

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez



COLAPSO RELATIVISTA DE POLVO EN SIMETRÍA ESFÉRICA

T E S I S

para obtener el grado de
Licenciada en ciencias Físico Matemáticas

Presenta:

Teresa Patiño Cárdenas

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH

Asesor:

Dr. Olivier Sarbach

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH

Morelia, Michoacán

agosto de 2009.

Índice general

1. Introducción	1
2. El colapso Newtoniano	5
2.1. Trayectoria de una partícula	5
2.2. El colapso de una nube de polvo homogénea	10
2.3. Resumen	12
3. El teorema de Birkhoff	13
3.1. La q -esfera y su curvatura	14
3.2. Los símbolos de Christoffel para la métrica esféricamente simétrica	17
3.3. La curvatura de la métrica esféricamente simétrica	20
3.4. Las identidades de Bianchi	23
3.5. La métrica de Schwarzschild-Tangherlini	24
3.6. Interpretación física de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini	28
3.7. Resumen	32
3.8. Apéndice	32
4. Geodésicas de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini	35
4.1. Geodésicas radiales	37
4.2. Órbitas acotadas	38
4.3. Resumen	42

5. El colapso relativista	43
5.1. Las ecuaciones de movimiento	44
5.2. El colapso de una nube homogénea	50
5.2.1. Singularidades	52
5.2.2. Horizonte de eventos	53
5.2.3. Horizonte aparente	55
5.2.4. La métrica exterior	57
5.3. Resumen	59
6. Conclusiones	62

Capítulo 1

Introducción

La vida de una estrella consiste de una larga fase en la cual la estrella está quemando su combustible en el núcleo y resistiendo el colapso bajo su propia fuerza de gravedad por medio de la presión térmica y de radiación.

Cuando el combustible se agota, la estrella se enfría, la presión se reduce y la estrella se contrae. Así se forman los objetos compactos como enanas blancas, estrellas de neutrones y hoyos negros que representan el último estado en la evolución estelar. En las enanas blancas y en las estrellas de neutrones, las estructuras atómicas usuales han sido destruidas por la acción de las fuerzas gravitacionales tan intensas. La estrella no se colapsa totalmente debido a la *presión de degeneración*, de la que nos habla el principio de exclusión de Pauli: no puede haber dos fermiones con todos sus números cuánticos idénticos (esto es, en el mismo estado cuántico de partícula individual); esta propiedad cuántica de la materia provee una presión adicional que generalmente puede compensar a la fuerza de gravedad.

En las enanas blancas, los átomos se mantienen apartados por la presión de degeneración de los electrones.

En las estrellas de neutrones—que presentan fuerzas gravitacionales aún mayores—los electrones se han fusionado con los protones para producir neutrones, que tienen una presión de degeneración mayor. Así pues, al formarse un hoyo negro la fuerza de gravedad tiene que ser suficientemente grande para vencer estos procesos de degeneración.

Se piensa que el factor principal que determina si una estrella termina como alguno

de estos objetos compactos es la masa de la estrella. Las enanas blancas necesitan de progenitores con una masa de alrededor de $1,4M_{\odot}$ ¹. Las estrellas de neutrones se forman de estrellas con masa de entre 1.4 y $3 M_{\odot}$, pero el destino para una estrella con más de $4M_{\odot}$ es el colapso gravitacional total con la formación de un agujero negro.

También hay otras formas, además del colapso total de una estrella, por las que se piensa que se puede llegar a la formación de un hoyo negro. Por ejemplo, cuando una estrella de neutrones o una enana blanca no puede soportar el colapso debido a la acumulación de gas, se piensa que se puede llegar a la formación de un hoyo negro, ya que con ésto su densidad crece.

Aparentemente los objetos compactos son tan comunes en la galaxia como otras estrellas. Muchas enanas blancas y estrellas de neutrones han sido observadas, y se tiene evidencia de un agujero negro en el centro de nuestra galaxia [1] y al menos otro buen candidato para ser un hoyo negro ha sido identificado (Cygnus X-1) [2].

En este trabajo analizaremos el colapso relativista de una nube de polvo esféricamente simétrica en $q + 1$ dimensiones espaciales: Una estrella que ha consumido todo su combustible pero que además la única fuerza que actúa sobre las partículas es la de la gravedad.

¿Por qué vamos a analizar una nube de polvo esféricamente simétrica? Pues porque así nuestro análisis será mucho más sencillo ya que muchas ecuaciones se simplifican, pues en una nube de polvo no habrá presión entre las partículas. Así también nuestro análisis representará una primera aproximación en el análisis de casos más realistas, en donde existen presiones y donde la estrella tiene rotación.

¿Por qué en $q + 1$ dimensiones espaciales? La posibilidad de que el universo tenga más de 3 dimensiones espaciales ha sido una cuestión ampliamente discutida. Avances en la teoría de cuerdas sugieren que podría haber hasta 7 dimensiones adicionales. Los seguidores de esta teoría la consideran como la mejor candidata para convertirse en una teoría unificada, es decir, una teoría capaz de describir todos los fenómenos ocurridos en la naturaleza.

¹Por M_{\odot} nos referimos a la masa del sol.

Como objetos matemáticos, los espacio-tiempos de agujeros negros están entre las variedades lorentzianas más importantes.

Primero nos dedicaremos a analizar el colapso de una nube esféricamente simétrica en Mecánica Newtoniana. Encontraremos las ecuaciones de movimiento de las partículas y así describiremos el colapso de la nube, pues podremos encontrar las ecuaciones de las trayectorias de las partículas de la nube de polvo. Al comparar este caso con lo que obtendremos en Relatividad General nos llevaremos un sorpresa: las ecuaciones que describen las trayectorias de las partículas son esencialmente las mismas en los dos análisis.

Por supuesto, estudiar el colapso relativista es mucho más complicado, pues para entender a fondo todas las ecuaciones importantes para la Relatividad General, como las ecuaciones de campo de Einstein—que en este trabajo son la clave para desarrollar nuestro estudio—es necesario tener un conocimiento bastante amplio en varias áreas: geometría diferencial, cálculo tensorial, calculo variacional, etc. Pero aparte de ser más complicado es más interesante, para saber qué información puede conseguir un observador lejos de la nube y qué eventos le pueden afectar debemos conocer la estructura causal, descrita por los conos de luz en cada punto del espacio-tiempo. Como veremos, una singularidad en el caso relativista es una singularidad de la densidad y también de la geometría, allí el espacio-tiempo desaparece. En cambio, en el caso newtoniano tendremos solamente una singularidad de la densidad mientras la geometría del espacio tiempo es fijo en todas partes. La singularidad en el caso relativista no afectará a observadores lejanos ya que está protegida por una superficie que no permite que salga información de la región donde se encuentra la singularidad hacía afuera de esta superficie.

En el capítulo 3 vamos a desarrollar la mayor parte de las herramientas matemáticas necesarias para el análisis del colapso relativista. Demostraremos el teorema de Birkhoff que asegura que en un espacio-tiempo esféricamente simétrico y vacío la métrica es la de Schwarzschild -Tangherlini [3], que vamos a construir paso a paso. Así pues, si consideramos la nube de polvo con simetría esférica que se contrae hasta tener un radio menor que su radio de Schwarzschild encontraremos que habrá una superficie cerrada alrededor de la nube con radio igual al radio de Schwarzschild de la nube y de esta región contenida en la

esfera no escapará luz, se formará un hoyo negro descrito por la métrica de Schwarzschild-Tangherlini.

En el capítulo 4 vamos a analizar las líneas geodésicas de esta métrica y veremos algo muy interesante: analizando gráficas de potencial para $q + 1$ dimensiones espaciales veremos que sólo para $q = 2$ podremos encontrar órbitas acotadas estables alrededor de un agujero negro, es decir, sólo en el espacio-tiempo que conocemos podríamos encontrar cuerpos orbitando en trayectorias acotadas estables alrededor de un agujero negro [3].

Finalmente, en el capítulo 5 completaremos nuestro análisis, describiremos el espacio-tiempo en el cual está inmersa la nube de polvo y vamos a poder predecir cómo será el colapso relativista de una nube de polvo ahora con densidad homogénea. Veremos si se forma una singularidad del espacio-tiempo después de que la nube de polvo tenga un radio menor a su radio de Schwarzschild, si es posible que pudiéramos observar esa singularidad y qué es lo que podríamos ver estando fuera del horizonte de eventos, analizaremos más esta superficie esférica que no deja escapar ni siquiera la luz después de que ya toda la masa de la nube está encerrada por esta superficie.

Capítulo 2

El colapso Newtoniano

En este capítulo estudiaremos el caso en que una nube de polvo, esféricamente simétrica, en dimensión espacial $n = q + 1$, inicialmente en reposo, se colapsa debido al potencial Newtoniano generado por las mismas partículas de la nube.

Analizaremos el colapso a partir de la trayectoria que seguiría una partícula dentro de la nube al ser atraída hacia el centro, encontraremos el tiempo que tardaría en llegar al centro, en donde se formará una singularidad de densidad.

2.1. Trayectoria de una partícula

Sea $\rho(t, r)$ la densidad en la nube de polvo al tiempo t y radio r , y digamos que la nube de polvo está en reposo al tiempo inicial $t = 0$. Sea $\phi(t, r)$ el potencial gravitacional generado por las partículas de la nube al tiempo t y radio r .

Consideremos una partícula de polvo, inicialmente en reposo, a distancia R del origen y de masa m . Sea $r(t, R)$ el radio de la trayectoria seguida por la partícula, atraída por la fuerza de gravedad.

Tenemos que $r(0, R) = R$, puesto que en el tiempo cero la partícula tiene distancia R al origen, y también tenemos que $\dot{r}(0, R) = 0$, puesto que la nube comienza en reposo, y entonces la velocidad al principio es 0. El punto sobre la r representa la parcial de r respecto de t , más adelante las comas sobre las funciones representarán la parcial respecto

de R .

Lo que queremos es describir las trayectorias de las partículas de polvo para así entender cómo sería el colapso de la nube de polvo. Newton dio una ley para el comportamiento de objetos en el espacio-tiempo $F(t, r) = ma(t, r)$, donde $F(t, r) = -m\nabla\phi(t, r)$, donde $\phi(t, r)$ es el campo gravitacional generado por las partículas de la nube y $a_r(t, r) = \ddot{r}(t, R)$ es la aceleración radial de la partícula.

Tenemos una ley, también dada por Newton, para determinar como ϕ es generado: $\Delta\phi = |S^q|G\rho(r)$, donde S^q es la q -esfera unitaria y $|S^q|$ el área de la q -esfera, G la constante de gravitación universal y $\rho(r)$ la densidad (recordemos que estamos trabajando en $q + 2$ dimensiones espacio-temporales, en el espacio que conocemos, cuando $q = 2$, tenemos que $\Delta\phi = |S^q|G\rho(r) = 4\pi G\rho(r)$). En coordenadas polares tenemos $\Delta\phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^a}\left(\sqrt{|g|}g^{ab}\frac{\partial}{\partial x^b}\phi\right) = \frac{1}{r^q}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^q\frac{\partial}{\partial r}\phi\right)$, donde $|g|$ es el determinante de la métrica g que en este caso es una métrica plana. Para $q = 2$ tenemos la conocida ecuación en las coordenadas (r, θ, φ) : $\Delta\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\phi\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\phi$.

Entonces consideremos la siguiente igualdad:

$$\int_0^R \Delta\phi r^q dr = \int_0^R \frac{\partial}{\partial r}\left(r^q\frac{\partial}{\partial r}\phi\right) dr.$$

Esto implica que

$$\int_0^R \Delta\phi r^q dr = R^q \frac{\partial}{\partial r}\phi|_R. \quad (2.1)$$

Para la segunda igualdad supusimos que $\frac{F_r}{m} = -\frac{\partial}{\partial r}\phi$ es regular en $r = 0$. Es decir, la fuerza gravitacional en la dirección radial es finita en $r = 0$. Por otro lado,

$$\int_0^R \Delta\phi r^q dr = \int_0^R |S^q|G\rho(r)r^q dr = GM(R), \quad (2.2)$$

donde $M(R)$ es la masa contenida en la esfera de radio R .

Igualando (2.1) y (2.2) tenemos entonces,

$$\frac{\partial}{\partial r}\phi|_R = \frac{GM(R)}{R^q}.$$

Si tomamos un punto cuya distancia al origen sea $r(t, R)$, tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial r}\phi(r(t, R)) = \frac{GM(r(t, R))}{r(t, R)^q}.$$

Entonces tenemos la siguiente expresión para la aceleración de la partícula

$$\ddot{r}(t, R) = \frac{F_r(r(t, R))}{m} = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r(t, R)) = -\frac{GM(r(t, R))}{r(t, R)^q},$$

donde $M(r(t, R)) = \int_0^{r(t, R)} |S^q| \rho(r) r^q dr$ es la masa contenida en la esfera de radio $r(t, R)$.

Vamos a suponer que en nuestro caso para cada dos partículas de polvo a y b , con distancia al origen $r_a(t, R_a)$ y $r_b(t, R_b)$ respectivamente, tal que $r(0, R_a) < r(0, R_b)$, tendremos que $r(t, R_a) < r(t, R_b)$ para todo t entre 0 y el tiempo $t_s(R_b)$ en que la partícula b tarde en llegar al centro de la nube de polvo. Es decir, las trayectorias de las partículas no se “cruzan”. En esta situación decimos que no hay “shell crossing”, con lo que podemos suponer lo siguiente (conservación de la masa):

$$M(r(t, R)) = M(r(0, R)) = M(R),$$

para todo $0 < t < t_s(R)$.

Entonces:

$$\int_0^{r(t, R)} |S^q| \rho(t, r) r^q dr = \int_0^R |S^q| \rho(0, r) r^q dr,$$

donde $\rho(0, R)$ es la densidad de masa inicial en el radio R .

Derivando respecto a R :

$$\rho(t, r(t, R)) r(t, R)^q r'(t, R) = \rho(0, R) R^q$$

lo que implica que:

$$\rho(t, r(t, R)) = \frac{\rho(0, R) R^q}{r(t, R)^q r'(t, R)}.$$

Notemos que $\rho(t, r(t, R))$ divergerá en dos casos: si $r(t, R) \rightarrow 0$ mientras R es constante o si $r'(t, R) \rightarrow 0$ mientras R también es constante. Analicemos ambos casos por separado.

1. Si $r(t, R) \rightarrow 0$, es decir, el radio de la nube de polvo tiende a cero, entonces la masa contenida en la esfera de radio r , que es constante, tendrá una densidad infinita, y por lo tanto se formará una singularidad de densidad.

2. Si $r'(t, R) \rightarrow 0$ la densidad se hará infinita. Pero como ya hemos acordado en evitar el caso de shell crossing, nuestra función $R \mapsto r(t, R)$ es creciente para cada t fijo y, por lo tanto, con derivada estrictamente mayor que cero. Entonces podemos descartarlo en este caso.

Ahora queremos encontrar $r(t, R)$ y tenemos

$$\ddot{r}(t, R) = -\frac{GM(R)}{r(t, R)^q} = -\frac{GM(R)}{r(t, R)^q}.$$

Tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}\dot{r}(t, R)\dot{r}(t, R) &= -\frac{GM(R)}{r(t, R)^q}\dot{r}(t, R) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\dot{r}(t, R)^2\right)' &= -\frac{GM(R)}{r(t, R)^q}\dot{r}(t, R).\end{aligned}$$

Si integramos respecto a t ,

$$\begin{aligned}\int_0^t \left(\frac{1}{2}\dot{r}(\bar{t}, R)^2\right)' d\bar{t} &= -GM(R) \int_0^t \frac{\dot{r}(\bar{t}, R)}{r(\bar{t}, R)^q} d\bar{t} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}(t, R)^2 &= -GM(R) \int_R^{r(t, R)} \frac{dr}{r^q},\end{aligned}$$

utilizando que $\dot{r}(0, R) = 0$.

Entonces obtenemos

$$\frac{1}{2}\dot{r}(t, R)^2 = GM(R) \frac{1}{q-1} \left(\frac{1}{r(t, R)^{q-1}} - \frac{1}{R^{q-1}} \right) \quad (2.3)$$

$$\Rightarrow \dot{r}(t, R) = -\sqrt{\frac{2GM(R)}{(q-1)R^{q-1}} \left(\frac{R^{q-1} - r(t, R)^{q-1}}{r(t, R)^{q-1}} \right)},$$

y escogemos el signo negativo, ya que las partículas van hacia el centro.

Entonces,

$$-\frac{\dot{r}(t, R)}{\sqrt{\frac{2GM(R)}{(q-1)R^{q-1}} \left(\frac{R^{q-1} - r(t, R)^{q-1}}{r(t, R)^{q-1}} \right)}} = 1.$$

Integrando respecto a t :

$$\begin{aligned} t &= -\sqrt{\frac{(q-1)R^{q-1}}{2GM(R)}} \int_0^t \sqrt{\frac{r(t, R)^{q-1}}{R^{q-1} - r(t, R)^{q-1}}} \dot{r}(t, R) dt \\ &= -\sqrt{\frac{(q-1)R^{q-1}}{2GM(R)}} \int_R^{r(t, R)} \sqrt{\frac{r^{q-1}}{R^{q-1} - r^{q-1}}} dr. \end{aligned}$$

Si hacemos $u = \sqrt{1 - \frac{r^{q-1}}{R^{q-1}}}$. Entonces la integral queda como sigue:

$$t = \sqrt{\frac{2R^{q+1}}{(q-1)GM(R)}} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{r(t, R)^{q-1}}{R^{q-1}}}} (1 - u^2)^{\frac{3-q}{q-1}} du.$$

Si ahora $u = \text{sen}(\alpha)$,

$$t = \sqrt{\frac{2R^{q+1}}{(q-1)GM(R)}} \int_0^{\text{arc sen} \sqrt{1 - \left(\frac{r(t, R)}{R}\right)^{q-1}}} (\cos(\alpha))^{\frac{2}{q-1}} d\alpha.$$

Que reescribiremos en la siguiente forma:

$$t = \sqrt{\frac{2R^{q+1}}{(q-1)GM(R)}} J_q \left(\frac{r(t, R)}{R} \right), \quad (2.4)$$

y $J_q(x) = \int_0^{\text{arc sen} \sqrt{1-x^{q-1}}} (\cos(\alpha))^{\frac{2}{q-1}} d\alpha$, con $0 \leq x \leq 1$ y es monótonamente decreciente.

De (2.4) descubrimos que podemos encontrar el tiempo en que una partícula con distancia $r(t, R)$ del centro de la nube de polvo llegará a la singularidad, poniendo la condición $r(t, R) = 0$:

$$t_s(R) = \sqrt{\frac{2R^{q+1}}{(q-1)GM(R)}} J_q(0). \quad (2.5)$$

2.2. El colapso de una nube de polvo homogénea

Consideremos ahora una nube de polvo con densidad homogénea ρ_0 y radio finito $R_1 > 0$,

$$\rho(0, R) = \begin{cases} \rho_0, & R \leq R_1, \\ 0, & R > R_1, \end{cases} \quad (2.6)$$

donde $\rho_0 > 0$ y $R_1 > 0$.

Entonces podemos escribir la densidad promedio dentro de la nube de polvo de radio R como sigue:

$$\bar{\rho} = \frac{M(R)}{|S^q| \int_0^R \bar{R}^q d\bar{R}} = \frac{(q+1)M(R)}{|S^q|R^{q+1}}, \quad (2.7)$$

y podemos escribir:

$$t = \sqrt{2 \frac{q+1}{q-1}} \frac{J(\frac{r}{R})}{\sqrt{G\bar{\rho}|S^q|}}.$$

También

$$M(R) = \begin{cases} M_\infty \left(\frac{R}{R_1}\right)^{q+1}, & R \leq R_1, \\ M_\infty, & R > R_1, \end{cases} \quad (2.8)$$

donde $M_\infty = \frac{|S^q|R_1^{q+1}\rho_0}{q+1}$ es la masa contenida en la esfera de radio R_1 , es decir, la masa total de la nube; y así

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho_0, & R \leq R_1, \\ \rho_0 \left(\frac{R_1}{R}\right)^{q+1}, & R > R_1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Si $R \leq R_1$ entonces:

$$t = \sqrt{2 \frac{q+1}{q-1}} \frac{J(\frac{r}{R})}{\sqrt{G\bar{\rho}|S^q|}}, \quad (2.10)$$

Notemos que $\sqrt{2 \frac{q+1}{q-1}}$ no depende de R y que R sólo aparece dividiendo a r , entonces $r(t, R)$ tiene la siguiente forma:

$$r(t, R) = RF(t), \quad (2.11)$$

con $F(t) > 0$, $0 \leq t < t_s$, $t_s = \sqrt{2 \frac{q+1}{q-1}} \frac{J(0)}{\sqrt{G\bar{\rho}|S^q|}}$.

Ya que $r(t, R)$ tiene la forma anterior, nos damos cuenta que:

$$r'(t, R) = F(t) > 0, \quad (2.12)$$

y ahora sabemos que no habrá shell crossing dentro de la nube de polvo.

Para $R \leq R_1$,

$$t_s(R) = \sqrt{\frac{2R_1^{q+1}}{(q-1)GM_\infty} J(0)}, \quad (2.13)$$

vemos que este resultado es independiente del radio R , todas las partículas llegan al mismo tiempo a la singularidad.

Si $R > R_1$, t_s sí depende de R , ya que

$$t_s(R) = \sqrt{\frac{2R^{q+1}}{(q-1)GM_\infty} J(0)}, \quad (2.14)$$

Veamos qué ocurre para $q = 2$:

$$t_s = \sqrt{\frac{2R^3}{GM(R)} J(0)},$$

donde

$$M(R) = \begin{cases} \frac{\rho_0 |S^2| R^3}{3}, & R \leq R_1, \\ \frac{\rho_0 |S^2| R_1^3}{3}, & R > R_1. \end{cases}$$

$J(0) = \frac{\pi}{4}$, entonces

$$t_s = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{6}{G\rho_0 |S^2|}}, & R \leq R_1, \\ \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{6}{G\rho_0 |S^2|}} \left(\frac{R}{R_1}\right)^{\frac{3}{2}}, & R > R_1. \end{cases}$$

Para $q = 3$:

$$t_s = \sqrt{\frac{R^4}{GM(R)} J(0)},$$

donde

$$M(R) = \begin{cases} \frac{\rho_0 |S^3| R^4}{4}, & R \leq R_1, \\ \frac{\rho_0 |S^3| R_1^4}{4}, & R > R_1. \end{cases}$$

$J(0) = 1$, entonces

$$t_s = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{1}{G\rho_0|S^3|}}, & R \leq R_1, \\ 2\sqrt{\frac{1}{G\rho_0|S^3|}}\left(\frac{R}{R_1}\right)^2, & R > R_1. \end{cases}$$

2.3. Resumen

En la primera sección estudiamos las trayectorias de las partículas de una nube de polvo esféricamente simétrica en general, con lo que nos será más fácil estudiar el colapso de una nube de polvo con características más particulares como la de la sección 2.2.

Ahora conocemos cómo ocurrirá el colapso de una nube de polvo esféricamente simétrica inicialmente en reposo con densidad homogénea en un espacio newtoniano, conociendo la densidad ρ_0 y radio R_1 , iniciales de la nube de polvo.

En el capítulo 5 veremos que los resultados que hemos encontrado en este capítulo son esencialmente los mismos que los que encontraremos en el caso relativista si identificamos el tiempo t con el tiempo propio τ de las partículas de la nube de polvo y r con el radio de área.

El caso relativista será más interesante que el caso newtoniano, si no nos diera nuevas y mejores aproximaciones de la realidad, ¿para qué seguir? En el colapso newtoniano dado que la singularidad es solamente de la densidad, el espacio-tiempo alrededor de ella sigue igual que antes de que se formará la singularidad, sólo la fuerza de gravedad provoca reacciones sobre observadores en el espacio-tiempo. En cambio, en el caso relativista, la singularidad es tanto de la densidad como de la geometría. El espacio-tiempo en la singularidad deja de existir y todos los objetos cercanos inevitablemente llegan a la singularidad. Decimos que un objeto está cerca a la singularidad cuando ha cruzado el horizonte de eventos (que es la frontera entre los eventos que pueden enviar información (rayos de luz) hacia infinito y los que no). Esta superficie es la que nos protege de sentir los efectos de esta singularidad.

Capítulo 3

El teorema de Birkhoff

En este capítulo empezaremos con el análisis del colapso relativista que mencionamos anteriormente. Consideremos una variedad $M = \widetilde{M} \times S^q$, donde \widetilde{M} es una variedad bidimensional y S^q la q -esfera. M tendrá una métrica esféricamente simétrica como

$$g = \widetilde{g}_{ab} dx^a dx^b + r^2 \widehat{g}_{KL} dx^K dx^L, \quad (3.1)$$

donde $g = \widetilde{g}_{ab} dx^a dx^b$ es la métrica radial sobre \widetilde{M} , $\widehat{g}_{KL} dx^K dx^L$ la métrica en S^q y r es el radio de área. Podríamos pensar en distintas maneras para definir el radio, por ejemplo definirlo como:

- la distancia al centro, pero esta definición está mal ya que el “centro” probablemente no esté bien definido porque puede allí haber alguna singularidad de la geometría y entonces la distancia tampoco podría definirse.

Otra forma de definir el radio, que es la correcta, es

- a través del área. Teniendo el área de la esfera S_p con p un punto fijo de \widetilde{M} , podemos escribirla como sigue: $A(p) = \int_{S(p)} \sqrt{\det(r^2 \widehat{g})} d^q x =: |S^q| r^q(p)$, resolviendo podemos encontrar la expresión para el radio de área $r(p)$: $r(p) = \left(\frac{A(p)}{|S^q|}\right)^{\frac{1}{q}}$.

En este capítulo vamos a ir obteniendo las piezas necesarias para demostrar, como dice el *Teorema de Birkhoff*, que

La solución de la Ecuación de Einstein para el vacío alrededor de una distribución de masa esférica, simétrica, es la métrica de Schwarzschild-Tangherlini.

Primero calcularemos el tensor de Einstein y luego veremos lo que nos dicen las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 0,$$

para el caso que estamos estudiando, un espacio-tiempo esféricamente simétrico donde no hay materia. Y al obtener la métrica de Schwarzschild-Tangherlini como solución a las ecuaciones de Einstein, habremos demostrado el teorema. Al final trataremos de describir la estructura causal del espacio-tiempo que corresponde a la variedad M .

3.1. La q -esfera y su curvatura

Primero vamos a calcular la métrica inducida por la métrica euclideana sobre \mathbf{R}^{q+1} en S^q .

Consideremos $\psi_1 : S^q \setminus \{(0, 0, \dots, 1)\} \rightarrow \mathbf{R}^q$ una carta local dada por la proyección estereográfica: $\psi_1(\vec{x}) = \psi_1(x^1, \dots, x^{q+1}) = \left(\frac{x^1}{1-x^{q+1}}, \dots, \frac{x^q}{1-x^{q+1}}\right)$. Su inversa es $\psi_1^{-1}(\vec{y}) = \psi_1^{-1}(y^1, \dots, y^q) = \left(\frac{2y^1}{1+\|\vec{y}\|^2}, \dots, \frac{2y^q}{1+\|\vec{y}\|^2}, 1 - \frac{2}{1+\|\vec{y}\|^2}\right)$, $(y^1, \dots, y^q) \in \mathbf{R}^q$. Notemos que hemos cubierto una parte de la esfera con esta carta local, así que necesitamos otra $\psi_2 : S^q \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^q$ tal que $\psi_2(\vec{x}) = \psi_2(x^1, \dots, x^{q+1}) = \left(\frac{x^1}{1+x^{q+1}}, \dots, \frac{x^q}{1+x^{q+1}}\right)$ y su inversa $\psi_2^{-1}(\vec{y}) = \psi_2^{-1}(y^1, \dots, y^q) = \left(\frac{2y^1}{1+\|\vec{y}\|^2}, \dots, \frac{2y^q}{1+\|\vec{y}\|^2}, \frac{2}{1+\|\vec{y}\|^2} - 1\right)$, $(y^1, \dots, y^q) \in \mathbf{R}^q$.

Con esta información podemos ahora encontrar la transformación de coordenadas que necesitamos para encontrar la métrica inducida en la q -esfera por \mathbf{R}^{q+1} . Notemos que podemos utilizar cualquiera de las cartas locales que hemos definido para obtener las componentes de la métrica euclideana que se tiene en \mathbf{R}^{q+1} :

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \dots + (dx^{q+1})^2.$$

Definamos la siguiente notación: $x^L = \frac{2y^L}{1+\|\vec{y}\|^2}$, donde $x^{q+1} = 1 - \frac{2}{1+\|\vec{y}\|^2}$ y $\|\vec{y}\|^2 = \delta_{KL} y^K y^L$, donde los índices representados con mayúsculas, K y L , toman valores entre 1 y q .

Ahora entonces necesitamos encontrar las componentes dx^L y dx^{q+1} de la métrica. Las derivadas parciales son:

$$\begin{aligned} \blacksquare \frac{\partial}{\partial y^K} x^L &= \frac{\partial}{\partial y^K} \left(\frac{2y^L}{1 + \|\vec{y}\|^2} \right) = \frac{2(1 + \|\vec{y}\|^2)\delta_K^L - 4y^L y_K}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \\ \blacksquare \frac{\partial}{\partial y^K} x^{q+1} &= \frac{4y_K}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \end{aligned}$$

Y ya teniendo la transformación entre las coordenadas x y y podemos calcular la métrica inducida:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^1)^2 + \dots + (dx^{q+1})^2 \\ &= \sum_{L=1}^q \left(\frac{\partial}{\partial y^K} x^L dy^K \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y^K} x^{q+1} dy^K \right)^2 \\ &= \frac{4}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^4} \left[\sum_{L=1}^q \left((1 + \|\vec{y}\|^2)^2 (\delta_K^L dy^K)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4y^L y_K dy^K (1 + \|\vec{y}\|^2) (\delta_K^L dy^K + 4(y^L y_K dy^K)^2 + 4(y_K dy^K)^2) \right) \right] \\ &= \frac{4}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^4} \left((1 + \|\vec{y}\|^2)^2 \sum_{L=1}^q (dy^L)^2 - 4(1 + \|\vec{y}\|^2) (y_K dy^K)^2 \right. \\ &\quad \left. + 4 \|\vec{y}\|^2 (y_K dy^K)^2 + 4(y_K dy^K)^2 \right) \\ &= \frac{4}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^4} (1 + \|\vec{y}\|^2)^2 \sum_{L=1}^q (dy^L)^2 \\ &= \left(\frac{2}{(1 + \|\vec{y}\|^2)} \right)^2 \sum_{L=1}^q (dy^L)^2. \end{aligned}$$

Entonces la métrica inducida por la métrica euclidea de \mathbf{R}^{q+1} sobre S^q es

$$ds^2 = \Omega^2 \sum_{L=1}^q (dy^L)^2, \quad (3.2)$$

con $\Omega = \frac{2}{1 + \|\vec{y}\|^2}$, el factor conforme. Queremos calcular ahora el tensor de curvatura en S^q : \widehat{R}^K_{LMN} .

Empezamos calculando los símbolos de Christoffel asociados a la métrica:

$$\begin{aligned}
\Gamma^K_{LM} &= \frac{1}{2}g^{KP}(\partial g_{LP,M} + g_{PM,L} - g_{LM,P}) \\
&= \frac{1}{2}g^{KN}(g_{LN,M} + g_{NM,L} - g_{LM,N}) \\
&= \frac{\delta^{KN}}{2\Omega^2}[(\delta_{LN}\Omega^2)_{,M} + (\delta_{NM}\Omega^2)_{,L} - (\delta_{LM}\Omega^2)_{,N}] \\
&= \delta^{KN}[\delta_{LN}\ln(\Omega)_{,M} + \delta_{NM}\ln(\Omega)_{,L} - \delta_{LM}\ln(\Omega)_{,N}] \\
&= \delta^K_L\ln(\Omega)_{,M} + \delta^K_M\ln(\Omega)_{,L} - \delta^{KN}\delta_{LM}\ln(\Omega)_{,N},
\end{aligned}$$

donde, por ejemplo, $\ln(\Omega)_{,M}$ representa la parcial de $\ln(\Omega)$ respecto de la M -ésima coordenada, que este caso es la M -ésima coordenada angular. Ahora podemos encontrar el tensor de Riemann:

$$\begin{aligned}
\widehat{R}^K_{LMN} &= \partial_M\widehat{\Gamma}^K_{NL} + \widehat{\Gamma}^K_{M\lambda}\cdot\widehat{\Gamma}^\lambda_{NL} - (M \leftrightarrow N) \\
&= \partial_M[\delta^K_N\ln(\Omega)_{,L} + \delta^K_L\ln(\Omega)_{,N} - \delta^{KS}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,S}] \\
&\quad + [\delta^K_M\ln(\Omega)_{,\lambda} + \delta^K_\lambda\ln(\Omega)_{,M} - \delta^{KU}\delta_{M\lambda}\ln(\Omega)_{,U}] \\
&\quad \times [\delta^\lambda_N\ln(\Omega)_{,L} + \delta^\lambda_L\ln(\Omega)_{,N} - \delta^{\lambda V}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,V}] \\
&\quad - (M \leftrightarrow N) \\
&= \left[\delta^K_N\partial_M\ln(\Omega)_{,L} + \delta^K_L\partial_M\ln(\Omega)_{,N} - \delta^{KS}\delta_{NL}\partial_M\ln(\Omega)_{,S} \right] \\
&\quad + \left[\delta^K_M\delta^\lambda_N\ln(\Omega)_{,\lambda}\ln(\Omega)_{,L} + \delta^K_M\delta^\lambda_L\ln(\Omega)_{,\lambda}\ln(\Omega)_{,N} \right. \\
&\quad - \delta^K_M\delta^{\lambda V}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,\lambda}\ln(\Omega)_{,V} + \delta^K_\lambda\delta^\lambda_N\ln(\Omega)_{,M}\ln(\Omega)_{,L} \\
&\quad + \delta^K_\lambda\delta^\lambda_L\ln(\Omega)_{,M}\ln(\Omega)_{,N} - \delta^K_\lambda\delta^{\lambda V}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,M}\ln(\Omega)_{,V} \\
&\quad - \delta^{KU}\delta_{M\lambda}\delta^\lambda_N\ln(\Omega)_{,U}\ln(\Omega)_{,L} - \delta^{KU}\delta_{M\lambda}\delta^\lambda_L\ln(\Omega)_{,U}\ln(\Omega)_{,N} \\
&\quad \left. + \delta^{KU}\delta_{M\lambda}\delta^{\lambda V}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,U}\ln(\Omega)_{,V} \right] \\
&\quad - (M \leftrightarrow N) \\
&= \left[\delta^K_N\partial_M\ln(\Omega)_{,L} - \delta^{KS}\delta_{NL}\partial_M\ln(\Omega)_{,S} \right] \\
&\quad + \left[\delta^K_M\ln(\Omega)_{,L}\ln(\Omega)_{,N} - \delta^K_M\delta^{\lambda V}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,\lambda}\ln(\Omega)_{,V} \right. \\
&\quad \left. + \delta^{KU}\delta^{MV}\delta_{NL}\ln(\Omega)_{,U}\ln(\Omega)_{,V} \right] \\
&\quad - (M \leftrightarrow N),
\end{aligned}$$

aquí el símbolo ($M \leftrightarrow N$) indica que se escribe la expresión anterior al símbolo pero ahora intercambiando M por N .

Sustituyendo el valor de Ω y después de algunas operaciones elementales

$$\begin{aligned}
 \widehat{R}^K_{LMN} &= \left[\delta^K_N \left(\frac{-2\delta_{LM}}{1 + \|\vec{y}\|^2} + \frac{4y_L y_M}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \right) - \delta^{KS} \delta_{NL} \left(\frac{-2\delta_{SM}}{1 + \|\vec{y}\|^2} + \frac{4y_S y_M}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \right) \right] \\
 &\quad + \left[\delta^K_M \left(\frac{4y_L y_N}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \right) - \delta^K_M \delta_{NL} \left(\frac{4\|\vec{y}\|^2}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \right) \right] \\
 &\quad + \delta^{KV} \delta^{MY} \delta_{NL} \left(\frac{4y_Y y_L}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \right) \Big] \\
 &\quad - (M \leftrightarrow N) \\
 &= \delta^K_N \delta_{ML} \left(\frac{4\|\vec{y}\|^2}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} - \frac{4(1 + \|\vec{y}\|^2)}{(1 + \|\vec{y}\|^2)^2} \right) \\
 &\quad - (M \leftrightarrow N) \\
 &= \Omega^2 [\delta^K_M \delta_{NL} - \delta^K_N \delta_{ML}].
 \end{aligned}$$

3.2. Los símbolos de Christoffel para la métrica esféricamente simétrica

Calculemos ahora los símbolos de Christoffel asociados a la métrica (3.1). Antes hay que recordar que al hablar de los índices a y b nos referimos a coordenadas locales sobre la variedad bidimensional \widetilde{M} , y con los índices K, L, M y N nos referimos a coordenadas sobre S^q

$$\blacksquare \Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2} g^{a\sigma} (g_{b\sigma,c} + g_{\sigma c,b} - g_{bc,\sigma}).$$

Como la métrica no tiene términos cruzados observamos que $\sigma = d$ entonces:

$$\frac{1}{2} g^{a\sigma} (g_{b\sigma,c} + g_{\sigma c,b} - g_{bc,\sigma}) = \frac{1}{2} g^{ad} (g_{bd,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}).$$

En la forma en que reescribimos la métrica tenemos que $g_{ab} = \widetilde{g}_{ab}$ por lo tanto $g^{ab} = \widetilde{g}^{ab}$ y tenemos que

$$\frac{1}{2} g^{ad} (g_{bd,c} + g_{dc,b} - g_{bc,d}) = \frac{1}{2} \widetilde{g}^{ad} (\widetilde{g}_{bd,c} + \widetilde{g}_{dc,b} - \widetilde{g}_{bc,d}).$$

Entonces obtenemos

$$\Gamma^a_{bc} = \tilde{\Gamma}^a_{bc}.$$

$$\blacksquare \Gamma^a_{bK} = \frac{1}{2}g^{a\sigma}(g_{b\sigma,K} + g_{\sigma c,b} - g_{bK,\sigma}).$$

Como la métrica no tiene términos cruzados, de nuevo $\sigma = d$

$$\frac{1}{2}g^{a\sigma}(g_{b\sigma,K} + g_{\sigma c,b} - g_{bK,\sigma}) = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{bd,K} + g_{dK,b} - g_{bK,d}).$$

Como la métrica no tiene términos cruzados $g_{dK,b}$ y $g_{bK,d}$ son cero y $g_{bd,K} = \tilde{g}_{bd,K} = 0$ pues la métrica radial no depende de ángulos. Por lo tanto

$$\Gamma^a_{bK} = 0.$$

$$\blacksquare \Gamma^a_{KL} = \frac{1}{2}g^{a\sigma}(g_{K\sigma,L} + g_{\sigma L,K} - g_{KL,\sigma}).$$

De nuevo $\sigma = d$

$$\frac{1}{2}g^{a\sigma}(g_{K\sigma,L} + g_{\sigma L,K} - g_{KL,\sigma}) = \frac{1}{2}g^{ad}(g_{Kd,L} + g_{dL,K} - g_{KL,d}).$$

La métrica no tiene términos cruzados, entonces $g_{Kd,L}$ y $g_{dL,K}$ son ambos cero. Calculemos lo que vale $g_{KL,d}$

$$g_{KL} = r^2\hat{g}_{KL},$$

$$g_{KL,d} = 2rr_d\hat{g}_{KL},$$

donde hemos definido $r_d := \tilde{\nabla}_d r$, la diferencial de r . Obtenemos

$$\Gamma^a_{KL} = -\frac{1}{2}g^{ad}2rr_d\hat{g}_{KL} = -rr_d\hat{g}_{KL}.$$

$$\blacksquare \Gamma^K_{ab} = \frac{1}{2}g^{K\sigma}(g_{a\sigma,b} + g_{\sigma b,a} - g_{ab,\sigma}).$$

Aquí $\sigma = N$, entonces

$$\frac{1}{2}g^{K\sigma}(g_{a\sigma,b} + g_{\sigma b,a} - g_{ab,\sigma}) = \frac{1}{2}g^{KN}(g_{aN,b} + g_{Nb,a} - g_{ab,N}).$$

De nuevo $g_{aN,b}$ y $g_{Nb,a}$ son cero por no haber términos cruzados en la métrica y $g_{ab,N} = \tilde{g}_{ab,N} = 0$. Entonces

$$\Gamma^K_{ab} = 0.$$

$$\blacksquare \Gamma^K_{Lc} = \frac{1}{2}g^{K\sigma}(g_{L\sigma,c} + g_{\sigma c,L} - g_{Lc,\sigma}).$$

$$\frac{1}{2}g^{K\sigma}(g_{L\sigma,c} + g_{\sigma c,L} - g_{Lc,\sigma}) = \frac{1}{2}g^{KN}(g_{LN,c} + g_{Nc,L} - g_{Lc,N}) = \frac{1}{2}g^{KN}g_{LN,c}.$$

Tenemos lo que vale $g_{LN,c}$

$$g_{LN,c} = 2rr_c\widehat{g}_{LN}.$$

Entonces

$$\Gamma^K_{Lc} = \frac{1}{2r^2}\widehat{g}^{KN}2rr_c\widehat{g}_{LN}.$$

También tenemos

$$\widehat{g}_{KN} = \Omega^2\delta_{KN},$$

entonces

$$\widehat{g}^{KN} = \Omega^{-2}\delta^{KN}.$$

Conseguimos

$$\begin{aligned} \Gamma^K_{Lc} &= \frac{1}{2r^2}\Omega^{-2}\delta^{KN}2rr_c\Omega^2\delta_{LN} \\ &= \frac{1}{r}\delta_L^K r_c. \end{aligned}$$

Por último

$$\blacksquare \Gamma^K_{LM} = \frac{1}{2}g^{K\sigma}(g_{L\sigma,M} + g_{\sigma M,L} - g_{LM,\sigma}).$$

$$\frac{1}{2}g^{K\sigma}(g_{L\sigma,M} + g_{\sigma M,L} - g_{LM,\sigma}) = \frac{1}{2}g^{KN}(g_{LN,M} + g_{NM,L} - g_{LM,N}).$$

Aquí, para cualquier combinación de L , N y M , $g_{LM} = r^2\widehat{g}_{LM}$ por lo tanto $g_{LM,N} = r^2\widehat{g}_{LM,N}$ (ya que r no depende de los ángulos) y ya sabíamos que $g^{KN} = \frac{1}{r^2}\widehat{g}^{KN}$. Sustituyamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g^{KN}(g_{LN,M} + g_{NM,L} - g_{LM,N}) &= \frac{1}{2}r^{-2}\widehat{g}^{KN}(r^2\widehat{g}_{LN,M} + r^2\widehat{g}_{NM,L} - r^2\widehat{g}_{LM,N}) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{g}^{KN}(\widehat{g}_{LN,M} + \widehat{g}_{NM,L} - \widehat{g}_{LM,N}). \end{aligned}$$

Obtuvimos entonces

$$\Gamma^K_{LM} = \widehat{\Gamma}^K_{LM}.$$

La lista queda así:

- $\Gamma^a_{bc} = \widetilde{\Gamma}^a_{bc},$
- $\Gamma^a_{bK} = 0,$
- $\Gamma^a_{KL} = -rr^a \widehat{g}_{KL},$
- $\Gamma^K_{ab} = 0,$
- $\Gamma^K_{Lc} = \frac{1}{r} \delta^K_L r_c,$
- $\Gamma^K_{LM} = \widehat{\Gamma}^K_{LM},$

donde $r_c := \widetilde{\nabla}_c r$ y $r^a = \widetilde{g}^{ab} r_b = \widetilde{\nabla}^a r$ es el gradiente de r .

3.3. La curvatura de la métrica esféricamente simétrica

Calcularemos el tensor de curvatura para la métrica (3.1).

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu} \cdot \Gamma^\sigma_{\beta\nu} - (\mu \leftrightarrow \nu).$$

Con las simetrías del tensor de Riemann sólo es necesario calcular las siguientes componentes

1. $R^a_{bcd} = \partial_c \widetilde{\Gamma}^a_{bd} + \widetilde{\Gamma}^a_{\sigma c} \cdot \widetilde{\Gamma}^\sigma_{bd} - (c \leftrightarrow d) = \widetilde{R}^a_{bcd},$
2. $R^a_{bcK} = \partial_c \Gamma^a_{bK} + \Gamma^a_{\sigma c} \cdot \Gamma^\sigma_{bK} - \partial_K \Gamma^a_{bc} - \Gamma^a_{\sigma K} \cdot \Gamma^\sigma_{bc} = 0,$

3. $R^a{}_{bKL} = \partial_K \Gamma^a{}_{bL} + \Gamma^a{}_{\sigma K} \cdot \Gamma^\sigma{}_{bL} - (K \leftrightarrow L)$, aquí σ debe ser una componente angular, digamos N

$$\begin{aligned} R^a{}_{bKL} &= -\delta^N{}_L \widehat{g}_{NK} r^a r_b - (K \leftrightarrow L) \\ &= -r^a r_b (\widehat{g}_{LK} - \widehat{g}_{KL}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

4. $R^a{}_{KLM} = \partial_L \Gamma^a{}_{KM} + \Gamma^a{}_{\sigma L} \cdot \Gamma^\sigma{}_{KM} - (L \leftrightarrow M)$, también aquí $\sigma = N$

$$R^a{}_{KLM} = -r r^a (\partial_L \widehat{g}_{KM} + \widehat{g}_{NL} \widehat{\Gamma}^N{}_{KM}),$$

recordando la definición de la derivada covariante: $\widehat{\nabla}_L \widehat{g}_{KM} = \partial_L \widehat{g}_{KM} - \widehat{g}_{NL} \widehat{\Gamma}^N{}_{KM} - \widehat{g}_{NM} \widehat{\Gamma}^N{}_{KL}$, y con esto tenemos que

$$\begin{aligned} R^a{}_{KLM} &= -r r^a (\widehat{\nabla}_L \widehat{g}_{KM} - \widehat{\nabla}_M \widehat{g}_{LK}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ya que $\widehat{\nabla} \widehat{g} = 0$.

5. $R^a{}_{KcL} = \partial_c \Gamma^a{}_{KL} + \Gamma^a{}_{\sigma c} \cdot \Gamma^\sigma{}_{KL} - \partial_L \Gamma^a{}_{Kc} - \Gamma^a{}_{\sigma L} \cdot \Gamma^\sigma{}_{Kc}$

$$\begin{aligned} R^a{}_{KcL} &= \partial_c (-r r^a \widehat{g}_{KL}) - r r^e \widetilde{\Gamma}^a{}_{ec} \widehat{g}_{KL} + \widehat{g}_{KL} r^a r_c \\ &= -r_c r^a \widehat{g}_{KL} - r \partial_c r^a \widehat{g}_{KL} - r \widetilde{\nabla}_c r^a \widehat{g}_{KL} + r \partial_c r^a \widehat{g}_{KL} + \widehat{g}_{KL} r^a r_c \\ &= -\widehat{g}_{KL} r \widetilde{\nabla}_c r^a. \end{aligned}$$

6. $R^K{}_{LMN} = \partial_M \widehat{\Gamma}^K{}_{LN} + \Gamma^K{}_{\sigma M} \cdot \Gamma^\sigma{}_{LN} - (M \leftrightarrow N)$,

$$\begin{aligned} R^K{}_{LMN} &= \partial_M \widehat{\Gamma}^K{}_{LN} + \Gamma^K{}_{eM} \Gamma^e{}_{LN} + \widehat{\Gamma}^K{}_{SM} \widehat{\Gamma}^S{}_{LN} - (M \leftrightarrow N) \\ &= \partial_M \widehat{\Gamma}^K{}_{LN} - \delta^K{}_M \widehat{g}_{LN} r^e r_e + \widehat{\Gamma}^K{}_{SM} \widehat{\Gamma}^S{}_{LN} - (M \leftrightarrow N) \\ &= \widehat{R}^K{}_{LMN} - r^e r_e [\delta^K{}_M \widehat{g}_{LN} - \delta^K{}_N \widehat{g}_{LM}]. \end{aligned}$$

Tenemos la lista de los tensores de Riemann asociados a la métrica:

- $R^a{}_{bcd} = \widetilde{R}^a{}_{bcd} = 2\widetilde{k} \delta^a [c \widetilde{g}_d]_b,$

- $R^a{}_{bcK} = 0,$
- $R^a{}_{bKL} = 0,$
- $R^a{}_{KLM} = 0,$
- $R^a{}_{KcL} = -\widehat{g}_{KL}r\widetilde{\nabla}_c r^a,$
- $R^K{}_{LMN} = \widehat{R}^K{}_{LMN} - N[\delta^K{}_M\widehat{g}_{LN} - \delta^K{}_N\widehat{g}_{LM}] = 2(1 - N)\delta^K{}_{[M}\widehat{g}_{N]}L,$

donde \widetilde{k} es la curvatura de Gauss de \widetilde{M} y donde $N = r^a r_a = \widetilde{g}_{ab}\widetilde{\nabla}^a r\widetilde{\nabla}^b r$ es la norma cuadrada del gradiente de r . Y al contraer el tensor de Riemann obtenemos las componentes del tensor de Ricci, $R_{\beta\nu} = R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu}$:

- $R_{ab} = \widetilde{k}\widetilde{g}_{ab} - \frac{q}{r}\widetilde{\nabla}_a\widetilde{\nabla}_b r,$
- $R_{aK} = 0.$
- $R_{KL} = \widehat{g}_{KL}[(q - 1)(1 - N) - r\widetilde{\Delta}r],$

donde $\widetilde{\Delta}r = \widetilde{\nabla}^c\widetilde{\nabla}_c r$. Ahora calculemos el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R,$$

con $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ y después veremos lo que nos dice la identidad de Bianchi

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0.$$

$$\begin{aligned} R &= \widetilde{g}^{ab}R_{ab} + \frac{1}{r^2}\widehat{g}^{KL}R_{KL} \\ &= 2\widetilde{k} - \frac{q}{r}\widetilde{\Delta}r + \frac{q}{r^2}[(q - 1)(1 - N) - r\widetilde{\Delta}r] \\ &= 2\widetilde{k} + \frac{q}{r^2}[(q - 1)(1 - N) - 2r\widetilde{\Delta}r]. \end{aligned}$$

Entonces ya podemos hallar las componentes del tensor de Einstein:

$$\begin{aligned}
 G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}R \\
 &= \tilde{k}\tilde{g}_{ab} - \frac{q}{r}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\left(2\tilde{k} + \frac{q}{r^2}[(q-1)(1-N) - 2r\tilde{\Delta}r]\right) \\
 &= -\frac{q}{r}\left((\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br)^{tf} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{\Delta}r\right) - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\left(\frac{q}{r^2}[(q-1)(1-N) - 2r\tilde{\Delta}r]\right) \\
 &= -\frac{q}{r}(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br)^{tf} - \frac{q}{2r^2}[(q-1)(1-N) - r\tilde{\Delta}r].
 \end{aligned}$$

donde $(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br)^{tf} = \tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br - \frac{1}{2}\tilde{g}_{ab}\tilde{\Delta}r$. Fácilmente se ve que $G_{aM} = 0$.

$$\begin{aligned}
 G_{KL} &= R_{KL} - \frac{1}{2}\hat{g}_{KL}R \\
 &= \hat{g}_{KL}[(q-1)(1-N) - r\tilde{\Delta}r] - \hat{g}_{KL}\left[r^2\tilde{k} + \frac{q}{2}[(q-1)(1-N) - 2r\tilde{\Delta}r]\right] \\
 &= \hat{g}_{KL}\left[(q-1)(1-N)\left(1 - \frac{q}{2}\right) + r\tilde{\Delta}r(q-1) - r^2\tilde{k}\right].
 \end{aligned}$$

En el vacío debemos tener que

$$G_{\mu\nu} = 0$$

de lo que obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_br)^{tf} = 0, \quad (3.3)$$

$$(q-1)(1-N) - r\tilde{\Delta}r = 0, \quad (3.4)$$

$$G_{KL} = 0. \quad (3.5)$$

donde las incógnitas son la función radio de área r y la métrica.

3.4. Las identidades de Bianchi

Podemos fijarnos en lo que nos dice $\nabla_\mu G^\mu{}_\nu = 0$:

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu G^\mu{}_\nu &= \partial_\mu G^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu{}_{\mu\alpha}G^\alpha{}_\nu - \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}G^\mu{}_\alpha \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Primero ponemos $\nu = b$:

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu G^\mu_b &= \partial_\mu G^\mu_b + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} G^\alpha_b - \Gamma^\alpha_{\mu b} G^\mu_\alpha \\
&= \partial_a G^a_b + \Gamma^\mu_{\mu a} G^a_b - \Gamma^\alpha_{\mu b} G^\mu_\alpha \\
&= \partial_a G^a_b + (\tilde{\Gamma}^c_{ca} + \Gamma^L_{La}) G^a_b - \tilde{\Gamma}^c_{db} G^d_c - \Gamma^K_{Lb} G^L_K \\
&= \tilde{\nabla}_a G^a_b + q \frac{r_a}{r} G^a_b - \hat{g}^K_L \frac{r_b}{r} G^L_K \\
&= \frac{1}{r^q} \tilde{\nabla}^a (r^q G_{ab}) - \frac{r_b}{r} \hat{g}^{KL} G_{KL} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Esta igualdad nos dice que no es necesario resolver las tres ecuaciones que encontramos para el vacío, ya que $(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} = 0$ y $(q-1)(1-N) - r \tilde{\Delta} r = 0$, es decir $G_{ab} = 0$, implican $G_{KL} = 0$ si $r^b \neq 0$.

Podemos hacer $\nu = L$

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu G^\mu_L &= \partial_\mu G^\mu_L + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} G^\alpha_L - \Gamma^\alpha_{\mu L} G^\mu_\alpha \\
&= \partial_M G^M_L + \Gamma^\mu_{\mu M} G^M_L - \Gamma^\alpha_{\mu L} G^\mu_\alpha \\
&= \partial_M G^M_L + (\Gamma^c_{cM} + \hat{\Gamma}^N_{NM}) G^M_L - \Gamma^c_{bL} G^b_c - \hat{\Gamma}^M_{NL} G^N_M \\
&= \hat{\nabla}_M G^M_L + \Gamma^c_{cM} G^M_L - \Gamma^c_{bL} G^b_c \\
&= \hat{\nabla}_M G^M_L \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pero esto no nos dará nueva información ya que podemos ver de la expresión de G_{KL} , que éste es idénticamente cero.

3.5. La métrica de Schwarzschild-Tangherlini

Ahora queremos encontrar las soluciones en vacío para las ecuaciones de Einstein. Las desconocidas son: La métrica sobre la variedad bidimensional \tilde{M} y la función r . Para esto, hagamos lo siguiente: Ya que podemos foliar la variedad en esferas, vamos a definir r como el radio de área de una esfera cualquiera. Fijemos los ángulos en S^q , así obtenemos \tilde{M} .

Tenemos para cada punto de \widetilde{M} el radio de área r . Supongamos que $\widetilde{\nabla}_a r = r_a \neq 0$, con lo que podemos usar a r como coordenada. Ahora que tenemos la coordenada radial, vamos a describir el procedimiento para obtener una coordenada temporal.

Paso 1: Consideremos sobre \widetilde{M} las trayectorias con r constante. Estas trayectorias serán regulares, ya que pedimos antes que r_a sea distinto de cero. Entonces en cada punto de una trayectoria γ tendremos r^a el vector gradiente que es perpendicular a γ . Definamos k^a a partir de $k^a = -\widetilde{\varepsilon}^{ab}r_b$, donde $\widetilde{\varepsilon}_{ab} = \sqrt{|det(\widetilde{g}_{ab})|}\varepsilon_{ab}$ y $\varepsilon_{00} = \varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{01} = -\varepsilon_{10} = 1$, es el tensor de Levi-Civita sobre \widetilde{M} (ver apéndice en la sección 3.8).

En cada punto de la variedad tenemos que k^a y r^a son perpendiculares: $\widetilde{g}_{ab}(k^a r^b) = \widetilde{g}_{ab}(-\widetilde{\varepsilon}^{ac}r_c r^b) = \widetilde{\varepsilon}^{ac}r_c r_a$, de donde $\widetilde{g}_{ab}(k^a r^b) = 0$, ya que $r_c r_a$ es simétrico, pero $\widetilde{\varepsilon}^{ac}$ es antisimétrico.

Entonces tenemos para cada punto de γ el vector tangente k^a .

Paso 2: Elijamos un parámetro t sobre la curva γ tal que $\frac{d}{dt}\gamma(t) = (k^a \partial_a)(\gamma(t))$, donde $k^a \partial_a$ es el campo vectorial cuyas componentes son k^a . Podemos elegir en qué punto de cada curva γ ponemos $\gamma(0)$, con esta libertad, si lo necesitamos, podríamos hacer una traslación de este punto, es decir, una cambio de la forma $t \mapsto t + f(r)$.

Conseguimos t y r , dos coordenadas adaptadas para describir la métrica. Veamos ahora qué propiedades tienen: Las componentes de la diferencial de r en las coordenadas (t, r) son $r_t = 0$ y $r_r = 1$. El campo vectorial $k^a \partial_a$ tiene las componentes k^t y k^r , donde $k^t = (k^a \partial_a)(t) = dt(k^a \partial_a) = \frac{d}{dt}t(\gamma(t))|_{t=0} = 1$ y $k^r = \frac{d}{dt}r(\gamma(t))|_{t=0} = 0$, ya que r es constante a lo largo de la curva $\gamma(t)$.

Paso 3: Veamos ahora que k^a es un vector de Killing, entonces tendremos una invarianza de la métrica respecto al tiempo.

Que k^a sea un vector de Killing es equivalente a $\widetilde{\nabla}_a k_b + \widetilde{\nabla}_b k_a = 0^1$. Primero veamos que esta ecuación es válida usando las ecuaciones de Einstein que hemos encontrado

¹Ver apéndice 3.8.

para el caso de simetría esférica y vacío:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_a k_b &= \tilde{\nabla}_a (-\tilde{\varepsilon}_b^c r_c) \\
&= -\tilde{\varepsilon}_b^c \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_c r \\
&= -\tilde{\varepsilon}_b^c \left[(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_c r)^{tf} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ac} \tilde{\Delta} r \right] \\
&= \frac{1}{2} \tilde{\varepsilon}_{ab} \tilde{\Delta} r,
\end{aligned}$$

donde hemos usado (3.3). Consideremos la parte simétrica:

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{(a} k_{b)} &:= \frac{1}{2} (\tilde{\nabla}_a k_b + \tilde{\nabla}_b k_a) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \tilde{\nabla}_a k_b + \tilde{\nabla}_b k_a = 0$, como queríamos.

Paso 4: Ahora podemos escribir la métrica (3.1) en la siguiente forma:

$$\tilde{g} = -\alpha^2 (dt - \beta dr)^2 + \gamma^2 dr^2,$$

donde ninguno de los coeficientes, α , β y γ , dependen de t , sólo dependen de r . Notemos que en esta expresión para la métrica podríamos hacer una traslación, lo cual tenemos libertad de hacer ya que β sólo depende de r , como por ejemplo $t \rightarrow t + f(r)$ y tal que $f'(r) = \beta dr$, pero hacer esta transformación implicaría fijar las coordenadas de la métrica y como veremos más adelante necesitamos aún esta libertad para darnos cuenta que distintas transformaciones de t pueden hacer que la métrica describa cosas distintas y allí entonces elegiremos la transformación para t que sea correcta.

Podemos obtener más información; podemos calcular las normas de k^a y r^a , con lo que obtendremos una forma un poco más específica de la métrica.

La norma de k^a :

$$\tilde{g}_{ab} k^a k^b = \tilde{g}_{tt} k^t k^t = \tilde{g}_{tt} = -\alpha^2,$$

es decir, $-\alpha^2$ es la norma cuadrada del campo vectorial $k^a \partial_a$. Ahora usando que $r^a = \tilde{g}^{ab} r_b$,

$$\tilde{g}^{ab} r_a r_b = \tilde{g}^{rr} r_r r_r = \tilde{g}^{rr} = \frac{1}{\gamma^2}.$$

$\frac{1}{\gamma^2}$ es la norma cuadrada del campo vectorial r^a .

También notemos lo siguiente:

$$\tilde{g}_{ab}k^ak^b = \tilde{g}_{ab}(-\tilde{\varepsilon}^{ac}r_c)(-\tilde{\varepsilon}^{bd}r_d) = \tilde{\varepsilon}^{ac}\tilde{\varepsilon}^{bd}r_cr_d = -\tilde{g}^{cd}r_cr_d = -\frac{1}{\gamma^2}.$$

Si recordamos tenemos que $N = \tilde{g}^{cd}r_cr_d$, con esto tenemos que $\gamma^2 = \frac{1}{N}$ y $\alpha^2 = N$.

Con lo que la métrica, hasta ahora, tiene la siguiente forma:

$$\tilde{g} = -N(dt - \beta dr)^2 + \frac{dr^2}{N}.$$

Paso 5: Podemos calcular el valor de N utilizando las ecuaciones de Einstein (3.3) y (3.4).

Si calculamos el gradiente de $1 - N$ que aparece como factor en la ecuación (3.4)

$$\tilde{\nabla}_a(1 - N) = -(\tilde{\nabla}_a\tilde{g}^{cd})r_cr_d - 2\tilde{g}^{cd}r_c\tilde{\nabla}_ar_d = -2\tilde{g}^{cd}r_c\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_dr,$$

entonces podemos utilizar la ecuación (3.3) ya que

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_dr = (\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_dr)^{tf} + \frac{1}{2}\tilde{g}_{ad}\tilde{\Delta}r,$$

y usando la ecuación tenemos que

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_dr = \frac{1}{2}\tilde{g}_{ad}\tilde{\Delta}r,$$

y utilizando la ecuación (3.4) para obtener el valor de $\tilde{\Delta}r$

$$\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_dr = \frac{1}{2r}\tilde{g}_{ad}(q-1)(1-N).$$

Entonces el gradiente de $1 - N$ queda

$$\tilde{\nabla}_a(1 - N) = -\frac{1}{r}(\tilde{\nabla}_ar)(q-1)(1-N),$$

que es una ecuación diferencia con variables separables

$$\frac{\tilde{\nabla}_a(1 - N)}{1 - N} = -\frac{\tilde{\nabla}_ar}{r}(q-1)$$

lo que implica que

$$N = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1},$$

donde r_0 es una constante de integración.

Conclusión: Ahora tenemos la métrica radial más específica:

$$\tilde{g} = -N(dt - \beta dr)^2 + \frac{dr^2}{N}$$

y la métrica completa

$$\tilde{g} = -N(dt - \beta dr)^2 + \frac{dr^2}{N} \quad (3.6)$$

donde $N = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1}$ y $\beta = \beta(r)$, donde todavía tenemos la libertad de hacer una traslación como $t \rightarrow t + f(r)$, pero aún no queremos fijar las coordenadas. Esta métrica se llama la solución de Schwarzschild- Tangherlini, describe el exterior de un hoyo negro en un espacio-tiempo esféricamente simétrico, como veremos en la siguiente sección.

3.6. Interpretación física de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini

Ya que, como dijimos en el párrafo anterior, aún no hemos fijado las coordenadas de la métrica (3.6) debemos tener cuidado de hacerlo con una transformación de t adecuada. Notemos que los coeficientes de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini divergen en $r = 0$ y en $r = r_0$ y ya que la métrica describe la curvatura del espacio-tiempo, entonces deberíamos pensar que en las regiones descritas por estos valores de r la curvatura del espacio-tiempo también se comporta de una manera exagerada. Debemos entonces analizar si esta forma de la métrica es correcta, si en estas coordenadas el espacio-tiempo está correctamente descrito.

La curvatura del espacio-tiempo puede analizarse por medio del tensor de Riemann. Entonces considerando el escalar de Kretschmann que es la siguiente contracción del escalar de Riemann

$$I := R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu},$$

tenemos una forma de analizar qué tan curvado está el espacio-tiempo localmente. El escalar de Kretschmann nos dice la magnitud de la curvatura del espacio-tiempo localmente.

Vamos a ver entonces qué nos dice I acerca de la geometría de M .

Las siguientes son componentes del tensor de Riemman que obtuvimos en la sección 3.3

- $R_{abcd} = \tilde{k}(\tilde{g}_{ac}\tilde{g}_{bd} - \tilde{g}_{ad}\tilde{g}_{bc}),$
- $R_{aKcL} = -g_{KL}\frac{1}{r}\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c r,$
- $R_{KLMN} = \frac{1-N}{r^2}(g_{KM}g_{LN} - g_{KN}g_{LM}),$

las demás componentes son cero. Y el escalar de Kretschmann queda

$$I = R^{abcd}R_{abcd} + 4R^{aKcL}R_{aKcL} + R^{KLMN}R_{KLMN} \quad (3.7)$$

$$= 4\tilde{k}^2 + \frac{4}{r^2}q(\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^c r)(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c r) + 2q(q-1)\left(\frac{1-N}{r^2}\right)^2, \quad (3.8)$$

usando las ecuaciones de Einstein ((3.3)-(3.5)) que hemos obtenido

$$\begin{aligned} I &= 4\tilde{k}^2\left(1 + \frac{2}{q}\right) + 2q(q-1)\left(\frac{1-N}{r^2}\right)^2 \\ &= \left[q^2(q-1)^2\left(1 + \frac{2}{q}\right) + 2q(q-1)\right]\left(\frac{1-N}{r^2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{r^4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{2(q-1)}q^2(q^2-1). \end{aligned}$$

Podemos ver que I , cuando r se acerca al valor de $r = 0$, diverge; es decir, en la variedad M tendremos una única singularidad de la geometría al acercarnos a $r = 0$ que corresponderá a una singularidad real en el espacio-tiempo.

Ya que tenemos una idea de lo que debemos encontrar en una buena representación de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini, analicemos la métrica (3.6). Hay algunos casos interesantes:

- $\beta = 0$ conseguimos que (3.6) se vea como

$$\tilde{g} = -Ndt^2 + \frac{dr^2}{N},$$

se ve que esta métrica es singular en $r = 0$ y en $r = r_0$, tendremos una singularidad de la geometría en $r = 0$ y además otra singularidad, pero ahora correspondiente a la elección de las coordenadas, en $r = r_0$.

- Si $g_{rr} = 0$ entonces $\beta = \pm \frac{1}{N}$, escogeremos el signo positivo y la métrica (3.6) queda de la siguiente forma:

$$\tilde{g} = -Ndt^2 + 2dt dr,$$

esta métrica radial es regular en $r = r_0$, como vimos que debe ser en el análisis de I . Podemos reescribir la métrica de la siguiente forma

$$\tilde{g} = dt[-Ndt + 2dr].$$

Si con estas mismas coordenadas hacemos la traslación² $t = T + r$ obtenemos $dt = dT + dr$, con lo que la métrica se verá como

$$\tilde{g} = (dT + dr)[-NdT + (2 - N)dr],$$

que es equivalente a (3.9). Tenemos la métrica en coordenadas de **Eddington-Finkelstein**. Notamos que de esta forma la métrica tiene una sola singularidad en $r = 0$, como debíamos esperar; es una singularidad en que la curvatura del espacio-tiempo diverge. Analicemos ahora la estructura del espacio-tiempo en estas coordenadas. Las trayectorias de los rayos de luz están descritos por la ecuación $dT = -dr$, es decir $T = -r + c$, con c una constante; y por la ecuación

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2 - N}{N},$$

no es difícil integrar esta ecuación para $q = 2$ y obtenemos $T = r + 2r_0 \ln \left| \frac{r}{r_0} - 1 \right| + c_1$, con c_1 una constante. En la figura 3.1 tenemos las gráficas de estas funciones. Aquellos rayos de luz que obtenemos de $T = -r + c$, representan rayos de luz entrantes. En cambio los que resultan de la otra ecuación, para $r > r_0$ representan rayos de luz salientes y para

²Esta es la libertad que mencionamos en la página 25, en el paso 2.

$r < r_0$ entrantes. Entonces aquellos eventos que tengan un radio de área menor que r_0 inevitablemente llegarán hasta tener un radio de área igual a cero, mientras que los que tienen un radio de área mayor que r_0 aún pueden escapar a infinito. Aunque entre más cerca de r_0 es más difícil escapar ya que los rayos de luz definen conos de luz cada vez más inclinados cerca de $r = r_0$. El cono de luz de un evento es la región determinada por los rayos de luz que en el diagrama 3.1 crucen por dicho evento, define el futuro posible para el evento $a = (\tau_a, r_a)$, es decir para τ mayor que r_a y también determina qué eventos pudieron estar en su pasado, es decir para $\tau < \tau_a$. Entonces r_0 representa una frontera entre aquellos eventos que pueden enviar información a infinito y los que no. Tenemos que la superficie con radio de área r_0 define un hoyo negro, que recibe este nombre ya que ni la luz puede cruzar esta frontera llamada horizonte de eventos con radio de área r_0 .

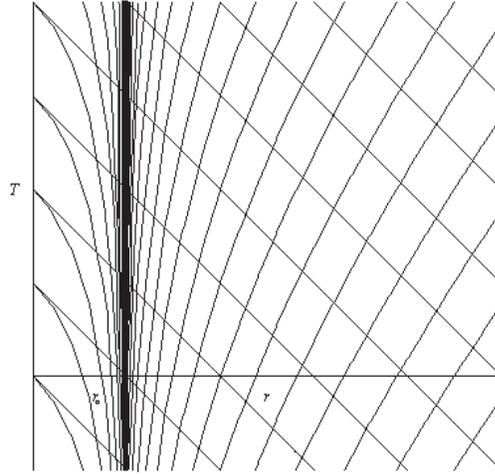


Figura 3.1: El diagrama de Eddington-Filkenstein. Las líneas corresponden a los rayos de luz radiales en $q + 2 = 4$ dimensiones espacio-temporales. Los eventos con radio de área menor que r_0 inevitablemente llegan a $r = 0$ mientras que para aquellos con radio de área mayor que r_0 pueden escapar a infinito. $r = r_0$ representa el horizonte de eventos.

- Ahora si $g_{rr} = 1$

$$g_{rr} = -N\beta^2 + \frac{1}{N} = 1 \Rightarrow \beta = \pm \frac{\sqrt{1-N}}{N}, \text{ entonces}$$

$$g = -Ndt^2 \pm 2\sqrt{1-N}dtdr + dr^2,$$

si reescribimos

$$g = -dt^2 + \left(dr \pm \sqrt{1 - N} dt\right)^2,$$

estas son las coordenadas de Painlevé-Gullstrand.

3.7. Resumen

En este capítulo la meta fue demostrar el teorema de Birkhoff. En la primera sección hemos estudiado la geometría de S^q para conocer la parte angular de la métrica (3.1), \hat{g} , después hemos hecho los cálculos necesarios para determinar las ecuaciones de Einstein para la métrica completa, que en nuestro caso nos dicen cómo se debe comportar el espacio-tiempo con una simetría esféricamente simétrica donde no hay materia. Hemos resuelto estas ecuaciones encontrando las incógnitas, que eran: \tilde{g} la métrica radial sobre la variedad bidimensional \tilde{M} y r que hemos definido como el radio de área de esferas en S^q . Hemos encontrado la forma de la métrica completa

$$g = (dT + dr)[-NdT + (2 - N)dr] + r^2 \hat{g}_{KL} dx^K dx^L, \quad (3.9)$$

con $\hat{g}_{KL} dx^K dx^L = \Omega^2 \sum_{M=1}^q (dx^M)^2$ y $N = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1}$.

En el siguiente capítulo analizaremos un poco más la estructura del espacio-tiempo para $q+1$ dimensiones espaciales, veremos en qué dimensiones podríamos encontrar trayectorias acotadas alrededor de un hoyo negro descrito por la métrica de Schwarzschild-Tangherlini. Y en el capítulo 5 haremos una descripción detallada del colapso relativista de una nube de polvo esféricamente simétrica donde la métrica (3.9) describe el espacio-tiempo fuera de ella.

3.8. Apéndice

En este apéndice mostraremos dos cosas. Primero mostraremos que lo que definimos como un tensor en la sección 3.5 en el paso 1, $\tilde{\varepsilon} = \sqrt{|\det(\tilde{g})|} \varepsilon$ (esta es la forma en la representación matricial) realmente es un tensor. Segundo, demostraremos la equivalencia

que mencionamos en la misma sección pero en el paso 3 donde decimos que si k^a es un vector de Killing esto es equivalente a $\tilde{\nabla}_a k_b + \tilde{\nabla}_b k_a = 0$.

Primero entonces queremos ver que las coordenadas de $\tilde{\varepsilon}$ se transforman de la siguiente manera

$$\bar{\varepsilon}_{cd} = \tilde{\varepsilon}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial y^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^d}, \quad (3.10)$$

donde $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_{ab} dx^a dx^b$ y $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{cd} dx^c dx^d$, es la representación en las distintas coordenadas. Primero notemos que la métrica g sí es un tensor entonces

$$\bar{g}_{cd} = \tilde{g}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial y^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^d}.$$

Ahora debemos ver cómo se transforma $\det(g)$. En coordenadas tenemos:

$$\det(\bar{g}_{cd}) = \det\left(\tilde{g}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial y^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^d}\right),$$

si reordenamos los términos del lado derecho

$$\det(\bar{g}_{cd}) = \det\left(\frac{\partial x^a}{\partial y^c} \tilde{g}_{ab} \frac{\partial x^b}{\partial y^d}\right),$$

que en forma matricial es

$$\det(\bar{g}) = \det(J^T \tilde{g} J),$$

donde J es la matriz jacobiana de la transformación de las coordenadas. Y entonces

$$\det(\bar{g}) = \det(J^T) \det(\tilde{g}) \det(J) = [\det(J)]^2 \det(\tilde{g}),$$

y entonces

$$\sqrt{|\det(\bar{g})|} = |\det(J)| \sqrt{|\det(\tilde{g})|},$$

por lo tanto tenemos

$$\bar{\varepsilon}_{cd} = |\det(J)| \sqrt{|\det(\tilde{g})|} \varepsilon_{cd} = |\det(J)| \tilde{\varepsilon}_{cd}.$$

Ahora falta ver que esto es igual al lado derecho de (3.10), veamos

$$\tilde{\varepsilon}_{ab} \frac{\partial x^a}{\partial y^c} \frac{\partial x^b}{\partial y^d} = J_c^a \tilde{\varepsilon}_{ab} J_d^b = \sqrt{|\det(\tilde{g})|} J_c^a \varepsilon_{ab} J_d^b = \sqrt{|\det(\tilde{g})|} [\det(J)] \varepsilon_{cd} = [\det(J)] \tilde{\varepsilon}_{cd}.$$

Tenemos entonces que la igualdad se cumple si y sólo si $\det(J) > 0$. Esta es la condición para que la variedad \widetilde{M} sea orientable, entonces tenemos que $\widetilde{\varepsilon}$ es un tensor si y sólo si \widetilde{M} es orientable.

Ahora sigamos con la segunda tarea y empecemos calculando $\widetilde{\nabla}_a k^b$ y después tomaremos su parte simétrica. En coordenadas locales (t, r) tales que $k^a \partial_a = \partial_t$, vale

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_a k^b &= \partial_a k^b + \widetilde{\Gamma}^c_{ab} k_c \\ &= \widetilde{\Gamma}^b_{at}.\end{aligned}$$

Si hacemos

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_a k_b &= \widetilde{g}_{bd} \widetilde{\nabla}_a t^d \\ &= \frac{1}{2}(\widetilde{g}_{ab,t} + \widetilde{g}_{tb,a} - \widetilde{g}_{at,b})\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_a t_b + \widetilde{\nabla}_b t_a &= \widetilde{g}_{ab,t} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Entonces que k^a sea un vector de Killing nos dice que las componentes de la métrica son todas independientes del tiempo: $\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{g}_{ab} = 0$, si es que usamos coordenadas locales (t, r) tales que $(k^a) = (1, 0)$.

Capítulo 4

Geodésicas de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini

En este capítulo estudiaremos las geodésicas radiales y con momento angular tipo tiempo de M , que representan las trayectorias seguidas por partículas en caída libre. Veremos en qué dimensiones podremos encontrar órbitas acotadas estables alrededor de un agujero negro.

Consideremos el funcional

$$S[\gamma(\lambda)] = \int_{p_1}^{p_2} (-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) d\lambda,$$

donde $\dot{x}^\mu = \frac{\partial}{\partial \lambda} x^\mu$, $\gamma(\lambda) = (x^\mu(\lambda)) = (T(\lambda), r(\lambda), \varphi(\lambda), 0, \dots)$ es la curva que conecta los eventos p_2 y p_1 . Al encontrar los puntos críticos de esta funcional podremos encontrar la trayectoria de la partícula en caída libre que pasa por esos dos eventos (p_1 y p_2). Sólo la componente angular $\varphi(\lambda)$, T y r son distintas de cero, las demás coordenadas angulares son cero ya que el movimiento de la partícula se da en un plano pues estamos en simetría esférica. Para la curva estacionaria $\gamma(\lambda)$ donde λ es el tiempo propio y tal que la variación de S es igual a cero tenemos que $L = -g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 1$, donde g es la métrica de Schwarzschild-Tangherlini que hemos encontrado en la sección 3. Al variar S y hacer $\delta S = 0$ encontramos las ecuaciones de Euler-Lagrange que son

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} L - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} L = 0.$$

Utilizando entonces (3.9) obtenemos la forma del lagrangiano

$$1 = L = N\dot{T}^2 - 2(1 - N)\dot{T}\dot{r} - (2 - N)\dot{r}^2 - r^2\dot{\varphi}^2.$$

Notemos que L no depende de T :

$\frac{\partial}{\partial T}L = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T}L = 2N\dot{T} - 2(1 - N)\dot{r} = 2e = \text{constante}$, donde $e = -g(k, u) = N\dot{T} - (1 - N)\dot{r}$ es la energía relativista de una partícula entre su masa, con $k = k^a \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial}{\partial T}$ y $u = \dot{\gamma}(\lambda) = (\dot{T}, \dot{r}, \dot{\varphi})$ la velocidad.

Tampoco depende de φ :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}L = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varphi}L = 2r^2\dot{\varphi} = \text{constante} = 2l,$$

donde $m = \frac{\partial}{\partial \varphi}$ es un vector de Killing y $l = g(m, u)$ la norma del momento angular.

Ahora utilizando las ecuaciones de la energía y del momento angular podemos desaparecer la dependencia de L con \dot{T} y $\dot{\varphi}$:

$$1 = L = \frac{e^2}{N} - \frac{r^2}{N} - \frac{l^2}{r^2},$$

lo que implica

$$e^2 = \dot{r}^2 + \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)N, \quad (4.1)$$

Notemos que esta ecuación se ve como la ecuación para una partícula en una dimensión en un potencial $V(r) = \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)N$, con $N = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1}$.

En este punto podemos ahora calcular una relación muy importante, la relación entre el radio del horizonte de eventos y la masa total del sistema. Para esto debemos comparar el caso relativista en el límite newtoniano con el caso newtoniano.

En el caso Newtoniano también puede utilizarse la formulación lagrangiana, la acción

$$S[x] = \int_{(1)}^{(2)} L(x, \dot{x}) dt,$$

donde $\underline{x} = \underline{x}(t)$ es la trayectoria newtoniana, $L = T - V$ y $T = \frac{1}{2}m\dot{\underline{x}}^2 = \frac{1}{2}mh^{ij}\dot{x}_i\dot{x}_j$ donde h^{ij} es la métrica euclideana, y $V = \frac{-1}{q-1} \frac{GMm}{r^{q-1}}$. En coordenadas polares $T = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2]$ y $\frac{\partial}{\partial \varphi}L = 0$ lo que implica que $\frac{\partial}{\partial \varphi}L = \text{constante} = lm$ entonces $mr^2\dot{\varphi} = ml$. Y entonces

$$\frac{2E}{m} = \left[\dot{r}^2 + \frac{l^2}{r^2}\right] - \frac{2}{q-1} \frac{GM}{r^{q-1}}. \quad (4.2)$$

En el límite newtoniano, para $r \gg r_0$, tenemos que la ecuación (4.1) es

$$e^2 = \dot{r}^2 + 1 + \frac{l^2}{r^2} - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1}. \quad (4.3)$$

Ahora si $e = 1 + \frac{E}{m}$, donde $m + E$ es la energía relativista (e es la energía relativista entre la masa m), tenemos que

$$e^2 = 1 + \frac{2E}{m} + o(E^2),$$

al comparar las ecuaciones (4.3) y (4.2) utilizando esta última ecuación tenemos que

$$r_0^{q-1} = \frac{2GM}{q-1}, \quad (4.4)$$

es la relación entre el radio del horizonte de eventos y la masa total del sistema.

4.1. Geodésicas radiales

Si en (4.1) hacemos $l = 0$ obtendremos la ecuación de la energía para geodésicas radiales. También podemos encontrar el tiempo propio en que una partícula llegaría al horizonte de eventos y a la singularidad, como sigue: Consideremos una partícula inicialmente en reposo ($\dot{r}_1 = 0$), fuera del horizonte de eventos ($r_1 > r_0$).

Partiendo de la ecuación de la energía (4.1) y ya que tenemos conservación de energía, en este caso, para la partícula inicialmente en reposo, $E^2 = N(r_1) = 1 - \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{q-1}$.

Ya que la partícula seguirá la trayectoria de una geodésica radial que viene de $r = r_1$ a $r = 0$ tendremos $\frac{dr}{d\lambda} < 0$:

Despejando de la ecuación de la energía:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= E^2 - N(r) \\ &= N(r_1) - N(r) \\ &= -\left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{q-1} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1} \\ &= \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^{q-1} \left[\left(\frac{r_1}{r}\right)^{q-1} - 1 \right], \end{aligned}$$

despejamos el tiempo propio:

$$d\lambda = -\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{q-1}{2}} \sqrt{\frac{r^{q-1}}{r_1^{q-1} - r^{q-1}}} dr.$$

Ahora queda integrar y resolver:

$$\lambda = -\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{q-1}{2}} \int_{r_1}^{r(\lambda)} \sqrt{\frac{r^{q-1}}{r_1^{q-1} - r^{q-1}}} dr$$

podemos ver en el capítulo del colapso newtoniano que resolvimos esta misma integral, entonces podemos poner ya el resultado

$$\lambda = \frac{2r_1}{q-1} \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{q-1}{2}} J_q\left(\frac{r}{r_1}\right),$$

donde $J_q(x) = \int_0^{\arcsen \sqrt{1-x^{q-1}}} (\cos(\alpha))^{\frac{2}{q-1}} d\alpha$, este es el tiempo propio que mide una partícula inicialmente en reposo, en caída libre. Si hacemos $r = r_0$ en $J_q\left(\frac{r}{r_1}\right)$, encontramos el tiempo propio que le toma a la partícula llegar al horizonte de eventos y si ponemos $r = 0$ tendremos el tiempo propio que le toma a la partícula en llegar a la singularidad; además, algo muy importante, el tiempo que tardaría entonces para llegar al horizonte de eventos y a la singularidad es finito.

Se puede resolver analíticamente esta integral para el caso $q = 2$ y $q = 3$:

Primero $q = 2$:

$$\lambda = 2r_1 \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} J_2\left(\frac{r}{r_1}\right) = r_1 \left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\arccos\left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{r}{r_1} \left[1 - \frac{r}{r_1}\right]} \right].$$

Para $q = 3$:

$$\lambda = \frac{r_1^2}{r_0} J_3\left(\frac{r}{r_1}\right) = \left(\frac{r_1^2}{r_0}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^2}.$$

4.2. Órbitas acotadas

Ahora veremos los tipos de órbitas que podrían seguir las partículas alrededor de un hoyo negro. Estaremos interesados en las órbitas acotadas estables. Ya que para una órbita

con energía E dada, el rango radial está restringido a aquellos radios para los cuales V es más pequeño que E , las órbitas acotadas y estables serán aquellas de partículas con cierta energía y momento angular tal que las trayectorias de estas partículas pueden tener radios mayores que cero y menores que infinito en las gráficas del potencial. Estas trayectorias corresponden a valores de E cercanos a un mínimo en la gráfica del potencial.

Ahora veamos en qué dimensiones sería posible tener el caso de órbitas acotadas y estables.

Veamos qué pasa para $q + 2 = 4$ dimensiones espacio-temporales que corresponde al espacio-tiempo que conocemos:

En este caso $V(r) = \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) = 1 - \frac{r_0}{r} + \frac{l^2}{r^2} - \frac{l^2 r_0}{r^3}$, para r muy grande $V(r) \rightarrow 1$ por abajo, gracias al término $-\frac{r_0}{r}$; para $r = r_0$, $V(r) = 0$. Para $r < r_0$, $V(r) < 0$.

Investiguemos entonces si hay un mínimo en la gráfica de este potencial. Veamos cuándo tiene extremos:

$$V'(r) = \frac{r_0}{r^4} \left(3l^2 - \frac{2l^2 r}{r_0} + r^2\right); \text{ para que haya extremos } V'(r) = 0 \text{ y entonces } r = \frac{l^2}{r_0} \pm \sqrt{\frac{l^4}{r_0^2} - 3l^2}.$$

- Si $\frac{l^4}{r_0^2} < 3l^2$, es decir $l^2 < 3r_0^2$, no habrá extremos en la gráfica del potencial, por lo tanto no hay órbitas acotadas estables.
- Si $l^2 = 3r_0^2$ hay un solo extremo en la gráfica del potencial y $r = \frac{l^2}{r_0} = 3r_0$ es el único extremo, que es un punto silla en la gráfica que nos dice que hay una órbita acotada inestable en $3r_0$.
- Si $l^2 > 3r_0^2$ entonces hay dos extremos $r_a = \frac{l^2}{r_0} + \sqrt{\frac{l^4}{r_0^2} - 3l^2}$ y $r_b = \frac{l^2}{r_0} - \sqrt{\frac{l^4}{r_0^2} - 3l^2}$ donde r_a corresponde a un mínimo y r_b a un máximo. Entonces, para valores de E cercanos a r_a tendremos órbitas acotadas estables y para $E = r_a$ habrá una órbita circular estable. Para $E = r_b$ tendremos una órbita circular pero inestable.

Ahora para $q + 2 = 5$ dimensiones espacio-temporales: El potencial tiene la forma $V(r) = \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right)\left(1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2\right) = 1 + \frac{l^2 - r_0^2}{r^2} - \frac{l^2 r_0^2}{r^4}$. Veamos si también tiene un mínimo. Busquemos primero los extremos:

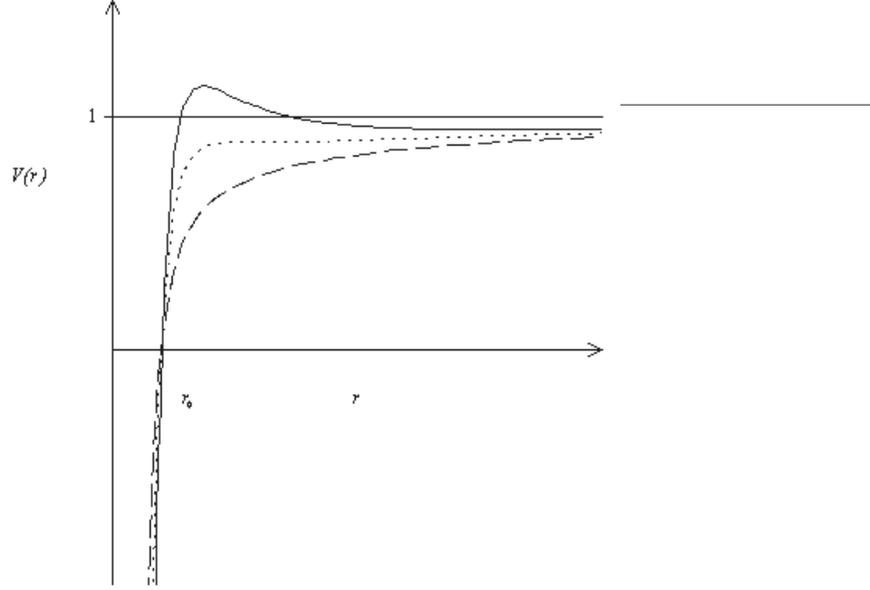


Figura 4.1: Diagrama del potencial para 4 dimensiones espacio-temporales. La línea discontinua representa la gráfica del potencial cuando se toma $l^2 < 3r_0^2$, la línea punteada representa la gráfica cuando $l^2 = 3r_0^2$ y la línea continua corresponde al caso cuando $l^2 > 3r_0^2$.

Tenemos que $V'(r) = -2\frac{l^2-r_0^2}{r^3} + \frac{4l^2r_0^2}{r^5} = \frac{2}{r^5}(2l^2r_0^2 - (l^2 - r_0^2)r^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{2l^2r_0^2}{l^2-r_0^2} \Leftrightarrow l^2 > r_0^2$.

- Notemos que si $l^2 > r_0^2$, y si r es muy grande, $V(r) \rightarrow 1$, por arriba, ya que tenemos el término $\frac{l^2-r_0^2}{r^2}$; si $r = r_0$, $V(r) = 0$ y si $r < 0$, $V(r) < 0$ y el único extremo es $r = \sqrt{\frac{2l^2r_0^2}{l^2-r_0^2}}$ que es un máximo¹ en la gráfica del potencial que corresponde con una trayectoria acotada inestable.
- Si $l^2 < r_0^2$ no habrá extremos y cuando r sea muy grande $V(r) \rightarrow 1$ pero por abajo.

Ahora para $q+2 \geq 6$ dimensiones espacio-temporales. Veamos si tienes extremos y si alguno es un mínimo:

El potencial tiene la forma $V(r) = (1 + \frac{l^2}{r^2})(1 - (\frac{r_0}{r})^{q-1})$.

$$V'(r) = -2\frac{l^2}{r^3}(1 - (\frac{r_0}{r})^{q-1}) + \frac{q-1}{2}(\frac{r^2}{l^2} + 1) = 0 \Leftrightarrow \frac{q+1}{2} + \frac{q-1}{2}\frac{r^2}{l^2} = (\frac{r}{r_0})^{q-1}.$$

Sea $F(r) = \frac{q+1}{2} + \frac{q-1}{2}\frac{r^2}{l^2} - (\frac{r}{r_0})^{q-1}$, entonces $V'(r) = 0 \Leftrightarrow F(r) = 0$. Ahora debemos encontrar la raíces de $F(r)$.

¹esto se puede ver fácilmente de la ecuación de la derivada del potencial.

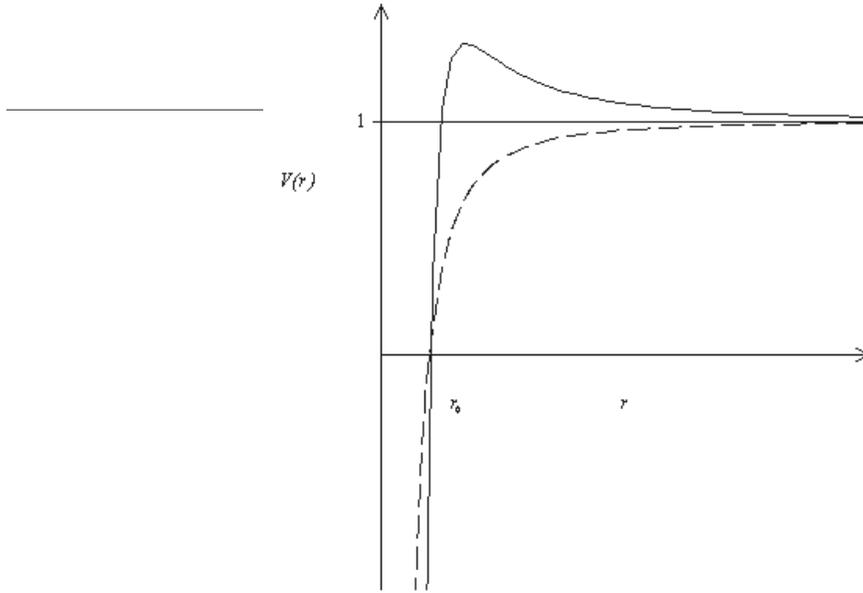


Figura 4.2: Diagrama del potencial para 5 dimensiones espacio-temporales. La línea discontinua representa la gráfica del potencial cuando tomamos $l^2 > r_0^2$ y la línea continua representa la gráfica cuando tomamos $l^2 < r_0^2$.

Sabemos que $F(r)$ tiene al menos una raíz ya que $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r) = -\infty$ y $F(r_0) = \frac{q-1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{l^2}\right) > 0$, entonces existe r_a tal que $F(r_a) = 0$ lo que implica que $V'(r_a) = 0$. Entonces tenemos que r_a es un extremo en la gráfica del potencial. Veamos si es un mínimo que es lo que estamos buscando y si pueden haber más extremos y qué son:

Tenemos que

$$F'(r) = (q-1) \frac{r}{l^2} - \frac{(q-1)}{r} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{q-1},$$

ahora, si r_a es una raíz, sustituyendo $\left(\frac{r_a}{r_0}\right)^{q-1} = \frac{q+1}{2} + \frac{q-1}{2} \frac{r^2}{l^2}$ tenemos

$$\begin{aligned} F'(r_a) &= (q-1) \frac{r_a}{l^2} - \frac{(q-1)}{r_a} \left(\frac{q+1}{2} + \frac{q-1}{2} \frac{r^2}{l^2}\right)^{q-1} \\ &= (q-1) \frac{r_a}{l^2} \left[1 - \frac{q+1}{2} \frac{l^2}{r_a^2} - \frac{q-1}{2}\right] \\ &= (q-1) \frac{r_a}{l^2} \left[-\frac{q-3}{2} - \frac{(q+1)l^2}{2r_a^2}\right] < 0, \end{aligned}$$

y ya que $F'(r_a) < 0 \Leftrightarrow V''(r_a) < 0$, tenemos que r_a es un máximo en la gráfica del potencial.

Ahora suponiendo que hay algún otro extremo r_s , notamos que $F'(r_s)$ es menor que cero lo que quiere decir que todos los extremos serán máximos. Y ya que esto no es

posible, para la existencia de más de un extremo, tenemos que hay un único extremo y es un máximo. Por lo tanto, para $q + 1 \geq 4$ dimensiones espaciales no podremos encontrar trayectorias acotadas estables para ninguna partícula con determinada energía y momento angular.

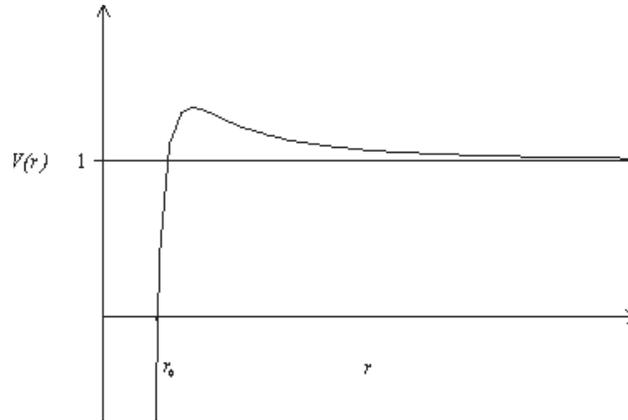


Figura 4.3: Diagrama del potencial para mayor o igual que 5 dimensiones espaciales.

La conclusión a la que llegamos [3] en esta sección es que **no hay órbitas acotadas estables alrededor de un hoyo negro para $q \geq 3$, es decir mayor o igual que 4 dimensiones espaciales.**

4.3. Resumen

En este capítulo, como dijimos al principio, estudiamos las geodésicas tipo tiempo de M que representan las trayectorias seguidas por partículas en caída libre. Hemos utilizado el formalismo lagrangiano para escribir las ecuaciones con las que nos hemos dado cuenta que una partícula inicialmente en reposo llegaría en tiempos propios finitos al horizonte de eventos y a la singularidad y también nos ayudaron a analizar en qué dimensiones podríamos encontrar órbitas acotadas estables y bajo qué condiciones. La conclusión importante en este capítulo es lo que hemos escrito antes de este resumen en negritas y es que sólo en el universo que conocemos con $q + 2 = 4$ dimensiones espacio-temporales podremos entrar en una órbita acotada y estable alrededor de un hoyo negro.

Capítulo 5

El colapso relativista

En este capítulo vamos a analizar el colapso de una nube de polvo inicialmente en reposo con simetría esférica en $q + 1$ dimensiones espaciales en Relatividad General.

Obtenemos la variedad completa $P = \tilde{P} \times S^q$ que describe la gravedad fuera y dentro de la nube de polvo. Aquí también P tendrá una métrica esféricamente simétrica como (3.1), \tilde{P} es una variedad de dimensión 2 y S^q y r son, como en el capítulo 3, la q -esfera y el radio de área, respectivamente.

Utilizaremos las herramientas desarrolladas en el capítulo 3, pero ahora las ecuaciones de Einstein involucrarán materia

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu},$$

donde $T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu$ es el tensor de energía impulso, k una constante de acoplamiento que determinaremos después, ρ la densidad del polvo y u_μ la velocidad de las partículas de polvo normalizada tal que $u^\mu u_\mu = -1$. Después de encontrar explícitamente la métrica radial, la función r , la velocidad y la densidad ρ , que serán la solución para las ecuaciones de Einstein y nos permitirán describir el colapso de la nube de polvo, analizaremos el horizonte de eventos y el horizonte aparente que se tendrían al formarse un hoyo negro esféricamente simétrico, así nos daremos una idea de lo que un observador fuera del horizonte de eventos podría ver del colapso de la nube, ya que una pregunta interesante es si es posible o no ver todo el proceso del colapso hasta que se forma la singularidad.

5.1. Las ecuaciones de movimiento

Ahora que no consideraremos el espacio-tiempo vacío, el tensor de Einstein toma la forma $G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$. Ya que el tensor de Einstein cumple con las identidades de Biachi, es decir $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, entonces debemos tener que

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \nabla^\mu(\rho u_\mu u_\nu) = 0.$$

Desarrollemos esta ecuación:

$$\begin{aligned}\nabla^\mu(\rho u_\mu u_\nu) &= \nabla^\mu(\rho)u_\mu u_\nu + \rho \nabla^\mu(u_\mu)u_\nu + \rho u_\mu \nabla^\mu u_\nu \\ &= 0,\end{aligned}$$

que podemos reescribir así:

$$(\nabla_u \rho)u_\nu + \rho \theta u_\nu + \rho a_\nu = 0, \quad (5.1)$$

donde $\nabla_u \rho$ es la derivada covariante a lo largo de la dirección de la velocidad u , $\theta = \nabla^\mu u_\mu$ es el término de la expansión del polvo y $a_\nu = \nabla^\mu u_\nu = u_\mu \nabla^\mu u_\nu$ la aceleración. Veamos que la aceleración y la velocidad son ortogonales:

$$u^\nu a_\nu = u^\nu u^\mu \nabla_\mu u_\nu = u^\mu u^\nu \nabla_\mu u_\nu = \frac{1}{2} u^\mu \nabla_\mu (u^\nu u_\nu) = \frac{1}{2} u^\mu \nabla_\mu (-1) = 0.$$

Ya sabiendo esto y haciendo la contracción de (5.1) con las componentes de la velocidad u_ν obtenemos las siguientes igualdades, que son las ecuaciones de movimiento para las partículas de la nube, $\nabla_u \rho + \rho \theta = 0$ y $\rho \nabla_u u_\nu = 0$. Ya que ahora tenemos materia $\rho \neq 0$ y la ecuación $\nabla_u u_\nu = 0$ nos dice que las partículas de polvo siguen líneas geodésicas, están en caída libre y la nube de polvo se colapsará.

Hemos hablado de geodésicas y aún no tenemos una métrica a la cual referirnos, entonces debemos construir la métrica que describirá el interior de la nube de polvo.

Construiremos coordenadas adaptadas a las trayectorias de las partículas de polvo para describir la métrica radial de \tilde{P} . Primero conseguiremos una coordenada temporal. Consideremos $\gamma(\tau)$ la trayectoria de una partícula de la nube de polvo en \tilde{P} , donde τ es

el tiempo propio y $\dot{\gamma} = u$ la velocidad. Así tenemos líneas parametrizadas por el tiempo propio. Como coordenada radial utilizaremos una, digamos R , tal que a lo largo de las líneas descritas por γ , R sea constante y entonces tenemos coordenadas locales (τ, R) y con respecto a estas coordenadas $u^\tau = \left(u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)(\gamma(\tau)) = \left(u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)(\tau) = 1$ y $u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial \tau}$, ya que $u^R = \left(u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)(\gamma(R)) = 0$, pues R es constante a lo largo de las trayectorias. Reescribamos la 2-métrica como sigue

$$\tilde{g}_{ab} dx^a dx^b = -a^2 (d\tau + b dR)^2 + c^2 dR^2,$$

con a , b y c que dependen de τ y R . Notemos que

- $-1 = \tilde{g}_{ab} u^a u^b = \tilde{g}_{\tau\tau} u^\tau u^\tau = \tilde{g}_{\tau\tau} = -a^2$, entonces $a^2 = 1$.
- $\gamma(\tau, R)$, con R constante a lo largo de la trayectoria γ , es una geodésica.

De esto último podemos obtener información. Utilicemos el principio variacional para una geodésica radial parametrizada por el tiempo propio

$$s = \int (-\tilde{g}_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b) d\lambda,$$

donde $\dot{x}^a = \frac{d}{d\lambda} x^a$ y el lagrangiano

$$L = -\tilde{g}_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b = (\dot{\tau} + b\dot{R})^2 - c^2 \dot{R}^2 = 1,$$

de donde se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{\tau}} L \Rightarrow 2(\dot{\tau} + b\dot{R}) \frac{\partial}{\partial \tau} b\dot{R} - 2c \frac{\partial}{\partial \tau} c\dot{R}^2 = \frac{d}{d\lambda} [2(\dot{\tau} + b\dot{R})]$$

y

$$\frac{\partial}{\partial R} L = \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial \dot{R}} L \Rightarrow 2(\dot{\tau} + b\dot{R}) \frac{\partial}{\partial R} b\dot{R} - 2c \frac{\partial}{\partial R} c\dot{R}^2 = \frac{d}{d\lambda} [2(\dot{\tau} + b\dot{R})b - 2c^2 \dot{R}].$$

Ahora, si vemos las curvas de R constante parametrizadas por el tiempo propio, $\lambda = \tau$, obtenemos de la primera ecuación $0 = 0$, de la segunda

$$0 = 2 \frac{d}{d\lambda} b = 2 \left[\frac{\partial}{\partial \tau} b \dot{\tau} + \frac{\partial}{\partial R} b \dot{R} \right] = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} b,$$

lo que nos dice que b es únicamente una función de R .

Y así, la métrica queda de la siguiente forma

$$\tilde{g}_{ab}dx^a dx^b = -(d\tau + b(R)dR)^2 + c(\tau, R)^2 dR^2.$$

Podemos también hacer la siguiente traslación: $\tau \rightarrow \tau + f(R)$ tal que $f'(R) = -b(R)$. Finalmente escribimos la métrica como sigue

$$\tilde{g}_{ab}dx^a dx^b = -d\tau^2 + c(\tau, R)^2 dR^2.$$

Esta es la forma de la métrica radial con la presencia de polvo. Las coordenadas (τ, R) que usamos son adaptadas a las trayectorias de las partículas de polvo; en particular $u = \frac{\partial}{\partial \tau}$.

Ya que conocemos la forma que tiene la métrica y la velocidad tenemos aún tres funciones desconocidas: $c(\tau, R)$, $\rho(\tau, R)$ y $r(\tau, R)$. También contamos con las ecuaciones

$$\nabla_u \rho + \rho \theta = 0, \quad (5.2)$$

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu, \quad (5.3)$$

$$G_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Lo que podemos obtener de (5.2) es:

$$\begin{aligned} \nabla_u \rho + \rho \theta &= \dot{\rho} + \theta \rho = 0, \text{ con } \theta = \nabla_\mu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\det(g)}} \partial_\mu (\sqrt{-\det(g)} u^\mu) = \frac{1}{cr^q} \partial_\tau (cr^q) \\ \Rightarrow \dot{\rho} + \theta \rho &= 0 \Leftrightarrow (cr^q \rho)' = 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$cr^q \rho = J(R), \quad (5.5)$$

donde $J(R)$ es una función de R nada más. De (5.3) solamente una componente sobrevivirá, dado que $u^R = 0$, $T_{\tau\tau} = \rho$, y para las otras componentes es cero.

De (5.4), (5.3) y de las ecuaciones que obtuvimos en la sección 3.3 tenemos las ecuaciones

$$G_{ab} = -\frac{q}{r} (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} - \frac{q}{2r^2} [(q-1)(1-N) - r\tilde{\Delta}r] \tilde{g}_{ab} = k\rho u_a u_b \quad (5.6)$$

$$G_{aK} = 0 \quad (5.7)$$

$$G_{KL} = \hat{g}_{KL} [(1 - \frac{q}{2})(q-1)(1-N) + (q-1)r\tilde{\Delta}r - r^2\tilde{k}] = 0, \quad (5.8)$$

donde $N = \tilde{g}^{ab} \tilde{\nabla}_a r \tilde{\nabla}_b r$. Como vimos al principio de la sección 3.5 de las identidades de Bianchi para el caso de vacío, podemos hacer el mismo cálculo ahora trabajando en lugar de G_{KL} con T_{KL} y ya que (5.8) se da pues la componente angular-angular de T , T_{KL} es igual a cero, tenemos que de nuevo no es necesario resolver todas las ecuaciones no triviales de arriba, basta con resolver las que obtenemos de (5.6), que son:

- Considerando la parte con traza de (5.6)

$$\frac{q}{r^2} [(q-1)(1-N) - r\tilde{\Delta}r] = k\rho, \quad (5.9)$$

- Y la parte sin traza

$$(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} = -\frac{r}{q} k\rho (u_a u_b)^{tf} = -\frac{r}{q} k\rho \left(u_a u_b + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \right). \quad (5.10)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein que describen cómo es la geometría dentro de la nube de polvo.

Hagamos la siguiente definición de $m(\tau, R)$ a través de¹

$$N = 1 - \frac{2m(\tau, R)}{(q-1)r(\tau, R)^{q-1}}. \quad (5.11)$$

Ahora si primero despejamos $m(\tau, R)$ de la definición de N y calculamos el gradiente

$$\tilde{\nabla}_a m(\tau, R) = \frac{1}{2}(q-1)r^{q-1} \left[-2r^b (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{\Delta}r \right] + (q-1)(1-N) \frac{\tilde{\nabla}_a r}{r},$$

luego debemos utilizar la ecuación (5.10), luego también la ecuación (5.9), para desaparecer $(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf}$ y $\tilde{\Delta}r$, respectivamente y obtenemos

$$\tilde{\nabla}_a m = \frac{q-1}{q} r^q k\rho [r_a + u_b u_a r^b],$$

donde m , ρ y r son funciones de τ y de R .

De esta ecuación tenemos

¹Esta definición está motivada en la métrica de Schwarzschild–Tangherlini. En esta métrica $m(\tau, R) = GM$ es constante.

- $\frac{\partial}{\partial \tau} m = \frac{q-1}{q} r^q k \rho [\dot{r} + \dot{r}(-1)] = 0.$
- $\frac{\partial}{\partial R} m = \frac{q-1}{q} r^q k \rho r'.$

La primera igualdad nos dice que $m = m(R)$ es independiente de τ , y de ésta, la segunda nos dice que

$$r^q \rho r' = f(R) \quad (5.12)$$

es independiente de τ . Y ahora podemos hacer $r(0, R) = R$ es decir, que las partículas con trayectoria $\gamma(\tau, R)$ posean inicialmente el radio de área R y $\rho(0, R) = \rho_0(R)$ es la densidad de masa al tiempo cero. Y ya que la masa no depende del tiempo

$$\frac{\partial}{\partial R} m = \frac{q-1}{q} k R^q \rho_0(R),$$

lo que nos da el siguiente resultado

$$m(R) = \frac{q-1}{q} \int_0^R k \bar{R}^q \rho_0(\bar{R}) d\bar{R}, \quad (5.13)$$

donde supondremos $m(0) = 0$ al tiempo $\tau = 0$ para que (5.11) sea regular en $R = 0$.

Ahora podemos determinar el valor de k considerando el límite newtoniano en el tiempo $\tau = 0$. Para esto debemos tener pequeñas velocidades y una fuerza de gravedad débil. Cumplimos ya con la primera condición pues la nube al tiempo $\tau = 0$ está en reposo. Una fuerza de gravedad débil implica una curvatura del espacio-tiempo pequeña es decir, la métrica que lo describe será una métrica plana con un pequeña perturbación, entonces debemos hacer que la métrica (5.18) casi sea como la métrica de Minkowski, es decir que $N(R)$ para todo $R > 0$ tienda a 1, es decir que $\frac{2m(R)}{(q-1)R^{q-1}}$ sea mucho menor que 1. Ahora que podemos considerar el límite newtoniano de la integral (5.13) obtenemos la masa total

$$m_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} m(R) = \frac{q-1}{q} \int_0^\infty k \rho_0(\bar{R}) \bar{R}^q d\bar{R}.$$

Podemos comparar esta integral con la que hemos obtenido en el capítulo 2 la ecuacion (2.2), es decir

$$GM_\infty = \int_0^\infty |S^q| G \rho(r) r^q dr,$$

donde $m_\infty = GM_\infty$ con lo que obtenemos el valor para k

$$k = \frac{q}{q-1} G |\mathbf{S}^q|.$$

Y al sustituir ya el valor de k obtenemos de (5.12)

$$\rho(\tau, R) = \frac{\rho_0 R^q}{r(\tau, R)^q r'(\tau, R)}. \quad (5.14)$$

la densidad de masa a cualquier tiempo τ .

Si hacemos el cociente de (5.12) entre (5.5) obtenemos que $\frac{r'}{c} = F(R)$ es independiente del tiempo. Entonces tenemos

$$N = \tilde{g}^{ab} r_a r_b = -\dot{r}^2 + \frac{r'^2}{c^2} = -\dot{r}^2 + F(R)^2,$$

De esta última ecuación podremos encontrar $r(\tau, R)$, tenemos

$$\dot{r}(\tau, R)^2 = F(R)^2 - 1 + \frac{2m(R)}{(q-1)r(\tau, R)^{q-1}}.$$

Ya que $F(R)$ no depende de τ podemos evaluar esta expresión en $\tau = 0$

$$F(R)^2 = \dot{r}(0, R)^2 + 1 - \frac{2m(R)}{(q-1)r(0, R)^{q-1}} = 1 - \frac{2m(R)}{(q-1)R^{q-1}},$$

donde hemos usado que $\dot{r}(0, R) = 0$ y así

$$\dot{r}(\tau, R)^2 = \frac{2m(R)}{q-1} \left(\frac{1}{r(\tau, R)^{q-1}} - \frac{1}{R^{q-1}} \right). \quad (5.15)$$

De aquí obtenemos

$$\tau(R) = \sqrt{\frac{2R^{q+1}}{(q-1)m(R)}} J_q \left(\frac{r}{R} \right), \quad (5.16)$$

donde $J_q(x) = \int_0^{\arcsen \sqrt{1-x^{q-1}}} (\cos^2 \alpha)^{1-\frac{q-2}{q-1}} d\alpha$ es la misma integral que hemos encontrado en el capítulo 2 y utilizado ya en el 4. Recordemos que $J_q : [0, 1] \rightarrow [0, J_q(1)]$ es una función estrictamente decreciente.

De (5.16) se puede obtener

$$r(\tau, R) = R J_q^{-1} \left(\sqrt{\frac{(q-1)m(R)}{2R^{q+1}}} \tau \right) \quad (5.17)$$

y entonces también $c(\tau, R)$. Resumiendo, podemos escribir la 2-métrica como sigue

$$\tilde{g} = -d\tau^2 + \frac{[r'(\tau, R)dR]^2}{N(R)},$$

donde $N(R) = 1 - \frac{2m(R)}{(q-1)R^{q-1}}$, $m(R) = G|S^q| \int_0^R \bar{R}^q \rho_0(\bar{R}) d\bar{R}$ y $r(\tau, R) = RJ_q^{-1} \left(\sqrt{\frac{(q-1)m(R)}{2R^{q+1}}} \tau \right)$. La densidad es $\rho(\tau, R) = \rho_0(R) \frac{R^q}{r(\tau, R)^q r'(\tau, R)}$ y la velocidad de las partículas de polvo es $u = \frac{\partial}{\partial \tau}$.

Y la métrica completa es

$$g = -d\tau^2 + \frac{[r'(\tau, R)dR]^2}{N(R)} + r(\tau, R)^2 \hat{g}_{KL} dx^K dx^L, \quad (5.18)$$

donde \hat{g} es la métrica sobre S^q que hemos obtenido en la sección 3.

Las ecuaciones que hemos obtenido son formalmente las mismas que en el caso newtoniano si identificamos el tiempo en Newton t con τ y $Gm(R)$ con $M(R)$. Sin embargo, el análisis del caso relativista no termina aquí, aún nos falta analizar la geometría del espacio-tiempo dentro de la nube de polvo que será descrita por la métrica (5.18). Esta métrica nos permitirá analizar los fenómenos que sucederían dentro de la nube de polvo como el horizonte de eventos y el aparente, y con esto podremos saber bajo ciertas condiciones, por ejemplo, si en algún momento, estando fuera de horizonte de eventos, podremos ver la singularidad que se forma, o si no entonces qué parte de la nube podremos ver y en qué momento.

5.2. El colapso de una nube homogénea

Veremos cómo ocurriría el colapso de una nube de polvo, con densidad homogénea $\rho_0(R)$ inicialmente en reposo, donde la métrica es la (5.18). La densidad inicial se comportará de la siguiente manera

$$\rho_0(R) = \begin{cases} \rho_1, & R \leq R_1, \\ 0, & R > R_1, \end{cases}$$

donde ρ_1 es la densidad uniforme inicial de la nube de polvo y R_1 es el radio inicial de la nube de polvo. Así tenemos entonces

$$m(R) = \begin{cases} G|\mathbf{S}^q|\rho_1 \frac{R^{q+1}}{q+1} = m_1 \left(\frac{R}{R_1}\right)^{q+1}, & R \leq R_1, \\ G|\mathbf{S}^q|\rho_1 \frac{R_1^{q+1}}{q+1} = m_1, & R > R_1, \end{cases} \quad (5.19)$$

y en consecuencia

$$N(R) = \begin{cases} 1 - \frac{2m_1}{(q-1)R_1^{q-1}} \left(\frac{R}{R_1}\right)^{q+1}, & R \leq R_1 \\ 1 - \frac{2m_1}{(q-1)R_1^{q-1}}, & R > R_1 \end{cases}$$

Para tener $N(R) > 0$ para todo $R > 0$, para el tiempo inicial $\tau = 0$, y la métrica no tenga una singularidad al tiempo inicial, $(q-1)R_1^{q-1}$ debe ser mayor que $2m_1$, es decir, R_1 debe ser mayor que el radio de Schwarzschild de la nube de polvo al tiempo inicial $r_0 = \left(\frac{2m_1}{q-1}\right)^{\frac{1}{q-1}}$.

Para lo que sigue conviene introducir la cantidad adimensional $\nu = \frac{r_0}{R_1} < 1$.

Veremos que la nube de polvo se colapsará hasta formar una singularidad de densidad, ya que la nube tendrá un radio que tenderá a cero con una masa constante en el tiempo y que también será una singularidad de la métrica, entonces analizaremos el horizonte de eventos dentro de la nube de polvo y también analizaremos el horizonte aparente.

Consideremos la función $r(\tau, R)$ como en (5.17). Para $R > R_1$ de (5.19) $m(R) = m_1$ y de la relación que hemos encontrado entre la masa total del sistema y el horizonte de eventos en (4.4) obtenemos que $m(R) = m_1 = \frac{(q-1)r_0^{q-1}}{2}$ y entonces la función r queda así

$$r(\tau, R) = RJ_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \left(\frac{R_1}{R} \right)^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau}{R} \right), \quad (5.20)$$

y para $0 < R \leq R_1$

$$r(\tau, R) = RJ_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau}{R_1} \right). \quad (5.21)$$

5.2.1. Singularidades

De (5.21) obtenemos el tiempo propio al que tienden todas las partículas dentro de la nube de polvo cuando tienden a tener un radio de área igual a cero y es

$$\tau_{sd} = \frac{2}{q-1} \frac{R_1}{\nu^{\frac{q-1}{2}}} J_q(0).$$

En esta ecuación el tiempo propio τ tiene un nombre sugestivo, τ_{sd} (s de singularidad, d de dentro de la nube de polvo) es el tiempo propio en que una partícula dentro de la nube de polvo llegará a la singularidad que se forma con el colapso de la nube, es una singularidad de densidad. Veamos por qué: cuando $\tau \rightarrow \tau_{sd}$, $r(\tau, R) \rightarrow 0$ para $0 < R \leq R_1$ y si vemos atrás la ecuación (5.14) nos damos cuenta de que si $r(\tau, R) \rightarrow 0$, e igual que en el capítulo 2.1 del caso newtoniano no hay shell crossing, ya que $r(\tau, R) = J_q^{-1}\left(\frac{q-1}{2}\nu^{\frac{q-1}{2}}\frac{\tau}{R_1}\right) > 0$, entonces $\rho(\tau, R) \rightarrow \infty$ es decir, cuando el tiempo propio de las partículas dentro de la nube de polvo tiende a τ_{sd} , y el radio de área a cero, estas partículas llegan a formar una singularidad de la densidad.

Esta singularidad de densidad corresponde a una singularidad real del espacio-tiempo, para darnos cuenta de esto haremos como hicimos en el capítulo 3.5, calcularemos el escalar de Kretschmann que describe la curvatura del espacio-tiempo, así veremos qué ocurre cuando el tiempo propio de las partículas tiende a τ_{sd} y su radio de área tiende a cero: se formará una singularidad del espacio-tiempo.

La expresión para el escalar de Kretschmann es como en (3.7), ya que esta es una expresión en general en la que todavía no se han introducido las ecuaciones de Einstein,

$$I = 4\tilde{k}^2 + \frac{4}{r^2}q(\tilde{\nabla}^a\tilde{\nabla}^c r)(\tilde{\nabla}_a\tilde{\nabla}_c r) + 2q(q-1)\left(\frac{1-N}{r^2}\right)^2,$$

para calcular $4\tilde{k}^2$ utilizamos la ecuación (5.8) y la (5.9) y obtenemos

$$4\tilde{k}^2 = 4(q-1)^2(1-N)^2\left(\frac{q}{2r^2} - \frac{k\rho}{q(1-N)}\right)^2,$$

y usando la definición de N tenemos que

$$4\tilde{k}^2 = \frac{4m(R)^2}{r^{2(q-1)}}\left(\frac{q}{r^2} - \frac{(q-1)k\rho r^{q-1}}{m(R)q}\right)^2;$$

y para las expresiones $(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)$ y $(\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b r)$ primero usamos que $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r = (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)^{tf} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \tilde{\Delta} r$ y enseguida utilizamos la ecuación (5.10), y entonces

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b r)(\tilde{\nabla}^a \tilde{\nabla}^b r) &= k^2 \rho^2 \left(u_a u_b + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \right) \left(u^a u^b + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} \right) \\ &\quad - \frac{k\rho}{2} \tilde{g}_{ab} \left(u^a u^b + \frac{1}{2} \tilde{g}^{ab} \right) \left(\frac{2m(R)}{r^q} - \frac{k\rho r}{q} \right) \\ &\quad - \frac{k\rho}{2} \tilde{g}^{ab} \left(u_a u_b + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ab} \right) \left(\frac{2m(R)}{r^q} - \frac{k\rho r}{q} \right) + \frac{1}{4} \tilde{g}_{ab} \tilde{g}^{ab} \left(\frac{2m(R)}{r^q} - \frac{k\rho r}{q} \right)^2 \\ &= \frac{k^2 \rho^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2m(R)}{r^q} - \frac{k\rho r}{q} \right)^2, \end{aligned}$$

y el escalar de Kretschmann queda

$$I = 4 \left(\frac{m(R)q}{r^{q+1}} - \frac{(q-1)k\rho}{q} \right)^2 + \frac{2q}{r^2} \left[k^2 \rho^2 + \left(\frac{2m(R)}{r^q} - \frac{k\rho r}{q} \right)^2 \right] + \frac{8m(R)^2}{(q-1)r^{2(q+1)}}.$$

Para ver que tenemos una singularidad de la geometría de espacio-tiempo debemos ver que $I \rightarrow \infty$ cuando $r \rightarrow 0$, siendo R constante mayor que cero y $\tau \rightarrow \tau_{sd}$ y esto es fácil de observar ya que todos los términos de la expresión para I son mayores o iguales que cero y el término $\frac{8m(R)^2}{(q-1)r^{2(q+1)}}$ diverge muy rápidamente cuando $r(\tau, R)$ tiende a cero, así I diverge y la geometría del espacio-tiempo tiene una singularidad en $r(\tau, R) = 0$.

5.2.2. Horizonte de eventos

Ahora veremos cómo es el horizonte de eventos dentro de la nube de polvo. Debemos encontrar las geodésicas nulas de la métrica (5.18)

$$d\tau = \frac{r'(\tau, R) dR}{\sqrt{1 - \frac{2m(R)}{(q-1)R^{q-1}}}} = \frac{J_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau}{R_1} \right) dR}{\sqrt{1 - \nu^{q-1} \left(\frac{R}{R_1} \right)^2}},$$

esta expresión describe las trayectorias nulas salientes y radiales, los rayos de luz salientes originados por una fuente dentro de la nube de polvo, y ya que el horizonte de eventos es la frontera entre los eventos que pueden emitir rayos de luz que lleguen a infinito y los que no, entonces este se puede describir encontrando explícitamente la expresión que describa la trayectoria de los rayos de luz salientes y que coincida en la frontera de la nube de polvo

con la expresión que hemos encontrado para el horizonte de eventos fuera de la nube de polvo. Reescribamos la ecuación anterior como sigue

$$\frac{d\tau(R)}{J_q^{-1}\left(\frac{q-1}{2}\nu^{\frac{q-1}{2}}\frac{\tau(R)}{R_1}\right)} = \frac{dR}{\sqrt{1 - \nu^{q-1}\left(\frac{R}{R_1}\right)^2}}.$$

Si integramos esta igualdad

$$\int_{\tau(R_0)}^{\tau(R)} \frac{d\tau(\bar{R})}{J_q^{-1}\left(\frac{q-1}{2}\nu^{\frac{q-1}{2}}\frac{\tau(\bar{R})}{R_1}\right)} = \int_{R_0}^R \frac{d\bar{R}}{\sqrt{1 - \nu^{q-1}\left(\frac{\bar{R}}{R_1}\right)^2}}.$$

La parte derecha es fácil de encontrar y es

$$-\frac{R_1}{\nu^{\frac{q-1}{2}}} \left(\arcsen \sqrt{1 - \nu^{q-1}\frac{R^2}{R_1^2}} - \arcsen \sqrt{1 - \nu^{q-1}\frac{R_0^2}{R_1^2}} \right),$$

mientras que para la parte izquierda hacemos el cambio de variable: $x = J_q^{-1}\left(\frac{q-1}{2}\nu^{\frac{q-1}{2}}\frac{\tau(\bar{R})}{R_1}\right)$ y nos queda:

$$\frac{2R_1}{(q-1)\nu^{\frac{q-1}{2}}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{J'_q(x)}{x} dx = \int_{R_0}^R \frac{d\bar{R}}{\sqrt{1 - \nu^{q-1}\left(\frac{\bar{R}}{R_1}\right)^2}},$$

no es difícil encontrar $\frac{J'_q(x)}{x}$ si hacemos el cambio $u = \arcsen \sqrt{1 - x^{q-1}}$, entonces $J'_q(x) = \frac{d}{dx} J_q(x) = \frac{d}{du} J_q(x) \cdot \frac{d}{dx} u = -\frac{(q-1)x^{q-1}}{2\sqrt{x^{q-1}(1-x^{q-1})}}$, y obtenemos

$$-\frac{R_1}{\nu^{\frac{q-1}{2}}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{x^{\frac{q-3}{2}}}{\sqrt{1 - x^{q-1}}} dx = \int_{R_0}^R \frac{d\bar{R}}{\sqrt{1 - \nu^{q-1}\left(\frac{\bar{R}}{R_1}\right)^2}}.$$

Haciendo $y = x^{\frac{q-1}{2}}$, $x^{\frac{q-3}{2}} dx = \frac{2}{q-1} dy$:

$$-\frac{2R_1}{(q-1)\nu^{\frac{q-1}{2}}} \int_{y_0}^{y_1} \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int_{R_0}^R \frac{d\bar{R}}{\sqrt{1 - \nu^{q-1}\left(\frac{\bar{R}}{R_1}\right)^2}},$$

y obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} \frac{2}{q-1} \left[\arcsen \left[\left(J_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau(R)}{R_1} \right) \right)^{\frac{q-1}{2}} \right] - \arcsen \left[\left(J_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau(R_0)}{R_1} \right) \right)^{\frac{q-1}{2}} \right] \right] \\ = \arcsen \sqrt{1 - \nu^{q-1} \frac{R^2}{R_1^2}} - \arcsen \sqrt{1 - \nu^{q-1} \frac{R_0^2}{R_1^2}}. \end{aligned}$$

Ya que no podemos asegurar si la gráfica del horizonte de eventos comienza, digamos por ejemplo al tiempo $\tau_0 = 0$ en $R_0 = 0$, estos valores quedarán por determinarse. Lo que sí podemos utilizar es que el horizonte de eventos dentro de la nube debe coincidir con el horizonte de eventos fuera de ella y entonces debemos poner en la ecuación $R = R_1$ y por lo tanto $\tau(R_1) = \frac{2R_1}{(q-1)\nu^{\frac{q-1}{2}}} J_q\left(\frac{r_0}{R_1}\right)$

$$\begin{aligned} \frac{2}{q-1} \left[\arcsen \sqrt{\nu^{q-1}} - \arcsen \left[\left(J_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau(R_0)}{R_1} \right) \right)^{\frac{q-1}{2}} \right] \right] \\ = \arcsen \sqrt{1 - \nu^{q-1}} - \arcsen \sqrt{1 - \nu^{q-1} \frac{R_0^2}{R_1^2}}. \end{aligned}$$

De esta ecuación podremos encontrar el tiempo propio en función de R , así los eventos del espacio-tiempo que cumplan con esta ecuación forman el horizonte de eventos dentro de la nube de polvo. Para $q = 2$ y $q = 3$ es fácil resolverla:

Para el caso $q = 2$

$$\tau(R_0) = \frac{2R_1}{\sqrt{\nu}} J_2(y_0^2),$$

donde $J_2(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x(1-x)} + \arcsen(\sqrt{1-x}))$ y $y_0^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{R_0^2}{R_1^2}} \nu (2\nu - \frac{1}{2}) \sqrt{1-\nu} - \frac{R_0}{R_1} (\frac{3}{2} - 2\nu) \nu$. Esta ecuación nos dice el tiempo propio que les toma a las partículas en determinada posición inicial, R , llegar al horizonte de eventos.

En las figuras 5.1 y 5.2 se puede apreciar la gráfica de la función del horizonte de eventos para $q + 2 = 4$ dimensiones espacio-temporales.

Para el caso $q = 3$

$$\tau(R_0) = 2R_0\nu\sqrt{1-\nu^2} + \frac{2\nu^2-1}{a}\sqrt{1-a^2R_0^2},$$

donde $a = \frac{\nu}{R_1}$.

5.2.3. Horizonte aparente

Consideremos un evento en el espacio-tiempo, ya sea fuera o dentro de la nube de polvo y que de este evento es emitido un pulso de luz. La luz emitida formará una esfera a cada

tiempo propio fijo. Consideremos la trayectoria nula saliente que seguirá el pulso de luz, a cada tiempo propio τ fijo tendremos un punto con radio de área $r(\tau, R(\tau))$. Podríamos pensar que el radio de área es más grande para tiempos propios más grandes, pero cerca de la nube de polvo hay eventos en el espacio-tiempo en el que esto cambia y el radio de área deja de crecer debido a la enorme fuerza gravitacional de la materia colapsada. Al conjunto de puntos en los que ocurre este cambio, es decir, aquellos que tienen la propiedad de que $\frac{dr}{d\tau} = 0$, se le conoce como horizonte aparente.

Consideremos entonces la función $r(\tau, R(\tau))$ y veamos qué eventos cumplen con la propiedad que $\frac{dr}{d\tau} = 0$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}r(\tau, R(\tau)) &= \dot{r} + r' \frac{dR}{d\tau} \\ &= -\sqrt{\frac{2m(R)}{(q-1)r^{q-1}} - \frac{2m(R)}{(q-1)R^{q-1}}} + \sqrt{1 - \frac{2m(R)}{(q-1)R^{q-1}}} \end{aligned}$$

aquí hemos obtenido utilizando (5.15) y de la métrica (5.18). La ecuación $\frac{dr}{d\tau} = 0$ cumplirá con la propiedad si y sólo si $\frac{2m(R)}{(q-1)r^{q-1}} = 1$, notemos que si $R > R_1$, $r^{q-1} = r_0^{q-1}$, donde r_0 es el radio de área del horizonte de eventos, entonces, fuera de la nube de polvo el horizonte aparente coincide con el horizonte de eventos. Ahora para analizar el caso $0 < R \leq R_1$ utilizamos la ecuación (5.21)

$$r(\tau, R)^{q-1} = R^{q-1} \left[J_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau}{R_1} \right) \right]^{q-1}.$$

por otro lado, ya que estamos dentro de la nube de polvo

$$r^{q-1} = \frac{2m(R)}{q-1} = r_0^{q-1} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{q+1},$$

entonces

$$R^{q-1} \left[J_q^{-1} \left(\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau}{R_1} \right) \right]^{q-1} = \left(\frac{r_0}{R_1} \right)^{q-1} \frac{R^{q+1}}{R_1^2},$$

con lo que tenemos que

$$\frac{q-1}{2} \nu^{\frac{q-1}{2}} \frac{\tau}{R_1} = J_q \left(\nu \left(\frac{R}{R_1} \right)^{\frac{2}{q-1}} \right),$$

y entonces

$$\tau = \frac{2}{q-1} \frac{R_1}{\nu^{\frac{q-1}{2}}} J_q \left(\nu \left(\frac{R}{R_1} \right)^{\frac{2}{q-1}} \right).$$

En $R = R_1$, esta ecuación coincide con el valor que encontramos para el horizonte de eventos y, por lo tanto, con la del horizonte aparente. Y para $R \rightarrow 0$ entonces $\tau \rightarrow \tau_{sd}$.

Notemos también que hay eventos que verán que los rayos de luz salientes emitidos por ellos a cada tiempo determinan esferas con radio de área cada vez más grandes aunque ellos mismos se encuentren ya dentro del agujero negro, es decir, dentro del horizonte de eventos. Las figuras (5.1) y (5.2) en la página 60 ilustran los cálculos que hemos hecho.

5.2.4. La métrica exterior

Ahora veremos que la métrica de (5.18) describe todo el espacio-tiempo, es decir el espacio-tiempo dentro y fuera de la nube, como hemos dicho al principio de este capítulo. Verificaremos entonces que para el exterior de la nube de polvo la métrica (5.18) es equivalente a la métrica de Schwarzschild-Tangherlini (es decir que existe una transformación de coordenadas de una a la otra) cuando $R > R_1$, ya sabemos esto por el teorema de Birkhoff. Sólo debemos analizar la métrica radial, ya que la métrica en S^q es la misma.

$$\tilde{g} = -N(r)dt^2 + \frac{dr^2}{N(r)}, \quad (5.22)$$

es la parte radial de la métrica de Schwarzschild-Tangherlini donde $N(r) = 1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^{q-1} = 1 - \frac{2m_1}{(q-1)r^{q-1}}$ y r_0 es el radio del horizonte de eventos; $t = t(\tau, R)$ y $r = r(\tau, R)$.

Veamos que sí son equivalentes:

Si tenemos que t y r dependen de τ y R podemos reescribir la métrica (5.22) como sigue

$$\tilde{g} = -\left[N(r)t^2 - \frac{\dot{r}^2}{N(r)}\right]d\tau^2 - 2\left[N(r)t\dot{t}' - \frac{\dot{r}r'}{N(r)}\right]d\tau dR - \left[N(r)t'^2 - \frac{r'^2}{N(r)}\right]dR^2. \quad (5.23)$$

Definamos la siguiente transformación entre las coordenadas de Schwarzschild-Tangherlini (t, r) y las coordenadas (τ, R) cuando $R > R_1$ (debemos recordar aquí cómo están constituidas las coordenadas (t, r) y (τ, R)). Las coordenadas (t, r) son adaptadas a trayectorias

a r constante que hemos parametrizado por t . Las coordenadas (τ, R) son adaptadas a las trayectorias de las partículas de polvo que están parametrizadas por el tiempo propio τ y a lo largo de estas trayectorias R es constante)

$$\dot{t} = \frac{\sqrt{N(R)}}{N(r)},$$

$$\dot{r} = -\sqrt{N(R) - N(r)},$$

que obtenemos considerando lo siguiente $L = -g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b = N(r)\dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{N(r)} = 1$ entonces $\frac{\partial}{\partial t}L = 2N(r)\dot{t} = 2E \Rightarrow \dot{t} = \frac{E}{N(r)}$ entonces $L = \frac{1}{N(r)}(E^2 - \dot{r}^2) = 1 \Rightarrow E = \sqrt{N(r) + \dot{r}^2}$ y considerando que la energía se conserva a lo largo del tiempo, consideramos $\tau = 0$ y ya que así $\dot{r}(0, R) = \dot{R} = 0$, tenemos entonces $E = \sqrt{N(R)}$ y conseguimos las transformaciones $\dot{t} = \frac{\sqrt{N(R)}}{N(r)}$ y $\dot{r}^2 = N(R) - N(r)$, y escogeremos el signo menos ya que las partículas van hacia caen hacia el centro de la nube.

El coeficiente de $d\tau^2$ es, sustituyendo los valores de \dot{t} y \dot{r} :

$$-N(r)\frac{N(R)}{N(r)^2} + \frac{N(R) - N(r)}{N(r)} = -1.$$

Si el coeficiente de $d\tau dR$ es igual a cero, el coeficiente de dR es $\frac{r'\dot{r}}{N(R)}$, ya que si

$$\begin{aligned} t' &= \frac{r'\dot{r}}{N(r)\sqrt{N(R)}} = \frac{r'\dot{r}}{N(r)^2} \frac{N(r)}{\sqrt{N(R)}} = \frac{r'\dot{r}}{N(r)^2\dot{t}} \\ \Rightarrow t'^2 &= \frac{r'^2}{N(r)} \left(\frac{1}{N(r)} - \frac{1}{N(R)} \right) = \frac{r'^2}{N(r)} \left(\frac{N(R) - N(r)}{N(r)N(R)} \right) = \frac{r'^2\dot{r}^2}{N(r)^2N(R)}, \end{aligned}$$

entonces debemos ver que se da la igualdad $t' = \frac{r'\dot{r}}{N(r)^2\dot{t}}$ para que el coeficiente de $d\tau dR$ sea 0. Tenemos que la derivada temporal de ambos lados de la igualdad es la misma, por un lado

$$\begin{aligned} (t')\dot{} &= \dot{t}' \\ &= \left[\frac{\sqrt{N(R)}}{N(r)} \right]' \\ &= \frac{1}{2} \frac{N'(r)}{\sqrt{N(R)}N(r)} - \frac{\sqrt{N(R)}}{N(r)^2} N'(r)r', \end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}
\left[\frac{r' \dot{r}}{\sqrt{N(R)N(r)}} \right]' &= \left[- \frac{\sqrt{N(R) - N(r)} r'}{\sqrt{N(R)N(r)}} \right]' \\
&= \frac{1}{2} \frac{N'(r) \dot{r}}{\sqrt{N(R) - N(r)}} \frac{r'}{\sqrt{N(R)N(r)}} + \frac{\sqrt{N(R) - N(r)}}{\sqrt{N(R)N(r)^2}} N'(r) \dot{r} r' \\
&\quad + \frac{\sqrt{N(R) - N(r)}}{\sqrt{N(R)N(r)}} [\sqrt{N(R) - N(r)}]' \\
&= -\frac{1}{2} N'(r) \frac{r'}{\sqrt{N(R)N(r)}} - \frac{N(R) - N(r)}{\sqrt{N(R)N(r)^2}} N'(r) r' + \frac{1}{2} \frac{N'(R) - N'(r) r'}{\sqrt{N(R)N(r)}} \\
&= \frac{1}{2} \frac{N'(r)}{\sqrt{N(R)N(r)}} + \frac{1}{2} N'(r) \frac{r'}{\sqrt{N(R)N(r)}} \left[-\frac{1}{2} - \frac{N(R)}{N(r)} + 1 - \frac{1}{2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{N'(r)}{\sqrt{N(R)N(r)}} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{N(R)}}{N(r)^2} N'(r) r' \\
&= (\dot{t}').
\end{aligned}$$

Como la derivada temporal de cada lado de la igualdad es igual, ahora falta ver que la igualdad se cumple para cualquier τ , por ejemplo $\tau = 0$. Por un lado: $t(0, R)' = 0$, ya que $t(0, R) = 0$; por el otro: $\left[\frac{r(0, R)' \dot{r}(0, R)}{\sqrt{N(R)N(r(0, R))}} \right]' = \left[\frac{R' \dot{R}}{\sqrt{N(R)N(R)}} \right]' = 0$.

Y entonces el coeficiente de $d\tau dR$ es cero como lo necesitábamos. Ahora podemos asegurar que la métrica (5.18) es equivalente a la métrica de Schwarzschild-Tangherlini para $R > R_1$ y así con la métrica (5.18) podemos describir todo el espacio-tiempo donde ocurre el colapso de una nube de polvo esféricamente simétrica que llega a formar una singularidad dentro de un hoyo negro en $q + 2$ dimensiones espacio-temporales.

5.3. Resumen

Con este capítulo hemos terminado el análisis del colapso relativista de una nube de polvo esféricamente simétrica con densidad homogénea que comienza en reposo en $q + 2$ dimensiones espacio-temporales. Hemos descrito la variedad N que describe al espacio-tiempo donde está inmersa la nube de polvo, conocemos ya la métrica que nos ha permitido estudiar eventos físicos como el horizonte de eventos y el horizonte aparente dentro y fuera de la nube que nos dicen qué es lo que veríamos si cayéramos a un hoyo negro.

La siguiente figura muestra las gráficas, en 3 dimensiones espaciales, que representan estas superficies (horizonte de eventos y horizonte), también nos muestra el tiempo propio que les tomaría a las partículas llegar a la singularidad, en las coordenadas, adaptadas a las trayectorias de las partículas de la nube de polvo, que construimos.

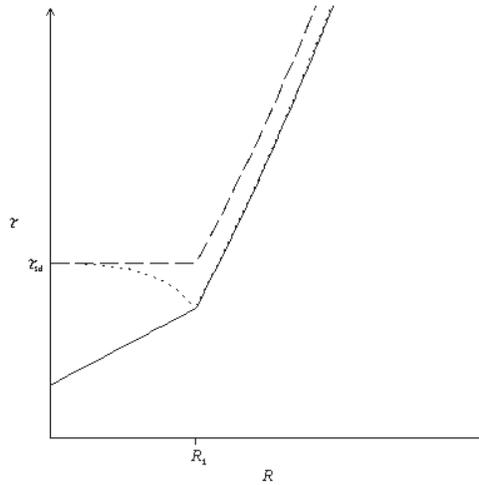


Figura 5.1: Esta figura muestra las gráficas en las coordenadas adaptadas τ y R del horizonte de eventos (línea continua), el horizonte aparente (línea punteada) y la singularidad (línea discontinua). Aquí hemos utilizado el valor $\nu = \frac{r_0}{R_1} = 0,6$ y R_1 es el radio inicial de la nube de polvo que, en estas coordenadas, es constante.

Esta gráfica nos muestra que sí es posible ver al tiempo $\tau = 0$ el centro de la nube de polvo, esto depende del valor que tenga $\nu = \frac{r_0}{R_1}$. Como vimos en la sección 5.2.2, la singularidad está escondida por una superficie esférica que no permite que observadores fuera de ella puedan observar lo que ocurre con la nube de polvo cuando ésta ya está totalmente contenida en esa superficie esférica. Por lo tanto, para esos observadores externos es imposible llegar a ver la singularidad, aunque para aquellos que estén dentro les toma un tiempo propio finito llegar a ella.

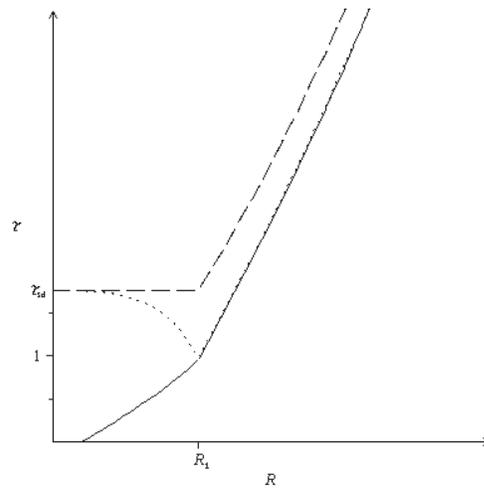


Figura 5.2: En esta figura representamos lo mismo que en la (5.1) pero aquí hemos utilizado el valor $\nu = 0,8$. Con este valor de ν no es posible observar desde el infinito al tiempo $\tau = 0$ toda la nube, el centro de ésta está escondida detrás del horizonte de eventos.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo hemos analizado el colapso de una nube de polvo esféricamente simétrica, con densidad homogénea, inicialmente en reposo.

Primero hicimos el análisis utilizando la mecánica de Newton. Obtuvimos las ecuaciones de movimiento de las partículas de la nube y así pudimos analizar el colapso newtoniano. Las ecuaciones que encontramos en el caso newtoniano son esencialmente las mismas que las que encontramos en el caso relativista si identificamos el tiempo t en el caso newtoniano con el tiempo propio de las partículas de la nube en el caso relativista, τ , y la coordenada radial r con el radio de área de las esferas en el caso relativista.

Para analizar el colapso de la nube en Relatividad General encontramos las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que describen cómo la materia da lugar a un campo gravitacional e, inversamente, cómo la gravedad afecta la materia. Las soluciones a estas ecuaciones son la métrica exterior y la función radio de área para el exterior de la nube de polvo; y, la métrica interior (que también describirá el exterior de la nube de polvo) la función radio de área, la velocidad de las partículas y la densidad de masa, para el interior de la nube de polvo.

Primero encontramos la forma de la métrica en S^g , después hemos demostrado el teorema de Birkhoff mostrando que la métrica de Schwarzschild-Tangherlini es la única solución de las ecuaciones de Einstein es un espacio-tiempo esféricamente simétrico donde no hay materia, es decir, fuera de la nube de polvo.

Ya que pudimos describir el exterior de la nube de polvo nos interesamos por estudiar allí las geodésicas tipo tiempo que describen las trayectorias seguidas por partículas en caída libre y nos hemos dado cuenta que una partícula en esa situación y que comienza en reposo, llegaría en un tiempo propio finito tanto al horizonte de eventos como a la singularidad, además de una conclusión importante que es que sólo en el espacio-tiempo que conocemos, con 4 dimensiones espacio-temporales, una partícula podría entrar en una órbita acotada estable alrededor de un hoyo negro como el que describe la métrica de Schwarzschild-Tangherlini.

Finalmente hemos resuelto las ecuaciones de Einstein con materia y hemos obtenido, como parte de la solución de estas ecuaciones, la métrica que describe tanto el exterior como el interior de la nube de polvo. Ahora sabemos cómo se colapsa la nube de polvo al conocer las trayectorias que seguirían las partículas de la nube. Hemos visto que las partículas llegan a la singularidad en un tiempo propio finito y además, este tiempo propio es el mismo para todas en el modelo homogéneo. Hemos visto que esta singularidad es tanto una singularidad de densidad como una singularidad de la geometría, hay una infinita curvatura del espacio tiempo debido a la infinita densidad de la nube de polvo. Hemos analizado el horizonte de eventos que nos dice qué es lo que un observador externo a él puede ver de la nube así entonces nos damos cuenta que para una observador situado en el infinito no le es posible observar la singularidad dentro del hoyo negro. También estudiamos el horizonte aparente que ya hemos explicado en la sección 5.2.3. En esta tesis hemos generalizado a dimensiones arbitrarias el trabajo de J. R. Oppenheimer y H. Snyder [4].

Hemos dicho antes que las ecuaciones en los dos análisis del colapso, newtoniano y relativista, son esencialmente las mismas, entonces ¿qué diferencia hay entre el caso Newtoniano y el caso Relativista? Imaginémonos en un espacio-tiempo newtoniano donde una nube de polvo se está colapsando. Estando en cualquier lugar del espacio-tiempo es posible ver todo el proceso y hasta la singularidad ya que la información que sale de la nube de polvo podría ser recibida por cualquier observador en el futuro en que se forma la singularidad. En el caso relativista aquella singularidad está encerrada por una superficie que no permite que un observador fuera de ella pueda mirar la singularidad, ¿qué es lo que ve un

observador \mathbf{O} que está a una distancia grande de la nube de polvo que se está colapsando? Un observador \mathbf{O}' sobre la superficie de la nube pasaría dentro del radio de Schwarzschild en algún tiempo propio finito, digamos que mide la 1 en punto en su reloj. El no nota nada especial en ese momento. De cualquier modo después que pasa este radio él ya no será visible para el observador \mathbf{O} que descansa fuera del radio de Schwarzschild (puede verse la figura 3.1 en la página 31). No importa cuánto espere el observador \mathbf{O} , nunca verá a \mathbf{O}' más tarde de la 1, medido en el reloj de \mathbf{O}' . En lugar de esto verá que el reloj de \mathbf{O}' va más lento acercándose asintóticamente a la 1 en punto. Eso significa que la luz que él recibe de \mathbf{O}' tendrá un desplazamiento de frecuencia hacia el rojo cada vez más grande y como consecuencia un decremento de intensidad cada vez más grande. Así pues, aunque la superficie de la nube de polvo en realidad nunca desaparece de la vista de \mathbf{O} , pronto se vuelve tan débil como para ser invisible en la práctica [5].

¿Qué continuación podría tener este trabajo? Podríamos preguntarnos qué pasará si nuestra nube de polvo no fuera una nube de polvo, si no una estrella donde entran en juego la densidad, la temperatura, una presión realista y sin simetría esférica.

Se cree que (y aquí vimos un caso), en el sistema de la Relatividad General, los colapsos gravitacionales conducen inevitablemente a singularidades que están ocultas dentro de agujeros negros; que las “singularidades desnudas” están prohibidas por algunos principios de la física relativista. Sin embargo, se ha demostrado que los colapsos esféricamente simétricos pueden conducir a singularidades que no están escondidas detrás de estos hoyos negros. Un trabajo en este tema es el hecho por P. Yodis, H. J. Seifer y H. Müller zum Hagen [6]. Otra referencia es el trabajo de Christodoulou donde se analiza el comportamiento de los rayos salientes en el colapso gravitacional de una nube de polvo esféricamente simétrica no homogénea [7].

Las singularidades desnudas harían que la naturaleza fuese impredecible. Debido a que en la Relatividad General las estrellas colapsan en las singularidades dentro de un hoyo negro, no se puede predecir qué harán esas singularidades, tal vez los calcetines perdidos podrían surgir de estas singularidades desnudas.

Mientras que las singularidades permanezca a salvo escondidas en sus horizontes de

eventos, esta aleatoriedad permanecerá contenida y la Relatividad General seguirá prediciendo la forma del espacio-tiempo. Pero si las singularidades pueden ser desnudas, su impredecibilidad afectaría al resto del Universo. Por ejemplo, cuando se estudie la órbita de la Tierra alrededor del Sol, no se podrían descartar efectos que tendrían las singularidades sobre esta órbita, podría pasar que estas emitiesen un pulso gravitatorio que enviara a nuestro planeta lejos en el espacio.

¿Podría un ligero cambio en la configuración inicial de la estrella causar que un horizonte de eventos cubriese la singularidad desnuda? los trabajos que se han hecho por ejemplo el de P. Yodis, H. J. Seifer y H. Müller zum Hagen no han demostrado que esta propiedad (tener una singularidad desnuda) se mantiene estable con respecto a, por ejemplo, los datos iniciales y las ecuaciones de estado.

Bibliografía

- [1] A. Eckart and R. Genzel. Observations of stellar proper motions near the Galactic Centre. *Nature*, 383:415–417, October 1996.
- [2] Saul A. Teukolsky Stuart L. Shapiro. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-Interscience, Cornell University, Ithaca, New York, 1983.
- [3] F. R. Tangherlini. Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of the space problem. *Nuovo Cim.*, 27:636–651, 1963.
- [4] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, 56, 1939.
- [5] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [6] H. J. Seifer y H. Müller zum Hagen P. Yodis. On the occurrence of naked singularities in general relativity. *Commun. Math. Phys.*, 34:135–148, 1972.
- [7] Demetrios Christodoulou. Violation of cosmic censorship in the gravitational collapse of a dust cloud. *Commun. Math. Phys.*, 93:171–195, 1984.