Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

ALGUNOS INVARIANTES NO PRESERVADOS BAJO ISOMORFISMOS DE MARCAS.

TESIS

Que para obtener el grado de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:

Víctor Nozair García Ríos

Director:

Dr. Luis Valero Elizondo

Octubre 2009, Morelia Michoacán, México

A mi esposa
Rocío Marín Gabriel
y a mi hijo
Gael García Marín
a quienes quiero mucho.

Agradecimientos

Muchas gracias a mi asesor Dr. Luis Valero por ayudar a realizar esta tesis y siempre resolver todas mis dudas, gracias a mis padres Víctor García Parra y Claudia Ríos Alcalá por su infinito apoyo, gracias a mis profesores de fismat, gracias a mis companẽros y amigos de fismat, gracias a mis hermanos y hermanas, y gracias a mi esposa Rocio por estar siempre conmigo.

Resumen

La tabla de marcas de un grupo nos ofrece mucha información acerca del grupo, por ejemplo; el orden del grupo, el número de clases de conjugación de subgrupos, los índices de los subgrupos, los ordenes de los subgrupos, el número de subgrupos, el orden del normalizador, el índice de un subgrupo en su normalizador, los subgrupos normales, los subgrupos maximales, entre otros. Grupos con tablas de marcas isomorfas no necesariamente son isomorfos, por lo que se espera que algunas propiedades no estén determinadas por la tabla de marcas, tal es el caso de los subgrupos abelianos y el centro de un grupo.

El trabajo de la tesis consistió en la construcción del par de grupos de orden mas pequeño con tabla de marcas isomorfas para demostrar que los subgrupos característicos son una de esas propiedades que no están determinados por la tabla de marcas.

Con la ayuda del software GAP se encontraron dos grupos no isomorfos G y Q de orden 96 con tabla de marcas isomorfas. Y resultó que dichos grupos tienen centros de distintos orden, el centro de G es de orden 4, mientras que el centro de Q es de orden 8. Además se obtuvo una lista de los representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G y se observó un subgrupo que es característico y tal que su correspondiente subgrupo del grupo Q no lo es.

Para probar que no era característico se utilizó GAP para que nos mostrara los automorfismos generadores del grupo de automorfismos de Q y a partir de estos determinar el automorfismo que no cumpliera con la definición de subgrupo característico.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La tabla de marcas de un grupo es una matriz que nos da mucha información acerca del grupo. Si G y Q son grupos con tablas de marcas isomorfas, existe una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de G y Q y se conoce como isomorfismo de marcas. Dos subgrupos con tablas de marcas isomorfas no necesariamente son isomorfos, por lo que se espera que ciertas propiedades no sean preservadas bajo un isomorfismo de marcas. Pero, ¿qué tanto nos puede decir la tabla de marcas de un grupo acerca de sus subgrupos? Subgrupos normales, subgrupos maximales, p-subgrupos de Sylow, subgrupos cíclicos, el subgrupo conmutador y el subgrupo de Frattini si son preservados bajo un isomorfismo de marcas ¿Serán los subgrupos característicos preservados por un isomorfismo de marcas? La respuesta a esta pregunta es el resultado principal de este trabajo.

En el capítulo 1 se presentan las definiciones y resultados básicos que se usan en este trabajo. En el capítulo 2 se habla de las tablas de marcas, isomorfismos de marcas y sus propiedades. En el capítulo 3 se construyen dos grupos especiales no isomorfos de orden 96 con tablas de marcas isomorfas. Y en el capítulo 4 se muestra a partir de ellos, que no se pueden determinar subgrupos característicos mediante las tablas de marcas. Al final hay dos apéndices, en el primero se muestran códigos escritos con el software GAP [3], el cuál ayudó a obtener el resultado principal, y en el segundo se anexa un artículo que se obtuvo de la tesis.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

2.1. Grupos y nociones básicas

Definición 1. Sea C un conjunto no vacío. Una operación binaria en C es una función $* : C \times C \longrightarrow C$. Usualmente uno escribe $a*b$ en lugar de $*(a, b)$.

Definición 2. Un *grupo* es un subconjunto no vacío G junto con una operación binaria que satisface las condiciones siguientes:

1. La operación es asociativa, es decir,

   $$a * (b * c) = (a * b) * c$$

   para todos $a, b, c \in G$.

2. Existe un único *elemento neutro* $e \in G$ que satisface

   $$a * e = a = e * a$$

   para todo $a \in G$

3. Para cada elemento $a \in G$ existe otro elemento $b \in G$ único tal que

   $$a * b = e = b * a$$

   Al elemento b se le llama el *inverso* de a, y se le suele denotar por a^{-1}.

Usualmente se escribe G para referirse al grupo $(G, *)$, y gh en lugar de $g * h$.

Definición 3. Dos elementos g y h en un grupo G conmutan si $gh = hg$. Un grupo es abeliano si para todos $g, h \in G$, se tiene que g y h conmutan.

Ejemplo 1. Sea G un conjunto con un sólo elemento. Existe una única operación binaria en G, y G con esa operación binaria es un grupo. A este tipo de grupo se le llama grupo *trivial*.

Ejemplo 2. El conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$, los reales $\mathbb{R}$ y los complejos $\mathbb{C}$ junto con la suma usual forman un grupo.

Ejemplo 3. Sean n un entero positivo y k un campo. El conjunto de matrices invertibles de tamaño $n \times n$ con coeficientes en k, junto con la multiplicación de matrices es un grupo, llamado el grupo general lineal de grado n sobre el campo k; a este grupo se le denota $GL_n(k)$. Si el campo k es el campo finito con q elementos, se suele escribir $GL(n, q)$ en lugar de $GL_n(k)$.

Ejemplo 4. Sea X un conjunto, y sea S_X el conjunto de las funciones biyectivas de X en X. S_X junto con la composición de funciones es un grupo. A los elementos de S_X se les llama permutaciones del conjunto X. Cuando X es el conjunto $1, 2, ..., n$ siendo n un entero positivo, escribimos S_n en lugar de S_X, y lo llamamos el grupo simétrico de grado n.

Ejemplo 5. Sea G un grupo y sea $\sim$ una relación de equivalencia en G. Se dice que $\sim$ preserva la operación del grupo G si para todos $g, h, k, l \in G$ se tiene que si $g \sim h$ y $k \sim l$ entonces $gk \sim hl$. Sea G un grupo y sea $\sim$ una relación de equivalencia en G que preserva la operación del grupo. Sea $G/\sim$ el conjunto de clases de equivalencia de G. Se define una operación binaria $*$ en $G/\sim$ como sigue: Dados $C, D \in G/\sim$, se escoge representantes $g \in C$ y $h \in D$; el producto $C * D$ de las clases de equivalencia es la clase que contiene a gh. Esta operación binaria $*$ en $G/\sim$ está bien definida, y $G/\sim$ con $*$ es un grupo, llamado el grupo cociente de G módulo la relación de equivalencia $\sim$. Un elemento C de $G/\sim$ se suele denotar $\overline{g}$, donde g es un elemento de C, llamado un representante de C.

Ejemplo 6. Sean G y H grupos. El producto directo externo de G y H, denotado $G \times H$, es el conjunto de pares ordenados (g, h), donde $g \in G$, $h \in H$, con la operación binaria $(g, h)(k, l) = (gk, hl)$. El elemento $(1, 1)$ es el neutro y el inverso de $(h, k) \in G \times H$ es $(h^{-1}, k^{-1}) \in G \times H$, además la operación es claramente asociativa por lo que el producto directo externo forma un grupo.

Definición 4. El orden de un grupo G, denotado $|G|$, es el número de elementos de G. Sea $g \in G$, si existe un entero positivo m tal que $g^m = 1$, se dice que el orden del elemento g es n donde n es el menor entero positivo tal que $g^n = 1$.

Ejemplo 7. El grupo aditivo $(R, +)$ de los numeros reales es un grupo infinito. El grupo aditivo de los enteros módulo n es un grupo finito de orden n.

Definición 5. Un subconjunto no vacío S de un grupo G es un subgrupo de G si para todos $g, h \in S$ se tiene que g^{-1} y gh están en S. Si S es un subgrupo de G, lo denotamos S $\leq$ G.

Ejemplo 8. Sea G un grupo. $\{1\}$ es un subgrupo de G, llamado el subgrupo trivial de G, y denotado a veces 1 en vez de $\{1\}$.

Ejemplo 9. Si $(R, +)$ es el grupo aditivo de los números reales, entonces Q es un subgrupo. Pues la suma de racionales es racional, el $0 \in R$ es racional y si $a \in Q$ entonces $-a \in Q$.
Similarmente, $Z \leq Q$ es un subgrupo del grupo aditivo de Q.

Definición 6. Sea G un grupo. El centro de G, denotado $Z(G)$, es el conjunto de todos los $g \in G$ que conmutan con todos los elementos de G, es decir, $Z(G) = \{g \in G : gx = xg \text{ para todo } x \in G\}$.

El centro de G es un subgrupo de G, ya que, si $g, h \in G$ entonces $(gh)x = g(hx) = g(xh) = (gx)h = (xg)h = x(gh)$ por lo que $gh \in Z(G)$. El neutro claramente está en $Z(G)$ y por último, sea $g \in Z(G)$ entonces $gx = xg$ para todo $x \in Z(G)$ por lo tanto $x = g^{-1}xg$ si y solo si $xg^{-1} = g^{-1}x$ por lo que $g^{-1} \in Z(G)$.

Definición 7. Sea G un grupo y sea $g \in G$. Un conjugado de $g \in G$ es un elemento de la forma hgh^{-1}, donde $h \in G$. Se denota hgh^{-1} por ${}^hg$. La relación definida por $x \sim y$ si y sólo si x e y son conjugados es claramente de equivalencia, de manera que G queda partido en clases, llamadas clases de conjugación.

Sea S un subgrupo de un grupo G, y sea $g \in G$. El conjunto gSg^{-1} definido como $\{ghg^{-1} | h \in S\}$ es llamado el conjugado de S por g, y se denota ${}^gS$.

El conjugado de un subgrupo S también es un subgrupo de G. Pues si tenemos cualesquiera dos elementos $gsg^{-1}, gs'g^{-1} \in gSg^{-1}$, entonces $(gsg^{-1})(gs'g^{-1}) = g(ss')g^{-1} \in gSg^{-1}$. Y además $(gsg^{-1})^{-1} = gs^{-1}g^{-1} \in gSg^{-1}$. Claramente $|S| = |{}^gS|$.

Definición 8. Sean $(G, *)$ y $(H, \bullet)$ grupos. Un *homomorfismo* $\varphi : G \longrightarrow H$ es una función tal que $\varphi(g * h) = \varphi(g) \bullet \varphi(h)$ para todo $g, h \in G$. Un *isomorfismo* es un homomorfismo biyectivo. Un *automorfismo* es un isomorfismo de un grupo en sí mismo.

Ejemplo 10. Sean G y H grupos. La función $\varphi : G \longrightarrow H$ dada por $\varphi(g) = 1_H$ para todo $g \in G$ es un isomorfismo (donde 1_H denota al elemento identidad de H). Este homomorfismo se llama el *homomorfismo trivial* de G en H.

Ejemplo 11. Sea G un grupo. La función identidad de G, es decir, $id_G : G \longrightarrow G$ dada por $id_G(g) = g$ para toda $g \in G$, es un automorfismo del grupo G.

Ejemplo 12. Sean G un grupo y $g \in G$. Definamos la función $\zeta_g : G \longrightarrow G$ por $\zeta_g(h) = ghg^{-1}$ para todo $h \in G$. ζ_g es un automorfismo de G, ya que $\zeta_g(hh') = g(hh')g^{-1} = gh(g^{-1}g)h'g^{-1} = ghg^{-1}gh'g^{-1} = \zeta_g(h)\zeta_g(h')$. Este es llamado un automorfismo interno.

Sea G un grupo. El conjunto de los automorfismos de G con el producto dado por la composición de funciones es un grupo. El 1 es la función identidad de G. La composición de automorfismos es un automorfismo, pues composición de funciones biyectivas es biyectiva y composición de homomorfismos es un homomorfismo. Y todo automorfismo por ser biyectivo tiene un inverso, y es homorfismo. Este grupo se llama el grupo de automorfismos de G y se denota $\mathrm{Aut}(G)$.

Si G es un grupo y $g \in G$ es cualquier elemento, el conjunto $\langle g \rangle = \{g^n : n \in Z\}$ es un subgrupo de G. Por definición $g^0 = 1$ y asi $1 \in \langle g \rangle$. Si $g^n, g^m \in \langle g \rangle$, entonces $g^n g^m = g^{n+m} \in \langle g \rangle$. Y si $g^n \in \langle g \rangle$ entonces $g^{-n} \in \langle g \rangle$ satisface que $g^n g^{-n} = g^0 = 1$ por lo que el inverso de g^n es g^{-n}.

Definición 9. Un grupo G se dice que es un *grupo cíclico* si existe un elemento $g \in G$ tal que
$$G = \langle g \rangle$$
Al elemento g se le llama un *generador* de G.

Ejemplo 13. El grupo aditivo de los enteros Z es cíclico, generado por el 1.

Definición 10. Sea S un subgrupo de un grupo G. Una *clase lateral izquierda* de S en G es un subconjunto de la forma gS, con $g \in G$. Decimos que g es un representante de gS.

Dos clases laterales izquierdas que no son disjuntas coinciden. Ya que, si $z \in xH$ y $z \in yH$, entonces $z = xh_1 = yh_2$. Luego $y = xh_1h_2^{-1}$ y $yh = xh_1h_2^{-1}h = xh'$ de donde $yH \subseteq xH$. Analogamente $xh = yh_2h_1^{-1}h = yh''$ luego $xH \subseteq yH$.

Las clases laterales izquierdas gS tienen el mismo orden que S, ya que para una clase lateral izquierda gS definamos la función $f_g : gS \longrightarrow S$ dada por $f_g(gs) = s$. Claramente f_g es inyectiva ya que si $f_g(gs) = f_g(gs')$, entonces $s = s'$ y por lo tanto $gs = gs'$. Es suprayectiva ya que $s \in S$ proviene del elemento $gs \in gS$. Se sigue que f_g es biyectiva y por lo tanto $|gS| = |S|$.

Definición 11. Sean H y K grupos, sea $\beta : K \longrightarrow Aut(H)$ un homomorfismo de grupos. Escribamos $\beta_k(h)$ en lugar de $\beta(k)\big(h\big)$. Que $\beta(k)$ sea homomorfismo de grupos significa que:

$$\beta_k(hh') = \beta_k(h)\beta_k(h') \text{ y } \beta_k(1_H) = 1_H \qquad \forall\ k \in K \text{ y } h, h' \in H$$

y que β sea homomorfismo de grupos significa:

$$\beta_{kk'}(h) = \beta_k\big(\beta_{k'}(h)\big) \text{ y } \beta_1(h) = Id_H(h) = h \qquad \forall\ k, k' \in K \text{ y } h \in H$$

El producto cartesiano $H \times K$ con la operación

$$(h,k) \cdot (h',k') = \big(h\beta_k(h'), kk'\big)$$

es un grupo con neutro $(1,1)$ e inverso dado por $(h,k)^{-1} = (\beta_{k^{-1}}(h^{-1}), k^{-1})$. Este grupo es llamado el *producto semidirecto* de H y K asociado a β y se denota $H \rtimes_\beta K$.

Veamos que es asociativo:

$$\begin{aligned}
\big((h,k)(h',k')\big)(h'',k'') &= \big((h\beta_k(h'), kk')\big)(h'',k'') \\
&= \big(h\beta_k(h')\beta_{kk'}(h''), kk'k''\big) \\
&= \big(h\beta_k(h')\beta_k(\beta_{k'}(h'')), kk'k''\big)
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(h,k)\big((h',k')(h'',k'')\big) &= (h,k)\big(h'\beta_{k'}(h''),k'k''\big)\\ &= \big(h\beta_k(h'\beta_{k'}(h'')),kk'k''\big)\\ &= \big(h\beta_k(h')\beta_k(\beta_{k'}(h'')),kk'k''\big)\end{aligned}$$

Ahora veamos que $(1,1)$ es el elemento neutro:

$$(1,1)(h,k) = (1\beta_1(h),1k) = (1h,1k) = (h,k)$$

y

$$(h,k)(1,1) = (h\beta_k(1),k1) = (h1,k1) = (h,k)$$

Por último veamos que $(\beta_{k^{-1}}(h^{-1}),k^{-1})$ es el inverso.

$$\begin{aligned}(h,k)(\beta_{k^{-1}}(h^{-1}),k^{-1}) &= \big(h\beta_k\big(\beta_{k^{-1}}(h^{-1})\big),kk^{-1}\big)\\ &= \big(h\beta_{kk^{-1}}(h^{-1}),1\big)\\ &= \big(h\beta_1(h^{-1}),1\big)\\ &= (hh^{-1},1)\\ &= (1,1)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(\beta_{k^{-1}}(h^{-1}),k^{-1})(h,k) &= \big(\beta_{k^{-1}}(h^{-1})\beta_{k^{-1}}\big(h\big),k^{-1}k\big)\\ &= \big(\beta_{k^{-1}}(h^{-1}h),1\big)\\ &= \big(\beta_{k_1}(1),1\big)\\ &= (1,1)\end{aligned}$$

Teorema 1. *(Lagrange). Sea G un grupo finito de orden n y sea H subgrupo de G. Entonces, el orden de H divide al orden de G.*

Si G es un grupo y H es un subgrupo, al número de clases laterales izquierdas de H en G se le llama el índice de H en G y se denota $[G:H]$.

Si G es un grupo finito y $g \in G$ es cualquier elemento, entonces el orden de g divide al orden de G. Ya que el orden de un elemento g es el orden del subgrupo cíclico $\langle g\rangle$ generado por g y por teorema de Lagrange el orden del subgrupo $\langle g\rangle$ divide al orden de G.

Definición 12. Sean G un grupo y N un subgrupo de G. Decimos que N es un subgrupo normal de G (o también se dice que N es normal en G), denotado $N \trianglelefteq G$, si $gNg^{-1} = N$ para toda $g \in G$. La notación $N \triangleleft G$ significa que N es un subgrupo normal de G distinto de G.

Ejemplo 14. Si G es cualquier grupo, el subgrupo trivial $\{1\} \leq G$ es normal, así como lo es el subgrupo total $G \leq G$.

Ejemplo 15. El centro de G denotado $Z(G)$ es un subgrupo normal de G, pues tenemos que $gZ(G) = Z(G)g$ para todo $g \in G$ entonces $gZ(G)g^{-1} = Z(G)$ para todo $g \in G$

Teorema 2. *(Teorema de la correspondencia). Si N es un subgrupo normal de G, entonces existe una biyección entre la familia de subgrupos de G/N y los subgrupos $H \leq G$ tal que $N \leq H$. La correspondencia es*

$$H \leq G \text{ tal que } N \leq H \longrightarrow H/N \leq G/N$$

Definición 13. Sean G un grupo y S un subgrupo de G. El normalizador de S en G, denotado $N_G(S)$, es el conjunto $\{g \in G | gSg^{-1} = S\}$. Se tiene también $S \trianglelefteq N_G(S) \leq G$.

Teorema 3. *El numero de conjugados de S respecto a G es el índice en G del normalizador de S en G $[G : N_G(S)]$.*

Definición 14. Sea G un grupo. Un G-conjunto es un conjunto X en el que el grupo G actúa, es decir, existe una función $\circ : G \times X \longrightarrow X$ (llamada la acción de G en X), para la cuál usamos la notación gx en lugar de $\circ(g, x)$, y que cumple lo siguiente:

1. Para todo x en X se tiene que $1x = x$, donde 1 denota la identidad del grupo G;

2. Para todos $g, h \in G$ y para todo $x \in X$, se tiene que $(gh)x = g(hx)$.

Ejemplo 16. Sea G un grupo y sea X un conjunto con un único elemento. Existe una única manera de definir una acción de G en X. A X se le llama un *G-conjunto trivial.*

Ejemplo 17. Sea G un grupo. G mismo es un G-conjunto con acción dada por la multiplicación de G, es decir, para cualquier $g \in G$ y cualquier $x \in G$ definimos $g \circ x = gx$. A G con esta acción se le llama el *G-conjunto regular*.

Ejemplo 18. Sea G un grupo. G es un G-conjunto con acción dada por la conjugación de G, es decir, para cualquier $g \in G$ y cualquier $x \in G$ definimos $g \circ x = gxg^{-1}$.

Ejemplo 19. Sean G un grupo, S un subgrupo de G (no necesariamente normal) y $X = G/S = \{gS : g \in G\}$ el conjunto de clases laterales izquierdas de S en G. X es un G-conjunto con acción dada por traslación izquierda, es decir, para cualquier $g \in G$ y cualquier $hS \in X$, definimos $g \circ (hS) = (gh)S$.

Definición 15. Sean G un grupo, X un G-conjunto y $x \in X$. Decimos que x es un punto fijo bajo la acción de G si $gx = x$ para toda $g \in G$. El conjunto de todos los puntos fijos de X bajo G se denota X^G.

Capítulo 3

Tabla de Marcas

3.1. Tabla de Marcas

Definición 16. Sea G un grupo finito. Sean $\{1\} = H_1, H_2, ..., H_n = G$ representantes de las clases de conjugación de subgrupos de G. La tabla de marcas de G es la matriz de n por n cuya entrada (i, j) es el número de puntos fijos bajo H_i del G-conjunto G/H_j, denotado $\#(G/H_j)^{H_i}$.

Proposición 1. *$\#(G/K)^H = \frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H, K) = \frac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H, K)$, con $\alpha(H, K)$ el número de subgrupos de G conjugados con K y que contienen a H, y $\beta(H, K)$ es el número de subgrupos de G conjugados a H y que están contenidos en K.*

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\#(G/K)^H &= \#\{gK \in G/K : h(gK) = gK \quad \forall h \in H\} \\
&= \frac{\#\{g \in G : h(gK) = gK \quad \forall h \in H\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\{g \in G : (g^{-1}hg)K = K \quad \forall h \in H\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\{g \in G : (g^{-1}hg) \in K \quad \forall h \in H\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\{g \in G : (g^{-1}Hg) \leq K\}}{|K|} \\
&= \frac{\#\{E \leq G : E =_G H y E \leq K\}|N_G(H)|}{|K|}
\end{aligned}
$$

$$= \beta(H,K)\frac{|N_G(H)|}{|K|}$$

Donde $E =_G H$ significa que E y H son conjugados en G y $N_G(H)$ denota el normalizador de H en G.
De manera análoga se demuestra que:

$$\begin{aligned}
\#(G/K)^H =& \#\{gK \in G/K : h(gK) = gK \quad \forall h \in H\} \\
=& \frac{\#\{g \in G : h(gK) = gK \quad \forall h \in H\}}{|K|} \\
=& \frac{\#\{g \in G : (g^{-1}hg)K = K \quad \forall h \in H\}}{|K|} \\
=& \frac{\#\{g \in G : (g^{-1}hg) \in K \quad \forall h \in H\}}{|K|} \\
=& \frac{\#\{g \in G : (g^{-1}Hg) \leq K\}}{|K|} \\
=& \frac{\#\{g \in G : H \leq gKg^{-1}\}}{|K|} \\
=& \frac{\#\{E \leq G : E =_G K y H \leq E\}|N_G(K)|}{|K|} \\
=& \alpha(H,K)\frac{|N_G(K)|}{|K|}
\end{aligned}$$

Donde $E =_G K$ significa que E y K son conjugados en G y $N_G(K)$ denota el normalizador de K en G.

□

Ejemplo 20. Sea $G = C_p$ un grupo cíclico de orden p primo. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = G$, por lo que la tabla de marcas de G es:

$$\begin{pmatrix} p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 21. Sea $G = C_4$ un grupo cíclico de orden 4. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = G$, por lo que la tabla de marcas de G es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 22. Sea $G = C_6$ un grupo cíclico de orden 6. Los únicos subgrupos de G son $H_1 = 1$, $H_2 = C_2$, $H_3 = C_3$, $H_4 = G$, por lo que la tabla de marcas de G es:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 23. Sea $G = S_3$ el grupo simétrico de orden 6. Los únicos subgrupos hasta conjugación de G son $H_1 = 1$, $H_2 = \langle (1,2) \rangle$, $H_3 = \langle (1,2,3) \rangle$, $H_4 = G$, por lo que la tabla de marcas de G es:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.2. Propiedades de las tabla de marcas

Proposición 2. *La tabla de marcas M del grupo G satisface:*

1. *M es cuadrada de tamaño $n \times n$ donde n es el número de clases de conjugación de subgrupos de G.*

2. *M tiene coordenadas enteras.*

3. *La entrada (1,1) es el orden de G y es la mayor de las entradas de M.*

4. *Las entradas de la última columna son 1.*

5. *La primera fila de M corresponde a los índices de los subgrupos de G.*

6. *M es triangular superior.*

7. $|H_j| = \frac{m_{1,1}}{m_{1,j}}$.

8. *La entrada* $(i, i) = |\frac{N_G(H_i)}{H_i}|$ *para toda* $1 \leq i \leq n$.

9. $|N_G(H_i)| = \frac{m_{1,1}m_{i,i}}{m_{1,i}}$.

10. $\alpha(H_i, H_j) = \frac{m_{i,j}}{m_{j,j}}$.

11. $\beta(H_i, H_j) = \frac{m_{i,j}m_{1,i}}{m_{i,i}m_{1,j}}$.

Demostración. .

1. Por construcción M es cuadrada y n es el número de clases de conjugación de subgrupos de G.

2. Las entradas (i, j) de M son el número de puntos fijos del G-conjunto $\frac{G}{H_j}$, bajo la acción de H_i lo cual es un entero.

3. Como $N_G(1_G) = G$ y $\beta(1_G, 1_G) = 1$ entonces $m_{1,1} = \frac{|N_G(1_G)|\beta(1_G,1_G)}{1} = |G|$. $m_{i,j} = \#(G/H_j)^{H_i}$ son el número de puntos fijos del G-conjunto $\frac{G}{H_j}$, bajo la acción de H_i por lo que se tiene que $m_{i,j} \leq |\frac{G}{H_j}| \leq |G|$. Así, $m_{1,1} > m_{i,j}$ para toda $i, j \neq 1$.

4. Como $N_G(G) = G$ y $\alpha(H_i, G) = 1$ entonces $m_{i,n} = \frac{|N_G(G)|\alpha(H_i,G)}{|G|} = \frac{|G|}{|G|} = 1$ para toda $1 < i < n$.

5. $m_{1,j} = \frac{|N_G(1_G)|\beta(1_G,H_j)}{|H_j|} = \frac{|G|}{|H_j|}$ para toda $1 \leq j \leq n$. Como casos particulares $m_{1,1} = |G|$ y $m_{1,n} = 1$.

6. Si $i > j$ tenemos $\frac{|N_G(H_i)|\beta(H_i,H_j)}{|H_j|} = 0$ pues si $|H_i| > |H_j|$ entonces $\beta(H_i, H_j) = 0$ y si $|H_i| = |H_j|$ corresponden a clases de conjugación diferentes y $\beta(H_i, H_j) = 0$.

7. $\frac{m_{1,1}}{m_{1,j}} = \dfrac{|G|}{\frac{|G|}{|H_j|}} = |H_j|$.

8. $\alpha(H_i, H_i) = 1$, por lo tanto $m_{i,i} = \frac{|N_G(H_i)|\alpha(H_i,H_i)}{|H_i|} = \frac{|N_G(H_i)|}{|H_i|}$.

9. $\frac{m_{1,1}m_{i,i}}{m_{1,i}} = \dfrac{|G|}{\frac{|G|}{|H_i|}}|\dfrac{N_G(H_i)}{H_i}| = |N_G(H_i)|$.

10. $\frac{m_{i,j}}{m_{j,j}} = \dfrac{\frac{|N_G(H_j)|\alpha(H_i,H_j)}{|H_j|}}{\frac{|N_G(H_j)|}{|H_j|}} = \alpha(H_i, H_j)$.

11. $\frac{m_{i,j}m_{1,i}}{m_{i,i}m_{1,j}} = \dfrac{\frac{|N_G(H_i)|\beta(H_i,H_j)}{|H_j|}\frac{|G|}{|H_i|}}{\frac{|N_G(H_i)|}{|H_i|}\frac{|G|}{|H_j|}} = \beta(H_i, H_j)$

□

3.3. Isomorfismo de Marcas

Definición 17. Sea G y Q grupos finitos. Sea $\mathfrak{C}(G)$ la familia de las clases de conjugación de subgrupos de G y $\mathfrak{C}(Q)$ la familia de las clases de conjugación de subgrupos de Q. Sea ψ una función que va de $\mathfrak{C}(G)$ a $\mathfrak{C}(Q)$. Dado un subgrupo H de G, sea H' cualquier representante de $\psi([H])$, donde $[H]$ es la clase de conjugación de H. Decimos que ψ es un isomorfismo de las tablas de marcas de G y Q si ψ es biyectiva y $\#(Q/K')^{H'} = \#(G/K)^H$ para todos los subgrupos H, K de G.

Proposición 3. *Sean G, Q grupos finitos con tablas de marcas isomorfas. Sean $H, K \leq G$, H', K' representantes en la respectiva clase de conjugación bajo ψ, el isomorfismo de tabla de marcas. Entonces:*

1. $|G| = |Q|$

2. $(1_G)' = 1_Q$.

3. $G' = Q$.

4. $|K| = |K'|$.

5. $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$

6. $\alpha(H,K) = \alpha(H',K')$.

7. $\beta(H,K) = \beta(H',K')$.

Demostración. .

1. $|G| = |Q|$ ya que cada uno es el mayor elemento en su respectiva tabla de marcas.

2. $\#(Q/1'_G)^{1'_G} = \#(G/1_G)^{1_G} = |G| = |Q| = \#(G/1_Q)^{1_Q}$. Así , $1'_G = 1_Q$.

3. Sea $K = G$ entonces $1 = \frac{|N_G(G)|\alpha(H,G)}{|G|} = \frac{|N_G(K')|\alpha(H',K')}{|K'|}$. Por lo tanto $\alpha(H',K') = \frac{|K'|}{|N_Q(K')|} \neq 0$ para toda $H' \leq Q$ por lo que $K' = Q$.

4. Si $H = 1_G$ entonces $H' = 1_Q$. Por lo tanto $\frac{|Q|}{|K'|} = \frac{|N_Q(1_Q)|\beta(1_Q,K')}{|K'|} = \frac{|N_G(1_G)|\beta(1_G,K)}{|K|} = \frac{|G|}{|K|}$. Como $|Q| = |G|$, entonces $|K'| = |K|$.

5. $|\frac{N_G(H)}{H}| = \#(G/H)^H = \#(Q/H')^{H'} = |\frac{N_Q(H')}{H'}|$. Como $|H| = |H'|$ entonces $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$.

6. $\frac{|N_G(H)|}{|K|}\beta(H,K) = \frac{|N_Q(H')|}{|K'|}\beta(H',K')$. Como $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$ y $|K| = |K'|$ entonces $\beta(H,K) = \beta(H',K')$

7. $\frac{|N_G(K)|}{|K|}\alpha(H,K) = \frac{|N_Q(K')|}{|K'|}\alpha(H',K')$. Entonces $\beta(H,K) = \beta(H',K')$.

□

Capítulo 4

Grupos no isomorfos con tablas de marcas isomorfas

En general dos grupos finitos con tablas de marcas isomorfas no necesariamente tienen que ser isomorfos (como lo demostró Thevenaz en [5]), pero se esperaría que ciertas propiedades permanecieran invariantes. A continuación se construyen dos grupos no isomorfos de orden 96 con tablas de marcas isomorfas. Este es el ejemplo más pequeño y fue encontrado computacionalmente [7], antes de este el ejemplo era el par de grupos de orden 5×11^2 encontrado por Thévenaz.

Notación 1. De aquí , en adelante la siguiente notación se utilizará a menos que se indique lo contrario. S_3 denotará al grupo simétrico de orden 6, y λ denotará un elemento de S_3. C_8 será el grupo cíclico de orden 8 generado por x y C_2 será el grupo cíclico de orden 2 generado por y.

Lema 1. *Sea S_3 el grupo simétrico de orden 6. Sea C_2 el grupo cíclico de orden 2. La función $\varrho : S_3 \longrightarrow C_2$ dada por: $\varrho((1)) = 1$, $\varrho((1,2,3)) = 1$, $\varrho((1,3,2)) = 1$, $\varrho((1,2)) = y$, $\varrho((1,3)) = y$ y $\varrho((2,3)) = y$ es un homomorfismo de grupos. (Observación: éste es el mapeo cociente $S_3 \longrightarrow \frac{S_3}{A_3} \cong C_2$).*

Demostración. Analizando todos los casos:

$$\varrho((1) * \lambda) = \varrho(\lambda) = 1 * \varrho(\lambda) = \varrho((1)) * \varrho(\lambda)$$

.

$$\varrho((1,2) * (1,2,3)) = \varrho((2,3)) = y = y * 1 = \varrho((1,2)) * \varrho((1,2,3))$$

$$\varrho((1,2,3)*(1,2)) = \varrho((1,3)) = y = 1*y = \varrho((1,2,3))*\varrho((1,2))$$

similarmente con cualquier producto de una transposición y un 3-ciclo.

$$\varrho((1,2)*(1,3)) = \varrho((1,3,2)) = 1 = y^2 = y*y = \varrho((1,2))*\varrho((1,3))$$

similarmente con cualquier par de transposiciones disjuntas. Si λ es una transposición tenemos:

$$\varrho(\lambda*\lambda) = \varrho(\lambda^2) = \varrho((1)) = 1 = y^2 = y*y = \varrho(\lambda)*\varrho(\lambda)$$

y por último:

$$\varrho((1,2,3)*(1,2,3)) = \varrho((1,3,2)) = 1 = 1*1 = \varrho((1,2,3))*\varrho((1,2,3))$$

$$\varrho((1,2,3)*(1,3,2)) = \varrho((1)) = 1 = 1*1 = \varrho((1,2,3))*\varrho((1,3,2))$$

análogamente con cualquier par de 3-ciclos.

□

Lema 2. *Sea C_2 el grupo cíclico de orden 2 y C_8 el grupo cíclico de orden 8. La función $\chi : C_2 \longrightarrow C_8$ dada por:*

$$\chi(1) = 1$$

y

$$\chi(y) = x^4$$

es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Analizando todos los casos:

$$\chi(1*1) = \chi(1) = 1 = 1*1 = \chi(1)*\chi(1)$$

$$\chi(1*y) = \chi(y) = x^4 = 1*x^4 = \chi(1)*\chi(y)$$

y

$$\chi(y*y) = \chi(y^2) = \chi(1) = 1 = x^8 = x^4*x^4 = \chi(y)*\chi(y).$$

□

Lema 3. *Sea W el producto directo $S_3 \times C_8$ y sea $\delta : S_3 \longrightarrow C_8$ la composición $\chi \circ \varrho$, donde χ y ϱ son las funciones definidas anteriormente. La función $\alpha : W \longrightarrow W$ dada por:*

$$\alpha(\lambda, x^i) = (\lambda, x^i\delta(\lambda))$$

es un autormorfismo y es de orden 2, es decir, $\alpha^2(\lambda, x^i) = (\lambda, x^i)$.

Demostración. Sea $(\lambda, x^i), (\mu, x^a) \in W$ con $i, a \in 0, 1, ..., 7$. Nótese que δ es un homomorfismo ya que es la composición de dos homomorfismos. Además como $\delta(\lambda) = 1$ o bien $\delta(\lambda) = x^4$ entonces $\delta(\lambda)\delta(\lambda) = 1 * 1 = 1$ ó bien $\delta(\lambda)\delta(\lambda) = x^4 * x^4 = x^8 = 1$. Por lo tanto, $\delta(\lambda)^2 = \delta(\lambda)\delta(\lambda) = 1$ para toda $\lambda \in S_3$.

$$\begin{aligned}
\alpha((\lambda, x^i)(\mu, x^a)) &= \alpha((\lambda\mu, x^{i+a})) \\
&= (\lambda\mu, x^{i+a}\delta(\lambda\mu)) \\
&= (\lambda\mu, x^{i+a}\delta(\lambda)\delta(\mu)) \\
&= (\lambda, x^i\delta(\lambda))(\mu, x^a\delta(\mu)) \\
&= \alpha((\lambda, x^i))\alpha((\mu, x^a))
\end{aligned}$$

por lo tanto α es un automorfismo. Veamos que es de orden 2:

$$\begin{aligned}
\alpha^2((\lambda, x^i)) &= \alpha(\alpha((\lambda, x^i))) \\
&= \alpha((\lambda, x^i\delta(\lambda))) \\
&= (\lambda, x^i\delta(\lambda)^2) \\
&= (\lambda, x^i).
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 4. *Sea W el producto directo $S_3 \times C_8$ y sea $\delta : S_3 \longrightarrow C_8$ la composición $\chi \circ \varrho$, donde χ y ϱ son las funciones definidas anteriormente. La función $\beta : W \longrightarrow W$ dada por:*

$$\beta(\lambda, x^i) = (\lambda, x^{5i}\delta(\lambda))$$

es un autormorfismo y es de orden 2, es decir, $\beta^2(\lambda, x^{5i}) = (\lambda, x^{5i})$.

Demostración. Sea $(\lambda, x^i), (\mu, x^a) \in W$ con $i, a \in 0, 1, ..., 7$.

$$\begin{aligned}
\beta((\lambda, x^i)(\mu, x^a)) &= \beta((\lambda\mu, x^{i+a})) \\
&= (\lambda\mu, x^{5(i+a)}\delta(\lambda\mu)) \\
&= (\lambda\mu, x^{5(i+a)}\delta(\lambda)\delta(\mu)) \\
&= (\lambda, x^{5i}\delta(\lambda))(\mu, x^{5a}\delta(\mu)) \\
&= \beta((\lambda, x^i))\beta((\mu, x^a))
\end{aligned}$$

por lo tanto β es un automorfismo. Veamos que es de orden 2:

$$\begin{aligned}\beta^2(\lambda, x^i) &= \beta(\beta(\lambda, x^i)) \\ &= \beta(\lambda, x^{5i}\delta(\lambda)) \\ &= (\lambda, x^{25i}\delta(\lambda)\delta(\lambda)) \\ &= (\lambda, x^i).\end{aligned}$$

□

Lema 5. *Sea C_2 el grupo cíclico de orden 2 y sea $W = S_3 \times C_2$. La función $\omega : C_2 \longrightarrow Aut(W)$ dada por:*

$$\omega(1) = Id_W$$

y

$$\omega(y) = \alpha$$

donde Id_W denota la función identidad en W y α el automorfismo definido anteriormente, es un homomorfismo de grupos.

Demostración.

$$\omega(1 * 1) = \omega(1) = Id_W = Id_W(Id_W) = \omega(1) * \omega(1))$$

$$\omega(1 * y) = \omega(y) = \alpha = Id_W(\alpha) = \omega(1) * \omega(y)$$

y

$$\omega(y * y) = \omega(y^2) = \omega(1) = Id_W = \alpha^2 = \alpha \circ \alpha = \omega(y)\omega(y).$$

□

Lema 6. *Sea C_2 el grupo cíclico de orden 2 y sea $W = S_3 \times C_2$. La función $\gamma : C_2 \longrightarrow Aut(W)$ dada por:*

$$\gamma(1) = Id_W$$

y

$$\gamma(y) = \beta$$

donde Id_W denota la función identidad en W y β el automorfismo definido anteriormente, es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Igual a la anterior.

$\square$

Definición 18. Sea S_3 el grupo simétrico de orden 6. Sea C_8 el grupo cíclico de orden 8 y C_2 el grupo cíclico de orden 2. Sea el homomorfismo $\delta : S_3 \longrightarrow C_8$ definido anteriormente. Sea W el producto directo $S_3 \times C_8$. Sean α y β los automorfismos de W definidos anteriormente. Definimos al grupo G como el producto semidirecto de W con C_2 mediante ω, denotado $W \rtimes_\omega C_2$ y Q el producto semidirecto de W con C_2 mediante γ, denotado $W \rtimes_\gamma C_2$. A los elementos de ambos grupos los denotaremos por $\lambda x^i y^j$, con $i \in 0, 1, ..., 7$ y $j \in 0, 1$.

Notación 2. A Partir de aquí G y Q denotarán los grupos definidos anteriormente a menos que se indique lo contrario.

Dichos grupos aunque tienen los mismos elementos tienen distintas operaciones. En G la operación esta definida por:

$$(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b) = \lambda\mu x^{i+a+2j(1-Sgn(\mu))} y^{j+b}$$

mientras que en Q el producto es:

$$(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b) = \lambda\mu x^{i+a(5+4(1-j))+2j(1-Sgn(\mu))} y^{j+b}.$$

G y Q no son isomorfos pues, como se demostrará a continuación, G tiene centro de orden 8 y Q tiene centro de orden 4. Además se demostrará que G y Q tienen tablas de marcas isomorfas. Esto ya se había visto anteriormente de manera computacional [7]. Ahora se probará formalmente.

Proposición 4. *El centro de G es el subgrupo generado por x, esto es, $Z(G) = \langle x \rangle$.*

Demostración. Sea $\lambda x^i y^j \in Z(G)$ y $\mu x^a y^b \in G$. Como $\lambda x^i y^j$ está en el centro y $\lambda \in S_3$ de acuerdo con el producto en G entonces se debe de cumplir que $\lambda = 1$. Por lo tanto tenemos lo siguiente:

$$(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b) = (\mu x^a y^b)(\lambda x^i y^j)$$

consecuentemente

$$\lambda\mu x^{i+a+2j(1-Sgn(\mu))}y^{j+b} = \mu\lambda x^{a+i+2b(1-Sgn(\lambda))}y^{b+j}$$

como $\lambda = 1$

$$\mu x^{i+a+2j(1-Sgn(\mu))}y^{j+b} = \mu x^{a+i}y^{b+j}$$

esto pasa sólo si $j = 0$, es decir:

$$\mu x^{i+a}y^b = \mu x^{i+a}y^b$$

Por lo tanto $\lambda x^i y^j = x^i \in \langle x\rangle$.

Sea $x^i \in \langle x\rangle$ y $\mu x^a y^b \in G$, entonces:

$$(x^i)(\mu x^a y^b) = \mu x^{i+a}y^b = \mu x^{a+i}y^b = \mu x^{a+i+2b(1-Sgn(1))}y^b = (\mu x^a y^b)(x^i)$$

Por lo tanto $x^i \in Z(G)$ □

Proposición 5. *El centro de Q es el subgrupo generado por x^2, esto es, $Z(Q) = \langle x^2\rangle$.*

Demostración. Sean $\lambda x^i y^j \in Z(Q)$ y $\mu x^a y^b \in Q$. Como $\lambda x^i y^j$ está en el centro y $\lambda \in S_3$, de acuerdo al producto en Q entonces $\lambda = 1$. Por lo tanto tenemos que:

$$(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b) = (\mu x^a y^b)(\lambda x^i y^j)$$

De este modo

$$\lambda\mu x^{i+a(5+4(1-j))+2j(1-Sgn(\mu))}y^{j+b} = \mu\lambda x^{a+i(5+4(1-b))+2b(1-Sgn(\lambda))}y^{b+j}$$

Como $\lambda = 1$ tenemos que:

$$\mu x^{i+a(5+4(1-j))+2j(1-Sgn(\mu))}y^{j+b} = \mu x^{a+i(5+4(1-b))}y^{b+j}$$

Esta igualdad se cumple para todo μ sólo si $j = 0$ e $i = 2q$, es decir:

$$\mu x^{2q+a} y^b = \mu x^{a+10q} y^b = \mu x^{2q+a} y^b$$

por lo que $\lambda x^i y^j = x^{2q} \in \langle x^2 \rangle$. Sea $x^{2i} \in \langle x^2 \rangle$ y $\mu x^a y^b \in Q$, entonces:

$$(x^{2i})(\mu x^a y^b) = \mu x^{2i+a} y^b = \mu x^{a+2i} y^b = \mu x^{a+10i} y^b = \mu x^{a+2i(5+4(1-b))} y^b$$
$$= (\mu x^a y^b)(x^{2i})$$

Por lo tanto $x^{2i} \in Z(Q)$.

$\square$

Tenemos entonces que G es un grupo de orden 96, donde su centro es lo generado por x, por lo que el orden de $Z(G)$ es 8, mientras que Q es un grupo de orden 96 con centro igual a lo generado por x^2, por lo que su orden es 4. En particular tenemos que G y Q no son grupos isomorfos de orden 96. Estos grupos tienen la propiedad de tener tablas de marcas isomorfas.

Proposición 6. *G y Q tienen tablas de marcas isomorfas.*

Demostración. Observemos primero que G y Q son iguales como conjuntos, ambos tienen elementos de la forma $\{\lambda x^i y^j : \lambda \in S_3, i \in \{0, 1, ., 7\}, j \in \{0, 1\}\}$. Sus operaciones son casi iguales salvo por un x^4, en Q tenemos que:

$$\begin{aligned}(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b) &= \lambda\mu x^{i+a(5+4(1-j))+2j(1-Sgn(\mu))} y^{j+b} \\ &= \lambda\mu x^{i+a+4a+4a(1-j)+2j(1-Sgn(\mu))} y^{j+b} \\ &= \lambda\mu x^{i+a+4a(2-j)+2j(1-Sgn(\mu))} y^{j+b} \\ &= \lambda\mu x^{i+a+2j(1-Sgn(\mu))} (x^4)^{a(2-j)} y^{j+b}\end{aligned}$$

mientras que en G tenemos que

$$(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b) = \lambda\mu x^{i+a+2j(1-Sgn(\mu))} y^{j+b}.$$

Por lo que en Q la operacion difiere por un $(x^4)^{a(2-j).}$ Otra cosa a observar es la conjugación de elementos. En G el inverso de un elemento es

$$(\lambda x^i y^j)^{-1} = (\lambda^{-1} x^{-i+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))} y^{-j})$$

mientras que en Q el inverso de un elemento es

$$(\lambda x^i y^j)^{-1} = (\lambda^{-1} x^{-i+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))+4ij} y^{-j})$$

veamos que conjugar elementos en G es lo mismo que conjugar elementos en Q salvo por un x^4. En G al conjugar obtenemos lo siguiente:

$$\begin{gathered}(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b)(\lambda^{-1} x^{-i+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))} y^{-j}) \\ = (\lambda x^i yj)(\mu\lambda^{-1} x^{a-i+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))+2b(1-Sgn(\lambda^{-1}))} y^{b-j}) \\ = \lambda\mu\lambda^{-1} x^{a+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))+2b(1-Sgn(\lambda^{-1}))+2j(1-Sgn(\mu\lambda^{-1}))} y^b\end{gathered}$$

En Q al conjugar obtenemos:

$$(\lambda x^i y^j)(\mu x^a y^b)(\lambda^{-1} x^{-i+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))} y^{-j})$$

$$\begin{gathered}= (\lambda x^i yj)(\mu\lambda^{-1} x^{a-i+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))+4ij+2b(1-Sgn(\lambda^{-1}))+4ib} y^{b-j}) \\ = \lambda\mu\lambda^{-1} x^{a+2j(1-Sgn(\lambda^{-1}))+2b(1-Sgn(\lambda^{-1}))+2j(1-Sgn(\mu\lambda^{-1}))+4(ib+aj)} y^b.\end{gathered}$$

Por lo que conjugar en G y Q es lo mismo salvo por un $(x^4)^{ib+aj}$.
Como $Z(G) = \langle x \rangle$ y $Z(Q) = \langle x^2 \rangle$ entonces $x^4 \in Z(G)$ y $x^4 \in Z(Q)$, además x^4 es un elemento de orden dos, es decir, $x^4 x^4 = 1$. Consideremos el subgrupo $\langle x^4 \rangle$, este subgrupo es abeliano por lo tanto es un subgrupo tanto de G como de Q. Consideremos los grupos $G/\langle x^4 \rangle$ y $Q/\langle x^4 \rangle$, estos grupos son isomorfos debido a que x^4 es igual al 1 en los grupos cocientes, y el isomorfismo está dado de manera natural por

$$\Psi : G/\langle x^4 \rangle \longrightarrow Q/\langle x^4 \rangle$$

$$\lambda x^i y^j \longrightarrow \lambda x^i y^j$$

Este mapeo funciona como la identidad. Por el teorema de la correspondecia tenemos que para todo $H \subseteq G$ tal que $\langle x^4 \rangle \subseteq H$ entonces:

$$G \longleftrightarrow G/\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow G/\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow Q$$

$$\vdots$$

$$H \longleftrightarrow H/\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow H/\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow H$$

$$\vdots$$

$$\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow \langle x^4 \rangle/\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow \langle x^4 \rangle/\langle x^4 \rangle \longleftrightarrow \langle x^4 \rangle$$

Debido a esto tenemos que H es un subgrupo de G si y sólo si H es un subgrupo de Q. Tenemos entonces una biyección entre todos los subgrupos de G que contienen a x^4 y los subgrupos de Q que contienen a x^4, en particular tenemos una biyección entre las clases de conjugación de subgrupos de G y Q que contienen a x^4. Ahora veamos que esta biyección (mandar a un subgrupo de G a el mismo pero ahora visto como subgrupo de Q) cumple que $|H| = |H'|$, $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$, $\alpha(H,K) = \alpha(H',K')$ y $\beta(H,K) = \beta(H',K')$. Recordemos que dada una función ψ que va de la familia de las clases de conjugación de G a las clases de conjugación de Q y dado un subgrupo H de G, entonces denotamos con H' cualquier representante de $\psi([H])$, donde $[H]$ es la clase de conjugación de H.

Esta biyección preserva subgrupos conjugados, es decir, $aTa^{-1} = aTa^{-1}$ donde el primer miembro de la igualdad es con la operación en G y el segundo es con la operación en Q. Como conjugar en Q es lo mismo que conjugar en G, salvo por un x^4, tenemos entonces que en el cociente la conjugación de elementos es la misma tanto en G como en Q, de ahí que conjugar subgrupos sea lo mismo en G y en Q. Como $N_G(H)$ es el máximo subgrupo de G en el que H es normal entonces por el teorema de la correspondencia $N_G(H) = N_Q(H')$ por lo tanto $|N_G(H)| = |N_Q(H')|$. Ahora $\alpha(H,K) = \#\{E \leq G : E =_G K, H \leq E\}$ y $\alpha(H',K') = \#\{E \leq Q : E =_G K', H' \leq E\}$ y como acabamos de ver que subgrupos conjugados se preservan y las contenciones de subgrupos entonces $\alpha(H,K) = \alpha(H',K')$. Analogamente se demuestra que $\beta(H,K) = \beta(H',K')$.

Entonces tenemos un isomorfismo de tabla de marcas entre G y Q dada por el teorema de la correspondencia y la funcion Ψ, pero sólo para subgrupos que contienen a x^4, vamos a extender esto ahora para todo subgrupo de G.

Determinemos todos los elementos de orden dos de G.

$1 = (\lambda x^i y^j)(\lambda x^i y^j) = \lambda^2 x^{i+i+2j(1-Sgn(\lambda))} y^{j+j} = \lambda^2 x^{2\left(i+j(1-Sgn(\lambda))\right)}$ donde queremos que $\lambda^2 = 1$ y $2\big(i+j(1-Sgn(\lambda))\big) = 0 \bmod 8$, por lo que obtenemos los siguientes casos:

Si $\lambda = 1$, $j = 0$ e $i = 4$, el elemento es x^4.

Si $\lambda = 1$, $j = 1$ e $i = 0$, el elemento es y.

Si $\lambda = 1$, $j = 1$ e $i = 4$, el elemento es $x^4 y$.

Denotaremos a una transposición con $(\circ\circ)$. Si $\lambda = (\circ\circ)$, $j = 0$ e $i = 0$, los elementos son: $(1,2)$, $(1,3)$ y $(2,3)$.

Si $\lambda = (\circ\circ)$, $j = 0$ e $i = 4$, los elementos son: $(1,2)x^4$, $(1,3)x^4$ y $(2,3)x^4$.

Si $\lambda = (\circ\circ)$, $j = 1$ e $i = 2$, los elementos son: $(1,2)x^2y$, $(1,3)x^2y$ y $(2,3)x^2y$.

Y por último, si $\lambda = (\circ\circ)$, $j = 1$ e $i = 6$, los elementos son: $(1,2)x^6y$, $(1,3)x^6y$ y $(2,3)x^6y$.

Entonces todos los elementos de orden dos del grupo G son x^4, y, x^4y, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1,2)x^4$, $(1,3)x^4$, $(2,3)x^4$, $(1,2)x^2y$, $(1,3)x^2y$, $(2,3)x^2y$, $(1,2)x^6y$, $(1,3)x^6y$ y $(2,3)x^6y$. Además estos son también todos los elementos de orden dos de Q, pues en Q tenemos que el producto sólo difiere por $x^{4i(2-j)}$ del producto de G y este es igual a 1 en todos los casos anteriores y son los únicos casos que lo cumplen.

En G hay exáctamente 4 clases de conjugación de orden dos, denotemos a una transposición por $(\circ\circ)$ y determinemos las 4 clases de conjugación.

La clase con representante x^4. Como este elemento está en el centro, entonces la clase sólo está conformado por, x^4.

La clase con representante y, sus elementos son;

$$x^4y \bullet y \bullet x^4y = x^4y \bullet x^4y^2 = x^8y = y$$

$$(\circ\circ) \bullet y \bullet (\circ\circ) = (\circ\circ) \bullet (\circ\circ)x^{2(1+1)}y = x^4y$$

$$(\circ\circ)x^4 \bullet y \bullet (\circ\circ)x^4 = (\circ\circ)x^4y \bullet (\circ\circ)x^{4+2(2)} = x^4y$$

$$(\circ\circ)x^2y \bullet y \bullet (\circ\circ)x^2y = (\circ\circ)x^2y \bullet (\circ\circ)x^2y^2 = x^{2+2}y = x^4y$$

$$(\circ\circ)x^6y \bullet (\circ\circ)x^6y = (\circ\circ)x^6y \bullet (\circ\circ)x^6y^2 = x^{6+6}y = x^4y$$

Por lo cual está clase tiene a x^4y y a y.

La clase con representante una transposición $(\circ\circ)$ cuyos elememntos son:

$$y \bullet (\circ\circ) \bullet y = y \bullet (\circ\circ)y = (\circ\circ)x^4$$

$$x^4y \bullet (\circ\circ) \bullet x^4y = x^4y \bullet (\circ\circ)x^4y = (\circ\circ)x^{4+4+4}y^2 = (\circ\circ)x^4$$

$$(\circ\circ)x^4 \bullet (\circ\circ) \bullet (\circ\circ)x^4 = (\circ\circ) \bullet x^4$$

$$(\circ\circ)x^2y \bullet (\circ\circ) \bullet (\circ\circ)x^2y = (\circ\circ)x^2y \bullet x^2y = (\circ\circ)x^4$$
$$(\circ\circ)x^6y \bullet (\circ\circ) \bullet (\circ\circ)x^6y = (\circ\circ)x^6y \bullet x^6y = (\circ\circ)x^{6+6} = (\circ\circ)x^4$$

Por lo cual la clase está compuesta por las transposiciones y los elementos de la forma $(\circ\circ)x^4$.

Y por ultimo la clase con representante $(\circ\circ)x^2y$, cuyos elementos son:

$$y \bullet (\circ\circ)x^2y \bullet y = y \bullet (\circ\circ)x^2 = (\circ\circ)x^{2+2(2)}y = (\circ\circ)x^6y$$
$$x^4y \bullet (\circ\circ)x^2y \bullet x^4y = x^4y \bullet x^{2+4}y = (\circ\circ)x^6y$$
$$(\circ\circ) \bullet (\circ\circ)x^2y \bullet (\circ\circ) = (\circ\circ) \bullet x^{2+2(2)}y = (\circ\circ)x^6y$$
$$(\circ\circ)x^4 \bullet (\circ\circ)x^2y \bullet (\circ\circ)x^4 = (\circ\circ)x^4 \bullet x^{2+4+2(2)}y = (\circ\circ)x^{4+2}y = (\circ\circ)x^6y$$
$$(\circ\circ)x^6y \bullet (\circ\circ)x^2y \bullet (\circ\circ)x^6y = (\circ\circ)x^6y \bullet x^{2+6+4}y^2 = (\circ\circ)x^6y \bullet x^4 = (\circ\circ)x^{6+4}y$$
$$= (\circ\circ)x^2y$$

Notemos que para todos los casos anteriores el elemento $(x^4)^{ib+aj}$ es igual a 1 por lo que tenemos que las clases de conjugación de elementos de orden 2 son exáctamente las mismas en G y en Q.
Entonces en G y Q hay exáctamente 4 clases de conjugación de elementos de orden 2; $\{x^4\}$, $\{y, x^4y\}$, $\{(1,2),(1,3),(2,3),(1,2)x^4,(1,3)x^4,(2,3)x^4\}$ y $\{(1,2)x^2y,(1,3)x^2y,(2,3)x^2y,(1,2)x^6y,(1,3)x^6y,(2,3)x^6y\}$.

Ahora determinemos todos los subgrupos de G que no contienen al elemento x^4.

El único subgrupo de orden dos que contiene a x^4 es el subgrupo generado por x^4, todos los demás no contienen a x^4. Tanto en G como en Q hay sólo dos elementos de orden tres, los cuales son $(1,2,3)$ y $(1,3,2)$, estos elementos generan un subgrupo de orden 3 que además es el único subgrupo de orden tres de G y de Q y este subgrupo no contiene a x^4.

Tomemos un subgrupo de orden 4, hay dos casos; o es un un subgrupo cíclico C_4 o es $C_2 \times C_2$. Si es C_4 supongamos que no contiene a x^4, entonces debe de cumplir una de las siguientes cosas:

$$(\lambda x^i y^j)^2 = x^4 \tag{4.1}$$
$$(\lambda x^i y^j)^2 = y \tag{4.2}$$
$$(\lambda x^i y^j)^2 = x^4 y \tag{4.3}$$
$$(\lambda x^i y^j)^2 = (1,2) \tag{4.4}$$
$$(\lambda x^i y^j)^2 = (1,2)x^4 \tag{4.5}$$
$$(\lambda x^i y^j)^2 = (1,2)x^2 y \tag{4.6}$$
$$(\lambda x^i y^j)^2 = (1,2)x^6 y \tag{4.7}$$

Claramente las ecuaciones 2 a 7 no tienen solución en G pues $(\lambda x^i y^j)^2 = \lambda^2 x^{i+j+2j(1-Sgn(\lambda))}$ la cual no tiene y por lo que la ecuación 2, 3, 6 y 7 no tienen solución, y además no existe λ tal que $\lambda^2 = (1,2)$ por lo que las ecuaciones 4 y 5 tampoco tienen solución, así tenemos que la única que se cumple es que $(\lambda x^i y^j)^2 = x^4$ por lo que cualquier subgrupo cíclico de orden 4 contiene a x^4. Análogamente pasa para Q. Ahora si es un subgrupo de la forma $C_2 \times C_2$ entonces veamos que si dos elementos cualesquiera de orden dos conmuntan tendrán que generar a x^4.

i)

$$y \circ x^4 y = x^{4+2(1-Sgn(1))} = x^4$$
$$y \circ (1,2) = (1,2)x^{2(2)}y = (1,2)x^4 y \neq (1,2)y = (1,2) \circ y$$

Estos no conmutan y análogamente pasa para $(1,3)$ y $(2,3)$.

$$y \circ (1,2)x^4 = (1,2)x^{4+2(2)}y = (1,2)y$$

$$(1,2)x^4 \circ y = (1,2)x^{4+2(0)}y = (1,2)x^4 y$$

Estos no conmutan y análogamente pasa para $(1,3)x^4$ y $(2,3)x^4$.

$$y \circ (1,2)x^2 y = (1,2)x^{2+2(2)}y^2 = (1,2)x^6$$

$$(1,2)x^2 y \circ y = (1,2)x^{2+2(0)}y^2 = (1,2)x^2$$

Estos no conmutan y análogamente pasa con $(1,3)x^2 y$ y $(2,3)x^2 y$.

$$y \circ (1,2)x^6 y = x^{6+2(2)}y^2 = (1,2)x^2$$

$$(1,2)x^6 y \circ y = (1,2)x^{6+2(0)}y^2 = (1,2)x^6$$

Estos no conmutan y análogamente pasa con $(1,3)x^6 y$ y $(2,3)x^6 y$.

ii)
$$x^4y \circ (1,2) = (1,2)x^{4+2(2)}y = (1,2)y$$
$$(1,2) \circ x^4y = (1,2)x^{4+2(0)}y = (1,2)x^4y$$

Estos no conmutan y análogamente pasa con $(1,3)$ y $(2,3)$.

$$x^4y \circ (1,2)x^4 = (1,2)x^{4+4+2(2)}y = (1,2)x^4y$$

$$(1,2)x^4 \circ x^4y = (1,2)x^{4+4+2(0)}y = (1,2)y$$

Estos no conmutan y análogamente pasa con $(1,3)x^4$ y $(2,3)x^4$.

$$x^4y \circ (1,2)x^2y = (1,2)x^{4+2+2(2)}y^2 = (1,2)x^2$$

$$(1,2)x^2y \circ x^4y = (1,2)x^{2+4+2(0)}y^2 = (1,2)x^6$$

Estos no conmutan y análogamente pasa con $(1,3)x^2y$ y $(2,3)x^2y$.

iii)
$$(1,2) \circ (1,2)x^4 = x^4$$

Con $(1,3)x^4$ y $(2,3)x^4$ no conmutan debido a que las transposiciones no conmutan.
$$(1,2) \circ (1,2)x^2y = x^{2+2(0)}y = x^2y$$
$$(1,2)x^2y \circ (1,2) = x^{2+2(2)}y = x^6y$$

Estos elementos no conmutan y pasa lo mismo con $(1,3)x^2y$ y $(2,3)x^2y$ debido a que las transposiciones no conmutan.

$$(1,2) \circ (1,2)x^6y = x^6y$$

$$(1,2)x^6y \circ (1,2) = x^{6+2(2)}y = x^2y$$

Estos elementos no conmutan y pasa lo mismo con $(1,3)x^6y$ y $(2,3)x^6y$ debido a que las transposiciones no conmutan.

iv)
$$(1,2)x^4 \circ (1,3) = (1,3,2)x^4$$
$$(1,3) \circ (1,2)x^4 = (1,2,3)x^4$$

Estos no conmutan y pasa lo mismo con $(2,3)$. Con $(1,3)x^4$ y $(2,3)x^2$ no conmutan debido a que las transposiciones no conmutan.

$$(1,2)x^4 \circ (1,2)x^2y = x^{4+2}y = x^6y$$

$$(1,2)x^2y \circ (1,2)x^4 = x^{2+4+2(2)}y = x^2y$$

Estos elementos no conmutan y pasa lo mismo con $(1,3)x^2y$ y $(2,3)x^2y$ debido a que las transposiciones no conmutan.

$$(1,2)x^4 \circ (1,2)x^6y = x^{4+6}y = x^2y$$

$$(1,2)x^6y \circ (1,2)x^4 = x6+4+2(2)y = x^6y$$

Estos elementos no conmutan y pasa lo mismo con $(1,3)x^6y$ y $(2,3)x^6y$ debido a que las transposiciones no conmutan.

v)

$$(1,2)x^2y \circ (1,3)x^2y = (1,3,2)x^{8)}y^2 = (1,3,2)$$
$$(1,3)x^2y \circ (1,2)x^2y = (1,2,3)x^8y^2 = (1,2,3)$$

Estos elementos no conmutan y pasa lo mismo con $(2,3)x^2y$ debido a que las transposiciones no conmutan.

$$(1,2)x^2y \circ (1,2)x^6y = x^{2+6+2(2)}y^2 = x^4$$

Con $(1,3)x^6y$ y $(2,3)x^6y$ no conmutan debido a que las transposiciones no conmutan.
Por último sólo basta ver:

vi)

$$(1,2)x^6y \circ (1,3)x^6y = (1,3,2)x^{24}y^2 = (1,3,2)$$
$$(1,3)x^6y \circ (1,2)x^6y = (1,2,3)x^{24}y^2 = (1,2,3)$$

Estos elementos no conmutan y pasa lo mismo con $(2,3)x^6y$ debido a que las transposiciones no conmutan.

Así cualquier subgrupo isomorfo a $C_2 \times C_2$ contienen a x^4, y por lo tanto todo subgrupo de orden 4 contienene a x^4. Analogamente pasa para Q pues recordemos que conjugar en Q sólo difiere por un $(x^4)^{ib+aj}$ que en todos los casos anteriores es igual a 1.

Ahora veamos lo que pasa con un subgrupo de orden 6, este puede ser un C_6 o un S_3. Los subgrupos de orden 6 son lo generado por un 3-ciclo y un elemento de orden dos, determinemos los subgrupos de orden 6:

i) Lo generado por x^4 y $(1,2,3)$, este subgrupo claramente contiene a x^4 además esta subgrupo es isomorfo a C_6 pues sólo tiene un único subgrupo de orden 2 el cual es $\langle x^4 \rangle$.

ii) Lo generado por y y $(1,2,3)$, este subgrupo es isomorfo a C_6 pues tiene un único subgrupo de orden 2 el cual es $\langle y\rangle$, este subgrupo no contiene a x^4. El otro subgrupo de orden 6 es lo generado por x^4 y $(1,2,3)$ y este subgrupo es conjugado a $\langle y,(1,2,3)\rangle$.

iii) Lo generado por una transposición y $(1,2,3)$, este subgrupo es S_3, y x^4 no esta contenido en este subgrupo ya que x^4 esta en el centro y en S_3 el centro es el trivial. Lo generado por un elemento de la forma $(1,2)x^4$ y $(1,2,3)$ es un subgrupo conjugado a $\langle(1,2)x^4,(1,2,3)\rangle$.

iv) Lo generado por $(1,2)x^2y$ y $(1,2,3)$, este subgrupo es isomorfo a S_3 ya que tienen tres subgrupos de orden 2 los cuales son lo generado por los tres elementos $(1,2)x^2y$, $(1,3)x^2y$ y $(2,3)x^2y$ y por la misma razón x^4 no está en este subgrupo. Lo generado por $(1,2)x^6y$ y $(1,2,3)$ es un subgrupo de orden 6 conjugado a $\langle(1,2)x^2y,(1,2,3)\rangle$.

Estos 7 subgrupos generan 4 clases de conjugación de subgrupos de orden 6, donde la clase de $\langle x^4,(1,2,3)\rangle$ es el único subgrupo de orden 6 que si contiene a x^4.

Entonces tenemos 6 subgrupos de orden 6, un subgrupo de orden 3 el cual es $\langle(1,2,3)\rangle$, y 14 subgrupos de orden 2 que no contienen a x^4, estos últimos subgrupos de orden dos son lo generado por cada uno de los elementos de orden dos excepto por $\langle x^4\rangle$ que es el único subgrupo de orden dos que sí contiene a x^4. Todo esto pasa exáctamente igual para Q pues con estos elementos al conjugar tenemos que $(x^4)^{ib+aj}$ es igual a 1 por lo que conjugar es lo mismo tanto en G como en Q.
Así tenemos que dos subgrupos son conjugados en G si y sólo si son conjugados en Q. A continuación se muestra una gráfica de todos los subgrupos de orden 6, 3 y 2 que no contienen a x^4, el simbollo $\|$ significa que estos grupos son conjugados tanto en G como en Q.

$$
\begin{array}{ccc}
\langle y, (1,2,3) \rangle & \langle (1,2), (1,2,3) \rangle & \langle (1,2)x^2y \rangle \\
\Vert & \Vert & \Vert \\
\langle x^4y, (1,2,3) \rangle & \langle (1,2)x^4, (1,2,3) \rangle & \langle (1,2)x^6y, (1,2,3) \rangle
\end{array}
$$

$$
\langle (1,2,3) \rangle
$$

$$
\begin{array}{ccc}
\langle y \rangle & \langle (1,2) \rangle & \langle (1,2)x^2y \rangle \\
\Vert & \Vert & \Vert \\
\langle x^4y \rangle & \langle (1,3) \rangle & \langle (1,3)x^2y \rangle \\
 & \Vert & \Vert \\
 & \langle (2,3) \rangle & \langle (2,3)x^2y \rangle \\
 & \Vert & \Vert \\
 & \langle (1,3)x^4y \rangle & \langle (1,3)x^6y \rangle \\
 & \Vert & \Vert \\
 & \langle (2,3)x^4y \rangle & \langle (2,3)x^6y \rangle \\
 & \Vert & \Vert \\
 & \langle (2,3)x^4y \rangle & \langle (2,3)x^6y \rangle
\end{array}
$$

Ahora tenemos todos los subgrupos de G que no contienen a x^4 y que además son los mismos subgrupos para Q, veamos que la asgnación que manda a un subgrupo de G a el mismo pero ahora visto como un subgrupo de Q también es un isomorfismo de marcas entre los subgrupos que no contienen a x^4 y con esto tendremos un isomorfismo completo entre la tabla de marcas de G y Q.

$H = H'$ pues el isomorfismo de marcas es la identidad. $\alpha(H, K) = \alpha(H', K')$, esto debido a que conjugar en G es exactamente lo mismo que conjugar en Q y que tenemos exactamente las mismas clases de conjugación en G y en Q. Similarmente $\beta(H, K) = \beta(H', K')$. Obviamente $H = H'$, $K = K'$ y las contenciones se preservan. Como el número de conjugados de H en G es el mismo que el número de conjugados de H' en Q tenemos que el índice del normalizador de H en G es igual al índice del normalizador de H' en Q, y como $|G| = |Q|$ entonces $|N_G(H)| = |N_Q(H)|$, así tenemos un isomorfismo de marcas completo entre G y Q, y por tanto son isomorfos bajo sus tablas de marcas.

$\square$

Capítulo 5

Aportaciones originales, subgrupos característicos no son preservados por isomorfismos de marcas

Se sabe que subgrupos abelianos no son preservados por isomorfismos de marcas y que los centros no necesariamente se corresponden. A continuación se demuestra que los subgrupos característicos tampoco son preservados por los isomorfismos entre las tablas de marcas de dos grupos no isomorfos, es decir, la tabla de marcas de un grupo no determina subgrupos caraterísticos.

Definición 19. Sea H un subgrupo de G. Decimos que H es un subgrupo característico de G si $\varphi(H) \subset H$ para todo $\varphi \in Aut(G)$.

Claramente $\varphi(H) = H$ para todo $\varphi \in Aut(G)$ ya que de $\varphi^{-1}(H) \subset H$ se sigue que $H \subset \varphi(H)$.
Todo subgrupo característico es normal, pues el automorfismo interno

$$\zeta_g : G \longrightarrow G$$

dada por $\zeta_g(h) = ghg^{-1}$ para todo $h \in G$, cumple que

$$gHg^{-1} = \zeta_g(H) = H.$$

El centro de G es un subgrupo característico. Veamos que $\varphi(Z(G)) \subset Z(G)$ para todo $\varphi \in Aut(G)$. Sea $\varphi \in Aut(G)$, $x \in G$ y $g \in Z(G)$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(g)x = \varphi(g)\varphi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = \varphi(g\varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)g) = \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi(g) \\ = x\varphi(g).\end{aligned}$$

Lema 7. *Sean G y H grupos finitos y sea $f : G \longrightarrow H$ una función. Sea $G = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$. Si $f(a_i w) = f(a_i)f(w)$ para todo $i \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces f es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Se demostrará por inducción sobre el número m de generadores del grupo G. Sea $w, z \in G$. Tenemos que $z = a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{im}$.
Para $m = 1$

$$f(zw) = f(a_i w) = f(a_i)f(w) = f(z)f(w)$$

supongamos cierto para $n = k$. Veamos que es cierto para $k + 1$.
Si $z = a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik}, a_{i(k+1)}$ entonces $z = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ik})a_{i(k+1)} = z_1 a_{i(k+1)}$, por lo tanto

$$\begin{aligned} f(zw) &= f\Big((z_1 a_{i(k+1)})w\Big) \\ &= f\Big(z_1(a_{i(k+1)}w)\Big) \\ &= f(z_1)f(a_{i(k+1)}w) \\ &= f(z_1)[f(a_{i(k+1)})f(w)] \\ &= [f(z_1)f(a_{i(k+1)})]f(w) \\ &= f(z_1 a_{i(k+1)})f(w) \\ &= f(z)f(w). \end{aligned}$$

□

Se construyó un automorfismo de Q el cuál no preserva el subgrupo generado por x. A continución se muestra el automorfismo y se prueba que efectivamente es un automorfismo.

Lema 8. *La función $\eta : Q \longrightarrow Q$ dada por*

$$\eta(\lambda x^i y^j) = \lambda x^{3i+6i^2+\big(1-Sgn(\lambda)\big)(2i+3)} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

es un automorfismo.

Demostración. Probaremos que es automorfismo usando el lema anterior para todos los generadores g de G. Note que los generadores de Q son $(1, 2)$, $(1, 2, 3)$, x y y, pues x genera C_8, y genera C_2 y $(1, 2), (1, 2, 3)$ generan S_3.

$g = (1,2)$:

$$\eta\big((1,2)(\lambda x^i y^j)\big) = \eta\big((1,2)\lambda x^i y^j\big)$$
$$= (1,2)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn\big((1,2)\lambda\big)-3sgn\big((1,2)\lambda\big)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn\big((1,2)\lambda\big)}{2}}$$
$$= (1,2)\lambda x^{5i+6i^2+2iSgn(\lambda)+3sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1+Sgn(\lambda)}{2}}$$

Por otro lado:

$$\eta\big((1,2)\big)\eta\big(\lambda x^i y^j\big)$$
$$= \big((1,2)x^6 y\big)\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= (1,2)\lambda x^{6+5[5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3]+2(1-Sgn(\lambda))} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \big((1,2)x^{6+i+6i^2-2iSgn(\lambda)-7Sgn(\lambda)+7+2-2Sgn(\lambda)} y^{i+j+1+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= (1,2)\lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+7} y^{1+i+j\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

Y estos coinciden ya que:

$$\big(5i+2iSgn(\lambda)+3sgn(\lambda)+3\big)-\big(i-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+7\big)$$
$$= 4i+4isgn(\lambda)+4sgn(\lambda)+4$$
$$= 4\big((1+Sgn(\lambda))(i+1)\big) \equiv 0 \pmod 8$$

$g = (1,2,3)$:

$$\eta\big((1,2,3)(\lambda x^i y^j)\big) = \eta\big((1,2,3)\lambda x^i y^j\big)$$
$$= (1,2,3)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn\big((1,2,3)\lambda\big)-3Sgn\big((1,2,3)\lambda\big)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn\big((1,2,3)\lambda\big)}{2}}$$
$$= (1,2,3)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

Por otro lado

$$\eta\big((1,2,3)\big)\eta\big(\lambda x^i y^j\big)$$
$$= \big((1,2,3)\big)\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= (1,2,3)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$

$g = y$:

$$\eta\big((y)(\lambda x^i y^j)\big) = \eta(\lambda x^{5i+2-2Sgn(\lambda)} y^{1+j})$$
$$= \lambda x^{5[5i+2-2Sgn(\lambda)]+6[5i+2-2Sgn(\lambda)]^2-2[5i+2-2Sgn(\lambda)]Sgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{5+i+6i^2-Sgn(\lambda)-2iSgn(\lambda)+4} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+1} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

Por otro lado

$$\eta(y)\eta(\lambda x^i y^j) = y\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= \lambda x^{5[5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3]+2[1-Sgn(\lambda)]} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-7Sgn(\lambda)+7+2-2Sgn(\lambda)} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+1} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

$g = x$:

$$\eta\big((x)(\lambda x^i y^j)\big) = \eta(\lambda x^{1+i} y^j)$$
$$= \lambda x^{5(1+i)+6(1+i)^2-2(1+i)Sgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{5i+5+6i^2+4i+6-2iSgn(\lambda)-2Sgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-5Sgn(\lambda)+6} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

Por otro lado

$$\eta(x)\eta(\lambda x^i y^j) = (xy)\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= \lambda x^{1+5[5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3]+2(1-Sgn(\lambda))} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{1+i+6i^2-2iSgn(\lambda)-7Sgn(\lambda)+7+2-2Sgn(\lambda)} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{2+i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

y estos coinciden ya que:

$$\big(6 - 5Sgn(\lambda)\big) - \big(2 - Sgn(\lambda)\big) = 4(1 - Sgn(\lambda)) \equiv 0 \pmod 8$$

$\square$

Proposición 7. *Sean G y Q grupos finitos cualesquiera con tablas de marcas isomorfas y $H \mapsto H'$ el isomorfismo entre sus tablas de marcas. Entonces, si H es característico H' no necesariamente lo es.*

Demostración. Sean G y Q los grupos definidos anteriormente, sea ψ el isomorfismo entre sus tablas de marcas y sea η el automorfismo definido en el lema 9. Tenemos que el subgrupo generado por x es el centro de G y por lo tanto es un subgrupo característico en G, pero este subgrupo no es un subgrupo característico en Q ya que:

$$\eta(\langle x \rangle) = \eta(x^i) = x^{3i+6i^2} y^i \nsubseteq \langle x \rangle$$

□

Apéndice A

Rutinas programadas en GAP

A.1. Subgrupos característicos

En esta parte se describe el proceso mediante el cual se llegó al resultado central de la tesis, el cual dice, que los subgrupos característicos no son presevados por un isomorfismo de marcas, para tal fin se utilizó el software GAP. Con GAP (Groups, Algorithms, and Programming), se puede trabajar teoría de grupos y álgebra lineal. El grupo G que se utilizó de contraejemplo para mostrar el resultado en GAP, se escribe como SmallGroup(96,108), y el grupo Q se escribe como SmallGroup(96,114). Se escriben de distinta manera ya que no son isomorfos.

La tabla de marcas de G en GAP, se define como la transpuesta de la definida en la sección dos.

Para ver que estos grupos tienen tablas de marcas iguales utilizamos el siguiente comando.

```
gap > MatTom(TableOfMarks(G))=MatTom(TableOfMarks(Q));
True
```

Esto significa que hay un isomorfismo entre las tablas de marcas de G y Q.

```
gap > Size(Centre(G));
8
```

```
gap > Size(Centre(Q));
4
```

Esto muestra que los centros de G y Q no se corresponden por ningún isomorfismo de marcas, pues sus centros son de distinto orden y los isomorfismos preservan el orden de los subgrupos. En particular este resultado nos dice de nuevo que estos subgrupos no son isomorfos.

Para determinar si los subgrupos característicos se preservan utilizamos la siguiente rutina programada en GAP.

```
gap > IscaractGroups:=function(G)
> local a, b, c, d, i;
> a:=TableOfMarks(G);
> d:=[];
> for i in [1..Length(ConjugacyClassesSubgroups(G))] do
>   b:=RepresentativeTom(a,i);
>   if IsCharacteristicSubgroup(G,b) then
>     c:=1;
>   else
>     c:=0;
>   fi;
>   Add(d,c);
> od;
> return d;
> end;
```

Esta rutina nos da una lista de subgrupos, que son representantes de las clases de conjugación de subgrupos de un grupo dado G, para cada uno de estos subgrupos, GAP nos regresa o bien un 0 o un 1. El número 0 significa que el subgrupo representante no es característico, mientras que un 1 significa que sí es un subgrupo característico. Al ejecutar la rutina para cada grupo obtenemos la lista del grupo G y la lista del grupo Q.

```
gap > IscaractGroups(G);

[ 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 ]

gap > IscaractGroups(Q);

[ 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
```

```
0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0,
0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1 ]
```

Como el isomorfismo de marcas manda a la n-ésima clase de conjugación de subgrupos de G a la n-ésima clase de conjugación de subgrupos de Q, entonces sabemos que en G hay un subgrupo que es característico y en Q no necesariamente, pues las listas son distintas. El centro de G, $Z(G)$ es un subgrupo característico, veamos que $Z'(G)$ no lo es, encontrando un automorfismo ψ de Q tal que $\psi(Z'(G)) \nleq Z'(G)$.

Con la siguiente rutina obtenemos los generadores del grupo de automorfismos de Q.

```
gap > GeneratorsOfGroup(AutomorphismGroup(Q));
```

```
[Pcgs<[ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]> ->[f1, f2, f3, f4, f5, f6^2],
Pcgs<[ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]> -> [ f1*f2*f4*f5, f2, f2*f3*f5,
f4*f5, f5, f6 ], Pcgs<[f1, f2, f3, f4, f5, f6]> ->[f1, f2, f3*f4,
f4*f5, f5, f6], Pcgs<[f1, f2, f3, f4, f5, f6]> ->[f1,f2,f3*f4*f5,
f4*f5, f5, f6], Pcgs<[ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]> -> [ f1*f5, f2,
f3*f5, f4, f5, f6 ], Pcgs<[f1, f2, f3, f4, f5, f6]> ->[f1, f2*f5,
f3, f4, f5, f6 ], Pcgs<[ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]> -> [f1*f6, f2,
f3, f4, f5, f6]
```

Aquí los fi's son los generadores del grupo Q. Determinemos que automorfismo es el que cumple lo que pretendemos, pero primero veamos quienes son estos generadores.
La siguiente instrucción nos dice cuantos generadores tiene Q.

```
gap> GeneratorsOfGroup(Q);
```

```
[ f1, f2, f3, f4, f5, f6 ]
```

Los ordenes de los elelemntos f3, f4 y f5 son:

```
gap> Order(Q.3);
```

```
8
```

```
gap> Order(Q.4);
```

```
4

gap> Order(Q.5);

2
```

La siguiente instrucción nos dice que que los siguientes elementos son iguales.

```
gap> Q.5=Q.3^4;

true

gap> Q.4=Q.3^2;

 true
```

Por lo que el generador f3 es el elemento x, f4 es el elemento x^2 y f5 es el elemento x^4. Como sabemos el centro de G es $\langle x \rangle$ entonces, regresando a los automorfismos vemos que todos ellos excepto el segundo mandan al elemento x en x^i para algun $i \in 0, 1, .., 7$. Por lo que el segundo automorfismo es el que cumple que $\psi(\langle x \rangle) \nleq \langle x \rangle$.

Para escribir en forma matemática el automorfismo determinemos los demás generadores.

```
gap> Order(Q.6);

3
```

por lo que f6 es un 3-ciclo.

```
gap> Order(Q.1);

2

gap> Order(Q.2);

2
```

Aquí tenemos dos elementos de orden dos, por lo que un generador debe de ser una transposición y el otro el elemento y. Observemos lo siguiente

```
gap> Q.1*Q.3=Q.3*Q.1;

true

gap> Q.2*Q.3=Q.3*Q.2;

false
```

Como una transposición y x conmutan en Q y los elementos x y y no conmutan entonces nos queda que f1 es una transposición, sin pérdida de generalidad, supongamos que es el elemento $(1,2)$ y f2 es y. Así tenemos que el automorfismo cumple:

$\eta((1,2)) = (1,2)x^6y$, $\eta((1,2,3)) = (1,2,3)$
$\eta(y) = y$ y $\eta(x) = xy$.

Así obtenemos el automorfismo $\eta(\lambda x^i y^j) = \lambda x^{3i+6i^2+\left(1-Sgn(\lambda)\right)(2i+3)} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$.

A.2. Otras rutinas

La siguiente rutina determina subgrupos subnormales de la misma manera que se hizo con subgrupos característicos.

```
   gap> IssubnormalGroup:=function(G)
>local a, b, c, d, i;
>a:=TableOfMarks(G);
>d:=[];
>for i in [1..Length(ConjugacyClassesSubgroups(G))] do
>  b:=RepresentativeTom(a,i);
>  if IsSubnormal(G,b) then
>    c:=1;
>  else
>    c:=0;
>  fi;
>  Add(d,c);
>od;
>return d;
>end;
```

Un grupo G es de tres transposiciones si existe un subconjunto $S \subseteq G$ tal que:

i) Lo generado por S es todo G.

ii) Todo elemento de S es de orden dos.

iii) Para todo $a, b \in S$ se tiene que $|ab| = 1, 2$ ó 3 y

iv) $\{gag^{-1} | a \in S, g \in G\} = G$.

La siguiente rutina nos dice si un grupo es un grupo de tres transposiciones.

```
   gap> IsTTG:=function(G)
>local a, b, c, d, e, f, i, j;
>a:=Filtered(Elements(G),i->Order(i)=2);
>b:=List(a,j->ConjugacyClass(G,j));
>c:=Unique(b);
>d:=[];
>For i in [1..Length(c)] do
> if Size(Subgroup(G,Elements(c[i])))=Size(G) then
>  if ForAll(Elements(c[i]),k->ForAll(c[i],h->Order(k*h)<=3)) then
```

```
>     d:=Elements(c[i]);
>    fi;
>  fi;
>od;
>if d:=[] then
>  Print("False");
>  Print("\ n");
>else
>  Print(d, ". este subconjunto cumple \ n ");
>fi;
>end;
```

Dado un grupo G y un subgrupo U de G, el siguiente algoritmo nos da la posición de la clase de conjugación de U de G de acuerdo a la tabla de marcas de G.

```
gap> NConjugacyClassSubgroup:=function(G,U)
Local a, b, c, d, e, f;
a:=G;
b:=U;
c:=ConjugacyClassSubgroups(a,b);
d:=LatticeSubgroupsByTom(a);
e:=ConjugacyClassesSubgroups(d);
f:=Position(e,c);
return f;
end;
```

La siguiente rutina regresa dos grupos no isomorfos de orden n con tabla de marcas isomorfas, esto es si existen.

```
gap> ChecaOrden:=function(n)
>local a, b, c, i, j;
>a:=NumberSmallGroups(n);
>for i in [1..a] do
>  b:=SmallGroup(n,i);
>  for j in [i+1..a] do
>    c:=SmallGroup(n,j);
>    if MatTom(TableOfMarks(b))=MatTom(TableOfMarks(c)) then
>      Print(i,,j,);
>      Print("\ n ");
>    fi;
```

```
> od;
>od;
>end;
```

La siguiente rutina me dice si un grupo dado se descompone como producto directo de subgrupos, y si es así me dice su descomposición.

```
gap > IsProductGroup:=function(G)
>local a, b, c, d, e, f, i, j;
>a:=Filtered(NormalSubgroups(G),k -> Size(k)>1 and Size(k<) < Size(G));
>b:=[];
>if Length(a)>1 then
>  for i in [1..Length(a)] do
>    for j in [i+1..Length(a)] do
>      if IsTrivial(Intersection(a[i],a[j])) then
>        if Size(a[i]*Size(a[j])=Size(G) then
>          b:=a[i];
>          c:=a[j];
>        else
>          b:=[];
>        fi;
>      fi;
>    od;
>  od;
>  if b=[] then
>    Print("no se descompone ");
>  else
>    d:=StructureDescription(b);
>    e:=StructureDescription(c);
>    Print(d,"x ",e);
>    Print("\ n ");
>  fi;
>else
>  Print("no se descompone ");
>fi;
>end;
```

Apéndice B

Artículo

En este apéndice presento el artículo que se obtuvo de la tesis y que se envió a una revista de divulgación matemática, está escrita en ingles por que así aparecerá en la revista, actualmente está en proceso de revisión.

Characteristic subgroups are not preserved by isomorphisms of tables of marks

Victor Nozair Garcia Rios

25 de septiembre de 2009

Introduction.

Groups with isomorphic tables of marks may not be isomorphic groups (as proved by Thévenaz in [5]), but one still expects them to have many attributes in common. Indeed, if G and Q are groups with isomorphic tables of marks, then they have isomorphic composition factors (see [6]), and they also have isomorphic Burnside rings (the converse is still an open problem, put forward also in [6]); if two groups have isomorphic Burnside rings and one of them is abelian/Hamiltonian/minimal simple, then the two groups are isomorphic, and a similar result is known for several families of simple groups.

It is also easy to prove that an isomorphism between tables of marks preserves normal subgroups, maximal subgroups, Sylow p-subgroups, cyclic subgroups, elementary abelian subgroups, the commutator subgroup, and the Frattini subgroup. However, it has been shown that abelian subgroups and the centres of the groups are not always preserved. In this paper we show that characteristic subgroups may not be preserved under an isomorphism between tables of marks.

Tables of marks

Let G be a finite group. Let $\mathfrak{C}(G)$ be the family of all conjugacy classes of subgroups of G. We usually assume that the elements of $\mathfrak{C}(G)$ are ordered non-decreasingly. The matrix whose H, K-entry is $\#(G/K)^H$ (that is, the number of fixed points of the set G/K under the action of H) is called the **table of marks** of G (where H, K run through all the elements in $\mathfrak{C}(G)$).

The **Burnside ring** of G, denoted $B(G)$, is the subring of $\mathbb{Z}^{\mathfrak{C}(G)}$ spanned by the columns of the table of marks of G.

Definition 1. Let G and Q be finite groups. Let ψ be a function from $\mathfrak{C}(G)$ to $\mathfrak{C}(Q)$. Given a subgroup H of G, we denote by H' any representative of $\psi([H])$. We say that ψ is an *isomorphism between the tables of marks of G and Q* if ψ is a bijection and if $\#(Q/K')^{H'} = \#(G/K)^H$ for all subgroups H, K of G.

Two non-isomorphic groups of order 96 with isomorphic tables of marks

This is a summary of [2].

Let S_3 be the symmetric group or order 6. Let C_8 be the cyclic group of order 8, generated by x, and let C_2 be the cyclic group of order 2, generated by y.

Let δ be the only non-trivial homomorphism from S_3 to C_8. Let W denote the group $S_3 \times C_8$. Let α be the automorphism of W given by $\alpha(\lambda, x^i) = (\lambda, x^i\delta(\lambda))$, and let β be the automorphism of W given by $\beta(\lambda, x^i) = (\lambda, x^{5i}\delta(\lambda))$.

Since α has order two, we can define the group G as the semidirect product of W with C_2 by α, that is, in G we have that $y(\lambda, x^i)y = \alpha(\lambda, x^i)$. Similarly, we define the group Q as the semidirect product of W and C_2 by β; in Q we have that $y(\lambda, x^i)y = \beta(\lambda, x^i)$. We shall denote the elements of both G and Q as $\lambda x^i y^j$.

Note that in G, x and y commute, and the centre of G is therefore the subgroup generated by x, which is a subgroup of order 8; however, x and y do not commute in Q, and the centre of Q is the subgroup generated by x^2, which is a subgroup of order 4. In particular, we also have that G and Q are non-isomorphic groups of order 96.

The following theorem can be found in [2].

Theorem 2. *Let S be a subset of G (and therefore S is also a subset of Q). Then S is a subgroup of G if and only if S is a subgroup of Q. Moreover, two subgroups are conjugate in G if and only if they are conjugate in Q, and the identity map on the family of conjugacy classes of subgroups defines and isomorphism between the tables of marks of G and Q.*

We use this fact to prove our main result.

Theorem 3. *The subgroup of Q generated by x is not a characteristic subgroup. In particular, the isomorphism of tables of marks between G and Q maps the centre of G to a non-characteristic subgroup of Q.*

Demostración. We construct an automorphism of Q that does not preserve the subgroup generated by x. Let $\eta : Q \longrightarrow Q$ be given by

$$\eta(\lambda x^i y^j) = \lambda x^{3i+6i^2+\left(1-Sgn(\lambda)\right)(2i+3)} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

We claim that for a generator g of Q and an arbitrary $\lambda x^i y^j$ we have that $\eta(g\lambda x^i y^j) = \eta(g)\eta(\lambda x^i y^j)$, where g can be $(1,2), (1,2,3), x, y$, so η is indeed a homomorphism.

$g = (1,2)$:

$$\eta\big((1,2)(\lambda x^i y^j)\big) = \eta\big((1,2)\lambda x^i y^j\big)$$
$$= (1,2)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn\big((1,2)\lambda\big)-3sgn\big((1,2)\lambda\big)+3}$$
$$y^{i+j+\frac{1-Sgn\big((1,2)\lambda\big)}{2}}$$
$$= (1,2)\lambda x^{5i+6i^2+2iSgn(\lambda)+3sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1+Sgn(\lambda)}{2}}$$

On the other hand:

$$\eta\big((1,2)\big)\eta\big(\lambda x^i y^j\big)$$
$$= \big((1,2)x^6 y\big)\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3}$$
$$y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= (1,2)\lambda$$
$$x^{6+5[5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3]+2(1-Sgn(\lambda))}$$
$$y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= (1,2)\lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+7} y^{1+i+j\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

These two expressions coincide, because:

$$\big(5i+2iSgn(\lambda)+3sgn(\lambda)+3\big)-$$
$$\big(i-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+7\big)$$
$$= 4i+4isgn(\lambda)+4sgn(\lambda)+4$$
$$= 4\big((1+Sgn(\lambda))(i+1)\big)$$

$g=(1,2,3)$:

$$\eta\big((1,2,3)(\lambda x^i y^j)\big) = \eta\big((1,2,3)\lambda x^i y^j\big)$$
$$= (1,2,3)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn\big((1,2,3)\lambda\big)-3Sgn\big((1,2,3)\lambda\big)+3}$$
$$y^{i+j+\frac{1-Sgn\big((1,2,3)\lambda\big)}{2}}$$
$$= (1,2,3)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3sgn(\lambda)+3} y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

On the other hand:

$$\eta\big((1,2,3)\big)\eta\big(\lambda x^i y^j\big)$$
$$= \big((1,2,3)\big)\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3}$$
$$y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= (1,2,3)\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3}$$
$$y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

$g = y$:

$$\eta(y\lambda x^i y^j) = \eta(\lambda x^{5i+2-2Sgn(\lambda)} y^{1+j})$$
$$= \lambda x^{5[5i+2-2Sgn(\lambda)]+6[5i+2-2Sgn(\lambda)]^2-}$$
$$^{2[5i+2-2Sgn(\lambda)]Sgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+1} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

On the other hand:

$$\eta(y)\eta(\lambda x^i y^j) = y\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3}$$
$$y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= \lambda x^{5[5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3]+2[1-Sgn(\lambda)]}$$
$$y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)+1} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

$g = x$

$$\eta(x\lambda x^i y^j) = \eta(\lambda x^{1+i} y^j)$$
$$= \lambda x^{5(1+i)+6(1+i)^2-2(1+i)Sgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3}$$
$$y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{i+6i^2-2iSgn(\lambda)-5Sgn(\lambda)+6} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

On the other hand:

$$\eta(x)\eta(\lambda x^i y^j) = (xy)\big(\lambda x^{5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3}$$
$$y^{i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}\big)$$
$$= \lambda x^{1+5[5i+6i^2-2iSgn(\lambda)-3Sgn(\lambda)+3]+2(1-Sgn(\lambda))}$$
$$y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$
$$= \lambda x^{2+i+6i^2-2iSgn(\lambda)-Sgn(\lambda)} y^{1+i+j+\frac{1-Sgn(\lambda)}{2}}$$

These two expressions coincide because:

$$\big(6-5Sgn(\lambda)\big) - \big(2-Sgn(\lambda)\big) = 4(1-Sgn(\lambda))$$

Therefore η is a group homomorphism.
Moreover,

$$(1,2) = \eta((1,2)x^6 y), \qquad (1,2,3) = \eta(1,2,3),$$

$$x = \eta(xy), \qquad y = \eta(y)$$

so η must be an automorphism. Finally, note that $\eta(x) = xy$, so the subgroup generated by x is not a characteristic subgroup of Q.

□

Bibliografía

[1] Felipe Zaldivar, *Introducción a la teoría de grupos*, Sociedad matemática mexicana, 2006.

[2] Alberto G. Raggi Cárdenas y Luis Valero Elizondo. Two non-isomorphic groups of order 96 with isomorphic tables of marks and non-corresponding centres and abelian subgroups. *Communications in Algebra*, 37:209-212, 2009. ISSN: 0092-7872, DOI: 10.1080/00927870802243614.

[3] The GAP Group. GAP - *Groups, Algorithms and Programming*, Version 4.4, 2006. (http:www.gapsystem.org).

[4] The GAP Group. GAP - *Reference manual*, Version 4.4, 2007. (http:www.gapsystem.org).

[5] Jacques Thévenaz. Isomorphic Burnside rings. Communications in Algebra, 16(9):1945-1947, 1988.

[6] Florian Luca and Alberto G. Raggi-Cárdenas. *Composition factors from the table of marks*. Journal of Algebra, 244:737-743, 2001.

[7] Luis M. Huerta-Aparicio, Ariel Molina-Rueda, Alberto G. Raggi-Cárdenas, Luis Valero Elizondo. *On some invariants preserved by isomorphims of tables of marks*. To appear in revista colombiana de matemáticas.