



Universidad Michoacana de
San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico
Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

La geometría de Robertson-Walker y campos
escalares con acoplamiento no mínimo

T E S I S

que para obtener el título de:

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

P r e s e n t a :

Roberto Carlos De Arcia Solís

Asesores:

Dr. Joaquín Estevez Delgado

Dra. Tatjana Vukasinac

Morelia Michoacán, Junio de 2009

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	v
1. Relatividad Especial	1
1.1. Principios básicos de relatividad especial	1
1.2. Análisis vectorial y tensorial	3
1.3. Fluido perfecto en relatividad especial	5
2. Relatividad General	9
2.1. Introducción a la curvatura	9
2.2. Variedades	10
2.3. Cálculo tensorial	12
2.4. Transporte paralelo, geodésicas y curvatura	14
2.5. Identidades de Bianchi: Tensor de Ricci y de Einstein	17
2.6. Ecuaciones de campo de Einstein	18
3. Cosmología	21
3.1. Homogeneidad e Isotropía	22
3.2. Modelo de Robertson-Walker	23
3.3. Dinámica de un Universo homogéneo e isotrópico	24
3.4. Inflación cósmica	27
4. Campos escalares en cosmología	29
4.1. Campos escalares	29
4.2. Teorías tensor-escalar	31
4.3. Formulación Lagrangiana de la relatividad general	32
4.4. Campos escalares con acoplamiento mínimo	34
4.5. Acoplamiento no mínimo	36
5. Conclusiones	39

ÍNDICE GENERAL

Apéndice 1	41
5.1. Principio variacional	41
Apéndice 2	45
5.2. Expansión exponencial de Sitter	45
5.3. Expansión de Sitter con singularidad	46
5.4. Expansión de Sitter sin la singularidad	46
5.5. Expansión de tipo polinomial	47
5.6. Inflación lineal	48

Agradecimientos

Para Arturo De Arcia Ruiz

Nada de lo poco que he podido hacer hubiera sido posible sin mi familia, a ustedes más que a nadie agradezco este momento y con quienes quiero compartir mi alegría ya que son la base de mi persona y el apoyo con el cual espero siempre contar. Paulina, eres la persona a quien más quiero y a la que mejores mañanas le puedo desear, gracias por ser la mejor hermana y aunque no estamos cerca recuerda que siempre pienso en ti. A mi mamá, por darme la vida y educarme en mis primeros años, te deseo siempre lo mejor y espero estar ahí cuando lo necesites. A mi papá, eres la persona a quien más admiro y en verdad te agradezco todo el apoyo y la comprensión (talvés demasiado) que siempre tuviste conmigo, eres mi mejor amigo.

Por otro lado, durante mi estancia en Morelia conocí a muchas personas que estuvieron ahí cuando las necesitaba, sólo por recordar a las más cercanas; Cecy, Hilario, Itzia, Lupita, Ricardo y Sara, ustedes son las amistades que mas tiempo mantuve y eso ha de ser por algo, gracias por todo y ojalá sigamos en contacto. A Yuri, con quien pase mi última etapa en Morelia; gracias por todas las cosas que vivimos juntos, los cuidados cuando andaba enfermo y tu paciencia con la escuela, me llevo los mejores recuerdos que se puedan guardar. Al Dr. Idrish Huet, gracias por ayudarme siempre y aunque convivimos poco espero conservar tu amistad. A los del bar rubick, salud !!!

A mis asesores, quienes además de haber sido excelentes profesores durante la carrera (y yo no un buen alumno), hayan confiado en mí para esta tesis y me hayan apoyado de la forma en que lo hicieron. A la Dra. Tatjana Vukasinac, gracias por cada una de las revisiones, en verdad me fueron de mucha ayuda sus correcciones en cuanto al contenido y la escritura, lo poco o mucho de formalidad que presente este trabajo se lo debo a usted. Con el Dr. Joaquín Estevez me encuentro en deuda ya que además de ayudarme con los cálculos y ser sinodal para mi examen, fue la persona que más me apoyó en mi estancia en la universidad. Muchas gracias por todo el apoyo y los consejos que me diste. Te deseo lo mejor para esta nueva etapa que comienzas.

Finalmente, quiero agradecer al Dr. Alberto Mendoza, Dr. Salvador Jara, Dr. Rafael Campos y al L.F.M. Jaime Nieto el haber aceptado ser sinodales para el examen recepcional, así también por haberse tomado el tiempo necesario para la lectura de la tesis y pos sus valiosos comentarios y consejos.

Introducción

Sólo hay dos constantes en el Universo, su tamaño y la estupidez humana. . .
y no estoy seguro de lo primero.
Albert Einstein

En los últimos años se ha incrementado el número de observaciones astronómicas que nos llevan a aceptar que vivimos en un Universo casi plano con una componente desconocida a la que llamamos energía oscura, la cual es la principal responsable de la dinámica del Universo a gran escala. La herramienta para trabajar este tipo de problemas es la relatividad general desarrollada por Albert Einstein, y la solución para un Universo homogéneo e isotrópico cuando asociamos un fluido perfecto al contenido de materia es conocida como modelo de Friedmann-Robertson-Walker. La idea de un Universo dominado por energía oscura es consecuencia directa de la convergencia de datos obtenidos de manera independiente y constituye uno de los retos modernos de la física fundamental. Entre un gran número de posibilidades que se tienen para describir esta componente de la energía oscura, la más simple y con mayor peso teórico es la constante cosmológica Λ , la cual actúa sobre las ecuaciones de campo de Einstein como una fuente isotrópica y homogénea. Sin embargo, si la constante cosmológica es nula o está disminuyendo en el transcurso de la expansión, se necesita algo más que esté causando la aceleración del Universo.

La siguiente aproximación que nos permite construir un modelo para un universo en expansión es trabajar con la idea de que la geometría está acoplada de forma mínima con un campo escalar ϕ , el cual no ha sido hallado aún y cuya dinámica está determinada básicamente por su energía potencial $V(\phi)$. Esta idea ha recibido mucha atención en años anteriores y se ha realizado un esfuerzo considerable para entender su rol en la dinámica del Universo [1]. Los campos escalares han sido utilizados en la solución de diversos problemas como el de la materia oscura, teoría de inflación y teoría de unificación, al mismo tiempo que se han propuesto varios tipos de acoplamiento del campo con la geometría, así como distintos potenciales del campo escalar y se han analizado algunas de las consecuencias físicas de estas elecciones. Las teorías con acoplamiento no mínimo surgen en el intento de construir la teoría de gravitación consistente con teoría cuántica de campos en el espacio-tiempo curvado [2], así como también en el límite de energías bajas en teoría de cuerdas.

CAPÍTULO 0. INTRODUCCIÓN

Es por eso que en esta tesis vamos a analizar el caso del acoplamiento no mínimo entre la geometría y el campo escalar y como es posible generar modelos cosmológicos consistentes con FRW. En los primeros tres capítulos se tratarán algunos temas importantes de la relatividad especial, general y la cosmología respectivamente, los cuales son necesarios para el seguimiento de este trabajo. En el capítulo 4 se hará una revisión de la formulación lagrangiana de la relatividad general, así como el caso del acoplamiento mínimo presentado por Ellis y Madsen [3]. Para finalizar se presentará el caso del acoplamiento no mínimo en donde empleamos una acción general con tres funciones de acoplamiento, lo cual conduce a variaciones más generales que las halladas en la revisión bibliográfica de éste trabajo. Utilizando algunas propiedades físicas deseadas para nuestro Universo, se simplifican dichas ecuaciones y se demuestra que es posible hallar potenciales consistentes con nuestro actual modelo cosmológico para el caso de universo abierto y cerrado, y de forma particular se encuentra que para el caso de un universo plano es posible tener un potencial constante. Para finalizar se escribe la forma del escalar de curvatura para los casos presentados en el acoplamiento mínimo.

Relatividad Especial

El primer entendimiento que tuvieron los físicos acerca de la teoría especial de la relatividad fue mediante una aproximación algebraica basada en las transformaciones de Lorentz. En principio uno aprende a emplear dichas ecuaciones para convertir las mediciones de un observador a otro, para verificar y entender fenómenos importantes como son la dilatación del tiempo y la contracción del espacio, así como para realizar los cálculos de conversión masa-energía siempre y cuando no exista una aceleración entre ambos. Este punto de vista puramente algebraico empezó a cambiar aproximadamente 4 años después de que Einstein propusiera su teoría, fue el matemático alemán Hermann Minkowski quien señaló que todos los eventos pueden ser localizados en un espacio de cuatro dimensiones al que ahora llamamos espacio-tiempo. Ésto puede tomarse como el principio del punto de vista geométrico, el cual finalizó en la teoría general de la relatividad desarrollada entre 1914 y 1916.

1.1. Principios básicos de relatividad especial

La relatividad especial puede ser deducida a partir de dos postulados fundamentales:

1. Principio de relatividad (Galileo): No existe un experimento para medir la velocidad absoluta de un observador, el resultado de cualquier experimento desarrollado por un observador no depende de su velocidad relativa al respecto de otros observadores que no estén involucrados en el experimento.
2. La velocidad de la luz es constante (Einstein): La velocidad de la luz en el vacío al respecto de cualquier observador no acelerado es la misma sin importar el movimiento de la fuente ¹.

¹La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente 300,000 km/s

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD ESPECIAL

Recordemos que al hablar de un *observador* no nos referimos a una persona que ve un acontecimiento, sino a un sistema coordenado al que podemos denominar como inercial si cumple las propiedades:

1. La distancia entre los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$ es independiente del tiempo.
2. Los relojes colocados en diferentes puntos están sincronizados y corren a la misma velocidad.
3. La geometría del espacio a un tiempo t constante es Euclidiana.

Decimos que una *observación* es el hecho de asignar cuatro coordenadas al evento a fin de poder localizarlo, y como un apoyo para comprender la relatividad especial podemos usar los diagramas de espacio-tiempo (fig. 1.1). Un *evento* es un punto que se encuentra en dicho diagrama con una posición y tiempo fijo (\vec{x}, t) , mientras que una línea de mundo es una relación de la forma $\vec{x} = \vec{x}(t)$, la cual describe completamente el comportamiento de una partícula. Al hablar de espacio-tiempo, necesitamos utilizar cuatro coordenadas para localizar al evento y vamos a seguir la notación x^α , con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ para referirnos a las distintas entradas (t, x, y, z) siguiendo siempre el mismo orden. Un punto que debe mencionarse es que al hablar de las posiciones en el espacio usaremos las letras latinas x^i , mientras que al hablar de espacio y tiempo emplearemos letras griegas x^α . Para el seguimiento de esta tesis vamos a usar la notación en donde c tiene un valor igual a uno.

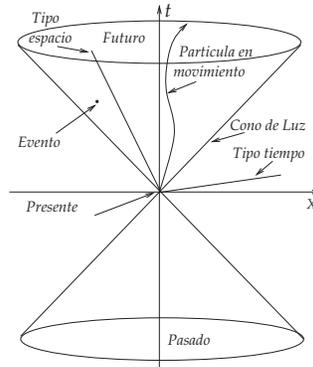


Figura 1.1: Diagrama de la estructura causal del espacio-tiempo en relatividad especial, así como las trayectorias que se pueden dar dentro del cono de luz del observador.

Considerando en lo sucesivo a O y \tilde{O} como los sistemas de referencia en reposo y movimiento respectivamente, y la velocidad de la luz igual a uno, podemos tomar dos eventos E y P así que la diferencia entre sus coordenadas en el sistema O debe satisfacer $ds^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - \Delta t^2$, y por el segundo postulado de la relatividad especial en el sistema \tilde{O} tenemos $d\tilde{s}^2 = \Delta\tilde{x}^2 + \Delta\tilde{y}^2 + \Delta\tilde{z}^2 - \Delta\tilde{t}^2 = 0$. Notamos que la longitud

del segmento no siempre será positiva, puede ser negativa e incluso igual a cero (esto quiere decir que la “distancia” que recorre la partícula en el espacio y el tiempo es la misma) y llamamos a un intervalo tipo espacio si $\Delta s^2 > 0$, tipo tiempo si $\Delta s^2 < 0$ y nulo si $\Delta s^2 = 0$. Por otro lado, ya que la velocidad de la luz es una constante las diferencias entre las coordenadas para dos observadores deben satisfacer $\Delta s^2 = \Delta \tilde{s}^2$, y éste es posiblemente el teorema más importante de la relatividad especial, el cual nos dice que el intervalo entre dos eventos del espacio-tiempo para observadores inerciales diferentes debe ser el mismo.

Para comenzar el estudio de la relatividad especial vamos a partir de las ecuaciones que nos permiten pasar de un sistema de coordenadas a otro mediante procesos algebraicos. Estas ecuaciones son llamadas *transformaciones de Lorentz* en honor al físico holandés Hendrik Antoon Lorentz el cual fué el primero en trabajar con ellas, aunque sin entender de forma completa la física que contenían. La principal característica es que se trata de transformaciones lineales que dependen únicamente de la velocidad relativa v entre los dos sistemas, y si tomamos que el movimiento relativo entre dos observadores se da a lo largo del eje x obtenemos las siguientes relaciones

$$\tilde{t} = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{x} = \frac{-vt}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = z. \quad (1.1)$$

Existen dos resultados importantes en relatividad especial que son deducidos a partir de las transformaciones de Lorentz y fueron las primeras predicciones acerca de lo diferente que es la naturaleza cuando se adquieren velocidades cercanas a la de la luz: a) la contracción de Lorentz, la cual nos dice que la longitud espacial de un objeto medida por un observador que se encuentra en movimiento será menor que la hallada por un observador que se encuentra en reposo al respecto del objeto. b) la dilatación del tiempo, esto significa que los intervalos de tiempo registrados por un observador en movimiento serán menores que los obtenidos por un observador en reposo.

$$\Delta \tilde{L} = \Delta L \sqrt{1-v^2} \qquad \Delta \tilde{t} = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.2)$$

1.2. Análisis vectorial y tensorial

Definimos un vector como aquel objeto cuyas componentes se transforman como coordenadas, así que podemos expresarlo con la ayuda de notación de Einstein como $\vec{x} = x^\alpha \vec{e}_\alpha$, en donde x^α son las componentes del vector y \vec{e}_α se refieren a los vectores base $\vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{e}_1 = (0, 1, 0, 0)$, etc. Si queremos escribirlo en otra base, usamos $V^{\tilde{\alpha}} = \Lambda^{\tilde{\alpha}}{}_\beta V^\beta$, en donde $\Lambda^{\tilde{\alpha}}{}_\beta$ se refiere a la matriz de cambio de coordenadas $\Lambda^{\tilde{\alpha}}{}_\beta = \partial x^{\tilde{\alpha}} / \partial x^\beta$, mientras que para los vectores de la base empleamos $\vec{e}_{\tilde{\alpha}} = \Lambda^{\beta}{}_{\tilde{\alpha}} \vec{e}_\beta$, siendo $\Lambda^{\beta}{}_{\tilde{\alpha}} \vec{e}_\beta$ la matriz inversa. Definimos el producto punto como $\vec{A} \cdot \vec{B} = A^\alpha B^\beta \eta_{\alpha\beta}$, en donde los números $\eta_{\alpha\beta}$ son llamados los componentes del tensor métrico de Minkowski, con $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD ESPECIAL

Por otro lado, un vector muy importante en relatividad especial es la 4-velocidad de una partícula $U^\alpha = dx^\alpha/d\tau$, en donde τ es el tiempo propio, ya que nos describe como se mueve ésta en el espacio-tiempo. En mecánica clásica el vector velocidad es tangente a la trayectoria de la partícula, mientras que en relatividad especial definimos la 4-velocidad \vec{U} como un vector tangente a la línea de mundo y de longitud unitaria. Un objeto que se encuentre acelerado no puede tener un sistema de referencia inercial para todo tiempo, lo que se puede hacer es definir un sistema de referencia que posea la misma velocidad que la partícula pero sólo un instante de tiempo: el sistema de referencia momentáneamente comóvil (SRMC). En este sistema la velocidad es paralela al vector base \vec{e}_0 , y definimos el 4-momento como $\vec{p} = m\vec{U}$ en donde m es la masa de la partícula medida en reposo. Se acostumbra escribir las componentes de la forma $\vec{p} \rightarrow (E, p^1, p^2, p^3)$, en donde llamamos a p^0 la energía de la partícula en el sistema O .

Vamos ahora a definir un tensor de la forma $\binom{0}{N}$ como una función que toma N vectores y entrega un escalar, siendo lineal en cada una de las entradas. Notemos que la definición no menciona a las componentes del vector, por lo que un tensor debe ser una regla que otorga el mismo número independientemente del sistema de referencia que se esté utilizando. El tensor métrico se escribe como $\mathbf{g}(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A} \cdot \vec{B}$, en donde $\mathbf{g}(\ , \)$ es una función que toma dos argumentos y es lineal en cada uno de ellos. Un tensor de tipo $\binom{0}{1}$ es llamado 1-forma y una propiedad importante es que si aplicamos la 1-forma a un vector obtenemos un número real y podemos escribirlo como $\tilde{p}(\vec{A}) = \tilde{p}(A^\alpha \vec{e}_\alpha) = A^\alpha \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = A^\alpha p_\alpha$, donde usamos la propiedad de linealidad que presentan los tensores. Las componentes de \tilde{p} en la base $\{\vec{e}_\beta\}$ son

$$p_{\tilde{\beta}} \equiv \tilde{p}(\vec{e}_{\tilde{\beta}}) = \tilde{p}(\Lambda^\alpha_{\tilde{\beta}} \vec{e}_\alpha) = \Lambda^\alpha_{\tilde{\beta}} \tilde{p}(\vec{e}_\alpha) = \Lambda^\alpha_{\tilde{\beta}} p_\alpha, \quad (1.3)$$

y si comparamos ésta ecuación con $\vec{e}_{\tilde{\beta}} = \Lambda^\alpha_{\tilde{\beta}} \vec{e}_\alpha$, podemos ver que las 1-formas se transforman de la misma forma que los vectores base y de manera inversa a las componentes de los vectores. Dado que el conjunto de 1-formas es un espacio vectorial, podemos usar cualquier conjunto de cuatro 1-formas como base (las 1-formas al igual que los vectores son linealmente independientes) y llamamos a éste *espacio cotangente o dual*, y se define como

$$\tilde{p}(\vec{A}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(\vec{A}) = p_\alpha \tilde{\omega}^\alpha(A^\beta \vec{e}_\beta) = p^\alpha A^\beta \tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta), \quad (1.4)$$

y para que esto se cumpla para todo A^β y toda p_α , es necesario que se satisfaga $\tilde{\omega}^\alpha(\vec{e}_\beta) = \delta^\alpha_\beta$. Es importante señalar dos puntos, uno es que la ecuación (1.4) define a las bases $\{\tilde{\omega}^\alpha\}$ en términos de $\{\vec{e}_\beta\}$, es decir los vectores bases inducen una única y conveniente base de las 1-formas. El segundo punto es que al mismo tiempo que podemos describir a los vectores y las 1-formas dando un conjunto de cuatro componentes, su significado geométrico es muy diferente. Hay que recordar que las componentes no dicen sólo una parte de la historia, así que necesitamos conocer los vectores base para tener el resto de la información.

Los tensores del tipo $\binom{0}{2}$ son aquellos que poseen dos vectores como argumento como es el caso del ya mencionado tensor métrico, y se forman como el producto de dos 1-formas aplicadas cada una a un vector. Si \tilde{p} y \tilde{q} son 1-formas aplicadas a \vec{A} y \vec{B} respectivamente, tenemos que $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ es un tensor de tipo $\binom{0}{2}$ con la propiedad de que el producto entre tensores no conmuta, por lo tanto $\tilde{p} \otimes \tilde{q}$ y $\tilde{q} \otimes \tilde{p}$ son tensores diferentes, ya que el primer valor es $\tilde{p}(\vec{A}) \tilde{q}(\vec{B})$ mientras el segundo es $\tilde{q}(\vec{A}) \tilde{p}(\vec{B})$. Por otra parte tenemos al tensor $\binom{M}{N}$, el cual es una función lineal de M 1-formas y N vectores a los números reales.

Para finalizar este apartado vamos a describir como se relacionan los vectores con las 1-formas. De la misma manera que la métrica mapea a un vector \vec{V} en una 1-forma \tilde{V} , también puede hacer una relación entre un tensor $\binom{N}{M}$ a uno tipo $\binom{N-1}{M+1}$. De forma similar, la inversa mapea un tensor de la forma $\binom{N}{M}$ en uno $\binom{N+1}{N-1}$, por ejemplo, suponiendo que tenemos un tensor de tipo $\binom{1}{2}$, podemos escribir sus componentes como $T^\alpha{}_{\beta\gamma} = \mathbf{g}_{\beta\mu} T^{\alpha\mu}{}_{\gamma}$, donde $T^{\alpha\mu}{}_{\gamma}$ son las componentes de un tensor tipo $\binom{2}{1}$. También podemos expresarlo como $T^\alpha{}_{\beta\gamma} = \mathbf{g}^{\alpha\mu} T_{\mu\beta\gamma}$, siendo en este caso un tensor tipo $\binom{0}{3}$. A estas operaciones se las llama “subir” y “bajar” los índices del tensor y son en realidad mapeos generados por la métrica.

1.3. Fluido perfecto en relatividad especial

En muchas situaciones astrofísicas la fuente del potencial gravitacional puede ser tomada como un fluido perfecto para una primera aproximación. Al hablar de fluidos nos referimos a un *continuo*, el cual es una colección de partículas tan grande que no puede seguirse la dinámica de cada componente por lo que se trabaja con valores promedio tales como el número de partículas por unidad de volumen, presión, temperatura, etc. En las situaciones en donde las propiedades pueden cambiar de un punto a otro se acostumbra descomponer al fluido en elementos de tamaño tal que sean lo suficientemente grandes para que el comportamiento individual de partículas no afecte, y a la vez tan pequeños para que las propiedades que presentan las partículas dentro de cada elemento sean las mismas. La aproximación del continuo asigna a cada elemento del fluido un valor específico, es decir, a cada punto del espacio le corresponde un valor definido por la superposición de varios campos. Un fluido perfecto es definido como aquel que posee fuerza anti-deslizamiento igual a cero y cuya única fuerza de interacción entre los elementos es la debida a la presión.

Vamos a comenzar nuestra descripción relativista de un fluido por medio de su caso más simple: el polvo. El polvo es definido como una colección de partículas tal que cada una se encuentra en reposo dentro de algún sistema de referencia. Para conocer el número de partículas por unidad de volumen, únicamente contamos las partículas y las dividimos por el volumen que ocupan. En caso de que la distribución sea de

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD ESPECIAL

forma irregular, definimos a n como la densidad numérica en el SRMC del elemento, y de entrada podemos ver que n puede estar dada en función de las x^i , pero no del tiempo ya que nos encontramos en un sistema de referencia en reposo. Ahora bien, si nos cambiamos a cualquier sistema inercial que no esté en reposo, el mismo número de partículas ocupará ahora un volumen diferente. Supongamos que al principio estaban contenidas en un volumen de tamaño $\Delta x \Delta y \Delta z$, debido a la contracción de Lorentz el volumen se reducirá a $\sqrt{1-v^2} \Delta x \Delta y \Delta z$ en caso de moverse únicamente a lo largo de un eje, entonces el nuevo número de partículas por unidad de volumen será

$$\tilde{n} = \frac{n}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.5)$$

En caso de que las partículas estén en movimiento también podemos preguntarnos ¿Cuántas de esas se mueven en cierta dirección? Para responder tomamos la definición de flujo: *el flujo a través de una superficie es la cantidad de partículas que atraviesan una unidad de área por unidad de tiempo*. En el sistema \tilde{O} , supóngase que las partículas se mueven con velocidad v en la dirección x , por simplicidad vamos a considerar a la superficie Σ perpendicular al eje x , por lo que el flujo viene dado por

$$(\text{flujo})^{\tilde{x}} = \frac{nv^{\tilde{x}}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (1.6)$$

y consideremos al vector \vec{N} definido por $\vec{N} = n\vec{U}$, en donde \vec{U} es la 4-velocidad de las partículas. En un sistema \tilde{O} en el cual las partículas tienen velocidad (v^x, v^y, v^z) tenemos

$$\vec{N} \rightarrow_{\tilde{O}} \left(\frac{n}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^x}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^y}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{nv^z}{\sqrt{1-v^2}} \right). \quad (1.7)$$

Además de considerar el número de partículas existentes en un volumen de fluido, debemos tomar en cuenta el momento y la energía ya que serán la fuente del potencial gravitacional en el estudio de la relatividad general. Para hacer esto asumimos por simplicidad que todas las partículas tienen masa en reposo m . En un SRMC la energía de cada partícula es m y el número por unidad de volumen es n , por lo tanto la energía por unidad de volumen es mn y la denotamos generalmente como ρ . En fluidos más generales donde existen velocidades aleatorias de partículas y por lo tanto energía cinética debido al movimiento, ésto no será válido. En un sistema \tilde{O} en el cual las partículas no están en reposo definimos la densidad de energía como

$$\tilde{\rho} = \frac{\rho}{1-v^2}. \quad (1.8)$$

Esta transformación involucra dos factores de $(1-v^2)^{1/2} = \Lambda^{\tilde{0}}_0$, ya que el volumen y la energía se transforman como componentes de vectores. Sin embargo, es imposible representar la densidad de energía como componente de un vector, ya que es la componente de un tensor de rango $\binom{2}{0}$. Podemos definir al tensor de energía-momento T por medio de sus componentes en algún sistema de referencia arbitrario

$$\mathbf{T}(\tilde{w}^\alpha, \tilde{w}^\beta) = T^{\alpha\beta}, \quad (1.9)$$

como el flujo del α -momento a través de la superficie $x^\beta = \text{cte}$. Si consideramos que \mathbf{T}^{00} está definido como el flujo del 0-momento a través de la superficie $t = \text{cte}$, ésta es la densidad de energía. De manera similar \mathbf{T}^{0i} es el flujo de la energía a través de la superficie $x^i = \text{cte}$, así como \mathbf{T}^{i0} es el flujo del i -momento sobre la superficie $t = \text{cte}$. Se cumple que para cualquier sistema en particular, dando las componentes de \mathbf{T} en algún sistema de referencia lo definimos de forma completa.

Para el caso del polvo los componentes de \mathbf{T} en el SRMC son particularmente sencillos, ya que al no existir movimiento de las partículas todos los momentos son cero al igual que los flujos espaciales. Sin embargo $(\mathbf{T}^{00})_{SRMC} = \rho = mn$, y podemos ver que tiene los mismos componentes que el tensor $\vec{p} \otimes \vec{N}$ en el SRMC, en donde $\vec{p} = m\vec{U}$ es el 4-momento de una partícula. Por lo tanto podemos concluir que

$$\mathbf{T}^{\alpha\beta} = \rho U^\alpha U^\beta, \quad (1.10)$$

y en el sistema \tilde{O} en donde $\vec{U} \rightarrow \left(\frac{1}{1-v^2}, \frac{v^x}{1-v^2}, \dots\right)$ tenemos

$$\begin{aligned} T^{\tilde{0}\tilde{0}} &= \rho U^{\tilde{0}} U^{\tilde{0}} = \rho/(1-v^2), \\ T^{\tilde{0}\tilde{i}} &= \rho U^{\tilde{0}} U^{\tilde{i}} = \rho v^i/(1-v^2), \\ T^{\tilde{i}\tilde{0}} &= \rho U^{\tilde{i}} U^{\tilde{0}} = \rho v^i/(1-v^2), \\ T^{\tilde{i}\tilde{j}} &= \rho U^{\tilde{i}} U^{\tilde{j}} = \rho v^i v^j/(1-v^2), \end{aligned} \quad (1.11)$$

que es exactamente lo que queríamos calcular desde un principio para la densidad de energía, el flujo de energía, la densidad de momento y el flujo del momento. Dado que \mathbf{T} representa la energía y el momento contenido en el fluido, existe una manera de usarlo para expresar la ley de conservación de energía y momento. Puede ser demostrado [9] que la conservación de la energía se expresa de la forma $\mathbf{T}^{0\alpha}_{,\alpha} = 0$, mientras que la conservación general de momento se escribe como $\mathbf{T}^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0$. Esto implica que el cambio de energía y momento en el 3-volumen es debido al flujo que atravieza las fronteras.

Para finalizar, vamos a hablar de un fluido perfecto ya que es el tema de interés. En relatividad especial, un fluido perfecto se define como aquel que no posee viscosidad ni conducción de calor en el SRMC, es una generalización del “gas ideal” usado en termodinámica. Después del polvo, es el tipo más simple de fluido con el que se puede trabajar y se debe a dos restricciones que simplifican al tensor de energía-momento

1. *No son conductores de calor.* De la definición de \mathbf{T} , uno puede observar que $\mathbf{T}^{0i} = \mathbf{T}^{i0} = 0$, es decir la energía puede fluir sólo si las partículas lo hacen.
2. *No presentan viscosidad.* La viscosidad es una fuerza paralela a la superficie de contacto entre las partículas, por lo tanto las fuerzas serán siempre perpendiculares a dicha interfaz, es decir \mathbf{T}^{ij} será igual a cero a excepción que $i = j$. Esto

CAPÍTULO 1. RELATIVIDAD ESPECIAL

significa que \mathbf{T}^{ij} será una matriz diagonal además de ser diagonalizable en todos los SRMC. La única matriz que cumple con estas condiciones viene dada como un múltiplo de la identidad, por lo tanto una superficie $x = \text{cte}$, será atravesada únicamente si la fuerza se da a lo largo del eje x , lo mismo para y y para z . Dichas fuerzas por unidad de área son iguales y las llamamos presiones así que $\mathbf{T}^{ij} = p \delta^{ij}$. En el SRMC el tensor \mathbf{T} tiene componentes dadas por

$$(\mathbf{T}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

y no es difícil demostrar que se puede escribir como

$$\mathbf{T}^{\alpha\beta} = (\rho + p) U^\alpha U^\beta + p \eta^{\alpha\beta} \quad (1.13)$$

Comparando con el tensor de energía-momento para el polvo $\mathbf{T} = \vec{p} \otimes \vec{N}$, nos damos cuenta que el polvo es un caso especial de fluido perfecto libre de presión, éste proviene de las velocidades aleatorias que tiene cada partícula.

Las ecuaciones de conservación se escriben de la forma $\mathbf{T}^{\alpha\beta},_{\beta} = [(\rho + p) U^\alpha U^\beta + p \eta^{\alpha\beta}],_{\beta} = 0$. Si asumimos de entrada que $(n U^\beta),_{\beta} = 0$ (esto significa que el cambio en el número de partículas dentro de un 3-volumen ocurre debido al flujo de partículas a través de las fronteras), podemos escribir al primer término como

$$\left[(\rho + p) U^\alpha U^\beta \right],_{\beta} = n U^\beta \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right),_{\beta} \quad (1.14)$$

y después de una serie de pasos algebraicos obtenemos finalmente

$$n U^\beta U_\alpha \left(\frac{\rho + p}{n} U^\alpha \right),_{\beta} + p_\beta \eta^{\alpha\beta} U_\alpha = 0 \quad (1.15)$$

en donde el término $p_\beta U^\beta$ es la derivada de p a lo largo de la línea de mundo del elemento del fluido $dp/d\tau$.

Relatividad General

La teoría de la relatividad especial surgió como un intento de unificar las fuerzas electromagnéticas con las leyes de la mecánica Newtoniana, sin embargo, existe otra fuerza en la naturaleza cuya descripción no podía ser explicada sin aceptar las acciones instantáneas a distancia, ésta es la gravedad. Por lo tanto, era necesario crear una teoría relativista de la gravedad que incluyera por una parte la teoría de Newton en el límite de las velocidades pequeñas, así como también la relatividad especial en el caso de campos débiles. La Teoría general de la relatividad es una teoría del campo gravitatorio y de los sistemas de referencia generales publicada por Albert Einstein entre 1915 y 1916, el nombre se debe a que generaliza a la teoría especial de la relatividad para el caso en el que los observadores se encuentran acelerados. Una de las aplicaciones que ha tenido dicha teoría es la que permitió fundar el campo de la cosmología, que como veremos más adelante, es el tema central de éste trabajo.

2.1. Introducción a la curvatura

Una propiedad importante de los sistemas inerciales es que mientras al respecto de ellos no actúe una fuerza sobre las partículas éstas permanezcan en reposo. Tomando en cuenta lo anterior, podemos ver que la gravedad a diferencia de otras fuerzas actúa sobre todos los cuerpos sin importar su composición. Mientras que para el campo electromagnético y las interacciones “débiles” y “fuertes” se pueden construir trayectorias para partículas no afectadas por éstas fuerzas, para el caso del campo gravitacional esto no es posible ya que no existen partículas libres. Lo que podemos tener es un sistema en el cual las partículas libres de otras fuerzas poseen una velocidad uniforme, éste se encuentra cayendo libremente en el campo gravitacional por lo que todas se están acelerando de la misma forma (al menos para velocidades bajas). Este es el principio de equivalencia que existe entre la gravedad y la aceleración y es una piedra angular para nuestra nueva teoría. Hablando en terminología moderna, lo que hemos estado definiendo hasta el momento es llamado el principio de equivalencia “débil” ya que

CAPÍTULO 2. RELATIVIDAD GENERAL

se refiere únicamente a la gravedad, más tarde emplearemos el principio de equivalencia “fuerte” el cual nos dice que localmente se puede conocer el comportamiento de las otras fuerzas en un campo gravitacional postulando que sus leyes tienen la misma forma que en relatividad especial, es decir, en donde no existen campos gravitacionales.

En la Tierra no existe un sistema inercial global ya que las partículas libres caen en diferentes direcciones dependiendo en que parte se encuentran, pero podemos construir sistemas inerciales locales análogos a los SRMC de los fluidos en relatividad especial. En éste caso, el sistema sólo es inercial en una pequeña región en un tiempo muy corto, su tamaño depende de la magnitud de las perturbaciones del campo gravitacional y de la sensibilidad del experimento que se realice para detectarlas. Hasta el momento, las líneas de mundo de partículas libres han sido nuestra prueba de que se pueden construir sistemas inerciales, y en relatividad especial las líneas de mundo que comienzan siendo paralelas los seguirán siendo sin importar que tan lejos las extendemos. Ésta es exactamente la propiedad que poseen las rectas en la geometría Euclidiana, por lo tanto parece natural discutir la geometría del espacio-tiempo como aquella definida por las líneas de mundo de partículas libres. En estos términos el espacio de Minkowski es un espacio *plano* ya que obedece a los axiomas de paralelismo de Euclides, sin embargo no es del todo un espacio *Euclidiano* ya que la métrica es diferente.

Generalmente en un campo gravitacional no uniforme, las líneas de mundo que comienzan paralelas no terminan de la misma forma. Por ejemplo, si trazamos dos curvas no cerradas sobre la superficie de una esfera que no sean paralelas tarde o temprano terminarán por intersectarse. Sin embargo, si nos concentramos en una pequeña región la podemos manejar como si se tratara de un espacio plano y podemos decir que la esfera es localmente plana, pero las curvas que localmente son rectas (llamadas geodésicas) no siempre lo serán. El avance importante de Einstein fue ver la similitud entre los espacios Riemannianos y la gravitación: identificó las trayectorias de las partículas que caen en forma libre con las geodésicas de una geometría curva.

2.2. Variedades

Básicamente podemos decir que una variedad es un espacio continuo que de manera local se ve como un espacio Euclidiano, pero de manera global puede mostrar características diferentes. De forma más rigurosa, una variedad es cualquier conjunto que puede ser parametrizado de forma continua, en donde el número de parámetros independientes es la dimensión de la variedad y los parámetros en sí son sus coordenadas. A partir de ahora vamos a considerar *variedades diferenciables*, es decir, espacios que son continuos y diferenciables. La mayor parte de las variedades que se usan en la física son diferenciables casi en todos los puntos, ésto significa que podemos definir un espacio vectorial para cada punto de nuestra variedad, y por lo tanto también definimos 1-formas y vectores como lo hicimos anteriormente. Usando las definiciones anteriores podemos construir todo el conjunto de tensores de rango $\binom{M}{N}$.

Hasta el momento no hemos introducido la métrica en el análisis de la variedad y en nuestro caso ésto es fundamental ya que contiene información acerca de las longitudes y los tiempos medidos. Decimos que una variedad diferenciable en la cual un campo tensorial \mathbf{g} de rango $\binom{0}{2}$ ha sido elegido para actuar como la métrica en cada punto es llamada *variedad Riemanniana*. Estrictamente hablando, la variedad es Riemanniana si la métrica es definida positiva $g(\vec{V}, \vec{V}) > 0$ para todo $\vec{V} \neq 0$. La variedad diferenciable es una colección amorfa de puntos organizados como puntos en el espacio Euclidiano, pero sin tener una relación de distancia ni una forma específica.

Como hemos dicho anteriormente, la métrica nos entrega un mapeo entre los vectores y las 1-formas para cada punto. Dado un campo vectorial $\vec{V}(\mathcal{P})$ (en donde \mathcal{P} es un punto cualquiera que pertenece a nuestra variedad), existe únicamente un campo de 1-formas que entrega $\tilde{V}(\mathcal{P}) = \mathbf{g}(\vec{V}(\mathcal{P}), \cdot)$. Los componentes de \mathbf{g} son llamados $g_{\alpha\beta}$, mientras los componentes de la matriz inversa son llamados $g^{\alpha\beta}$. La métrica permite subir y bajar índices de la misma forma que lo hacíamos en la relatividad especial

$$V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta. \quad (2.1)$$

Dado que nuestro interés de estudio son las variedades con curvatura en general, debemos tomar en cuenta todos los sistemas coordenados que pueden aparecer. En el caso de relatividad especial estudiamos sistemas de Lorentz ya que éstos tenían la propiedad de ser globales, pero como la gravedad nos impide que existan tales sistemas en relatividad general la única restricción es que las transformaciones de coordenadas sean no singulares. Como la matriz $g_{\alpha\beta}$ es simétrica por definición, podemos tomar un teorema del álgebra lineal que nos dice que siempre se puede hallar una transformación que lleve una matriz simétrica a una de forma diagonal con componentes 1, -1 ó 0, en donde el número en entradas +1 y -1 es igual al número de eigenvalores positivos y negativos. Así que si elegimos \mathbf{g} con la signatura $(-, +, +, +)$ siempre se podrá hallar en un punto dado una transformación que lleva la métrica \mathbf{g} a la métrica de Minkowski

$$g_{\alpha\beta}(x^\mu) = \eta_{\alpha\beta} + 0[(x^\mu)^2], \quad (2.2)$$

y podemos reescribir (2.2) de forma más precisa como:

$$g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = \eta_{\alpha\beta}, \quad \text{para todo } \alpha, \beta \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) = 0, \quad \text{para todo } \alpha, \beta, \gamma, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^\gamma \partial x^\mu} g_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) \neq 0 \quad (2.5)$$

para algunos valores de α , β y γ si la variedad no es completamente plana. Por la ausencia de términos de primer derivada (2.4) de la métrica de un espacio-tiempo curvo sabemos que las partículas se están moviendo sobre trayectorias que localmente son rectas en este sistema coordenado.

2.3. Cálculo tensorial

En relatividad especial cuando derivamos vectores en un sistema cartesiano nos preocupamos únicamente en las componentes, ya que el espacio es plano y los vectores que forman la base permanecen constantes. En relatividad general hablamos de espacios más generales en donde la curvatura juega un papel importante ya que modifica la dirección de los vectores base. Tomando un vector $\vec{V} = V^\alpha \vec{e}_\alpha$, cuando lo derivamos con respecto a una variable hallamos

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta}, \quad (2.6)$$

y el último término de (2.6) es de gran importancia dado que $\partial \vec{e}_\alpha / \partial x^\beta$ para α constante es en sí mismo un vector. Introducimos $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ para denotar los coeficientes

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu, \quad (2.7)$$

en donde α nos dice que vector base será diferenciado, β nos da la coordenada al respecto de la cual vamos a derivar y μ denota la componente del vector resultante. Estos son muy usados en la teoría general de la relatividad y los llamamos *Símbolos de Christoffel* en honor al matemático alemán Elwin Bruno Christoffel. Usando la definición del símbolo de Christoffel podemos ver que (2.6) se transforma en

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \vec{e}_\alpha + V^\alpha \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu, \quad (2.8)$$

y después de una serie de pasos algebraicos y renombrando la derivada parcial $\partial V^\alpha / \partial x^\beta$ podemos escribir las componentes de este vector como

$$\nabla_\beta V^\alpha \equiv V^\alpha{}_{;\beta} = V^\alpha{}_{,\beta} + V^\mu \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}. \quad (2.9)$$

Si tomamos un tensor tipo $\binom{k}{l}$, aplicando el mismo procedimiento obtenemos un tensor tipo $\binom{k}{l+1}$ y usando notación de índices escribimos el campo tensorial resultante de la acción de ∇ sobre T como $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}{}_{b_1 \dots b_l}$. Este campo tensorial es llamado *derivada covariante de \vec{V}* , y comunmente se escribe como $\nabla \vec{V}$. Dado que un escalar ϕ no depende de los vectores base, su derivada $\tilde{d}\phi$ es igual a su derivada covariante $\nabla\phi$. Para calcular la derivada de una 1-forma, usamos la propiedad que una 1-forma y un vector entregan siempre un escalar. Entonces, si \tilde{p} es una 1-forma y \vec{V} un vector arbitrario $\langle \tilde{p}, \vec{V} \rangle$ es un escalar. En un sistema arbitrario de coordenadas escribimos $\phi = p_\alpha V^\alpha$, así que por la regla de la cadena, $\nabla_\beta \phi$ es

$$\nabla_\beta \phi = \phi_{;\beta} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial x^\beta} V^\alpha + p_\alpha \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.10)$$

Usando (2.9) podemos despejar $\partial V^\alpha / \partial x^\beta$ y después de renombrar índices mudos en el término que contiene el símbolo de Christoffel, llegamos a

$$\nabla_{\beta} \phi = \left(\frac{\partial p_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - p_{\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \right) V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}{}_{;\beta}, \quad (2.11)$$

en donde el término entre paréntesis es la derivada covariante de \tilde{p}

$$p_{\alpha;\beta} = p_{\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} p_{\mu}. \quad (2.12)$$

Finalmente podemos reescribir (2.11) como

$$\nabla_{\beta}(p_{\alpha} V^{\alpha}) = p_{\alpha;\beta} V^{\alpha} + p_{\alpha} V^{\alpha}{}_{;\beta}, \quad (2.13)$$

al igual que

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} T_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} - T_{\mu\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}, \\ \nabla_{\beta} A^{\mu\nu} &= A^{\mu\nu}{}_{,\beta} + A^{\alpha\nu} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} + A^{\mu\alpha} \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}, \\ \nabla_{\beta} B^{\mu}{}_{\nu} &= B^{\mu}{}_{\nu,\beta} + B^{\alpha}{}_{\nu} \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} - B^{\mu}{}_{\alpha} \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\beta}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Vamos a recordar que en coordenadas cartesianas ∇ es la derivada de las componentes, esto significa que si \vec{V} es un vector arbitrario

$$V_{\alpha,\beta} = \eta_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{,\beta} \rightarrow V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta}, \quad (2.15)$$

y dado que la métrica nos permite escribir a un vector en cualquier sistema como $V_{\alpha} = g_{\alpha\mu} V^{\mu}$, podemos tomar la derivada covariante β al respecto de x^{β}

$$V_{\alpha;\beta} = g_{\alpha\mu;\beta} V^{\mu} + g_{\alpha\mu} V^{\mu}{}_{;\beta}, \quad (2.16)$$

y comparando con (2.15) tenemos que en todos los sistemas coordenados

$$g_{\alpha\mu;\beta} = 0. \quad (2.17)$$

En coordenadas Cartesianas escribimos

$$g_{\alpha\mu;\beta} \equiv g_{\alpha\mu,\beta} = \eta_{\alpha\mu,\beta} = 0, \quad (2.18)$$

como una identidad trivial, pero para otros sistemas de coordenadas si usamos $\nabla_{\mu} T_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta;\mu} = g_{\alpha\beta,\mu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} - \Gamma^{\nu}{}_{\beta\mu} g_{\alpha\nu} = 0. \quad (2.19)$$

Para finalizar, vamos a calcular los símbolos de Christoffel a partir de la métrica. Observando (2.19) nos daremos cuenta que podemos usarla para determinar $g_{\alpha\beta,\mu}$ en términos de $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$. Si seguimos el camino en el otro sentido, podemos obtener $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ partiendo de $g_{\alpha\beta}$. Para lograrlo debemos tomar en cuenta que para cualquier sistema coordenado $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\beta\alpha}$, es decir, podemos invertir (2.19) haciendo algo de álgebra. Escribimos las tres versiones con diferente permutación de índices

$$\begin{aligned}
 g_{\alpha\beta,\mu} &= \Gamma^\nu_{\alpha\mu} g_{\nu\beta} + \Gamma^\nu_{\beta\mu} g_{\alpha\nu}, \\
 g_{\alpha\mu,\beta} &= \Gamma^\nu_{\alpha\beta} g_{\nu\mu} + \Gamma^\nu_{\mu\beta} g_{\alpha\nu}, \\
 -g_{\beta\mu,\alpha} &= -\Gamma^\nu_{\beta\alpha} g_{\nu\mu} - \Gamma^\nu_{\mu\alpha} g_{\beta\nu}.
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

Agrupamos términos y usando la simetría de \mathbf{g} , $g_{\nu\beta} = g_{\beta\nu}$ llegamos finalmente a

$$\Gamma^\gamma_{\beta\mu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} (g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}),
 \tag{2.21}$$

la cual es la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de las derivadas parciales de los componentes de g .

2.4. Transporte paralelo, geodésicas y curvatura

Hasta ahora, hemos desarrollado la matemática de las variedades partiendo del hecho que podemos tener un espacio plano al menos de manera local sin considerar la curvatura de forma explícita. Ha llegado el momento de dar una definición más precisa de la curvatura, y para comenzar tenemos que distinguir entre la curvatura intrínseca y extrínseca, siendo la primera la que realmente nos interesa. Decimos que la geometría intrínseca de una variedad n -dimensional sólo considera la relación que existe entre los puntos de las curvas que pertenecen a la variedad, mientras que la geometría extrínseca aparece cuando estudiamos a la superficie desde un espacio de mayor dimensión.

Al hablar del transporte paralelo que podemos tener sobre cualquier curva ya sea abierta o cerrada, vamos a empezar por considerar un vector \vec{V} en el punto x^μ , después generamos un campo vectorial a lo largo de una curva de tal forma que los vectores $\vec{V}(x^\mu)$ y $\vec{V}(x^\mu + dx^\mu)$ sean paralelos y de igual longitud. Si repetimos los pasos hasta cubrir toda la trayectoria, decimos que el vector ha sido transportado de forma paralela a lo largo de dicha curva (fig 2.1).

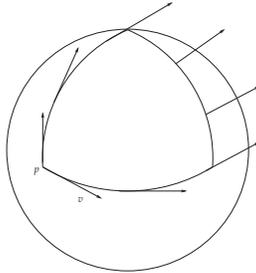


Figura 2.1: Transporte paralelo de un vector v^α alrededor de una curva cerrada sobre la superficie de una esfera. En este caso se puede observar como el vector regresa al punto inicial después de haber rotado 90°

Entonces, en un sistema de coordenadas que es inercial en \mathcal{P} los componentes de \vec{V} deben ser constantes a lo largo de tal curva

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = 0 \text{ en } \mathcal{P}, \quad (2.22)$$

y por lo tanto podemos escribirlo como:

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0 \text{ en } \mathcal{P}, \quad (2.23)$$

en donde $\vec{U} = \frac{d\vec{x}}{d\lambda}$ es un vector tangente a la curva (no necesariamente normalizado) y λ es un parámetro a lo largo de ella. Notemos que la primer igualdad es la definición de derivada de una función (en este caso V^α) a lo largo de la curva, la segunda parte se obtiene por el hecho que $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ en \mathcal{P} para estas coordenadas y la tercera expresión es un invariante y por lo tanto tiene validez en cualquier base, por lo que podemos tomarla como la definición del transporte paralelo de \vec{V} a lo largo de \vec{U} .

$$U^\beta V^\alpha{}_{;\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\lambda} \vec{V} = \nabla_{\vec{U}} \vec{V} = 0. \quad (2.24)$$

Recordando que en la geometría de Eculides dos líneas rectas que son paralelas lo seguirán siendo aún se extiendan al infinito, es decir, sobre una recta la tangente en un punto es siempre paralela a la tangente de cualquier otro punto. De hecho, la línea recta es la única curva en el espacio Euclidiano cuyo vector tangente se transporta de forma paralela a lo largo de ella. En un espacio curvo podemos dibujar líneas que sean “lo más rectas posibles de manera local” empleando el transporte paralelo de un vector tangente, éstas son las llamadas *geodésicas*

$$\vec{U} \text{ es tangente a una geodésica} \Leftrightarrow \nabla_{\vec{U}} \vec{U} = 0. \quad (2.25)$$

Esto significa

$$U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} = U^\beta U^\alpha{}_{;\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta} U^\mu U^\beta = 0, \quad (2.26)$$

y podemos notar que en sistema que es localmente inercial dichas líneas son rectas. Para hablar del tensor de curvatura, vamos a imaginar en nuestra variedad una superficie cerrada muy pequeña cuyos lados son las coordenadas $x^1 = a$, $x^1 = a + \delta a$, $x^2 = b$ y $x^2 = b + \delta b$ y tomamos un vector \vec{V} que es transportado de forma paralela a lo largo de dicha superficie. Por la ley del transporte paralelo $\nabla_{\vec{e}_1} \vec{V} = 0$, a lo largo de cualquiera de los lados tenemos

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^1} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu 1} V^\mu, \quad (2.27)$$

y después de una serie de pasos algebraicos [4], escribimos el cambio neto de V^α como

$$\delta V^\alpha = \delta a \delta b [\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma,\lambda} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\lambda,\sigma} + \Gamma^\alpha{}_{\nu\lambda} \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma} \Gamma^\nu{}_{\mu\lambda}] V^\mu. \quad (2.28)$$

CAPÍTULO 2. RELATIVIDAD GENERAL

Esto significa que δV^α depende de manera lineal de $\delta a \vec{e}_\alpha$, $\delta b \vec{e}_\beta$ y de $\tilde{\omega}^\alpha$, que es la base de las 1-formas que entregan δV^α del vector \vec{V} . Si definimos

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\sigma\mu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\sigma\nu} \Gamma^\sigma{}_{\beta\mu}, \quad (2.29)$$

$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ debe ser un tensor de rango $\binom{1}{3}$, el cual al ser evaluado con los argumentos $\tilde{\omega}^\alpha$, \vec{V} , $\delta a \vec{e}_\mu$, $\delta b \vec{e}_\nu$, nos entrega δV^α . Este tensor es llamado *Tensor de curvatura de Riemann* \mathbf{R} y analizando sus componentes en el punto \mathcal{P} en el sistema (2.19), tenemos que $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ en \mathcal{P} , pero de la ecuación (2.21)

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}), \quad (2.30)$$

y dado que las segundas derivadas de $g_{\alpha\beta}$ son distintas de cero, tenemos que en \mathcal{P}

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\beta,\nu\mu} + g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu} - g_{\sigma\beta,\mu\nu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu}). \quad (2.31)$$

Usando la simetría de $g_{\alpha\beta}$ y el hecho que $g_{\alpha\beta,\mu\nu} = g_{\alpha\beta,\nu\mu}$, notamos que

$$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\sigma\nu,\beta\mu} - g_{\sigma\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\sigma\nu} - g_{\beta\nu,\sigma\mu}), \quad (2.32)$$

de donde

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \equiv g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu} - g_{\alpha\mu,\beta\nu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu}), \quad (2.33)$$

y podemos verificar las identidades

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por lo tanto $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ es antisimétrico en el primer y segundo par de índices y es simétrico si cambiamos los dos pares. Dado que (2.34) son ecuaciones tensoriales válidas para un sistema de referencia, deben ser válidas para cualquier otro a diferencia de (2.32) que contine derivadas parciales y no derivadas covariantes. Finalmente vemos que sólo para variedades planas $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = 0$.

Una de las principales aplicaciones del tensor de curvatura es cuando se examinan las consecuencias de aplicar dos veces la derivada covariante a un campo vectorial \vec{V}

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = \nabla_\alpha (V^\mu{}_{;\beta}) = (V^\mu{}_{;\beta})_{;\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\sigma\alpha} V^\sigma{}_{;\beta} - \Gamma^\sigma{}_{\beta\alpha} V^\mu{}_{;\sigma}. \quad (2.35)$$

Recordemos que por definición en el sistema coordenado de \mathcal{P} todas las Γ 's son iguales a cero, pero como veremos más adelante las derivadas parciales no necesariamente lo serán. Es decir, en este sistema tenemos

$$\nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu = V^\mu{}_{;\beta\alpha} + \Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} V^\nu, \quad (2.36)$$

y si intercambiamos α y β :

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = V^\mu{}_{,\alpha\beta} + \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta} V^\nu. \quad (2.37)$$

Si arreglamos las ecuaciones anteriores de forma que podamos factorizar términos, llegamos a una forma conocida como el conmutador de los operadores de derivadas covariantes ∇_α y ∇_β . Dado que $V^\mu{}_{,\alpha\beta} = V^\mu{}_{,\beta\alpha}$ tenemos

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu \equiv \nabla_\alpha \nabla_\beta V^\mu - \nabla_\beta \nabla_\alpha V^\mu = (\Gamma^\mu{}_{\nu\beta,\alpha} - \Gamma^\mu{}_{\nu\alpha,\beta}) V^\nu, \quad (2.38)$$

y comparando con (2.29), vemos que en \mathcal{P}

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] V^\mu = R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} V^\nu, \quad (2.39)$$

la cual es una relación tensorial válida en todos los sistemas de coordenadas.

2.5. Identidades de Bianchi: Tensor de Ricci y de Einstein

Derivando (4.45) con respecto a x^λ tenemos

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2} (g_{\alpha\nu,\beta\mu\lambda} - g_{\alpha\mu,\beta\nu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda}). \quad (2.40)$$

Usando la simetría de $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ además del hecho que las derivadas parciales también conmutan, podemos mostrar que

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = 0, \quad (2.41)$$

y ya que en nuestras coordenadas $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} = 0$, la ecuación anterior es equivalente a

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (2.42)$$

Esta ecuación es conocida como *identidad de Bianchi* y será muy importante para nuestro trabajo. Antes de estudiar las consecuencias que trae vamos a definir el *tensor de Ricci* como la contracción del primer y tercer índice del Tensor de Riemman

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^\mu{}_{\alpha\mu\beta} = R_{\beta\alpha}. \quad (2.43)$$

De forma similar podemos definir el *escalar de Ricci* como

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}, \quad (2.44)$$

y aplicando la contracción de Ricci a la identidad de Bianchi obtenemos

$$g^{\alpha\mu} [R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}] = 0, \quad (2.45)$$

o

$$R_{\beta\nu;\lambda} + (-R_{\beta\lambda;\nu}) + R^\mu{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (2.46)$$

CAPÍTULO 2. RELATIVIDAD GENERAL

Para llegar a este resultado necesitamos tomar en cuenta dos cosas. La primera es, dado que $g_{\alpha\beta;\beta} = 0$ para cualquier base, y como $g^{\alpha\mu}$ es función únicamente de $g_{\alpha\beta}$, tenemos

$$g^{\alpha\beta}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.47)$$

La segunda es

$$g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} = -g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\lambda;\nu} = -R_{\beta\lambda;\mu\nu}, \quad (2.48)$$

de acuerdo con el segundo término de la ecuación (2.46), el cual es llamado la contracción de la identidad de Bianchi. Una ecuación que nos puede ser más útil es obtenida contrayendo de nuevo los índices β y ν

$$g^{\beta\nu} [R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu}] = 0, \quad (2.49)$$

o

$$R_{;\lambda} - R^{\mu}{}_{\lambda;\mu} + (-R^{\mu}{}_{\lambda;\mu}) = 0 \quad (2.50)$$

De nuevo usamos la simetría de \mathbf{R} para obtener el signo correcto del último término. Hay que notar que dado que R es un escalar, $R_{;\lambda} = R_{,\lambda}$ en todas las coordenadas, por lo tanto podemos reescribir (2.50) de la forma

$$(2R^{\mu}{}_{\lambda} - \delta^{\mu}{}_{\lambda} R)_{;\mu} = 0, \quad (2.51)$$

estas son las identidades de Bianchi dos veces contraídas. Definiendo al tensor simétrico

$$G^{\alpha\beta} \equiv R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \quad (2.52)$$

podemos ver que (2.50) es equivalente a

$$G^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (2.53)$$

en donde $G^{\alpha\beta}$ es llamado el *tensor de Einstein*.

2.6. Ecuaciones de campo de Einstein

Para un cuerpo de masa m y simetría esférica en mecánica Newtoniana, se tiene que su potencial gravitacional satisface

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (2.54)$$

en donde ρ es la densidad de masa y G la constante gravitacional, así que la solución es

$$\phi = -\frac{Gm}{r}. \quad (2.55)$$

La fuente de campo gravitacional viene dada por la densidad de masa, así que en nuestra concepción relativista la fuente de campo debe estar relacionada con ella. Una generalización es la energía total, la cual incluye a la masa en reposo, y como en

el SRMC del fluido hemos expresado la densidad de energía total por ρ , podríamos usarla como fuente del campo gravitacional relativista. Esto no es eficaz ya que ρ es la densidad de energía medida por un observador, mientras que para otros observadores la densidad de energía viene dada por la componente T^{00} en sus sistemas de referencia, así que debemos rechazar a ρ ya que proporcionaría a un observador preferente. Una teoría invariante puede evitar que eso suceda usando al tensor de energía-momento como fuente de campo gravitacional. La generalización de (2.54) para el caso relativista debe tener la forma

$$\mathbf{O}(\mathbf{g}) = k \mathbf{T}, \quad (2.56)$$

donde k es una constante aún no determinada y \mathbf{O} es un operador diferencial de segundo orden que actúa sobre el tensor métrico \mathbf{g} , el cual es una generalización de ϕ . En este caso tenemos 10 ecuaciones diferenciales acopladas, y por analogía con (2.54) debemos buscar un operador \mathbf{O} que entregue un tensor \mathbf{T} de rango $\binom{2}{0}$. En otras palabras $O^{\alpha\beta}$ deben ser las componentes de un tensor de rango $\binom{2}{0}$ y combinaciones de $g_{\mu\nu, \lambda\sigma}$, $g_{\mu\nu, \lambda}$ y $g_{\mu\nu}$. Ya hemos mencionado como el tensor $R^{\alpha\beta}$ satisface esta condición. De hecho, cualquier tensor de la forma

$$O^{\alpha\beta}(g) = R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R + \Lambda g^{\alpha\beta}, \quad (2.57)$$

la satisface si μ y Λ son constantes. Para encontrar el valor de μ vamos a usar el hecho de que la conservación de energía y momento se debe cumplir de manera local, es decir

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (2.58)$$

y esta ecuación implica

$$O^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (2.59)$$

Si recordamos que $g^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$, podemos mostrar que a partir de (2.57)

$$(R^{\alpha\beta} + \mu g^{\alpha\beta} R)_{;\beta} = 0, \quad (2.60)$$

y comparando esta ecuación con (2.52) vemos que debemos tener $\mu = -1/2$ si queremos que (2.60) sea una identidad para una métrica arbitraria. Haciendo un cambio de variable llegamos a la ecuación

$$G^{\alpha\beta} + \Lambda g^{\alpha\beta} = k T^{\alpha\beta}, \quad (2.61)$$

con las constantes Λ y k que aún no hemos determinado. Estas son llamadas las *ecuaciones de campo de Einstein*, y aunque se han propuesto muchas teorías después que Einstein publicara sus ecuaciones y están diseñadas para coincidir con las predicciones para el caso del sistema solar (límites de campo débil), debemos mencionar que todas presentan ecuaciones más complicadas. Como simple curiosidad me gustaría mencionar que las ecuaciones que hemos escrito fueron derivadas de forma independiente

CAPÍTULO 2. RELATIVIDAD GENERAL

por el matemático alemán David Hilbert, sin embargo como Einstein fue quien las empleó para describir el perihelio de Mercurio y la deflexión de la luz al pasar cerca del Sol, se acostumbra usar únicamente su apellido.

El símbolo Λ es llamado constante cosmológica y originalmente no se encontraba presente en las ecuaciones de campo, fue introducida por Einstein poco después con tal de obtener soluciones cosmológicas estáticas para el comportamiento del Universo a gran escala. Observaciones posteriores mostraron que el Universo se encuentra en expansión e hicieron que la constante desapareciera de las ecuaciones y Einstein se retractara por haberla incluido años atrás. Vamos a retomar nuestra discusión de la constante Λ en el capítulo de cosmología, así que por el momento tomaremos su valor igual a cero. El valor de $k = 8\pi G$ es obtenido si exigimos que las ecuaciones de Einstein predican correctamente el comportamiento de los planetas en el sistema solar. Este es el límite Newtoniano en el cual esperamos que las predicciones de la relatividad general se encuentren de acuerdo con la teoría de Newton. En notación de componentes y con $\Lambda = 0$ y $k = 8\pi G$, las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$G^{\alpha\beta} = 8\pi G T^{\alpha\beta}. \quad (2.62)$$

Capítulo 3

Cosmología

La cosmología es la rama de la física que estudia el origen, la evolución y el destino del Universo utilizando la teoría general de la relatividad y la ley de Hubble. La primera nos ayuda a entender como está formado el espacio-tiempo, además que nos proporciona el primer modelo matemático de éste e introduce el principio cosmológico, el cual nos da las propiedades de homogeneidad e isotropía. Por otro lado, la segunda herramienta nos dice que vivimos en un Universo que no es estático, además de confirmar las soluciones encontradas por Alexander Friedmann, las cuales mostraban un Universo en expansión. Por desgracia, de manera general en cosmología es muy difícil comprobar teorías apoyándose en datos observacionales, así que una buena manera de hacer nuestra introducción a este tipo de problemas es por medio de conjeturas filosóficas. Las observaciones pueden ayudar a confirmar nuestras ideas, pero desafortunadamente la mayoría de las veces no se tienen los datos necesarios para comprobar si estas son correctas o no.

La forma actual para entender la evolución del Universo está basada en el modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) y se trata de una teoría tan satisfactoria que es conocida como el modelo estándar de la cosmología. Se tiene evidencia que sustenta su validez cuando extendemos las conjeturas a los primeros instantes después de la nucleosíntesis (aproximadamente 1 segundo después de la explosión), a la vez que suposiciones modernas basadas en teorías de interacciones fundamentales nos permiten hacer especulaciones a partir de los primeros 10^{-47} segundos en donde se cree que el Universo era dominado por fuerzas gravitacionales con características cuánticas [5]. Posteriormente tenemos etapas como la inflación (de la que hablaremos más adelante), así como también la nucleosíntesis, la recombinación y el proceso de formación de estructuras, los cuales quedan fuera del análisis de esta tesis.

3.1. Homogeneidad e Isotropía

Algo aceptado desde tiempos de Copérnico es que no ocupamos un lugar privilegiado en el Universo, si estuviéramos localizados en otra región observaríamos algo muy similar a lo que podemos ver en nuestra posición, por lo tanto parece natural aceptar que el Universo es homogéneo e isotrópico, es decir la composición de éste es la misma en cualquier punto y no existe una dirección privilegiada en el espacio al momento de realizar observaciones. De manera más formal decimos que existe un número infinito de hipersuperficies de 3-dimensiones que folian todo el espacio-tiempo, una para cada τ fijo y tienen la propiedad que sobre cada uno de ellos los valores de ρ y p son constantes. Para todo evento sobre cada una de éstas hipersuperficies existe un sistema de Lorentz con el que coincide de manera local, y debe cumplir con que el cuadvivector de la velocidad del observador sea perpendicular a la hipersuperficie, es decir, que no exista una proyección privilegiada sobre ningún vector de la superficie (fig 3.1). Estas ideas han sido plenamente confirmadas por observaciones astronómicas, ya que mientras las observaciones cercanas muestran conglomerados de materia en forma de estrellas, galaxias, cúmulos, etc, cuando hablamos de regiones mayores a 300 Mpc ¹, las inhomogeneidades desaparecen dejando ver una distribución más uniforme.

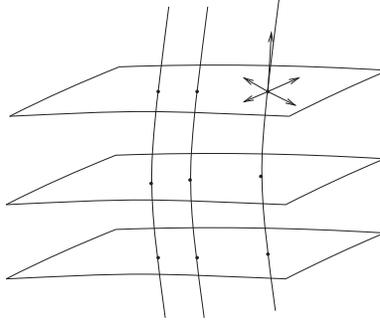


Figura 3.1: Las hipersuperficies Σ_τ de homogeneidad que folian el espacio-tiempo son ortogonales a las líneas de mundo de observadores isotrópicos. Esto nos asegura que no existen direcciones privilegiadas sobre la hipersuperficie.

La idea de un Universo homogéneo e isotrópico proviene de los primeros trabajos de Einstein, quien hizo la suposición basándose en conjeturas teóricas a fin de simplificar el análisis matemático de las soluciones. Actualmente la mejor evidencia en favor de la isotropía del Universo observable viene dada por la uniformidad de la temperatura de la Radiación Cómica de Fondo (CMBR por sus siglas en inglés), la cual es un “campo” que permea todo el Universo mostrando una temperatura de alrededor de $3K$, aunque se han observado dipolos de anisotropía los cuales muestra una diferencia de temperaturas de apenas $10^{-4} K$. Vamos a mencionar que las densidades de inhomogeneidades primitivas necesarias para iniciar la formación de estructuras estelares son el resultado

¹1 Mpc = 10^6 pcs, con 1 pc = 3,26 años luz, y un año luz = $9,4x10^{15}$ m

de las fluctuaciones de temperatura en el CMBR, así que las anisotropías del CMBR proveen una prueba importante para las teorías de formación de estructuras estelares. La evidencia directa de la homogeneidad en la distribución de galaxias es más sutil, aunque el conteo de galaxias ha aportado evidencias favorables su interpretación no es muy directa. En otras palabras, dado que la luz es sólo una pista para hallar objetos masivos, dichos conteos únicamente nos permiten determinar como está distribuida la luz (por ejemplos galaxias brillantes) y no la materia en general.

3.2. Modelo de Robertson-Walker

La métrica de Friedmann-Robertson-Walker o modelo FRW, es una solución exacta de las ecuaciones de campo de Einstein de la relatividad general que describe un Universo en expansión o contracción, homogéneo e isotrópico. Si adoptamos coordenadas comóviles, podemos idealizar a cada galaxia de tal forma que no posea velocidades aleatorias y podemos localizarla por un conjunto de coordenadas x^i . Veamos ahora que la métrica general que cumple estas condiciones es [6]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right), \quad (3.1)$$

en donde (t, r, θ, ϕ) son las coordenadas (a las que nos referiamos como comóviles), $a(t)$ es el factor de escala y con la normalización apropiada de coordenadas, k puede tomar los valores de 0, 1 ó -1 para espacios de curvatura nula, positiva y negativa respectivamente y la coordenada temporal en (3.1) es el tiempo propio medido por un observador que se encuentre en reposo al respecto de la hipersuperficie $(r, \theta, \phi) = cte$.

Vamos a analizar los casos resultantes para los diferentes universos generados para distintos valores de k . Comenzamos con $k = 0$, para cualquier tiempo t_0 el elemento de línea viene dado por

$$dl^2 = d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2, \quad (3.2)$$

con $\tilde{r} = a(t_0)r$ y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Esta es la métrica de un espacio Euclidiano y se conoce con el nombre de Universo de Robertson-Walker plano. En este caso las coordenadas corren de $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\phi \in (0, 2\pi)$ y su volumen es infinito.

Para el caso $k = 1$, vamos a definir una nueva coordenada $\chi(r)$ tal que $d\chi^2 = \frac{dr^2}{1-r^2}$, esto implica que $r = \sin\chi$ y el elemento de línea para $t = t_0$ está dado por

$$dl^2 = R^2(t_0) [d\chi^2 + \sin^2\chi d\Omega^2]. \quad (3.3)$$

Este modelo es llamado cerrado o de Robertson-Walker esférico y para este caso las coordenadas son $\chi \in (0, \pi)$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\phi \in (0, 2\pi)$. Podemos imaginar que las hipersuperficies en este caso vienen dadas por un conjunto de 3-esferas de volumen finito.

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA

Para finalizar tomamos $k = -1$ y con una transformación de coordenadas similar al caso anterior llegamos a una métrica de la forma

$$dl^2 = R^2(t_0) [d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2]. \quad (3.4)$$

Este modelo es llamado abierto, o de Robertson-Walker hiperbólico con $\chi \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, \pi)$ y $\phi \in (0, 2\pi)$. Además de poseer un volumen infinito, mientras la coordenada radial propia χ crece a partir del origen, las circunferencias de esferas centradas en el origen crecen de la forma $\sinh \chi$, y dado que $\sinh \chi > \chi$, para toda $\chi > 0$ se tiene que todas las circunferencias aumentan de forma más rápida que en el universo plano.

3.3. Dinámica de un Universo homogéneo e isotrópico

Para obtener predicciones acerca de la dinámica de evolución del Universo vamos a sustituir la métrica de FRW en las ecuaciones de Einstein, siendo el primer paso describir el contenido de materia en términos del tensor de energía-momento $T_{\alpha\beta}$. Dado que las velocidades aleatorias de las galaxias son muy pequeñas, podemos tomar al polvo como primera opción para describir al Universo actual, pero debido a que en el pasado la radiación dominaba sobre la materia, vamos a tomar al tensor de energía-momento de un fluido de la forma

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p(g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta), \quad (3.5)$$

e igualando $8\pi G T_{\alpha\beta}$ con el término $G_{\alpha\beta}$ obtenemos 10 ecuaciones que corresponden a 10 componentes del tensor simétrico de dos índices y podemos observar que, de acuerdo a las simetrías del espacio-tiempo sólo existirán dos ecuaciones independientes para este caso. Las ecuaciones de Einstein para las componentes de la diagonal son

$$\begin{aligned} G_{\tau\tau} &= 8\pi G T_{\tau\tau} = 8\pi G \rho, \\ G_{**} &= 8\pi G T_{**} = 8\pi G p, \end{aligned} \quad (3.6)$$

en donde $G_{\tau\tau} = G_{ab} u^a u^b$, $G_{**} = G_{ab} s^a s^b$ y s^a es un vector tangente unitario a la hipersuperficie de homogeneidad, por ejemplo podemos tomar $s^a = (0, 1, 0, 0)$ y $u^a = (1, 0, 0, 0)$. Por simplicidad vamos a realizar los cálculos en el caso $k = 0$, aunque más tarde se escribirán las soluciones para $k = 1$ y $k = -1$. Los componentes de los símbolos de Christoffel para el caso de una geometría espacial plana con métrica $ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ vienen dados por

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx}^\tau &= \Gamma_{yy}^\tau = \Gamma_{zz}^\tau = a\dot{a}, \\ \Gamma_{x\tau}^x &= \Gamma_{\tau x}^x = \Gamma_{y\tau}^y = \Gamma_{\tau y}^y = \Gamma_{z\tau}^z = \Gamma_{\tau z}^z = \frac{\dot{a}}{a}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

y $\dot{a} = da/d\tau$. Ahora, las componentes independientes del tensor de Ricci son

$$R_{\tau\tau} = -3\dot{a}/a, \quad \text{y} \quad R_{**} = a^{-2} R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2}, \quad (3.8)$$

y como tenemos

$$R = -R_{\tau\tau} + 3R_{**} = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad (3.9)$$

las ecuaciones de (3.6) toman la forma

$$G_{**} = R_{**} - \frac{1}{2}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi Gp \quad (3.10)$$

$$G_{\tau\tau} = R_{\tau\tau} + \frac{1}{2}R = 3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho. \quad (3.11)$$

Usando la primera ecuación podemos reescribir la segunda como

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p), \quad (3.12)$$

y repitiendo los cálculos para la geometría esférica e hiperbólica, obtenemos las ecuaciones generales de evolución para una cosmología homogénea e isotrópica

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi G\rho - 3\frac{k}{a^2}, \quad (3.13)$$

$$3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p). \quad (3.14)$$

Las soluciones exactas para el caso del polvo ($p = 0$) y la radiación ($p = \rho/3$) se muestran en la (fig. 3.2).

La primera conclusión sorprendente es que el Universo no puede ser estático tomando $\rho > 0$ y $p \geq 0$. Esta conclusión se obtiene de (3.14), la cual nos dice que $\ddot{a} < 0$ y por lo tanto el Universo debe encontrarse en expansión ($\dot{a} > 0$) o en contracción ($\dot{a} < 0$) (con la posible excepción de que en cierto instante cambia de expansión a contracción). Por la naturaleza misma de la expansión, la distancia entre observadores isotrópicos (en particular entre galáxias) cambia con el tiempo aunque no existe un origen preferido. De hecho, si la distancia entre dos observadores al tiempo τ es R

$$R(\tau) = a(\tau) \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (3.15)$$

la razón de cambio de R viene dada por

$$v \equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{a} \frac{da}{d\tau} = H R, \quad (3.16)$$

en donde el parámetro $H(\tau) = \dot{a}/a$ es llamado *constante de Hubble* (la cual realmente no es una constante), mientras la ecuación anterior es conocida como *ley de Hubble*. Nótese que v puede ser mayor que la velocidad de la luz si el parámetro R es suficientemente grande, y esto no contradice el principio de la relatividad especial.

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA

Además de que el Universo se encuentra en expansión $\dot{a} > 0$, sabemos por (3.14) que $\ddot{a} < 0$, es decir, el Universo debe haber estado expandiéndose más rápido en el pasado. Si el Universo hubiera crecido siempre de la misma forma como lo hace en la actualidad, al tiempo $t = a/\dot{a} = H^{-1}$ se hubiera tenido que $a = 0$, pero como la velocidad en el pasado era mayor, se necesita un tiempo menor para llegar a un estado singular en donde la distancia entre cualesquiera dos puntos era cero y la densidad de materia y la curvatura eran infinitas. A este estado se le conoce con el nombre de *Big Bang* y podemos pensar que en algún momento sucedió una “explosión” de materia concentrada en un punto. Estrictamente esto no tiene sentido ya que no podemos conocer el estado existente antes del *Big Bang*, no hay forma de extender a la variedad espacio-temporal y a la métrica en ese estado singular.

Antes de mencionar las predicciones de la relatividad general para la evolución del Universo, vamos a continuar nuestro análisis obteniendo las ecuaciones de evolución de la densidad de masa. Tomamos la derivada covariante de (3.5)

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)\frac{\dot{a}}{a} = 0, \quad (3.17)$$

así que para el caso del polvo ($p = 0$) tenemos que

$$\rho a^3 = cte, \quad (3.18)$$

expresa la conservación de masa en reposo, mientras que para la radiación ($p = \rho/3$)

$$\rho a^4 = cte, \quad (3.19)$$

y en este caso la densidad de energía disminuye más rápido que en el caso del polvo debido a la expansión del Universo. Comparando (3.18) y (3.19) podemos ver que, aunque el contenido de radiación presente en el Universo puede ser despreciado, su contribución en el pasado debió dominar sobre la materia ordinaria.

Vamos ahora a ver las características cualitativas del Universo en expansión. Si $k = 0$ ó -1 , la ecuación (3.13) muestra que \dot{a} nunca puede ser cero, entonces, si el Universo se está expandiendo actualmente debe de continuar expandiéndose para siempre. De hecho, para toda materia con $p \geq 0$, ρ debe disminuir mientras a aumenta tan rápido como a^{-3} , de esta forma $\rho a^2 \rightarrow 0$ mientras que $a \rightarrow \infty$. Por lo tanto, si $k = 0$, la “velocidad de expansión” $\dot{a} \rightarrow 0$ si $\tau \rightarrow \infty$, en tanto que con $k = -1$ tenemos que $\dot{a} \rightarrow 1$ si $\tau \rightarrow \infty$. Para el caso de $k = 1$ el Universo no puede expandirse para siempre ya que el primer término del lado derecho de (3.13) disminuye con a de manera más rápida que el segundo, y como el lado izquierdo de la ecuación debe ser positiva debe existir un valor crítico a_c , tal que $a \leq a_c$. Así que, si $k = 1$, entonces en un tiempo finito después del *Big Bang*, el Universo alcanzará un tamaño máximo dado por a_c y luego comenzará a encogerse. El mismo argumento que se uso para hablar del *Big Bang* puede ser usado ahora para exponer un final llamado *Big Crunch*.

Para finalizar esta sección vamos a resolver (3.13) y (3.14) de manera exacta para los casos del polvo y la radiación. La forma más eficaz de hacer esto es eliminando ρ usando (3.18) o (3.19) y sustituyendo en (3.13). Para el caso del polvo tenemos

$$\dot{a}^2 - \frac{C}{a} + k = 0, \quad (3.20)$$

donde $C = 8\pi G\rho a^3/3$, y para la radiación

$$\dot{a}^2 - \frac{C'}{a} + k = 0, \quad (3.21)$$

y $C' = 8\pi G\rho a^4/3$. Una vez que hemos dado (3.18) o (3.19), la ecuación (3.14) es redundante, así que la ecuación diferencial ordinaria (3.20) o (3.21) es todo lo que necesitamos. Las soluciones para $a(\tau)$ son fácilmente obtenidas por métodos elementales y son las mostradas en la figura 3.2 y como caso especial, vamos a mencionar que las soluciones para un Universo lleno de polvo con una geometría de 3-esfera fueron encontradas por el físico ruso Alexander Friedmann en 1922, por lo que en algunas referencias se les conoce como soluciones de Friedmann.

Geometría espacial	Tipo de materia	
	Polvo $p = 0$	Radiación $p = \frac{1}{3}\rho$
3-esfera, $k = 1$	$a = 1/2C(1 - \cos \eta)$ $\tau = 1/2C(\eta - \sin \eta)$	$a = \sqrt{C'} [1 - (1 - \tau/\sqrt{C'})^{1/2}]$
Plano, $k = 0$	$a = (9C/4)^{1/3} \tau^{2/3}$	$a = (4C')^{1/2} \tau^{1/2}$
Hiperboloide, $k = -1$	$a = 1/2C(\cosh \eta - 1)$ $\tau = 1/2C(\sinh \eta - \eta)$	$a = \sqrt{C'} [(1 + \tau/\sqrt{C'})^2 - 1]^{1/2}$

Figura 3.2: Cosmologías de Robertson-Walker para el polvo y la radiación

3.4. Inflación cósmica

La teoría del Big Bang es capaz de explicar de manera satisfactoria la evolución del Universo a partir de 10^{-2} s después de la “explosión” hasta el día de hoy. Sin embargo, a mediados de los 70’s surgieron algunas interrogantes que no pudieron ser explicadas, por lo que fue necesario introducir una teoría que resolviera dicha situación [7]. La idea de la inflación fue propuesta por el cosmólogo americano Alan Guth en 1981 y ha sido aceptada de manera general ya que aclara algunos de esos problemas. La inflación parte de que el Universo temprano pasó por una fase de expansión exponencial producida por una densidad de energía del vacío de presión negativa, esta expansión puede ser modelada por una constante cosmológica diferente de cero [8], y como consecuencia directa de esta expansión todo el universo observable podría haberse originado en una región pequeña conectada causalmente. La inflación es actualmente considerada como

CAPÍTULO 3. COSMOLOGÍA

parte del modelo estándar de la cosmología y la partícula elemental o campo escalar hipotético que se piensa es el responsable de la inflación es llamada inflatón.

El modelo de la inflación cósmica tiene el efecto importante de resolver problemas relacionados con las inhomogeneidades, anisotropía y la curvatura del espacio. Esto pone al Universo durante el periodo de la inflación en un estado muy simple en el que se encuentra completamente dominado por el campo inflatón y las únicas inhomogeneidades significativas son las débiles fluctuaciones cuánticas que ocurren en él. La inflación también diluye partículas pesadas exóticas como los monopolos magnéticos predichos por extensiones del modelo estándar de física de partículas. Si el Universo hubiera estado lo suficientemente caliente como para formar tales partículas antes del periodo de inflación, éstas no serían observadas en la naturaleza ya que serían tan raras que es probable que no haya ninguna en el Universo observable.

Si el Universo está en expansión, las densidades de energía decaen según se incrementa el volumen. Por ejemplo, la densidad de la materia fría ordinaria es inversamente proporcional al volumen, esto es, cuando las dimensiones lineales se duplican la densidad de energía cae en un factor de ocho. Por otro lado, la densidad de energía en la radiación cae de forma más rápida, cuando las dimensiones lineales se duplican la densidad de energía de radiación cae en un factor de dieciséis. Durante la inflación, la densidad de energía en el campo inflatón es casi constante, sin embargo, la densidad de energía de inhomogeneidades, curvatura, anisotropías y partículas exóticas está descendiendo, y ésto deja un Universo vacío, plano y simétrico que es llenado de radiación cuando la inflación termina. Un requisito clave es que la inflación tiene que continuar lo suficiente para producir el Universo observable actual a partir de un pequeño volumen, esto es necesario para asegurar que el Universo sea plano, homogéneo e isotrópico al hablar de escalas observables mayores.

El final de la inflación es conocido como recalentamiento porque la gran energía potencial se descompone en partículas y rellena el Universo con radiación. No se conoce cuanto duró la inflación, pero normalmente se piensa que fue extremadamente corta comparado con la edad del Universo; asumiendo que la escala de energía de inflación se encuentra entre 10^{15} y 10^{16} eV, como sugieren los modelos más simples, el periodo de inflación responsable del Universo observable fue de los 10^{-43} s (tiempo de Hubble) a los 10^{-35} s haciendo que el factor de escala aumentara en un factor de 10^{43} .

Campos escalares en cosmología

Como hemos visto en los capítulos anteriores, el contenido dinámico de la relatividad general se encuentra expresado en las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales describen de que manera están acopladas la materia y la curvatura del espacio-tiempo. Es conveniente tener una formulación Lagrangiana de la relatividad general ya que como se mostrará más adelante, las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser obtenidas a partir de un lagrangiano muy sencillo. Por otro lado, en relatividad general y de manera particular en cosmología existe un conjunto de problemas importantes que han encontrado respuesta satisfactoria mediante el uso de teorías alternativas llamadas tensor-escalar. Dada la relevancia de estas alternativas por lo antes mencionado, en este capítulo se mostrará como distintas teorías pueden generar la misma geometría dentro de modelo cosmológico de Robertson-Walker, así también el potencial que generan.

4.1. Campos escalares

Uno de los enigmas más fascinantes de la física actual, es el problema de la existencia de materia oscura en el Universo. La mayor parte de los astrónomos, cosmólogos y demás gente dedicada al estudio de la física de partículas están convencidos que al menos el 23% del total de la masa del Universo es algún tipo de materia no luminosa, comúnmente conocida como “materia oscura”. Sin embargo, a pesar de que la existencia de este tipo de materia fue sugerida hace más de 70 años, aún no se conoce su origen ni su composición, lo único que se sabe es que interactúa gravitacionalmente y es ésto lo que ha permitido detectarla a nivel galáctico.

Λ CDM (materia oscura fría con constante cosmológica) es el modelo más aceptado para la descripción del Universo ya que ha sido probado a niveles cosmológicos con gran éxito, por ejemplo en simulaciones numéricas sobre la formación de estructura de las galaxias y cúmulos de galaxias, en donde ambas están de acuerdo con la mayoría de las observaciones. También es capaz de explicar las fluctuaciones en las temperaturas de microKelvin de la radiación cósmica de fondo del Universo, problema que

había estado sin resolver hasta mediados de los años 80's. Estas dos predicciones son principalmente el gran éxito de éste modelo, sin embargo, aún existen inconsistencias con algunas observaciones a nivel galáctico en donde los resultados de las pruebas indican un desacuerdo con lo esperado por la teoría. Por ejemplo, en las simulaciones existe una sobreproducción de sub-estructuras galácticas (galaxias pequeñas, irregulares, enanas esferoidales) que giran alrededor de unidades mayores, lo cual no ha sido observado en el Universo. Además, los perfiles de densidad de los halos de materia oscura deberían exhibir un “pico” en el núcleo, en el cual la densidad aumenta abruptamente conforme uno se acerca al centro en contraste con las regiones centrales de varios sistemas observados. Varias ideas han sido planteadas para resolver las discrepancias aparentes, sin embargo tal problema aún sigue abierto a la comunidad científica.

Ahora bien, existe la posibilidad de que varias inconsistencias puedan resolverse suponiendo que la materia oscura es un campo escalar. Con el descubrimiento de la energía oscura muchos autores han relacionado estos campos escalares y su energía con grandes logros, por ejemplo, se ha propuesto que el campo escalar con un potencial escalar tipo “ $\cosh \phi$ ” es la materia oscura del Universo, llamando a esta hipótesis Materia Oscura de Campo Escalar (SFDM) [10]. Esta hipótesis tiene muy buenas características, por ejemplo, la SFDM no necesita una hipótesis extra para explicar la forma suave del perfil de densidad en el centro de las galaxias, debido a que los campos escalares tienen una presión intrínseca para evitar el colapso en el centro, al igual que también resuelve el problema de formación excesiva de estructuras alrededor de las galaxias.

Más aún, uno de los principales problemas que enfrenta la teoría de supercuerdas es que usualmente no existe una fenomenología guiada por los experimentos u observaciones, sólo está soportada en las matemáticas que presenta y en su consistencia interna. Para mucha gente, una forma de que la teoría de supercuerdas pueda hacer contacto con la fenomenología es a través de la cosmología [11]. En esta teoría existen 6 dimensiones extras formando una variedad interna compacta [12], en donde la forma se manifiesta en las cuatro dimensiones en la teoría efectiva a bajas energía mediante una serie de campos escalares (los cuales aún no han sido detectados en la naturaleza). En particular dos campos, el dilatón y el axión son los componentes más importantes de esta teoría, los cuales no se pueden fijar tan fácilmente; de hecho, uno debería encontrar una interpretación para estos campos o dar una explicación de por que no han sido vistos en la naturaleza y una posible interpretación es que existe un mecanismo para eliminarlos durante la evolución del Universo [13]. Por otra parte, una de las interpretaciones más populares para el dilatón es que puede ser la energía oscura del Universo, un campo “Quintessence” [14], y estas últimas interpretaciones han sido posibles debido a que después de una compactificación no trivial, el campo dilatónico adquiere un potencial efectivo que hace posible comparar los efectos del campo escalar.

4.2. Teorías tensor-escalar

Al hablar de relatividad general decimos que se trata de una teoría geométrica del espacio-tiempo ya que el elemento a partir del cual se construye todo el modelo es el tensor métrico, y ésta es la razón por la cual puede ser llamada teoría tensorial. Antes que esto se diera ya se habían postulado algunas teorías tipo escalares (Newton, Nordström y el mismo Einstein) en donde la gravedad es descrita por medio de un campo escalar, el cual tiene la propiedad de satisfacer algunas ecuaciones de campo (por ejemplo la ecuación de Poisson en la teoría de Newton). Como ejemplo, tomemos la primer teoría de campo (clásica) presentada por el físico finlandés Gunnar Nordström en 1912, en este caso el potencial Newtoniano es promovido a un escalar de Lorentz por lo que el operador divergencia es cambiado por el D'Alambertiano. La ecuación de campo viene dada por

$$\square\Phi = 4\pi G\rho, \quad (4.1)$$

pero debido a las muchas dificultades teóricas que surgieron rápidamente, un año después el mismo Nordström propuso ecuación diferente

$$\square\Phi = -4\pi GT, \quad (4.2)$$

en donde T es la traza del tensor de energía-momento. Las soluciones halladas por Nordström para esta ecuación son válidas para un espacio-tiempo localmente plano tipo Minkowski, y podemos escribir a la métrica como $g_{\mu\nu} = A\eta_{\mu\nu}$, con A un escalar que es función de la posición. Los puntos débiles se encontraron al momento de predecir la deflexión de la luz al pasar cerca de un objeto masivo, así como el cálculo la precesión de la órbita de Mercurio, cosas que tampoco describía la teoría de Newton. Lo interesante de esta teoría es que sirvió como guía para que Einstein presentara sus ecuaciones escalares (que fueron erróneas ya que no cumplían el principio de covarianza), pero le permitieron llegar finalmente a la teoría geométrica del espacio-tiempo.

A pesar de que la teoría de la relatividad general es llamada actualmente la teoría estándar de la gravitación, también han aparecido diversas teorías “alternativas”, y para nuestro caso vamos a poner especial atención en las teorías tipo “tensor-escalar” ya que aparecieron cuando la idea de las teorías escalares parecía haberse olvidado. Para comenzar, debemos tomar en cuenta que este tipo de teorías no se refiere únicamente a la idea de combinar ambos campos, por un lado se encuentran firmemente fundamentadas en la relatividad general y además vemos que el campo escalar aparece de una manera no trivial, a través de un término de acoplamiento. La idea de una teoría tipo tensor-escalar fue concebida por el físico alemán Pascual Jordan, quien comenzó por “encajar” una variedad diferenciable de 4 dimensiones a un espacio-tiempo curvo de 5 dimensiones [15], y demostró que con una restricción en la proyección de la geometría entre estos dos espacios era capaz de generar un campo escalar con geometría 4 dimensional. Esta idea predecía una constante gravitacional dependiente del tiempo [16], así que tiempo después presentó un trabajo en donde mostraba una posible conexión

entre su teoría y otras teorías de 5 dimensiones como la presentada por el matemático alemán Theodore Kaluza y el físico sueco Oskar Klein [17]. La forma general del lagrangiano de Jordan para un campo escalar en 4 dimensiones y en un espacio-tiempo curvo viene dada por

$$L_J = \sqrt{-g} \left[\phi_J \left(R - \omega_J \frac{1}{\phi_J^2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_J \partial_\nu \phi_J \right) + L_{materia}(\phi_J, \Psi) \right], \quad (4.3)$$

en donde $\phi_J(x)$ es el campo escalar de Jordan, γ y ω_J son constantes de acoplamiento y Ψ es algún campo adicional y el término $L_{materia}(\phi_J, \Psi)$ su lagrangiano. La introducción del término de acoplamiento $\phi_J R$ es la que marca el nacimiento de las teorías tensor-escalares.

4.3. Formulación Lagrangiana de la relatividad general

En física, un lagrangiano es una función a partir de la cual se pueden derivar la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema. Actualmente se considera el objeto más fundamental para describir un sistema físico, ya que permite derivar tanto las leyes de Newton como las ecuaciones de Maxwell en la teoría clásica, al mismo tiempo que determina las propiedades básicas del sistema en teoría cuántica de campos y en el caso de la relatividad general, permite obtener una formulación elegante de las ecuaciones de Einstein. Siendo éste el caso que nos interesa, vamos a analizarlo a detalle y podemos comenzar diciendo que para el caso de teoría de campos se utiliza una función llamada densidad Lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi^i, \nabla\Psi^i)$, la cual es función del(os) campo(s) y su(s) derivada(s). Definimos la acción como

$$S = \int_M \mathcal{L} d^4x, \quad (4.4)$$

con $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$, la cual debe ser invariante bajo transformación de coordenadas y por eso viene dada por el producto de la Lagrangiana y el determinante de la métrica. Puede ser demostrado que para el caso del campo gravitacional sólo existe un escalar que es lineal en las segundas derivadas, éste el escalar de curvatura R [9], y dado que la materia debe estar presente en L , añadimos el término correspondiente de la distribución de materia L^M (por ejemplo un campo electromagnético), por lo que el principio variacional después de una elección apropiada de constantes se escribe de la forma

$$\delta S = \delta \int_M (R + L^M) \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (4.5)$$

y vamos ahora a demostrar que las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser obtenidas a partir de (4.5). Dado que L^M y R varían de forma independiente y exigiendo que las variaciones de la métrica y de su primer derivada sean iguales a cero sobre la frontera de M , podemos escribir

$$\delta S = \int_M \left[R\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} + \delta(L^M\sqrt{-g}) \right] d^4x = 0. \quad (4.6)$$

CAPÍTULO 4. CAMPOS ESCALARES EN COSMOLOGÍA

Por las propiedades del tensor métrico y de los determinantes (ver apéndice A.1 para más detalles), tenemos

$$\delta\sqrt{-g} = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \quad \text{y} \quad \delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta}. \quad (4.7)$$

Usando (2.30) y (2.31) tenemos

$$\delta R_{\mu\nu} = -(\delta\Gamma_{\mu\alpha}^{\alpha})_{,\nu} + (\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha})_{,\alpha} - \delta(\Gamma_{\rho\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\rho} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}), \quad (4.8)$$

y se puede probar que (ver apéndice 5.1 para más detalles)

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} (g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} - g^{\mu\alpha}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\nu}) \right]_{,\alpha}, \quad (4.9)$$

por lo que la contribución a δS del término $\delta R_{\mu\nu}$ se reduce a un término en la frontera ∂M , igual a cero. Como L^M también depende de $g_{\mu\nu}$ y de $g_{\mu\nu,\gamma}$, tenemos que

$$\delta(\sqrt{-g}L^M) = \frac{\delta(\sqrt{-g}L^M)}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \left(\sqrt{-g} \frac{\partial L^M}{\partial g^{\mu\nu}_{,\alpha}} \delta g^{\mu\nu} \right)_{,\alpha}. \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.7), (4.9), y (4.10) en el principio variacional (4.6) y despreciando los términos en la frontera tenemos

$$\delta S = \int_M \left[\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L^M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right) \delta g^{\mu\nu} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0 \quad (4.11)$$

Por la independencia de las variaciones de $\delta g^{\mu\nu}$, la suma que está entre paréntesis debe ser igual a cero, con lo que llegamos a las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía-momento dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}L^M)}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (4.12)$$

Para observar la variación de la Lagrangiana con respecto a un campo escalar ϕ , vamos a tomar el ejemplo de la ecuación de Klein-Gordon. Tomando la lagrangiana

$$L_{KG} = g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi + m^2\phi^2, \quad (4.13)$$

por lo que la acción para el campo escalar viene dada por

$$S_{KG} = \int_M L_{KG} \sqrt{-g} d^4x = \int_M (g^{\mu\nu} \partial_{\mu}\phi \partial_{\nu}\phi + m^2\phi^2) \sqrt{-g} d^4x. \quad (4.14)$$

Haciendo la variación al respecto del campo (ver apéndice 5.1 para más detalles)

$$\begin{aligned}
 \delta S_{KG} &= \int_M \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (L\sqrt{-g}) \delta \phi + \frac{\partial}{\partial \phi_\mu} (L\sqrt{-g}) \delta \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \right] d^4x \\
 &= \int_M \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (L\sqrt{-g}) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \phi_\mu} (L\sqrt{-g}) \right) \right] \delta \phi d^4x \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{-g}} \int_M \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial}{\partial \phi_\mu} (L\sqrt{-g}) \delta \phi \right] d^4x. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

Por el principio de acción mínima $\delta S = 0$ y nuestro requerimiento de $\delta \phi = 0$, el término dentro de la primer integral es el único diferente de cero ya que la segunda integral se reduce a una divergencia la cual se cancela en la frontera. Por lo tanto, tenemos que las ecuaciones de campo son

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi = 0. \tag{4.16}$$

Vamos ahora a obtener el tensor de energía-momento del Lagrangiano de Klein-Gordon a partir de la variación con respecto a la métrica. En este caso

$$\begin{aligned}
 \delta S_{KG} &= \int_M \delta(L\sqrt{-g}) d^4x = \int_M \left[(\delta L) \sqrt{-g} + (\delta \sqrt{-g}) L \right] d^4x \\
 &= \int_M \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} + (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2) \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right) \right] d^4x \\
 &= \int_M \left[\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi) \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2 \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

y de nuevo como $\delta^{\mu\nu} = 0$ en la superficie de integración, tenemos que sustituyendo el término dentro de la integral en (4.11) obtenemos el tensor de energía-momento de Klein-Gordon

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2). \tag{4.18}$$

4.4. Campos escalares con acoplamiento mínimo

En [3] se describe un método que permite deducir la forma del potencial $V(\phi)$ del campo escalar a partir de un factor de escala a , el cual era introducido *ad hoc* para obtener el comportamiento del Universo observable. Esta forma de escoger el factor de escala también fue usado en los modelos inflacionarios caóticos de Linde [8], en donde aparece un campo escalar al que llaman “inflatón”, el cual no ha sido identificado todavía con ninguna partícula o campo conocido. Uno de los propósitos de este tipo de análisis es determinar el potencial que ofrece el mejor comportamiento en términos de las implicaciones cosmológicas. Escribimos el lagrangiano con acoplamiento mínimo

$$L = R + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + V(\phi), \tag{4.19}$$

y vamos a empezar recordando que el modelo de la inflación nos permite conocer la evolución cósmica desde el principio hasta el final de la inflación. Para tiempos diferentes son necesarias teorías diferentes, además que necesitamos tomar en cuenta las condiciones de continuidad y regularidad que aparecen en las “interfases”. Tomando la dinámica del universo de Robertson-Walker acoplado con un campo escalar (ϕ) y recordando que la 4-velocidad se escribe como u^α y el parámetro de Hubble es $H = \dot{a}/a = 1/3u^\alpha{}_{;\alpha}$, podemos tomar al campo escalar de la forma $\phi = \phi(t)$ y escribir al tensor de energía-momento de la forma del tensor de energía-momento para el fluido perfecto (1.13) con la densidad de energía y la presión del campo escalar como

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \equiv T + V, \quad (4.20)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \equiv T - V, \quad (4.21)$$

en donde la energía cinética T viene dada por $T \equiv \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$. La ecuación de conservación $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ será

$$\dot{\rho}_\phi + 3H[\rho_\phi + p_\phi] = 0. \quad (4.22)$$

Si tomamos la condición de que $\dot{\phi} \neq 0$, la ecuación (4.22) se reduce a la ecuación de Klein-Gordon en el espacio-tiempo de Robertson-Walker

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \partial V/\partial\phi = 0. \quad (4.23)$$

Por otra parte, el parámetro de densidad viene dado por

$$\Omega \equiv 8\pi G\rho/3H^2 = 8\pi G[T + V(\phi)]/3H^2, \quad (4.24)$$

y el índice γ es definido por la ecuación de estado del fluido perfecto

$$p = (\gamma - 1)\rho \Leftrightarrow \gamma = \frac{p + \rho}{\rho} = \frac{2T + 4/3\rho}{T + V + \rho}. \quad (4.25)$$

Vamos a continuar ahora escribiendo las ecuaciones de campo y de conservación para el modelo de Robertson-Walker

$$3H^2 + 3K = 8\pi G \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + \rho \right], \quad (4.26)$$

$$3\dot{H} + 3H^2 = 8\pi G \left[V(\phi) - \dot{\phi}^2 - \rho \right], \quad (4.27)$$

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (4.28)$$

además de (4.23), las cuales son función únicamente del tiempo cosmológico t , y en donde K es la parte espacial del escalar de curvatura:

$$K = k/a^2, \quad k = cte \Rightarrow \dot{K} = -2HK, \quad (4.29)$$

la cual está relacionada con el parámetro de densidad Ω por la ecuación de Freidmann (4.26)

$$K = H^2(\Omega - 1). \quad (4.30)$$

Es importante mencionar que el sistema de ecuaciones (4.26)-(4.28) y (4.23), en general sólo contienen tres ecuaciones independientes. Ahora bien, para obtener la dinámica deseada tomamos [2(4.20) + (4.21)]

$$V(\phi(t)) = (\dot{H} + 3H^2 + 2K)/8\pi G, \quad (4.31)$$

mientras que con (4.20) - (4.21)

$$\dot{\phi}^2(t) = (K - \dot{H})/4\pi G. \quad (4.32)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a (4.26) y (4.27), así que para continuar vamos a elegir un valor para K , a la vez que especificamos una función $a(t)$ con la condición de que el lado derecho de (4.32) positivo

$$\dot{H} \geq K, \quad (4.33)$$

podemos obtener $H = \dot{a}/a$ y \dot{H} eligiendo un valor para la condición inicial ϕ_0 . De esta forma la ecuación (4.32) nos da $\phi(t)$ e invirtiendo el resultado tenemos $t(\phi)$, y con la ayuda de (4.31) obtenemos finalmente $V(t) = V(t(\phi)) \Rightarrow V(\phi)$. De esta manera hemos hallado un potencial para el campo escalar que genera un comportamiento deseado para $a(t)$. Para terminar vemos que de (4.30)

$$\Omega = 1 + k/a^2 H^2 = 1 + k/\dot{a}^2, \quad (4.34)$$

y tenemos que γ viene dado por

$$\gamma = \frac{2(-\dot{H} + k)}{3(H^2 + K)}. \quad (4.35)$$

4.5. Acoplamiento no mínimo

Los modelos extendidos “Quintaessence” son aquellos en los cuales la teoría de la gravedad contiene un campo escalar acoplado de forma no mínima con la geometría y ésto es lo que marca la diferencia con el caso anterior en el cual las funciones de acoplamiento eran constantes [24]. Comenzamos el análisis para el caso general tomando en cuenta que la métrica en las coordenadas esféricas tiene la forma de Robertson-Walker y usando la acción con acoplamiento no mínimo a un campo escalar ϕ dada por [25]

$$S = \int [f(\phi)R + h(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi)] \sqrt{-g} d^4x, \quad (4.36)$$

CAPÍTULO 4. CAMPOS ESCALARES EN COSMOLOGÍA

con $f(\phi)$, $h(\phi)$ y $V(\phi)$ las funciones de acoplamiento y el potencial del campo escalar respectivamente. Realizando las variaciones con respecto a la métrica y al campo tenemos (ver Ap. 1 para más detalles)

$$fG_{\mu\nu} + f_{;\alpha}^{\alpha} g_{\mu\nu} - f_{;\mu;\nu} + h(\phi) \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [h(\phi) \phi^{,\alpha} \phi_{,\alpha} - V(\phi)] = 0, \quad (4.37)$$

$$Rf' + 2h(\phi) \phi^{;\mu}_{;\mu} + h'(\phi) \phi^{,\mu} \phi_{,\mu} - V'(\phi) = 0, \quad (4.38)$$

con

$$f^{;\mu}_{;\mu} = f'' \phi^{,\mu} \phi_{,\mu} + f' \phi^{;\mu}_{;\mu},$$

y (\prime) representa la derivada con respecto al campo ϕ .

Buscamos ahora las soluciones del sistema para la métrica de Robertson-Walker y gracias a las simetrías del problema el número de ecuaciones independientes se reduce a dos. A partir de ahora vamos a trabajar el caso en donde

$$f(\phi) = \xi \phi^2 \quad (4.39)$$

con $\xi = \text{cte}$, de acuerdo a la teoría modificada de Brans-Dicke [26], mientras que

$$\phi(t) = \alpha/a(t) \quad (4.40)$$

con $\alpha = \text{cte}$, se elige de modo que podamos recuperar el comportamiento físico esperado para el Universo con un factor de escala consistente con las siguientes suposiciones físicas

$$\lim_{t \rightarrow 0} a(t) = 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \infty. \quad (4.41)$$

De acuerdo a (3.8) las componentes del tensor de Ricci son

$$R_{\tau\tau} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{y} \quad R_{**} = a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k \quad \Rightarrow \quad R = 6 \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right), \quad (4.42)$$

así que llegamos a un sistema de ecuaciones con dos incógnitas $h(\phi)$ y $V(\phi)$ (para un factor de escala dado)

$$\begin{aligned} & \left[\dot{\phi}(t) a(t) - \ddot{\phi}(t) a^2(t) \right] f'(\phi) + 2f(\phi(t)) (\dot{a}(t))^2 + 2f(\phi(t)) k + \\ & + a^2(t) h(\phi(t)) (\dot{\phi}(t))^2 - 2f(\phi(t)) a(t) \ddot{a}(t) - a^2(t) f''(\phi(t)) \dot{\phi}(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

y

$$\begin{aligned} & \left[\ddot{\phi}(t) a^2(t) + 5\dot{\phi}(t) \dot{a}(t) a(t) \right] f'(\phi(t)) + 4f(\phi(t)) (\dot{a}(t))^2 + 4f(\phi(t)) k \\ & + a^2(t) f''(\phi(t)) (\dot{\phi}(t))^2 - a^2(t) V(\phi(t)) + 2f(\phi(t)) a(t) \ddot{a}(t) = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

De (4.43) podemos simplificarla y obtener

$$\alpha^2 \left[(h(t) - 6\xi) \dot{a}^2 + 2\xi k \right] = 0, \quad (4.45)$$

de donde despejamos $h(t)$

$$h(t) = \frac{6\dot{a}^2\xi - 2\xi k}{\dot{a}^2}, \quad (4.46)$$

y hallamos el valor del potencial

$$V(\phi) = \frac{4\xi k \phi^4}{\alpha^2}. \quad (4.47)$$

La forma de este potencial corresponde a un modelo conocido como gravedad inducida hallado por el físico ruso Andrei Sakharov en 1980 ([26]), y podemos ver que en el caso del Universo plano $h(\phi)$ viene dada por una constante, mientras que el potencial tiene un valor igual a cero. Lo valioso de este resultado es que la forma del factor de acoplamiento $h(\phi)$ y el potencial del campo $V(\phi)$ para éste caso son independientes de la forma en que se elija el factor de escala $a(t)$. Por otro lado, cuando tomamos los casos en que $k = \pm 1$, encontramos de (4.45) que los valores para el acoplamiento del campo con el término cinético vienen dados por

$$\begin{aligned} a(t) &= Ae^{wt}, & h(t) &= 2\xi \left(3 - \frac{k}{A^2 w^2 e^{2wt}} \right) \\ \Rightarrow h(\phi) &= 2\xi \left(3 - \frac{k \phi^2}{A^2 \alpha^2} \right) \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= A \sinh wt, & h(t) &= 2\xi \left(3 - \frac{k}{A^2 w^2 \cosh^2 wt} \right) \\ \Rightarrow h(\phi) &= 2\xi \left[3 - \frac{k \phi^2}{w^2 (A^2 \phi^2 + \alpha^2)} \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= At^n, & h(t) &= 2\xi \left(3 - \frac{k}{A^2 n^2 t^{2(n-1)}} \right) \\ \Rightarrow h(\phi) &= 2\xi \left[3 - \frac{k}{n^2 A^{2/n}} \left(\frac{\phi}{\alpha} \right)^{2(1-\frac{1}{n})} \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

y reescribiendo (4.42) en términos de (4.48), (4.49) y (4.50) obtenemos

$$\begin{aligned} i) R &= 6 \left(2w^2 + \frac{k}{A^2 e^{2wt}} \right) \\ ii) R &= 6 \left(-w^2 + w^2 \coth^2(wt) + \frac{k}{A^2 \sinh^2(wt)} \right) \\ iii) R &= 6 \left(\frac{2n^2 - n}{t^2} + \frac{k}{A^2 t^2} \right), \end{aligned} \quad (4.51)$$

las cuales están de acuerdo al comportamiento de la geometría en el caso de la inflación (*i*), mientras que para los casos (*ii*) y (*iii*) se tiene un valor infinito en el origen, el cual va disminuyendo según aumenta el tiempo cosmológico.

Conclusiones

Actualmente se cuenta con un número muy grande de observaciones astronómicas que nos dicen que no existe suficiente materia visible en el Universo para describir su comportamiento a gran escala. De igual forma, se sabe que las galáxias se están alejando unas de otras de forma acelerada lo cual no puede ser descrito por la relatividad general con constante cosmológica. Ambas situaciones pueden ser corregidas si introducimos dos tipos de entidades de carácter desconocido que no pueden ser observadas de manera directa: la materia oscura y energía oscura. La materia oscura es la responsable de la forma que presentan las curvas de rotación de las galaxias y también explica las homogeneidades en el CMBR, mientras que la energía oscura es una distribución de energía constante que llena todo el Universo con la propiedad de ser homogénea y poseer una presión negativa, la cual es responsable de la repulsión gravitacional que presenta.

Ahora bien, una posible explicación a la existencia de estos nuevos tipos de materia es que en lugar de ser partículas se trata de campos escalares “axión” y “dilatón”, los cuales todavía no han sido detectados en la naturaleza debido a las bajas densidades que presentan. Para trabajar este tipo de ideas se utiliza una teoría alternativa a la relatividad general, llamada teoría tensor-escalar, la cual nos permiten acoplar de manera no trivial la componente de la gravedad con un campo escalar al cual deseamos estudiar [15]. Es por esto que en este trabajo revisamos la formulación lagrangiana de la relatividad general, así como el caso del acoplamiento mínimo presentado por Ellis y Madsen [3], para el cual se escribe la forma de los potenciales hallado para diferentes factores de escala. Posteriormente se trabaja el caso del acoplamiento no mínimo en donde empleamos una acción general con tres funciones de acoplamiento, lo cual conduce a variaciones más generales que las halladas en la revisión bibliográfica de éste trabajo. De manera particular utilizando un factor de acoplamiento para la geometría y el campo de la forma $f(\phi) = \xi\phi^2$ de acuerdo al modelo modificado de Brans-Dicke, y un campo escalar del tipo $\phi(t) = \alpha/a(t)$ el cual se elige de forma que podamos recuperar el comportamiento esperado para la geometría en el Universo, es posible simplificar las ecuaciones y obtener un factor de acoplamiento con el término

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

cinético del tipo

$$h(\phi) = \frac{6\dot{a}^2\xi - 2\xi k}{\dot{a}^2}, \quad (5.1)$$

y finalmente la forma del potencial del campo escalar viene dada por

$$V(\phi) = \frac{4\xi k \phi^4}{\alpha^2}, \quad (5.2)$$

lo cual corresponde al modelo de gravedad inducida hallado por Andrei Sakharov en 1980 ([26]). Podemos ver que en el caso del Universo plano, $h(\phi)$ viene dada por una constante, mientras que el potencial tiene un valor igual a cero. Lo valioso de este resultado es que $h(\phi)$ y $V(\phi)$ son independientes de la forma que tome $a(t)$. Por otro lado, cuando tomamos $k \neq 0$ nos encontramos con soluciones que cumplen con las suposiciones que tenemos para la geometría del espacio-tiempo tanto para el periodo de inflación, así como también para la expansión del Universo para algunos factores de escala [3].

Conviene recordar que en todos los casos analizados en esta tesis se trabajó con un acoplamiento del tipo $f(\phi) = \xi\phi^2$, con ξ un escalar, así que una posible continuación para este trabajo sería tomar el caso en donde $\xi = \xi(\phi)$ de acuerdo a las teorías efectivas de supercuerdas. Esto dificulta enormemente las variaciones e integrales a resolver, por lo que sería de gran ayuda emplear métodos numéricos al momento de trabajar las diferentes ecuaciones que aparecen en el desarrollo del trabajo.

Apéndice 1

5.1. Principio variacional

En esta sección se mostrará como se realizan las variaciones correspondientes a la métrica y al campo escalar para un función Lagrangiana con acoplamiento no mínimo. La acción $S[g, \Phi]$ para el sistema del campo escalar conformalmente acoplado es:

$$S[g, \Phi] = \int_M [f(\Phi)R + h(\Phi) \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - V(\Phi)] \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.3)$$

y la variación con respecto al campo escalar Φ nos da:

$$\delta S = \int_M \sqrt{-g} \delta L dx^4 = \int_M \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} \delta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \right] \sqrt{-g} d^4x. \quad (5.4)$$

Puesto que $\delta \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\delta \Phi)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi \right) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} \right) \delta \Phi \right] \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_M \left[\frac{\partial L}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} \right) \right] \delta \Phi \sqrt{-g} d^4x + \int_M \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial \Phi_\mu} \delta \Phi \right) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_M [f'(\Phi)R + h'(\Phi) \partial^\mu \Phi \partial_\mu \Phi - V'(\Phi) - 2 \partial^\mu \partial_\mu \Phi] \sqrt{-g} \delta \Phi d^4x \\ &\quad + \int_M \frac{\partial}{\partial x^\mu} [2 h(\Phi) g^{\mu\tau} \partial_\tau \Phi] \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_M [(f'(\Phi)R + h'(\Phi) \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V'(\Phi)) - 2 h(\phi) \partial^\mu \partial_\mu \Phi] \delta \Phi \sqrt{-g} dx^4 + \\ &\quad [2 h(\Phi) g^{\mu\tau} \partial_\tau \Phi \delta \Phi] \Big|_{\partial M}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

así que por el principio de mínima acción, $\delta S = 0$, $\delta \Phi = 0$ en la superficie de M obtenemos finalmente:

$$2h(\phi) \partial^\mu \partial_\mu \Phi - [f'(\Phi)R + h'(\Phi) \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V'(\Phi)] = 0, \quad (5.7)$$

Ahora, aplicando la variación con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}$, tenemos

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_M \delta(L\sqrt{-g}) dx^4 = \int_M (\sqrt{-g} \delta L + L \delta\sqrt{-g}) d^4x \\
 &= \int_M [f(\Phi) (\delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) + h(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi \delta g^{\mu\nu}] \sqrt{-g} d^4x \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_M [f(\Phi) R + h(\Phi) \partial^\alpha \Phi \partial_\alpha \Phi - V(\Phi)] \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\
 &= \int_M \left[f(\Phi) (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R) + h(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} (h(\Phi) \partial^\alpha \Phi \partial_\alpha \Phi g_{\mu\nu} + V(\Phi)) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\
 &\quad + \int_M f(\Phi) g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x. \tag{5.8}
 \end{aligned}$$

Para finalizar la variación necesitamos determinar la forma del último término que aparece en la ecuación anterior, así que partiendo de la forma del tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\tau}^\tau - \Gamma_{\mu\tau,\nu}^\tau + \Gamma_{\tau\sigma}^\tau \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \Gamma_{\mu\tau}^\sigma, \tag{5.9}$$

la variación $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ nos conduce a:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[\delta \Gamma_{\mu\nu,\tau}^\tau - \delta \Gamma_{\mu\tau,\nu}^\tau + (\delta \Gamma_{\tau\sigma}^\tau) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{\tau\sigma}^\tau \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\tau) \Gamma_{\mu\tau}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \delta \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \right] \\
 &= \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[(\delta \Gamma_{\mu\nu}^\tau)_{,\tau} - (\delta \Gamma_{\mu\tau}^\tau)_{,\nu} + (\delta \Gamma_{\tau\sigma}^\tau) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \right. \\
 &\quad \left. + \Gamma_{\tau\sigma}^\tau \delta(\Gamma_{\mu\nu}^\sigma) - (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\tau) \Gamma_{\mu\tau}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \delta \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \right], \tag{5.10}
 \end{aligned}$$

y reexpresando los términos que contienen la derivada de la variación

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\tau)_{,\tau} - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\tau}^\tau)_{,\nu} - \\
 &\quad - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\tau} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\tau + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\nu} \delta \Gamma_{\mu\tau}^\tau + \\
 &\quad + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left[(\delta \Gamma_{\tau\sigma}^\tau) \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\tau\sigma}^\tau \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\tau) \Gamma_{\mu\tau}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\tau \delta \Gamma_{\mu\tau}^\sigma \right]. \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Agrupando términos

$$\begin{aligned}
 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \sqrt{-g} \left[g^{\mu\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\tau - (-g)^{-1/2} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu})_{,\sigma} - g^{\tau\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\mu - g^{\tau\mu} \Gamma_{\tau\sigma}^\nu \right. \\
 &\quad \left. + \delta^\nu_\sigma (-g)^{-1/2} (\sqrt{-g} g^{\mu\tau})_{,\tau} + \delta^\nu_\sigma g^{\tau\alpha} \Gamma_{\tau\alpha}^\mu \right] \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \\
 &\quad + (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\tau)_{,\tau} - (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\tau}^\tau)_{,\nu}. \tag{5.12}
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el calculo de $\delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ da como resultado

$$\begin{aligned}
 \delta \Gamma_{\mu\nu}^\tau &= \delta \left[\frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\delta g^{\sigma\tau}) (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) + \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} \delta (g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}), \tag{5.13}
 \end{aligned}$$

y del hecho de que $\delta(g_{\sigma\mu,\nu}) = (\delta g_{\sigma\mu})_{,\nu}$ y $\delta g^{\sigma\tau} = -g^{\sigma\gamma} g^{\alpha\tau} \delta g_{\alpha\gamma}$ obtenemos

$$\begin{aligned}
 \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau} &= -\frac{1}{2}g^{\sigma\gamma}g^{\alpha\tau}\delta g_{\alpha\gamma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) + \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}[(\delta g_{\sigma\mu})_{,\nu} + (\delta g_{\sigma\nu})_{,\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\sigma}] \\
 &= \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}[(\delta g_{\sigma\mu})_{,\nu} + (\delta g_{\sigma\nu})_{,\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{,\sigma} - 2\Gamma_{\mu\nu}^{\gamma}\delta g_{\sigma\gamma}].
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Ahora podemos tomar (5.12) y (5.14) para determinar la forma del último termino que aparece en (5.8). Para realizar, esto elegimos una carta coordenada (x^{μ}, U) en la que las primeras derivadas de la métrica se anulen en la vecindad U donde las coordenadas son definidas, i.e. $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = 0$, y esto nos permite simplificar considerablemente los cálculos. Respecto a esta carta coordenada tenemos

$$\begin{aligned}
 f(\Phi)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} &= f(\Phi)\left[(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau})_{,\tau} - (\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\tau}^{\tau})_{,\nu}\right] \\
 &= \left[f(\Phi)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}\right]_{,\tau} - \left[f(\Phi)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\tau}^{\tau}\right]_{,\nu} \\
 &\quad - f(\Phi)_{,\tau}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) + f(\Phi)_{,\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\tau}^{\tau}),
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

y los dos primeros términos que aparecen en esta ecuación se eliminarán al realizar la integración, así que no haremos ninguna manipulación sobre ellos y los denotaremos por A . Por otro lado, los dos últimos términos requieren de más trabajo, así que trabajando con ellos se tiene

$$\begin{aligned}
 f(\Phi)\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} - A &= f(\Phi)_{,\nu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\tau}^{\tau}) - f(\Phi)_{,\tau}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\tau}) \\
 &= \frac{1}{2}f'(\Phi)\Phi_{,\nu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\tau\sigma}[\partial_{\tau}(\delta g_{\sigma\mu}) + \partial_{\mu}(\delta g_{\sigma\tau}) - \partial_{\sigma}(\delta g_{\mu\tau})] \\
 &\quad - \frac{1}{2}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\tau\sigma}[\partial_{\nu}(\delta g_{\sigma\mu}) + \partial_{\mu}(\delta g_{\sigma\nu}) - \partial_{\sigma}(\delta g_{\mu\nu})] \\
 &= \frac{1}{2}f'(\Phi)\Phi_{,\nu}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\tau\sigma}[\partial_{\mu}(\delta g_{\sigma\tau})] \\
 &\quad - \frac{1}{2}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\tau\sigma}[2\partial_{\nu}(\delta g_{\sigma\mu}) - \partial_{\sigma}(\delta g_{\mu\nu})] \\
 &= f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\tau\sigma}[\partial_{\sigma}(\delta g_{\mu\nu}) - \partial_{\nu}(\delta g_{\sigma\mu})] \\
 &= g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}[\delta g_{\sigma\mu}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}) - \partial_{\nu}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\delta g_{\sigma\mu})] \\
 &\quad + g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}[\partial_{\sigma}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\delta g_{\mu\nu}) - \delta g_{\mu\nu}\partial_{\sigma}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau})] \\
 &= g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}[\delta g_{\sigma\mu}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}) - \partial_{\nu}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\delta g_{\sigma\mu})] \\
 &\quad + [\delta g_{\nu\mu}\partial_{\sigma}(f'(\Phi)\Phi_{,\tau}) - g_{\sigma\nu}\partial_{\nu}(f'(\Phi)\Phi_{,\tau})]\sqrt{-g}g^{\tau\nu}\delta g^{\mu\sigma} \\
 &= g^{\mu\nu}g^{\sigma\tau}[\partial_{\nu}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau}\delta g_{\mu\nu}) - \delta g_{\mu\nu}\partial_{\nu}(\sqrt{-g}f'(\Phi)\Phi_{,\tau})] \\
 &\quad + f''(\Phi)\partial_{\mu}\Phi\partial_{\nu}\Phi + f'(\Phi)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\Phi - g_{\mu\nu}[f''(\Phi)\partial^{\sigma}\Phi\partial_{\sigma}\Phi + f'(\Phi)\partial^{\sigma}\partial_{\sigma}\Phi]\sqrt{-g}\delta g^{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el resultado anterior en (5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M \left[f(\Phi) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + h(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} (h(\Phi) \partial^\sigma \Phi \partial_\sigma \Phi + V(\Phi)) \right] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} d^4x \\ &+ \int_M \left(g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} \left[\partial_\nu (\sqrt{-g} f'(\Phi) \Phi_{,\tau}) \delta g_{\mu\nu} \right] - \delta g_{\mu\nu} \partial_\nu (\sqrt{-g} f'(\Phi) \Phi_{,\tau}) \right) \\ &+ f''(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + f'(\Phi) \partial_\mu \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} [f''(\Phi) \partial^\sigma \Phi \partial_\sigma \Phi + f'(\Phi) \partial^\sigma \partial_\sigma \Phi] \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Aplicando el principio variacional los primeros dos términos de la segunda integral se cancelan, y escribiendo el resultado de forma covariante llegamos a

$$\begin{aligned} f(\Phi) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) + h(\Phi) \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [h(\Phi) \nabla^\sigma \Phi \nabla_\sigma \Phi - V(\Phi)] = \\ g_{\mu\nu} [f''(\Phi) \nabla^\sigma \Phi \nabla_\sigma \Phi + f'(\Phi) \nabla^\sigma \nabla_\sigma \Phi] - f''(\Phi) \nabla_\nu \Phi \nabla_\mu \Phi + f'(\Phi) \nabla_\nu \nabla_\mu \Phi. \quad (5.16) \end{aligned}$$

Apéndice 2

5.2. Expansión exponencial de Sitter

Vamos a considerar una expansión exponencial como es el caso de la inflación

$$a(t) = Ae^{\omega t} \quad A, \omega = \text{cts} > 0 \quad \Rightarrow \quad H = \omega \quad y \quad \dot{H} = 0, \quad (5.17)$$

de esta manera, (4.33) se satisface si

$$B^2 \equiv \frac{1}{4\pi G} (k/A^2) \geq 0, \quad (5.18)$$

lo cual se cumple de manera trivial para $k = 0$ y $k = 1$, pero no se satisface si $k = -1$. Tomando (4.31) y (4.32) tenemos

$$\dot{\phi}^2 = \frac{B^2}{e^{2\omega t}} \quad y \quad V = \frac{3\omega^2}{8\pi G} + \frac{B^2}{e^{2\omega t}}, \quad (5.19)$$

así que podemos hallar

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{B}{\omega} e^{-\omega t}, \quad \text{con } \phi_0 = \text{cte} \quad y \quad \Omega = 1 + \frac{4\pi G B^2}{\omega^2 e^{2\omega t}}. \quad (5.20)$$

Si nos restringimos al caso $B^2 > 0$, encontramos que

$$t = \frac{1}{\omega} \log \left[\frac{1}{\pm(\omega/B)(\phi - \phi_0)} \right], \quad (5.21)$$

y obtenemos finalmente

$$V(\phi) = \frac{3\omega^2}{8\pi G} + \omega^2(\phi - \phi_0). \quad (5.22)$$

En este caso el parámetro Ω hace una transición suave desde infinito hasta 1, mientras que en el caso límite en donde $B^2 = 0 \Rightarrow k = 0$ tenemos el “slow-rolling” para todo tiempo (potencial plano), lo cual nos da la solución clásica de Sitter ($\rho+p = 0$ con $\Omega = 1$). Este es el modelo inflacionario estándar.

5.3. Expansión de Sitter con singularidad

Como segundo caso, tomamos una expansión a partir de la singularidad ($a = 0$)

$$a(t) = A \sinh(\omega t) \quad A, \omega = \text{cts} > 0 \quad (5.23)$$

$$\Rightarrow H = \frac{\omega}{\tanh(\omega t)} \quad \text{y} \quad \dot{H} = -\frac{\omega^2}{\sinh^2(\omega t)} \quad (5.24)$$

En este caso, (4.33) se satisface si

$$B^2 \equiv \frac{1}{4\pi G} (\omega^2 + k/A^2) \geq 0, \quad (5.25)$$

la cual es válido para $k = 0, \pm 1$. Ahora (4.31) y (4.32) nos dan

$$\dot{\phi}^2 = \frac{B^2}{\sinh^2(\omega t)} \quad V = \frac{3\omega^2}{8\pi G} + \frac{B^2}{\sinh^2(\omega t)}, \quad (5.26)$$

y de esta forma podemos hallar

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{B}{\omega} \log \left(\frac{e^{\omega t} - 1}{e^{\omega t} + 1} \right), \quad \text{con } \phi_0 = \text{cte}, \quad \text{y} \quad (5.27)$$

$$\Omega = \left(1 + \frac{4\pi G B^2}{\omega^2 \sinh^2(\omega t)} \right) \frac{\sinh^2(\omega t)}{\cosh^2(\omega t)}. \quad (5.28)$$

De nuevo, si nos restringimos al caso $B^2 > 0$, encontramos que

$$t = \frac{1}{\omega} \log \left(\frac{1 + \exp[\pm (\omega/B)(\phi - \phi_0)]}{1 - \exp[\pm (\omega/B)(\phi - \phi_0)]} \right), \quad (5.29)$$

de donde obtenemos

$$V(\phi) = \frac{3\omega^2}{8\pi G} + B^2 \left[\sinh^2 \left(2\frac{\omega}{B}(\phi - \phi_0) \right) \right]. \quad (5.30)$$

Para este caso, cuando $B^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = -k/A^2$ tenemos nuevamente las soluciones exactas para el universo de Sitter, con la diferencia que la constante Ω evoluciona de 0 a 1.

5.4. Expansión de Sitter sin la singularidad

Para este caso, vamos a considerar un comportamiento tipo *cosh* (es decir, un colapso de infinito a un radio mínimo A^{-1}) seguido de una re-expansión

$$a(t) = A \cosh(\omega t) \quad A, \omega = \text{cts} > 0, \quad (5.31)$$

$$\Rightarrow H = \omega \tanh(\omega t) \quad \text{y} \quad \dot{H} = \frac{\omega^2}{\cosh^2(\omega t)}, \quad (5.32)$$

en donde (4.33) se satisface si

$$B^2 \equiv \frac{1}{4\pi G} \left(-\omega^2 + \frac{k}{A^2} \right) \geq 0, \quad (5.33)$$

lo cual sucede únicamente cuando $k = 1$. Ahora, (4.31) y (4.32) dan

$$\dot{\phi}^2 = \frac{B^2}{\cosh^2(\omega t)} \quad V = \frac{3\omega^2}{8\pi G} + \frac{B^2}{\cosh^2(\omega t)}, \quad y \quad (5.34)$$

$$\phi = \phi_0 \pm \frac{2B}{\omega} \tanh^{-1} e^{\omega t}, \quad \phi_0 = cte \quad (5.35)$$

$$\Omega = \left(1 + \frac{4\pi G B^2}{\omega^2 \cosh^2(\omega t)} \right) \frac{\cosh^2 \omega t}{\sinh^2 \omega t} \quad (5.36)$$

De nuevo, tomando la restricción $B^2 > 0$ encontramos que

$$t = \frac{1}{\omega} \log \left[\tan \left(\pm \frac{\omega}{2B} (\phi - \phi_0) \right) \right], \quad (5.37)$$

para obtener finalmente

$$V(\phi) = \frac{3\omega^2}{8\pi G} + B^2 \left[\sin \left(2 \frac{\omega}{B} (\phi - \phi_0) \right) \right]. \quad (5.38)$$

Cuando $B^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = -k/A^2$ tenemos nuevamente las soluciones exactas para el universo de Sitter, con la diferencia que la constante Ω evoluciona de 1 a infinito y regresa de nuevo a 1.

5.5. Expansión de tipo polinomial

Para este caso vamos a considerar el comportamiento del factor de escala como un polinomio de t tal que

$$a(t) = A t^n \quad A, n = \text{cts} > 0, \quad n \neq 1, \quad (5.39)$$

$$\Rightarrow H = \frac{n}{t} \quad y \quad \dot{H} = -\frac{n}{t^2}, \quad (5.40)$$

y (4.33) se satisface si

$$b^2 \equiv B^2 \left(1 + \frac{k}{nA^2 t^{2(n+1)}} \right) \geq 0 \quad B^2 \equiv \frac{n}{4\pi G}, \quad (5.41)$$

lo cual se cumple siempre para $k \geq 0$, y también se satisface para un periodo de tiempo restringido si $k = -1$. En este caso (4.31) y (4.32) nos dan

$$\dot{\phi}^2 = \frac{B^2}{t^2} \left(1 + \frac{k}{nA^2 t^{2(n+1)}} \right) \geq 0, \quad (5.42)$$

$$V = \frac{2B^2}{t^2} \left[(3n - 1) + \frac{2k}{nA^2 t^{2(n+1)}} \right]. \quad (5.43)$$

El parámetro de densidad es

$$\Omega = 1 + \frac{k}{(nAt^{n-1})^2}, \quad (5.44)$$

y cuando $k \neq 0$, las integrales sólo son realizables de forma numérica para casi todos los valores de n (se pueden resolver pero después no se pueden invertir), así que para evitar eso tomamos $k = 0$ y así podemos hallar

$$\phi = \phi_0 \pm B \log t \quad \phi_0 = cte, \quad (5.45)$$

y como siempre $B^2 > 0$ tenemos que

$$t = \exp\left(\pm \frac{1}{B}(\phi - \phi_0)\right), \quad (5.46)$$

finalmente

$$V(\phi) = \frac{B^2}{2}(3n - 1) \exp\left[\pm \frac{2}{B}(\phi - \phi_0)\right], \quad (5.47)$$

en donde las dos soluciones corresponden a un proceso de inflación estándar y a un proceso caótico respectivamente. Ahora, al asumir que $k = 1$ tenemos que Ω es 1 y la familia de soluciones es inflacionaria si $n > 1$, es no inflacionaria si $0 < n < 1$, y como caso especial si $n = 1/3$ tenemos que el potencial es constante.

5.6. Inflación lineal

Para finalizar vamos a tomar una expansión lineal de la forma

$$a(t) = At, \quad A = cte > 0 \Rightarrow H = 1/t \quad \text{y} \quad \dot{H} = -1/t^2. \quad (5.48)$$

Para satisfacer (4.33) tomamos

$$B^2 \equiv \left(\frac{A^2 + k}{A^2}\right) \frac{1}{4\pi G} \geq 0, \quad (5.49)$$

la cual es válida para $k = 0, \pm 1$. Ahora, tenemos que (4.31) y (4.32) nos dan

$$\dot{\phi}^2 = B^2/t^2 = V(t), \quad (5.50)$$

así que

$$\phi = \phi_0 \pm B \log t \quad \phi_0 = cte. \quad (5.51)$$

Tomando de nuevo $B^2 > 0$

$$t = \exp\left[\pm \left(\frac{\phi - \phi_0}{B}\right)\right] \Rightarrow V(\phi) = B^2 \exp\left[2 \left(\frac{\phi - \phi_0}{B}\right)\right]. \quad (5.52)$$

Bibliografía

- [1] F.C. Carvalho, J.S. Alcaniz, J.A.S. Lima, R. Silva. *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006).
- [2] S. Adler, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 729 (1982).
- [3] G. F. R. Ellis y M. S. Madsen, *Class. Quantum Grav.* **8**, 667 (1991).
- [4] B. F. Schutz, *A first course in general relativity* (Cambridge University Press, Cambridge 1986).
- [5] Kolb Edward W, Michael Turner, *The early Universe*, (Frontiers in physics 1990).
- [6] Kip Thorne, Charles Misner, John Wheeler *Gravitation* (W. H. Freeman and Company 1973).
- [7] Dicke, Robert H, P. J. E. Peebles, *The big bang cosmology - enigmas and nostrums*. ed. S. W. Hawking y W. Israel. *General Relativity: an Einstein Centenary Survey*, Cambridge University Press (1978).
- [8] A. Linde, *A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution Of The Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy And Primordial Monopole Problems*, *Phys. Lett.* **B108**, 389 (1982).
- [9] R. M. Wald, *General Relativity* (Univ. Chicago Press, Chicago 1984).
- [10] Tonatiuh Matos, L. Arturo Ureña-Lopez, *Class. Quantum Grav* **17**, L75-L81 (2000).
- [11] Gerald Cleaver. *Advances in Space Research*, **35**, 106-110 (2005)
- [12] M.B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *Superstring Theory*, Vol 2: Loop Amplitudes, Anomalies and Phenomenology, Cambridge University Press (1987).
- [13] Thibault Damour, Alexander Vilenkin, *Phys. Rev. Lett* **78**, 2288-2291 (1997).
- [14] Kiwoon Choi. *Phys. Rev.* **D62** 43-59 (2000).

BIBLIOGRAFÍA

- [15] P. Jordan (1995). *Schwerkraft und Weltall*.
- [16] P. A. M. Dirac (1938). *Proc. Roy. soc.* **A165**, 199-208.
- [17] Th. Kaluza (1920). *Sitzungsber. Preub. Akad. Wiss.* 966-972: O. Klein, (1926). *Z. Phys.* **37**, 895-906.
- [18] Steinhardt P J, Turner M, *Phys. Rev. D* **29** 2162, (1984).
- [19] C. L. Bennet et al, *Astrophys J., Suppl. Ser.* **148** (2003)
- [20] G. Dvali, G. Gabadadze, M. Shifman, *Phys. Rev. D.* **67** 044020
- [21] C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B302**, 645 (1988).
- [22] I. Zlatev, L. Wang y P. J. Steinhardt *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1998).
- [23] T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D.* **66**, 021301 (2002).
- [24] V. Faraoni, “Superquintessence”, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 471 (2002)
- [25] A. K. Sanyal, “Scalar tensor theory of gravity carrying a conserved current”, hep-th/0504021v1.
- [26] A.D. Sakharov, “Cosmological model of the Universe with a time vector inversion”, *ZhEtf* **79**, 689-693 (1980).
- [27] Víctor H. Cárdenas and Sergio del Campo, “Scalar field potentials for cosmology”, *Phys. Rev. D* **69**, 083508 (2004).
- [28] Kirill A. Bronnikov and Alexei A. Starobinsky, “No realistic wormholes from ghost-free scalar-tensor phantom dark energy”, gr-qc/0612032.