - 1\}$. Entonces para cada $i \in [d]$ y para cada $\mathbf{v} \in [n]$, tenemos que $\eta_{\mathbf{v}}\hat{\rho}_i = \hat{\rho}_i\eta_{\mathbf{u}}$, donde $(\mathbf{v})\rho_i = \mathbf{u}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{B}_s$. Notemos que para $i > 0$, tenemos que $(n-1)\rho_i = n-1$, dado que $n-1$ está en todas las caras de Φ mayores que \emptyset . También notemos que $(n-1)\hat{\rho}_0 = 0$. Dividiremos la prueba en 4 casos.

Caso 1. Si $v < n-1$ e $i = 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha})\eta_v\hat{\rho}_0 &= \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1]\hat{\rho}_0 & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v - 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0]\hat{\rho}_0 & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\alpha_{n-1} - 1 + 1, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_0}, \alpha_{(u)\rho_0} + 1, \alpha_{(u+1)\rho_0}, \dots, \alpha_0 - 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_{n-1} + 1, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_0}, \alpha_{(u)\rho_0} - 1, \alpha_{(u+1)\rho_0}, \dots, \alpha_0), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_0}, \alpha_{(u)\rho_0}, \alpha_{(u+1)\rho_0}, \dots, \alpha_0), 0]\eta_u & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_{n-1} + 1, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_0}, \alpha_{(u)\rho_0}, \alpha_{(u+1)\rho_0}, \dots, \alpha_0 - 1), 1]\eta_u & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= (\bar{\alpha})\rho_0\eta_u. \end{aligned}$$

Nótese que el índice de las entradas se encuentra en los argumentos de ρ_0 en la segunda y tercera expresiones.

Caso 2. Si $v = n-1$ e $i = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha})\eta_{n-1}\rho_0 &= ([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1])\rho_0 \\ &= \begin{cases} [(\alpha_{(0)\rho_0} + 1, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0}), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\alpha_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0}), 0]\eta_0 & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_{(0)\rho_0} + 1, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} - 1), 1]\eta_0 & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= (\bar{\alpha})\rho_0\eta_0. \end{aligned}$$

Caso 3. Si $v < n-1$ e $i > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha})\eta_v\rho_i &= \begin{cases} [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1]\hat{\rho}_i & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v - 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0]\hat{\rho}_i & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} [(\alpha_{(0)\rho_i}, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_i}, \alpha_{(u)\rho_i} + 1, \alpha_{(u+1)\rho_i}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 0, \\ [(\alpha_{(0)\rho_i}, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_i}, \alpha_{(u)\rho_i} - 1, \alpha_{(u+1)\rho_i}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0] & \text{si } c_{\bar{\alpha}} = 1, \end{cases} \\ &= ([(\alpha_{(0)\rho_i}, \dots, \alpha_{(u-1)\rho_i}, \alpha_{(u)\rho_i}, \alpha_{(u+1)\rho_i}, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}])\eta_u \\ &= (\bar{\alpha})\rho_i\eta_u. \end{aligned}$$

Caso 4. Si $v = n - 1$ e $i > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 (\bar{\alpha})\eta_{n-1}\rho_i &= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + 1] \right) \rho_i \\
 &= [(\alpha_{(0)\rho_i}, \alpha_{(1)\rho_i}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_i}), c_{\bar{\alpha}} + 1] \\
 &= \left([(\alpha_{(0)\rho_i}, \alpha_{(1)\rho_i}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_i}), c_{\bar{\alpha}}] \right) \eta_{n-1} \\
 &= (\bar{\alpha})\rho_i \eta_{n-1}.
 \end{aligned}$$



Corolario 3.55. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Sea $\Phi = [\emptyset, \mathfrak{f}_0, \mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_d]$ la bandera base de \mathcal{K} , donde $\mathfrak{f}_0 = n - 1$ y $\mathfrak{f}_1 = \{0, n - 1\}$. Entonces para cada $i \in [d]$, la función $\hat{\rho}_i$ induce un automorfismo de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$.

DEMOSTRACIÓN. Para $F \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ definimos $(F)\hat{\rho}_i := \{(\bar{\alpha})\hat{\rho}_i : \bar{\alpha} \in F\}$. Dado que el orden en $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ está dado por la contención y $\hat{\rho}_i$ es una permutación de vértices, resta demostrar que $\hat{\rho}_i$ induce una biyección en el conjunto de las caras de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$. Sea $F \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$. Si $F = \emptyset$ entonces, para toda $i \in [d]$, se tiene que $(\emptyset)\hat{\rho}_i = \emptyset$. Si $F > \emptyset$ entonces existen $\mathfrak{f} \in \mathcal{K}$ y $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{W}_s$ tales que $F = \mathfrak{f}(\bar{\alpha})$, entonces

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{f}(\bar{\alpha}))\hat{\rho}_i &= \left(\{(\bar{\alpha})\chi : \chi \in \langle \eta_v : v \in \mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \rangle\} \right) \hat{\rho}_i \\
 &= \{(\bar{\alpha})\chi \hat{\rho}_i : \chi \in \langle \eta_v : v \in \mathfrak{U}(\mathfrak{f}) \rangle\} \\
 &= \{(\bar{\alpha})\hat{\rho}_i \phi : \phi \in \langle \eta_u : u \in \mathfrak{U}((\mathfrak{f})\rho_i) \rangle\} \\
 &= ((\mathfrak{f})\rho_i)((\bar{\alpha})\hat{\rho}_i).
 \end{aligned}$$



Corolario 3.56. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\mathfrak{U}}$. Entonces la función $\hat{\gamma}$ definida en 3.3 induce un automorfismo del politopo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$.

Para demostrar que $\text{Aut}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ es isomorfo a $(\mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes \text{Aut}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ probaremos que el grupo $\{\hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})\}$ normaliza al grupo $\{T_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \mathfrak{W}_s\}$. Primero mostraremos que para toda $i \in [d]$, la función $\hat{\rho}_i$ es un automorfismo del grupo $\mathfrak{W}_s = \mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2$.

Lema 3.57. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Entonces para toda $i \in [d]$, la función $\hat{\rho}_i$ es un automorfismo del grupo $\mathfrak{W}_s = \mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}], \bar{\beta} = [(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), c_{\bar{\beta}}] \in \mathfrak{W}_s$. Si $i > 0$ entonces

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\hat{\rho}_i &= [((\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \odot c_{\bar{\beta}}) + (\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}), c_{\bar{\alpha}} + c_{\bar{\beta}}]\hat{\rho}_i \\
&= [((\alpha_{(0)\rho_i}, \alpha_{(1)\rho_i}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_i}) \odot c_{\bar{\beta}}) + (\beta_{(0)\rho_i}, \beta_{(1)\rho_i}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_i}), c_{\bar{\alpha}} + c_{\bar{\beta}}] \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_i}, \alpha_{(1)\rho_i}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_i}), c_{\bar{\alpha}}] \cdot [(\beta_{(0)\rho_i}, \beta_{(1)\rho_i}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_i}), c_{\bar{\beta}}] \\
&= (\bar{\alpha})\rho_i \cdot (\bar{\beta})\rho_i.
\end{aligned}$$

Si $i = 0$ dividiremos la prueba en 4 casos.

Caso 1. Si $c_{\bar{\alpha}} = c_{\bar{\beta}} = 0$, entonces.

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\hat{\rho}_0 &= [(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), 0]\hat{\rho}_0 \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0} + \beta_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0} + \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} + \beta_{(n-1)\rho_0}), 0] \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0}), 0] \cdot [(\beta_{(0)\rho_0}, \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_0}), 0] \\
&= (\bar{\alpha})\hat{\rho}_0 \cdot (\bar{\beta})\hat{\rho}_0.
\end{aligned}$$

Caso 2. Si $c_{\bar{\alpha}} = 1$ y $c_{\bar{\beta}} = 0$, entonces.

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\hat{\rho}_0 &= [(\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), 1]\hat{\rho}_0 \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0} + \beta_{(0)\rho_0} + 1, \alpha_{(1)\rho_0} + \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} + \beta_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0} + 1, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] \cdot [(\beta_{(0)\rho_0}, \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_0}), 0] \\
&= (\bar{\alpha})\hat{\rho}_0 \cdot (\bar{\beta})\hat{\rho}_0.
\end{aligned}$$

Caso 3. Si $c_{\bar{\alpha}} = 0$ y $c_{\bar{\beta}} = 1$, entonces.

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\hat{\rho}_0 &= [(-\alpha_0 + \beta_0, -\alpha_1 + \beta_1, \dots, -\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), 1]\hat{\rho}_0 \\
&= [(-\alpha_{(0)\rho_0} + \beta_{(0)\rho_0} + 1, -\alpha_{(1)\rho_0} + \beta_{(1)\rho_0}, \dots, -\alpha_{(n-1)\rho_0} + \beta_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0}), 0] \cdot [(\beta_{(0)\rho_0} + 1, \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] \\
&= (\bar{\alpha})\hat{\rho}_0 \cdot (\bar{\beta})\hat{\rho}_0.
\end{aligned}$$

Caso 4. Si $c_{\bar{\alpha}} = c_{\bar{\beta}} = 1$, entonces.

$$\begin{aligned}
(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})\hat{\rho}_0 &= [(-\alpha_0 + \beta_0, -\alpha_1 + \beta_1, \dots, -\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}), 0]\hat{\rho}_0 \\
&= [(-\alpha_{(0)\rho_0} + \beta_{(0)\rho_0}, -\alpha_{(1)\rho_0} + \beta_{(1)\rho_0}, \dots, -\alpha_{(n-1)\rho_0} + \beta_{(n-1)\rho_0}), 1] \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0}, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0}), 1] \cdot [(\beta_{(0)\rho_0}, \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_0}), 1] \\
&= [(\alpha_{(0)\rho_0} + 1, \alpha_{(1)\rho_0}, \dots, \alpha_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] \cdot [(\beta_{(0)\rho_0} + 1, \beta_{(1)\rho_0}, \dots, \beta_{(n-1)\rho_0} - 1), 1] \\
&= (\bar{\alpha})\hat{\rho}_0 \cdot (\bar{\beta})\hat{\rho}_0.
\end{aligned}$$



Corolario 3.58. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Entonces para toda $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})$, la función $\hat{\gamma}$ es un automorfismo del grupo $\mathbb{W}_s = \mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2$.

Teniendo esto es sencillo demostrar que el grupo $\{\hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})\}$ normaliza al grupo $\{T_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s\}$.

Corolario 3.59. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Entonces para toda $\gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})$ y para toda $\bar{\beta} \in \mathbb{W}_s$ tenemos que $\hat{\gamma}^{-1}T_{\bar{\alpha}}\hat{\gamma} = T_{(\bar{\alpha})\hat{\gamma}}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon \in \mathbb{W}_s$. Entonces

$$\begin{aligned} (\varepsilon)\hat{\gamma}^{-1}T_{\bar{\alpha}}\hat{\gamma} &= ((\varepsilon)\hat{\gamma}^{-1} \cdot \bar{\alpha})\hat{\gamma} \\ &= ((\varepsilon)\hat{\gamma}^{-1})\hat{\gamma} \cdot (\bar{\alpha})\hat{\gamma} \\ &= (\varepsilon) \cdot (\bar{\alpha})\hat{\gamma} \\ &= (\varepsilon)T_{(\bar{\alpha})\hat{\gamma}}. \end{aligned}$$



A partir del análisis hecho en el Lema 3.53 y el Corolario 3.56, podemos deducir que los grupos $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\text{lt}} \rangle$ y $\langle T_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s \rangle$ tienen intersección trivial y que tienen $|\text{Aut}(\mathcal{K})|$ y $2s^{n-1}$ elementos, respectivamente. Además, el corolario anterior nos dice que $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\text{lt}} \rangle$ normaliza a $\langle T_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s \rangle$, por lo tanto éste es un subgrupo normal en el grupo que generan ambos. Ahora, podemos observar que toda bandera de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es de la forma $[\emptyset, \emptyset(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}, \mathbf{f}_0(\bar{\alpha}), \mathbf{f}_1(\bar{\alpha}), \dots, \mathbf{f}_d(\bar{\alpha})]$, donde $[\emptyset, \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d]$ es una bandera de \mathcal{K} , por lo tanto existen exactamente $|\text{Aut}(\mathcal{K})| \cdot 2s^{n-1}$ banderas en $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$. De esto tenemos que, por el Corolario 2.25, el grupo de automorfismos de Tsk es isomorfo al producto semidirecto $\mathbb{W}_s \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K}) = (\mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$.

Teorema 3.60. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces el grupo de automorfismos de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es isomorfo al producto semidirecto $(\mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$.

Corolario 3.61. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular. Entonces $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es un politopo regular.

Ya que dimos la acción de $\langle \hat{\gamma} : \gamma \in \text{Aut}(\mathcal{K})_{\text{lt}} \rangle$ y $\langle T_{\bar{\alpha}} : \bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s \rangle$ en los vértices de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ hay una forma de dar una acción de $\mathbb{W}_s \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K}) = (\mathcal{EP}_s \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$ en sus caras que sea consistente con la de cada factor. Sea $F \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ y sea $(\bar{\beta}, \gamma) \in \mathbb{W}_s \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$. Si $F = \emptyset$ entonces $(\emptyset)(\bar{\beta}, \gamma) = \emptyset$. Si $F > \emptyset$, entonces existen $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$ y $\bar{\alpha} \in \mathbb{W}_s$ tales que $F = \mathbf{f}(\bar{\alpha})$, entonces $(\mathbf{f}(\bar{\alpha}))(\bar{\beta}, \gamma) = ((\mathbf{f})\gamma)((\bar{\alpha})\hat{\gamma} \cdot \bar{\beta})$.

Politopos abstractos construidos a partir de códigos lineales

En el Capítulo 2 hablamos del cociente de un politopo. Éste es el copo formado por las órbitas de la acción de un subgrupo de automorfismos del politopo. Dicho copo no siempre es un politopo. Por ejemplo si tomamos un prisma hexagonal y la reflexión que lleva un hexágono a otro (como en la Figura 1), el cociente no es un politopo ya que los vértices incidentes a una arista vertical se identifican, haciendo que esos elementos de rango 1 del cociente sean incidentes a exactamente un elemento de rango 0. Por lo tanto el cociente no cumple la propiedad del diamante.

En este capítulo demostraremos que al tomar un código lineal contenido en el grupo de automorfismos del politopo $2^{\mathcal{K}}$, o del politopo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$, casi siempre tendremos que el cociente será nuevamente un politopo. Además describiremos a su grupo de automorfismos en términos de los automorfismos de \mathcal{K} y los automorfismos del código.

1. Cocientes de $2^{\mathcal{K}}$

En [10], Schulte estudió los cocientes del politopo $2^{\mathcal{K}}$ por un código binario C , donde \mathcal{K} es un politopo latiz regular. Usando técnicas que aparecen en [12], demostró que el cociente es un politopo cuando el peso $WT(C)$ del código es mayor estrictamente que el número de vértices incidentes a una faceta. En esta sección utilizaremos técnicas propias de la teoría de politopos abstractos para

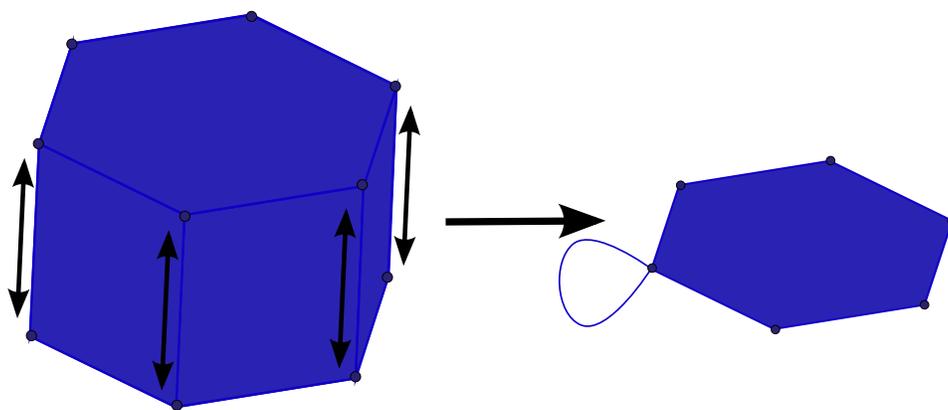


FIGURA 1. Cociente de un prisma que no es politopo.

demostrar que el cociente siempre es un politopo, cuando se trata de un código cuyo peso mínimo es mayor o igual a 2.

Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices. Recordemos que $\mathfrak{U}(2^{\mathcal{K}}) = \mathbb{F}_2^n$ y $\text{Aut}(2^{\mathcal{K}}) \cong \mathbb{F}_2^n \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$, donde \mathbb{F}_2^n actúa sumando entrada por entrada y $\text{Aut}(\mathcal{K})$ actúa permutando las entradas de los vértices de \mathcal{K} . Si $C \leq \mathbb{F}_2^n$ es un código binario, denotaremos por \bar{C} a $C \rtimes \{Id_{\mathcal{K}}\}$. Abusando de la notación, también diremos que \bar{C} es un código.

Para demostrar que el copo cociente es un politopo usaremos el Lema 2.12, que asegura que un copo graduado conexo es politopo cuando todas sus figuras de vértice y facetas lo son. En este caso demostraremos que las figuras de vértice son isomorfas a \mathcal{K} , y usaremos el Lema 3.16 para demostrar por inducción que las facetas también son politopos. Antes mostraremos algunos resultados preliminares.

Observación 4.1. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código binario. Sea M la cara máxima de \mathcal{K} . Entonces $M\bar{C}$ es la cara máxima de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ y $\emptyset\bar{C} = \emptyset$ es la cara mínima.

Lema 4.2. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código binario. Sean $f, g \in \mathcal{K}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$. Si $(f(\alpha))\bar{C} \leq (g(\beta))\bar{C}$, entonces $f \leq g$.

DEMOSTRACIÓN. Si $(f(\alpha))\bar{C} \leq (g(\beta))\bar{C}$ entonces existe $\bar{w} \in \bar{C}$ tal que $(f(\alpha))\bar{w} \leq g(\beta)$, pero por el Lema 3.15, $(f(\alpha))\bar{w} = f((\alpha) \cdot \bar{w})$. Por lo tanto, por los Lemas 3.14 y 3.12, tenemos que $f \leq g$.



Lema 4.3. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código binario. Sean $f, g \in \mathcal{K}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$. Si $f \neq g$ entonces $(f(\alpha))\bar{C} \neq (g(\beta))\bar{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $(f(\alpha))\bar{C} = (g(\beta))\bar{C}$. Entonces existe $\bar{w} \in \bar{C}$ tal que $(f(\alpha))\bar{w} = g(\beta)$, pero al igual que en la demostración anterior, por el Lema 3.15 tenemos que $f((\alpha)\bar{w}) = (f(\alpha))\bar{w} = g(\beta)$. Por lo tanto, por la Observación 3.11, $f = g$.



Proposición 4.4. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código binario. Entonces, para toda $\alpha \in \mathbb{F}_2^n$, la figura de vértice $\mathcal{U}(\alpha\bar{C})$ del vértice $\alpha\bar{C}$ de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfa a \mathcal{K} .

DEMOSTRACIÓN. Sea $\iota_{\alpha} : \mathcal{K} \rightarrow 2^{\mathcal{K}}$ definida por $(f)\iota_{\alpha} = f(\alpha)$, y sea $\pi_C : 2^{\mathcal{K}} \rightarrow 2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ definida por $(F)\pi_C = F\bar{C}$. Es claro que ambos son morfismos de copos, que ι_{α} es inyectivo y que π_C es suprayectivo. Ahora, notemos que la imagen de ι_{α} es la figura de vértice de α en $2^{\mathcal{K}}$, y π_C restringido a este conjunto es inyectiva por el lema anterior, por lo tanto $\iota_{\alpha}\pi_C$ es un isomorfismo de copos de

\mathcal{K} a la figura de vértice de $\alpha\bar{C}$.



Ya tenemos que las figuras de vértice del copo cociente son isomorfas a \mathcal{K} , resta demostrar que las secciones facetales también son politopos y que el copo es conexo. La segunda parte es directa.

Lema 4.5. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código binario. Entonces el copo $2^K/\bar{C}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea M la cara máxima de 2^K . Sean $F, G \in 2^K$ dos caras propias y consideremos un camino $(F_0 = F, F_1, F_2, \dots, F_{l-1}, F_l = G)$ de F a G en el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(2^K - \{\emptyset, M\})$. Entonces $(F_0\bar{C} = F\bar{C}, F_1\bar{C}, F_2\bar{C}, \dots, F_{l-1}\bar{C}, F_l\bar{C} = G\bar{C})$ es un camino de $F\bar{C}$ a $G\bar{C}$ en el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(2^K/\bar{C} - \{\emptyset, M\bar{C}\})$.



Notemos que esta prueba sirve para demostrar que la conexidad se mantiene en al tomar cualquier cociente de cualquier politopo.

En teoría de códigos, son mejores aquellos que tengan peso mínimo mayor, los códigos de peso mínimo 1 no son de interés, dado que estos no ayudan a detectar ni corregir errores. A continuación demostraremos que los cocientes del politopo 2^K por un código cuyo peso mínimo sea mayor o igual a dos también son politopos.

Teorema 4.6. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código de peso mínimo mayor o igual a 2. Entonces $2^K/\bar{C}$ es politopo.*

DEMOSTRACIÓN. En la Observación 4.1 mencionamos que $2^K/\bar{C}$ tiene elemento máximo y elemento mínimo.

Por el Lema 4.5, el cociente es conexo, y por la Proposición 4.4, todas las figuras de vértice también son politopos.

Sea $G\bar{C}/F\bar{C}$ una 1-sección de $2^K/\bar{C}$. Si $(F\bar{C})r \geq 0$ entonces dicha sección está contenida en alguna figura de vértice, por lo tanto es un diamante dado que las figuras de vértice son politopos. Si $(F\bar{C})r = -1$ (es decir, $F = \emptyset$), entonces $G\bar{C}/F\bar{C}$ tiene al menos dos vértices, dado que el código no identifica a vértices adyacentes de 2^K puesto que su peso es mayor o igual a 2. No puede tener más de dos vértices, ya que G contiene sólo dos vértices, y si $H\bar{C}$ es un vértice de $G\bar{C}/\emptyset$, entonces existe $\bar{w} \in \bar{C}$ tal que $\emptyset < (H)\bar{w} < G$. Esto prueba que $2^K/\bar{C}$ tiene la propiedad del diamante.

Ahora, sea $G\bar{C}/F\bar{C}$ una sección propia de $2^K/\bar{C}$. Si $(F\bar{C})r \geq 0$ entonces dicha sección está contenida en alguna figura de vértice, por lo tanto es conexa dado que las figuras de vértice son politopos. Si $(F\bar{C})r = -1$ (es decir, $F = \emptyset$), sean $H\bar{C}, H'\bar{C} \in G\bar{C}/F\bar{C}$, entonces existen $\bar{w}, \bar{w}' \in \bar{C}$ tales

que $\emptyset < (H)\bar{w} < G$ y $\emptyset < (H')\bar{w}' < G$. Por lo tanto existe un camino $(H_0 = (H)\bar{w}, H_1, H_2, \dots, H_{l-1}, H_l = (H')\bar{w}')$ de H a H' en el diagrama de Hasse de la sección abierta $(\emptyset, G) = (H/\emptyset) - \{\emptyset, H\}$. De ahí se sigue que $(H_0\bar{C} = H\bar{C}, H_1\bar{C}, H_2\bar{C}, \dots, H_{l-1}\bar{C}, H_l\bar{C} = H'\bar{C})$ es un camino de $H\bar{C}$ a $H'\bar{C}$ en el diagrama de Hasse $(\emptyset, G\bar{C}) = (H\bar{C}/\emptyset) - \{\emptyset, H\bar{C}\}$. Por lo tanto el copo es fuertemente conexo y esto era lo que nos faltaba demostrar. □

Recordemos que el grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ es isomorfo a $\mathbb{F}_2^n \rtimes Aut(\mathcal{K})$ y que, para $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_2^n$, $\gamma \in Aut_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K})$ y $f \in \mathcal{K}$, la acción del elemento (β, γ) en $f(\alpha)$ es $((f)\gamma)((\alpha)\hat{\gamma} + \beta)$, donde $\hat{\gamma}$ se define como en el Lema 3.23. A continuación describiremos al grupo de automorfismos del cociente $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ en términos del grupo de automorfismos de \mathcal{K} y el grupo de automorfismos por permutaciones de C .

Teorema 4.7. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathbb{F}_2^n$ un código lineal. Entonces el grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ es isomorfo a $(\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$.*

DEMOSTRACIÓN. Para esto daremos una acción de $(\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$ en $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$. Veremos que cada elemento actúa como un automorfismo de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$, que dicha acción es fiel y que todo automorfismo de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ se puede representar como un elemento de $(\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$.

Sea $(\alpha + C, \gamma) \in (\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$ y definamos, para cada $f(\beta)\bar{C} \in 2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$

$$(f(\beta)\bar{C})(\alpha + C, \gamma) := (((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{C}.$$

Primero probaremos que la asignación está bien definida. Sea $(f(\beta))\bar{w} \in f(\beta)\bar{C}$, entonces

$$\begin{aligned} ((f(\beta))\bar{w}\bar{C})(\alpha + C, \gamma) &= ((f(\beta) + w)\bar{C})(\alpha + C, \gamma) \\ &= ((f(\beta + w))\bar{C})(\alpha + C, \gamma) \\ &= (((f)\gamma)((\beta + w)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{C} \\ &= (((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + (w)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{C} \\ &= (((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha))\overline{(w)\hat{\gamma}}\bar{C} \\ &= (((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{C} \\ &= (f(\beta)\bar{C})(\alpha + C, \gamma). \end{aligned}$$

Por lo tanto la asignación está bien definida en las caras de $2^K/\bar{C}$. Verifiquemos ahora que está bien definida para los elementos de \mathbb{F}_2^n/C . Sea $\alpha + w \in \alpha C$, entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}(\beta)\bar{C})(\alpha + w + C, \gamma) &= (((\mathbf{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + w + \alpha))\bar{C} \\ &= (((\mathbf{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{w}\bar{C} \\ &= (((\mathbf{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{C} \\ &= (\mathbf{f}(\beta)\bar{C})(\alpha + C, \gamma). \end{aligned}$$

Ahora probaremos que esto es una acción. Sean $(\alpha + C, \gamma), (\alpha' + C, \gamma') \in (\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut_{\mathbb{N}}(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$ y sea $\mathbf{f}(\beta)\bar{C} \in 2^K/\bar{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}(\beta)\bar{C})((\alpha + C, \gamma)(\alpha' + C, \gamma')) &= (\mathbf{f}(\beta)\bar{C})(((\alpha)\hat{\gamma}' + C) + (\alpha' + C), \gamma\gamma') \\ &= (\mathbf{f}(\beta)\bar{C})(((\alpha)\hat{\gamma}' + \alpha') + C, \gamma\gamma') \\ &= (((\mathbf{f})\gamma\gamma')((\beta)\hat{\gamma}\hat{\gamma}' + (\alpha)\hat{\gamma}' + \alpha'))\bar{C} \\ &= (((\mathbf{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha, \gamma)\bar{C})(\alpha' + C, \gamma') \\ &= ((\mathbf{f}(\beta)\bar{C})(\alpha + C, \gamma))(\alpha' + C, \gamma'). \end{aligned}$$

No es suficiente observar que cada elemento de $(\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut_{\mathbb{N}}(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$ actúa como una biyección de las caras para demostrar que lo hace como un automorfismo del politopo, como lo hemos hecho antes. Esto es porque el cociente no siempre cumple con las hipótesis del Lema 3.7. Entonces tendremos que probarlo directamente. Sean $\mathbf{f}(\beta)\bar{C}, \mathbf{g}(\beta')\bar{C} \in 2 \cdot s^{K-1}/\bar{C}$ tales que $\mathbf{f}(\beta)\bar{C} \leq \mathbf{g}(\beta')\bar{C}$, y sea $(\alpha + C, \gamma) \in (\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut_{\mathbb{N}}(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$. Sabemos que existe $w \in C$ tal que $\mathbf{f}(\beta)\bar{w} = \mathbf{f}(\beta + w) \leq \mathbf{g}(\beta')$, y por lo tanto $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\beta + w) &\leq \mathbf{g}(\beta') \\ \Rightarrow ((\mathbf{f})\gamma)((\beta + w)\hat{\gamma}) &\leq ((\mathbf{g})\gamma)((\beta')\hat{\gamma}) \\ \Rightarrow ((\mathbf{f})\gamma)((\beta + w)\hat{\gamma} + \alpha) &\leq ((\mathbf{g})\gamma)((\beta')\hat{\gamma} + \alpha) \\ \Rightarrow (((\mathbf{f})\gamma)((\beta + w)\hat{\gamma} + \alpha)\bar{C}) &\leq (((\mathbf{g})\gamma)((\beta')\hat{\gamma} + \alpha)\bar{C}) \\ \Rightarrow (((\mathbf{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha)(w)\hat{\gamma}\bar{C}) &\leq (((\mathbf{g})\gamma)((\beta')\hat{\gamma} + \alpha)\bar{C}) \\ \Rightarrow (((\mathbf{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha)\bar{C}) &\leq (((\mathbf{g})\gamma)((\beta')\hat{\gamma} + \alpha)\bar{C}) \\ \Rightarrow (\mathbf{f}(\beta))(\alpha + C, \gamma) &\leq (\mathbf{g}(\beta'))(\alpha + C, \gamma). \end{aligned}$$

Para ver que la acción es fiel, veremos que la intersección de los estabilizadores es trivial, de esta forma el único elemento que fija simultáneamente a todos los elementos del politopo será el

elemento trivial. Sea $f(\beta)\bar{C} \in 2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ y sea $(\alpha + C, \gamma)$ un elemento en su estabilizador. Entonces

$$\begin{aligned} (f(\beta)\bar{C})(\alpha + C, \gamma) = f(\beta)\bar{C} &\Leftrightarrow (((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha))\bar{C} = f(\beta)\bar{C} \\ &\Leftrightarrow \exists w \in C \text{ tal que } (((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \gamma))\bar{w} = f(\beta) \\ &\Leftrightarrow \exists w \in C \text{ tal que } ((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha + w) = f(\beta) \end{aligned}$$

Si $(\alpha + C, \gamma)$ está en la intersección de los estabilizadores de las caras de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ entonces, por la última igualdad y la Observación 3.11 tenemos que para toda $f \in \mathcal{K}$ se tiene que $(f)\gamma = f$, por lo tanto $\gamma = Id_{[n]}$. Así que

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{K}, \exists w \in C \text{ tal que } ((f)\gamma)((\beta)\hat{\gamma} + \alpha + w) &= f(\beta) \\ \Leftrightarrow \gamma = Id_{[n]} \text{ y } \forall f \in \mathcal{K}, \exists w \in C \text{ tal que } f(\beta + \alpha + w) &= f(\beta) \end{aligned}$$

Entonces, si $f = \emptyset$ tenemos que $\beta + \alpha + w = \beta$, de aquí concluimos que $\alpha = -w \in C$, y por lo tanto $(\alpha + C, \gamma)$ es el neutro de $(\mathbb{F}_2^n/C) \rtimes (Aut(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$.

Sea $\zeta \in Aut(2^{\mathcal{K}}/\bar{C})$ y sea $\varepsilon = (0, 0, \dots, 0)$. Sea

$$\hat{\Phi}\bar{C} = [\emptyset\bar{C}, \emptyset(\varepsilon)\bar{C} = \varepsilon\bar{C}, f_0(\varepsilon)\bar{C}, f_1(\varepsilon)\bar{C}, \dots, f_d(\varepsilon)\bar{C}]$$

la bandera base de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ donde $\hat{\Phi} = [\emptyset, \emptyset(\varepsilon) = \varepsilon, f_0(\varepsilon), f_1(\varepsilon), \dots, f_d(\varepsilon)]$ es la bandera base de $2^{\mathcal{K}}$. Sea $(\hat{\Phi}\bar{C})\zeta = [\emptyset\bar{C}, \emptyset(\alpha)\bar{C} = \alpha\bar{C}, g_0(\alpha)\bar{C}, g_1(\alpha)\bar{C}, \dots, g_d(\alpha)\bar{C}]$. Por el Lema 2.48, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\hat{\Psi} = [\emptyset, \emptyset(\alpha) = \alpha, g_0(\alpha), g_1(\alpha), \dots, g_d(\alpha)]$ es una bandera de $2^{\mathcal{K}}$. Ahora, por el Corolario 3.19, tenemos que $\Phi = [\emptyset, f_0, f_1, \dots, f_d]$ y $\Psi = [\emptyset, g_0, g_1, \dots, g_d]$ son banderas de \mathcal{K} . Por ser \mathcal{K} regular tenemos que existe $\gamma \in Aut_{\mathbb{N}}(\mathcal{K})$ tal que $(\Phi)\gamma = \Psi$. Por lo tanto tenemos que $\hat{\Psi} = (\hat{\Phi})(\alpha, \gamma)$, es decir, para cada $i \in [d]$ se tiene que $((f_i)\gamma)((\varepsilon)\hat{\gamma} + \alpha) = g_i(\alpha)$. Entonces

$$\begin{aligned} (f_i(\varepsilon)\bar{C})(\alpha + C, \gamma) &= ((f_i)\gamma)((\varepsilon)\hat{\gamma} + \alpha)\bar{C} \\ &= g_i(\alpha)\bar{C}. \end{aligned}$$

Así que $(\hat{\Phi}\bar{C})(\alpha + C, \gamma) = \hat{\Psi}\bar{C}$, concluyendo que todo automorfismo de $2^{\mathcal{K}}/\bar{C}$ es de la forma $(\alpha + C, \gamma)$. □

Ejemplo 4.8. Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular con n vértices. Sea \mathcal{EP}_2 el $[n, n-1]$ -código formado por todas las palabras de tipo par de \mathbb{F}_2^n . Es claro que su grupo de automorfismos por permutaciones es S_n . El politopo $2^{\mathcal{K}}/\mathcal{EP}_2$ tiene sólo dos vértices, y sus figuras de vértice son ambas isomorfas a \mathcal{K} . Además

$$Aut(2^{\mathcal{K}}/\mathcal{EP}_s) \cong (\mathbb{F}_2^n/\mathcal{EP}_s) \rtimes (S_n \cap Aut_{\mathbb{N}}(\mathcal{K})) \cong \mathbb{F}_2 \rtimes Aut(\mathcal{K}).$$

Recordemos que el código de Hamming \mathcal{H}_r es un $[2^r - 1, 2^r - r - 1]$ código binario, el cual definimos en el Capítulo 1 en términos de su matriz de paridad. En la Proposición 1.23 decimos que para toda r existe un código equivalente (por permutaciones) a \mathcal{H}_r , que es cíclico, es decir, que la permutación $(0, 1, 2, \dots, 2^r - 1)$ es un automorfismo (por permutaciones) del código. El siguiente ejemplo fue estudiado por E. Schulte en [10].

Ejemplo 4.9. Sea $n = 2^r - 1$ y sea \mathcal{K} el n -ágono. Es fácil ver que \mathcal{K} es un politopo latiz regular y supongamos que cualquier pareja de vértices adyacentes es de la forma $(i, i + 1 \pmod{n})$. El politopo $2^{\mathcal{K}}$ es un poliedro (politopo de rango 3) cuyas caras son cuadrados y hay n de estos incidentes a cada vértice. Notemos que el número de vértices de este politopo es $2^n = 2^{2^r - 1}$. El politopo $2^{\mathcal{K}}/\bar{\mathcal{H}}_r$ tiene $\frac{2^{2^r - 1}}{2^{2^r - r - 1}} = 2^r$ vértices. Sus figuras de vértice son, también, n -ágonos regulares como lo demostramos previamente, así que todo vértice es adyacente a los n vértices restantes. Como el peso mínimo de \mathcal{H}_r es 3, ninguna pareja de vértices en una misma sección facetal es identificada, así que las caras del poliedro cociente también son cuadrados.

Sea C un código cíclico equivalente a \mathcal{H}_r . Como $(0, 1, 2, \dots, n - 1)$ también es un automorfismo de \mathcal{K} , tenemos que $\langle(0, 1, 2, \dots, n - 1)\rangle \leq \text{Aut}_{\mathbb{U}}(\mathcal{K}) \cap \text{PAut}(\mathcal{H}_r)$. Para ver que son iguales, observemos que $\text{Aut}_{\mathbb{U}}(\mathcal{K}) \cap \text{PAut}(\mathcal{H}_r) \leq D_{2n}$, el grupo diédrico de orden $2n$. Como el peso mínimo de C es 3, podemos considerar una palabra $w = (w_0, w_1, \dots, w_{n-1})$ de peso 3 y, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $w_0 = w_1 = w_r = 1$ (ver 1.2.5 de [6]). Si $r \geq 3$ y $D_{2n} \leq \text{PAut}(C)$ podríamos encontrar una reflexión que intercambie a 0 y r , pero ésta no dejaría fijo a 1, así que la distancia entre w y su imagen sería 2, lo que contradice el hecho de que el peso mínimo de C es 3. Por lo tanto no existe código equivalente a \mathcal{H}_r que haga regular al cociente.

2. Cocientes de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$

En esta sección demostraremos que los cocientes del politopo $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ sobre códigos lineales siempre son politopos; no pondremos condiciones en el peso mínimo. A partir del trabajo hecho en la sección anterior, este resultado puede parecer intuitivo, dado que la condición en el peso la usamos para demostrar que las 1-secciones G/F , con $(F)r = -1$, son diamantes. Es decir, que no identifica vértices adyacentes del politopo. En este caso podremos asegurarlo sin imponer restricciones en el peso mínimo del código, dado que los vértices adyacentes en $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ son de colores distintos.

En esta sección, s será un número primo, para que $C \leq \mathcal{EP}_s$ sea un código lineal, (en este caso, \mathbb{Z}_s es un campo). Denotaremos por \bar{C} a $(C \times \{0\}) \times \{id_{\mathcal{K}}\} \leq (\mathcal{EP}_s \times \mathbb{F}_2) \times \text{Aut}(\mathcal{K})$. Iniciamos con un par de observaciones sencillas.

Observación 4.10. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Para todo código $C \leq \mathcal{EP}_s$, el copo cociente $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1} / \bar{C}$ es un copo graduado.

Recordemos que los vértices de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ son de la forma $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}]$, donde $c_{\bar{\alpha}}$ es el color de $\bar{\alpha}$.

Observación 4.11. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular, sea $s \geq 3$ y sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código. Para toda $\bar{w} \in \bar{C}$ y para toda $\bar{\alpha} \in \mathfrak{U}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$, se tiene que $c_{\bar{\alpha}} = c_{(\bar{\alpha}) \cdot \bar{w}}$.

De la misma forma que en la sección anterior vamos a demostrar que las figuras de vértice del cociente son isomorfas a \mathcal{K} , factorizando el isomorfismo a través de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$.

Definición 4.12. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $\bar{\alpha} \in \mathcal{EP}_s$ y sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Sea $\iota_{\bar{\alpha}} : \mathcal{K} \rightarrow 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ definida por $(\mathbf{f})\iota_{\bar{\alpha}} = \mathbf{f}(\bar{\alpha})$ y sea $\pi_C : 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1} \rightarrow 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1} / C$ definida por $(\mathbf{F})\pi = \mathbf{F}C$. Les llamaremos la inmersión natural de \mathcal{K} en $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ por $\bar{\alpha}$, y la proyección natural de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ en $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1} / C$, respectivamente.

Observación 4.13. Las funciones $\iota_{\bar{\alpha}}$ y π_C definidas previamente son morfismos de copos. Más aún, $\iota_{\bar{\alpha}}$ es un morfismo inyectivo y π_C es un morfismo suprayectivo.

Por la observación anterior sólo resta demostrar que π_C es inyectivo en la imagen de $\iota_{\bar{\alpha}}$. Para esto daremos algunos resultados.

Proposición 4.14. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $s \geq 3$. Sea $\mathbf{f} \in \mathcal{K}$, y sean $\bar{\alpha} = [(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_{\bar{\alpha}}] \in \mathfrak{U}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ y $\bar{w} = ((w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}}) \in \bar{C}$. Entonces $(\mathbf{f}(\bar{\alpha}))\bar{w} = \mathbf{f}((\bar{\alpha}) \cdot \bar{w})$.

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de $f(\bar{\alpha})$ basta probar que, para cada $0 \leq v < n - 1$, $((\bar{\alpha})\eta_v)\bar{w} = ((\bar{\alpha}) \cdot \bar{w})\eta_v$. Para $v < n - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
((\bar{\alpha}) \cdot \bar{w})\eta_v &= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_\alpha] \cdot [(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}} \right) \eta_v \\
&= \begin{cases} [(\alpha_0 + w_0, \dots, \alpha_{v-1} + w_{v-1}, \alpha_v + w_v + 1, \alpha_{v+1} + w_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + w_{n-1} - 1), 1] & \text{si } c_\alpha = 0 \\ [(\alpha_0 + w_0, \dots, \alpha_{v-1} + w_{v-1}, \alpha_v + w_v - 1, \alpha_{v+1} + w_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + w_{n-1} + 1), 0] & \text{si } c_\alpha = 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} ([(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v + 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} - 1), 1]) \cdot [(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}} & \text{si } c_\alpha = 0 \\ ([(\alpha_0, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v - 1, \alpha_{v+1}, \dots, \alpha_{n-1} + 1), 0]) \cdot [(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}} & \text{si } c_\alpha = 1 \end{cases} \\
&= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_\alpha] \right) \eta_v \left([(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}} \right) \\
&= ((\bar{\alpha})\eta_v)\bar{w}.
\end{aligned}$$

Para $v = n - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
((\bar{\alpha})\bar{w})\eta_{n-1} &= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_\alpha] \left([(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}} \right) \right) \eta_{n-1} \\
&= [(\alpha_0 + w_0, \alpha_1 + w_1, \dots, \alpha_{n-1} + w_{n-1}), c_\alpha + 1] \\
&= \left([(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}), c_\alpha] \right) \eta_{n-1} \left([(w_0, w_1, \dots, w_{n-1}), 0], id_{\mathcal{K}} \right) \\
&= ((\bar{\alpha})\eta_{n-1})\bar{w}.
\end{aligned}$$



Corolario 4.15. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Si $f(\bar{\alpha}), g(\bar{\beta}) \in 2 \cdot s^{K-1}$ son tales que existe $\bar{w} \in \bar{C}$, para el cual $(f(\bar{\alpha}))\bar{w} = g(\bar{\beta})$, entonces $f = g$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición anterior, $g(\bar{\beta}) = (f(\bar{\alpha}))\bar{w} = f((\bar{\alpha}) \cdot \bar{w})$. Por el Corolario 3.38, $f = g$.



Corolario 4.16. Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal y sean $f \neq g$ dos caras de \mathcal{K} . Entonces, para toda $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathfrak{U}(2 \cdot s^{K-1})$, se tiene que $f(\bar{\alpha})\bar{C} \neq g(\bar{\beta})\bar{C}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $f, g \in \mathcal{K}$ y sean $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathfrak{U}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$. Entonces

$$\begin{aligned} f(\bar{\alpha})\bar{C} = g(\bar{\beta})\bar{C} &\Leftrightarrow f(\bar{\alpha}) \in g(\bar{\beta})\bar{C} \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{w} \in \bar{C} \text{ tal que } f(\bar{\alpha}) = (g(\bar{\beta}))\bar{w}, \end{aligned}$$

así que, por el corolario anterior, $f = g$. □

Lema 4.17. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Entonces las figuras de vértice de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ son isomorfas a \mathcal{K} .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\bar{\alpha} \in \mathcal{EP}_s$ y consideremos $\iota_{\bar{\alpha}}\pi_C : \mathcal{K} \rightarrow 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$. Por el Corolario anterior, la restricción de π_C a la imagen de $\iota_{\bar{\alpha}}$ es inyectiva. Por los Lemas 2.47 y 3.41, $\iota_{\bar{\alpha}}\pi_C$ es suprayectiva restringiendo el dominio a la figura de vértice. Por lo tanto, es un isomorfismo de \mathcal{K} en la figura de vértice $\mathcal{F}(\bar{\alpha}\bar{C})$. □

A partir del lema anterior será muy sencillo demostrar que el cociente de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ por un código lineal es politopo, dado que ahora sólo es necesario verificar que las secciones facetales también lo son. La conexidad del cociente y la propiedad del diamante serán consecuencias de que para toda $v \in [n]$ y para toda $\bar{\alpha} \in \mathfrak{B}_s$, el color de $(\bar{\alpha})v$ es distinto al color de $\bar{\alpha}$.

Lema 4.18. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Entonces $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es un copo con la propiedad del diamante.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F < G \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ tales que $r(F) = r(G) - 2$ y sean $H, H' \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ tales que $\langle H_C^F, H_C^{H'} \rangle$ es un diamante. Por el Lema anterior, todas las 1-secciones $[F\bar{C}, G\bar{C}]$, donde $r(F) \geq 0$ tienen exactamente dos elementos propios (porque las figuras de vértice cumplen la propiedad del diamante). El caso faltante es cuando $r(F) = -1$. Por la observación 4.11, no existe $\bar{w} \in \bar{C}$ tal que $(H)\bar{w} = (H')$, y por lo tanto $H\bar{C} \neq H'\bar{C}$. Ahora supongamos que existe $H'' \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ tal que $F\bar{C} < H''\bar{C} < G\bar{C}$, entonces por definición existen $\bar{w}, \bar{w}' \in \bar{C}$ tales que $(F)\bar{w} < H''$ y $(H'')\bar{w}' < G$, pero esto implica que $(\emptyset)\bar{w} = (F)\bar{w} = F < (H'')\bar{w}' < G$. Por lo tanto la 1-sección $[F\bar{C}, G\bar{C}]$ tiene, exactamente, dos elementos de rango 0. □

Lema 4.19. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Entonces $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es un copo conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $F\bar{C}, G\bar{C} \in 2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ dos caras propias. Por ser $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ un copo conexo, existe un camino de F a G , $(F, H_0, H_1, \dots, H_l, G)$ en el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1} - \{\emptyset, F_{d+1}\})$. Por la

Proposición 2.45 si dos caras son incidentes en el diagrama de Hasse $\mathcal{H}(\mathcal{P})$, entonces también lo serán sus imágenes al tomar el cociente en $\mathcal{H}(\mathcal{P}/\bar{C})$, por lo tanto $(F\bar{C}, H_0\bar{C}, H_1\bar{C}, \dots, H_l\bar{C}, G\bar{C})$ es un camino de $F\bar{C}$ a $G\bar{C}$ en $\mathcal{H}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C} - \{\emptyset\bar{C}, F_{d+1}\bar{C}\})$.



Lema 4.20. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Entonces $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es un copo fuertemente conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $G\bar{C}/F\bar{C}$ una sección de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$. Si $(F)r \geq 0$, entonces la sección está contenida en alguna figura de vértice, y por lo tanto es conexa, dado que las figuras de vértice son politopos. Si $(F)r = -1$ (es decir, $F = \emptyset$) sean $H\bar{C}, H'\bar{C} \in G/\emptyset$, entonces existen $\bar{w}, \bar{w}' \in \bar{C}$ tales que $\emptyset < (H)\bar{w} < G$ y $\emptyset < (H')\bar{w}' < G$. Por lo tanto existe un camino $(H_0 = (H)\bar{w}, H_1, H_2, \dots, H_{l-1}, H_l = (H')\bar{w})$ de H a H' en el diagrama de Hasse de la sección abierta $(\emptyset, G) = H/\emptyset - \{\emptyset, H\}$. Entonces $(H_0\bar{C} = H\bar{C}, H_1\bar{C}, H_2\bar{C}, \dots, H_{l-1}\bar{C}, H_l\bar{C} = H'\bar{C})$ es un camino de $H\bar{C}$ a $H'\bar{C}$ en el diagrama de Hasse de $(\emptyset, G\bar{C}) = H\bar{C}/\emptyset - \{\emptyset, H\bar{C}\}$. Por lo tanto el copo es fuertemente conexo.



Como corolario de los resultados previos tenemos que el cociente de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ sobre un código lineal $C \leq \mathcal{EP}_s$ también es politopo.

Teorema 4.21. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea $s \geq 3$. Sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Entonces el cociente $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es politopo.*

De la misma forma que en la sección anterior, podemos describir al grupo de automorfismos del cociente $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ en términos del grupo de automorfismos de \mathcal{K} y del grupo de automorfismos por permutaciones de C . La prueba es análoga a la del Teorema 4.7.

Teorema 4.22. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Entonces el grupo de automorfismos de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es isomorfo a $(\mathcal{EP}_s/C \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes (\text{Aut}(\mathcal{K}) \cap \text{PAut}(C))$.*

Proposición 4.23. *Sea \mathcal{K} un politpo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Sea $\hat{\Phi}\bar{C} = [\emptyset\bar{C}, \emptyset(\bar{\varepsilon})\bar{C} = \bar{\varepsilon}\bar{C}, \mathfrak{f}_0(\bar{\varepsilon})\bar{C}, \mathfrak{f}_1(\bar{\varepsilon})\bar{C}, \dots, \mathfrak{f}_d(\bar{\varepsilon})\bar{C}]$ una bandera de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$. Entonces $\hat{\Phi}\bar{C}$ y $(\hat{\Phi}\bar{C})^0 = [\emptyset\bar{C}, \emptyset(\bar{\varepsilon}')\bar{C} = \bar{\varepsilon}'\bar{C}, \mathfrak{f}_0(\bar{\varepsilon}')\bar{C}, \mathfrak{f}_1(\bar{\varepsilon}')\bar{C}, \dots, \mathfrak{f}_d(\bar{\varepsilon}')\bar{C}]$, donde $\bar{\varepsilon}'$ es el otro vértice en $\mathfrak{f}_0(\bar{\varepsilon})$, están en la misma órbita bajo la acción del grupo de $\text{Aut}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que el grupo de automorfismos del cociente es $\mathfrak{B}_s \rtimes \text{Aut}(\mathcal{K})$. Sea $\bar{\beta} = \bar{\varepsilon}^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}'$. Notemos que el color de $\bar{\beta}$ es 1, dado que los colores de $\bar{\varepsilon}$ y $\bar{\varepsilon}'$ son distintos, por lo tanto $\bar{\beta}\bar{C}$

es un elemento no trivial. Tenemos que

$$\begin{aligned} (\emptyset(\bar{\varepsilon})\bar{C})(\bar{\beta}\bar{C}, Id_{\mathcal{K}}) &= \left((\emptyset Id_{\mathcal{K}})((\bar{\varepsilon})Id_{\mathcal{K}} \cdot \bar{\beta}) \right) \bar{C} \\ &= (\emptyset(\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}')) \bar{C} \\ &= \bar{\varepsilon}' \bar{C}. \end{aligned}$$

Ahora, para $i \geq 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_i(\bar{\varepsilon})\bar{C})(\bar{\beta}\bar{C}, Id_{\mathcal{K}}) &= \left((\mathbf{f}_i Id_{\mathcal{K}})((\bar{\varepsilon})Id_{\mathcal{K}} \cdot \bar{\beta}) \right) \bar{C} \\ &= (\mathbf{f}_i(\bar{\varepsilon} \cdot \bar{\varepsilon}^{-1} \cdot \bar{\varepsilon}')) \bar{C} \\ &= \mathbf{f}_i(\bar{\varepsilon}') \bar{C} \\ &= \mathbf{f}_i(\bar{\varepsilon}) \bar{C}. \end{aligned}$$

La última igualdad es dado que para $i \geq 0$ se tiene que $\bar{\varepsilon} \in \mathbf{f}_i(\bar{\varepsilon})\bar{C}$.



Ahora daremos algunos resultados que nos ayudarán con el estudio de algunos ejemplos en el capítulo siguiente. En general, el politopo cociente no es el mismo para dos códigos equivalentes por permutaciones, pero es intuitivo que para que el cociente entre dos códigos equivalentes por permutaciones sean iguales podemos reenumerar a los vértices del politopo. El siguiente lema nos dice cómo encontrar los códigos que nos dan cocientes con la mayor cantidad de automorfismos posibles.

Lema 4.24. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular con n vértices y sea $C \leq \mathcal{EP}_s$ un código lineal. Sea $\Gamma \leq \text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K})$ máximo con la propiedad de ser conjugado en S_n de un subgrupo de $\text{PAut}(C)$. Entonces existe C' un código equivalente por permutaciones a C tal que $\text{Aut}(2s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}') \cong (\mathcal{EP}_s/C' \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes \Gamma$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\Gamma' \leq \text{PAut}(C)$ dicho subgrupo conjugado a Γ en S_n . Sea $\sigma \in S_n$ tal que $\Gamma = \sigma^{-1}\Gamma'\sigma$. Sea A_σ la matriz tal que

$$A[i, j] := \begin{cases} 1 & \text{si } i = (j)\sigma, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por la Proposición 1.16 tenemos que el grupo de automorfismos por permutaciones de CA_σ es $\sigma^{-1}\text{PAut}(C)\sigma$. Entonces $\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K}) \cap \text{PAut}(CA_\sigma) = \Gamma$ por la maximalidad de Γ . Así que, por el teorema anterior

$$\text{Aut}(2s^{\mathcal{K}-1}/\overline{CA_\sigma}) \cong (\mathcal{EP}_s/\overline{CA_\sigma} \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes (\text{Aut}_{\mathbb{F}_2}(\mathcal{K}) \cap \text{PAut}(CA_\sigma)) = (\mathcal{EP}_s/\overline{CA_\sigma} \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes \Gamma.$$



El siguiente corolario aborda el caso en el que el cociente es regular.

Corolario 4.25. *Sea \mathcal{K} un politopo latiz regular y sea C un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_s , donde n es el número de vértices de \mathcal{K} . Existe un código C' equivalente por permutaciones a C , tal que $2s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}'$ es regular; si y sólo si existe un subgrupo Γ de $P\text{Aut}(C)$ tal que Γ y $\text{Aut}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K})$ son conjugados como subgrupos de S_n .*

Lema 4.26. *Sea \mathcal{K} un d -politopo latiz regular y sea C un $[n, k]$ -código lineal sobre \mathbb{F}_s , donde n es el número de vértices de \mathcal{K} . Si $[\text{Aut}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) : \text{Aut}_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}) \cap \text{Aut}(C)] = 2$, entonces $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es un politopo de dos órbitas.*

DEMOSTRACIÓN. Por los Teoremas 2.24 y 3.60 es suficiente demostrar que el número de banderas del cociente es $2 \times s^{n-k-1} \times |\mathfrak{B}(\mathcal{K})|$. Sea $\Phi = \varphi(\alpha) \in \mathfrak{B}(2 \cdot s^{\mathcal{K}-1})$ para alguna bandera ϕ de \mathcal{K} . Es claro que \bar{C} actúa fielmente en el conjunto de banderas de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ (dado que actúa fielmente en el conjunto de vértices). Por lo tanto el paso al cociente es una función s^k a 1 (en banderas). Además, tenemos que toda bandera de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ puede levantarse a una bandera de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ por el Teorema 2.48. Como el número de banderas de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es $2 \times s^{n-1} \times |\mathfrak{B}(\mathcal{K})|$, entonces el número de banderas de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\bar{C}$ es $2 \times s^{n-k-1} \times |\mathfrak{B}(\mathcal{K})|$.



Ejemplos a partir del código ternario de Golay

El Ejemplo 4.9 que aparece en el capítulo anterior fue presentado en [10], donde E. Schulte sugiere estudiar los cocientes del complejo de incidencia $3^{\mathcal{K}}$ con el código ternario de Golay. En el presente capítulo haremos uso de lo estudiado en el capítulo anterior para describir los ejemplos de cocientes con dicho código que es posible obtener a partir del Atlas de politopos regulares abstractos de Michael Hartley [3].

1. Politopos del Atlas de Michael Hartley

El código ternario de de Golay extendido (denotado por \mathcal{G}_{12}) es de longitud 12, como se vio en el Capítulo 1. Para poder definir el cociente $2 \cdot 3^{\mathcal{K}-1} / \mathcal{G}_{12}$ requerimos que \mathcal{K} sea latiz, regular y que tenga exactamente 12 vértices. Utilizamos el atlas de M. Hartley para encontrar ejemplos de dichos politopos. En éste se describen todos los politopos regulares cuyo grupo de automorfismos tenga orden menor o igual a 2000 y sea distinto de 1024 y 1536.

Los politopos en dicho atlas están clasificados de acuerdo a su símbolo de Schläfli. Recordemos que el símbolo de Schläfli de un C -grupo con diagrama de línea es la $(d-1)$ -ada $\{p_1, p_2, \dots, p_{d-1}\}$, donde p_i es el orden de $\rho_{i-1}\rho_i$. Equivalentemente es la longitud de los polígonos de la forma $\mathfrak{g}/\mathfrak{f}$, donde $(\mathfrak{f})r = i - 2$.

Para encontrar de manera eficiente a los politopos que nos servirán para construir los ejemplos, utilizamos los siguientes lemas. Recordemos que si \mathcal{K} es un politopo latiz regular, en particular es vértice descriptible.

Lema 5.1. *Sea $d \geq 2$ y sea \mathcal{K} un d -politopo vértice-descriptible regular con símbolo de Schläfli $\{p_1, p_2, \dots, p_{d-1}\}$. Entonces \mathcal{K} tiene, al menos, $p_1 - 2 + d$ vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción. Para $d = 2$ el resultado es inmediato. Sea \mathcal{K} un politopo de dimensión $d > 2$ y sea \mathcal{F} la sección de una faceta de \mathcal{K} . Tenemos que $\mathfrak{U}(\mathcal{F}) \subsetneq \mathfrak{U}(\mathcal{K})$, por lo tanto $|\mathfrak{U}(\mathcal{K})| \geq |\mathfrak{U}(\mathcal{F})| + 1 \geq (p_1 - 2 + (d - 1)) + 1 = p_1 - 2 + d$.



Lema 5.2. *Sea $d \geq 3$ y sea \mathcal{K} un d -politopo vértice-descriptible regular con símbolo de Schläfli $\{p_1, p_2, \dots, p_{d-1}\}$. Entonces \mathcal{K} tiene, al menos, $p_2 - 2 + d$ vértices.*

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción. Para $d = 3$ tenemos que p_2 es el grado de un vértice en el 1-esqueleto, el cual no puede ser mayor que $\mathfrak{U}(\mathcal{K}) - 1$ dado que, por ser \mathcal{K} vértice-descriptible, no tiene aristas múltiples. Por lo tanto $\mathfrak{U}(\mathcal{K}) \geq p_2 - 1 = p_2 + d - 2$. El resto del argumento es análogo al dado en la prueba del lema anterior.



Corolario 5.3. *El número de Schläfli p_1 de un politopo vértice-descriptible \mathcal{K} con exactamente doce vértices es menor o igual a 12, el número de Schläfli p_2 no puede ser mayor que 11, y \mathcal{K} no puede ser de rango mayor que 11.*

A partir del corolario anterior se recopiló la primer lista de candidatos a partir del atlas de Michael Hartley que consta de:

- Un politopo de rango 2.
- 29 politopos de rango 3.
- 74 politopos de rango 4.
- 3 politopos de rango 5.

Es suficiente verificar que las caras del mismo rango no tienen el mismo conjunto de vértices incidentes para asegurar que el politopo es vértice-descriptible. Para esto se implementó el siguiente algoritmo en SAGE. La implementación del algoritmo es el Código 6.6 y la lista resultante es la Lista 6.10 (ver Apéndice 1). En el siguiente algoritmo, si X es una lista y $j \in \mathbb{N}$, $X[j]$ denota la j -ésima entrada de X .

1. Crear una lista V con las clases laterales de $\langle \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{d-1} \rangle$ (será la lista de los vértices del politopo).
2. Para cada $1 \leq i \leq d - 1$ hacer lo siguiente: (recorreremos a las caras del politopo por niveles (rangos))
 - a) Crear una lista vacía llamada \mathcal{I}_i .
 - b) Para cada j , si $V[j]$ intersecta al grupo $\langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{d-1} \rangle$, agrega j a \mathcal{I}_i .
 - c) Para cada clase lateral Δ no trivial de $\langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{d-1} \rangle$ hacer lo siguiente:
 - 1) Para cada l , si $V[\mathcal{I}_i[l]]$ intersecta a Δ , continuar con el siguiente paso, si no, continuar con la siguiente clase.
 - 2) Si l era la última entrada de \mathcal{I}_i , regresa *Falso* (termina aquí).

3. Regresa *Verdadero* (termina aquí).

Aquí estamos eligiendo a la cadena de elementos de la forma $\langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{d-1} \rangle$ como la bandera base. El algoritmo recorre cada cara del politopo por niveles (rangos), comparando su conjunto de vértices incidentes con el conjunto de vértices incidentes a la cara del rango correspondiente en la bandera base.

Computacionalmente es más eficiente revisar si un politopo es vértice-descriptible que revisar si es latiz, es por eso que sólo revisamos si es latiz para los 17 politopos resultantes del algoritmo anterior. Para esto construimos el copo de clases asociado a los C -grupos con diagrama de línea y utilizamos el método `is_lattice` de Python. Obtuvimos que los siguientes politopos son latices.

- $\{12\}$ (Dodecágono),
- $\{3, 5\}^*120$ (Icosaedro),
- $\{3, 6\}^*144$ ($\{3, 6\}_{(2,2)}$),
- $\{3, 8\}^*192$,
- $\{4, 5\}^*120$,
- $\{3, 3, 6\}^*1296$.

A partir de aquí, el propósito es encontrar ejemplos de politopos \mathcal{K} tales que $2 \cdot 3^{\mathcal{K}-1}/\mathcal{G}_{12}$ sea un politopo con muchas simetrías.

No existe un politopo \mathcal{K} en la lista anterior tal que $2 \cdot 3^{\mathcal{K}-1}/\mathcal{G}_{12}$ es un politopo regular. Para esto usamos el Corolario 4.25.

El siguiente paso es encontrar a los politopos \mathcal{K} para los que el cociente $2 \cdot 3^{\mathcal{K}-1}/\mathcal{G}_{12}$ sea un politopo de dos órbitas. Para esto usamos los Lemas 4.24 y 4.26. En estos lemas usamos la descripción del grupo de automorfismos del politopo como la acción que tiene en los vértices de éste. Para describirlo así, construimos a los vértices del copo de clase y describimos la acción que tiene el grupo en estos. Cabe mencionar que la descripción dada por Michael Hartley en su atlas sólo cambia para el politopo $\{4, 5\}^*120$. Comparando cada grupo de índice dos con los representantes de las clases de conjugación de \mathcal{M}_{11} llegamos a lo siguiente.

Afirmación 5.4. El único politopo \mathcal{K} en el Atlas de Michael Hartley para el cual $2 \cdot 3^{\mathcal{K}-1}/\mathcal{G}_{12}$ es un politopo de dos órbitas es el dodecágono.

Notemos que el grupo de automorfismos del dodecágono tiene dos subgrupos de índice dos isomorfos al grupo diédrico $D_{2,6}$, los cuales son

$$(1.1) \quad \Gamma_1 := \langle (1\ 12)(2\ 11)(3\ 10)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 7), (1\ 2)(3\ 12)(4\ 11)(5\ 10)(6\ 9)(7\ 8) \rangle,$$

$$(1.2) \quad \Gamma_2 := \langle (12\ 2)(11\ 3)(10\ 4)(9\ 5)(8\ 6), (1, 11)(2\ 10)(3\ 9)(4\ 8)(5\ 7) \rangle.$$

Las banderas 0-adyacentes caen en la misma órbita bajo la acción de Γ_1 , y las banderas 1-adyacentes caen en la misma órbita bajo la acción de Γ_2 . Usando SAGE verificamos que sólo Γ_1 es conjugado a un subgrupo de \mathcal{M}_{11} , el cual daremos en el siguiente ejemplo.

Recordemos que el grupo de automorfismos del cociente está dado por $(\mathcal{EP}_s/C \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes (Aut(\mathcal{K}) \cap PAut(C))$ de acuerdo al Teorema 4.22. La acción de este grupo en el cociente está descrita por

$$(\mathfrak{f}(\beta)\bar{C})(\alpha \cdot C, \gamma) := \left(((\mathfrak{f})\gamma)((\beta)\hat{\gamma} \cdot \alpha) \right) \bar{C},$$

de manera análoga a lo hecho en el Teorema 4.7. Por último, recordemos también que los automorfismos distinguidos de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ están dados por las ecuaciones 3.1 y 3.2.

Ejemplo 5.5. Sea \mathcal{K} el dodecágono. El grupo de Mathieu \mathcal{M}_{11} contiene una clase de conjugación de grupos diédricos $D_{2,6}$, que es un subgrupo de $Aut(\mathcal{K})$ de índice 2. El poliedro $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ es un poliedro cuyas caras son hexágonos con $2 \cdot 3^{11} = 354294$ vértices, $\frac{12 \cdot 2 \cdot 3^{11}}{2} = 2125764$ aristas y $\frac{12 \cdot 2 \cdot 3^{11}}{6} = 708588$ caras de rango 2. Como el peso mínimo del código de Golay extendido es 6 y el número de vértices en una faceta (arista) del dodecágono es dos, al tomar el cociente de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$ por \mathcal{G}_{12} , no se identifican vértices en una cara. Así que las caras de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}/\mathcal{G}_{12}$ son hexágonos y sus figuras de vértice son dodecágonos, al igual que en $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$. Tiene $\frac{2 \cdot 3^{11}}{3^5} = 1458$ vértices. También es gracias a que el peso mínimo de \mathcal{G}_{12} es 6 que si dos aristas se identifican, los conjuntos de vértices incidentes a éstas son disjuntos, y lo mismo para las caras de rango 2. Así que el número de aristas del cociente es $\frac{12 \cdot 2 \cdot 3^5}{2 \cdot 3^5} = 8748$, y su número de caras de rango dos es $\frac{12 \cdot 2 \cdot 3^{11}}{6 \cdot 3^5} = 2916$. Su grupo automorfismos es isomorfo a $(\mathbb{F}_3^6 \rtimes \mathbb{F}_2) \rtimes D_{2,6}$. Por la Proposición 4.23, dos banderas 0-adyacentes están en la misma órbita y, usando SAGE verificamos que sólo Γ_1 descrito previamente en la ecuación 1.1 es conjugado al siguiente subgrupo de M_{11}

$$\langle (1\ 11)(2\ 7)(3\ 9)(4\ 10)(5\ 8)(6\ 12), (1\ 9)(2\ 10)(3\ 12)(4\ 8)(5\ 11)(6\ 7) \rangle,$$

el cual, como ya observamos previamente, deja a las banderas 0-adyacentes del dodecágono en la misma órbita, entonces usando la descripción del grupo de automorfismos dada en el Teorema 4.22, tenemos que deja a las banderas 1-adyacentes del cociente en la misma órbita. Por lo tanto el cociente está en la clase $2_{\{0,1\}}$.

Apéndice 1

En este apéndice daremos las funciones de SAGE que usamos para encontrar a los politopos latice regulares en el Atlas de Michael Hartley, así como la lista de los politopos con 12 vértices regulares vértice-descriptibles.

Código 6.6. El siguiente código de SAGE verifica cuando un C -grupo con diagrama de línea representado por permutaciones determina un politopo vértice descriptible.

```
def is_VertexDescribable (permutationGenerators, name):
    G = PermutationGroup(permutationGenerators)
    d = len(permutationGenerators)
    lastGenerators = permutationGenerators[1:d]
    baseGenerators = []
    for i in range(d-1):
        baseGenerators.append(G(lastGenerators[i]))
    baseVertex = G.subgroup(baseGenerators)
    setBaseVertex = Set(baseVertex)
    vertices = G.cosets(baseVertex, side='right')
    v = len(vertices)
    setVertices = []
    for j in range(v):
        currentSetVertex = set(vertices[j])
        setVertices.append(currentSetVertex)
    for i in range(d-1):
        currentGeneratorsList = deepcopy(permutationGenerators)
        del currentGeneratorsList[i+1]
        currentListInside = []
        for s in range(len(currentGeneratorsList)):
            currentListInside.append(G(currentGeneratorsList[s]))
        currentBaseFace = G.subgroup(currentListInside)
        setCurrentBaseFace = set(currentBaseFace)
```

```

currentFaces = G.cosets(currentBaseFace, side='right')
baseIncidenceList = []
for j in range(v):
    if not setVertices[j].isdisjoint(setCurrentBaseFace):
        baseIncidenceList.append(j)
del currentFaces[0]
for face in currentFaces:
    faceIncidenceList = []
    setFace = Set(face)
    for j in range(v):
        if not setVertices[j].isdisjoint(setFace) and j in
baseIncidenceList:
            faceIncidenceList.append(j)
        if not setVertices[j].isdisjoint(setFace) and not j in
baseIncidenceList:
            break
        if setVertices[j].isdisjoint(setFace) and j in
baseIncidenceList:
            break
    if len(faceIncidenceList) == len(baseIncidenceList):
        print 'The polytope ' + name + ' is not vertex describable'
        print 'It fails at rank ' + str(i+1)
        return(False)
print 'The polytope ' + name + ' is vertex describable'
file = open('VDPolytopes12Vertices.txt', 'a')
file.write ('The polytope ' + name + ' is vertex describable' + n)
file.write ('Generators ' + str(permutationGenerators) + 'n n')
file.close()
return(True)

```

Código 6.7. El siguiente código construye al copo de clases de un C -grupo con diagrama de línea.

```

def subjacent_poset (generators):
    subjacentGroup = PermutationGroup(generators)
    posetDimension = len(generators)
    cosetLevelsList = [['emptySet']]

```

```

for rankCounter in range(posetDimension):
    currentGens = deepcopy(generators)
    del currentGens[rankCounter]
    currentSubgroup = subjacentGroup.subgroup(currentGens)
    currentCosets = subjacentGroup.cosets(currentSubgroup,
side = 'right')
    cosetLevelsList.append(currentCosets)
    cosetLevelsList.append(['entirePolytope'])
    posetElementsList = [(0, -1)]
    for currentRank in range(posetDimension):
        for currentFace in range(len(cosetLevelsList[currentRank+1])):
            posetElementsList.append((currentFace, currentRank))
        posetElementsList.append((0, posetDimension))
        globalLeq = lambda f, g : (not f[1]>g[1] and
are_incident_stringC(cosetLevelsList[f[1]+1][f[0]],
cosetLevelsList[g[1]+1][g[0]]))
        subjacentPoset = Poset((set(posetElementsList), globalLeq))
        if not has_diamond_condition(subjacentPoset):
            raise TypeError ('Poset has not diamond condition')
        else:
            print 'Has diamond!'
        if not is_strongly_connected(subjacentPoset,
checkDiamondCondition = True):
            raise TypeError ('Poset is not strongly connected')
        else:
            print 'Is strongly connected'
    return subjacentPoset

```

Código 6.8. El siguiente código es para verificar si un copo graduado tiene la propiedad del diamante.

```

def has_diamond_condition (candidatePoset):
    for lowerRank in range(candidatePoset.rank()-2):
        for currentLowerFace in candidatePoset.level_sets()[lowerRank]:
            for currentUpperFace in candidatePoset.level_sets()[lowerRank+2]:
                if not currentLowerFace <= currentUpperFace:
                    continue

```


Lista 6.10. La siguiente lista es de todos los polítopos vértice-descriptibles con 12 vértices en el atlas de Michael Hartley.

- $\{3,5\}^*120$.
Generadores $[((2, 9), (4, 12), (5, 7), (6, 8)), ((1, 2), (3, 4), (5, 11), (8, 10)), ((1, 3), (2, 6), (8, 9), (10, 11))]$
- $\{3,6\}^*144$.
Generadores $[((3, 4), (5, 9), (6, 10), (7, 12), (8, 11)), ((1, 5), (2, 7), (3, 6), (4, 8), (10, 11)), ((1, 2), (5, 6), (9, 10))]$
- $\{3,8\}^*192$.
Generadores $[((1, 9), (2, 10), (3, 11), (4, 12)), ((5, 9), (6, 10), (7, 12), (8, 11)), ((1, 3), (2, 4), (5, 6), (9, 11), (10, 12))]$
- $\{4,5\}^*120$.
Generadores $[(4, 5), ((2, 4), (3, 5)), ((1, 2), (4, 5))]$ (*Presentación original en el Atlas de Michael Hartley*)
Generadores en 12 vértices $[((0, 1), (2, 4), (3, 5), (6, 7), (8, 9), (10, 11)), ((1, 6), (2, 10), (3, 9), (4, 11)), ((2, 5), (3, 4), (6, 10), (7, 11))]$ (*Presentación en 12 vértices calculada usando SAGE*)
- $\{4,6\}^*144$.
Generadores $[((4, 7), (5, 8), (6, 9), (13, 16), (14, 17), (15, 18), (22, 25), (23, 26), (24, 27), (31, 34), (32, 35), (33, 36), (37, 46), (38, 47), (39, 48), (40, 52), (41, 53), (42, 54), (43, 49), (44, 50), (45, 51), (55, 64), (56, 65), (57, 66), (58, 70), (59, 71), (60, 72), (61, 67), (62, 68), (63, 69)), ((1, 37), (2, 40), (3, 43), (4, 38), (5, 41), (6, 44), (7, 39), (8, 42), (9, 45), (10, 46), (11, 49), (12, 52), (13, 47), (14, 50), (15, 53), (16, 48), (17, 51), (18, 54), (19, 55), (20, 58), (21, 61), (22, 56), (23, 59), (24, 62), (25, 57), (26, 60), (27, 63), (28, 64), (29, 67), (30, 70), (31, 65), (32, 68), (33, 71), (34, 66), (35, 69), (36, 72)), ((1, 29), (2, 28), (3, 30), (4, 35), (5, 34), (6, 36), (7, 32), (8, 31), (9, 33), (10, 20), (11, 19), (12, 21), (13, 26), (14, 25), (15, 27), (16, 23), (17, 22), (18, 24), (37, 65), (38, 64), (39, 66), (40, 71), (41, 70), (42, 72), (43, 68), (44, 67), (45, 69), (46, 56), (47, 55), (48, 57), (49, 62), (50, 61), (51, 63), (52, 59), (53, 58), (54, 60))]$
- $\{6,4\}^*96$
Generadores $[((8, 9), (11, 12), (13, 14), (15, 16)), ((1, 2), (3, 5), (4, 11), (6, 8), (7, 15), (9, 12), (10, 13), (14, 16)), ((1, 7), (2, 10), (3, 4), (5, 6), (8, 14), (9, 13), (11, 16), (12, 15))]$
- $\{6,5\}^*120a$
Generadores $[(4, 5), ((1, 2), (3, 4)), ((2, 3), (4, 5))]$
- $\{6,5\}^*120b$

- Generadores $[((2, 9), (4, 12), (5, 7), (6, 8)), ((1, 5), (2, 8), (3, 9), (4, 10), (6, 11), (7, 12)), ((1, 3), (2, 8), (4, 12), (5, 7), (6, 9), (10, 11))]$
- $\{6,5\}^*120c$

Generadores $[((1, 3), (2, 8), (4, 12), (5, 7), (6, 9), (10, 11)), ((2, 3), (4, 6), (5, 9), (8, 11)), ((2, 9), (4, 12), (5, 7), (6, 8))]$
 - $\{6,8\}^*192a$

Generadores $[((1, 9), (2, 10), (3, 11), (4, 12)), ((3, 4), (5, 9), (6, 10), (7, 11), (8, 12)), ((1, 3), (2, 4), (5, 6), (9, 11), (10, 12))]$
 - $\{10,5\}^*120a$

Generadores $[((2, 9), (4, 12), (5, 7), (6, 8)), ((1, 2), (3, 11), (4, 5), (6, 12), (7, 9), (8, 10)), ((1, 11), (2, 9), (3, 10), (4, 5), (6, 8), (7, 12))]$
 - $\{10,5\}^*120b$

Generadores $[((1, 3), (2, 8), (4, 12), (5, 7), (6, 9), (10, 11)), ((3, 5), (4, 11), (6, 12), (7, 9)), ((2, 9), (4, 12), (5, 7), (6, 8))]$
 - $\{3,3,6\}^*1296$

Generadores $[((4, 10), (5, 12), (6, 11)), ((7, 10), (8, 11), (9, 12)), ((1, 7), (2, 9), (3, 8)), ((2, 3), (4, 6), (7, 8), (10, 11))]$
 - $\{3,4,3\}^*576$

Generadores $[((2, 3), (7, 8), (10, 12)), ((2, 4), (6, 7), (11, 12)), ((5, 11), (6, 9), (7, 10), (8, 12)), ((1, 9), (2, 12), (3, 10), (4, 11))]$
 - $\{3,4,4\}^*768a$

Generadores $[((3, 4), (7, 8), (9, 13), (10, 14), (11, 16), (12, 15), (17, 33), (18, 34), (19, 36), (20, 35), (21, 37), (22, 38), (23, 40), (24, 39), (25, 45), (26, 46), (27, 48), (28, 47), (29, 41), (30, 42), (31, 44), (32, 43), (51, 52), (55, 56), (57, 61), (58, 62), (59, 64), (60, 63), (65, 81), (66, 82), (67, 84), (68, 83), (69, 85), (70, 86), (71, 88), (72, 87), (73, 93), (74, 94), (75, 96), (76, 95), (77, 89), (78, 90), (79, 92), (80, 91), (99, 100), (103, 104), (105, 109), (106, 110), (107, 112), (108, 111), (113, 129), (114, 130), (115, 132), (116, 131), (117, 133), (118, 134), (119, 136), (120, 135), (121, 141), (122, 142), (123, 144), (124, 143), (125, 137), (126, 138), (127, 140), (128, 139), (147, 148), (151, 152), (153, 157), (154, 158), (155, 160), (156, 159), (161, 177), (162, 178), (163, 180), (164, 179), (165, 181), (166, 182), (167, 184), (168, 183), (169, 189), (170, 190), (171, 192), (172, 191), (173, 185), (174, 186), (175, 188), (176, 187)), ((1, 33), (2, 35), (3, 34), (4, 36), (5, 41), (6, 43), (7, 42), (8, 44), (9, 37), (10, 39), (11, 38), (12, 40), (13, 45), (14, 47), (15, 46), (16, 48), (18, 19), (21, 25), (22, 27), (23, 26), (24, 28), (30, 31), (49, 81), (50, 83), (51, 82), (52, 84), (53, 89), (54, 91), (55, 90), (56, 92), (57, 85), (58, 87), (59, 86), (60, 88), (61, 93), (62, 95), (63, 94), (64, 96), (66, 67), (69, 73), (70, 75), (71, 74), (72, 76), (78, 79), (97, 129), (98, 131),$

(99, 130), (100, 132), (101, 137), (102, 139), (103, 138), (104, 140), (105, 133), (106, 135), (107, 134), (108, 136), (109, 141), (110, 143), (111, 142), (112, 144), (114, 115), (117, 121), (118, 123), (119, 122), (120, 124), (126, 127), (145, 177), (146, 179), (147, 178), (148, 180), (149, 185), (150, 187), (151, 186), (152, 188), (153, 181), (154, 183), (155, 182), (156, 184), (157, 189), (158, 191), (159, 190), (160, 192), (162, 163), (165, 169), (166, 171), (167, 170), (168, 172), (174, 175)), ((1, 5), (2, 6), (3, 7), (4, 8), (9, 13), (10, 14), (11, 15), (12, 16), (17, 21), (18, 22), (19, 23), (20, 24), (25, 29), (26, 30), (27, 31), (28, 32), (33, 37), (34, 38), (35, 39), (36, 40), (41, 45), (42, 46), (43, 47), (44, 48), (49, 53), (50, 54), (51, 55), (52, 56), (57, 61), (58, 62), (59, 63), (60, 64), (65, 69), (66, 70), (67, 71), (68, 72), (73, 77), (74, 78), (75, 79), (76, 80), (81, 85), (82, 86), (83, 87), (84, 88), (89, 93), (90, 94), (91, 95), (92, 96), (97, 149), (98, 150), (99, 151), (100, 152), (101, 145), (102, 146), (103, 147), (104, 148), (105, 157), (106, 158), (107, 159), (108, 160), (109, 153), (110, 154), (111, 155), (112, 156), (113, 165), (114, 166), (115, 167), (116, 168), (117, 161), (118, 162), (119, 163), (120, 164), (121, 173), (122, 174), (123, 175), (124, 176), (125, 169), (126, 170), (127, 171), (128, 172), (129, 181), (130, 182), (131, 183), (132, 184), (133, 177), (134, 178), (135, 179), (136, 180), (137, 189), (138, 190), (139, 191), (140, 192), (141, 185), (142, 186), (143, 187), (144, 188)), ((1, 97), (2, 98), (3, 99), (4, 100), (5, 102), (6, 101), (7, 104), (8, 103), (9, 107), (10, 108), (11, 105), (12, 106), (13, 112), (14, 111), (15, 110), (16, 109), (17, 113), (18, 114), (19, 115), (20, 116), (21, 118), (22, 117), (23, 120), (24, 119), (25, 123), (26, 124), (27, 121), (28, 122), (29, 128), (30, 127), (31, 126), (32, 125), (33, 129), (34, 130), (35, 131), (36, 132), (37, 134), (38, 133), (39, 136), (40, 135), (41, 139), (42, 140), (43, 137), (44, 138), (45, 144), (46, 143), (47, 142), (48, 141), (49, 145), (50, 146), (51, 147), (52, 148), (53, 150), (54, 149), (55, 152), (56, 151), (57, 155), (58, 156), (59, 153), (60, 154), (61, 160), (62, 159), (63, 158), (64, 157), (65, 161), (66, 162), (67, 163), (68, 164), (69, 166), (70, 165), (71, 168), (72, 167), (73, 171), (74, 172), (75, 169), (76, 170), (77, 176), (78, 175), (79, 174), (80, 173), (81, 177), (82, 178), (83, 179), (84, 180), (85, 182), (86, 181), (87, 184), (88, 183), (89, 187), (90, 188), (91, 185), (92, 186), (93, 192), (94, 191), (95, 190), (96, 189))]

■ {6,3,3,3}*1440

Generadores [(3, 5), ((5, 6), (7, 8)), ((4, 6), (7, 8)), ((2, 4), (7, 8)), ((1, 2), (7, 8))]

Apéndice 2

En este apéndice presentaremos la definición de producto semidirecto (externo e interno) y daremos algunas equivalencias. Los detalles se pueden encontrar en el Capítulo 10 de [9].

Definición 7.11. Sean G, H dos grupos y sea $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(G)$ una acción. Consideremos el producto cartesiano $G \times H$ y definamos en éste la operación

$$(g, h) \cdot (g', h') := ((g)(h')\phi)g', hh'.$$

A la pareja $(G \times H, \cdot)$ le llamamos el producto semidirecto externo de G y H con respecto de ϕ , usualmente denotado por $G \rtimes_{\phi} H$.

Definición 7.12. Sea S un grupo y sean H un subgrupo y G un subgrupo normal de S . Si $S = HN$ y la intersección de H y N es trivial (consta de la identidad únicamente), decimos que S es producto semidirecto interno $G \rtimes H$.

Notemos que, por ser G un subgrupo normal, H actúa en éste por conjugación.

Lema 7.13. Sean G, H dos grupos. Son equivalentes:

- S es el producto semidirecto interno $G \rtimes H$.
- Todo elemento de S se escribe como producto de elementos de G y H de manera única, y G es un subgrupo normal de S .
- S es isomorfo a $G \rtimes_{\phi} H$, donde ϕ es la acción de H en G por conjugación.

Bibliografía

- [1] Danzer, L. Regular incidence-complexes and dimensional unbounded sequences of such (I), *Ann. Discrete Math.* vol. 20 (1984) 115-127
- [2] Diestel, R. *Graph Theory*. Springer, New York (1997)
- [3] Hartley, M. Atlas of small regular polytopes. <http://www.abstract-polytopes.com/atlas/>
- [4] Hubard, I. From geometry to groups and back: the study of highly symmetric polytopes. Tesis doctoral, York University (2007)
- [5] Huffman, C. Pless, V. *Fundamentals of error-correcting codes*. Cambridge University Press, New York (2003)
- [6] Kløve, T. *Codes for error detection*. World Scientific Publishing, Singapore (2007)
- [7] McMullen, P., Schulte, E. *Abstract Regular Polytopes*. *Encyclopedia of Math.Appl.*, vol. 92, Cambridge University Press, Cambridge (2002)
- [8] Pellicer, D. Extensions of regular polytopes with preassigned Schläfli symbol. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 116 (2009) 303–313
- [9] Rotman, J. *Advanced modern algebra*. American Mathematical Society (2002)
- [10] Schulte, E. On a class of abstract polytopes constructed from binary codes. *Discrete Math.*, vol. 84 (1990) 295-301
- [11] Sloane, N. MacWilliams, F. *The theory of error-correcting codes*. North Holland Publishing Company, New York (1977)
- [12] Tits, J. *A local approach to buildings. The geometric vein* Springer, Berlin (1981) 519-547

Glosario de notación

- \mathcal{EP}_s (El espacio formado por el conjunto $\{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} : \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 0\}$)
- C (Código lineal)
- \bar{C} (Inmersión de C en el grupo de automorfismos de $2^{\mathcal{K}}$ o $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- \mathcal{K} (Politopo latiz regular)
- \mathcal{P} (Politopo abstracto)
- \mathcal{F} (Sección facetar)
- $\mathcal{U}(\mathbf{f})$ (Figura vertical de \mathbf{f})
- \mathbf{f}/\mathbf{g} (Sección, intervalo cerrado $[\mathbf{g}, \mathbf{f}]$)
- $\langle \mathbf{h}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{g}} \rangle$ (Diamante con \mathbf{f} y \mathbf{g} como caras impropias)
- \mathcal{V} (Espacio vectorial)
- \mathcal{T} (Cadena)
- \mathcal{S} (Sección)
- \mathbf{h} (Cara, elemento de un politopo)
- \mathbf{f} (Cara, elemento de un politopo)
- \mathbf{g} (Cara, elemento de un politopo)
- \mathbf{a} (Arista, elemento de rango 1 de un politopo)
- \mathbf{v} (Vértice, elemento de rango 0 de un politopo)
- \mathbf{u} (Vértice, elemento de rango 0 de un politopo)
- \mathbf{F} (Cara de $2^{\mathcal{K}}$ o $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- \mathbf{G} (Cara de $2^{\mathcal{K}}$ o $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- \mathbf{H} (Cara de $2^{\mathcal{K}}$ o $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- $\eta_{\mathbf{v}}$ (Función que define las adyacencias de vértices de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- $\eta_{\mathbf{u}}$ (Función que define las adyacencias de vértices de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- $\bar{\alpha}$ (Elemento de $\mathcal{EP}_s \times \mathbb{F}_2$, vértice de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- $\bar{\beta}$ (Elemento de $\mathcal{EP}_s \times \mathbb{F}_2$, vértice de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- $\bar{\varepsilon}$ (Elemento de $\mathcal{EP}_s \times \mathbb{F}_2$, vértice de $2 \cdot s^{\mathcal{K}-1}$)
- $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ (Conjunto de vértices del politopo \mathcal{P})
- $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ (Conjunto de aristas del politopo \mathcal{P})
- $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ (Conjunto de banderas del politopo \mathcal{P})

$\mathfrak{F}(\mathcal{P})$ (Conjunto de facetas del politopo \mathcal{P})

\mathfrak{B}_s (El producto cartesiano $\mathcal{E}\mathcal{P}_s \times \mathbb{F}_2$, el producto semidirecto $\mathcal{E}\mathcal{P}_s \rtimes \mathbb{F}_2$)

ρ_i (Función que asigna a una bandera su i -adyacente)

\mathfrak{M}_{11} (El grupo simple de Mathieu 4-simplmente transitivo en 11 elementos)

Índice alfabético

- 4-cubo, 32
- $2 \cdot s^{K-1}$, 40
- 2^K , 33
- ρ , 23
- n -cubo, 32
- Ínfimo, 29
- 1-esqueleto, 19

- Aristas, 18
- Automorfismo, 19
- Automorfismos por permutaciones, 7

- Bandera adyacente, 20
- Banderas, 15

- Código binario, 3
- Código de Hamming, 9
- Código dual, 5
- Código lineal, 3
- Código par, 4
- Código ternario, 3
- Código ternario de Golay, 10
- Código ternario de Golay extendido, 10
- Código tipo par, 4
- Códigos cíclicos, 7
- Códigos equivalentes por permutaciones, 6
- Cadena, 14
- Caras, 15
- Caras impropias, 15
- Caras propias, 15
- Color, 39
- Comparable, 14
- Conexidad, 15, 20
- Conexidad fuerte, 21
- Conexidad fuerte por banderas, 20
- Copo, 13
- Copo graduado, 14
- Cota inferior, 29
- Cota superior, 29

- Diagrama de Hasse, 15
- Distancia mínima, 4

- Facetas, 18
- Figura vertical, 18
- Funciones η , 39

- Generadores distinguidos, 23

- Hemicubo, 30

- Incidente, 14
- Isomorfismo, 19

- Latiz, 29
- Libertad, 41

- Máximo, 14
- Mínimo, 14
- Matriz de paridad, 5
- Matriz Generadora, 5
- Matriz monomial, 8
- Morfismo, 19, 22

- Palabra, 4
- Palabra par, 4
- Palabra tipo par, 4

Peso mínimo, 4

Poliedro, 13

Politopo, 13

Politopo abstracto, 16

Politopo dual, 18

Politopo regular, 23

Propiedad del diamante, 16

Rango, 15

Sección, 15, 16

Subcódigo, 4

Supremo, 29

Vértice-descriptible, 30

Vértices, 18

Vértices adyacentes, 19