Universidad Nacional Autónoma de México
y
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas
UNAM-UMSNH

Variedades Asféricas Exóticas.

TESINA

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

José Antonio Hernández Orozco

Director: Dr. Daniel Juan Pineda

Morelia, Michoacán - Junio de 2013.

Índice general

Agradecimientos

Es para mí un placer el por fin decir que he concluido mis estudios de maestría. Más aún, es motivo de orgullo el haber pertenecido a la Universidad Nacional Autónoma de México y a la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, instituciones de tan alto valor académico e histórico.

La culminación de ésta *aventura* no hubiese sido posible sin el apoyo de todas las personas que estuvieron a mi lado, así como la guía de todos los profesores con los que tuve el placer de atender a tan buenas cátedras.

Quiero agradecer primero que nada a Dios, ya que a pesar de todas las adversidades que pasé a lo largo de mis estudios de posgrado, siempre me dio la oportunidad de salir adelante. Mamá, te doy gracias por haberme apoyado a lo largo de este camino ya que siempre creíste en mí y me brindaste tu amor y apoyo de manera incondicional. Carla, gracias por haberme enseñado a ver la vida de otra forma, definitivamente gran parte de lo que soy hoy en día te lo debo a tí, a tu comprensión y cariño; pero sobre todo a tu compañía y amor que me has prestado durante este tiempo. En general, quiero agradecer a toda mi familia, pues se que cuento incondicionalmente con ellos.

Éste parráfo se lo quiero dedicar a mis amigos, que aunque pocos, sé que su amistad es honesta y de calidad. Chava, muchas gracias por haber estado en momentos en los que más necesitaba de un apoyo; Oscar, a ti te agradezco por tu amistad y tu apoyo; Luis Jorge y Kenneth, no tengo palabras que puedan reflejar lo agradecido que estoy con ustedes, sin duda pilares en los últimos días antes de terminar este proyecto, gracias por esas horas de diversión, trabajo, pláticas y en general buenos moementos.

Un agradecimiento especial a mí asesor y amigo Daniel Juan, por su comprensión, por su paciencia y por haberme enseñado el hermoso mundo de los Grupos de Coxeter y de la Topología Algebraica. No está de más el decir que sin su ayuda no hubiera sido posible la realización de éste trabajo.

José Antonio

INTRODUCCIÓN

Una variedad topológica M es *asférica* si su cubriente universal es contraible. Estas surgen en diversos contextos geométricos. En general, para demostrar que una variedad topológica es asférica lo que se busca es identificar a su cubriente universal con el espacio euclidiano. Por ejemplo:

1. El cubriente universal de una superficie de Riemann de género positivo es el plano o el interior del disco.
2. Si M es cualquier $n-$variedad riemannniana completa de curvatura seccional no positiva, entonces la aplicación exponencial $exp : T_xM \to M$ (en cualquier punto $x \in M$) es una proyección cubriente; luego, el cubriente universal de M es difeomorfo a $T_xM \cong \mathbb{R}^n$.
3. Sea G cualquier grupo de Lie no compacto con subgrupo maximal compacto K. Sea $\Gamma \subseteq G$ cualquier subgrupo máximal discreto y libre de torsión, entonces la acción natural de Γ sobre G/K es libre y propia. Así, el cubriente universal de la variedad $\Gamma \setminus G/K$ es G/K, y este es difeomorfo al espacio euclidiano.

Debido a estos ejemplos, en [**17**] se conjeturó lo siguiente:

Conjetura. El cubriente universal de cualquier variedad asférica *cerrada* es homeomorfo al espacio euclidiano.

Sin embargo, en su estudio de grupos de reflexión sobre variedades contraibles, Michael Davis mostró que para $n \geq 4$ existen variedades asféricas cerradas *exóticas*, es decir, variedades asféricas cerradas cuyo cubriente universal no es homeomorfo al espacio euclidiano [**8**].

En el presente trabajo, revisaremos la construcción de Davis de estas variedadades asféricas cerradas exóticas.

Capítulo 1

Preliminares.

1. Grupos de Coxeter

El primer tratamiento riguroso de los *grupos de Coxeter* fue dado por H. S. M. Coxeter en 1934 en su artículo [**6**]. Estos surgen como una generalización natural de los grupos de simetría y de los grupos cristalográficos [**2**]. Inicialmente, estos fueron considerados como grupos generados por *involuciones* r_i tales que los ángulos en los que se se intersecaban los correspondientes *espejos* de reflexión están prescritos mediante relaciones de la forma

$$(r_i r_j)^{m_{ij}}$$

para enteros especificados m_{ij}. De hecho todos los grupos de Coxeter finitos son precisamente grupos finitos generados por reflexiones lineales ortogonales de $\mathbb{R}^n$ y estos fueron completamente clasificados por Coxeter en [**7**]. La teoría de grupos de reflexión abstractos es debida a Tits [**24**]. Para un estudio más detallado de los grupos de Coxeter se puede ver [**4**] o [**16**].

Consideremos un grupo G y sea S un conjunto de generadores para G tal que $1 \notin S$ y $S = S^{-1}$. Para cada $g \in G$, la **longitud** de g (con respecto a S), denotada por $l_S(g)$, o simplemente por $l(g)$, es el entero más pequeño $q \geq 0$ tal que g es el producto de una sucesión de elementos de S. Una **descomposición reducida** de g (con respecto a S) es cualquier sucesión $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_q)$ de elementos de S tal que $g = s_1 \cdots s_q$ y $l(g) = q$.

Observación 1.1. Claramente, 1 es el único elemento de longitud cero y S consiste de los elementos de longitud 1. Además, si $T \subseteq S$ y $H = \langle T \rangle$, entonces para cada $h \in H$ tenemos que $l_T(h) \leq l_S(h)$.

Proposición 1.2. *Para cualesquiera $g, g' \in G$ tenemos que*

1. $l(gg') \leq l(g) + l(g')$.
2. $l(g^{-1}) = l(g)$.
3. $|l(g) - l(g')| \leq l(gg'^{-1})$.

Definición 1.3. Un sistema de **pre-reflexión** para un grupo W consiste de un subconjunto R de W, una acción de W sobre una gráfica simplicial conexa Ω y un punto base $v_0 \in \mathrm{Vert}(\Omega)$ tales que:

(i) Todo elemento de R es una involución.
(ii) R es cerrado bajo conjugación.
(iii) Para cada arista e de Ω existe un único elemento $r \in R$ que intercambia sus puntos extremos y decimos entonces que r **invierte** a la arista e; y cada $r \in R$ invierte al menos una arista.
(iv) R genera a W.

Un elemento de R es llamado una **pre-reflexión**.

Observación 1.4. Se sigue inmediatamente de la definición que si W es un sistema de pre-reflexión sobre Ω, entonces la acción de W sobre el conjunto de vértices $\mathrm{Vert}(\Omega)$ es transitiva.

Definición 1.5. Supongamos que W es un grupo y que S es un conjunto de involuciones que genera a W. Decimos entonces que (W, S) es un **sistema pre-Coxeter**.

Ejemplo 1.6. Si (W, S) es un sistema pre-Coxeter y $R = \{wsw^{-1} \in W : w \in W \text{ y } s \in S\}$, entonces $\Omega = \mathrm{Cay}(W, S)$ es un sistema de pre-reflexión para W, donde escogemos el punto base como el vértice correspondiente a la identidad de W. Obsevemos que en este caso, W actúa *libremente* sobre $\mathrm{Vert}(\Omega)$, un requerimiento que no necesariamente satisface un sistema de pre-reflexión en general.

Proposición 1.7. *Supongamos que W es un sistema de pre-reflexión sobre Ω y que v_0 es el punto base. Si denotamos por S al conjunto de pre-reflexiones que invierten una arista que contiene a v_0, entonces:*

1. *El conjunto de pre-reflexiones R consiste de todos los elementos de W que son conjugados a un elemento de S, es decir, $R = \{wsw^{-1} \in W : w \in W \text{ y } s \in S\}$.*
2. *Existe una correspondencia biyectiva entre el conjunto de palabras en S y el conjunto de caminos de aristas que empiezan en v_0.*
3. *S genera a W.*

Demostración. La demostración de 1) es inmediata, así únicamente probaremos 2) y 3).
2) Consideremos una palabra $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ en S. Para $0 \leq i \leq k$ definamos elementos $w_i \in W$ como sigue: $w_0 = 1$ y para $1 \leq i \leq k$, $w_i = s_1 \cdots s_i$. Por otro lado, para $1 \leq i \leq k$ definamos elementos $r_i \in R$ por $r_i = w_{i-1} s_i w_{i-1}^{-1}$. Consideremos la sucesión $\Phi(\mathbf{s}) := (r_1, \ldots, r_k)$ y notemos que $r_i \cdots r_1 = w_i$. Para cada $0 \leq i \leq k$ definamos $v_i = w_i v_0$ y consideremos la sucesión de vértices $(v_0, \ldots, v_k)$. Como v_0 es adyacente a $s_i v_0$, entonces $w_{i-1} v_0$ es adyacente a $w_{i-1} s_i v_0$; es decir, v_{i-1} es adyacente a v_i. Luego, $(v_0, \ldots, v_k)$ es un camino de aristas. Más aún, tenemos que r_i es la única pre-reflexión que invierte a la arista $\{v_i, v_{i-1}\}$.
Recíprocamente, dado un camino de aristas $(v_0, \ldots, v_k)$ podemos invertir el proceso anterior: si

r_i denota la pre-reflexión que invierte a $\{v_i, v_{i-1}\}$, entonces hacemos $w_i = r_i \cdots r_1$ y definimos $s_i = w_{i-1}^{-1} r_i w_{i-1}$.
3) Supongamos que $W' = \langle S \rangle$ es el subgrupo de W generado por S. Como R genera a W, entonces basta mostrar que $R \subseteq W'$. Consideremos un elemento $r \in R$ y supongamos que e es una arista invertida por r. Escojamos un camino de aristas que empieza en v_0 tal que e es su última arista. Si $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ es la correspondiente palabra en S y $\Phi(\mathbf{s}) = (r_1, \ldots, r_k)$, entonces $r = r_k$. Luego, $r = (s_1 \cdots s_{k-1}) s_k (s_{k-1} \cdots s_1) \in W'$ y el resultado se sigue. ❑

Observación 1.8. En vista de la proposición anterior, tenemos que la elección del punto base v_0 en un sistema de pre-reflexión nos proporciona un conjunto distinguido $S (= S(v_0))$ de generadores para W.

Definición 1.9. Decimos que $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ es una **expresión reducida** si es una palabra de longitud mínima para $w(s)$, es decir, si $l(w(s)) = k$.

Proposición 1.10. *Supongamos que* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ *es una palabra en* S*,* $w = s_1 \cdots s_k$ *es su valor en* W *y* $\Phi(\mathbf{s}) = (r_1, \ldots, r_k)$ *está definido como en la demostración de la proposición anterior. Supongamos además, que* $r_i = r_j$ *para algunos* $i < j$*. Si* $\mathbf{s}'$ *es la subpalabra de* $\mathbf{s}$ *obtenida al borrar las letras* s_i *y* s_j*, entonces los caminos correspondientes a* s *y a* s' *tienen los mismos puntos extremos. Más aún,* $w = s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots \hat{s}_j \cdots s_k$*.*

Demostración. Supongamos que $(v_0, w_1 v_0, \ldots, w_k v_0)$ es el camino de aristas correspondiente a $\mathbf{s}$ y supongamos que $r = r_i = r_j$. Entonces r intercambia los vértices $w_{i-1} v_0$ y $w_i v_0$ al igual que los vértices $w_{j-1} v_0$ y $w_j v_0$. Luego, manda la porción del camino de aristas entre $w_i v_0$ y $w_{j-1} v_0$ a un camino de aristas entre $w_{i-1} v_0$ y $w_j v_0$. Reemplazando la porción del camino original entre estos dos vértices por la porción transformada, obtenemos un camino de aristas con dos aristas menos y con los mismos puntos extremos. Más aún, la correspondiente palabra en S es $\mathbf{s}'$. Por último, observemos que si $r_i = r_j$, entonces

$$s_1 \cdots s_{i-1} s_i s_{i-1} \cdots s_1 = s_1 \cdots s_{j-1} s_j s_{j-1} \cdots s_1.$$

Luego, $s_i \cdots s_j = s_{i+1} \cdots s_{j-1}$ y por lo tanto, podemos reemplazar la subpalabra $(s_i, \ldots, s_j)$ de $\mathbf{s}$ por $(s_{i+1}, \ldots, s_{j-1})$. ❑

Corolario 1.11. *Si la palabra* $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ *corresponde a un camino de aristas de longitud mínima de* v_0 *a un vértice* $v (= v_k)$*, entonces en la sucesión* $\Phi(\mathbf{s}) = (r_1, \ldots, r_k)$ *ningún elemento de* R *ocurre más de una vez.*

Dado un elemento $r \in R$, denotaremos por Ω^r al conjunto de puntos medios de aristas que son invertidas por r y diremos que Ω^r es la **pared** correspondiente a r. Claramente, Ω^r está contenido en el conjunto de puntos fijos de r. Por otro lado, notemos que el camino de aristas de v_0 a v_k correspondiente a una palabra $\mathbf{s}$ *cruza* la pared Ω^r si y sólo si r ocurre en la sucesión $\Phi(\mathbf{s})$. La prueba de la Proposición 1.10 muestra que si el camino de aristas cruza la pared Ω^r más de una vez, entonces podemos obtener un nuevo camino de aristas, con los mismos puntos extremos, que cruza a Ω^r dos veces menos.

Lema 1.12. *Para cada $r \in R$, $\Omega - \Omega^r$ tiene una ó dos componentes conexas. Si existen dos componentes conexas, estas son intercambiadas por r.*

Demostración. Como r es conjugado a un elemento de s, entonces podemos escribir a r como wsw^{-1} para algunos $w \in W$ y $s \in S$. Notemos que $w\Omega^s = \Omega^{wsw^{-1}} = \Omega^r$, luego w manda $\Omega - \Omega^s$ de manera homeomorfa sobre $\Omega - \Omega^r$. Así, basta con probar el lema para $s \in S$. Sea v un vértice de Ω, demostraremos que v ó sv está en la misma componente de $\Omega - \Omega^s$ que v_0. Consideremos un camino de aristas de longitud mínima de v_0 a v y sea $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ la palabra correspondiente. Si s no ocurre en la sucesión $\Phi(\mathbf{s}) = (r_1, \ldots, r_k)$ entonces el camino de aristas no cruza la pared Ω^s y así, v y v_0 están en la misma componente. Si s ocurre, entonces por el corolario anterior lo hace exactamente una vez, digamos $s = r_i$. Consideremos la palabra $\mathbf{s}' = (s, s_1, \ldots, s_k)$ y notemos que el camino de aristas correspondiente a esta palabra va de v_0 a sv y la correspondiente sucesión de elementos en R está dada por $\Phi(\mathbf{s}') = (s, r_1', \ldots, r_k')$, donde $r_i' = sr_js$ para $1 \leq i \leq k$. Luego, s ocurre exactamente dos veces en está sucesión y por la Proposición 1.10 podemos obtener una palabra mas corta $\mathbf{s}'' = (s_1, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_k)$ cuyo camino de aristas correspondiente va también de v_0 a sv. Como este camino no cruza la pared Ω^s, entonces v_0 y sv están en la misma componente de $\Omega - \Omega^s$ y el lema se sigue fácilmente. ❑

El siguiente lema es una consecuencia inmediata de los resultados anteriores. Sin embargo tiene consecuencias interesantes.

Lema 1.13. Dado un sistema de pre-reflexión (Ω, v_0) y una pre-reflexión $r \in R$, las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Ω^r separa a Ω.
(ii) Para cualquier palabra $\mathbf{s}$ en S correspondiente a un camino de aristas de v_0 a un vértice v, el número $(-1)^{n(r,\mathbf{s})}$ depende únicamente de v, donde $n(r, \mathbf{s})$ es el número de veces que r ocurre en $\Phi(\mathbf{s})$, es decir, $n(r, \mathbf{s})$ es el número de veces que el correspondiente camino cruza la pared Ω^r. (De hecho, este número es $+1$ si v_0 y v están en la misma componente de $\Omega - \Omega^r$ y -1 si estan en diferentes componentes.)

Definición 1.14. Un sistema de pre-reflexión para W es un **sistema de reflexión** si para cada $s \in S = (S(v_0))$, $\Omega - \Omega^s$ tiene dos componentes conexas. (Se sigue que para cada $r \in R$, Ω^r separa a Ω.) En este caso a los elementos de R los llamamos **reflexiones** y el conjunto S es el conjunto de **reflexiones fundamentales**. Si r es una reflexión, un **semi-espacio** acotado por Ω^r es la cerradura de una componente de $\Omega - \Omega^r$ y si contiene a v_0, diremos que es un semi-espacio **positivo**.

Observación 1.15. Supongamos que (Ω, v_0) es un sistema de reflexión para W. La consecuencia crucial de esta hipótesis es que los vértices v_0 y v estan en el mismo lado de Ω^r si y sólo si cualquier camino de aristas de v_0 a v cruza Ω^r un número par de veces.

Si (Ω, v_0) es un sistema de reflexión para W, se puede mostrar fácilmente que W actúa libremente sobre Vert(Ω). Por otro lado, si $\tilde{\Omega}$ es una gráfica simplicial conexa y G es un grupo de autormorfismos de $\tilde{\Omega}$ que es simplemente transitivo sobre Vert($\tilde{\Omega}$), entonces $\tilde{\Omega}$ es $G-$isomorfa a la gráfica de Cayley $Cay(G, S(v_0))$, para un conjunto *especial* de generadores (ver [**9**]). Así pues, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.16. Si (Ω, v_0) es un sistema de reflexión para W con conjunto fundamental de generadores S, entonces Ω es isomorfa a la gráfica de Cayley $\mathrm{Cay}(W, S)$.

Debido a esto, en ocasiones se dice que (W, S) es un *sistema de reflexión* si su gráfica de Cayley lo es.

Lema 1.17. Supongamos que $\Omega = \mathrm{Cay}(W, S)$ es un sistema de reflexión. Sea $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ una palabra para $w = w(\mathbf{s})$. Entonces $\mathbf{s}$ es una expresión reducida si y sólo si los elementos de la sucesión $\Phi(\mathbf{s}) = (r_1, \ldots, r_k)$ son todos distintos. En este caso, $\{r_1, \ldots, r_k\}$ es el conjunto $R(1, w)$ consistente de aquellos elementos $r \in R$ tales que la pared Ω^r separa a 1 de w.

Sea (W, S) un sistema pre-Coxeter y consideremos las siguientes condiciones sobre las palabras en S, las cuales veremos que son equivalentes:

(D) *Condición de Borrado*: Si $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ es un palabra en S con $k > l(w(\mathbf{s}))$, entonces existen índices $i < j$ tales que la subpalabra

$$\mathbf{s}' = (s_1, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, \hat{s}_j, \ldots, s_k)$$

es también una expresión para $w(\mathbf{s})$.

(E) *Condición de Intercambio*: Dada una expresión reducida $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ para $w \in W$ y un elemento $s \in S$ se tiene que $l(sw) = l(w) + 1$ ó existe un índice $1 \leq i \leq k$ tal que

$$w = s s_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k.$$

(F) *Condición de Doblado*: Sean $w \in W$ y $s, t \in S$ tales que $l(sw) = l(w) + 1$ y $l(wt) = l(w) + 1$. Entonces $l(swt) = l(w) + 2$ ó $swt = w$.

Observación 1.18. Notemos que para un sistema pre-Coxeter (W, S) arbitrario se tienen las siguientes posibilidades sobre la longitud de una palabra:

1. $l(sw) = l(w) + 1$ (En este caso, cualquier expresión reducida para sw puede ser obtenida al poner una s en frente de cualquier expresión reducida para w)
2. $l(sw) = l(w) - 1$ (En este caso, existe una expresión reducida para w que empieza con s
3. $l(sw) = l(w)$

El significado de (E) es que la posibilidad 3) no ocurre; y en el caso 2), podemos modificar una expresión reducida arbitraria para w para obtener una que inicie con s al *intercambiar* una de sus letras por una s en frente.
La condición (F) implica que si $w \in W$ y $s, t \in S$ son tales que $l(swt) = l(w)$ y $l(sw) = l(wt)$, entonces $sw = wt$.

Teorema 1.19. Dado un sistema pre-Coxeter (W, S), las condiciones $(D), (E)$ y (F) son equivalentes.

Demostración. $(D) \Rightarrow (E)$: Supongamos que $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ es una expresión reducida para w y sea $s \in S$ tal que $l(sw) \leq k$. Como $(s, s_1, \ldots, s_k)$ no es reducida, entonces la condición (D) implica que podemos encontrar una palabra mas corta para sw al borrar dos letras. Como $\mathbf{s}$ es reducida, entonces ambas letras no pueden pertenecer a $\mathbf{s}$, y así una de las letras debe de ser la s inicial. Luego, $sw = ss_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$ y por lo tanto, $w = ss_1 \cdots \hat{s}_i \cdots s_k$. En otras palabras, hemos intercambiado una letra de $\mathbf{s}$ por una s en frente.
$(E) \Rightarrow (F)$: Supongamos que $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ es una expresión reducida para w, que $s, t \in S$ son tales que $l(sw) = k + 1 = l(wt)$ y que $l(swt) < k + 2$. Aplicando la condición (E) a la palabra $(s_1, \ldots, s_k, t)$ y al elemento s, vemos que una letra puede ser intercambiada por una s en frente. La letra intercambiada no puede ser parte de $\mathbf{s}$, ya que esto contradiría la suposición de que $l(sw) = k + 1$. Por tanto la letra intercambiada debe de ser la t final y esto implica que $swt = w$.
$(E) \Rightarrow (F)$: Supongamos que la palabra $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ no es reducida. Entonces, necesariamente $k \geq 2$. Podemos asumir que las palabras $(s_1, \ldots, s_{k-1})$ y $(s_2, \ldots, s_k)$ son ambas reducidas. Sea $w = s_2 \cdots s_{k-1}$. Aplicando la condición (F) con $s = s_1$ y $t = s_k$. Esto da $s_1 w s_k = w$, es decir, $(s_1, \ldots, s_k)$ puede ser acortada al borrar sus primera y última letras. ❏

Teorema 1.20. Supongamos que $Cay(W, S)$ es un sistema de reflexión. Entonces las condiciones (equivalentes) $(D), (E)$ y (F) se satisfacen.

Demostración. Sea $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ una palabra para w y sea $\Phi(\mathbf{s}) = (r_1, \ldots, r_k)$. Si $\mathbf{s}$ no es reducida, entonces $r_i = r_j$ para algún $i < j$. por la Proposición 1.10 podemos obtener otra palabra $\mathbf{s}'$ para w al borrar s_i y s_j, es decir, (D) se satisface. ❏

Definición 1.21. *Sea S un conjunto finito no vacío. Una* **matriz de Coxeter** $M = (m_{st})$ ***sobre*** S *es una matriz simétrica $S \times S$ con entradas en $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que*

$$m_{st} = \begin{cases} 1 & s = t \\ \geq 2 & \textit{otro caso} \end{cases}$$

Observación 1.22. A una matriz de Coxeter $M = (m_{st})$ sobre S se le puede asociar una presentación para un grupo $\tilde{W}$ como sigue: Para cada $s \in S$, introducimos un símbolo $\tilde{s}$. Sea

$$\mathcal{I} = \{(s,t) \in S \times S : m_{st} \neq \infty\}.$$

El conjunto de generadores para $\tilde{W}$ es $\tilde{S} = \{\tilde{s}\}_{s \in S}$, y el conjunto $\mathcal{R}$ de relaciones es

$$\mathcal{R} = \{(\tilde{s}\tilde{t})^{m_{st}}\}_{(s,t) \in \tilde{I}}.$$

Por otro lado, dado cualquier sistema pre-Coxeter (W, S), tenemos una matriz de Coxeter asociada sobre S, definida por la fórmula $m_{st} = m(s,t)$, donde $m(s,t)$ denota el orden de st.

Definición 1.23. Un sistema pre-Coxeter (W, S) es un **sistema de Coxeter** si el epimorfismo $\tilde{W} \to W$, definido por $\tilde{s} \mapsto s$ es un isomorfismo. Si este es el caso, decimos que W es un **grupo de Coxeter** y que S es un **conjunto fundamental de generadores**.

En otras palabras, (W, S) es un sistema de Coxeter si W es isomorfo al grupo definido por la presentación asociada a su matriz de Coxeter.

Supongamos que $\Omega = Cay(W, S)$ es un sistema de reflexión con punto base 1. Recordemos que dada una palabra $\mathbf{s}$ en S y un elemento $r \in R$, denotamos por $n(r, \mathbf{s})$ al número de ocurrencias de r en la sucesión $\Phi(\mathbf{s})$, es decir, $n(r, \mathbf{s})$ es el número de veces que el correspondiente camino de aristas entre 1 y $w(\mathbf{s})$, en Ω, cruza la pared correspondiente a r. Recordemos que cada pared Ω^r separa a Ω en dos semi-espacios: el positivo $\Omega^r(+1)$ que contiene al vértice 1 y el *negativo* $\Omega^r(-1)$ que no lo contiene. Además, el número $(-1)^{n(r,\mathbf{s})}$ es $+1$ si 1 y w están en el mismo lado de Ω^r y es -1 si están en lados opuestos. Observemos que el conjunto de semi-espacios se identifica con $R \times \{\pm 1\}$. Como W actúa sobre el conjunto de semi espacios, podemos preguntarnos como luce la acción inducida sobre $R \times \{\pm 1\}$. Para esto, sea $w \in W$. Como la reflexión atraves de la pared $w\Omega^r$ es wrw^{-1}, entonces w manda el semi-espacio $\Omega^r(+1)$ a $\Omega^r(\varepsilon)$, donde $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. La cuestión es entonces decidir el signo de ε. notemos que la condición $\varepsilon = +1$ significa que $w\Omega^r(+1) = \Omega^{wrw^{-1}}(+1)$ y esto se satisface si y sólo si w y 1 están sobre el mismo lado de $\Omega^{wrw^{-1}}$, es decir, si y sólo si 1 y w^{-1} están sobre el mismo lado de Ω^r. Luego, ε está determinado por el hecho de que 1 y w^{-1} estén o no en el mismo lado de Ω^r: es $+1$ si lo están y -1 si no. Esto queda establecido en el siguiente lema, cuya demostración puede encontrarse en [**4**].

Lema 1.24. Sea (W, S) un sistema de Coxeter.

(i) Para toda palabra $\mathbf{s}$ con $w = w(\mathbf{s})$ y cualquier elemento $r \in R$, el número $(-1)^{n(r,\mathbf{s})}$ depende únicamente de w. Denotamos a este número por $\eta(r, w) \in \{\pm 1\}$.

(ii) Existe un homomorfismo $w \mapsto \phi_w$ de W al grupo de permutaciones del conjunto $R \times \{\pm 1\}$, donde la permutación ϕ_w esta definida por la fórmula

$$\phi_w(r, \varepsilon) = (wrw^{-1}, \eta(r, w^{-1})\varepsilon).$$

Proposición 1.25. *Si* (W, S) *es un sistema de Coxeter, entonces* $\Omega := Cay(W, S)$ *es un sistema de reflexión. Más aún, dado* $r \in R$*, los vértices* 1 *y* w *están sobre lados opuestos* Ω^r *si y sólo si* $r \in \hat{R}_w$*, donde* $\hat{R}_w$ *es el conjunto de todos los* $r \in R$ *tales que* $\eta(w, r) = -1$.

Demostración. Si $\mathbf{s}$ es una palabra para w, entonces por el lema anterior, cada elemento de $\hat{R}_w$ ocurre un número impar de veces en $\Phi(\mathbf{s})$. En otras palabras, para cada $r \in \hat{R}_w$, cualquier camino de aristas en Ω de 1 a w debe cruzar la pared Ω^r un número impar de veces y consecuentemente 1 y w están en lados opuestos. Similarmente, si $r \notin \hat{R}_w$, entonces existe un camino de aristas que conecta a 1 con w que no cruza la pared Ω^r. ❏

Como hemos visto, todo sistema de Coxeter es un sistema de reflexión. Es natural preguntarse si el recíproco se satisface. Más adelante veremos que esto resulta ser cierto, es decir, si $Cay(W, S)$ es un sistema de reflexión, entonces (W, S) es un sistema de Coxeter. Sin embargo, este es un resultado no trivial y depende del hecho de que en los sitemas de Coxeter el *problema de la palabra* es soluble. Comencemos pues discutiendo un poco acerca del problema de la palabra para grupos en general.

Supongamos que $\langle S | \mathcal{R} \rangle$ es una presentación para un grupo G. El *problema de la palabra* para $\langle S | \mathcal{R} \rangle$ consiste en determinar si dada una palabra $\mathbf{s}$, su valor $g(\mathbf{s})$ en G es el elemento identidad o no. A pesar de lo sencillo que es de formular, el problema de la palabra es en realidad un problema sumamente difícil de resolver. De hecho, se ha demostrado que para una presentación de un grupo general es *imposible* resolver el problema de la palabra en el sentido de que no existe un algoritmo general que nos diga si una palabra representa o no al elemento identidad. Sin embargo, para ciertas familias de grupos es posible dar solución al problema de la palabra, es decir, es posible dar un algoritmo que nos permita decidir si una palabra representa el elemento identidad o no. En esta sección repasamos la solución de Jacques Tits [**25**] al problema de la palabra para sistemas de

Coxeter y demostramos como consecuencia de esto la equivalencia entre sistemas de Coxeter y sistemas de reflexión.

Definición 1.26. Sea (W, S) un sistema pre-Coxeter y sea $M = (m_{st})$ su matriz de Coxeter asociada. Una $M-$**operación elemental** sobre una palabra en S es una operación de los siguientes tipos:

1. Borrar una subpalabra de la forma (s, s).
2. Reemplazar una subpalabra alternada de la forma $(s, t, \dots)$ de longitud m_{st} por la palabra alternada $(t, s, \dots)$, de la misma longitud m_{st}.

Decimos que una plabra es $M-$**reducida** si no puede ser acortada por una sucesión de operaciones $M-$elementales.

Lema 1.27. *Supongamos que (W, S) satisface la condición de intercambio (o equivalentemente, la condición (D) o (F)). Si $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ y $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ son dos expresiones reducidas para $w \in W$ y $s := s_1 \neq t_1 =: t$, entonces el orden m de st en W es finito y existe una expresión reducida $\mathbf{u}$ para w que empieza con una palabra alternada $(s, t, \dots)$ de longitud m.*

Teorema 1.28. [Tits, [**25**]] *Supongamos que el sistema pre-Coxeter (W, S) satisface la condición de intercambio (o equivalentemente, la condición (D) o (F)). Entonces*

1. *Dos expresiones reducidas $\mathbf{s}$ y $\mathbf{t}$ representan el mismo elemento de W si y sólo si una puede ser transformada en la otra mediante una sucesión de $M-$operaciones elementales del tipo* (2).
2. *Una palabra $\mathbf{s}$ es una expresión reducida si y sólo si es $M-$reducida.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$) Supongamos que $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_k)$ y $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k)$ son expresiones reducidas para $w \in W$. Procederemos por inducción sobre la longitud k de w. Si $k = 1$, entonces $\mathbf{s} = \mathbf{t}$ y no hay nada que probar. Supongamos pues que $k > 1$. Sean $s := s_1$ y $t := t_1$.
<u>Caso 1:</u> Si $s = t$, entonces $(s_2, \dots, s_k)$ y $(t_2, \dots, t_k)$ son dos expresiones reducidas de sw. Luego, por hipótesis de inducción podemos transformar una en la otra por $M-$operaciones elementales del tipo (2) y el resultado se sigue.
<u>Caso 2:</u> Supongamos que $s \neq t$. Por el lema anterior, existe una expresión reducida $\mathbf{u}$ para w que empieza con $(s, t, \dots)$ de longitud $m < \infty$ el orden de st. Sea $\mathbf{u}'$ la palabra obtenida de $\mathbf{u}$ por la $M-$operación elemental del tipo (2) que reemplaza el segmento inicial de $\mathbf{u}$ por la palabra alternada $(t, s, \dots)$ que empieza con t. Entonces podemos transformar $\mathbf{s}$ en $\mathbf{t}$ por una sucesión de movimientos indicados esquematicamente como sigue

$$\mathbf{s} \to \mathbf{u} \to \mathbf{u}' \to \mathbf{t},$$

donde las flechas 1 y 3 representan sucesiones de movimientos garantizados por el caso (1); y las segunda flecha es la $M-$operación elemental de tipo (2).
$\Leftarrow$) Es claro.
(2) $\Rightarrow$) Es claro.
$\Leftarrow$) Supongamos que $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ es $M-$reducida. Por inducción en k probaremos que es reducida. Si $k = 1$, entonces no hay nada que probar. Supongamos pues que $k > 1$. Como la palabra $\mathbf{s}' = (s_2, \ldots, s_k)$ claramente es $M-$reducida, entonces por hipótesis de inducción es reducida. Sean $w = s_1, \cdots s_k$ y $w' = s_2 \cdots s_k$. Como $l(s_1 w') = l(w) \leq k - 1$, la Condición de Intercambio implica que w' tiene otra expresión reducida $\mathbf{s}''$ que empieza con s_1. Por (1), $\mathbf{s}'$ puede ser transformada en $\mathbf{s}''$ por una sucesión de $M-$operaciones elementales del tipo (2) en una palabra que empieza con (s_1, s_1) contradiciendo el hecho de que es $M-$reducida. Por lo tanto, $\mathbf{s}$ debe ser reducida. ❏

Con este resultado a la mano, podemos probar la equivalencia entre sistemas de Coxeter y sistemas de reflexión. De hecho, probaremos un poco más que eso.

Teorema 1.29. *Las siguientes condiciones sobre un sistema pre-Coxeter son equivalentes:*

1. (W, S) *es un sistema Coxeter.*
2. $Cay(W, S)$ *es un sistema de reflexión.*
3. (W, S) *satisface la condición de intercambio* (E).

Demostración. Las implicaciones 1) $\Rightarrow$ 2) y 2) $\Rightarrow$ 3) fueron probadas en la Proposición 1.25 y el Teorema 1.20 respectivamente. Por lo tanto resta probar 3) $\Rightarrow$ 1). Supongamos pues que (W, S) es un sistema pre-Coxeter, que $(\tilde{W}, \tilde{S})$ es el sistema de Coxeter asociado a la matriz de Coxeter de (W, S) y que $p : \tilde{W} \to W$ es el epimorfismo natural. Basta con mostrar que p es injectivo. Sea $\tilde{w} \in \operatorname{Ker} p$ y sea $\tilde{\mathbf{s}} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_k)$ una expresión reducida para $\tilde{w}$. Entonces $\tilde{\mathbf{s}}$ es $M-$reducida. Sea $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ la correspondiente palabra en S. Como (W, S) y $(\tilde{W}, \tilde{S})$ tienen las mismas matrices de Coxeter, la notion de $M-$oparaciones sobre las palabras en S y $\tilde{S}$ coinciden, de modo que $\mathbf{s}$ es $M-$reducida. Pero como $\mathbf{s}$ representa al elemento identidad en W, debe de ser la palabra vacía. Consecuentemente, $\tilde{\mathbf{s}}$ es también la palabra vacía, es decir, $\tilde{w} = 1$. ❏

2. Algunas Propiedades Básicas de los Grupos de Coxeter.

En esta sección, (W, S) denotará un sistema de Coxeter. Una consecuencia del Teorema 1.28 es que para cualquier $w \in W$, el conjunto de letras que puede ocurrir en una expresión reducida para él es independiente de la elección reducida. Más precisamente:

Proposición 1.30. *Para cada* $w \in W$*, existe un subconjunto* $S(w) \subseteq S$ *tal que para cualquier expresión reducida* $(s_1, \dots, s_k)$ *para* w*,* $S(w) = \{s_1, \dots, s_k\}$*.*

Demostración. Las operaciones $M-$elementales del tipo (2) no cambian el conjunto de letras de una expresión reducida; así la proposición se sigue del Teorema 1.28. ❑

Recordemos que para cada subconjunto $T \subseteq S$, denotamos por W_T al subgrupo generado por T. Decimos entonces que W_T es un **subgrupo especial** de W. A continuación damos algunas consecuencias de la proposición anterior.

Corolario 1.31. *Para cada* $T \subseteq S$*,* W_T *consiste de aquellos elementos* $w \in W$ *tales que* $S(w) \subseteq T$*.*

Demostración. Si $(s_1, \dots, s_k)$ es una expresión reducida para w, entonces $(s_k, \dots, s_1)$ es una expresión reducida para w^{-1}. Luego, $S(w^{-1}) = S(w)$. Por otro lado, dadas dos expresiones reducidas para w y v, las podemos concatenar para obtener una palabra para vw. Aunque esta palabra puede no ser reducida, usando la Condición de Borrado, podemos obtener una expresión reducida simplemente borrando letras, así, $S(vw) \subseteq S(v) \cup S(w)$. Sea $X = \{w \in W : S(w) \subseteq T\}$. Claramente, $X \subseteq W_T$ y por lo anterior, X es un subgrupo de W_T. Como $T \subseteq X$ y W_T es el subgrupo generado por T, entonces $W_T \subseteq X$. por lo tanto, $W_T = X$. ❑

Corolario 1.32. *Para cada* $T \subseteq S$*,* $W_T \cap S = T$*.*

Corolario 1.33. S *es un conjunto mínimo de generadores para* W*.*

Corolario 1.34. *Para cada* $T \subseteq S$ *y cada* $w \in W_T$*, la longitud de* w *con respecto a* T*, denotada por* $l_T(w)$*, es igual a la longitud de* w *con respecto a* S*, denotada por* $l_S(w)$*.*

Teorema 1.35.

1. *Para cada* $T \subseteq S$*,* (W_T, T) *es un sistema de Coxeter.*
2. *Consideremos una familia* $(T_i)_{i \in I}$ *de subconjuntos de* S*. Si* $T = \cap_{i \in I} T_i$*, entonces*

$$W_T = \bigcap_{i \in I} W_{T_i}.$$

3. *Si* T *y* T' *son dos subconjuntos de* S *y* $w, w' \in W$*, entonces tenemos que* $wW_T \subset w'W_{T'}$ *(resp.* $wW_T = w'W_{T'}$*) si y sólo si* $w^{-1}w' \in W_{T'}$ *y* $T \subset T'$ *(resp.* $T = T'$*).*

Demostración.

1. Tenemos que (W_T, T) es un sistema pre-Coxeter. Sean $t \in T$ y $w \in W_T$ tales que $l_T(tw) \leq l_T(w)$. Como la longitud es invariante, entonces $l_S(tw) \leq l_S(w)$. Sea $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k)$ una expresión reducida para w, donde $t_i \in T$ para toda $i = 1, \ldots, k$. Como (W, S) satisface la Condición de Intercambio, una letra de $\mathbf{t}$ puede cambiarse por una t enfrente; luego, (W_T, T) satisface la Condición de Intercambio y por lo tanto es un sistema de Coxeter.
2. $\Rightarrow$ Como $wW_T \subseteq w'W_{T'}$, entonces $w^{-1}w' \in W_{T'}$. Por otro lado, para cada $t \in T$ tenemos que $t \in W_{T'}$ y así $S(t) \subseteq T'$. Pero como $S(t) = \{t\}$, entonces $T \subseteq T'$. Análogamente, se tiene que $T' \subseteq T$. $\Leftarrow$ Como $T \subseteq T'$, entonces $W_T \subseteq W_{T'}$. Además, por hipótesis se tiene que $w^{-1}w' \in W_{T'}$, entonces se tiene el resultado.
3. Es clara.

❏

3. Representaciones de Grupos de Coxeter.

3.1. La Representación Canónica. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Recordemos que una *reflexión lineal* sobre V es un automorfismo $r : V \to V$ tal que $r^2 = 1_V$ y el subespacio fijo de r es un hiperplano. Más aún, dado un $(-1)-$vector propio e de r y una formal lineal $\alpha \in V^*$ con núcleo H, entonces r queda determinado por la fórmula

$$r(v) = v - 2\frac{\alpha(v)}{\alpha(e)}e.$$

Recíprocamente, si α es una forma lineal sobre V y $e \in V$ es cualquier vector tal que $\alpha(e) \neq 0$, entonces la transformación lineal r dada por la ecuación anterior, es una reflexión lineal.

Definición 1.36. Dada una mariz de Coxeter $M = (m_{st})$ sobre S, la **matriz de cosenos** asociada a M es la matriz (c_{st}) sobre S dada por

$$c_{st} := -\cos\frac{\pi}{m_{st}}.$$

Cuando $m_{st} = \infty$, interpretaremos a π/∞ como 0 y $-\cos\pi/0 = \cos 0 = -1$.

Consideremos un espacio vectorial real $\mathbb{R}^S$ de dimensión $|S|$ con base $\{e_s\}_{s \in S}$. Denotemos por B_M a la forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^S$ asociada a la matriz de cosenos, es decir,

$$B_M(e_s, e_t) = c_{st} := -\cos\frac{\pi}{m_{st}}.$$

Para cada $s \in S$, sea H_s el hiperplano definido por

$$H_s := \{x \in \mathbb{R}^S : B_M(e_s, x) = 0\}$$

y $\rho_s : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S$ la reflexión lineal

$$\rho_s(x) = x - 2B_m(e_s, x)e_s.$$

Lema 1.37. *Con la notación anerior, el orden de $\rho_s\rho_t$ es m_{st}.*

Demostración. Sea $W_{st} = \langle \rho_s, \rho_t \rangle$ el grupo diédrico generado por ρ_s y ρ_t. El subespacio E_{st} de $\mathbb{R}^S$ generado por e_s y e_t es $W_{st}-$estable. Sea $m := m_st$, entonce la restricción de la forma bilineal B_M a E_{st} está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{m} \\ -\cos\frac{\pi}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es positiva definida para $m \neq \infty$. Para $m = \infty$, tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

la cual es semi-positiva definida con núcleo la recta generada por el vector $e_s + e_t$. Consideremos los dos caso separadamente.
Supongamos pues que $m = \infty$ y sea $u = e_s + e_t$, entonces

$$\rho_s\rho_t(e_s) = \rho_s(e_s + 2e_t) = 3e_s + 2e_t = 2u + e_s.$$

Luego, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$(\rho_s\rho_t)^n(e_s) = 2nu + e_s$$

y por lo tanto $\rho_s\rho_t$ tiene orden infinito.
Por otro lado, supongamos que $m \neq \infty$. Como B_M es positiva definida sobre E_{st}, podemos identificar a E_{st} con $\mathbb{R}^2$. Sea L_s (resp. L_t) la recta en E_{st} ortogonal a e_s (resp. e_t). Notemos que la restricción de ρ_s (resp. ρ_t) a E_{st} es una reflexión ortogonal a través de L_s (resp. L_t), más aún, las rectas L_s y L_t hacen un ángulo de π/m y la acción de W_{st} sobre E_{st} es equivalente a la acción estándar del grupo diédrico D_m sobre $\mathbb{R}^2$. En particular, la restricción de $\rho_s\rho_t$ a E_{st} es una rotación por un ángulo de $2\pi/m$. Como B_M es positiva definida sobre E_{st}, entonces $\mathbb{R}^S$ se descompone, como $W_{st}-$representación, como la suma directa de E_{st} y su complemento ortogonal (con respecto a B_M). Más aún, W_{st} fija este complemento ortogonal. Así, el orden de $\rho_s\rho_t$ es m. ❑

Corolario 1.38. *La aplicación $S \to GL(\mathbb{R}^S)$ dada por $s \mapsto \rho_s$ se extiende a un homomorfismo de $\rho : W \to GL(\mathbb{R}^S)$. Al cual se le llama la* ***representación canónica*** *de W.*

Corolario 1.39. *Supongamos que M es una matriz de Coxeter sobre S y que W es el grupo con conjunto de generadores S definido por la presentación asociada a M.*

1. *Para todo $s \in S$, s tiene orden 2*

2. *Los elementos de S en W son distintos.*
3. *st tiene orden m_{st}.*

Luego, (W, S) es un sistema de Coxeter.

3.2. La Representación Geométrica. Nuevamente consideraremos una matriz de Coxeter $M = (m_{st})$ sobre S, el sistema de Coxeter asociado (W, S), la forma bilineal asociada B_M sobre $E = \mathbb{R}^S$ y la representación canónica $\rho : W \to GL(E)$. A la representación dual $\rho^* : W \to GL(E^*)$ la llamamos la **representación geométrica** de (W, S). Para cada $s \in S$ definamos la forma lineal $\xi_s \in E^*$ como $\xi(x) = B_M(e_s, x)$ y notemos que

$$\rho^*(s)(\varphi)(x) = \rho_s^*(\varphi)(x) = \varphi(\rho_s(x)) = \varphi(x) - 2\xi_s(x)e_s(\varphi) = (\varphi - 2e_s(\varphi)\xi_s)(x)$$

y por lo tanto $\rho_s^*(\varphi) = \varphi - 2e_s(\varphi)\xi_s$. Como e_s es una forma lineal sobre E^* y $\xi_s \in E^*$ es un vector tal que $e_s(\xi_s) = 1$, se tiene que ρ_s^* es una reflexión lineal.
Sea C el cono simplicial en E^* definido por las desigualdades

$$e_s(\varphi) \geq 0, \text{ para todo } s \in S$$

y sea $\mathring{C}$ su interior, definido por la desigualdad estricta.

Definición 1.40. Sea G un grupo y sea X un $G-$conjunto. Un subconjunto $A \subseteq X$ es **prefundamental** para G si siempre que $gB \cap B \neq \emptyset$, entonces $g = 1$.

Supongamos que (W, S) es un sistema pre-Coxeter y que W actúa en un conjunto Π. Supongamos además que para cada $s \in S$, existen subconjuntos $B_s \subseteq \Pi$ prefundamentales para W_s y que $B := \cap_{s\in S} B_s$ es no vacío. Consideraremos la siguiente propiedad de $(W, S, \{B_s\}_{s\in S})$:

(P) Para cualesquiera $w \in W$ y $s \in S$ se tiene que $wB \subseteq B_s$ ó $wB \subseteq sB_s$, además en este caso $l(sw) = l(w) - 1$.

Observación 1.41. Notemos que (P) implica que B es prefundamental para W.

Lema 1.42. [Tits, [**24**]] *Con la notación anterior, supongamos que para cada pareja de elementos distintos $s, t \in S$, $(W_{\{s,t\}}, \{s, t\}, \{B_s, B_t\})$ satisface (P). Entonces $(W, S, \{B_s\}_{s\in S})$ satisface (P).*

Denotemos por H_s al semi-espacio abierto de E^* definido por $e_s(\xi) > 0$ y consideremos los conjunto

$$A_s := \{w \in W : w\mathring{C} \subseteq H_s\}.$$

LEMA 1.43. *Dados $s, t \in S$ distintos y $w \in W_{\{s,t\}}$, $v(A_s \cap A_t)$ está contenido en A_s ó en sA_s y en el segundo caso, $l(sv) = l(v) + 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $E_{\{s,t\}} := e_s\mathbb{R} \oplus e_t\mathbb{R} \subseteq E$ y sea $E^*_{\{s,t\}} := E^*/\mathrm{Ann}(E_{\{s,t\}})$, es decir, $E^*_{\{s,t\}}$ es el 2−plano dual de $E_{\{s,t\}}$. Tenemos que $W_{\{s,t\}}$ actúa naturalmente sobre $E^*_{\{s,t\}}$ y esta acción se identifica naturalmente con la representación geométrica del sistema de Coxeter $W_{s,t}, \{s, t\}$. Además, con esta identificación, el dual de la inclusión $E_{\{s,t\} \hookrightarrow E}$ es la suprayección $W_{\{s,t\}}$−equivariante $p : E^* \to E^*_{\{s,t\}}$ y los subconjuntos H_s, H_t y $H_s \cap H_t$ son las imagenes inversas bajo p de los correspondientes subconjuntos de $E^*_{\{s,t\}}$. Más aún, como $l'(u) = l(u)$ para todo $u \in W_{\{s,t\}}$, donde $l'(u)$ es la longitud de u con respecto a $\{s, t\}$, basta con probar el lema para el caso en que W es el grupo diédrico $W_{\{s,t\}}$ de orden $2m$, donde m es el orden de st. Tenemos pues dos casos:

Caso 1: $m = \infty$

Sea (ξ, φ) la base dual a (e_s, e_t). Tenemos que

$$\begin{aligned} s\xi(e_s) &= -\xi(e_s) \\ s\xi(e_t) &= 2\varphi(e_t), \end{aligned}$$

así, $s\xi = -\xi + 2\varphi$. Análogamente tenemos que

$$s\varphi = \varphi, \quad t\xi = \xi, \quad \text{y} \quad t\varphi = 2\xi - \varphi.$$

Consideremos la recta afín L en E^* generada por ξ y φ. Lo anterior muestra que L es estable bajo la acción de W. Sea $f : \mathbb{R} \to L$ el isomorfismo afín dado por $f(\tau) = \tau\xi + (1 - \tau)\varphi$ y transportemos la acción de W a $\mathbb{R}$, la cual claramente coincide con la acción estándar del grupo diédrico infinito en $\mathbb{R}$: $s\tau = -\tau$ y $t\tau = 2 - \tau$, es decir, s es la reflexión por 0 y t es la reflexión por 1. Sea $I_n \subseteq L$ la imagen de $(n, n + 1)$, con $n \in \mathbb{Z}$ y sea $C_n \subseteq E^*$ la unión de todos los múltiplos reales positivos de I_n y notemos que $\mathring{C} = C_0$. Ahora, W permuta simple y transitivamente a $(n, n + 1)$ para toda $n \in \mathbb{Z}$, entonces W permuta simple y transitivamente a I_n. Si $v \in W$, entonces $v\mathring{C}$ es igual a uno de los C_n y así, esta en el lado positivo de φ si $n \geq 0$ o en el negativo si $n < 0$. Más aún, si $n \geq 0$, entonces $v\alpha \in H_s$ para todo $\alpha \in \mathring{C}$. Luego, si $w \in A_s \cap A_t$ y por lo tanto $v(A_s \cap A_t) \subseteq A_s$. Por otro lado, si $n < 0$, entonces $v\mathring{C}$ está en el lado negativo de φ y $v(A_s \cap A_t) \subseteq sA_s$. En este segundo caso, I_0 e I_n están en lados opuestos de φ y así, $(n, n + 1)$ y $(0, 1)$ están en lados opuestos de 0. Luego, $v = (st)^n$ si $l(v) = 2n$, entonces $sv = (st)^{n-1}t$ y $l(sv) = l(v) - 1$ ó $v = (st)^n s$ si $l(v) = 2n + 1$, entonces $sv = (ts)^n$ y $l(sv) = l(v) - 1$.

Caso 2: $m < \infty$

En este caso la forma bilineal B_M tiene matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\pi/m \\ -\cos\pi/m & 1 \end{pmatrix}$$

Como su determinante es $1 - \cos^2 \pi/m = \sin^2 \pi/m > 0$, entonces B_M es positiva definida. Luego, podemos usar a B_M para identificar a ambos E y E^* con el plano $\mathbb{R}^2$. Luego de la identificación, e_s y e_t se vuelven vectores unitarios y hacen un ángulo de $\pi - \pi/m$ y C se convierte en sector acotado por las líneas de reflexión l_s y l_t que hacen un ángulo de π/m. Sea C_n, con $n \in \mathbb{Z}$, la unión de las semi-rectas l que empiezan en el origen tales que $n < (\widehat{l_s, l}) < (n+1)\pi/m$. Tenemos entonces que $C_{2k} = \rho_{2k\pi/m}(C)$ y $C_{2k-1} = \rho_{frm-ek\pi/m} s(C)$. Más aún, $C_n = C$ si y sólo si $n \in 2\pi\mathbb{Z}$. Consecuentemente, W permuta las cámaras C_n simple y transitivamente. Haciendo un análisis similar al del caso anterior, se llega al resultado en este caso también. ❑

Teorema 1.44. [Tits] *Sea $w \in W$. Si $w\mathring{C} \cap \mathring{C} \neq \emptyset$, entonces $w = 1$.*

Demostración. Por el lema anterior y el Lema 1.42, $(W, S, \{A_s\}_{s \in S})$ satisface la propiedad (P). Luego, $\cap A_s$ es un sistema prefundamental para W, es decir, $w\mathring{C} \cap \mathring{C} \neq \emptyset$ implica que $w = 1$. ❑

Como corolarios inmediatos tenemos los siguientes resultados que nos dicen que todo grupo de Coxeter finitamente generado se puede ver como un grupo de relfexiones lineales (discreto) de algún espacio vectorial real de dimensión finita.

Corolario 1.45. *$\rho^* : W \to GL(E^*)$ es fiel y por tanto $\rho : W \to GL(E)$ también es fiel.*

Corolario 1.46. *$\rho^*(W)$ es un subgrupo discreto de $GL(E^*)$. Similarmente, $\rho(W)$ es un subgrupo discreto de $GL(E)$.*

Demostración. Sea $\varphi \in \mathring{C}$ y sea $V := \{g \in GL(E^*) : g(\varphi) \in \mathring{C}\}$. Notemos que V es una vecindad abierta de 1 en $GL(E^*)$. En efecto, tenemos que para cualquier $f \in E^*$ fijo, la aplicación orbital $GL(E^*) \to E^*$ dada por $g \mapsto gf$ es continua, pues su representación en coordenadas está dada por polinomios lineales y V es la imagen de $\mathring{C}$. Luego, por el Teorema de Tits 1.44, $V \cap \rho^*(W) = 1$, y así $\rho^*(W)$ es un subgrupo discreto. Se sigue que $\rho(W)$ es discreto. ❑

En [**22**], Selberg demostró el siguiente resultado:

Lema 1.47. [Selberg] *Un grupo finitamente generado de matrices sobre un campo de característica cero tiene un subgrupo libre de torsión de índice finito.*

Para una prueba básica de este hecho se puede consultar [**1**]; y una prueba en el caso en que el campo base es $\mathbb{C}$ se puede consultar en [**21**]. Como todo grupo de Coxeter finitamente generado es subgrupo del grupo $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ para alguna n, entonces tenemos el siguiente resultado, el cual tendrá consecuencias importantes en nuestro estudio de variedades asféricas.

Teorema 1.48. *Todo grupo de Coxeter finitamente generado es virtualmente libre de tosión.*

Recordemos que cualquier representación de un grupo finito G sobre un espacio vectorial real V de dimensión finita admite una forma bilineal simétrica y positiva definida; es decir, un producto interno, que es $G-$invariante. Luego, cualquier grupo finito de automorfismos lineales de un espacio vectorial real V de dimensión finita n, podemos escoger un producto interno $G-$invariante sobre V de modo que V es isométrico a $\mathbb{R}^n$ vía una isometría que manda G a un subgrupo de $O(n)$ y por lo tanto podemos asumir que todo subgrupo lineal finito es un subgrupo de $O(n)$. Así, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1.49. *Cualquier representación de un grupo finito G sobre un espacio vecotrial real V de dimensión finita es semi-simple, es decir, cualquier subespacio $G-$estable de V es un sumando directo.*

Si V es un espacio vectorial real sobre un campo k, un endomorfismo lineal $r : V \to V$ es una **pseudo-reflexión** si $1_V - r$ es de rango 1. Por ejemplo, nótese que toda reflexión es una pseudo-reflexión. Para otro ejemplo podemos considerar $k = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^n$ y $\lambda \neq 1$ un número complejo, entonces $r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, dada por $r(e_1) = \lambda e_1$ y $r(e_i) = e_i$ para $i > 1$, es una pseudo-reflexión. Del álgebra lineal tenemos el siguiente resultado (ver [**4**]):

Lema 1.50. *Sea ρ un representación lineal irreducible de un grupo G sobre un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo k. Supongamos que existe $g \in G$ tal que $\rho(g)$ es una pseudo-reflexión.*

1. *Si $u : V \to V$ es un endomorfismo lineal que conmuta con $\rho(G)$, entonces u es una homotecia, es decir, $u = c1_V$ para alguna constante $c \in k$.*
2. *Toda forma bilineal $G-$invariante no cero sobre V es no degenerada. Más aún, cualquier tal forma es simétrica o semi-simétrica.*
3. *Cualesquiera tales formas bilineales $G-$invariantes son proporcionales.*

Finalmente, consideraremos el siguiente criterio de finitud para un grupo de Coxeter, en términos de su forma bilineal asociada B_M.

Teorema 1.51. *Sean $M = (m_{st})$ una matriz de Coxeter sobre S, (c_{st}) la matriz de cosenos asociada y (W, S) el sistema de Coxeter asociado. Entonces W es un grupo finito si y sólo si (c_{st}) es positiva definida.*

Observación 1.52. Se puede probar que un grupo de Coxeter es finito sy y sólo si es el grupo de reflexiones de un simplejo esférico ver [**9**].

Capítulo 2

El Complejo de Davis

En este capítulo y el siguiente, supondremos que el lector está familiarizado con las nociones de complejos simpliciales (abstractos), así como algunas de sus propiedades. En particular, supondremos que se conocen los conceptos de *estrellas cerradas*, *enlaces* y *realizaciones geométricas*. Se puede consultar por ejemplo [**20**].

1. La Construcción Básica.

Sea (W, S) un sistema pre-Coxeter y sea X un espacio topológico. Una **estructura de espejos** para X sobre S es una familia localmente finita $(X_s)_{s\in S}$ de subespacios cerrados de X. A cada X_s le llamamos **espejo** de X. Además, para cada $x\in X$ y cada subconjunto no vacío $T \subseteq S$ definimos

$$\begin{aligned} S(x) &:= \{s\in S : x\in X_s\} \\ X_T &:= \bigcap_{t\in T} X_t \\ X^T &:= \bigcup_{t\in T} X_t \end{aligned}$$

A X_T se le suele llamar **co-cara** de X y a X^T **cara** de X.

Consideremos ahora a W con la topología discreta y definamos una relación sobre el producto $W \times X$ como sigue:

$$(w, x) \sim (w', x') \quad \text{si y sólo si} \quad x = x' \quad \text{y} \quad w^{-1}w'\in W_{S(x)},$$

donde si $S(x) = \emptyset$, entonces hacemos por convención $W_\emptyset = 1$. Claramente, $\sim$ es una relación de equivalencia; así, podemos definir el espacio cociente

$$\mathcal{U}(W, X) := \frac{W \times X}{\sim}.$$

Observación 2.1. Intuitivamente, $\mathcal{U}(W, S)$ (o simplemente $\mathcal{U}$ cuando no haya confusión) se construye pegando $|W|$ copias de X a traves de sus espejos. Por ejemplo, las copias $\{w\} \times X$ y $\{ws\} \times X$ se pegan en $\{w\} \times X_s$ y $\{ws\} \times X_s$.

Denotaremos por $[w, x]$ a la imagen de (w, x) bajo la proyección cociente. Observemos que el grupo W actúa en $W \times X$ como $w'(w, x) = (w'w, x)$. Más aún, esta acción es compatible con $\sim$ y por tanto *pasa* a una acción de W en el cociente $\mathcal{U}$ dada por $w'[w, x] = [w'w, x]$. Además, para cada $[w, x] \in \mathcal{U}$, su grupo de isotropía está dadpo por $wW_{S(x)}s^{-1}$.

LEMA 2.2. [Vinberg, [**26**]] *Con la notación anterior tenemos los siguiente resultados.*

1. *La aplicación* $\imath : X \to \mathcal{U}$ *definida por* $\imath(x) = [1, x]$ *es un homeomorfismo sobre su imagen. Luego, podemos identificar a* X *con* $\imath(X)$
2. *La aplicación* $p : \mathcal{U} \to X$ *definida por* $p[w, x] = x$ *induce un homeomorfismo* $\mathcal{U}/W \to X$.
3. *Si* Z *es un* $W-$*espacio y* $\varphi : X \to Z$ *es una aplicación tal que* $s\varphi(x) = \varphi(x)$ *para todo* $s \in S$ *y todo* $x \in X_s$*, entonces* φ *se extiende a una aplicación* $W-$*equivariante* $\bar{\varphi} : \mathcal{U} \to Z$*, dada por* $\bar{\varphi}[w, x] = w\varphi(x)$.

OBSERVACIÓN 2.3. Con la notación del lema anterior, tenemos que $\imath(X)$ es cerrado en $\mathcal{U}$. Luego, podemos resumir lo anterior diciendo que X es un **dominio fundamental estricto** para W en $\mathcal{U}$, en el sentido de que cada $W-$órbita interseca a X exactamente en un punto.

A la imagen de $\{w\} \times X$ bajo π en $\mathcal{U}$ la llamamos una **cámara** de $\mathcal{U}$ y a la imagen de $\{1\} \times X$ la llamamos la **cámara fundamental** de $\mathcal{U}$.

LEMA 2.4. *$\mathcal{U}$ es conexo si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *X es conexo.*
2. *$X_s \neq \emptyset$ para todo $s \in S$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\mathcal{U}$ se escribe como la unión de dos abiertos ajenos $\mathcal{U} = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Notemos que entonces $V_[1$ y V_2 también son cerrados ajenos. Como X es conexo, entonces $X \subseteq V_1$ ó $X \subseteq V_2$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $X \subseteq V_1$. Notemos que como V_1 es abierto y cerrado, entonces $V_1 = \pi(A \times X) = \cup_{a \in A} aX$ para algún conjunto no vacío $A \subseteq W$, es decir, V_1 es la unión de cámaras. Tenemos entonces que $1 \in A$ pues $X = 1X$. Sea $s \in S$ y sea $x \in X_s$, entonces para todo $a \in A$ tenemos que $[as, x] = [a, x]$, y así $asX \cap aX \neq \emptyset$. En particular, $sX \cap X \neq \emptyset$, esto que implica que $sX \in V_1$ y así, $s \in A$. Procediendo por inducción podemos mostrar que todas las palabras en S pertenecen a A y así, $A = W$, es decir, $V_1 = \mathcal{U}$ y $V_2 = \emptyset$ y por lo tanto, $\mathcal{U}$ es conexo. ❏

EJEMPLO 2.5. Sea (W, S) un sistema pre-Coxeter y sea X el cono sobre S. Si para cada $s \in S$ hacemos $X_s := [s, 1]$, entonces se puede mostrar fácilmente que $\mathcal{U}$ es isomorfo a la gráfica de Cayley $Cay(W, S)$.

2. El Complejo Σ.

Nuevamente, (W, S) denotará un sistema de Coxeter. Por la observación 1.52 tenemos que un grupo de Coxeter es finito si y sólo si actúa por reflexiones sobre S^n a traves de un simplejo esférico. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.6. Un subconjunto $T \subseteq S$ es **esférico**, si W_T es un subgrupo finito de W y en este caso decimos que W_T es un **subgrupo esférico** de S.

Denotemos por $\mathcal{S}(W, S)$, o simplemente por $\mathcal{S}$, al conjunto de todos los subconjuntos esféricos de S, es decir,

$$\mathcal{S} := \{T \subseteq S : |W_T| < \infty\}.$$

Consideraremos a $\mathcal{S}$ como conjunto parcialmente ordenado con el orden parcial dado por la inclusión. Notemos que el conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{S}_{>\emptyset}$ de todos los conjuntos esféricos no vacíos de S es un complejo simplicial abstracto. A la realización geométrica L de $\mathcal{S}_{>\emptyset}$ la llamamos el **nervio** del sistema (W, S). Luego, identificamos con S al conjunto de vértices de L y un subconjunto no vacío $T \subseteq S$ de vértices, genera un simplejo si y sólo si T es esférico. Al conjunto de $(k-1)-$simplejos en L; es decir, el conjunto de los conjuntos esféricos de cardinalidad k, lo denotaremos por $\mathcal{S}^{(k)}$.

Ejemplo 2.7.

1. Si W es un grupo finito, entonces $\mathcal{S}$ es el conjunto potencia de S y L es el simplejo sobre S.
2. Si W es el grupo diédrico infinito, entonces L consiste únicamente de dos puntos.
3. Sea Γ una gráfica simplicial conexa con conjunto de vértices S (aquí S es un conjunto arbitrario, no necesariamente en conjunto de generadores de algún grupo) y supongamos que las aristas de Γ son etiquetadas por enteros ≥ 2. Podemos entonces definir una matriz de Coxeter $M = (m_{st})$ sobre S como sigue:

$$m_{st} = \begin{cases} 1, & s = t \\ \text{etiqueta sobre } \{s,t\}, & \{s,t\} \text{ es arista} \\ \infty, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Sea (W, S) el sistema de Coxeter asociado a M. Entonces el $1-$esqueleto del nervio L es el conjunto de subconjuntos esféricos de cardinalidad 2. Notemos que $\{s, t\}$ es esférico si y sólo si st tiene orden finito; es decir, si y sólo si $\{s, t\}$ es una arista de L, si y sólo si es una arista de Γ. Luego, $\mathcal{S}^{(2)} = L$.

Definición 2.8. Un sistema de Coxeter (W, S) es **angulado recto** si las entradas de su matriz de Coxeter toman valores en $\{2, \infty\}$.

Definición 2.9. Un complejo simplical abstracto $\mathcal{S}$ con conjunto de vértices S es un **complejo bandera** si dado cualquier subconjunto finito no vacío $T \subseteq S$ tal que cualesquiera dos de sus elementos son conectados por una arista de $\mathcal{S}$, entonces T es un simplejo de $\mathcal{S}$. A la realización geométrica L de $\mathcal{S}$ también la llamaremos **complejo bandera**

Lema 2.10. *Si (W, S) es angulado recto, entonces el nervio $L(W, S)$ es un complejo bandera.*

Demostración. Supongamos que $T \subseteq S$ es tal que cualesquiera dos elementos de T son conectados por una arista en $L(W, S)$. Como (W, S) es angulado recto, entonces para cualesquiera $s, t \in S$ tenemos que $\{s, t\}$ es una arista de $L(W, S)$ si el orden de st es 2. Luego, $W_T \cong (C_2)^{|T|}$ y así, T es esférico. Por lo tanto, $L(W, S)$ es un complejo bandera. ❑

Observación 2.11. Supongamos que un conjunto S está equipado con una relación de *incidencia*, es decir, una relación reflexiva y simétrica. Una **bandera** en S es un subconjunto de elementos incidentes dos a dos. Sea $\mathrm{Flag}(S)$ el conjunto de todas las banderas finitas de S parcialmente ordenado por inclusión. Obviamente, $\mathrm{Flag}(S)$ es un complejo simplicial abstracto con junto de vértices..

Observación 2.12. Si en el inciso 3) del ejemplo anterior suponemos que todas las etiquetas de Γ son 2, entonces el sistema de Coxeter asociado es angulado recto. Más aún, tenemos que $L = \mathrm{Flag}(S)$. En efecto, $T \subseteq S$ es un simplejo de $\mathrm{Flag}(S)$ si y sólo si para cualesquiera dos vértices distintos $s, t \in T$ se tiene que $\{s, t\}$ es una arista de Γ, si y sólo si el orden de st es 2, si y sólo si $W_T \cong (C_2)^{|T|}$ si y sólo si T es un simplejo de L.

Observación 2.13. Observemos que si L es la realización geométrica de algún complejo simplicial abstracto $\mathcal{S}$, entonces $|\mathcal{S}|$ la realización geométrica del conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{S}$ es el cono sobre bL, la subdivisión baricéntrica de L. En efecto, $|\mathcal{S}_{>\emptyset}|$ es bL y así, $|S|$ es la junta de bL y un punto, donde $\emptyset$ corresponde al punto cónico.

El siguiente resultado, aunque sencillo, será de vital importancia para los fines de este trabajo.

Lema 2.14. *Para todo complejo simplicial L existe un sistema de Coxeter angulado recto (W, S) con nervio la subdivisión baricéntrica de L.*

Demostración. Sea bL la subdivisión baricéntrica de L y sea $S = \mathrm{Vert}(bL)$. Tenemos que el $1-$esqueleto de bL da la información para un sistema de Coxeter angulado recto (W, S). Por otro lado, los complejos bandera son determinados por sus $1-$esqueletos. Así; $L(W, S)$, el nervio de (W, s), es determinado por el $1-$esqueleto de bL; y como bL es un complejo bandera (asociado al conjunto parcialmente ordenado de simplejos de L), entonces $bL = L(W, S)$. ❑

Para cada subconjunto esférico T de S, a las clases laterales de W_T las llamamos **clases laterales esféricas** y denotamos por $W\mathcal{S}$ al conjunto de todas las clases laterales esféricas, es decir,

$$W\mathcal{S} := \bigcup_{T\in\mathcal{S}} W/W_T.$$

Por el Teorema 1.35 tenemos que la unión es ajena. Más aún, podemos considerar a $W\mathcal{S}$ como conjunto parcialmente ordenado, con orden parcial dado por la inclusión.
Claramente, tenemos una proyección bien definida $W\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ dada por $wW_T \mapsto T$. Además, tenemos una sección $\mathcal{S} \hookrightarrow W\mathcal{S}$ de esta proyección definida por $T \mapsto W_T$. Por otro lado, notemos que W actúa en $W\mathcal{S}$ de manera natural por *traslación izquierda* y el conjunto de órbitas es $\mathcal{S}$.

Denotemos por K a la realización geométrica del *conjunto parcialmente ordenado* $\mathcal{S}$ y por Σ a la realización geométrica de $W\mathcal{S}$. Notemos que tanto $W\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ como $\mathcal{S} \hookrightarrow W\mathcal{S}$ con aplicaciones simpliciales y por lo tanto inducen aplicaciones continuas $\pi : \Sigma \to K$ y $\imath : K \hookrightarrow \Sigma$. Identificaremos a K con su imagen en Σ bajo $\imath$.
Por otro lado, observemos que la acción de W sobre $W\mathcal{S}$ es simplicial; luego, tenemos una acción de W sobre Σ. A los trasladados de K por un elemento de w los llamamos **cámaras** de Σ, en particular a K lo llamamos la **cámara fundamental** de Σ.

Lema 2.15. *Cualquier simplejo de Σ es un trasladado de un simplejo de K.*

Demostración. Un simplejo de Σ está determinado por una cadena $w_0W_{T_0} \subseteq \cdots \subseteq w_nW_{T_n}$. Luego, por el Teorema 1.35 tenemos que $T_0 \subseteq \cdots \subseteq T_n$ y para toda $i = 1, \dots, n$, $w_iW_{T_i} = w_0W_{T_i}$. En otras palabras, el correspondiente simplejo en Σ es el trasladado por w_0 del simplejo en K correspondiente a $T_0 \subseteq \cdots \subseteq T_n$ ❑

Como $K = |\mathcal{S}|$ y $bL = |\mathcal{S}_{>\emptyset}|$, entonces K es el cono sobre la subdivisión baricéntrica de bL, con el punto cono dado por el conjunto vacío. Para cada $s\in S$ definamos

$$K_s := |\mathcal{S}_{\geq\{s\}}|.$$

De modo que K_s es la unión de todos los simplejos cerrados en K con vértice mínimo $\{s\}$, en otras palabras, K_s es la estrella cerrada del vértice correspondiente a s en la subdivisión baricéntrica de L. Tenemos pues definida una estructura de espejos sobre K dada por la familia $(K_s)_{s\in S}$. Notemos que x es un punto interior de un simplejo $(T_0 \subseteq \cdots \subseteq T_n)$, entonces el estabilizador de $\imath(x)$ en Σ es W_{T_0}. Luego, para todo $s\in S$, tenemos que $s\imath(x) = \imath(x)$ para todo $x\in K_s$. Por el Teorema 2.2 existe pues una aplicación continua $W-$equivariante $\tilde{\imath} : \mathcal{U}(W, K) \to \Sigma$; la cual, por el Lema 2.15 es biyectiva. Más aún, como $\mathcal{U}(W, K)$ y Σ tienen la *misma* topología, tenemos entonces el siguiente resultado.

Teorema 2.16. $\tilde{\imath} : \mathcal{U}(W, K) \to \Sigma$ *es un homeomorfismo $W-$equivariante.*

Observación 2.17. De lo discutido anteriormente, también se tiene que W actúa propiamente sobre $\mathcal{U}(W, K) \cong \Sigma$.

3. Propiedades del complejo Σ.

Continuaremos usando la notación de la sección anterior.

Lema 2.18.

1. *K es contraible.*
2. *Para todo $T \in \mathcal{S}$, la co-cara $K_T = \cap_{s \in T} K_s$ es contraible.*
3. *Para todo $T \in \mathcal{S}_{>\emptyset}$, la cara $K^T = \cup_{s \in T} K_s$ es contraible.*

Demostración.

1. Como $K = |\mathcal{S}|$ es el cono sobre la sundivisión baricéntrica de nervio de L, entonces K es contraible.
2. Notemos que $K_T = |\mathcal{S}_{\geq T}|$, luego, K_T es un cono y por lo tanto contraible.
3. Recordemos que $bL = |\mathcal{S}_{>\emptyset}|$. Para cualquier $T \in \mathcal{S}_{>\emptyset}$, sea σ_T un simplejo del nervio L. Así, su subdivisión baricéntrica $b\sigma_T$ es un subcomplejo de bL. Observemos que K^T es la unión de las estrellas cerradas en bL de los vértices $s \in T$. Como $b\sigma_T$ es contraible, bastará con probar que existe una retracción por deformación simplicial $r : K^T \to b\sigma_T$. Un vértice de K^T está en K_s para algún $s \in T$. Un vértice de K_s corresponde a un subconjunto esférico T' con $s \in T'$. Luego, si T' corresponde a un vértice de K^T, podemos considerar el subconjunto esférico $T' \cap T$. Ésta intersección no es vacía pues $s \in T' \cap T$ para algún $s \in T'$. Luego, $T' \cap T$ corresponde a un vértice de $b\sigma_T$ y la aplicación $T' \mapsto T' \cap T$ define una retracción simplicial $r : K^T \to b\sigma_T$. Ésta aplicación colapsa un simplejo de la forma $\{T'_0, \ldots, T'_k\}$ a su cara $\{T'_0 \cap T, \ldots, T'_k \cap T\}$. En la realización geométrica de este simplejo, tenemos el segmento de recta de cualquier punto x a su imagen bajo r. Luego, la homotopía $h_t(x) = (1-t)x + tr(x)$ está bien definida de id a r.

❑

Para cada $w \in W$, sea

$$In(w) := \{s \in S : l(ws) < l(w)\}.$$

Claramente, si $w \neq 1$, entonces $In(w) \neq \emptyset$.

Proposición 2.19. *Para todo $w \in W$, $In(w)$ es un subconjunto esférico de S, es decir, el subgrupo $W_{In(w)}$ es finito.*

Demostración. Sea $d = l(w)$. Bastará con probar que toda palabra reducida en $In(w)$ tiene longitud menor o igual que d. Sea $(t_1, \ldots, t_k)$ una palabra de longitud mínima sobre $In(w)$ y sea $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ una expresión reducida para w. Observemos que, usando la Condición de Borrado, para cada $k \leq d$, $w = s_1, \cdots \hat{s}_{i_1} \cdots \hat{s}_{i_k} \cdots s_d t_1 \cdots t_k$, es decir, $t_1 \cdots t_k$ puede aparecer al lado derecho de una representación reducida de w. Luego, si $k > d$, tenemos que $w = t_1 \cdots t_d$ y así, $wt_{d+1} = t_1 \cdots t_{d+1}$. como $t_{d+1} \in In(w)$, entonces $t_1 \cdots t_{d+1}$ no es reducida, lo cual es una contradicción. ❏

El siguiente resultado es una consecuencia sencilla de la Condición de Borrado y nos permitirá mostrar que el complejo Σ es contraíble. Para una demostración ver [**3**].

Lema 2.20. *Sean $T, T' \subseteq S$, sea $v \in W$ y consideremos la clase lateral doble $W_T v W_{T'}$. Todo elemento $w' \in W_T v W_{T'}$ se puede escribir como $w' = awa'$, donde $a \in W_T$, $a' \in W_{T'}$ y $w \in W_T v W_{T'}$ es un elemento de longitud mínima y $l(w') = l(a) + l(w) + l(a')$. En particular, existe un único elemento de longitud mínima de tal clase lateral doble.*

Enumeremos a los elementos de W como sigue: $1 = w_0, w_1, \ldots,$ de modo que $l(w_i) \leq w_j$ siempre que $i < j$. Sea A_n el subcomplejo de Σ

$$A_n := \bigcup_{i=0}^{n} w_i K.$$

Lema 2.21. *$A_n \cap w_{n+1}K = w_{n+1}K^{In(w_{n+1})}$ y por lo tanto, $A_n \cap w_{n+1}K$ es contraible.*

Demostración. Tenemos que $In(w_{n+1}) \neq \emptyset$, así $K^{In(w_{n+1})}$ está bien definido. Claramente se tiene la inclusión $\supseteq$. En efecto, si $s \in In(w_{n+1})$, entonces $w_{n+1}s = w_i$ para algún $i \leq n$, y así cualquier simplejo de $w_{n+1}K_s$ con vértice inicial $w_{n+1}s$ debe de estar en $A_i \subseteq A_n$ y es claro que cualquier simplejo de $w_{n+1}K_s$ también está en $w_{n+1}K$.
Para la inclusión $\subseteq$, sea W_T un vértice de K y sea $w_{n+1}W_T \in A_n$. Entonces $w_{n+1}W_T = w_i W_{T'}$ para algún subgrupo esférico $W_{T'}$ y algún $i \leq n$. Luego, w_{n+1} no es de longitud mínima en $w_{n+1}W_T$. Por él lema anterior, podemos escribir a w_{n+1} como $w_{n+1} = kh$, donde k es el elemento de longitud mínima en $w_{n+1}W_T$ y $h \in W_T$. Entonces, $h \neq 1$ y $l(w_{n+1}) = l(k) + l(h)$. Sea $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_m)$ una expresión reducida para h de modo que $l(h) = m$, con $t_i \in T$. Tenemos pues que $l(htm) = l(h) - 1$. Así,

$$l(w_{n+1}t_m) = l(kht_m) \leq l(k) + l(ht_m) = l(k) + l(h) - 1 = l(w_{n+1}) - 1 < l(w_{n+1}),$$

por lo que $t_m \in In(w_{n+1})$. Así, $w_{n+1}W_T \in w_{n+1}K^{In(w_{n+1})}$ y así tenemos la contención en los vértices, lo cual basta pues ambos lados son subcomplejos plenos de Σ. ❏

Como corolario de lo anterior, tenemos el siguiente resultado importante.

TEOREMA 2.22. *El complejo Σ es contraible.*

Como veremos a continuación, el complejo Σ puede ser dotado de una estrutura celular *más gruesa* que su estrctura simplicial. La cual será útil más adelante en este trabajo.

Comencemos considerando un sistema de Coxeter (W, S) con W finito. Recordemos que bajo la representación canónica, W puede ser considerado como un subgrupo generado por reflexiones ortogonales en $E = \mathbb{R}^n$, donde $n = |S|$. Como W es finito, entonces podemos identificar a E con E^* y por lo tanto a la acción geométrica con la acción canónica. Sea K el cono simplicial determinado por $\langle v, e_s \rangle \leq 0$. Decimos que un punto $x \in \mathring{K}$ es un **punto genérico** y a la órbita Wx de un punto genérico la llamamos **órbita genérica**. Definimos la **célula de Coxeter de tipo** W, C_W, como la envolvente convexa de Wx, es decir,

$$C_W := conv(Wx).$$

EJEMPLO 2.23.

1. Si $W = \mathbb{Z}_2$, entonces $C_W = [-x, x]$.
2. Si W es el grupo diédrico de orden $2m$, entonces C_W es un $2m-$ágono, y este $2m-$ágono es regular si la distancia de x a cada uno de los hiperplanos de reflexión es la misma.

El siguiente lema nos permitirá definir una estructura célular más gruesa sobre Σ. Para una prueba ver [**5**].

LEMA 2.24. *Con las hipótesis anteriores, tenemos que el conjunto parcialmente ordenado de caras de la célula de Coxeter de tipo W es isomorfo a $W\mathcal{S}$. En particular, para cada $T \subseteq S$, la envolvente convexa de la W_T-órbita de x es una cara de C_W y es isomorfa a C_{W_T}.*

OBSERVACIÓN 2.25. Una consecuencia del lema anterior es que el tipo combinatoria de C_W no depende de $x \in \mathring{K}$. Además, $\Sigma = |W\mathcal{S}| = |\mathcal{F}(C_W)|$ es la subdivisión baricéntrica de C_W y por lo tanto, topológicamente es una célula. También, notemos que un subconjunot de W es el conjunto de vértices de una cara de C_W si y sólo si es una clase lateral esférica de W, pues la aplicación es inducida por $w \mapsto wx$.

Ahora pasemos al caso general en que W puede ser infinito. Comencemos con la siguiente proposición sencilla.

PROPOSICIÓN 2.26. *Existe un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados $(W\mathcal{S})_{\leq wW_T} \cong W_T\mathcal{S}$, donde $W_T\mathcal{S} = \{T' \in \mathcal{S} : T' \subseteq T\}$.*

OBSERVACIÓN 2.27. $wW_T \cap w'W_{T'} = w_0 W_{T\cap T'}$ si existe algún $w_0 \in wW_T \cap w'W_{T'}$.

Por la proposición anterior, tenemos que la cara $(W\mathcal{S})_{\leq wW_T} \cong W_T\mathcal{S}$, es decir, $|(W\mathcal{S})_{\leq wW_T}|$ es isomorfo a la subdivisión baricéntrica de C_{wW_T}, la célula de Coxeter de tipo W_T. Notemos que

$$C_{wW_T \cap w'W_{T'}} = \begin{cases} C_{w_0 W_{T\cap T'}}, & \text{si } w_0 \in wW_T \cap w'W_{T'} = w_0 W_{T\cap T'} \\ \emptyset, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, tenemos una estructura celular más gruesa sobre Σ, la cual es más gruesa que la simplicial, al identificar cada subdivisión baricéntrica con la correspondiente célula de Coxeter.

Observación 2.28. Notemos que las $0-$células de Σ corresponden a las clases laterales esféricas de $W_\emptyset$, es decir, a los elementos de W; y un subconjunto de W corresponde a los vértices de una célula de Σ si y sólo si es una clase lateral esférica de la forma wW_T. Más aún, si la célula de Coxeter es de tipo W_T, entonces $\dim C_{W_T} = |T|$, ya que por ejemplo, $bC_{W_T} = |W_T\mathcal{S}|$ y las células de mayor dimensión en C_{W_T} corresponden a cadenas de longitud máxima.
Por otro lado, las $1-$células corresponden a clases laterales esféricas wW_T con $|T| = 1$, es decir, $w\{1, s\} = \{w, ws\}$ y así, el $1-$esqueleto se identifica con la gráfica de Cayley $Cay(W, S)$. Las $2-$células corresponden a clases laterales esféricas en las que $|T| = 2$, luego $W_T \cong D_{2m}$ para algún m y así el se puede identificar al $2-$esqueleto con el $2-$complejo de Cayley $Cay(S, \mathcal{R})$ (ver [**9**]). Finalmente, como W actúa libre y transitivamente sobe el conjunto de vértices, entonces el enlace de un vértice $wW_\emptyset$ es igual al enlace de $1W_\emptyset$. Como $Lk(1W_\emptyset, \Sigma)$ es isomorfo a $\mathcal{F}(\Sigma)_{>1W_\emptyset}$, que a su vez es isomorfo al nervio L, entonces tenemos que el enlace de cada vértice es isomorfo al nervio L. Todo esto se resume en el siguiente teorema. (Ver [**9**]).

Teorema 2.29. *Existe una descomposición celular de Σ tal que*

1. *Cada célula de Σ es una célula de Coxeter.*
2. *El conjunto de vértices de Σ se identifica con el grupo W.*
3. *El $1-$esqueleto de Σ se identifica con la gráfica de Cayley $Cay(W, S)$.*
4. *El $2-$esqueleto de Σ se identifica con el $2-$complejo de Cayley $Cay(S\mathcal{R})$.*
5. *Un subconjunto $H \subseteq W$ es un subconjunto de vértices si y sólo si $H = wW_T$ para algún $w \in W$ y $T \subseteq \mathcal{S}$.*
6. *El conjunto parcialmente ordenado de células de Σ se identifica con $W\mathcal{S}$.*

Algunas consecuencias inmediatas son las siguientes.

Corolario 2.30. *El complejo Σ es simplemente conexo.*

Corolario 2.31. *Si el nervio L es homeomorfo a alguna esfera $\mathbb{S}^{n-1}$, entonces Σ es una $n-$variedad topológica.*

Definición 2.32. Una variedad cerrada de dimensión m es una $m-$**esféra homológica** si tiene la homología de $\mathbb{S}^m$. Un espacio X es una $n-$**variedad homológica** si tiene los mismos grupos locales de homología que $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$H_i(X, X-x) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = n \\ 0, & i \neq n \end{cases}$$

Un espacio X es una $n-$**esféra homológica generalizada** (GHS^n) si es una $n-$variedad homológica con la homología de $\mathbb{S}^n$.

Definición 2.33. Un complejo simplicial Λ es una **PL-variedad de dimensión** n si el enlace de cada vértice $Lk(v, \Lambda)$ es PL-homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1}$, es decir, si existen subdivisiones de Λ y $\mathbb{S}^{n-1}$ y una aplicación simplicial biyectiva de $b\Lambda$ a $b\mathbb{S}^n$. Un complejo simplicial Λ que es una variedad homológica es una $n-$**variedad homológica poliedral**.

Teorema 2.34. *Sea Λ un complejo célular. Son equivalentes:*

1. *Λ es una $n-$variedad homológica.*
2. *Para todo simplejo de σ de Λ, el enlace $Lk(\sigma, \Lambda)$ es una $GHS^{n-dim\,\sigma-1}$.*
3. *Para todo vértice v de Λ, el enlace $Lk(v, \Lambda)$ es una GHS^{n-1}.*

Teorema 2.35. *(Edwards, Freeman) Una $n-$variedad poliedral homológica X, con $n \geq 3$ es una variedad topológica si y sólo si el enlace de cada uno de sus vértices es simplemente conexo.*

Corolario 2.36. *Sea (W, S) un sistema de Coxeter y sea L su nervio. Entonces*

1. *Σ es una $n-$variedad homológica si y sólo si L es una GHS^{n-1}.*
2. *Σ es una $n-$variedad topológica si y sólo si L es una GHS^{n-1} y es simplemente conexa ($n \neq 0, 1$).*
3. *Σ es una $n-$variedad PL si y sólo si L es una PL triangulación de $\mathbb{S}^{n-1}$.*

4. Topología en el Infinito del Complejo Σ.

Para un estudio mas detallado del material de esta sección el lector interesado puede ver [**18**] o [**15**].

Un *sistema inverso* $\mathbf{X} = \{X_\alpha, f_\alpha^\beta; \mathcal{A}\}$ sobre una categoría $\mathscr{C}$ consiste de un conjunto dirigido $\mathcal{A}$, una familia de objetos $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ de $\mathscr{C}$ y una familia morfismos de $\mathscr{C}$, $\{f_\alpha^\beta : X_\beta \to X_\alpha\}_{\alpha\leq\beta}$ tales que

1. $f_\alpha^\alpha = id_{X_\alpha}$ para todo $\alpha\in\mathcal{A}$.
2. Para cualesquiera $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ se tiene que $f_\gamma^\alpha = f_\beta^\gamma f_\alpha^\beta$.

A los morfismos f_α^β los llamamos los *enlaces* del sistema inverso. En el caso de que el conjunto dirigido $\mathcal{A}$ sea el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, entonces diremos que el sistema inverso $\mathbf{X}$ es una *sucesión inversa*. Notemos que en este caso, los morfismos de enlace quedan determinados por los morfismo $f_n : X_{n+1} \to X_n$.

Definición 2.37. Sean $\mathbf{X} = \{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}; \mathcal{A}\}$ y $\mathbf{Y} = \{Y_\beta, q_\beta^{\beta'}; \mathcal{B}\}$ dos sitemas inversos sobre $\mathscr{C}$. Un **morfismo de sistemas inversos** $(\varphi, f) : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ consiste de una función $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ y una familia de morfismos $\{f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta\in\mathcal{B}}$ en $\mathscr{C}$ tal que para cualesquiera $\beta \leq \beta'$ existe $\alpha\in\mathcal{A}$ el cual saitsface que $\varphi(\beta), \varphi(\beta') \leq \alpha$ y conmuta el siguiente diagrama en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{\varphi(\beta)} \arrow[d, "f_\beta"'] & & X_{\varphi(\beta')} \arrow[d, "f_{\beta'}"] \\ Y_\beta & & Y_{\beta'} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

donde las flechas que no tienen etiquetas son los enlaces de los correspondientes sistemas.

Observación 2.38. Existe una composición obvia para dos morfismos de sistemas inversos con la cual el morfismo de sistemas $(id_{\mathcal{A}}, id_{\mathbf{X}}) : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, donde cada $(id_{\mathbf{X}})_\alpha = id_{X_\alpha}$, es el *morfismo identidad*. Tenemos pues una categoría $inv - \mathscr{C}$ en la que los objetos son los sistemas inversos de objetos en $\mathscr{C}$ y los morfismos son los morfismos de sistemas inversos en $\mathscr{C}$.

Consideremos nuevamente dos sistemas inversos sobre $\mathbf{X} = \{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}; \mathcal{A}\}$ y $\mathbf{Y} = \{Y_\beta, q_\beta^{\beta'}; \mathcal{B}\}$ sobre $\mathscr{C}$. Definimos una relación sobre $Hom_{inv-\mathscr{C}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ como sigue: $(\varphi, \{f_\beta\}) \sim (\varphi', \{f'_\beta\})$ si y sólo si para cada $\beta\in\mathcal{B}$ existe $\alpha\in\mathcal{A}$ el cual satisface que $\varphi(\beta), \varphi'(\beta) \leq \alpha$ y el siguiente diagrama conmuta en $\mathscr{C}$

$$\begin{tikzcd} & X_\alpha \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{\varphi(\beta)} \arrow[dr, "f_\beta"'] & & X_{\varphi'(\beta)} \arrow[dl, "f'_\beta"] \\ & Y_\beta & \end{tikzcd}$$

Se puede probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Más aún, si definimos la composición de dos clases de equivalencia de morfismos de sistemas inversos como la clase del morfismo composición, entonces se puede mostrar que tenemos ora categoría $pro-\mathscr{C}$ cuyos objetos son los sitemas inversos en $\mathscr{C}$ y cuyos morfismos son las clases de equivalencia de $\sim$. A los morfismos de $pro - \mathscr{C}$ los llamamos **pro-morfismos** y a los isomorfismos los llamamos **pro-isomorfismos**.

Observación 2.39. A cada objeto de $\mathscr{C}$ lo podemos considerar como un sistema inverso de la manera obvia y así, se puede ver de manera seencilla que $\mathscr{C}$ se encaja en $pro-\mathscr{C}$.

Si $\mathcal{A}'$ es un subconjunto pre-ordenado de $\mathcal{A}$ que es dirigido y si $\mathbf{X} = \{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}; \mathcal{A}\}$ es un sistema inverso, entonces $\mathbf{X}' = \{X_\alpha, p_\alpha^{\alpha'}; \mathcal{A}'\}$ es un *subsistema* de $\mathbf{X}$. Existe un morfismo de sistemas $(\imath_\alpha, \imath)$: $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ definido como sigue: $\imath$ es la inclusión de $\mathcal{A}'$ en $\mathcal{A}$ y para cada $\alpha \in \mathcal{A}'$, $\imath_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha$ es la identidad. El morfismos representado por $(\imath_\alpha, \imath)$ es llamado el **morfismos restricción.** Uno de los motivos por los que consideramos la categroía $pro-\mathscr{C}$ en vez de $inv-\mathscr{C}$ es el siguiente resultado.

Teorema 2.40. *Si $\mathcal{A}'$ es cofinal en $\mathcal{A}$, es decir, para todo $\alpha \in \mathcal{A}$ existe $\alpha' \in \mathcal{A}'$ tal que $\alpha \leq \alpha'$; entonces el morfismo restricción $\imath : \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ es un pro-isomorfismo.*

Sea $\{G_n\}$ una sucesión inversa de grupos. Definimos el **límite derivado** $\varprojlim^1\{G_n\}$ como el conjunto cociente de $\prod_{n=1}^{\infty} G_n$ bajo la relación de equivalencia siguiente: $(x_n) \sim (y_n)$ si y sólo si existe $(z_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ tal que $y_n = z_n x_n f_n(z_{n+1}^{-1})$ para toda n. Lo que se hace es imitar la construcción del límite derivado en el caso de módulos que se estudia en álgebra homológica. Consideraremos a $\varprojlim^1\{G_n\}$ como conjunto punteado cuyo punto base, denotado por $[1]$, será la clase de equivalencia de $(1, 1, \dots)$. Diremos que $\varprojlim^1\{G_n\}$ es **trivial** si es el conjunto punteado $\{[1]\}$.

Definición 2.41. Una sucesión inversa $\{G_n\}$ de grupos es **semi-estable** si para cada m existe $\varphi(m) \geq m$ tal que para todo $k \geq \varphi(m)$, $\mathrm{Im}\, f_m^{\varphi(m)} = \mathrm{Im}\, f_m^k$.

El punto de la definición anterior es el siguiente resultado, el cual se puede encontrar en [**18**].

Proposición 2.42. *$\{G_n\}$ es semi-estable si y sólo si $\{G_n\}$ es pro-isomorfa a una sucesión inversa cuyos enlaces son epimorfismos.*

Se puede probar que si $\{G_n\}$ es semi-estable, entonces $\varprojlim^1\{G_n\}$ es trivial. Más aún, en [**14**], Ross Geoghegan probó un reciproco parcial.

Teorema 2.43. *Si $\{G_n\}$ es semi-estable, entonces $\varprojlim^1\{G_n\}$ es trivial. Si $\varprojlim^1\{G_n\}$ es trivial y cada grupo G_n es numerable, entonces $\{G_n\}$ es semi-estable.*

Un **rayo propio** en un espacio topológico X es una aplicación continua propia $r : [0, \infty) \to X$. Notemos que r es propio si y sólo si para todo compacto $C \subseteq X$ existe un entero positivo N tal que $r([N, \infty)) \subseteq X - C$, en otras palabras, $r(t)$ *se va al infinito* conforme $t \to \infty$.

Definición 2.44. Dos rayos propios $r_1, r_2 : [0, \infty) \to X$ **determinan el mismo final** si para cualquier subconjunto compacto $C \subseteq X$ existe un entero N tal que $r_1([N, \infty))$ y $r_2([N, \infty))$ están contenidas en la misma componente de caminos de $X - C$.

Se puede probar que *determinar el mismo final* es una relación de equivalencia sobre el conjunto de rayos propios. Una clase de equivalencia de esta relación es un **final** de X.

Supongamos que $C_1 \subset C_2 \subset \cdots$ es una filtración de un $CW-$complejo X por subcomplejos finitos y sea $r : [0, \infty) \to X$ un rayo propio tal que $r(i) \in X - C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces una sucesión inversa $\{\pi_1(X - C_n, r(n))\}$, donde los morfismos de enlace son inducidos por las inclusiones. Se puede probar que si $C'_1 \subset C'_2 \subset \cdots$ es otra filtración de X por subcomplejos finitos y $r(i) \in X - C'_i$, entonces $\{\pi_1(X - C_n, r(n))\}$ y $\{\pi_1(X - C'_n, r(n))\}$ son pro-isomorfas. Más aún, si $r' : [0, \infty) \to X$ es otro rayo propio tal que $r'(i) \in X - C'_i$ y es propiamente homotópico a r, entonces las sucesiones inversas $\{\pi_1(X - C_n, r(n))\}$ y $\{\pi_1(X - C'_n, r'(n))\}$ son pro-isomorfas (ver [**15**]).

Definición 2.45. Supongamos que un $CW-$complejo X tiene un final e representado por un rayo propio r. Decimos que Y es semi-estable en e si existe una filtración $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X por subcomplejos finitos tal que la sucesión inversa $\{\pi_1(X - C_n, r(n))\}$ es semi-estable. Si X es semi-estable en cada uno de sus finales, entonces decimos que X es **semi-estable**

Observación 2.46. Si X es un $CW-$complejo semi-estable, entonces el tipo de pro-isomorfismo de $\{\pi_1(X - C_n, r(n))\}$ es independiente de la elección del rayo r y de la filtración $\{C_n\}$. Luego, el límite inverso de la sucesión nos da un grupo, bien definido hasta isomorfismo, llamado el **pro-grupo fundamental en** e

$$\pi_1^e(X - C_n, r(n)).$$

En este caso, el final e juega el papel del punto base en el grupo fundamental. Si X tiene un final, entonces este grupo es llamado el **grupo fundamental en el infinito** y se denota por $\pi_1^\infty(X)$.

Definición 2.47. Sea X un espacio topológico. Una **vecindad del infinito** es el complemento de cualquier subconjunto compacto de X. Diremos que X es **simplemente conexo en el infinito** si dada cualquier vecindad del infinito $X - C$, existe otra vecindad del infinito *más pequeña* ($C \subseteq D$) $X - D$ tal que cualquier lazo en $X - D$ es homotópicamente trivial en $X - C$.

Proposición 2.48. [**15**] *Si X es un $CW-$complejo con un final, entonces X es simplemente conexo en el infinito si y sólo si es semi-estable y $\pi_1^\infty(X)$ es trivial.*

Consideremos un sistema de Coxeter (W, S) con nervio L y denotemos nuevamente por $\mathcal{S}$ al complejo simplicial abstracto de subconjuntos esféricos y por Σ al complejo de Davis. En [**19**] Mihalik mostró lo siguiente:

Teorema 2.49. [**19**] *El complejo* Σ *es semi-estable en cada uno de sus finales.*

Más aún, en [**10**], Davis y Meier probarón lo siguiente:

Teorema 2.50. [**10**] Σ *tiene un final y es simplemente conexo en el infinito si y sólo si para cada* $T \in \mathcal{S}$, $L - \sigma_T$ *es simplemente conexo.*

Capítulo 3

Variedades de Davis.

En este capítulo demostraremos el resutado principal de este trabajo:

TEOREMA 3.1. [**8**] *Para cada dimensión $n \geq 4$, existen variedades topólogicas asféricas cerradas cuyo cubriente universal no es homeomorfo al espacio euclidiano.*

Comenzaremos discutiendo brevemente acerca de variedades contraibles.

Supongamos que M es una $n-$variedad contraible abierta, es decir, no compacta y sin frontera. Una pregunta natural es si M es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Para $n \geq 3$ una condición necesaria es que M sea simplemente conexa en el infinito. Por otro lado, para $n \geq 4$ esta condición resulta ser suficiente.

TEOREMA 3.2. ([**11**], [**23**]) *Para $n \geq 4$, una $n-$variedad contraible y abierta es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$ si y sólo si es simplemente conexa en el infinito.*

Mediante técnicas de Teoría de Cirugía, se puede probar que:

TEOREMA 3.3. *Toda esfera homológica acota una varieadad topológica contraible.*

Luego, existen muchas variedades contraibles abiertas que no son homeomorfas al espacio euclidiano al menos en dimensiones mayores o iguales a 4. De hecho, si C^n es una variedad contraible compacta con frontera no simplemente conexa, entonces su interior no es simplemente conexo en el infinito y por lo tanto no es homeomorfo al espacio euclidiano. Un ejemplo puede ser encontrado en [**27**].

DEMOSTRACIÓN. (*Teorema 3.1*)

Sea L un complejo simplicial finito y supongamos que es una $(n-1)-$variedad PL y una $(n-1)-$esfera homológica. Subdividiendo baricéntricamente si es necesario, podemos suponer que L es el nervio de un sistema de Coxeter angulado recto. Notemos que el complejo Σ asociado a (W, S) es una $n-$variedad homológica contraible. Modificaremos a Σ para que sea una variedad topológica. Para esto, recordemos que Σ es equivariantemente homeomorfo a

$$\mathcal{U}(W, K) = (W \times K)/\sim,$$

donde la cámara fundamental K es la realización geométrica del conjunto parcialmente ordenado de subconjuntos esféricos. Por el Teorema 3.3 la esfera homológica ∂K es la frontera de una $n-$variedad contraible C. Podemos usar la descomposición de espejos de ∂K para obtener una estructura de espejos sobre C. En efecto, para cada $s \in S$ hacemos

$$C_s := K_s \subset \partial K.$$

Consideremos pues el espacio $\mathcal{U}(W, C)$ y observemos que es una $n-$variedad topológica contraible con una $W-$acción. En efecto, es contraible pues es homotópicamente equivalente a $\mathcal{U}(W, K)$; y es variedad pues $\mathcal{U}(W, K)$ es una variedad excepto en los puntos cónicos y los hemos desingularizado al reemplazar cada copia de K por C.
Supongamos que $n \geq 4$ y que L no es simplemente conexo. Por el Teorema 2.50 $\pi_1^\infty(\Sigma)$ no es trivial. La aplicación obvia $C \to K$, que extiende a la identidad sobre la forntera, inuce una equivalencia homotópica propia $\mathcal{U}(W, C) \to \mathcal{U}(W, K)$. Se puede ver fácilmente que las equivalencia homotópicas propias inducen isomorfismos en el grupo los grupos fundamentales en el infito y así, $\mathcal{U}(W, C)$ tampoco es simplemente conexo en el infinito y por lo tanto no es homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Para obtener una $n-$variedad asférica cerrada M como en el enunciado del teorema argumentamos como sigue. Recordemos que por el Lema de Selberg, W es virtualmente libre de torsión. De modo que podemos escoger un subgrupo libre de torsión Γ de índice finito en W. Como W actúa propiamente sobre $\mathcal{U}(W, C)$, todos sus grupos de isotropía son finitos y por tanto Γ actúa libremente sobre $\mathcal{U}(W, C)$. Así, $\mathcal{U}(W, C) \to \mathcal{U}(W, C)/\Gamma$ es una proyección cubriente. Luego, $M := \mathcal{U}(W, C)/\Gamma$ es una variedad. Es compacta pues Γ tiene índice finito en W. Como $\tilde{M} := \mathcal{U}(W, C)$ es simplemente conexa, entonces es el cubriente universal de M y como no es simplemente conexa en el infinito, entonces no es homeomorfa a $\mathbb{R}^n$. ❑

Observación 3.4. Los ejemplos de variedades asféricas exóticas en general no son sencillos. En [**12**], Barry Mazur contruyó una $4-$variedad topológica contraible con frontera no simplemente conexa. Sin embargo esta construcción no es sencilla y se sale de los alcances de este trabajo. Pero siguiendo la construcción del teorema anterior se puede llegar a un ejemplo de una $4-$variedad asférica cerrada exótica. Tambien, en [**13**] construyó $5-$variedades contraibles con frontera no simplemente conexa y estas se pueden tomar como base para constuir $5-$variedades asféricas cerradas exóticas.

Bibliografía

[1] Alperin, Roger C.; *An elementary account of Selberg's lemma*. LÉnseignement Mathématique, Vol. 33 pp. 269-273, 1987.

[2] Bahls, Patrick; *The isomorphism problem in Coxeter groups*. Imperial College Press, 2005.

[3] Bjorner, A. y Brenti, F.; *Combinatorics of Coxeter groups*. Springer, 2005.

[4] Bourbaki, N.; *Lie groups and Lie algebras: Chapters 1-3*. Springer, 1998.

[5] Charney, R y Davis, M. W.; *Finite $K(\pi, 1)'s$ for Artin groups*. Prospects in Topology, Vol: 138 pp. 110-124, 1995.

[6] Coxeter, H. S. M.; *Discrete groups generated by reflections*. Ann. of Math., Vol: 35 pp. 588-621, 1934.

[7] Coxeter, H. S. M.; *The complete enumeration of finite groups of the form $r_i^2 = (r_i r_j)^{k_{ij}} = 1$*. J. London Math. Soc., Vol: 10 pp. 21-25, 1935.

[8] Davis, M. W.; *Groups generated by reflections groups and aspherical manifolds not covered by euclidean space*. Ann. of Math, Vol. 117 pp. 293-324, 1983.

[9] Davis, M. W.; *The Geometry and topology of Coxeter groups*. Princeton University Press, 2012.

[10] Davis, M. W. and Meier, L.; *The topology at infinity of Coxeter groups and buildings*. Comment. Math. Helv., Vol. 77 pp. 746-766, 2002.

[11] Freedman, M.; *The topology of four.dimensional manifolds*. J. Differential Geometry, Vol. 17 pp. 357-453, 1982.

[12] Mazur, B.; *A note on some contractible 4-manifolds*. Ann. of Math., Vol. 73 pp. 221-228, 1961.

[13] Newman, M. H. A.; *Boundaries of ULC sets in euclidean $n-$spaces*. Proc. Nat. Acad. Sci., Vol. 34 pp. 193-196, 1948.

[14] Geoghegan, R.; *A note on the vanishing of lim^1*. J. Pure Appl. Algebra, Vol. 17 pp. 113-116, 1980.

[15] Geoghegan, R.; *Topological methods in group theory*. Springer, 2007.

[16] Humphreys, James E.; *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press, 1992.

[17] Johnson, F. E. A.; *Manifolds of homotopy type $K(\pi, 1)$, II*. Proc. Cambridge Phil., Vol. 75 pp. 165-173, 1974.

[18] Mardesic, S. y Segal, J.; *Shape theory. The inverse system approach*. North Holland, 1982.

[19] Mihalik, M.; *Smistability of Artin groups and Coxeter groups*. J. Pure and Appl. Algebra, Vol. 111 pp. 205-211, 1996.

[20] Munkres, J. R.; *Elements of algebraic topology*. Addison-Wesley, 1984.

[21] Ratcliffe, John; *Foundations of hyperbolic manifolds*. Springer, 2006.

[22] Selberg, A.; *On disconinuous groups in higher dimensional symmetric spaces*. Colloquium on Function Theory, pp. 175-185, 1960.

[23] Stallings, J. R.; *The piece-wise linear structure of euclidean space*. Proc. Cambridge Phil. Soc., Vol. 58 pp. 481-488, 1962.

[24] Tits, J.; *Groupes et géométries de Coxeter*. Notes polycopiées, I.H.E.S., 26 p., 1961.

[25] Tits, J.; *Le problém des mots dans les groupes de Coxeter*. Symposia Mathematica, Vol. 1 pp. 175-185, 1969.

[26] Vinberg, É. B.; *Discrete linear groups generated by reflections*. Math USSR Izvestija, Vol. 5 pp. 1083-1119, 1971.

[27] Whitehead, J. H. C.; *A certain open manifold whose group is unity*. Quart. Jour. Math, Vol. 5 pp. 308-320, 1934.