

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas.

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez.



ENTENDIENDO EL PODER DEL SOL: UN MODELO SIMPLE.

T E S I S

para obtener el grado de

Licenciada en Ciencias Físico Matemáticas.

Autora:

María Anabel Trejo Espinosa.

Asesor:

Dr. Thomas Zannias.

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH.

Morelia, Michoacán

agosto de 2009.

Índice general

1. Introducción.	2
2. La mecánica cuántica y la interacción entre partículas elementales.	7
2.1. La interacción protón-electrón.	7
2.2. El problema de dos cuerpos en mecánica cuántica.	14
2.3. Descripción cuántica del átomo de Hidrógeno.	18
2.4. Sistema protón-protón, el factor de Gamow.	21
3. La cadena protón-protón.	26
3.1. Características físicas del Sol.	26
3.2. Reacciones termonucleares.	29
3.3. La cadena protón-protón (cadena p-p).	31
3.4. Estructura de la sección eficaz.	34
3.5. Estimación de la luminosidad.	38
3.6. Una estimación aproximada de la luminosidad.	40
4. Conclusión.	43
5. Apéndices.	45
5.1. Apéndice A: Armónicos esféricos.	45
5.2. Apéndice B: Solución de la ecuación radial para el átomo de Hidrógeno. . .	48
5.3. Apéndice C: Cuantización de un sistema clásico.	50

BIBLIOGRAFÍA

Resumen

Esta tesis tiene como finalidad exponer los principios físicos y las distintas herramientas de la física moderna involucradas en dar una explicación elemental de la manera en la que el Sol genera su luminosidad. En estos días es aceptable que la cadena protón-protón es la responsable de la luminosidad observada del Sol. Tal cadena involucra reacciones nucleares, en donde se fusionan protones para formar núcleos de Helio. En esta tesis damos una exposición de la física involucrada en explicar cómo el Sol, a través de reacciones nucleares, genera su energía. De estas reacciones nucleares resulta que la luminosidad observada del Sol es $L_{\odot} = 3,80 \times 10^{33} \text{erg/s} = 3,80 \times 10^{26} \text{W}$.

Mostraremos que la gravitación, algunos principios de la mecánica cuántica y la fuerza nuclear son los responsables de la enorme luminosidad producida por el Sol. La fuerza atractiva gravitacional es la responsable de la enorme temperatura central $T_c = 1,56 \times 10^7 \text{K}$ que se encuentra en el núcleo del Sol. La mecánica cuántica a través del efecto túnel muestra que los protones pueden vencer la repulsión coulombiana, una vez que los protones penetran la barrera coulombiana la fuerza nuclear es la responsable de la fusión nuclear y de la liberación de energía.

Capítulo 1

Introducción.

Entre 1910 y 1913 los astrónomos E. Hertzsprung y H. N. Russell descubrieron que hay una relación entre la luminosidad observada L y el tipo espectral¹ de las estrellas cercanas a nuestro sistema solar. Si en un plano el eje vertical representa la luminosidad y el eje horizontal el tipo espectral, sus observaciones mostraban que las estrellas cercanas al Sol caen en una región definida de este plano que marca la secuencia principal. En la astronomía moderna el *Diagrama Hertzsprung-Russell*, o simplemente diagrama H-R, es el nombre que se le asigna a este plano y está representado en las figuras 1.1.

Observaciones de más de un siglo muestran que las estrellas pertenecen a uno de los siguientes grupos: supergigantes, gigantes, subgigante, enanas blancas y *estrellas en secuencia principal* (Para una discusión más detallada y completa de la clasificación de las estrellas y sus propiedades ver [1]). Por su parte, el grupo de las estrellas en secuencia principal se clasifican de acuerdo a su tipo espectral en: O, B, A, F, G, K, M, R, N, S y H; que van de estrellas con mayor temperatura a estrellas con menor temperatura superficial, véase las figuras 1.1. Dentro de las estrellas tipo G se encuentran estrellas de tipo espectral G0, las cuales se distinguen por tener una temperatura superficial de $6000K$. Tal temperatura es la que aproximadamente nuestra estrella, el Sol, tiene en su superficie. De acuerdo al diagrama Hertzsprung-Russell, el Sol se encuentra en la secuencia principal de su vida.

Desde épocas tempranas la humanidad se preguntaba ¿por qué el Sol brilla? ¿Cómo

¹El tipo espectral se define como la temperatura superficial efectiva T de la estrella.

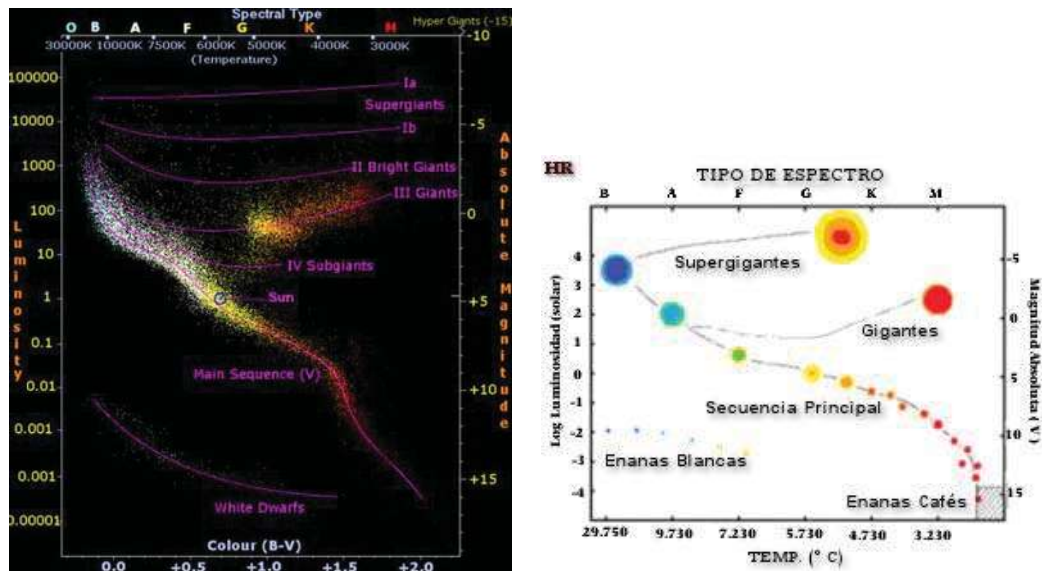


Figura 1.1: Diagrama H-R. Esta figura muestra dos imágenes del diagrama H-R (esta fueron obtenidas en eu.wikipedia.org/wiki/Hertzprung-Russell_diagram y www.astrocosmo.cl/.../b_p-tiempo-03.09.02.htm).

genera el Sol su energía para seguir brillando después de miles de años? Y un poco después se preguntaron más concisamente ¿Cómo el Sol puede liberar 1400 W de potencia por cada metro cuadrado de la superficie de la Tierra? En 1854 Hermann von Helmholtz propuso como origen de la enorme energía radiada (luminosidad) del Sol al resultado debido de la contracción gravitacional de una enorme nube de gas y polvo. Por razones históricas es interesante mencionar que a principios del mismo año Lord Kelvin sugirió que la energía solar podría ser producida por el impacto de meteoros en la superficie del Sol pero, bajo evidencias observacionales Kelvin fue obligado a dejar esta idea. En 1859 Charles Darwin, además de otros biólogos y geólogos de la época, presentó evidencia de que la radiación solar afecta directamente las formas de vida de la Tierra y origina cambios geológicos de ésta. Por tal razón, él calculó la edad de la Tierra y encontró que esta debía ser de 3×10^8 años; de acuerdo con sus evidencias el Sol debería haber estado radiando energía en todo este tiempo (Nuestra fuente histórica proviene principalmente de [2] pero también de [3], en la última referencia se discute con más detalle la evolución de las ideas que tomaron

lugar después de la segunda mitad del siglo *XX*).

Con su teoría de la contracción gravitacional Kelvin y Helmholtz calcularon que el Sol generaría energía durante 2×10^7 años. Este tiempo es insuficiente para explicar la teoría de la Selección Natural de Darwin.

En el siglo *XIX* los físicos teóricos no conocían la posibilidad de transformar masa en energía, no conocían la mecánica cuántica ni la versión relativista de las ecuaciones de Maxwell.

En 1905, Albert Einstein formuló su teoría especial de la relatividad y como una consecuencia mostró que la masa m y la energía E son equivalentes a través de la relación $E = mc^2$, donde $c = 3 \times 10^{10} \text{cm/s}$ es la velocidad de la luz en el vacío.

En 1919, Henry Norris Russell enfatizó que la pista más importante para determinar la fuente de energía estelar era la alta temperatura en el interior de las estrellas. En 1920, F. W. Aston encontró que cuatro núcleos de Hidrógeno son más pesados que un núcleo de Helio. La importancia de estas observaciones fueron inmediatamente reconocidas por Arthur Eddington y sugirió que la diferencia entre la masa de los cuatro núcleos de Hidrógeno y el núcleo de Helio podría significar que el Sol genera su energía convirtiendo núcleos de Hidrógeno en núcleos de Helio, de acuerdo a la relación $E = mc^2$, y encontró que con esta fuente el Sol brillará por 10^{10} años. Esto lo pudo hacer debido a que ya se conocía que el Sol estaba compuesto principalmente por Hidrógeno. En 1926 Eddington analizó la constitución interna de las estrellas y concluyó que el centro del Sol está constituido totalmente por material ionizado, que tiene una densidad de, alrededor de, 100gr/cm^3 y una temperatura del orden de 10^7K (H. Bethe [4] discute con más detalle las ideas de Eddington).

En 1926 Erwin Schrödinger propuso la hoy conocida *ecuación de Schrödinger*, y el trabajo de Heisenberg, Dirac y otros guiaron a la fundación de la mecánica cuántica. La llegada de esta teoría cambió el panorama. Procesos físicos que no pueden suceder en la física clásica pueden ocurrir en la nueva teoría, como por ejemplo el efecto túnel. En 1928, basándose en principios de la mecánica cuántica George Gamow derivó una fórmula mecánico-cuántica que dio una probabilidad distinta de cero de que dos partículas cargadas con mismo signo se acercaran lo suficiente como para fusionarse, derrotando su repulsión

electrostática debida al potencial coulombiano. Esta probabilidad mecánico-cuántica es ahora conocida como *factor de Gamow*² y como veremos después, juega un papel crucial para entender el poder del Sol.

En 1933 James Chadwick descubrió al neutrón, mostrando que el núcleo atómico esta compuesto por protones y neutrones. Este descubrimiento combinado con la mecánica cuántica dio lugar al nacimiento de la física nuclear.

En 1938 Hans Bethe, después de recopilar todo lo conocido de la física cuántica y después de analizar las diferentes reacciones que queman núcleos de Hidrógeno, seleccionó como las más importantes dos procesos que son los responsables del brillo del Sol. Uno de los procesos es llamado *cadena protón-protón* (o cadena p-p) y el otro se denomina *ciclo carbono-nitrógeno-oxígeno* (o ciclo CNO) (para una discusión más completa véase [4]). En ambos procesos se queman cuatro núcleos de Hidrógeno y se libera un núcleo de Helio y $28MeV$ de energía. Estudios posteriores mostraron que para el Sol el principal proceso de producción de energía es la cadena p-p, y el ciclo CNO es más importante en estrellas más masivas que el Sol. Bethe usó este resultado para determinar la temperatura central del Sol, obteniendo $T_c = 1,56 \times 10^7 K$; temperatura suficiente para que el núcleo del Sol se encuentre en estado de plasma.

En estos días es aceptable que la cadena p-p es la responsable de la luminosidad generada por el Sol. Pero aún así, no es obvio ¿cómo de las reacciones nucleares uno puede obtener la luminosidad observada del Sol?, ¿qué otras ramas de la física entran y cómo se combinan para la estimación de la luminosidad del Sol?. Esta tesis tiene como finalidad discutir con más detalle estos y otros aspectos de la física, y dar una estimación de la luminosidad observada del Sol. Generalmente, existe el prejuicio de que una teoría que tiene tal propósito será muy complicada. Este análisis involucra aspectos de la teoría gravitacional Newtoniana, de la hidrodinámica Euleriana, de los principios de la mecánica cuántica y teoría cuántica de campos. Pero en realidad, como mostraremos aquí, este no necesariamente tiene que ser el caso, veremos con más detalle que los aspectos más importantes para tal estimación es el conocimiento de la temperatura en el interior del Sol y la estimación del factor de Gamow. Afortunadamente, la estimación del factor de Gamow

²El factor de Gamow será derivado en la última sección del capítulo 2.

es un problema de penetración de potencial, y tal análisis es realizado en los primeros cursos de mecánica cuántica. La penetración de la barrera coulombiana puede ser tratada apelando a la ecuación de Schrödinger no relativista. Una vez que los protones sienten la fuerza nuclear, a través del decaimiento beta se forma un deuterio y se liberan fotones y neutrinos, comenzando así la cadena p-p. Esta tesis estima la cantidad de radiación generada por tal reacción y la luminosidad por ésta producida. Para hacer un modelo realista tomaremos en cuenta factores como: la distribución de densidad, la fracción de masa de Hidrógeno, la distribución de temperatura, así como otros factores, apelando al modelo estándar del Sol elaborado por Bahcall y sus colaboradores (ver referencia [5]).

Para enfatizar claramente las distintas ramas de la física involucradas en la estimación de la luminosidad del Sol, comenzaremos en el capítulo 2 discutiendo la física del átomo de Hidrógeno desde el punto de vista de la mecánica clásica y desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Una vez que tal análisis se haya realizado consideraremos el problema de la interacción entre dos protones y analizaremos la ecuación de Schrödinger para tal sistema. En este capítulo estimaremos el factor de Gamow, que juega un papel importante en el capítulo 3.

En el capítulo 3 discutiremos las ecuaciones de la estructura estelar y mencionaremos algunas propiedades del interior del Sol. En particular, discutiremos algunas de las características relevantes que predicen soluciones de estas ecuaciones. También hablaremos de la cadena p-p para las condiciones físicas del interior del Sol. Apelando al concepto de sección eficaz y a algunos aspectos de la física estadística clásica derivaremos una fórmula que describa el número de reacciones por unidad de tiempo y unidad de volumen $R(r)$ que toman lugar en el interior del Sol. Una vez que tal fórmula es establecida es relativamente fácil estimar la luminosidad producida por la cadena p-p. En la sección 3.6 proponemos una aproximación para $R(r)$ que nos lleva a poder estimar la luminosidad basándonos solamente en estimaciones analíticas.

Capítulo 2

La mecánica cuántica y la interacción entre partículas elementales.

2.1. La interacción protón-electrón.

Iniciaremos describiendo la física del átomo de Hidrógeno. Desde el punto de vista de la mecánica clásica el átomo de hidrógeno consiste de un protón como núcleo y un electrón, ambas son partículas eléctricamente cargadas, con carga e y $-e$, respectivamente. Por convención en el presente trabajo consideraremos $e > 0$ y con magnitud:

$$e = 4,8018 \times 10^{-10} esu = 1,6019 \times 10^{-19} C, \quad (2.1)$$

las masas correspondientes para el protón m_p y el electrón m_e tienen magnitud³:

$$m_p = 1,6735 \times 10^{-24} gr = \frac{940,22 MeV}{c^2}, \quad (2.2)$$

$$m_e = 9,1072 \times 10^{-28} gr = \frac{511 keV}{c^2}, \quad (2.3)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

En ausencia de fuerzas externas el protón y el electrón interactúan gravitacional y eléctricamente. Considerando el modelo más simple la energía potencial $V(r)$ esta dada

³Varias veces consideramos conveniente usar como unidad de energía el electrón-volt eV definida por:

$$1eV = 1,6019 \times 10^{-19} J = 1,6019 \times 10^{-12} erg, \quad 1keV = 1 \times 10^3 eV, \quad 1MeV = 1 \times 10^6 eV$$

por:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} - \frac{Gm_p m_e}{r}, \quad (2.4)$$

donde r es la magnitud de la posición relativa entre m_e y m_p , y G es la constante de gravitación universal cuyo valor es:

$$G = 6,67 \times 10^{-8} \frac{cm^3}{s^2 gr}. \quad (2.5)$$

En la expresión (2.4) el primer término describe la interacción electromagnética y el otro la interacción gravitacional. A esta relación la podemos reescribir como sigue:

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \left(1 + \frac{Gm_p m_e}{e^2} \right),$$

donde recurriendo a (2.1), (2.2), (2.3) y (2.5) obtenemos que:

$$\frac{Gm_p m_e}{e^2} \sim 4,4087 \times 10^{-40} \ll 1,$$

es decir, la interacción gravitacional entre m_e y m_p es despreciable comparada con su interacción electromagnética, por lo tanto, consideraremos únicamente la parte electromagnética; así $V(r)$ tomará la forma

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}. \quad (2.6)$$

Bajo la mecánica clásica el electrón y el protón son consideradas partículas puntuales y con respecto a un sistema de referencia inercial la lagrangiana tiene la forma (ver [6]):

$$L(\mathbf{r}_p(t), \mathbf{r}_e(t), \dot{\mathbf{r}}_p(t), \dot{\mathbf{r}}_e(t)) = \frac{1}{2}m_p \dot{\mathbf{r}}_p^2(t) + \frac{1}{2}m_e \dot{\mathbf{r}}_e^2(t) + \frac{e^2}{r(t)}, \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{r}_p(t)$ y $\mathbf{r}_e(t)$ son los vectores de posición del protón y electrón y

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_p(t) - \mathbf{r}_e(t), \quad r(t) = |\mathbf{r}(t)|. \quad (2.8)$$

El vector del *centro de masa* $\mathbf{R}(t)$ de este sistema es definido por

$$\mathbf{R}(t) = \frac{m_p \mathbf{r}_p(t) + m_e \mathbf{r}_e(t)}{M}, \quad M = m_p + m_e, \quad (2.9)$$

y si transferimos nuestro sistema de referencia al centro de masa, entonces la lagrangiana tendrá la forma (ver [6]):

$$L = \frac{1}{2}M \dot{\mathbf{R}}^2(t) + \frac{1}{2}m_p \dot{\mathbf{r}}_p^2(t) + \frac{1}{2}m_e \dot{\mathbf{r}}_e^2(t) + \frac{e^2}{r(t)}, \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{r}'_p(t)$ y $\mathbf{r}'_e(t)$ representan las posiciones relativas del protón y del electrón respecto al centro de masa.

De (2.8) y (2.9) tenemos que

$$\mathbf{r}'_p(t) = -\frac{m_e}{M}\mathbf{r}(t), \quad \mathbf{r}'_e(t) = \frac{m_p}{M}\mathbf{r}(t), \quad (2.11)$$

lo cual quiere decir que una vez conocido $\mathbf{r}(t)$ conoceremos las trayectorias \mathbf{r}_p y \mathbf{r}_e con respecto al sistema original. Usando $\mathbf{r}(t)$ como nueva variable, la lagrangiana (2.10) toma la forma

$$L = \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2(t) + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2(t) + \frac{e^2}{r(t)}, \quad \mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}, \quad (2.12)$$

donde μ se conoce como *la masa reducida* del sistema. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{d}{dt} (M\dot{\mathbf{R}}(t)) = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{d}{dt} (\mu\dot{\mathbf{r}}(t)) - \frac{e^2}{r^2(t)} = 0. \quad (2.14)$$

De la ecuación (2.13) se sigue que $\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{C}$, con \mathbf{C} un vector constante, esto quiere decir que el centro de masa se mueve en línea recta con velocidad constante. Con esta simplificación podemos omitir el primer término de la lagrangiana en los estudios posteriores, así

$$L = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2(t) + \frac{e^2}{r(t)}, \quad (2.15)$$

describe el comportamiento de una partícula ficticia con masa μ que interactúa con el mundo externo a través de una energía potencial $V(r)$, $V(r) = -\frac{e^2}{r(t)}$. Entonces, hemos llevado el problema de dos partículas a un problema de una partícula ficticia de masa μ .

Por otro lado, el momento angular total de esta partícula es:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t), \quad (2.16)$$

donde $\mathbf{p}(t) = \mu\dot{\mathbf{r}}(t)$ es el momento lineal. Diferenciando $\mathbf{L}(t)$ con respecto al tiempo, llegamos a:

$$\frac{d\mathbf{L}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{p}(t) + \mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{p}}(t) = 0,$$

como consecuencia de la simetría esférica de $V(r)$ (ya que $\mathbf{r}(t) \parallel \dot{\mathbf{p}}(t)$, es decir, estos vectores son paralelos). Respecto al origen del sistema de referencia colocado en el centro

de masa $\mathbf{L}(t)$ se conserva, esto implica que la trayectoria de la partícula se desarrolla en un plano. Empleando la libertad de rotar el sistema de referencia fijamos el eje z de tal manera que sea paralelo a \mathbf{L} . Respecto a tal sistema el movimiento de la partícula ficticia de masa μ será en el plano xy . Usando coordenadas polares (r, θ) en el plano de movimiento, (2.15) toma la forma

$$L = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2(t) + r^2(t)\dot{\theta}^2(t) \right) + \frac{e^2}{r(t)}, \quad (2.17)$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} (\mu\dot{r}(t)) - \mu r\dot{\theta}^2(t) + \frac{e^2}{r^2(t)} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{dt} (\mu r^2(t)\dot{\theta}(t)) = 0. \quad (2.19)$$

De la última ecuación tenemos

$$l = \mu r^2(t)\dot{\theta}(t), \quad (2.20)$$

donde l es constante, y a partir de (2.16) es claro que $l = |\mathbf{L}(t)|$.

La energía total es

$$E(t) = \frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2(t) + r^2(t)\dot{\theta}^2(t) \right) - \frac{e^2}{r(t)}, \quad (2.21)$$

diferenciando con respecto a t y considerando (2.18) y (2.19), se obtiene:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \dot{r}(t) \left(\mu\ddot{r}(t) - \mu r(t)\dot{\theta}^2(t) + \frac{e^2}{r^2(t)} \right) + \dot{\theta}(t) \left(2\mu r(t)\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + \mu r^2(t)\ddot{\theta}(t) \right) = 0,$$

es decir, la energía se conserva⁴.

Las ecuaciones (2.20) y (2.21) admiten soluciones que describen órbitas circulares, es decir, órbitas tales que $|\mathbf{r}(t)|=r$ para todo t . El radio y la energía de estas órbitas son:

$$r = \frac{l^2}{\mu e^2}, \quad (2.22)$$

$$E = -\frac{\mu e^4}{2l^2}. \quad (2.23)$$

En una buena aproximación podemos considerar que el protón está en reposo y el electrón está girando alrededor de él, esto por el hecho que

$$\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \simeq m_e \left(1 - \frac{m_e}{m_p} \right) \simeq m_e.$$

⁴Debido a que V no depende explícitamente del tiempo, es decir, $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$.

De este análisis llegamos a la conclusión de que existe una familia de órbitas circulares en donde E y l varían continuamente. Aunque por simplicidad hemos establecido la existencia de órbitas circulares, un análisis más detallado muestra la existencia de órbitas elípticas en donde E y l , también, varían continuamente (véase [7]); así, desde el punto de vista de la mecánica clásica, el electrón se mueve en órbitas cerradas planas alrededor del protón. Desafortunadamente esta descripción del átomo de Hidrógeno tiene tanto problemas conceptuales como con observaciones.

A pesar de que en el análisis anterior la energía se conserva, tomando en cuenta que el electrón es una partícula cargada y que además está acelerada mientras se mueve alrededor del protón. Bajo la teoría electromagnética la energía E no estará conservada debido a la emisión de radiación electromagnética. Tal emisión provoca que el electrón forme una espiral hacia el protón, de tal manera que al radiar su energía se colapsará con el protón implicando que el átomo de Hidrógeno sea inestable. A esta situación se le conoció como el *problema de estabilidad del átomo de Hidrógeno*, el cual no puede ser resuelto clásicamente.

Por otro lado, en los experimentos realizados para medir el espectro de radiación del átomo de Hidrógeno se observó que sus líneas espectrales tienen valores bien definidos, es decir, el espectro es discreto. En 1885 Jacob Balmer publicó una corta nota en la que anunció una fórmula empírica para las cuatro longitudes de onda, λ , más prominentes del espectro de luz emitido por el gas del átomo de Hidrógeno, el cual no era un espectro continuo. En términos del número de onda, $k = 2\pi/\lambda$, la fórmula de Balmer puede ser escrita como:

$$k = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad n = 2, \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (2.24)$$

donde $R_H = 10967757,6m^{-1}$ es conocida como *constante de Rydberg* para el átomo de Hidrógeno. Balmer argumentó que al tomar diferentes valores de n obtendremos diferentes series de líneas espectrales. Las series con $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 son ahora conocidas como series de Lyman, Balmer, Paschen, Brackett y Pfund, respectivamente, y caracterizan las líneas espectrales del átomo de Hidrógeno. Estos hechos no pueden ser explicados con el análisis realizado anteriormente y en esa época no existía ninguna teoría que explicara por qué las longitudes de onda de la luz emitida por el átomo de Hidrógeno exhibían tal patrón.

En 1900 Max Planck fue capaz de explicar el espectro de radiación del cuerpo negro⁵, suponiendo que los átomos de las paredes de la cavidad emiten y absorben radiación electromagnética en *cuantos* discretos de energía, esta energía es

$$E = n\epsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

donde $\epsilon = h\nu$, ν es la frecuencia y h es conocida como la *constante de Planck* y tiene un valor igual a

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js} = 6,626 \times 10^{-27} \text{ erg s}. \quad (2.25)$$

En 1905 Einstein, motivado por la sugerencia de Planck y las observaciones obtenidas del efecto fotoeléctrico, postuló que las ondas electromagnéticas se propagan como si estas consistieran de pequeños cuantos (después, el mismo Einstein, llamó a estos cuantos: *fotones*) con muchas de las características de la partícula.

En 1913 Niels Bohr, basándose en las teorías de Planck y Einstein y en observaciones hechas por Rutherford, postuló lo siguiente:

1. El átomo de Hidrógeno consiste de un electrón que viaja alrededor del núcleo en órbitas circulares y el electrón no emite radiación mientras está viajando.
2. La magnitud del momento angular, l , de un electrón toma valores discretos, es decir:

$$l = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.26)$$

donde $\hbar := h/2\pi$.

3. El electrón radía energía sólo cuando éste hace una transición de una órbita a otra con menor energía. Si el electrón salta de una órbita con energía E_n a una órbita con energía menor E_m , la diferencia de energía

$$\Delta E = E_n - E_m$$

es emitida como radiación electromagnética, es decir, se emite un fotón con esa cantidad de energía y con una frecuencia $\nu = \Delta E/h$.

⁵Mostró, en sus estudios de la radiación del cuerpo negro, que es necesario cuantizar la energía electromagnética para evitar la “catástrofe ultravioleta”, que vino como resultado de los estudios de Rayleigh-Jeans del espectro de luz emitido por un cuerpo negro.

Combinando estos postulados con las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.26), obtenemos una conclusión de gran importancia. Mientras que desde el punto de vista de la mecánica clásica tanto el radio de las órbitas circulares como la energía y la magnitud del momento angular del electrón son cantidades continuas, con los postulados de Bohr los radios de las órbitas circulares, las energías y la magnitud del momento angular de éstas ahora son cantidades discretas. Combinando los postulados de Bohr con las ecuaciones (2.22), (2.23) y (2.26) los valores permitidos para r_n , E_n y l son

$$r_n = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.27)$$

$$E_n = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.28)$$

$$l = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (2.29)$$

El *estado base* del sistema ocurre cuando $n = 1$ y se tiene:

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \simeq 5,3 \times 10^{-9} \text{ cm}, \quad (2.30)$$

$$E_1 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2} \simeq -13,6 \text{ eV}, \quad (2.31)$$

donde r_1 es una longitud de escala característica referida de aquí en adelante como el *radio de Bohr* del átomo de Hidrógeno y $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ es la energía del estado base. Una consecuencia de los postulados de Bohr es que la frecuencia de la luz emitida cuando un electrón hace un salto del n -ésimo al m -ésimo nivel de energía y como $k = 2\pi\nu/c$, con c la velocidad de la luz en el vacío, la fórmula de Balmer es obtenida.

Aunque el modelo de Bohr puede explicar de forma satisfactoria el espectro de radiación no es completamente satisfactorio, primero por que no explica cómo las transiciones espontáneas de un nivel de energía a otro con menor energía son posibles, segundo y más importante es que el modelo de Bohr carece de una teoría fundamental que explique sus postulados.

Hoy en día sabemos que la teoría que fundamenta los postulados de Bohr surgió entre 1925 y 1927 y es conocida como la mecánica cuántica. En la siguiente sección analizaremos la física del átomo de Hidrógeno bajo esta teoría.

2.2. El problema de dos cuerpos en mecánica cuántica.

De los cursos de mecánica cuántica conocemos la *ecuación de Schrödinger*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.32)$$

que describe el estado de una partícula de masa m que interactúa con el mundo externo a través del potencial $V(\mathbf{r}, t)$. Cualquier solución $\Psi(\mathbf{r}, t)$ de (2.32) es conocida como *función de onda* y, según los postulados de la mecánica cuántica, provee una descripción mecánico-cuántica del comportamiento del sistema. El postulado fundamental asociado a la interpretación de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ fue formulado por Max Born (1926) y si $\Psi^*(\mathbf{r}, t)$ es el complejo conjugado de $\Psi(\mathbf{r}, t)$, la cantidad

$$P(\mathbf{r}, t) = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.33)$$

representa la *densidad de probabilidad*, es decir, $P(\mathbf{r}, t) d^3r$ es la *probabilidad* de encontrar a la partícula en el elemento de volumen d^3r sobre \mathbf{r} en el instante t . Esta interpretación formulada por Born es meramente una interpretación estadística de $\Psi(\mathbf{r}, t)$ (para una discusión de los postulados de la mecánica cuántica véase [8], [7] y [9]).

Nuestra intención es adaptar la ecuación de Schrödinger para un sistema que involucra dos partículas bajo la suposición de que el potencial de interacción V es independiente del tiempo y que además es esféricamente simétrico, un término que definiremos más precisamente más adelante. De acuerdo con la mecánica cuántica asignamos la función de onda $\Psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e, t)$ que describe un estado para tal sistema, donde $\mathbf{r}_p = (x_p, y_p, z_p)$ y $\mathbf{r}_e = (x_e, y_e, z_e)$ representan los grados de libertad para las partículas y t indica la dependencia temporal de $\Psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e, t)$ ⁶. Así, la ecuación de Schrödinger para este sistema es (véase [7] y [9])

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla_p^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_e^2 + V(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e|) \right) \Psi(\mathbf{r}_p, \mathbf{r}_e, t), \quad (2.34)$$

⁶Aunque por conveniencia denotamos r_e y r_p a los grados de libertad, estos no necesariamente hacen referencia a los grados de libertad del electrón y el protón. El análisis siguiente es válido para cada sistema que involucra dos partículas que interactúan a través de $V = V(|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e|)$.

donde ∇_p^2 y ∇_e^2 son operadores de Laplace que indican diferenciación respecto a las coordenadas rectangulares de las partículas.

De forma análoga, como se hizo en la sección anterior, definimos las coordenadas relativas \mathbf{r} por

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_e = (x_p - x_e, y_p - y_e, z_p - z_e)$$

y las coordenadas del centro de masa \mathbf{R} mediante:

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z) = \left(\frac{m_p x_p + m_e x_e}{M}, \frac{m_p y_p + m_e y_e}{M}, \frac{m_p z_p + m_e z_e}{M} \right), \quad M = m_p + m_e.$$

Transformamos la ecuación de Schrödinger (2.34) al nuevo sistema de coordenadas a través del siguiente procedimiento:

Recordemos que en coordenadas rectangulares ∇_p^2 y ∇_e^2 tienen la forma:

$$\nabla_p^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_p^2}, \quad (2.35)$$

$$\nabla_e^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_e^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_e^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_e^2}. \quad (2.36)$$

Sea $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ una función de clase C^2 , entonces respecto a las nuevas coordenadas tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_p} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_p}{M} \frac{\partial}{\partial X} \right) f, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \frac{m_p^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right) f. \end{aligned}$$

Como f es arbitraria concluimos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{m_p}{M} \frac{\partial}{\partial X} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \frac{m_p^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right). \end{aligned}$$

De forma análoga llegamos a las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{m_p}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \frac{m_p^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2 \frac{m_p}{M} \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} + \frac{m_p^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial z_p^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2 \frac{m_p}{M} \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z} + \frac{m_p^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right). \end{aligned}$$

A través de un procedimiento similar obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_e^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\frac{m_e}{M} \frac{\partial^2}{\partial x \partial X} + \frac{m_e^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial X^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial y_e^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2\frac{m_e}{M} \frac{\partial^2}{\partial y \partial Y} + \frac{m_e^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial z_e^2} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{m_e}{M} \frac{\partial^2}{\partial z \partial Z} + \frac{m_e^2}{M^2} \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right).\end{aligned}$$

De esta manera, tomando en cuenta las relaciones anteriores y con la ayuda de (2.35) y (2.36), tenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p} \nabla_p^2 - \frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla_e^2 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2, \quad (2.37)$$

donde

$$\mu = \frac{m_p m_e}{M}, \quad M = m_p + m_e \quad (2.38)$$

y ∇_r^2 , ∇_R^2 indican diferenciación respecto a las coordenadas relativas y respecto al centro de masa, respectivamente.

Con respecto a las nuevas coordenadas y usando (2.37), la ecuación de Schrödinger (2.34) toma la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 + V(\mathbf{r}) \right) \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t), \quad (2.39)$$

Nuestro enfoque es construir soluciones que describan estados estacionarios, es decir, estados de la forma $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = e^{i\frac{E}{\hbar}t} u(\mathbf{r}, \mathbf{R})$. Debido a que $V(r)$ es independiente del tiempo podemos proponer:

$$\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) = u(\mathbf{r}, \mathbf{R})T(t). \quad (2.40)$$

Sustituyendo esta representación en (2.39) y dividiendo por $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}, t) \neq 0$ obtenemos:

$$i\hbar \frac{1}{T(t)} \frac{dT(t)}{dt} = \frac{1}{u(\mathbf{r}, \mathbf{R})} \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2 + V(r) \right) u(\mathbf{r}, \mathbf{R}), \quad (2.41)$$

como t es independiente de \mathbf{r} y \mathbf{R} ambos lados de la igualdad deben ser iguales a una constante de separación, digamos E_1 . Así, de la ecuación (2.41) obtenemos:

$$\frac{dT(t)}{dt} = i\frac{E_1}{\hbar} T(t) \quad (2.42)$$

y

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 - \frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 + V(r)\right)u(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = E_1u(\mathbf{r}, \mathbf{R}). \quad (2.43)$$

De la ecuación (2.42) se obtiene

$$T(t) = Ce^{i\frac{E_1}{\hbar}t}, \quad (2.44)$$

donde C es la constante positiva (es decir, $C > 0$ por la solución de (2.42)) de integración.

Para (2.43) proponemos que $u(\mathbf{r}, \mathbf{R})$ es de la forma:

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = Q(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{R}) \neq 0 \quad (2.45)$$

sustituyéndola en (2.43) y dividiendo por $u(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \neq 0$, obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_r^2 Q(\mathbf{r}) + [V(r) - E]Q(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.46)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla_R^2 \zeta(\mathbf{R}) - E_2\zeta(\mathbf{R}) = 0, \quad (2.47)$$

donde E_2 es una nueva constante de separación y $E = E_1 + E_2$. La última ecuación corresponde a una partícula libre con masa $M = m_e + m_p$ y sus soluciones $\zeta(R)$ y E_2 describen el comportamiento del centro de masa. Esta ecuación es análoga a la ecuación (2.13) del tratamiento clásico, y no es de gran importancia. Por otro lado, la ecuación (2.46) describe los estados de una partícula ficticia de masa reducida μ que interactúa con el mundo externo a través de una energía potencial $V(r)$. Enfocamos nuestra atención en la ecuación (2.46).

El hecho de que $V = V(|\mathbf{r}|)$ es esféricamente simétrico, hace preferible trabajar en coordenadas esféricas. En tales coordenadas, la ecuación (2.46) toma la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] Q(r, \theta, \phi) + [V(r) - E]Q(r, \theta, \phi) = 0, \quad (2.48)$$

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

en donde $\phi = 0$ es idéntica con $\phi = 2\pi$.

Proponemos que sus soluciones tienen la forma

$$Q(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi) \neq 0,$$

así sustituyendo en (2.48) y dividiendo por $Q(r, \theta, \phi) \neq 0$ obtenemos la *ecuación radial*:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{\lambda}{r^2} \right\} R(r) = 0, \quad 0 \leq r < \infty, \quad (2.49)$$

y la *ecuación angular*:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \lambda Y(\theta, \phi) = 0, \quad (2.50)$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,$$

donde λ es la nueva constante de separación.

Las soluciones regulares en los puntos singulares de (2.50) demandan que $\lambda = l(l+1)$ con $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ y son los *armónicos esféricos*⁷:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (2.51)$$

donde $P_l^m(\cos \theta)$ son las *Funciones asociadas de Legendre* y m es un entero sujeto a la restricción: $|m| \leq l$. Sustituyendo $\lambda = l(l+1)$ en (2.49) y reorganizando obtenemos:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} R(r) + V(r)R(r) = ER(r), \quad 0 \leq r < \infty. \quad (2.52)$$

Para poder estudiar las soluciones de esta ecuación se debe conocer la forma explícita de $V(r)$, y como una aplicación de esta ecuación en la próxima sección estudiaremos el átomo de Hidrógeno.

2.3. Descripción cuántica del átomo de Hidrógeno.

Para el caso del átomo de Hidrógeno el potencial $V(r)$ tiene la forma $V(r) = -\frac{e^2}{r}$, así la ecuación (2.52) toma la forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} R(r) - \frac{e^2}{r} R(r) = ER(r), \quad 0 \leq r < \infty. \quad (2.53)$$

Estamos interesados en soluciones con estados ligados, es decir, buscamos soluciones en las que las energías sean negativas, $E < 0$. Vemos a (2.53) como un problema de

⁷La obtención de los armónicos esféricos será dada en el Apéndice A.

eigenvalores, es decir, simultáneamente debemos determinar las eigenfunciones $R(r)$ y sus correspondientes eigenvalores E^8 . Para resolver (2.53) hacemos el cambio de variable $\rho = \alpha r$, que nos lleva a la ecuación:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad 0 \leq \rho < \infty. \quad (2.54)$$

donde la elección particular de $\frac{1}{4}$ es arbitraria pero conveniente para los desarrollos posteriores y

$$\alpha^2 = \frac{8\mu|E|}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{2\mu e^2}{\alpha\hbar^2} = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.55)$$

Proponemos como solución de la ecuación (2.54) a:

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho}, \quad (2.56)$$

demandando que $F(\rho)$ sea acotada cuando $\rho \rightarrow \infty$ y regular en el límite en que $\rho \rightarrow 0$. Sustituyendo en (2.54) vemos que $F(\rho)$ satisface:

$$F''(\rho) + \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right) F'(\rho) + \left[\frac{\beta - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] F(\rho) = 0, \quad (2.57)$$

donde las primas denotan diferenciación respecto de ρ . Como mostraremos en el apéndice B, en general, las soluciones de esta ecuación divergen cuando $\rho \rightarrow \infty$. La manera de evitar tal divergencia es asumir $\beta = n$ con $n = 1, 2, 3, \dots$. Esto, a través de (2.55), implica que los eigenvalores de la energía E_n son:

$$E_n = -|E_n| = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.58)$$

las cuales son idénticas a los niveles de energía obtenidos por el modelo de Bohr, discutidos en la sección anterior. Pero en contraste, aquí la cuantización de la energía se obtiene como una consecuencia de la solución de la ecuación de Schrödinger.

Las soluciones de (2.53) correspondientes a cada $n = 1, 2, 3, \dots$ son dadas por:

$$R_{nl}(r) = -\sqrt{\left(\frac{2}{nr_1} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho) e^{-\frac{1}{2}\rho}, \quad (2.59)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, (n-1),$$

⁸El término $l(l+1)\hbar^2$ está relacionado con el momento angular orbital de la partícula de masa μ , de esto daremos una explicación en el Apéndice C.

donde

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2 \rho^k}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}, \quad (2.60)$$

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}, \quad \rho = \frac{2}{nr_1} r,$$

son conocidos como *Polinomios asociados de Laguerre*.

Empleando el radio de Bohr r_1 en (2.58), los niveles de energía E_n pueden ser escritos en la forma:

$$E_n = -\frac{e^2}{2r_1 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ y $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ obtenemos que:

$$Q_{nlm}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (2.61)$$

la cual es una familia de soluciones regulares para la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo obtenidas bajo la condición de que $V(r) = -\frac{e^2}{r}$. Por completez damos la forma explícita de Q_{nlm} para algunos valores de n , l y m :

- $n = 1, l = 0, m = 0$

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad R_{1,0}(r) = 2 \left(\frac{1}{r_1} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{r_1}}$$

- $n = 2, l = 0, m = 0$

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad R_{2,0}(r) = \left(\frac{1}{2r_1} \right)^{\frac{3}{2}} \left(2 - \frac{r}{r_1} \right) e^{-\frac{r}{2r_1}}$$

- $n = 2, l = 1, m = -1$

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \quad R_{2,1}(r) = \left(\frac{1}{2r_1} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{\sqrt{3}r_1} e^{-\frac{r}{2r_1}}$$

- $n = 2, l = 1, m = 0$

$$Y_{1,0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \quad R_{2,1}(r) = \left(\frac{1}{2r_1} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{\sqrt{3}r_1} e^{-\frac{r}{2r_1}}$$

- $n = 2, l = 1, m = 1$

$$Y_{1,1}(\theta, \phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad R_{2,1}(r) = \left(\frac{1}{2r_1}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{r}{\sqrt{3}r_1} e^{-\frac{r}{2r_1}}$$

El análisis anterior para el átomo de Hidrógeno explica de manera natural la cuantización de los niveles de energía. Adicionalmente nos proporciona la función completa de la densidad de probabilidad para los estados estacionarios Q_{nlm} y como una consecuencia se obtiene la cuantización del momento angular, pero ahora hay estados en los que el momento angular puede ser cero (Bohr postuló que $l = n\hbar$, $n = 1, 2, 3, \dots$, pero la mecánica cuántica predice que $L = [l(l+1)]^{\frac{1}{2}}\hbar$ como magnitud del momento angular, con $l = 0, 1, 2, \dots$).

Es interesante ver la manera en que aparece el radio de Bohr r_1 , definido en (2.30). Si consideramos el estado $n=1$, tenemos:

$$Q_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = 2\sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(\frac{1}{r_1}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{r_1}},$$

cuya densidad de probabilidad es:

$$P(r, \theta, \phi) = Q_{1,0,0}(r, \theta, \phi)^* Q_{1,0,0}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{r_1}\right)^3 e^{-2\frac{r}{r_1}},$$

$$P(r, \theta, \phi) d^3r = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{r_1}\right)^3 r^2 e^{-2\frac{r}{r_1}} \sin \theta dr d\theta d\phi,$$

donde $d^3r = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ es el elemento de volumen. Integrando sobre las variables angulares resulta en la función $g(r) = 4\left(\frac{1}{r_1}\right)^3 r^2 e^{-2\frac{r}{r_1}}$, que describe la probabilidad de encontrar al sistema entre r y $r + dr$. El máximo para la función $g(r)$ ocurre precisamente en $r = r_1$. De aquí podemos interpretar a r_1 como el radio más probable donde es posible que se encuentre el electrón cuando el átomo de Hidrógeno se halla en su estado base.

2.4. Sistema protón-protón, el factor de Gamow.

El enfoque de la sección anterior estuvo en el análisis del átomo de Hidrógeno bajo la teoría de la mecánica cuántica. Para las necesidades del siguiente capítulo nos interesa estudiar la interacción protón-protón bajo la ecuación de Schrödinger, y es esto lo que

desarrollaremos en esta sección. Tal problema, en comparación con el átomo de Hidrógeno, es mucho más complicado debido a que la interacción entre dos protones involucra por un lado la interacción repulsiva coulombiana, y por otro lado, la fuerza nuclear debida a su masa atómica. Como es bien conocido, la fuerza nuclear es de corto alcance y típicamente las partículas, como los protones, la experimentan a distancias menores o iguales a

$$R \simeq 1,4 \times 10^{-13} \text{cm} = 1,4 \text{fermi}, \quad 1 \text{fermi} = 1 \times 10^{-13} \text{cm} \quad (2.62)$$

En general, no es posible dar la forma del potencial V que describe la interacción total entre los dos protones, sin embargo, bajo condiciones especiales es posible dar una buena aproximación (véase la discusión de [8]). Si ignoramos la interacción debida a los espines podemos suponer que el potencial que describe la interacción entre dos protones tiene simetría esférica, es decir, $V = V(r)$. En coordenadas relativas para $r > R$, el potencial $V(r)$ puede aproximarse por (véase la página 87 de [8]):

$$V_l(r) = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \frac{e^2}{r}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.63)$$

donde l es el parámetro del momento angular orbital, véase (2.52). Mientras para $r < R$, $V(r)$ se representa típicamente como un pozo de potencial. El potencial $V_l(r)$ entre dos protones es representado en la figura 2.1.

Afortunadamente para nuestras consideraciones no necesitamos la forma de $V(r)$ para $r < R$. Para los protones que tienen energía $E < V_l(R)$ nos interesamos en la probabilidad de que estos puedan penetrar la barrera de potencial coulombiano, para tal estimación basta que conozcamos el potencial en $r > R$. Como argumentamos anteriormente, el potencial en esa región es conocido y dado por (2.63). El estudio de la interacción protón-protón bajo la ecuación de Schrödinger es el mismo que desarrollamos en la sección 3.2. Introduciendo una vez más las coordenadas relativas y del centro de masa llegamos a la ecuación (2.52), donde ahora $V(r) = \frac{e^2}{r}$. Es decir, ahora consideraremos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} R(r) + \frac{e^2}{r} R(r) = ER(r), \quad R \leq r < \infty. \quad (2.64)$$

donde $\mu = m_p/2$ y r es la magnitud de la coordenada relativa \mathbf{r} . Al sustituir $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ en (2.64) se obtiene:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + [V_l(r) - E] \chi(r) = 0, \quad r > R, \quad (2.65)$$

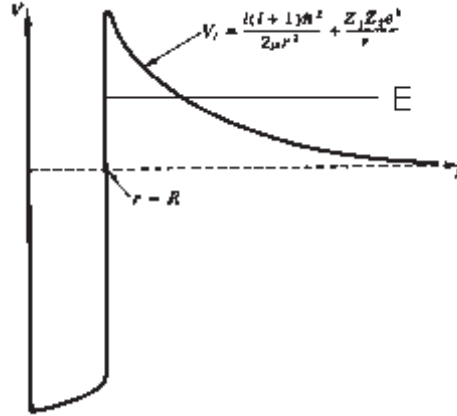


Figura 2.1: Efecto túnel, en la barrera de un potencial coulombiano con simetría esférica (esta gráfica fue tomada de la referencia [10]).

donde $V_l(r)$ para $r > R$ es dado por (2.63).

Sustituyendo $\mu = m_p/2$ podemos reescribir a la ecuación (2.65) de la siguiente manera:

$$\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{m_p}{\hbar^2} [V_l(r) - E] \chi(r) = 0, \quad r > R. \quad (2.66)$$

Para $l=0$ la ecuación (2.66) se reduce a:

$$\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} + \frac{m_p}{\hbar^2} \left[\frac{e^2}{r} - E \right] \chi(r) = 0, \quad r > R, \quad (2.67)$$

que representa una ecuación de segundo orden lineal, para la cual sus soluciones no pueden ser representadas por medio de funciones elementales. Para resolver esta ecuación es necesario recurrir al *método de aproximación WKB*. Aquí no expondremos los detalles de este método⁹, pero sí será utilizado para determinar la probabilidad de que los protones penetren la barrera de potencial coulombiano (o en otras palabras, la probabilidad de transmisión de éstos). Usando el método WKB esta probabilidad es:

$$P = e^{-2I}, \quad (2.68)$$

⁹Este método de aproximación es explicado con más detalle en el artículo titulado *¿Qué es la aproximación WKB?*, para más detalles ver [11].

donde

$$I = \int_R^{r_0} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{r} - E \right)} dr = -\frac{e^2}{E} \int \frac{\sqrt{u-1}}{u^2} du = 2\frac{e^2}{E} \int \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.69)$$

Para obtener la primer igualdad se hizo el cambio de variable $u = \frac{e^2/E}{r}$, mientras que para pasar a la segunda igualdad se consideró $u = \csc^2 \theta$. Después de integrar, de considerar la igualdad $\cos(\arcsin \theta) = \sqrt{1 - \theta^2}$, de poner el resultado de la integral en función de r y después de evaluar los límites de integración se obtiene:

$$I = \frac{\pi e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E}} \left[1 - \frac{2}{\pi} \sin(\gamma^{-\frac{1}{2}}) \right] - \frac{R}{\hbar} \sqrt{2\mu E(\gamma - 1)}, \quad (2.70)$$

donde $E = \frac{1}{2}\mu v^2$, $\gamma = \frac{e^2}{ER}$ y $r_0 = \gamma R$ (r_0 es tal que $V_l(r_0) = E$, véase [11]). Por lo tanto, la probabilidad de transmisión de los protones es

$$P = [G(E)]^{(1 - \frac{2}{\pi} \sin(\gamma^{-\frac{1}{2}}))} \exp \left[2\frac{R}{\hbar} \sqrt{2\mu E(\gamma - 1)} \right], \quad (2.71)$$

donde

$$G(E) = e^{-\frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{E}}} \quad (2.72)$$

es conocido como *factor de Gamow*. A este factor también lo podemos escribir como sigue:

$$G(E) = e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}, \quad (2.73)$$

donde

$$E_G = \left(\frac{2\pi e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \right)^2 \quad (2.74)$$

y se conoce como *energía de Gamow*. En general, podemos realizar el mismo análisis para la interacción entre dos núcleos con cargas $Z_1 e$ y $Z_2 e$ y masa reducida $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, obteniendo como energía de Gamow:

$$E_G = \left(\frac{2\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2}} \right)^2 \quad (2.75)$$

El factor de Gamow (2.72) será utilizado en el siguiente capítulo para determinar la luminosidad producida por el Sol, debida a la cadena protón-protón; ya que manifiesta la probabilidad de que protones con energía E menor que la altura de la barrera de potencial $V_l(R)$ penetren ésta barrera.

En particular, para la interacción entre dos protones podemos dar una expresión cuantitativa a E_G . Considerando las relaciones (2.1), (2.2) y (2.25), y recordando que $\mu = m_p/2$ y $\hbar = h/2\pi$, entonces sustituyendo en (2.74) obtenemos:

$$E_G = 492,91 \text{ keV}. \tag{2.76}$$

Las figuras (2.2) representan distintas gráficas del factor de Gamow, dando diferentes escalas para la energía E medida en eV (electrón-volts), con el fin de ilustrar que para todas las posibles energías $E > 0$, la probabilidad de que estos penetren la barrera de potencial es distinta de cero y a mayor energía mayor probabilidad.

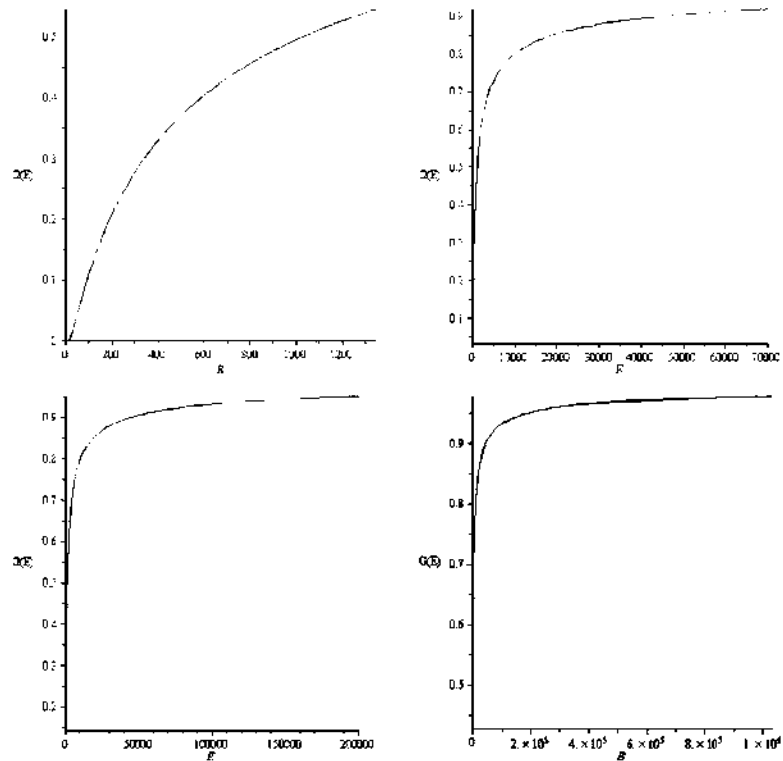


Figura 2.2: Factor de Gamow. Estas figuras muestran el comportamiento del factor de Gamow para distintas escalas de energía E medida en eV .

Capítulo 3

La cadena protón-protón.

3.1. Características físicas del Sol.

En la introducción mencionamos algunas propiedades de las estrellas que se encuentran en secuencia principal y mencionamos que el Sol es una estrella del tipo G . En esta sección daremos una descripción más detallada de las propiedades del Sol. Como una primera aproximación el Sol se modela como una nube luminosa que consiste principalmente de Hidrógeno y, en menor proporción, de Helio, esféricamente simétrica y autogravitante, en equilibrio hidrostático, no rotando y modelamos a su material constituyente como un fluido ideal. Bajo estas condiciones el modelo estándar del Sol envuelve soluciones del siguiente conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales conocidas como *ecuaciones de la estructura estelar* (véase [12] y [10]):

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2}, \quad (3.1)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (3.2)$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r), \quad (3.3)$$

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3\kappa(r)\rho(r)L(r)}{16\pi acT^3(r)r^2}, \quad (3.4)$$

donde $\rho(r)$ es la densidad, $P(r)$ es la presión, $T(r)$ es la temperatura, $M(r)$ es la masa encerrada por la esfera de radio r , $L(r)$ es la luminosidad generada dentro de una esfera de radio r , $\epsilon(r)$ es la luminosidad por gramo, $\kappa(r)$ es la opacidad promedio de Rosseland

en cm^2/gr , G es la constante de la gravitación universal, a es la constante de radiación y c es la velocidad de la luz en el vacío.

Para que el sistema (3.1)-(3.4) especifique una solución debe estar acompañado de relaciones constitutivas referidas como ecuaciones de estado $P = P(\rho, T)$, $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$ y $\kappa = \kappa(\rho, T)$; y además se deben añadir condiciones a la frontera.

Las ecuaciones (3.1) y (3.2) representan la condición de que el Sol está en un estado de equilibrio hidrostático, mientras las ecuaciones (3.3) y (3.4) describen la distribución de la luminosidad $L(r)$ y la distribución de la temperatura $T(r)$. Para tener un mejor entendimiento del contenido de estas ecuaciones daremos una derivación de las ecuaciones (3.1) y (3.2).

Respecto a un sistema de referencia inercial colocado en el centro del Sol, la suposición de que el Sol está en equilibrio hidrostático implica que el campo de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ sea nulo, es decir, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$. La suposición de que el material del Sol se modela como un fluido ideal nos permite utilizar la hidrodinámica Euleriana. Las ecuaciones de la hidrodinámica Euleriana son (véase [13]):

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (3.5)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] = -\nabla P(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}, \quad (3.6)$$

donde $\rho(\mathbf{x}, t)$ es la densidad de masa, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ es el campo de velocidad, $P(\mathbf{x}, t)$ es la presión y \mathbf{g} es la aceleración debida a la gravedad (esta gravedad puede ser la generada por el mismo fluido ó si el fluido esta inmerso en un campo gravitacional que sea mucho mayor que el campo gravitacional generado por él mismo, esta sería la gravedad correspondiente). La ecuación (3.5) es conocida como *ecuación de continuidad* y garantiza la conservación de la masa¹⁰.

¹⁰Si V_0 es un volumen fijo, por definición la masa $M(t)$ al interior de V_0 es:

$$M(t) = \int_{V_0} \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} \quad (3.7)$$

Diferenciando $M(t)$ respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \int_{V_0} \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d^3\mathbf{x} = - \oint_{\partial V_0} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{s} \quad (3.8)$$

en donde llegamos a la última ecuación usando (3.5) y el teorema de la divergencia. La relación (3.8) nos

Debido a que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0$ y en combinación con la simetría esférica, la ecuación (3.5) se reduce a

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho = \rho(r), \quad (3.9)$$

donde $r = |\mathbf{x}|$, mientras la ecuación (3.6) se reduce a:

$$\nabla P(r) = \rho(r)\mathbf{g}, \quad (3.10)$$

la cual expresa el equilibrio mecánico del fluido.

Por otro lado, de la suposición de que el fluido del Sol es autogravitante, es decir, genera su propio campo gravitacional, bajo la teoría de la gravitación Newtoniana tenemos:

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi(r), \quad (3.11)$$

donde $\Phi(r)$ es el potencial gravitacional Newtoniano debido del campo gravitacional al fluido, el cual satisface:

$$\nabla^2\Phi(r) = 4\pi G\rho(r). \quad (3.12)$$

Combinando (3.10) y (3.11) llegamos a:

$$\nabla P(r) = -\rho(r)\nabla\Phi(r). \quad (3.13)$$

Por otro lado, integrando la ecuación (3.12) sobre una esfera de radio r y usando el teorema de la divergencia combinado con la ecuación (3.7), obtenemos:

$$\nabla\Phi(r) = \frac{GM(r)}{r^2},$$

y además por la simetría esférica del sistema, las ecuaciones (3.7) y (3.13) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r), \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2\rho(r). \end{aligned}$$

Por lo tanto, logramos derivar las ecuaciones (3.1) y (3.2). Mientras las ecuaciones (3.3) y (3.4) no serán derivadas aquí (para una derivación véase [12] y [10]).

dice que la única manera de que $M(t)$ cambie es a través del flujo $\rho\mathbf{v}$ del fluido por ∂V_0 , la frontera de V_0 .

El sistema (3.1) - (3.4) ha sido estudiado ampliamente desde 1950, particularmente a través de simulaciones numéricas y se ha obtenido una gran cantidad de información sobre la estructura de las estrellas en secuencia principal y en particular de nuestro Sol. A través de simulaciones numéricas se obtiene la distribución de la temperatura $T(r)$, la densidad $\rho(r)$, la presión $P(r)$, etc. El modelo estándar ampliamente utilizado en la literatura es el modelo de Bahcall y sus colaboradores [5]. Por el momento mencionamos que tal modelo asigna como temperatura central T_c , densidad central ρ_c y presión central P_c los valores [5]:

$$T_c = 1,56 \times 10^7 K, \quad \rho_c = 156 \text{ gr/cm}^3, \quad P_c = 10^{15} \text{ dina/cm}^2, \quad (3.14)$$

y además predice cantidades observables como la masa del Sol

$$M_\odot = 1,99 \times 10^{33} g, \quad (3.15)$$

el radio del Sol

$$R_\odot = 6,96 \times 10^{10} \text{ cm} \quad (3.16)$$

y la luminosidad observada del Sol:

$$L_\odot = 3,86 \times 10^{26} W = 3,86 \times 10^{33} \text{ erg/s}. \quad (3.17)$$

Ahora que tenemos una idea sobre el interior del Sol veamos qué es lo que sucede a nivel microscópico con la finalidad de entender cómo el Sol genera su energía.

3.2. Reacciones termonucleares.

Como vimos en la sección anterior las ecuaciones de la estructura estelar involucran la luminosidad $L(r)$ debida a las reacciones termonucleares que toman lugar en el interior del Sol. En esta sección empezaremos discutiendo la microfísica relevante para entender el mecanismo por medio del cual el Sol produce su energía y por tanto su luminosidad.

Como ya mencionamos en la introducción este mecanismo involucra reacciones nucleares en las que se fusionan cuatro núcleos de Hidrógeno para producir un núcleo de Helio-4. Para tener una idea más completa de las reacciones nucleares primero mencionaremos algunas propiedades de las partículas elementales. Hasta el momento, las partículas conocidas

están divididas en dos clases: leptones y hadrones. Los leptones son partículas fundamentales (no muestran señal de estructura interna) que interactúan a través de interacciones débil y electromagnética, poseen espín $\frac{1}{2}\hbar$, es el grupo más ligero y está conformado por el electrón, el muón, el tauón y sus respectivos neutrinos, antineutrinos y antipartículas.

Los hadrones son partículas compuestas que interactúan a través de la interacción fuerte. Los hadrones se dividen en mesones y bariones que están compuestos de partículas más elementales denominadas *quarks*. Existen seis sabores o tipos de quarks, estos son llamados “arriba”, “abajo”, “extraño”, “encanto”, “cima” y “fondo”, por sus nombres en inglés son representados por u , d , s , c , t y b , respectivamente. Todos los quarks tienen espín $\frac{1}{2}\hbar$, los quarks u , c , y t tienen carga $\frac{2}{3}e$, mientras que los quarks d , s y b tienen carga $-\frac{1}{3}e$. De acuerdo al modelo de los quarks, los mesones se componen de un quark y un antiquark, tiene espín 0 o 1 como la partícula π ; en tanto que los bariones se componen de tres quarks, es el grupo más pesado (con masas mayores o iguales a la masa del protón), tienen espín fraccionario y a este grupo pertenecen el protón y el neutrón.

Para toda reacción nuclear se debe asegurar que al menos se cumplen las siguientes condiciones de conservación:

1. Conservación de la energía y el momento.
2. Conservación de la carga eléctrica total.
3. Conservación del número leptónico total.
4. Conservación del número bariónico total.

La primera condición nos garantiza que no hay destrucción de energía ni creación espontánea de ésta, esto es, la energía involucrada en los procesos nucleares de partículas elementales es la misma antes y después de la reacción, considerando todas las partículas involucradas. La segunda condición expresa un hecho empírico, hasta el momento no hay ninguna evidencia experimental que sugiera que la carga eléctrica no está conservada. En la tercera condición, el número leptónico es el número de leptones menos el número de antileptones, todos los leptones tienen asignado el valor de +1, antileptones -1 y partículas

no leptónicas 0. En la cuarta condición, el número cuántico llamado número bariónico o número de bariones es lo que siempre hemos llamado número atómico.

La manera de ilustrar que estas condiciones se satisfacen es considerando un ejemplo. Desde un sistema de referencia en el que el neutrón esté en reposo consideremos el decaimiento beta, es decir:

$$n \longrightarrow p + e^- + \bar{\nu}, \quad (3.18)$$

este proceso no necesita de energía externa para que se lleve a cabo, muestra como un neutrón n decae en un protón p , un electrón e^- y un antineutrino $\bar{\nu}$. Debido a que las masas en reposo son

$$m_n = 1,6750 \times 10^{-24} gr = \frac{941,07 MeV}{c^2}, \quad m_p = 1,6735 \times 10^{-24} gr = \frac{940,22 MeV}{c^2},$$

$$m_e = 9,1072 \times 10^{-28} gr = \frac{511 keV}{c^2} \text{ y } m_{\bar{\nu}} \simeq 0$$

vemos que:

$$m_n c^2 > m_p c^2 + m_{e^-} c^2,$$

lo cual nos dice que hay aniquilación de masa. Como ya mencionamos en la introducción esta masa aniquilada esta asociada con una cantidad de energía liberada dada por:

$$E_{Liberada} = m_n c^2 - (m_p c^2 + m_{e^-} c^2) = 0,331 MeV,$$

que es distribuida al protón, al electrón y al antineutrino como energía cinética.

Como ya sabemos el neutrón es una partícula sin carga, el protón y el electrón tienen carga con misma magnitud pero de signo opuesto y que el antineutrino no tiene carga, entonces la carga en el proceso está conservada. Por otro lado, el neutrón y el protón son hadrones así que tienen asignado al 0 como número leptónico, mientras el electrón y el antineutrino son un leptón y antileptón respectivamente, así que tienen asignado como número leptónico al 1 y -1 , por lo tanto el número leptónico también está conservado.

3.3. La cadena protón-protón (cadena p-p).

Las simulaciones numéricas de las ecuaciones de la estructura estelar muestran que el núcleo del Sol se encuentra en condiciones extremas en comparación con el ambiente terrestre. Las enormes presiones y temperaturas del interior del Sol ocasionan que el material

constituyente del Sol se encuentre ionizado, o más precisamente, se encuentra en estado de plasma. Para una temperatura como la temperatura central del Sol $T_c = 1,56 \times 10^7 K$ la energía térmica $E_T = k_B T$ es:

$$E_T = k_B T = 1,345 keV \gg 13,6eV \quad (3.19)$$

donde $13,6eV$ es dada en (2.31) y es la energía del estado base del átomo de hidrógeno. Entonces, para tales valores de energía térmica, es justificable considerar que el interior del Sol se encuentre en estado de plasma y ,en este punto, es interesante recordar la descripción que Eddington dio del interior de las estrellas.

Debido a este estado de plasma del interior del Sol los protones ahí dentro se encuentran en constante movimiento. Como ya vimos, la interacción entre dos protones consta de dos partes, una de carácter repulsivo debida al potencial coulombiano:

$$V(r) = \frac{e^2}{r} \quad (3.20)$$

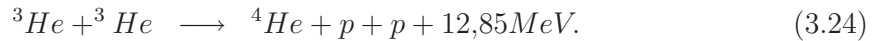
y otra de carácter atractivo debida a la fuerza nuclear. Para que los dos protones se acerquen lo suficiente como para fusionarse deben de penetrar la barrera de potencial coulombiano, cuya altura es:

$$V(R) = \frac{e^2}{R} = 1,0281 MeV, \quad (3.21)$$

donde R es dada en (2.62). La altura de la barrera del potencial es casi mil veces mayor que la energía térmica del interior del Sol. Aún así, esto no implica la ausencia de reacciones nucleares. Es precisamente en este punto donde los principios de la mecánica cuántica juegan un papel importante. Como ya vimos para protones con $E < V(R)$, la probabilidad de que penetren la barrera de potencial es distinta de cero, y esta probabilidad depende fuertemente del factor de Gamow. Mientras mayor sea el factor de Gamow mayor será la probabilidad de que los protones penetren la barrera de potencial. Después de penetrar la barrera de potencial los protones sentirán la fuerza nuclear entre ellos (esto depende fuertemente de la sección eficaz, un término que será definido más adelante).

La cadena p-p es la principal fuente de energía del Sol, es la responsable de generar el 98,5% de la luminosidad observada del Sol. Consta, principalmente, de tres pasos

elementales (para una discusión elemental véase [8] en la página 165):



en donde los números a la derecha de los productos es la energía liberada. En la reacción (3.22) se fusionan dos núcleos de Hidrógeno (dos protones) p para producir un núcleo de deuterio (un protón y un neutrón) 2H , un neutrino ν , y un positrón e^+ . En realidad, debido a la fuerza débil un protón se convierte en un neutrón, pero como vimos en la sección 3.2 tal transformación debe satisfacer conservación de la carga, del número leptónico y número bariónico. Estas leyes de conservación explican los productos del lado derecho de (3.22). El positrón e^+ no dura mucho, en cuanto se encuentra con un electrón ambos se aniquilan y liberan un fotón de alta energía. El neutrino se llevan parte de la energía total que produce la cadena completa.

Por otro lado, para la reacción (3.23) el núcleo de deuterio obtenido en la reacción (3.22), a través de la fuerza débil, captura otro núcleo de Hidrógeno (otro protón) para formar un núcleo de 3He (Helio-3) y liberar otro fotón muy energético.

Para la reacción (3.24) es necesario que se hayan realizado dos veces los pasos anteriores ya que son necesarios dos núcleos de 3He para producir un núcleo de 4He (Helio-4), mucha energía y dos protones libres de nuevo (existen más caminos en que se puede producir 4He pero este proceso es el que en proporción más se produce y el que más contribuye a la cantidad de energía liberada).

Una parte de la energía liberada en el primer paso es llevada por los neutrinos, los cuales una vez que han sido producidos se escapan debido a que interactúan débilmente con la materia. La densidad media del Sol es 1,4 veces la densidad del agua lo que ocasiona que los fotones recorran sólo unos pocos milímetros antes de ser absorbidos por cualquiera de los núcleos atómicos que los rodean, esto provoca que la radiación tarde mucho en abandonar el Sol (alrededor de un millón de años).

Aunque se acepta a la cadena p-p como la responsable de la generación de la luminosidad del Sol (véase [2], [4] y [10]), de estas consideraciones no es obvio cómo usar las

reacciones (3.22)-(3.24) para calcular la luminosidad generada. Para realizar este cálculo, primero debemos estimar el número de reacciones por unidad de tiempo, la probabilidad de que tales reacciones ocurran, la densidad de los protones, la distribución de sus energías, etc. En general, tales cálculos pueden ser complicados y dependen fuertemente de las condiciones físicas del sistema. Afortunadamente, la suposición de que el interior del Sol se encuentre en equilibrio térmico combinada con algunas propiedades de la sección eficaz están de nuestro lado.

3.4. Estructura de la sección eficaz.

Consideremos la cadena p-p como una reacción de dos protones que crean un núcleo de ${}^4\text{He}$, y estudiemos con más detalle tal transformación nuclear. Para tal análisis el concepto de sección eficaz σ es de gran importancia.

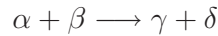
Para introducir el concepto de la sección eficaz σ consideremos un flujo uniforme \mathbf{J}_α de núcleos tipo α definido por

$$\mathbf{J}_\alpha = n_\alpha \mathbf{v}, \quad (3.25)$$

donde n_α es la densidad de núcleos α definida como:

$$n_\alpha := \frac{\#part.\alpha}{L^3} \equiv \frac{\text{número de núcleos } \alpha}{\text{elemento de volumen}}$$

y \mathbf{v} es la velocidad del núcleo incidente α . Imaginemos que éste flujo de partículas está interactuando con un núcleo tipo β n_β que esta en reposo, a través de:



Entonces, la sección eficaz $\sigma(v)$ (con $v = |\mathbf{v}|$) para esta reacción es definida como [10]

$$\sigma(v) = \frac{\text{número de reacciones/ núcleos } \beta / \text{unidad de tiempo}}{|\mathbf{J}_\alpha|} \quad (3.26)$$

y por su definición tiene unidades de área. Aunque para esta definición se supone que el flujo de núcleos α incide sobre los núcleos β que están en reposo, la definición (3.26) para $\sigma(v)$ es la misma si v es la velocidad relativa entre los núcleos α y β .

Para las reacciones entre partículas (o núcleos) cargadas, de importancia astrofísica, es costumbre expresar a σ como una función de la energía cinética E de las partículas interactuando, medida desde el sistema de referencia en el que el centro de masa de las partículas esta en reposo. Para esta situación $\sigma(v)$ se expresa como¹¹:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} G(E). \quad (3.27)$$

Por otro lado, a partir de la ecuación (3.26) podemos definir *la rapidez (o tasa) de la reacción por elemento de volumen* de la siguiente manera:

$$R := \frac{\# \text{ reacciones}}{L^3 T \text{ tiempo}} = n_\alpha \cdot n_\beta \cdot v \cdot \sigma(v), \quad (3.28)$$

donde v es la magnitud de la velocidad relativa y n_β es la densidad de núcleos β .

En el caso particular donde α y β pertenecen a una mezcla de gases diluidos en equilibrio termodinámico a temperatura T , el espectro de velocidades de las partículas obedecerá la *distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann*. Así, para esta situación los núcleos α tiene una distribución de velocidades \mathbf{N}_α dada por:

$$N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2k_B T}}, \quad (3.29)$$

y respectivamente los núcleos β tiene una distribución de velocidades \mathbf{N}_β dada por:

$$N_\beta(\mathbf{v}_\beta) = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\beta v_\beta^2}{2k_B T}}, \quad (3.30)$$

donde: n_α y n_β son la densidad de α y β , m_α y m_β son la masa de α y β , v_α y v_β representan la magnitud de las velocidades de α y β y k_B es la constante de Boltzmann.

Recordemos que de (3.29) y (3.30) se tiene que:

$$N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d^3 v_\alpha = n_\alpha \left(\frac{m_\alpha}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2k_B T}} d^3 v_\alpha, \quad d^3 v_\alpha = dv_{\alpha_x} \cdot dv_{\alpha_y} \cdot dv_{\alpha_z}, \quad (3.31)$$

$$N_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 v_\beta = n_\beta \left(\frac{m_\beta}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m_\beta v_\beta^2}{2k_B T}} d^3 v_\beta, \quad d^3 v_\beta = dv_{\beta_x} \cdot dv_{\beta_y} \cdot dv_{\beta_z}, \quad (3.32)$$

¹¹Más adelante emplearemos tal representación de $\sigma(E)$ para el caso de la interacción entre protones. Para nuestro problema $S(E)$ es *el factor de la sección eficaz*, que representa la parte de la física nuclear que es responsable de la transformación de dos protones en un núcleo de 2H , según la reacción (3.22); y $G(E)$ es el factor de Gamow.

donde (3.31) representa la probabilidad de que un núcleo α tenga velocidad \mathbf{v}_α dentro de un rango d^3v_α y análogamente (3.32) para la partícula β .

Con esto la tasa de la reacción por elemento de volumen será:

$$R = \int \int N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) N_\beta(\mathbf{v}_\beta) v \sigma(v) d^3v_\alpha d^3v_\beta, \quad (3.33)$$

donde el dominio de integración es sobre el espacio de velocidades. Para tener una expresión útil de R , representamos a

$$N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) N_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3v_\alpha d^3v_\beta = n_\alpha n_\beta \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi k_B T)^3} e^{-\frac{m_\alpha v_\alpha^2 + m_\beta v_\beta^2}{2k_B T}} d^3v_\alpha d^3v_\beta \quad (3.34)$$

en términos de las velocidades relativas \mathbf{v} y del centro de masa \mathbf{V} a través de:

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{V} - \frac{m_\alpha}{M} \mathbf{v}, \quad (3.35)$$

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V} + \frac{m_\beta}{M} \mathbf{v}, \quad (3.36)$$

donde $M = m_\alpha + m_\beta$ es la masa total del sistema; obteniendo

$$N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) N_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3v_\alpha d^3v_\beta = n_\alpha n_\beta \frac{(m_\alpha m_\beta)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi k_B T)^3} e^{-\frac{(m_\alpha + m_\beta)V^2}{2k_B T} - \frac{\mu v^2}{2k_B T}} d^3v_\alpha d^3v_\beta, \quad (3.37)$$

donde $\mu = \frac{m_\alpha m_\beta}{M}$ es la masa reducida del sistema. De (3.35) y (3.36) obtenemos:

$$d^3v_\alpha d^3v_\beta = d^3V d^3v$$

Así, (3.37) resulta ser:

$$N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) N_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3v_\alpha d^3v_\beta = n_\alpha n_\beta \left\{ \left(\frac{m_\alpha + m_\beta}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(m_\alpha + m_\beta)V^2}{2k_B T}} d^3V \right\} \left\{ \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} d^3v \right\} \quad (3.38)$$

donde el primer término representa una distribución de la velocidad del centro de masa y el segundo término representa una distribución de las velocidades relativas. Debido a que estas distribuciones están normalizadas, podemos integrar de inmediato sobre d^3V y obtendremos como resultado la unidad, 1. Así, R se ha reducido a:

$$\begin{aligned} R &= \int \int N_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) N_\beta(\mathbf{v}_\beta) v \sigma(v) d^3v_\alpha d^3v_\beta \\ &= n_\alpha n_\beta \int v \sigma(v) \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} d^3v \end{aligned} \quad (3.39)$$

Notemos que d^3v puede ser remplazado por $4\pi v^2 dv$, dando la probabilidad de que la magnitud de la velocidad relativa se encuentre dentro del intervalo dv . Así, obtenemos:

$$4\pi \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v^3 \sigma(v) e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} dv = \langle \sigma(v)v \rangle, \quad (3.40)$$

donde los brackets, $\langle \rangle$, indican el valor medio del producto de la sección eficaz y la distribución de la magnitud de la velocidad relativa. Por lo tanto, llegamos a que la rapidez de la reacción es:

$$R = n_\alpha n_\beta \langle \sigma(v)v \rangle \quad (3.41)$$

Aplicamos tal fórmula para las reacciones que toman lugar en el interior del Sol, en donde n_α y n_β representan la densidad de los protones, obteniendo

$$R(r) = \frac{n_p^2(r)}{2} \langle \sigma(v)v \rangle, \quad (3.42)$$

donde el factor $1/2$ evita el error de contar cada protón dos veces. Aquí, es importante notar que $R=R(r)$, es decir, la tasa R tiene dependencia de la posición debido a que tanto $n_p(r)$ como $T(r)$, que se manifiesta en la definición (3.40), tienen dependencia radial.

La energía cinética en el sistema de coordenadas del centro de masa en el límite no relativista es:

$$E = \frac{1}{2} \mu v^2 \quad (3.43)$$

de donde llegamos a que

$$dE = \mu v dv = \sqrt{2\mu E} dv \quad (3.44)$$

Combinando las ecuaciones (3.27), (3.40), (3.43) y (3.44) podemos escribir a (3.42) de la siguiente manera:

$$R(r) = \frac{n_p^2(r)}{2} \frac{8\pi}{\mu^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2\pi k_B T(r)} \right)^{\frac{3}{2}} I(r), \quad (3.45)$$

donde

$$I(r) = \int_0^\infty S(E) G(E) e^{-\frac{E}{k_B T(r)}} dE \quad (3.46)$$

y el factor de Gamow $G(E)$ es dado por (2.73) y tiene la forma

$$G(E) = e^{-\sqrt{\frac{E_G}{E}}}, \quad (3.47)$$

donde, para la reacción entre protones, $E_G = 492,91 \text{ keV}$ (véase la sección 2.4).

Así, podemos escribir la integral (3.46) como:

$$I(r) = \int_0^\infty S(E) e^{-\frac{\sqrt{E_G}}{\sqrt{E}} - \frac{E}{k_B T(r)}} dE. \quad (3.48)$$

Como ya mencionamos $S(E)$ es la parte de la sección eficaz que depende de la fuerza nuclear. En particular, para las energías involucradas $S(E)$ tiene una débil dependencia de E . Por otro lado, si las distribuciones $T(r)$ y $n_p(r)$ son conocidas, y apelando a la forma de $S(E)$ para altas energías, podemos calcular la luminosidad generada. Multiplicando la tasa $R(r)$ por la energía liberada en la cadena y para una posición fija calculamos $I(r)$, entonces la luminosidad total se obtiene a través de una integración sobre r . Desafortunadamente, ni $T(r)$ ni $n_p(r)$ son analíticamente conocidas y es en éste punto donde la información proveniente de las soluciones numéricas de las ecuaciones de la estructura estelar son útiles.

3.5. Estimación de la luminosidad.

En esta sección damos una estimación de $I(r)$ a través de las siguientes consideraciones.

Para un r fijo, en la expresión (3.48) se tiene el producto de dos exponenciales, una exponencial que desaparece para energías altas, $e^{-\frac{E}{k_B T(r)}}$, y una exponencial que desaparece para energías bajas, $e^{-\frac{b}{\sqrt{E}}}$, donde definimos

$$b := \sqrt{E_G} = 22,2073 \sqrt{\text{keV}}. \quad (3.49)$$

Introducimos la función

$$f(E) := \frac{b}{\sqrt{E}} + \frac{E}{k_B T(r)}, \quad E \in [0, \infty),$$

entonces $I(r)$ toma la forma

$$I(r) = \int_0^\infty S(E) e^{-f(E)} dE. \quad (3.50)$$

De la estructura de $I(r)$ se ve que la mayor contribución de la integral vendrá de los valores de la energía en donde $f(E)$ tienen valor (o valores) mínimo. De la estructura de

$f(E)$ los puntos críticos son determinados a través de:

$$\frac{d}{dE} \left(\frac{b}{\sqrt{E}} + \frac{E}{k_B T(r)} \right)_{E=E_0} = \frac{1}{k_B T(r)} - \frac{b}{2E_0^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

que ocurren en $E = E_0$, con

$$E_0 = \left(\frac{bk_B T(r)}{2} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (3.51)$$

Evaluando $\frac{d^2 f(E)}{dE^2}$ en $E_0 = \left(\frac{bk_B T(r)}{2} \right)^{\frac{2}{3}}$ vemos que $f(E)$ tiene un mínimo local en E_0 , que en realidad es un mínimo global en $[0, \infty)$. Esta propiedad de la integral permite estimar $S(E)$ en E_0 , y tratarla como constante, que es una aproximación estándar. Con esta aproximación, (3.50) toma la forma:

$$I(r) = S(E_0) \int_0^\infty e^{-f(E)} dE \quad (3.52)$$

y, entonces (3.45) se reduce a:

$$R(r) = \frac{n_p^2(r)}{2} \frac{8\pi}{\mu^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2\pi k_B T(r)} \right)^{\frac{3}{2}} S(E_0) \int_0^\infty e^{-f(E)} dE. \quad (3.53)$$

La manera de evaluar la luminosidad generada por la cadena p-p, es dividir el interior del Sol en una sucesión de cascarones esféricos concéntricos. En el interior de dos cascarones, con la ayuda de tablas numéricas, se aproxima a $n_p(r)$ y $T(r)$ como constantes. La luminosidad $L_n \equiv L(r_n, r_{n+1})$ producida en el interior de dos cascarones de radios r_n y r_{n+1} se obtiene multiplicando (3.53) por la energía efectiva $Q \simeq 13,1 \text{ MeV}$, que se libera de la cadena p-p y que es la misma para cada zona, y el correspondiente volumen del interior de los cascarones, es decir:

$$L_n = \frac{4}{3} \pi (r_{n+1}^3 - r_n^3) Q \frac{n_p^2(r)}{2} \frac{8\pi}{\mu^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{2\pi k_B T(r)} \right)^{\frac{3}{2}} S(E_0) \int_0^\infty e^{-f(E)} dE. \quad (3.54)$$

Sumando las correspondientes contribuciones de cada zona se obtiene la luminosidad total. Este método ha sido ampliamente utilizado y los resultados obtenidos están de acuerdo con la luminosidad observada del Sol. Desafortunadamente se requieren laboriosos cálculos numéricos (véase [5]). Debido a que este escrito tiene como finalidad dar una discusión elemental del poder del Sol, en la próxima sección daremos una estimación aproximada de la luminosidad observada, sin apelar a ningún cálculo numérico. Aunque tal estimación es cruda, la luminosidad obtenida es del orden de magnitud esperado.

3.6. Una estimación aproximada de la luminosidad.

El punto de partida para esta estimación es la forma de la integral (3.50). Su forma nos permite dar una estimación del valor de la integral $I(r)$ apelando al *método de Laplace*. Primero expandimos en serie de Taylor la función $S(E)$ alrededor de E_0 y despreciando los términos de orden mayor o igual a $(E - E_0)$. Con esto, el método de Laplace (véase [14]) nos dice que la contribución dominante de $I(r)$ es:

$$I(r) \simeq \left(\frac{\pi}{2f''(E_0)} \right)^{\frac{1}{2}} S(E_0) e^{-f(E_0)}.$$

Entonces $R(r)$ toma la forma:

$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{n_p^2(r)}{2} 8\pi \sqrt{\frac{2}{m_p}} \left(\frac{1}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\pi}{2f''(E_0)} \right)^{\frac{1}{2}} S(E_0) e^{-f(E_0)} \\ &= \alpha_1 n_p^2(r) \sqrt{\frac{2}{m_p}} \left(\frac{b}{k_B^2 T^2(r)} \right)^{1/3} S(E_0) \exp \left(-\alpha_2 \left[\frac{b^2}{k_B T(r)} \right]^{1/3} \right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

donde

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 4^{1/3}}}, \quad \alpha_2 = 2^{1/3} + \frac{1}{2^{2/3}}. \quad (3.56)$$

Aunque $R(r)$ es una aproximación nos proporciona una luminosidad del orden de magnitud esperado. Para ver esto apelamos a las simulaciones numéricas de Bahcall. Como primer paso tomaremos una esfera concéntrica de radio $r = 0,0759R_\odot = 5,2826 \times 10^9 \text{cm}$ y asumimos que en el interior de esta esfera $T(r)$ y $\rho(r)$ son constantes, es decir

$$\begin{aligned} T(r) &= T_c = 1,56 \times 10^7 \text{K}, \quad 0 \leq r \leq 0,0759R_\odot, \\ \rho(r) &= \rho_c = 156 \text{gr/cm}^3, \quad 0 \leq r \leq 0,0759R_\odot. \end{aligned}$$

Las simulaciones numéricas nos dan un valor para la *fracción de masa en forma de protones* \bar{X}_H , esto implica que $\bar{X}_H \rho_c = 0,3604 \rho_c$ representa la densidad de masa de los protones. Para tal valor de $\bar{X}_H \rho_c$ la densidad de protones para tal esfera es

$$n_p = \frac{\bar{X}_H \rho_c}{m_p} = \frac{0,3604 * 156 \text{gr/cm}^3}{1,6735 \times 10^{-24} \text{gr}} = 3,3595 \times 10^{25} / \text{cm}^3.$$

Finalmente $S(E(0)) = 4,321 \times 10^{-46} keV \cdot cm^2$. Para tales valores obtenemos:

$$R = 4,2549 \times 10^7 \frac{1}{s \cdot cm^3}.$$

Al multiplicar R por la energía efectiva $Q = 13,1 MeV = 2,0984 \times 10^{-5} erg$, se tiene:

$$RQ = 892,8925 \frac{erg}{s \cdot cm^3}.$$

Multiplicando la densidad de la luminosidad por el volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = 6,1749 \times 10^{29} cm^3$, obtenemos

$$L_0 := RQV = 5,5135 \times 10^{32} \frac{erg}{s} = 5,5135 \times 10^{25} W,$$

que es la luminosidad generada por la cadena p-p en el interior de una esfera de radio $r = 0,0759 R_{\odot}$. Remarcamos que este valor es cercano al que uno espera. Extendemos tal análisis para otras zonas concéntricas considerando la tabla de la referencia [5]. Y de esta tomamos algunos valores que hemos puesto en la tabla de la figura 3.1.

zona	r_1	r_2	$\bar{\rho}$ (g/cm^3)	\bar{T} ($\times 10^6 K$)	\bar{X}_{1H}	\bar{S} ($\times 10^{-46}$) $keV \cdot cm^2$	\bar{I} ($\times 10^{-6}$) (keV)	Potencia ($\times 10^{25}$) ($Watts$)
1	0	0,0759	155	15,44	0,3604	4,321	3,6884	5,2313
2	0,0759	0,1267	99,5	14,33	0,4568	4,310	2,4616	9,4192
3	0,1267	0,1558	66,6	12,15	0,6067	4,2608	0,9772	4,094
4	0,1558	0,1809	51,6	10,94	0,6623	4,237	0,5301	2,2640
5	0,1809	0,2173	40,3	10,05	0,7251	4,22	0,3191	1,9749
6	0,2173	0,2309	27,5	8,57	0,7187	4,189	0,1190	0,2322
7	0,2309	0,2449	23,9	8,18	0,7236	4,181	0,0884	0,1627
8	0,2449	0,2593	20,6	7,81	0,7251	4,172	0,0655	0,1116
9	0,2593	0,2745	17,5	7,45	0,7269	4,164	0,0481	0,0749
10	0,2745	0,3364	12,1	6,62	0,7295	4,145	0,0217	0,0982
11	0,3364	0,4297	5,5	5,34	0,7317	4,114	0,0048	0,0135
12	0,4297	0,5545	1,8	4,03	0,7322	4,079	0,0001	0,0005

Figura 3.1: Tabla 1. Valores de la luminosidad debidos de la cadena p-p, para distintas zonas concéntricas del interior del Sol.

Así, al sumar los valores de L_n de cada zona obtenemos una luminosidad igual a:

$$L_{\odot} = 1,9749 \times 10^{26} W. \tag{3.57}$$

Este valor corresponde al 62% del valor observado. La anomalía que obtuvimos en nuestro modelo viene primeramente de la forma en cómo calculamos I , a través del método de Laplace, y de la incerteza de los valores de \bar{S} , así consideramos nuestro valor obtenido como una buena aproximación de la luminosidad observada del Sol.

Es interesante mencionar que el hecho de que el Sol se encuentre en un estado de equilibrio termodinámico nos permite calcular la temperatura superficial del Sol a través de la *Ley de Stefan-Boltzmann*, ya que el espectro de radiación es semejante al espectro del cuerpo negro, es decir, se vale la relación:

$$I(T) = \sigma T^4, \tag{3.58}$$

donde I es la cantidad de radiación liberada por el Sol (luminosidad) por unidad de área, es decir, I es la *radiancia* del Sol y $\sigma = 5,42 \times 10^{-8} W/m^2 K^4$ es una constante.

Capítulo 4

Conclusión.

Como vimos en esta tesis, explicar de forma satisfactoria la manera en la que el Sol genera su luminosidad no tiene que ser muy complicada. Aquí dimos una explicación elemental que hizo uso de algunos aspectos elementales de la gravitación, algunos principios de la mecánica estadística clásica, de la mecánica cuántica y la física nuclear.

Desde la antigüedad se han dado ingeniosas explicaciones de este fenómeno pero ninguna con gran éxito. Alrededor de 1920, Eddington sugirió que la manera en la que el Sol genera su luminosidad es debido a la transformación de núcleos de Hidrógeno en núcleos de Helio. Aunque en esa época no se tenía un buen entendimiento de la física involucrada en esas reacciones.

Con el nacimiento de la mecánica cuántica (1925-1930), el descubrimiento del neutrón (1933) y la formulación de la física nuclear fue posible explicar de forma satisfactoria la manera en la que el Sol genera su energía.

En esta tesis, se dejó claro que varios aspectos que no pueden ser explicados por la mecánica clásica, son explicados por la mecánica cuántica. Por ejemplo, con la ecuación de Schrödinger fuimos capaces de mostrar que la probabilidad de que protones de bajas energías (como la energía térmica E_T del Sol) penetren la barrera de potencial coulombiano es distinta de cero y finita, y depende fuertemente del factor de Gamow.

Una vez que los protones penetran la barrera de potencial, la física nuclear entra en juego. La sección eficaz es la probabilidad de que dos protones interactuando a través de la fuerza nuclear débil se conviertan en un deuterio y se libere energía, dando inicio a la

cadena p-p.

Una vez que se acepta que la cadena p-p toma lugar en el interior del Sol y que es la responsable de la energía generada por este, lo siguiente es determinar el número de reacciones por unidad de tiempo y volumen $R(r)$. El considerar al Sol en un estado de equilibrio termodinámico nos facilitó este cálculo, esto nos permitió usar algunos principios de la mecánica estadística clásica, y a través del método de Laplace, obtener una expresión aproximada de $R(r)$. Esta expresión para $R(r)$ depende fuertemente de la temperatura y esta a su vez de la posición.

Para hacer una estimación realista de la luminosidad apelamos al modelo de Bahcall para la distribución de la temperatura $T(r)$, la distribución de la densidad $\rho(r)$ y la fracción de Hidrógeno X_H . Dividimos al Sol en zonas esféricas concéntricas sucesivas de radio mayor r_2 y radio menor r_1 , para cada zona supusimos a $T(r)$, $\rho(r)$ y X_H constantes, y consideramos $n_p(r) = \frac{\bar{X}_H \rho(r)}{m_p}$.

Para una zona, multiplicando $R(r)$ por la energía efectiva Q de la cadena p-p obtuvimos la luminosidad por unidad de volumen, y multiplicando esta por el volumen correspondiente a la zona obtenemos la contribución a la luminosidad de esa zona. Sumando todas las contribuciones obtenemos la luminosidad observada.

Así que el Sol brilla por la enorme cantidad de fotones que libera en sus reacciones termonucleares, y para entender la manera en la que el Sol genera su luminosidad fue necesario el conocimiento de la mecánica cuántica, para explicar el efecto túnel, la física nuclear para explicar cómo a través de la interacción débil dos protones se transforman en un deuterio y para dar una expresión de la sección eficaz. Con esto, la suposición de tener al Sol en un estado de equilibrio termodinámico y apelando a tablas numéricas de las soluciones de las ecuaciones de la estructura estelar nos fue posible dar una expresión aproximada de R , para después estimar la luminosidad.

En la actualidad existen escritos en los que se determina con mucho más detalle la luminosidad observada, logrando hacer estimaciones que están de acuerdo con las observaciones. Pero en esta tesis cumplimos con el objetivo de aislar y explicar la física involucrada en el entendimiento de la manera en la que el Sol genera su luminosidad.

Capítulo 5

Apéndices.

5.1. Apéndice A: Armónicos esféricos.

En este apéndice estudiaremos con más detalle el comportamiento de las soluciones de la ecuación (2.50) que encontramos en la sección 2.2. Tal ecuación tiene la forma:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \lambda Y(\theta, \phi) = 0$$
$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (5.1)$$

donde λ es una constante.

Esta ecuación se puede resolver suponiendo:

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\varphi(\phi) \neq 0,$$

sustituyendo en (5.1) y dividiendo por $Y(\theta, \phi) \neq 0$, obtenemos:

$$\frac{d^2 \varphi(\phi)}{d\phi^2} + \nu \varphi(\phi) = 0, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (5.2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{\sin^2 \theta} \right) \Theta(\theta) = 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (5.3)$$

donde ν es una nueva constante de separación.

La ecuación (5.2) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden lineal y buscamos soluciones en donde φ y $\frac{d\varphi(\phi)}{d\phi}$ sean continuas en el intervalo $[0, 2\pi]$ con $0 \equiv 2\pi$. El

hecho de que estas soluciones estén definidas sobre el círculo S^1 , demanda que $\varphi(\phi)$ sea periódica con periodo 2π . La solución general de (5.2) es:

$$\begin{aligned}\varphi(\phi) &= Ae^{\sqrt{\nu}\phi} + Be^{\sqrt{-\nu}\phi}, \quad \nu \neq 0 \\ \varphi(\phi) &= C\phi + D, \quad \nu = 0\end{aligned}$$

Pero, para que $\varphi(\phi)$ sea periódica es necesario que $\nu = m^2$, donde m es un número entero, así la solución para (5.2) es¹²

$$\varphi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}, \quad \phi \in [0, 2\pi], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.4)$$

Con la restricción $\nu = m^2$ con $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, la ecuación (5.3) a través del cambio de variable $\xi = \cos \theta$ nos lleva a:

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP(\xi)}{d\xi} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) P(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1]. \quad (5.5)$$

Esta es una ecuación singular¹³ en $\xi = \pm 1$. Primero consideremos el caso $m = 0$, para tal elección la ecuación anterior se reduce a *la ecuación de Legendre*:

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dP(\xi)}{d\xi} \right] + \lambda P(\xi) = (1 - \xi^2) \frac{d^2 P(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP(\xi)}{d\xi} + \lambda P(\xi) = 0, \quad \xi \in [-1, 1] \quad (5.6)$$

Aplicamos el método de Frobenius, es decir, buscamos una solución de la forma:

$$P(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k. \quad (5.7)$$

donde a_k , para $k = 1, 2, 3, \dots$, son coeficientes por determinar. Al sustituir en (5.6) se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+2)(k+1)} a_k \quad (5.8)$$

donde, tomando $a_1 = 0$ y $a_0 \neq 0$ obtenemos una solución par y, tomando $a_0 = 0$ y $a_1 \neq 0$ obtenemos una solución impar. Considerando que (5.6) es una ecuación diferencial

¹²Para determinar el factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, la constante de normalización para la solución de la ecuación (5.2), se resuelve $C^2 \int_0^{2\pi} \varphi(\phi) \varphi^*(\phi) d\phi = 1$, donde C es la constante de integración obtenida al resolver la ecuación (5.2).

¹³La ecuación (5.5) es una ecuación singular pues en $\xi = \pm 1$ se anula el orden más alto de la ecuación (5.5), el segundo orden de la ecuación.

ordinaria de segundo orden, esta tiene dos soluciones linealmente independientes. Excepto para valores particulares de λ ambas soluciones son singulares en $\xi = \pm 1$ y no son soluciones físicamente aceptables. Para obtener soluciones físicamente aceptables la serie (5.7) debe terminar. Para que esto ocurra λ debe ser restringida, esto es $\lambda = l(l+1)$ con l un entero positivo o 0. Bajo esta restricción, una de las soluciones es finita y regular en $\xi = \pm 1$, tal solución es una polinomial y se conoce como *Polinomios de Legendre* $P_l(\xi)$, estos tienen la forma:

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.9)$$

y son soluciones regulares en los puntos singulares de la ecuación (5.6).

Ahora, para m no necesariamente igual a cero, proponemos como solución de la ecuación (5.5) a una función de la forma:

$$P(\xi) = (1 - \xi^2)^s q(\xi)$$

al sustituirla en (5.5) encontramos que para obtener soluciones regulares en $\xi = \pm 1$, s debe ser restringida $s = +\frac{|m|}{2}$. Para encontrar $q(\xi)$ derivamos la ecuación de Legendre (5.6) m veces y la comparamos con la ecuación (5.5) después de haber sustituido la solución en serie, obteniendo $q(\xi) = \frac{d^{|m|} P_l(x)}{dx^{|m|}}$. Así, la solución para la ecuación (5.5) tiene la forma:

$$P_l^m(\xi) = N(1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|} P_l(\xi)}{d\xi^{|m|}},$$

donde N es la constante de normalización y por condiciones de normalización

$$P_l^m(\xi) = \frac{(2l+1)(l-|m|)!}{2(l+|m|)!} (1 - \xi^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|} P_l(\xi)}{d\xi^{|m|}}. \quad (5.10)$$

Estas son soluciones físicamente aceptables cuando $\lambda = l(l+1)$ y $|m| \leq l$. Estas soluciones¹⁴ reciben el nombre de *Funciones asociadas de Legendre* y son regulares en los puntos singulares $\xi = \pm 1$ de la ecuación (5.5), la cual es conocida como *ecuación asociada de Legendre*.

Así las soluciones, bajo condiciones de normalización, de la ecuación (5.1) son:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (5.11)$$

¹⁴Para los cálculos siguientes el factor de normalización N , de (5.10), será tomado igual a 1 ya que este es absorbido como constante de normalización por la solución normalizada de (2.50).

que son soluciones regulares (físicamente aceptables) en los puntos singulares cuando

$$\lambda = l(l+1), \quad |m| \leq l \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.12)$$

Este conjunto de soluciones son los armónicos esféricos.

5.2. Apéndice B: Solución de la ecuación radial para el átomo de Hidrógeno.

En este apéndice daremos más detalles acerca de la solución de la ecuación radial para el átomo de Hidrógeno:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} R(r) - \frac{e^2}{r} R(r) = ER(r), \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5.13)$$

Como ya mencionamos, para encontrar una solución de la ecuación (5.13) hacemos el cambio de variable $\rho = \alpha r$, que nos lleva a [9]:

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\frac{\beta}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad 0 \leq \rho < \infty. \quad (5.14)$$

donde la elección particular de $\frac{1}{4}$ es arbitraria pero conveniente para los desarrollos posteriores y

$$\alpha^2 = \frac{8\mu|E|}{\hbar^2}, \quad \beta = \frac{2\mu e^2}{\alpha \hbar^2} = \frac{e^2}{\hbar} \left(\frac{\mu}{2|E|} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.15)$$

Para asegurar un buen comportamiento cuando $\rho \rightarrow \infty$ proponemos como solución de la ecuación (5.14) a:

$$R(\rho) = F(\rho)e^{-\frac{1}{2}\rho}, \quad (5.16)$$

donde $F(\rho)$ es una función que está por especificarse. Sustituyendo (5.16) en (5.14) obtenemos una ecuación para $F(\rho)$:

$$F''(\rho) + \left(\frac{2}{\rho} - 1 \right) F'(\rho) + \left[\frac{\beta - 1}{\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right] F(\rho) = 0 \quad (5.17)$$

donde las primas denotan diferenciación respecto de ρ .

Para estudiar el comportamiento de las soluciones de la ecuación (5.14) debemos tener en mente dos cosas. Primero la solución $R(\rho)$ para $0 \leq \rho < \infty$ debe ser acotada, el

$\lim_{\rho \rightarrow \infty} R(\rho)$ debe decaer lo suficientemente rápido a cero y además $\lim_{\rho \rightarrow 0} R(\rho)$ debe ser finita.

Con esto en mente, proponemos una solución para F en la forma:

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \rho^s (a_0 + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots) \\ &\equiv \rho^s L(\rho), \quad a_0 \neq 0 \quad s \geq 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

la cual es necesariamente finita para $\rho = 0$.

Sustituyendo (5.18) en (5.17) obtenemos:

$$\begin{aligned} \rho^2 L''(\rho) + \rho[2(s+1) - \rho]L'(\rho) + [\rho(\beta - s - 1) + \\ + s(s+1) - l(l+1)]L(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Las soluciones regulares de la ecuación (5.19) para $\rho=0$ (nótese que en $\rho=0$ se tiene una singularidad para (5.19)), deben satisfacer:

$$s(s+1) - l(l+1) = 0. \quad (5.20)$$

Esta ecuación es cuadrática en s , entonces tiene dos raíces $s=l$ y $s=-(l+1)$. La condición que $R(\rho)$ sea finito en $\rho=0$ requiere que elijamos $s=l$. Por tal elección $L(\rho)$ satisface:

$$\rho L''(\rho) + [2(l+1) - \rho]L'(\rho) + (\beta - l - 1)L(\rho) = 0 \quad (5.21)$$

Proponemos como solución una serie de potencias:

$$L(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \rho^j, \quad (5.22)$$

donde las a_j , para $j = 1, 2, 3, \dots$, son constantes por determinar. Al sustituir (5.22) en (5.21) obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$a_{j+1} = \frac{j+l+1-\beta}{(j+1)(j+2l+2)} a_j \quad (5.23)$$

Para que se cumplan las condiciones en $\rho \rightarrow \infty$ la serie debe terminar en algún momento. Para que esto suceda, se debe satisfacer:

$$\beta = n = n' + l + 1,$$

con n' la más alta potencia de ρ en L , $n' \geq 0$ y entero; $l \geq 0$ y entero, por lo tanto $n \geq 1$ y entero¹⁵. n' se conoce como *número cuántico radial* y n como *número cuántico total*. Como ya tenemos $\beta = n$, entonces los *eigenvalores de la energía*, E_n , dados por (5.15) son:

$$E_n = -|E_n| = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}. \quad (5.24)$$

Esta cuantización de la energía viene como una consecuencia de la condición de que $R(\rho)$ sea finito en $\rho=0$. Las soluciones físicamente aceptables de (5.21) con $\beta = n$, satisfacen

$$\rho L''(\rho) + [2(l+1) - \rho]L'(\rho) + (n-l-1)L(\rho) = 0,$$

y pueden ser expresadas en términos de los *Polinomios asociados de Laguerre*:

$$L_{n+l}^{2l+1}(\rho) = \sum_{k=0}^{n-l-1} (-1)^{k+2l+1} \frac{[(n+l)!]^2 \rho^k}{(n-l-1-k)!(2l+1+k)!k!}. \quad (5.25)$$

En resumen, la parte radial de la función de onda es

$$R_{nl}(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\rho} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho),$$

la cual al ser normalizada luce como:

$$R_{nl}(r) = -\sqrt{\left(\frac{2}{nr_1}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho) e^{-\frac{1}{2}\rho} \quad (5.26)$$

$$r_1 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2} \quad \rho = \frac{2}{nr_1} r, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

5.3. Apéndice C: Cuantización de un sistema clásico.

El objetivo de este apéndice es discutir la naturaleza del término $l(l+1)\hbar^2$ que aparece en la ecuación (2.53), y un poco más general definir el operador de momento angular $\hat{\mathbf{L}}$ desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Para ello estudiamos y comparamos la descripción de un sistema clásico y un sistema cuántico. Tal comparación es más clara si

¹⁵Esto se debe a la elección del factor $\frac{1}{4}$ en la ecuación (5.14), al cambio $\rho = \alpha r$ en la ecuación (5.13) y por considerar estados ligados.

tratamos al sistema clásico desde el punto de vista Hamiltoniano. Este requisito demanda que las ecuaciones de movimiento para el sistema clásico provengan de una Hamiltoniana.

Sean (q_i, p_i) las coordenadas generalizadas en la formulación Hamiltoniana del sistema, cuya trayectoria $(q_i(t), p_i(t))$ esta dentro del espacio

$$\Gamma = \{(q_i, p_i) \mid i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad -\infty < q_i < \infty, \quad -\infty < p_i < \infty\},$$

referido como el *espacio fase* asociado a nuestro sistema clásico. Desde el punto de vista de la descripción Hamiltoniana las observables son funciones real-valuadas. Un ejemplo importante de tales observables es la Hamiltoniana H o una observable f arbitraria. Tales observables son definidas como:

$$H : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} : (q_i, p_i) \mapsto H(q_i, p_i), \quad (5.27)$$

$$f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} : (q_i, p_i) \mapsto f(q_i, p_i). \quad (5.28)$$

Recordemos que $H(q(t), p(t))$ genera la evolución del sistema a través de las *ecuaciones de Hamilton* (véase [6]):

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = \frac{\partial H(q_i(t), p_i(t))}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i(t)}{dt} = -\frac{\partial H(q_i(t), p_i(t))}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.29)$$

Para la observable f evaluada sobre una solución de (5.29) obtenemos:

$$\frac{df(q_i(t), p_i(t))}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right). \quad (5.30)$$

Así, sustituyendo (5.29) en la ecuación (5.30), ésta toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{df(q_i(t), p_i(t))}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &\equiv \{f(q_i(t), p_i(t)), H(q_i(t), p_i(t))\}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

A la relación (5.31) la definimos como *el bracket de Poisson* $\{f, H\}$ en función de las coordenadas q_i y momentos generalizados p_i . En general, el bracket de Poisson $\{f, g\}$ de dos observables f y g es definido como:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (5.32)$$

En particular, si identificamos f con las coordenadas q_i y g con los momentos generalizados p_i se tiene:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (5.33)$$

Ahora nos interesamos en la descripción cuántica del mismo sistema. Para tal transición las observables $f(q_i, p_i)$ del sistema en el espacio fase se convierten en operadores $\hat{f}(q_i, p_i)$ actuando sobre el espacio de Hilbert de estados cuánticos del sistema.

La cuantización de este sistema clásico proviene de la hipótesis (para ver una discusión de esto véase [7]):

$$\{f, g\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}], \quad (5.34)$$

donde $[\ , \]$ es el *bracket conmutador*, es una operación entre los operadores de mecánica cuántica asociados a alguna cantidad física y se define como $[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}$.

En la representación de la posición el operador \hat{q}_x actúa multiplicativamente, mientras que el operador \hat{p}_x actúa a través de $-i\hbar(\partial/\partial x)$. Considerando (5.33) y (5.34) es fácil ver que:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad [\hat{x}, \hat{p}_y] = 0 \quad [\hat{x}, \hat{y}] = 0. \quad (5.35)$$

Para definir el operador de momento angular $\hat{\mathbf{L}}$ recordemos que clásicamente $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, así que en mecánica cuántica tomamos (véase [8]):

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \hat{L}_y &= \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{L}_z &= \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

donde $\hat{p}_x = -i\hbar(\partial/\partial x)$ y $\hat{x} = x$, lo mismo para y y z , todo después de usar (5.35). En coordenadas esféricas polares las ecuaciones (5.36) son:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \hat{L}_y &= i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

El operador que representa el cuadrado del momento angular, en coordenadas esféricas polares, viene de (5.37) y es:

$$\hat{\mathbf{L}} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (5.38)$$

La comparación entre las ecuaciones (2.50) y (5.38) muestra que $Y_{lm}(\theta, \phi)$, $l = 0, 1, 2, \dots$ y $-l \leq m \leq l$ entero, son eigenfunciones de $\hat{\mathbf{L}}^2$ con eigenvalor $l(l+1)\hbar^2$, es decir, se satisface:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (5.39)$$

Una manera de ver la importancia del momento angular es considerando el siguiente análisis. Recordemos que para el caso de un potencial con simetría esférica la parte radial $R(r)$ de la ecuación de Schrödinger satisface:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left\{ \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R(r) = 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (5.40)$$

Si definimos $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$, al sustituir obtenemos

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + \left[V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \right] \chi(r) = E \chi(r).$$

En donde, se observa que la ecuación radial es idéntica a la ecuación de movimiento unidimensional de una partícula de masa μ con una energía potencial¹⁶

$$V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} \quad (5.41)$$

El término adicional a la energía potencial adicional, $\frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$, puede ser conectada físicamente con el momento angular de la siguiente forma. Clásicamente, una partícula que tiene una magnitud de momento angular L con dirección perpendicular al plano de su órbita tiene una velocidad angular $\omega = \frac{L}{mr^2}$, donde m la masa de dicha partícula y r es la distancia radial del origen de un sistema de coordenadas a la partícula. Una fuerza interna, $m\omega^2 r = \frac{L^2}{mr^3}$, es requerida para que la partícula siga su camino, la llamada *fuerza centrípeta* que es suministrada por la energía potencial del sistema, más un término que aparece en el movimiento radial, la *energía potencial centrífuga*, la cual es $\frac{L^2}{2mr^2}$. Este tiene

¹⁶La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo para una partícula moviéndose con $V_{efectivo} = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$.

exactamente la forma del término extra en (5.41). Por la analogía la mecánica clásica y la mecánica cuántica interpretamos

$$L = [l(l + 1)]^{\frac{1}{2}} \hbar$$

como el momento angular del estado $\frac{R(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi)$. Más aún, introducimos el operador del momento angular $\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2 \nabla^2$. Y esto gracias a la relación de correspondencia (5.34).

Bibliografía

- [1] M. Harwit. *Astrophysical concepts*. Springer-Verlag New York, (2008).
- [2] J. Bahcall. How the sun shine? http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/articles/fusion/.
- [3] C. M. H. Smith. The power of the sun. (1983). "Physics Lecture".
- [4] H. Bethe. Nobel lecture (1967).
- [5] J. Bahcall y M. H. Pinsonneault. Solar models with helium and heavy-element diffusion (1995). http://prola.aps.org/pdf/RMP/v67/i4/p781_1.
- [6] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, (1950).
- [7] J. Powell and B. Crasemann. *Quantum Mechanics*. Narosa, (1965).
- [8] S. Gasiorowicz. *Quantum Physics*. John Wiley and Sons, Inc., 2da edition, (1995).
- [9] L. I. Schiff. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 3er edition, (1968).
- [10] D. D. Clayton. *Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*. McGraw-Hill, (1968).
- [11] M. A. Trejo Espinosa y T. Zannias. ¿Qué es la aproximación WKB?
- [12] M. Schwarzschild. *Structure and evolution of the stars*. Gannon Distributing Company, (1985).
- [13] L. D. Landau and Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Elsevier Science and Technology Books, (1987).

- [14] A. Erdély. *Asymptotic Expansion*. Dover Publication Inc. New York, (1956).