Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Espacios topológicos ordenados

T E S I S

Que para obtener el título de:

Licenciado en Físico-Matemáticas

P r e s e n t a:

M I G U E L A N G E L G A S P A R A R R E O L A

Asesor:

Dra. María Luisa Pérez Seguí

Morelia Michoacán, Noviembre de 2009

A mis padres Yolanda y Román

Agradecimientos

Una vez concluido este trabajo me permito un momento para hacer un recuento de la gente que, directa como indirectamente, hizo su pequeño o sustancial aporte.

Agradezco principalmente a mis padres por su apoyo, tanto durante este trabajo, como desde que inicié la carrera.
Agradezco también a mi asesora María Luisa por su paciencia y resistencia a mis incoherencias, gramaticales en la gran mayoría, pero también una que otra matemática. Gracias por tu apoyo, por aguantar y por hacer que aprendiera un poquito de matemáticas.
También quiero decir gracias a mis profesores y amigos que me instruyeron y colaboraron bastante para hacer que pasara de cero a principiante en las matemáticas. Cabe mencionar también a mis compañeros y amigos que creyeron que podría terminar; algunos con los cuales, con esas discusiones eternas y sin sentido, llegamos a aprender bastante. A todos los antes mencionados podría enlistarlos, pero ustedes saben quiénes son.

A todos ustedes les doy gracias de la única forma que sé: ¡No los defraudaré!.

Índice general

Introducción

La topología es la disciplina matemática que estudia las propiedades de conjuntos en general cuando se les dota de una idea de cercanía entre los elementos del conjunto (en este sentido ya se les llama espacios topológicos). En nuestro caso consideraremos conjuntos que ya cuentan con una estructura, más prescisamente conjuntos sobre los cuales se tiene o es posible darles un orden total. A éstos hay una forma natural de dotarlos con una topología.
Al igual que el orden induce una topología en el conjunto de los números reales que tan frecuentemente aparece en cualquier área de las matemáticas, lo que se intenta es ver qué resultados se pueden generalizar a otros espacios ordenados, así como qué tanto o qué propiedades tales como conexidad, compacidad,..., etc. se siguen preservando, o cuáles son las condiciones que debería satisfacer el espacio para poder decir de éste que es primero numerable, metrizable o cualquier otra propiedad que nos ayude a entender mejor la naturaleza de este tipo de espacios.

Otro tipo de conjuntos bastante importantes, tanto para la topología como para la teoría de conjuntos son los ordinales, ya que éstos no sólo son conjuntos ordenados sino que más aún están bien ordenados. Éstos hacen su aparición en este trabajo principalmente como ejemplos particulares de espacios ordenados. Se analizan sus propiedades topológicas, y se utilizan como contraejemplos. Todo esto antes mencionado se analiza con cuidado para llegar a tener una idea más clara de cómo se comportan topológicamente los espacios ordenados.

Para poder entender todo esto se supone que el lector ha llevado al menos un curso de topología general y un curso de teoría de conjuntos, pues en este trabajo se utilizan libremente resultados básicos de estas áreas, mencionándolos únicamente por completez. Se requiere también un poco de práctica con resultados clásicos de topología, así como ideas claras de propiedades topológicas y de conjuntos.

El trabajo se divide en 8 capítulos, divididos por temas. El orden de aparición no es relevante; incluso en algunos se hace referencia a definiciones y resultados correspondientes a capítulos que aparecen después. Su orden de aparición es el siguiente.
Preliminares. En este capítulo se define cómo será nuestro objeto de estudio; se dará además un poco de notación que se usará durante todos los capítulos.
Conceptos básicos. En esta parte se menciona qué topología daremos a nuestros objetos de estudio, así como notación, algunos resultados y muchos ejemplos de espacios ordenados, en los cuales se comparan las topologías del orden, de subespacio y otras que se les puede dar de forma natural a conjuntos en específico.
Ordinales. Este capítulo se dedica completamente a los ordinales y a todo lo que éstos conllevan, tal como inducción transfinita, el teorema del buen orden y bastantes resultados sobre propiedades de los ordinales como espacios ordenados.

Axiomas de separación. Esta parte se dedica a probar que todo espacio ordenado es normal y se presenta un ejemplo importante para la topología que usa espacios ordenados.
Conexos. Se dedica a caracterizar los espacios ordenados conexos, así como a ver algunos ejemplos de espacios ordenados conexos, espacios ordenados disconexos, así como algunos resultados relacionados. También se presentan resultados de cuándo los espacios ordenados son primero o segundo numerables.
Compactos. Se caracterizan los espacios ordenados compactos, así como también se dan bastantes ejemplos de espacios ordenados, en los cuales se hace un análisis de las propiedades que cumplen y de cuáles no cumplen.
Topologías relacionadas con la del orden. Tal como su nombre lo dice, se presentan dos topologías que se definen basándose en conjuntos ordenados o en $\mathbb{R}$; más precisamente la topología del orden derecho y la del límite inferior, y se analizan las propiedades que cumplen éstas, así como también algunas que no cumplen; se analiza la recta larga de la misma forma.
Subconjuntos de $\mathbb{R}$. En este capítulo se presenta un resultado que, hasta donde sabemos, es nuevo. Éste dice que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología del orden es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}$ (con la topología usual).

Miguel Gaspar.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo hablaremos de conceptos que debemos conocer para entender mejor el lenguaje que usaremos en los subsecuentes capítulos. También daremos algunas definiciones y un poco de notación. Recordemos primero qué es un orden:

Definición. Sean X un conjunto y $\leq$ una relación entre elementos de X de tal forma que $\leq$ es reflexiva (es decir, que para todo $x \in X$ se tiene que $x \leq x$), transitiva (equivalentemente, si se tiene que para $x, w, z \in X$ son tales que $x \leq w$ y $w \leq z$ entonces también tenemos que $x \leq z$), antisimétrica (mejor dicho, si $x, w \in X$ son tales que $x \leq w$ y $w \leq x$ entonces $x = w$). Si además $\leq$ tiene la propiedad de que para todos $x, w \in X$ se sigue que $x \leq w$ ó $w \leq x$, entonces decimos que $\leq$ es un **orden total** sobre X y llamamos a la pareja $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado con el orden dado por $\leq$. También decimos que $x < y$ si $x \leq y$ y $x \neq y$.

Definición. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado. Definamos y denotemos a los **intervalos** que tienen extremos a y b como sigue:

$$(a, b) = \{x \in X : a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in X : a \leq x < b\},$$

También consideramos los rayos:

$$(-\infty, b) = \{x \in X : x < b\},$$
$$(a, \infty) = \{x \in X : a < x\}.$$

Análogamente se definen los intervalos y rayos $[a, b]$, $(a, b]$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$.

Dados $(X, \leq)$ un conjunto ordenado y Y un subconjunto de X con el orden dado por la restricción de $\leq$ a Y, para $a, b \in X$ denotamos al intervalo $(a, b) \cap Y = \{y \in Y : a < y < b\}$ como $(a, b)_Y$ y análogamente se considera la notación para los demás intervalos arriba vistos.

Capítulo 2

Conceptos Básicos

Definición. Sea $(X, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado; damos a X **la topología inducida por el orden**, la cual tiene por base:

$$\beta = \{(a,b) : a, b \in X\} \bigcup \{[a_0, b) : a_0, b \in X\} \bigcup \{(a, b_0] : a, b_0 \in X\},$$

considerando que el segundo y tercer uniendo son sólo en caso de que existan elementos mínimo (a_0) y máximo (b_0), respectivamente (en caso de no existir, éstos se omiten).
Observemos que una subbase para esta topología es

$$\gamma = \{(a, \infty) : a \in X\} \cup \{(-\infty, b) : b \in X\}.$$

También notemos que si $Y \subset X$ entonces una base para la topología de Y son los intervalos $(a,b)_Y$ con $a, b \in Y$.

2.1. Ejemplos

Ejemplo 1. $\mathbb{R}$ con el orden usual.

Usaremos la siguiente notación para las diferentes topologías que podemos considerar en los subconjuntos de $\mathbb{R}$.
$\tau :=$ la topología usual dada por ser subespacio.
$\tau_o :=$ la topología dada por el orden restringido.

Ejemplo 2. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, Aquí tenemos que $\tau = \tau_o$.

Demostración.
"$\supset$" Esta contención es obvia: Sea B un básico de τ_o; por lo tanto es de la forma $(a,b)_{\mathbb{Q}}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ y tenemos que $(a,b)_{\mathbb{Q}} = (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Entonces $(a,b)_{\mathbb{Q}} \in \tau$.
"$\subset$" Sea B básico de la topología de $\mathbb{Q}$ como subespacio de $\mathbb{R}$; por lo tanto es de la forma $(a,b)_{\mathbb{Q}}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, pero como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ existen sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ de elementos de $\mathbb{Q}$ que convergen a a (de forma decreciente) y a b (de forma creciente), respectivamente, y es claro que $(a,b)_{\mathbb{Q}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a_n, b_n)_{\mathbb{Q}}$ de lo cual $(a,b)_{\mathbb{Q}} \in \tau_o$. $\square$

Ejemplo 3. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Tenemos que $\tau = \tau_o$; esto es obvio pues la topología como subespacio es la discreta, y $(n-1, n+1) = \{n\}$, lo cual nos dice que la topología de $\mathbb{Z}$ como espacio también es la discreta.

Ejemplo 4. Sea C el conjunto de Cántor. Consideremos $C \subset \mathbb{R}$. Aquí pasa que $\tau = \tau_o$; la demostración es casi inmediata pues tenemos que para cada $x \in C$, el conjunto de elementos de C menores que x tiene elemento máximo o el conjunto de los $c \in C$ mayores que x tiene mínimo, ésto por un lado y, por el otro se tiene que existe sucesión decreciente o creciente en C respectivamente que converge a x (converge cuando vemos a C como subespacio de $\mathbb{R}$). En conclusión las topologías coinciden.

Ejemplo 5. Consideremos $(0,1) \subset \mathbb{R}$. En este caso tenemos $\tau = \tau_o$.

Ejemplo 6. Sea $A = (0,1) \cup [2,3) \subset \mathbb{R}$. Lo que obtenemos aquí es que $\tau_o \subset \tau$ propiamente pues $[2,3)$ es abierto visto A como subespacio, pero no lo es cuando lo vemos como espacio ordenado pues toda vecindad del 2 tiene elementos de $(0,1)$.

Observemos que en el ejemplo anterior se tiene $(A, \tau_o) \cong ((0,2), \tau)$. En el capítulo 8 veremos que esto no es casualidad, es decir, que todo subconjunto de $\mathbb{R}$ con la topología del orden es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}$ con la topología usual.

Ejemplo 7. Si $A = (0,1] \cup [2,3) \subset \mathbb{R}$, es claro que $\tau = \tau_o$.

Proposición 1. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces se tiene que $\tau_o \subset \tau$.

Demostración. Sea B básico de τ_o; por lo tanto es de la forma $(a,b)_X$ con $a, b \in X$, y tenemos que $(a,b)_X = (a,b) \cap X$. Entonces $(a,b)_X \in \tau$. $\square$

Veamos algunos resultados importantes sobre espacios ordenados.

Proposición 2. Sea X espacio ordenado y sea τ la topología del orden. Si $a < b$ son elementos de X entonces $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$.

Demostración. Sea $x \in \overline{(a,b)}$ y supongamos que $x \notin [a,b]$; entonces $x < a$ o $x > b$.
Si $x < a$ consideremos el rayo $(-\infty, a)$; se tiene que éste es vecindad de x que no intersecta a (a,b) lo cual es una contradicción.
Ahora si $x > b$ el rayo (b, ∞) es vecindad de x que no intersecta a (a,b) lo cual es un absurdo.
En conclusión $x \in [a,b]$ y por lo tanto $\overline{(a,b)} \subset [a,b]$. $\square$

En la proposición anterior la contención puede ser propia. Para hacer evidente esto consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 8. Considérese el conjunto $[0,1] \cup [2,3] \subset \mathbb{R}$ con el orden heredado de $\mathbb{R}$. Consideremos el intervalo $(0,2) = (0,1]$; lo que veremos es que $2 \notin \overline{(0,2)}$, pero esto es claro pues $(1,3)$ es vecindad de 2 que no intersecta a $(0,2) = (0,1]$. De lo anterior vemos que $\overline{(0,2)}$ está contenido propiamente en $[0,2]$ que es lo que se quería.

Proposición 3. Sean X, Y espacios ordenados. Si $f : X \to Y$ es función biyectiva que preserva el orden, entonces f es homeomorfismo.

Demostración. Primero notemos que la función inversa (la cual está bien definida por ser f biyectiva) preserva el orden lo cual es bastante claro. Por lo anterior basta ver que f es abierta o continua. Veamos que es abierta. Sea $(a, b) \subset X$ básico. Como f preserva el orden, se tiene que $f((a, b)) \subset (f(a), f(b))$ pero, más aún, son iguales pues si $y \in (f(a), f(b))$ éste tiene por preimagen a un elemento $x \in (a, b)$ (esto por ser f biyectiva y porque la inversa preserva el orden), con lo que $f((a, b)) = (f(a), f(b))$ por lo cual f es abierta. En conclusión f es homeomorfismo. $\square$

En el resultado anterior hay que tener cuidado con las topologías que se manejan. En este sentido tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9. Sea $X = (-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ si } x < -1, \\ x, \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces f es biyectiva, continua y preserva el orden pero no es homeomorfismo pues la función inversa, digamos g, no es continua. Para ver esto notemos que $[0, \infty)$ es abierto en X y su imagen inversa bajo g es $[0, \infty)$, pero éste no es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$, por lo cual g no es continua.

El siguiente lema es bien conocido de topología general.

Lema 1. Sean X, Y espacios topológicos, sean $C_i \subset X$, para $i = 1, 2, \ldots, n$, cerrados tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y sea $f : X \to Y$ tal que $f \restriction C_i$ es continua para cada i. Entonces f es continua.

Lema 2. Sea X espacio topológico ordenado. Entonces X es **Hausdorff** (es decir para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen U, V abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$) con la topología del orden.

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Sin pérdida de generalidad $x < y$; tenemos dos casos.
Caso 1: Existe $z \in X$ tal que $x < z < y$, por lo tanto $U = (-\infty, z)$ y $V = (z, \infty)$ son tal como se quiere.
Caso 2: El intervalo $(x, y) = \emptyset$; en tal caso $U = (-\infty, y)$ y $V = (x, \infty)$ son tal como se quiere.
En conclusión X es Hausdorff. $\square$

Proposición 4. Sea Y espacio ordenado y sea X cualquier espacio. Sean $f, g : X \to Y$ continuas y sea $h : X \to Y$ definida por $h(x) = max\{f(x), g(x)\}$. Entonces h es continua.

Demostración. Consideremos $H : X \to Y \times Y$ tal que $H(x) = f(x) \times g(x)$ (es decir, $f(x)$ y $g(x)$ son las funciones coordenadas de H). Es claro que H es continua. Nótese que el conjunto $W_1 = \{(y_1, y_2) : y_1 > y_2\}$ es un conjunto abierto en $Y \times Y$, pues si $z_1, z_2 \in Y$ son tales que $z_1 > z_2$, sean U, V abiertos básicos ajenos tales que $z_1 \in U$ y $z_2 \in V$ (esto por el lema 2). Nótese que U, V son tales que para cualesquiera $u \in U$ y $v \in V$ se tiene que $u > v$, lo cual es claro ver. De lo anterior tenemos que $(z_1, z_2) \in U \times V \subset W$, lo cual prueba que W_1 es abierto; por la misma razón es también abierto $W_2 = \{(y_1, y_2) : y_1 < y_2\}$.
Sean

$$C_1 = H^{-1}((Y \times Y) \setminus W_1) \text{ y}$$
$$C_2 = H^{-1}((Y \times Y) \setminus W_2).$$

Obsérvese que C_1 y C_2 son cerrados; más aún

$$C_1 = \{x \in X : h(x) = g(x)\} \text{ y}$$
$$C_2 = \{x \in X : h(x) = f(x)\};$$

ahora es claro que $X = C_1 \cup C_2$ y, por el lema 1, h es continua. □

Sea X un espacio topológico y sea $\leq$ un orden total sobre X. Sea τ una topología para X (no nesesariamente la del orden). Para A subconjunto de X podemos definir:
τ_{so}:=la topología que obtenemos al ver A como subespacio de X con la topología dada por el orden $\leq$.

Un ejemplo importante de orden en un conjunto es el lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ (ver definición abajo) y en sus subconjuntos pues nos proporciona una gran cantidad de ejemplos interesantes.
Para no confundir puntos con intervalos denotamos por $x \times y$ al punto de coordenadas x, y (para $x, y \in \mathbb{R}$).

Ejemplo 10. Analicemos $\mathbb{R}^2$ ordenado por el **orden lexicográfico** definido por: $(x_1, y_1) <_{lex} (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < x_2)$ ó $(x_1 = x_2$ y $y_1 < y_2)$. Dados $a, b \in \mathbb{R}^2$ denotamos el intervalo $\{x \in \mathbb{R}^2 : a <_{lex} x <_{lex} b\}$ por $(a, b)_{lex}$, y análogamente se denotan los demás intervalos. Sea τ la topología usual de $\mathbb{R}^2$. En este caso se tiene que $\tau \subset \tau_o$. Además la contención es propia.

Demostración. Sean $x \times y \in \mathbb{R}^2$ y U básico de τ tal que $x \times y \in U$ (es decir $U = (a, b) \times (c, d)$, donde $x \in (a, b)$ y $y \in (c, d)$). Es claro que el intervalo (vertical) $V = (x \times c, x \times d)_{lex}$ está contenido en U y $x \times y \in V$. De esto $U \in \tau_o$. La contención es propia porque obviamente $V \notin \tau$, pues es un segmento de recta vertical sin extremos que claramente no es un abierto en $\mathbb{R}^2$ con la topología usual. □

Recordemos que llamamos a un espacio **metrizable** si existe una métrica tal que las bolas nos inducen la misma topología en X. Justamente ésta es una propiedad importante de $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico como lo expresa la siguiente proposición.

Proposición 5. $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es metrizable.

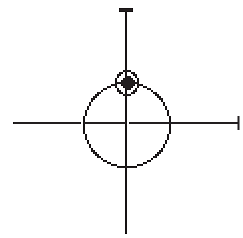
Demostración. Para ver esto daremos una métrica y veremos que ésta genera la misma topología que el orden lexicográfico.
Sean d la métrica usual de $\mathbb{R}$, y d_a esta misma métrica acotada por 1 (es decir, para $x, y \in \mathbb{R}$ $d_a(x \times y) = min\,\{d(x \times y), 1\}$). Para $x \times y, w \times z \in \mathbb{R}^2$ definimos D como sigue:

$$D(x \times y, w \times z) = \begin{cases} d_a(y, z), \text{ si } x = w, \\ 1, \text{ si } x \neq w. \end{cases}$$

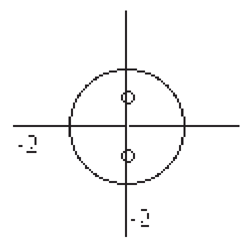
Es claro que la topología generada es la misma que nos da el orden lexicográfico. Para verlo consideremos $x \times y \in B \subset \mathbb{R}^2$ con B básico dado por D, es decir B es un "intervalo como los de $\mathbb{R}$" (pues la métrica es localmente en esencia la misma) pero en forma vertical, que es exactamente un básico dado por el orden lexicográfico, con lo que la topología es la misma. □

Ejemplo 11. Sea D^2 el disco unitario de dimensión 2; consideremos $D^2 \subset \mathbb{R}^2$. En este caso se tienen las siguientes contenciones:

1. $\tau \not\subset \tau_o$. Para ver esto consideremos una vecindad según τ del punto $z = 0 \times 1$; más especificamente consideremos U igual a la intersección de la bola de radio $1/4$ y centro en z con D^2; notemos además que toda vecindad V básica de z según τ_o contiene una franja vertical de D^2, por lo cual $V \not\subset U$. El dibujo luce más o menos así:



2. $\tau_o \not\subset \tau$. Esta afirmación es obvia pues es bastante claro que $(0 \times -1/2, 0 \times 1/2)_{lex}$ no es vecindad de ninguno de sus puntos según τ. El dibujo es:

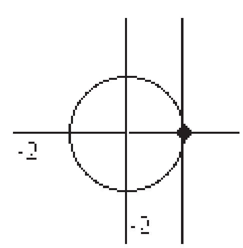


3. $\tau \subset \tau_{so}$. Nótese que por el ejemplo 10 ($\tau \subset \tau_o$ en $\mathbb{R}^2$) esta contención es cierta.

4. $\tau_{so} \not\subset \tau$. Ésta es obvia pues el mismo caso que prueba el inciso 2 nos sirve para éste.

5. $\tau_o \subset \tau_{so}$. Observemos que todo $(a, b)_{lex} \in \tau_o$, con $a, b \in D^2$, es también de la forma $((a, b)_{lex})_{D^2}$, con $a, b \in \mathbb{R}^2$, por lo que $(a, b)_{lex} \in \tau_{so}$.

6. $\tau_{so} \not\subset \tau_o$. Para hacer esto evidente nótese que τ_{so} hace el conjunto $\{1 \times 0\}$ abierto, pues $\{1 \times 0\} = D^2 \cap (\{1\} \times \mathbb{R})$ y, por otro lado, toda vecindad de $\{1 \times 0\}$ según τ_o intersecta a D^2 debido a que el conjunto $\{x \in D^2 : x <_{lex} 1 \times 0\}$ no tiene elemento máximo. Con esto se concluye que $\{1 \times 0\} \notin \tau_o$. En dibujos



Nótese que el ejemplo anterior sirve como contraejemplo para ver que las tres topologías no son iguales, más aún las contenciones que se dan entre ellas, se dan siempre, pues en la demostración de tales contenciones no se usa el conjunto subyacente para hacerlo evidente.

Capítulo 3

Ordinales

Otros ejemplos muy importantes de conjuntos ordenados son los ordinales. Daremos ahora una discusión breve sobre éstos. Ésta será un tanto informal; simplemente queremos ver a los ordinales como espacios topológicos (con la topología dada por el orden, claro está) y no de una forma puramente conjuntista.

Definición. Decimos que un conjunto está **bien ordenado** si todo subconjunto no vacío de éste tiene elemento mínimo. Al orden que cumple lo anterior le llamamos **buen orden**.

Definimos una "relación" entre conjuntos bien ordenados. (Siendo estrictos esto no es una relación pues no se puede hablar del conjunto de todos los conjuntos.) Dos conjuntos bien ordenados están "relacionados" si existe función biyectiva entre ellos que preserva el orden. Es fácil verificar que la "relación" antes descrita es simétrica, reflexiva y transitiva. A cada "clase de equivalencia" le llamamos **ordinal**. De hecho, haciendo un abuso del lenguaje, llamaremos ordinal a algunos representantes clásicos como los que se presentan a continuación:

- $0 = \emptyset$.
- $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Aquí estamos considerando cada natural de forma inductiva como el conjunto de todos los naturales que le preceden. El orden entre éstos se define por la pertenencia. Nótese que en los números naturales definidos de esta forma siempre que $n \in m$ se tiene que $n \subset m$. Esta propiedad es importante:

  Definición. Decimos que un conjunto X cuyos elementos son conjuntos es **transitivo** si siempre que $y \in X$ se tiene que $y \subset X$.
- $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, n+1, ...\}$.
- $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$. Observamos que $n < \omega$ para toda $n \in \omega$ y que éste también podemos representarlo en $\mathbb{R}$ con el orden usual como (es decir, es isomorfo, como conjunto ordenado, a) $\{1 - 1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{1\}$. (Aquí cada $1 - 1/n$ corresponde a $n - 1$ y 1 corresponde a ω.) De manera análoga se definen $\omega + 2$, etc.
- $\omega + \omega = 2 \times \omega$ con el orden lexicográfico (que es isomorfo al subconjunto $\{m - 1/n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, m = 1, 2\}$ de $\mathbb{R}$).
- $\omega \times \omega = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden lexicográfico (que es isomorfo al subconjunto $\{m - 1/n : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ de $\mathbb{R}$).

Notemos que los últimos dos pueden verse como subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ y su orden es el lexicográfico de $\mathbb{R}^2$ restringido a ellos.

3.1. Teorema del buen orden

Ahora vamos a probar un resultado que nos ayudará a tener ordinales no numerables.
Notación: Sea X un conjunto, se denota el **conjunto potencia de** X (es decir el conjunto que tiene como elementos a todos los subconjuntos de X) por $\wp(X)$.
Dado un conjunto totalmente ordenado $(X, \leq)$ y un $x \in X$, decimos que x es **elemento sucesor** si el conjunto $Y = \{y \in X : y < x\}$ tiene elemento máximo (es decir, hay un $y_0 \in Y$ tal que para todo $y \in Y$, $y \leq y_0$). Observemos que si y_0 es máximo de Y entonces el intervalo (y_0, x) es vacío. En este caso escribimos $x = y_0^*$ y decimos que y_0 es **predecesor** de x. En caso contrario decimos que x es **elemento límite**.
En la definición anterior se da notación para conjuntos ordenados en general, pero para ordinales usaremos una especial. Si α es un ordinal se denota $\alpha + 1$ al ordinal $\alpha \cup \{\alpha\}$; éste es sucesor de α, que claramente coincide con α^*.

Ejemplo 12. Ordinales sucesores y límite:

- 0 es límite pues no tiene predecesor inmediato.
- Si n es un número natural no cero; entonces es sucesor (pues su predecesor es $n - 1$).
- ω es límite.
- $\omega + 1$ es sucesor
- $\omega + \omega$ es límite.
- $\omega \times \omega$ es límite.

Definición. Sea A un conjunto. Una **función de elección** para A es una función $f : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ tal que para todo $B \in \wp(A) \setminus \{\emptyset\}$, $f(B) = f_B \in B$.

Axioma. Axioma de Elección (AC).
Todo conjunto no vacío tiene una función de elección.

Teorema 1. Teorema del buen orden (TBO).
Todo conjunto puede bien ordenarse (es decir, se puede definir un orden en él con el cual el conjunto está bien ordenado).

Ejemplo 13. Un ejemplo de cómo bien ordenar un conjunto X para el caso en que éste sea numerable es bastante claro. Al ser numerable, existe $f : X \to \mathbb{N}$ función biyectiva. Entonces, definamos un orden en X que nos dará f. Nótese que para cada $x \in X$ hay un $f(x) \in \mathbb{N}$, por lo que nuestro buen orden en $\mathbb{N}$ y f nos da una función de elección natural g para X dada como sigue: si $Y \subset X$ no vacío se define $g(Y) = f^{-1}(min(f(Y)))$, la cual es claro que está bien definida por ser $\mathbb{N}$ bien ordenado y f biyectiva. Ahora por recursión definiremos un buen orden para X: El primer elemento de X es $x_0 = g(X)$, y si suponemos elegidos los primeros n elementos, se define el $(n + 1)$-ésimo $x_n = g(X \setminus \{x_0, \ldots, x_{n-1}\})$. Es claro que éste es un buen orden para X pues de hecho lo hicimos isomorfo (como conjuntos ordenados) a $\mathbb{N}$. Más aún, es claro que el isomorfismo es justamente f. Aunque para el caso numerable es fácil bien ordenar un conjunto cualquiera (esto es porque ya tenemos a $\mathbb{N}$), para conjuntos de cardinalidad más grande no lo es, pues aún no tenemos ordinales "grandes" (pero gracias al TBO los tendremos). La prueba que daremos es la generalización de esta idea que, aunque es bastante natural, necesita del axioma de elección.

Lo que se probará a continuación es la equivalencia entre AC y TBO. Dicha prueba consta de dos partes, una es relativamente sencilla y muy clara, por lo cual no presentará mayor dificultad. Ésta es la que nos dice que TBO implica AC. Para la otra parte, primero se probará que entre ordinales hay una especie de tricotomía (es decir "uno es menor que el otro o son iguales"). Una vez hecho esto se definirán buenos órdenes compatibles sobre subconjuntos parciales del conjunto que se quiere bien ordenar, esto con la ayuda de una función de elección. Para terminar se unirán todos estos subconjuntos para obtener un buen orden para el conjunto total.
Procedemos ahora a probar un resultado que nos permite hacer inducción en ordinales (más precisamente, en conjuntos bien ordenados), la cual se usará en la prueba de TBO. A esta inducción se le llama inducción transfinita y extiende a la inducción que hacemos en $\mathbb{N}$. Cabe resaltar que, en general, en pruebas por inducción para ordinales mayores que ω se distinguen dos casos: el que el ordinal para el cual se va a demostrar la propiedad sea sucesor o el que sea límite. Lo anterior se enuncia como sigue.

Teorema 2. Principio de Inducción Transfinita (PI)
Si α es un ordinal y S es un subconjunto no vacío de α cuyo primer elemento es α_0 y tal que

$$\forall\beta([\alpha_0, \beta) \subset S \Rightarrow \beta \in S);$$

entonces $S = \alpha$.

Demostración. Supongamos que no pasa. Sea β_0 ordinal tal que $\beta_0 \notin S$. Sea

$$X = \{\gamma \in \beta_0 + 1 : \gamma \notin S\}.$$

Como X es no vacío, tiene elemento mínimo, digamos γ_0. Entonces se tiene que $[\alpha_0, \gamma_0) \subset S$, pero $\gamma_0 \notin S$, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición. Sea B conjunto bien ordenado con elemento mínimo b_0. Para $b \in B$ se define **la sección** de b en B; escribimos $S_b(B)$ (si se sobreentiende el conjunto subyacente simplemente escribimos S_b) como el intervalo $[b_0, b)$.

Lema 3. Sean E y J dos conjuntos bien ordenados. Sea $h : J \to E$. Entonces son equivalentes:
(i) h preserva el orden y su imagen es E o una sección de E.
(ii) $h(j) = min[E \setminus h(S_j)]$ para todo $j \in J$.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Supongamos que no pasa, es decir, existe $j \in J$ tal que $h(j) \neq min[E \setminus h(S_j)]$. En esta situación tenemos dos casos.
Caso 1: $h(j) < m = min[E \setminus h(S_j)]$. Por ser m mínimo, existe $j' < j$ tal que $h(j') = h(j)$ (esto porque la imagen de h es sección de E o todo E), lo cual contradice que h preserva el orden.
Caso 2: $h(j) > m = min[E \setminus h(S_j)]$. Como h preserva el orden, entonces para cada $j' > j$ tenemos que $h(j') > h(j)$. De lo anterior y de que $J = S_j \cup \{j' \in J : j \leq j'\}$, tenemos que

$m \notin h(J)$, lo cual contradice que $h(J)$ sea o bien todo E, o bien sección de éste.
En conclusión $h(j) = min[E \setminus h(S_j)]$ para todo $j \in J$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Veamos primero que h preserva el orden. Sean $j, j' \in J$ con $j < j'$. Como $S_j \subset S_{j'}$ entonces $h(S_j) \subset h(S_{j'})$, y así $h(j) = min[E \setminus h(S_j)] \leq min[E \setminus h(S_{j'})] = h(j')$, pero más aún, como $j \in S_{j'}$ tenemos $h(j) \neq h(j')$, por lo tanto $h(j) < h(j')$, con lo que concluimos que h preserva el orden.
Ahora notemos que para cada $j \in J$ se cumple que $h(S_j) = S_{h(j)}$. Supongamos que esto no pasa. Como la inclusión $h(S_j) \subset S_{h(j)}$ es siempre verdadera (pues h preserva el orden), tenemos que para algún $j \in J$ existe un $e \in E$ tal que $e < h(j)$ y $e \notin h(S_j)$. Sea

$$j_0 = min\{j \in J : h(j) > e\}.$$

De aquí podemos ver que $min[E \setminus h(S_{j_0})] \leq e$, lo cual contradice que $h(j_0) = min[E \setminus h(S_{j_0})]$, con lo cual concluimos que h preserva el orden y $h(j)$ es o bien todo E o una sección de éste. □

Lo que dice el siguiente lema es que dados dos ordinales, éstos son iguales (isomorfos) o uno es (isomorfo a) una sección del otro .

Lema 4. Sean I y J conjuntos bien ordenados. Entonces o bien existe $h : I \to J$ que preserva el orden y $h(I) = J$ ó $h(I)$ es sección de J, o bien existe $g : J \to I$ de forma análoga.

Demostración. Definamos esta función como sigue: para $i_0 = min(I)$, sea $h(i_0) = j_0 = min(J)$ y si $i > i_0$, $f(i) = min[J \setminus h(S_i)]$, en caso de que se pueda; si esto no se puede es por que para un primer $i \in J$ se tiene que $S_i = J$; si éste es nuestro caso, nótese que por el lema anterior, tenemos que h es inyectiva y manda secciones en secciones. También notemos que h^{-1} es de la misma forma que h (es decir $h^{-1}(j) = min[I \setminus h^{-1}(S_i)]$), por lo cual podemos definir $g : J \to I$ de esta forma ($g(j) = min[I \setminus g(S_i)]$), que "coincide con h^{-1}" (más precisamente con la parte que se pudo definir bien). Con lo anterior y por el lema anterior, se tiene que existen o bien h, o bien g (o ambas y una es inversa de la otra), que preservan el orden y la imagen de h es sección de J, o es todo J, o viceversa. □

Definición. Sean X un conjunto no vacío y f una función de elección para X. Si $T \subset X$ y $\leq$ es una relación en T, decimos que $(T, \leq)$ es **torre en X para** f si $\leq$ es un buen orden sobre T y para cada $x \in T$,

$$x = f(X \setminus S_x(T)),$$

recordando que $S_x(T)$ denota la sección de x en T.

Teorema 3. El axioma de elección es equivalente al teorema del buen orden.

Demostración.
$(TBO \Rightarrow AC)$ Sea A un conjunto no vacío. Sea $\leq$ un buen orden para A; defínase
$f : \wp(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$ la función que a cada $B \subset A$ no vacío lo envía en su elemento mínimo; tal elemento existe por ser $\leq$ buen orden. Es claro que ésta es una función de elección para A.
$(AC \Rightarrow TBO)$ Sean X un conjunto y $f : \wp(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ una función de elección. La prueba se efectuará en 3 partes.
(1) Sean T_1, T_2 dos torres en X para f. Entonces $T_1 = T_2$ o una es sección de la otra.
Dem : Primero, por el lema 6 podemos suponer que existe $h : T_1 \to T_2$ que preserva el orden y además $h(T_1)$ es o bien T_2 o una sección de T_2. Veamos que tenemos más que esto, es decir que

$h(x) = x$ para toda $x \in T_1$. Para ver esto procedamos por inducción (podemos hacerlo pues son conjuntos bien ordenados).
Consideremos t_1 el primer elemento de T_1. Por ser T_1 torre tenemos que $t_1 = f(X \setminus S_{t_1}(T_1))$ pero $S_{t_1}(T_1) = \emptyset$ y también se tiene esto para T_2 y si su elemento mínimo es t_2; entonces $t_1 = f(X \setminus S_{t_1}(T_1)) = f(X) = f(X \setminus S_{t_2}(T_2)) = t_2$.
Ahora supongamos que para cierta $t \in T_1$ tenemos que para todo $u \in T_1$ si $u < t$, entonces $h(u) = u$. Por lo tanto $h(S_u(T_1))$ es una sección de T_2, pues de no serlo, existe un $v \in T_2$ de tal manera que hay un $u_0 < t$ tal que $v < h(u_0)$ y ningún $u < t$ tiene por imagen a v, pero esto no puede ser pues $h(T_1)$ es o sección de T_2 o todo T_2, y ningún $t \in T_1$ con $t > u_0$ puede tener por imagen a v, esto por que h preserva el orden. Así $v \notin h(T_1)$, lo cual es una contradicción. Teniendo lo anterior y por el lema 3 es claro que $h(t) = min[T_2 \setminus h(S_t(T_1))]$. También $h(S_t(T_1)) = S_w(T_2)$, donde $w = min[T_2 \setminus h(S_t(T_1))]$, más aún $S_t(T_1)) = S_w(T_2)$, esto por hipótesis de inducción. Ahora, como T_1, T_2 son ambas torres, se tiene $t = f(X \setminus S_t(T_1)) = f(X \setminus S_w(T_2)) = w$, con lo que concluimos que $h(t) = t$ para toda $t \in T_1$.
(2) Si $(T, <)$ es una torre en X para f. Entonces existe una $(T', <')$ torre en X para f de la cual T es sección.
Dem : Consideremos $t' = f(X \setminus T)$, sea $T' = T \cup \{t'\}$ y definase sobre T' el orden $<'$ como sigue: Para todo $t \in T$ se tiene $t <' t'$, y entre elementos de T el orden es $<$. Es claro que $(T', <')$ es torre y $(T, <) = (S_{t'}(T'), <')$.
(3) Sea $\{(T_k, <_k) : k \in K\}$ la colección de todas las torres en X para f. Sean $T = \bigcup_{k \in K} T_k$ y $<$ la unión de todos los $<_k$ con $k \in K$ (es decir, como para todo $k \in K$, $<_k$ es una relación en $X \times X$ y para cualesquiera $k_1, k_2 \in K$, $<_{k_1}$ y $<_{k_2}$ son compatibles (esto por (1)), se tiene que $<$ es también relación de la misma naturaleza que todos los $<_k$). Entonces $(T, <)$ es una torre en X para f; más aún $T = X$.
Dem : Sea $B \subset T$. Entonces por la parte (1), $B \subset T_k$ para algún $k \in K$, por lo cual B tiene elemento mínimo t con $<_k$ pero también t es mínimo con $<$, esto gracias a (1), con lo que $<$ define un buen orden en T. Ahora es claro que para cada $t \in T$, $t \in T_k$ para algún $k \in K$ y además tenemos por (1) que $S_t(T_k) = S_t(T)$, de lo cual se tiene que $t = f[X \setminus S_t(T)]$. Supongamos que $T \neq X$. Esto no es posible pues por (2) hay una torre que la contiene propiamente pero T era la unión de todas las torres.
En conclusión $<$ es un buen orden para X. □

3.2. Resultados sobre Ordinales

En general, dados dos ordinales α y β decimos que $\alpha \leq \beta$ si y sólo si existe una función inyectiva de α en β que respeta el orden; gracias a esto podemos considerarlos de tal manera que $\alpha \subset \beta$ o, equivalentemente, $\alpha \in \beta$. Por esta razón denotamos al ordinal α por $[0, \alpha)$ (su sección en cualquier ordinal β mayor que él).
Sea X un conjunto no numerable y démosle un buen orden; esto es posible por TBO, así X es un ordinal, como también lo es $Y = X \cup \{X\}$ (con X como elemento mayor de Y y los demás elementos tienen el mismo orden que tenían en X). Ahora, el subconjunto de Y que consta de todos los ordinales no numerables es no vacío (pues $X \in Y$), así que tiene primer elemento. Ese elemento es el primer ordinal no numerable y lo denotamos por Ω. Entonces $\Omega = [0, \Omega)$ es no numerable pero sus elementos son todos numerables. Además Ω es ordinal límite.

Cabe hacer notar que los ordinales que hemos definido son los mismos que se definen en la teoría de conjuntos: conjuntos bien ordenados, transitivos y tales que la pertenencia ($\in$) es un buen orden sobre éstos.
Consideremos β un ordinal. Le damos topología (la dada por el orden). Para cada $\alpha \leq \beta$ una vecindad básica en $(0, \beta]$ de α es $U = (\gamma, \beta]$, pues $U = (\gamma, \beta + 1)$ si $\alpha < \beta$, y si no entonces $\alpha = \beta$ es el elemento mayor. También tenemos que si α es ordinal sucesor, $\alpha = \gamma + 1$; entonces $\{\alpha\}$ es abierto (pues $\{\alpha\} = (\gamma, \alpha + 1)$). También $\{0\}$ es abierto.

Nótese que todo ordinal límite es un punto de acumulación en la topología del orden (esto por definición de ordinal límite).
Recordemos que, en general $\overline{(a, b)} \neq [a, b]$ (ver Ejemplo 8); sin embargo, para ordinales límite el resultado es cierto como veremos a continuación.

Proposición 6. Sea α ordinal límite. Entonces $[0, \alpha]$ es la cerradura de $[0, \alpha)$ dentro de cualquier ordinal $\beta > \alpha$.

Demostración. $[0, \alpha]$ es cerrado pues su complemento es (α, β) (que podría ser vacío si $\beta = \alpha + 1$). □

Con relación a la proposición anterior, cabe hacer notar que el resultado es falso para ordinales sucesores, pues si $\alpha + 1$ es ordinal sucesor, se tiene que $[0, \alpha + 1) = [0, \alpha]$ que ya es un conjunto cerrado.

Proposición 7. Todo subconjunto numerable A de $[0, \Omega)$ tiene cota superior en $[0, \Omega)$.

Demostración. Para cada $\alpha \in A$ se tiene que $[0, \alpha)$ es numerable. Consideremos $B = \bigcup_{\alpha \in A} [0, \alpha)$. Como B es unión numerable de numerables, B también es numerable por lo que $B \neq [0, \Omega)$. Sea $\gamma \in [0, \Omega) \setminus B$. Entonces γ es numerable y es cota superior para A (pues si $\alpha \in A$ y $\gamma < \alpha$, entonces $\gamma \in [0, \alpha) \subset B$). □

Recordemos algunas definiciones de topología. Dado un espacio topológico X decimos que

- X es **segundo numerable** (o que satisface el segundo axioma de numerabilidad), si existe base numerable para su topología.
- X es **primero numerable** (o que satisface el primer axioma de numerabilidad), si cada $x \in X$ tiene base local numerable.

Recordemos también que todo espacio métrico es primero numerable.

Proposición 8. $[0, \Omega]$ no es primero numerable (y, por lo tanto, tampoco es metrizable).

Demostración. Supongamos que sí lo es. Entonces existe sucesión $(a_n)_{n \in \omega}$ en $[0, \Omega)$ que converge a Ω; pero el conjunto $A = \{a_n : n \in \omega\}$ es numerable así que, por la proposición anterior, tiene cota superior $\alpha_0 \in [0, \Omega)$; entonces $(\alpha_0, \Omega] \cap A = \emptyset$, lo cual es una contradicción. □

Probaremos que, aunque $[0, \Omega)$ sí es primero numerable (Ver Proposición 9), $[0, \Omega)$ no es metrizable. Para ello necesitamos un par de lemas.

Lema 5. En $[0, \Omega)$ todo conjunto infinito tiene punto de acumulación.

Demostración. Sea $A \subset [0, \Omega)$ infinito. Sean $B \subset A$ infinito numerable y $b_1 = min(B)$, $b_2 = min(B \setminus \{b_1\})$, ..., $b_m = min(B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_{m-1}\})$, ...
Es claro que $(b_n)_{n \in \omega}$ es sucesión estrictamente creciente. Sea β mínima cota superior (esto por el buen orden de Ω y proposición 8). Entonces β es punto de acumulación de B y, por lo tanto, de A. □

Lema 6. Si X es compacto (se verá más sobre espacios compactos en el capítulo 6) y A es un subconjunto infinito de X. Entonces A tiene punto de acumulación.

Demostración. Supongamos que no pasa, es decir, $A' = \emptyset$ (A' denota el conjunto de puntos de acumulación de A); pero entonces A es cerrado pues $\bar{A} = A \cup A' = A$. Por ser X compacto y $A \subset X$ cerrado, A es también compacto. Para cada $a \in A$ sea U_a abierto tal que $U_a \cap A = \{a\}$ (tal U_a existe pues a no es punto de acumulación). Entonces la cubierta $\{U_a : a \in A\}$ tiene subcubierta finita, lo cual es una contradicción pues A es infinito. □

Lema 7. Sea X un espacio T_1 (es decir que los puntos son cerrados (véase capítulo 4)). Si $A \subset X$ y $x \in A'$, entonces toda vecindad de x contiene una infinidad de elementos de A.

Demostración. Supongamos que $U \in \mathcal{N}_x$ es tal que $U \cap A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Usando que X es T_1, para cada $x_i \neq x$ tomemos $V_i \in \mathcal{N}_x$ que no contenga a x_i. Entonces $V = \cap V_i$ es una vecindad de x tal que $(V \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $x \in A'$. □

Decimos que un espacio topológico es **compacto por sucesiones** si toda sucesión tiene subsucesión convergente.

Lema 8. Sea X un espacio primero numerable y T_1. Si todo conjunto infinito tiene punto de acumulación entonces X es compacto por sucesiones.

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión en X. Si el conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es finito, entonces alguno de los términos se repite una infinidad de veces, así que la subsucesión constante de ese término es convergente. Supongamos entonces que A es infinito; por hipótesis sea $x \in A'$. Construyamos entonces una subsucesión de $(x_n)_n$ que converga a x: Sea $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ de tal suerte que $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$; por inducción construimos $x_{n_k} \in U_k$ de manera que $n_{k+1} > n_k$ (esto se puede gracias al lema anterior). Es claro que la subsucesión $(x_{n_k})_k$ converge a x. □

Dada $\mathcal{U}$ una cubierta abierta para un espacio métrico (X, d), decimos que $\delta > 0$ es **número de Lebesgue** para $\mathcal{U}$ si para todo $A \subset X$ con $diam(A) < \delta$, se tiene que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U$. Es claro que si δ es número de Lebesgue para $\mathcal{U}$ entonces cualquier real positivo $\delta' < \delta$ también lo es. No toda cubierta tiene número de Lebesgue. El siguiente lema nos da una condición suficiente.

Lema 9. Si (X, d) es un espacio métrico compacto por sucesiones entonces toda cubierta abierta para X tiene número de Lebesgue.

Demostración. Supongamos que no y sea $\mathcal{U}$ cubierta abierta sin número de Lebesgue. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $A_n \subset X$ de diámetro menor que $1/n$ y que no esté contenido en ningún elemento de $\mathcal{U}$. Sea $a_n \in A_n$. Usando la hipótesis consideremos una subsucesión de $(a_n)_n$ que converja, digamos a $x_0 \in X$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $B_{1/m}(x_0) \subset U$; sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 2m$ y

$$a_{n_k} \in B_{1/(2m)}(x_0);$$

entonces, dado que el diámetro de A_{n_k} es menor que $1/n_k$, tenemos que $A_{n_k} \subset B_{1/(2m)}(x_0) \subset U$, lo cual es una contradición. $\square$

Lema 10. Sea X espacio métrico. Entonces son equivalentes:
(i) X es compacto.
(ii) Todo conjunto infinito en X tiene punto de acumulación.
(iii) Toda sucesión en X tiene subsucesión convergente.

Demostración.
$(i) \Rightarrow (ii)$ Esto se demostró en general en el lema 6.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Como X es métrico, entonces es T_1 y primero numerable, así que esto se demostró en el lema 8.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Veamos primero que para cada $\epsilon > 0$ existe una cubierta finita de X formada por bolas de radio ϵ. Supongamos que no pasa y sea $\epsilon > 0$ tal que ninguna unión finita de bolas de radio ϵ cubra a X. Por inducción construyamos una sucesión $(x_n)_n$ en X como sigue: Sea $x_1 \in X$ cualquiera y para $n \geq 2$ sea $x_n \in X \setminus B_\epsilon(x_1) \cup \ldots \cup B_\epsilon(x_{n-1})$. Como X es compacto por sucesiones, $(x_n)_n$ tiene subsucesión convergente, sin embargo esto es claramente imposible pues los términos de la sucesión distan entre sí más que ϵ (o sea que la sucesión no es de Cauchy, lo cual es necesario para cualquier sucesión convergente en espacios métricos).
Ahora probemos que X es compacto usando el lema anterior. Sea $\mathcal{U}$ cubierta abierta para X y sea δ un numero de Lebesgue para $\mathcal{U}$. Usando lo probado arriba tomemos $x_1, \ldots, x_n$ tales que

$$X = \bigcup_{i \leq n} B_{\delta/3}(x_i).$$

Como estas bolas tienen diametro menor que δ, cada una de ellas está contenida dentro de algún elemento de $\mathcal{U}$, digamos $B_{\delta/3}(x_i) \subset U_i$. La cubierta buscada es $\{U_1, \ldots, U_n\}$. $\square$

Proposición 9. $[0, \Omega)$ es primero numerable pero no metrizable.

Demostración. Es fácil ver que es primero numerable, pues para cada $\beta \in [0, \Omega)$ se tiene que $\{(\alpha, \beta] : \alpha < \beta\}$ es base local para β, y ésta es numerable pues β lo es. Luego $[0, \Omega)$ no es compacto (pues $\{[0, \alpha + 1) : \alpha < \Omega\}$ es cubierta sin subcubierta finita), pero por el lema 5 todo subconjunto infinito tiene punto de acumulación, y esto, gracias al lema anterior, es imposible en espacios métricos. $\square$

Notemos que $[0, \Omega)$ no es segundo numerable. Supongamos que sí lo es. Sea

$$B = \{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\},$$

base numerable para $[0, \Omega)$, pero nótese que, gracias a la proposición 7, el conjunto $\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en $[0, \Omega)$, por lo que B no puede ser base.

Es bastante claro que $\mathbb{R}$ es homeomorfo al espacio ordenado (con el orden lexicográfico) $([0, \omega) \times [0, 1)) \setminus \{0 \times 0\}$ (donde $[0, \omega)$ es el conjunto de ordinales menores que ω y $[0, 1)$ es el intervalo de reales mayores o iguales que 0 y menores que 1). Imitando esta construcción definimos **la recta larga** $\mathbb{L} = [0, \Omega) \times [0, 1)$. Éste es un espacio topológico que analizaremos posteriormente.

Capítulo 4

Axiomas de separación

Ahora veremos qué espacios satisfacen los axiomas de separación. Recordemos las siguientes definiciones bien conocidas de topología.
Sea X espacio topológico.

- Decimos que X es T_1 si dados $x, y \in X$ existen U, V abiertos tales que $x \in U$ y $y \notin U$, además de que $y \in V$ y $x \notin V$.

- Decimos que X es T_2 o **Hausdorff** si para cualesquiera elementos $x, y \in X$ existen U, V abiertos ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$.

- Decimos que X es T_3 o **regular** si es T_1 y cualesquiera $C \subset X$ cerrado y $x \in X \setminus C$ se pueden separar mediante abiertos ajenos.

- Decimos que X es T_4 o **normal** si es T_1 y cualesquiera dos cerrados ajenos se pueden separar mediante abiertos ajenos.

Es fácil ver que $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$ (pero no al revés). Probaremos que todo ordinal es normal, primero porque es una prueba bastante fácil, y segundo, por que la prueba del resultado más en general (para espacios ordenados) es una generalización de ésta.

Proposición 10. Todo ordinal es normal.

Demostración. Sean A y B cerrados ajenos. Buscamos U y V abiertos ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Podemos suponer que 0 no es elemento de $A \cup B$ (pues si, por ejemplo $0 \in A$, podemos trabajar con $A \setminus \{0\}$ en lugar de A y, al final, agregar $\{0\}$ (que es abierto y cerrado) al U que encontremos). Para cada $a \in A$ sea $(x_a, a]$ básico que no intersecta a B, y para cada $b \in B$ sea $(y_b, b]$ básico que no intersecta a A. Los abiertos que separan a A y B son $U = \bigcup_{a \in A}(x_a, a]$ y $V = \bigcup_{b \in B}(y_b, b]$. $\square$

Ahora nos disponemos a probar el resultado general, es decir que todo espacio ordenado es normal. Haremos esto por pasos, primero probando que son T_2, luego T_3 y, finalmente, T_4.

Proposición 11. Sea X espacio topológico ordenado; entonces X es Hausdorff.

Lema 11. Sean X espacio topológico ordenado y $B \subset X$ cerrado. Si B está acotado superiormente y además B tiene supremo s, entonces se tiene que $s \in B$.

Demostración. Supongamos que $s \notin B$. Como B es cerrado, existe $a \in X$ tal que $a < s$ y $(a, s] \cap B = \emptyset$, de aquí que a es cota de B y $a < s$, lo cual es una contradicción puesto que s era supremo. Por lo tanto $s \in B$. □

Lema 12. Sea X espacio topológico ordenado; entonces X es regular.

Demostración. Ya tenemos que X es T_1 por ser Hausdorff.
Sean $B \subset X$ cerrado y $z \in X \backslash B$. Consideremos

$$P = \{b \in B : b < z\} \text{ y } Q = \{b \in B : b > z\}.$$

Es claro que P y Q son acotados superior e inferiormente, respectivamente. Tenemos dos casos:
Caso 1: Si P tiene supremo, digamos α, entonces, por el lema anterior, $\alpha \in B$ y $\alpha < z$; de esto y por ser X Hausdorff podemos separar a z de α mediante abiertos ajenos y, por lo tanto, es claro que podemos separar P y z con abiertos ajenos.
Caso 2: P no tiene supremo. De esto y de que z es cota se sigue que existe α cota de P y $\alpha < z$; de aquí que podemos separar P y z mediante abiertos ajenos.
Sean U_1 y V_1 abiertos ajenos que contengan a z y a P, respectivamente. Ahora, haciendo lo análogo, obtenemos separación en abiertos (U_2, V_2) para z y Q, de lo cual concluimos que $U = U_1 \cap U_2$ y $V = V_1 \cup V_2$ es separación en abiertos ajenos para z y B. □

Teorema 4. Sea X espacio topológico ordenado; entonces X es normal.

Demostración. Ya tenemos que X es T_1 por ser Hausdorff.
Sean $B, C \subset X$ cerrados ajenos. Usando que X es regular, para cada $c \in C$ tomemos $U_c = (x_c, y_c)$ con $x_c < c < y_c$ básico que sea parte de una separación en abiertos para $\{c\}$ y B. Es claro que $\bigcup_{c \in C} U_c$ es un abierto que contiene a C y ajeno con B. Ahora para cada $b \in B$ consideremos

$$S_b = \{c \in C : c < b\} \text{ y } T_b = \{c \in C : b < c\}.$$

Observemos que S_b y T_b son acotados superior e inferiormente, respectivamente. Para S_b tenemos dos casos:
Caso 1: S_b tiene supremo s. Por el lema 11, $s = c_0 \in C$ y $c_0 < b$. Para esta situación podemos tener 3 casos:
Primero. Que b sea el elemento consecutivo a c_0. En este caso tendremos que $y_{c_0} = b$ por ser (x_{c_0}, y_{c_0}) vecindad de c_0 y ajena con B; de este hecho concluimos que $V_{1_b} = (c_0, \infty)$ es un abierto ajeno a $\bigcup_{c \in S_b} U_c$.
Segundo. Existe $b' \in B$ con $c_0 < b' < b$. Entonces $V_{1_b} = (b', \infty)$ es abierto que contiene a b y ajeno a $\bigcup_{c \in S_b} U_c$.
Tercero. Existe $z \in X$ con $c_0 < z < b$ y $(c_0, b) \cap B = \emptyset$. Para $c \in S_b$ sea $z_c = z$ si $y_c > z$, o $z_c = y_c$ si $y_c \leq z$. Entonces $V_{1_b} = (z, \infty)$ y $\bigcup_{c \in S_b}(x_c, z_c)$ son abiertos ajenos y $S_a \subset \bigcup_{c \in S_b}(x_c, z_c)$.
Caso 2: S_b no tiene supremo. En estas circunstancias tenemos 2 casos; de hecho son casi el segundo y tercero del caso 1 que quedan resueltos de la misma forma esencialmente.
Ahora de nuevo. Para cada $b \in B$, trabajamos para T_b como lo hicimos para S_b pero con ínfimos y obtenemos abiertos V_{2_b} y elementos w_c análogos a los z_c. De esto, $V_b = V_{1_b} \cap V_{2_b}$ es abierto que contiene a b y ajeno a $\bigcup_{c \in C}(w_c, y_c)$.
Notemos que en la parte en que se alteraron los x_c y y_c, cada uno de éstos se alteró a lo más una vez y, por esto, para cada $c \in C$, $U'_c = (w_c, z_c)$ es un abierto que contiene a c y ajeno a todos los V_b para $b \in B$. De lo anterior se concluye que

$$(U = \bigcup_{c\in C} U'_c \ , \ V = \bigcup_{b\in B} V_b)$$

es separación en abiertos ajenos de C y B, con lo cual hemos probado que X es normal. $\square$

Como habíamos anunciado, los ordinales nos proporcionan contraejemplos muy importantes en topología. Por ejemplo podemos probar que subespacio de normal no es normal ni producto de normales es normal como veremos a continuación.

Proposición 12. $[0,\Omega] \times [0,\Omega]$ (con la topología producto) es normal.

Demostración. Podemos suponer que $[0,\Omega]$ es compacto (se probará en el capítulo 6) y Hausdorff (ya se probó), por lo tanto $[0,\Omega] \times [0,\Omega]$ es compacto y Hausdorff, en consecuencia es normal. $\square$

Lema 13. Sea X un espacio topológico. Entonces X es Hausdorff si y sólo si $\Delta = \{x \times x \in X \times X : x \in X\}$ es un conjunto cerrado en $X \times X$.

Proposición 13. El espacio $Z = [0,\Omega) \times [0,\Omega]$ (con la topología producto) no es normal.

Demostración. Como $X = [0,\Omega] \times [0,\Omega]$ es Hausdorff, su diagonal $\Delta = \{(x,x) : x \in [0,\Omega]\}$ es cerrada. Sea $A = \Delta \cap Z = \Delta \setminus \{\Omega \times \Omega\}$. Entonces A es cerrado en Z. También $B = [0,\Omega) \times \{\Omega\}$ es cerrado. Veamos que A y B no se pueden separar. Supongamos que sí y sean U y V abiertos ajenos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$. Dado $x \in [0,\Omega)$ existe β tal que $x < \beta < \Omega$ y $x \times \beta \notin U$ (pues si $x \times \beta \in U$ para toda β, entonces $x \times \Omega$ sería punto de acumulación de $U \subset Z \setminus V$ que es cerrado, así que $x \times \Omega$ pertenecería a $Z \setminus V$, lo cual es una contradicción). Sea $\beta(x)$ el menor de estos $\beta's$. Definimos una sucesión en $[0,\Omega)$ como sigue: x_1 es cualquier punto y, para $n \geq 2$, $x_n = \beta(x_{n-1})$. Entonces $x_1 < x_2 < \ldots$. Sea $b = sup\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = sup\,\{\beta(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ (el cual es claro que existe). Entonces b es punto de acumulación de los x_n, de donde $x_n \times \beta(x_n) \to b \times b \in A \subset U$, lo cual es imposible porque $x_n \times \beta(x_n) \notin U$ para ningún $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Capítulo 5

Conexos

Recordemos que si X es espacio topológico, decimos que X es **disconexo**, si existe una separación en abiertos no trivial (es decir, que existan U, V abiertos ajenos no vacíos y tales que $U \cup V = X$). En caso contrario decimos que X es **conexo**.

Teorema 5. Sea $(X, \leq)$ un espacio topológico ordenado. Entonces X es conexo si y sólo si cumple:

1. Dados $x, y \in X$ con $x < y$ existe z de tal modo que $x < z < y$.

2. La propiedad del supremo.

Si X cumple 1 y 2 decimos que X es un **continuo lineal**.
Si sólo cumple 1 decimos que es **orden lineal denso** (OLD).

Demostración.
($\Rightarrow$) Primero supongamos que no cumple 1 y sean $x, y \in X$ con $x < y$ y tales que $(x, y) = \emptyset$. Entonces $U = (-\infty, y)$ y $V = (x, \infty)$ forman una separación no trivial en abiertos de X, lo cual es un absurdo.
Ahora supongamos que no satisface 2; de esto se sigue que existe $A \subset X$, con $A \neq \emptyset$ acotado superiornente y sin supremo. Sean $B = \{x \in X : \forall a \in A, a < x\}$, $U = \bigcup_{a \in A}(-\infty, a)$ y $V = \bigcup_{b \in B}(b, \infty)$. Observemos primero que $U \cap V = \emptyset$ (esto es claro por como se define B). Ahora veamos que $X = U \cup V$.
Sea $x \in X$.
Caso 1: Si $x \leq a$ para algún $a \in A$ entonces $x \in (-\infty, a_1)$ para algún $a_1 \in A$ por A no tener supremo; por lo tanto $x \in U$.
Caso 2: Si para cada $a \in A$ se tiene que $a < x$, entonces, como A no tiene supremo, quiere decir que B no tiene elemento mínimo; por lo tanto existe $b \in B$ con $b < x$ y así $x \in (b, \infty)$, de donde $x \in V$.
En consecuencia $X \subset U \cup V$, de donde (U, V) es separación no trivial en abiertos para X, y esto es una contradicción.
($\Leftarrow$) Supongamos que X es disconexo y sea (U, V) separación en abiertos para X. Sean $u \in U$ y $v \in V$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $u < v$. Sea $A = \{x \in U : (u, x) \subset U\}$ y sea α su supremo.
Caso 1: $\alpha \in U$. Queremos probar que $\alpha \in \overline{V}$. Consideremos (x_1, x_2) con $x_1 < \alpha < x_2$. Como α es supremo, por la propiedad 1 existe z con $\alpha < z < x_2$ y $z \notin U$; por lo tanto $(x_1, x_2) \cap V \neq \emptyset$,

de donde $\alpha \in \overline{V} = V$ y así $\alpha \in U \cap V$, y esto es imposible.
Caso 2: $\alpha \in V$. Queremos demostrar que $\alpha \in \overline{U}$. Consideremos (x_1, x_2) con $x_1 < a_0 < x_2$. Como α es supremo, por la propiedad 1 existe $z \in U$ tal que $x_1 < z < \alpha$, por lo tanto $\alpha \in \overline{U} = U$, de donde $\alpha \in U \cap V$ y esto también es una contradicción.
En conclusión X es conexo. □

Ahora utilicemos la teoría de espacios ordenados para ver algunos ejemplos de espacios conexos y disconexos.
Empecemos con dos ejemplos similares pero en los que uno es conexo y el otro no.

Ejemplo 14. Consideremos a $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico. Tenemos que $\mathbb{R}^2$ es disconexo con la topología del orden pues cada línea vertical es un conjunto abierto y entonces una separación en abiertos para $\mathbb{R}^2$ es $U = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ y $V = [0, \infty) \times \mathbb{R}$. (Observemos que $\mathbb{R}^2$ no es continuo lineal pues el conjunto $A = \{x \times 0 : x \in \mathbb{R}\}$ es acotado pues 1×0 es cota pero A no tiene supremo.)

Ejemplo 15. $[0, 1] \times [0, 1]$ con el orden lexicográfico es conexo.

Demostración. Veamos que es continuo lineal.
Cumple 1 pues si $x \times y < w \times z$ son elementos de $[0, 1] \times [0, 1]$ tenemos dos casos:
Caso 1: $x = w$. En este caso tenemos dos elementos $y, z \in [0, 1]$ en donde sí existe un $v \in [0, 1]$ con $y < v < z$; así $x \times y < x \times v < w \times z$.
Caso 2: $x < w$ en este caso existe $v \in [0, 1]$ con $x < v < w$, de lo que se sigue $x \times y < v \times v < w \times z$.
Cumple 2. En efecto, como 1×1 es elemento máximo veamos que todo subconjunto tiene supremo. Sean $B \subset [0, 1] \times [0, 1]$ y S el conjunto de los x tales que x es la primera cordenada de un elemento de B, y sea s su supremo (tal s existe pues $S \subset [0, 1]$). Ahora tenemos dos casos:
Caso 1: $s \notin S$. En este caso es claro que $s \times 0$ es supremo de B.
Caso 2: $s \in S$. En este caso sea Q el conjunto de los y tales que $s \times y \in B$, y sea q su supremo. Entonces $s \times q$ es supremo de B.
En conclusión $[0, 1] \times [0, 1]$ es continuo lineal. □

En general tenemos lo siguiente.

Ejemplo 16. Sea X ordenado y conexo con topología del orden. Entonces $X \times [0, 1]$ es conexo (con la topología dada por el orden lexicográfico).

Demostración. Es bastante claro ya que, salvo por particularidades que no tienen la menor dificultad, la demostración sigue el esquema de la del ejemplo 15. □

Veamos los siguientes ejemplos:

1. $\mathbb{Q}$ no es continuo lineal pues no satisface 2.

2. $\mathbb{N}$ no es continuo lineal pues no satisface 1.

3. $\mathbb{R} \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico sí es continuo lineal.

4. $[0, 1] \cup (2, 3]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ no es continuo lineal pues no es conexo.

5. $[0, 1] \cup (2, 3]$ con la topología del orden sí es continuo lineal pues es homeomorfo a $[0, 2]$ que es conexo.

Ejemplo 17. Sea α un ordinal. Entonces $X = \alpha \times [0,1)$ es conexo.

Demostración. También para ver esto, gracias al teorema 5, basta con convencernos que es un continuo lineal.
Notemos que cumple 1. Sean $x, y \in X$ con $x < y$. Si la primera coordenada de x y la de y son iguales, tenemos prácticamente el caso de dos elementos en el intervalo [0,1) en donde sí existe siempre un elemento intermedio. En caso de que la primera coordenada sea distinta, digamos α_1 y α_2 con $\alpha_1 < \alpha_2$, sea t_0 la segunda coordenada de x; entonces es claro que $z = \alpha_1 \times (t_0 + ((1 - t_0)/2))$ es tal que $x < z < y$.
Ahora observemos que cumple 2. Sea A un subconjunto de X acotado superiormente. Tomemos α_0 el mínimo ordinal tal que $\alpha_0 \times t$ es cota de A para algún $t \in [0,1)$.
Caso 1. Si existe algún elemento en A que tiene como primera coordenada a α_0, entonces ya está el resultado pues tenemos la situación de un subconjunto de [0,1) acotado por, digamos, un $t_1 < 1$, que claramente tiene supremo.
Caso 2. Si para todo $a \in A$ se tiene que la primera coordenada es menor que α_0 entonces es claro que $s = \alpha_0 \times 0$ es su supremo.
Hemos probado que X es conexo. $\square$

Como sabemos, un espacio topológico X es **conexo por trayectorias** (cpt) si para cualesquiera $x, y \in X$ existe trayectoria entre ellos, es decir existe función continua f del intervalo $[0,1]$ en X tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.
También recordemos de nuestros cursos de topología que imagen continua de conexo es conexo, y que si C es un subconjunto conexo de un espacio topológico X y (U, V) es una separación en abiertos para X, entonces $C \subset U$ o $C \subset V$. También tenemos que si X es cpt entonces X es conexo. El recíproco no es cierto, y como ejemplo tenemos la curva del topólogo definida en $\mathbb{R}^2$ como sigue:

$$C = \{x \times sen(1/x) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1]\} \cup (\{0\} \times [-1,1]).$$

A continuación mencionamos una importante conclusión de que la imagen continua de conexo es conexo. Ésta nos dice que si una función continua de un conexo a un ordenado toma dos valores; entonces también toma todos los valores intermedios entre ellos. Más concretamente:

Teorema 6. (Teorema del Valor Intermedio (TVI)). Sea $f : X \to Y$ con X conexo y Y ordenado. Si $a, b \in X$ son tales que $f(a) < f(b)$, entonces $[f(a), f(b)] \subset f(X)$.

Demostración. Supongamos que no y sea $c \in [f(a), f(b)] \setminus f(X)$. En consecuencia $((-\infty, c), (c, \infty))$ es una separación en abiertos para $f(X)$, lo cual es imposible pues $f(X)$ es conexo. $\square$

Ejemplo 18. $\mathbb{R} \times [0,1]$ y $[0,1] \times [0,1]$ con el orden lexicográfico no son cpt.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{R} \times [0,1]$ sí lo es. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R} \times [0,1]$ tal que $f(0) = 0 \times 0$ y $f(1) = 1 \times 1$. Entonces por TVI, $[0,1] \times [0,1] \subset f([0,1])$. Ahora consideremos $\{x\} \times (0,1)$ tal que $x \in [0,1]$. Ésta es una familia no numerable de abiertos ajenos, por lo que la imagen inversa de tal familia es también familia no numerable de abiertos ajenos en $[0,1]$ lo cual es una contradicción. $\square$

La demostración de que $[0,1] \times [0,1]$ no es cpt es similar.

Ejemplo 19. Sea β un ordinal numerable o $\beta = \Omega$. Entonces $X = \beta \times [0,1)$ es conexo por trayectorias.

Demostración. Sean $x, y \in X$.
Caso 1. Si x e y son tales que su primera coordenada es igual tenemos que es obvio que hay trayectoria de x a y pues prácticamente son dos elementos en el intervalo [0,1) que sí es cpt.
Caso 2. Si x e y tienen primera coordenada distinta, digamos α y γ, entonces α y γ son numerables y, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\alpha < \gamma$. Para cada $\delta \in (\alpha, \gamma)$, tenemos que $\{\delta\} \times [0,1)$ es homeomorfo a $[0,1)$. Como hay sólo una cantidad numerable de deltas entre α y γ, se sigue que para cada $\delta \in (\alpha, \gamma)$ es claro que $\{\delta\} \times [0,1) \cong [0,1)$, de aquí que podamos definir una función continua de $[0,1]$ en $[x, y]$, que más que continua es inmersión pues se van pegando bien ya que β es numerable. $\square$

Ahora veamos qué podemos decir de los espacios ordenados conexos (continuos lineales) y de los órdenes lineales densos.
En cuanto a axiomas de numerabilidad se refiere, tenemos lo siguiente:

Proposición 14. Sea X **OLDSE** (es decir, es OLD sin extremos (sin elementos máximo y mínimo)). Entonces X es primero numerable si, y sólo si, para todo $x \in X$ existen sucesiones $(y_n), (z_n)$ en $X \setminus \{x\}$ tales que $y_n \nearrow x$ (la convergencia es de forma creciente) y $z_n \searrow x$ (la convergencia es de forma decreciente).

Demostración.
($\Rightarrow$) Sean $x \in X$ y $\beta_x = \{B_1, B_2, \ldots\}$ base local para x de intervalos anidados. Por ser X OLDSE podemos suponer que si $B_i = (b_{i,1}, b_{i,2}), B_j = (b_{j,1}, b_{j,2})$ con $i < j$; entonces $b_{i,1} < b_{j,1}$ y $b_{i,2} > b_{j,2}$. Es claro que $\{b_{n,1}\}$ y $\{b_{n,2}\}$ son las sucesiones buscadas.
($\Leftarrow$) Sea $x \in X$; nótese que $\beta = \{(y_i, z_i) : i \in \mathbb{N}\}$ es base local para x, pues es claro que todos estos intervalos son vecindad de x, y si U es básico que contiene a x entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ se tiene que $y_n, z_n \in U$; de esto se sigue que $(y_{m+1}, z_{m+1}) \subset U$, con lo cual β es base local numerable para x. $\square$

Sabemos que todo espacio segundo numerable es separable (pues para construir un denso numerable basta tomar un punto en cada elemento de una base numerable). También sabemos que el recíproco es cierto para espacios métricos. Veamos ahora que también lo es para continuos lineales, y que la demostración es esencialmente la misma que para espacios métricos.

Proposición 15. Sea X continuo lineal. Entonces son equivalentes:

1. X es segundo numerable.

2. X es separable.

Demostración. Sea D denso numerable.
Afirmación: $\beta = \{(a,b) : a, b \in D,\ a < b\}$ es base para la topología de X.
En efecto. Sean $x \in X$ y (y, z) vecindad básica de x. Tanto (y, x) como (x, z) son no vacíos (esto por ser X continuo lineal). Por la densidad de D existen $a, b \in D$ tales que $a \in (y, x)$ y $b \in (x, z)$, de lo cual se sigue que $x \in (a, b) \subset (y, z)$.
Es claro que β es numerable. En conclusión X es segundo numerable. $\square$

Capítulo 6

Compactos

Recordemos que si X es espacio topológico, decimos que X es **compacto** si para toda **cubierta abierta** $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ (es decir, una familia de abiertos cuya unión contiene a X) existe un subconjunto finito $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ de Λ tal que $X \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_k}$. (Decimos que $\{U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_k}\}$ es **subcubierta finita** de $\{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.). Sabemos que cualquier intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es compacto. Generalizaremos esto a espacios ordenados. La demostración es la generalización de la demostración en $\mathbb{R}$.

Teorema 7. Sea X espacio topológico ordenado. Entonces X es compacto si y sólo si cumple:

1. Tiene elementos máximo (α) y mínimo (β).

2. Tiene la propiedad del supremo.

En particular, si X tiene la propiedad del supremo, entonces todo intervalo cerrado es compacto.

Demostración.
($\Rightarrow$) Primero supongamos que no cumple 1, es decir digamos X que no tiene elemento máximo. Ahora consideremos la cubierta abierta $U = \{(-\infty, x) : x \in X\}$. Como X es compacto, sea $\{(-\infty, x_1), (-\infty, x_2), \ldots, (-\infty, x_n)\}$ subcubierta finita. Ahora tomemos $y =$máx$\{x_1, \ldots, x_n\}$ de donde $X \subset (-\infty, y)$, pero $y \notin (-\infty, y)$ lo cual es una contradicción.
Análogamente procedemos si X no tiene elemento mínimo.
Ahora supongamos que no cumple la propiedad del supremo. Sea $B \subset X$ acotado superiormente sin supremo y consideremos

$$\mathcal{U} = \{(-\infty, b) : b \in B\} \cup \{(x, \infty) : (x \in X)(\forall b \in B)(x \geq b)\}.$$

Veamos que es cubierta. Sea $x \in X$.
Caso 1: Si $x \leq b$ para algún $b \in B$, entonces x está en uno de los elementos del primer uniendo.
Caso 2: Si $x \geq b$ para toda $b \in B$, entonces x es cota de B y, como no tiene supremo, existe x' cota de B con $x' < x$ con lo cual x está en uno de los elementos del segundo uniendo. Como $\mathcal{U}$ es cubierta tomemos subcubierta finita $\{(-\infty, b_1), \ldots, (-\infty, b_n), (x_1, \infty), \ldots, (x_m, \infty)\}$. Sean

$$y = \text{máx}\{b_1, \ldots, b_n\} \text{ y } z = \text{mín}\{x_1, \ldots, x_m\}.$$

Entonces $X \subset (-\infty, y) \cup (z, \infty)$, pero $y \in B \subset X$ y $y \notin (-\infty, y) \cup (z, \infty)$, lo cual es una contradicción.
($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U}$ cubierta abierta para X y consideremos

$$B = \Big\{x \in X : (\exists n \in \mathbb{N})(U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U} \wedge [\alpha, x] \subset \bigcup_{j \leq n} U_j)\Big\}.$$

Como β es elemento máximo, β es cota de B; por lo tanto tiene supremo; llamémosle s a este supremo. Primero observemos que $s > \alpha$ y $s \in B$. Sea $U_1 \in \mathcal{U}$ vecindad de α; por lo tanto existe $b \in B$ con $\alpha < b$ y $[\alpha, b) \subset U_1$. Sea $U_2 \in \mathcal{U}$ vecindad de b, de lo cual $b \in B$ y por lo tanto $\alpha < s$.
Ahora sea $U_0 \in \mathcal{U}$ vecindad de s. Entonces existe $c \in X$ con $\alpha < c < s$ y $(c, s] \subset U_0$. Como s es supremo, existe $b \in B$ con $c < b \leq s$ y por lo tanto existen $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ que cubren a $[\alpha, b]$, y de esto podemos concluir que $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ es cubierta para $[\alpha, s]$, con lo cual $s \in B$.
Por último veamos que $s = \beta$. De no ser así y como $s \in B$ sea $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ cubierta finita de $[\alpha, s]$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $s \in U_1$. Por lo tanto, existe $c \in B$ con $s < c \leq \beta$ con $[s, c) \subset U_1$. Ahora sea $U_0 \in \mathcal{U}$ vecindad de c; tenemos entonces que $\{U_0, U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ es cubierta finita para $[\alpha, c]$, lo cual contradice que s es supremo y, por lo tanto, $s = \beta$, de donde concluimos que X es compacto. □

Como se prometió en el capítulo 4 se probará que $[0, \Omega]$ es compacto; de hecho se probará más general:

Corolario. Sea α un ordinal. Entonces α es compacto si y sólo si α es sucesor.

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que no es sucesor, es decir α es límite. Entonces no tiene elemento máximo, lo cual es un absurdo pues contradice al teorema anterior.
($\Leftarrow$) Si α es sucesor, entonces tiene elementos máximo y mínimo. Basta ver que tiene la propiedad del supremo, pero esto es claro gracias a que α es bien ordenado y todo conjunto es acotado por el elemento máximo de α. □

Decimos que X es **numerablemente compacto** si toda cubierta abierta numerable tiene subcubierta finita. Probaremos ahora que $[0, \Omega)$, aunque no es compacto, sí es numerablemente compacto.
Sean X un conjunto y $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\mathcal{C}$ tiene la **propiedad de la intersección finita** (PIF) si toda subcolección finita de ésta tiene intersección no vacía.

Lema 14. Un espacio topológico X es (numerablemente) compacto si y sólo si toda familia (numerable) de cerrados con la PIF tiene intersección no vacía.

Demostración. Lo probaremos para compacto, pues el caso numerable es análogo.
Basta con probar una implicación pues la otra es en esencia lo mismo.
($\Rightarrow$) Sea $\mathcal{C}$ familia de cerrados con la PIF y supongamos que $\bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \emptyset$. Entonces

$$X = X \setminus \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} X \setminus C,$$

de donde $\mathcal{U} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ es una cubierta abierta para X que, por ser compacto, tiene subcubierta finita $\{X \setminus C_1, X \setminus C_2, \dots, X \setminus C_n\}$, pero esto implica que $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n = \emptyset$ lo cual contradice la PIF de $\mathcal{C}$. □

Proposición 16. $[0, \Omega)$ es numerablemente compacto.

Demostración. Gracias al lema anterior basta ver que toda familia numerable de cerrados con la PIF tiene intersección no vacía.
Sea $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \omega\}$ familia de cerrados con la PIF. Ahora sea $(x_n)_n$ definida como sigue: $x_0 \in C_0$ y para $m \geq 1$ tomemos $x_m \in \bigcap_{i=0}^{m} C_m$, la cual existe por la PIF. Ahora, como todo conjunto infinito en $[0, \Omega)$ tiene punto de acumulación en $[0, \Omega)$, sea $x \in \{x_n : n \in \omega\}'$, y como para cada $k \in \omega$ se tiene que $x_n \in C_k$ si $n > k$ y cada C_k es cerrado, entonces éste contiene a sus puntos de acumulación; pero justamente para todo $k \in \omega$, $x \in \ C_k' \subset C_k$, por lo que $x \in \bigcap_{i \in \omega} C_i$ de donde se concluye que tal intersección es no vacía. □

Sabemos que toda función continua de un compacto en $\mathbb{R}$ alcanza su máximo y mínimo, así como que imagen continua de compacto es compacto. La primera parte mencionada podemos generalizarla a cualquier codominio ordenado como veremos a continuación. La prueba es la misma que la de $\mathbb{R}$ pero vale la pena recordarla.

Proposición 17. Sea $f : X \to Y$ continua con X compacto y Y ordenado. Entonces f alcanza su máximo (y su mínimo).

Demostración. Se probará solo que f alcanza su máximo pues para el mínimo es análogo.
Supongamos que no pasa, es decir que f no alcanza su máximo. Consideremos

$$\mathcal{U} = \{(-\infty, f(x)) : x \in X\}.$$

Gracias a que f no alcanza su máximo, $\mathcal{U}$ es cubierta para $f(X)$ que es compacto. Sean $\{(-\infty, f(x_1)), (-\infty, f(x_2)), \ldots, (-\infty, f(x_n))\} \subset \mathcal{U}$ subcubierta finita y $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = max\, \{f(x_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}$; por lo tanto $\{(-\infty, f(x_0))\}$ también es subcubierta, lo cual es una contradicción pues $f(x_0) \notin (-\infty, f(x_0))$. □

Habíamos visto que $\mathbb{R}^2$ con la topología del orden lexicográfico es metrizable. Esto es falso para $[0, 1] \times [0, 1]$ como veremos enseguida.

Lema 15. Sea X espacio métrico compacto. Entonces X es separable.

Demostración. Sea d métrica para X. Denotamos por $B_m(x)$ al conjunto $\{y \in X : d(x \times y) < m\}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\mathcal{U}_n = \left\{B_{1/n}(x) : x \in X\right\}$; es claro que $\mathcal{U}_n$ es cubierta para X. Sea $D_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots, x_{n,k_n}\}$ tal que $\left\{B_{1/n}(x_{n,1}), B_{1/n}(x_{n,2}), \ldots, B_{1/n}(x_{n,k_n})\right\}$ es subcubieta finita de $\mathcal{U}_n$. Lo que se afirma es que $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ es denso en X. Sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por demostrar que $B_\epsilon(x) \cap D \neq \emptyset$.
Sean $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \epsilon$ y $y \in D_N$ tal que $d(x \times y) < 1/N$ (y existe pues $B_{1/N}(q)$ con $q \in D_N$ es cubierta de X). Entonces $B_\epsilon(x) \cap D \neq \emptyset$, con lo cual se concluye que X es separable. □

Ejemplo 20. Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología del orden lexicográfico. Entonces X es compacto, primero numerable, no segundo numerable y no metrizable.

Demostración. X es compacto pues gracias al Teorema 7 basta con ver que tiene elementos máximo y mínimo, y que tiene la propiedad del supremo; sus elementos máximo y mínimo son 1×1 y 0×0 respectivamente, y el que tiene la propiedad del supremo se hizo cuando se probó que es conexo (Ejemplo 15). Ahora, ver que X es primero numerable es bastante claro pues X en sus elementos máximo y mínimo es localmente como un subconjunto de $\mathbb{R}$ y en todos los demás puntos lo és gracias a la Proposición 14. Notemos que X no es ni metrizable ni segundo numerable pues $\{\{x\} \times (0,1) : x \in \mathbb{R}\}$ es una familia no numerable de abiertos ajenos, con lo que X no es separable, en consecuencia no es segundo numerable y, por el lema anterior, no es metrizable.

$\square$

Capítulo 7

Topologías Relacionadas con la del Orden

Ahora analicemos algunas topologías relacionadas con la del orden y veamos qué podemos decir de ellas. Para esto recordemos algunas definiciones conocidas de nuestros cursos de topología.
Así como se definió compacto, también decimos para x en X que X es **localmente compacto en** x si existe $K \subset X$ vecindad compacta de x. Si para todo $x \in X$ se tiene que X es localmente compacto en x decimos simplemente que X es **localmente compacto**. También diremos que X es **Lindelöf** si de toda cubierta abierta se puede extraer una subcubierta para X a lo más numerable.
Nótese que en la definición anterior se tiene que X compacto implica X localmente compacto pues X es vecindad compacta de todos sus elementos.
Decimos que un espacio es **totalmente disconexo** si los conjuntos conexos maximales son los que constan de un solo punto. Un ejemplo claro de un espacio que cumple esta propiedad son los ordinales, lo cual es claro verificar.
Llamamos a un espacio topológico X **cero-dimensional** si existe una base B para su topología tal que todos sus elementos son cerrados y abiertos. Obsérvese que los ordinales son también cero dimensionales pues dado α ordinal, una base para su topología es $\{(\beta, \gamma+1) : \beta < \gamma < \alpha\}$, y justamente cada $(\beta, \gamma+1) = [\beta+1, \gamma]$ es cerrado y abierto. Nótese que X cero-dimensional implica X totalmente disconexo.

7.1. Topología del Orden Derecho

Sea $(X, <)$ un conjunto totalmente ordenado. Consideremos en X la topología generada por la siguiente base

$$\beta = \{(a, \infty) : a \in X\}.$$

A esta topología se le conoce como **topología del orden derecho**. Observemos que la topología del orden contiene a ésta. Denotamos por $\mathbb{R}_{OD}$ a $\mathbb{R}$ dotado con esta topología. Consideremos $Y = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Entonces Y es compacto no Hausdorff. En efecto, es claro que es compacto. Para ver que esta topología no es Hausdorff notemos que dados dos elementos distintos $x, y \in X$ se tiene que o bien $x < y$, o bien $y < x$; en cualquiera de estos dos casos se tiene que una vecindad

del elemento más pequeño contiene también al elemento más grande.
Propiedades de esta topología:
Sea X espacio ordenado dotado con la topología del orden derecho.

- Para cada $x \in X$, se tiene que $\{x\}' = \{y \in X : y < x\}$. Esto es obvio. Por lo tanto todo conjunto no vacío en X tiene punto de acumulación.

- Nótese que que X es conexo pues la cerradura de un conjunto abierto no vacío es todo X. Más aún, no hay dos abiertos no vacíos ajenos en X ni tampoco los hay cerrados.

- X es localmente compacto pues tenemos dos casos:
  Caso 1: x es elemento mínimo; entonces $X = [x, \infty)$, el cual es vecindad compacta de x.
  Caso 2: x no es mínimo; entonces existe $y \in X$ con $y < x$ y $[y, \infty)$ es vecindad de x compacta.

- $\mathbb{R}_{OD}$ es segundo numerable pues una base numerable para esta topología es
$$\beta = \{(q, \infty) : q \in \mathbb{Q}\}.$$
  Más aún, $\mathbb{R}_{OD}$ es separable y $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ y cualquier conjunto no acotado por la derecha es denso en $\mathbb{R}_{OD}$.

- $\mathbb{R}_{OD}$ es lindelöf por ser segundo numerable, pero no es compacto pues la cubierta $\{(-n, \infty) : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene subcubierta finita y, por lo tanto, no puede ser numerablemente compacto.

7.2. Recta de Sorgenfrey

Ahora consideremos en $\mathbb{R}$ la topología generada por
$$\beta = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$
Es claro que ésta tampoco es la topología dada por el orden; lo que sí se puede verificar, es que ésta contiene a la del orden. Para ver esto notemos que todo intervalo de la forma (a, b) no vacío es unión de elementos de β, pues $(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b)$, donde $a_n \searrow a$ y $a_n > b$ para toda $n \in \mathbb{N}$. A la anterior topología definida se le conoce como **topología del límite inferior**.
A $\mathbb{R}$ dotado con la topología del límite inferior se le denota por $\mathbb{R}_l$ y se le conoce como **recta de Sorgenfrey**.
Algunas propiedades importantes de $\mathbb{R}_l$:

- La topología del límite inferior contiene a la del orden en $\mathbb{R}$ como se vió antes.

- Para todos $a, b \in \mathbb{R}$ el intervalo $[a, b)$ es abierto y cerrado, lo cual es claro. Más aún, para todo $r \in \mathbb{R}$ los conjuntos $(-\infty, r)$ y $[r, \infty)$ son también abiertos y cerrados, lo cual muestra que la recta de Sorgenfrey es cero-dimensional y totalmente disconexo.

- En términos de axiomas de separación, $\mathbb{R}_l$ es normal.
  Dem : Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ cerrados ajenos. Para cada $a \in A$ sea $x_a > a$ tal que $[a, x_a)$ no intersecta a B (esto se puede lograr pues B es cerrado). Ahora, para cada $b \in B$ sea $y_b > b$ tal que $[b, y_b)$ no intersecta a A; así es claro que $U = \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$ y $V = \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$ es separación en abiertos para A y B.

- En cuanto a axiomas de numerabilidad, tenemos que $\mathbb{R}_l$ es primero numerable. Para ver esto, notemos que para cada $x \in \mathbb{R}$ los abiertos de la forma $[x, q)$ con $q \in \mathbb{Q}$ y $q > x$ es una base local numerable para x. También es separable pues $\mathbb{Q}$ es denso también con esta topología. Aun con estas dos condiciones se tiene que no es segundo numerable pues sea $\mathcal{B}$ base para la topología de $\mathbb{R}_l$. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y U abierto de la forma $[x, y)$ vecindad de x se tiene que existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset [x, y)$, por lo que a B podemos suponerlo de la forma $[x, z)$ y, como $\mathcal{B}$ es base, se tiene uno para cada $x \in \mathbb{R}$, por lo que $\mathcal{B}$ no puede ser numerable.

- $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf.

  Demostración. Sea Γ cubierta abierta para $\mathbb{R}$. Lo que veremos a continuación es que para cada $n \in \mathbb{Z}$ el conjunto $[n, n+1)$ tiene subcubierta numerable. Lo haremos para el intervalo $[0, 1)$. Supongamos que no pasa, es decir que todo subconjunto numerable de Γ no cubre a todo $[0, 1)$. Consideremos

  $$X = \{x \in [0,1) : [0,x] \textit{ puede ser cubierto por una cantidad numerable de elementos de } \Gamma\}$$

  y sean s su supremo (tal supremo existe por la suposición de que ninguna subcubierta numerable cubre a $[0, 1)$) y $\mathcal{U} \subset \Gamma$ tal que $\mathcal{U}$ es numerable y cubre a $[0, s)$. Como Γ es cubierta existe $\gamma \in \Gamma$ con $s \in \gamma$; sea x_s con $s < x_s < 1$ tal que $[s, x_s) \subset \gamma$ (el cual existe por ser γ abierto). Por lo tanto existe $y \in [s, x_s)$ con $s < y < x_s$; entonces $\mathcal{U} \cup \{\gamma\}$ es cubierta numerable para $[0, y]$, con lo que $y \in X$ y $y > s$, lo cual es una contradicción y, por lo tanto, existe subcubierta numerable $\mathcal{U}_0 \subset \Gamma$ para $[0, 1)$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $\mathcal{U}_n \subset \Gamma$ subcubierta numerable para $[n, n+1)$; por lo tanto $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_n$ es subcubierta numerable para $\mathbb{R}$. Con esto $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf. □

- $\mathbb{R}_l$ no es compacto ni localmente compacto.

  Demostración. Para ver esto, basta ver que no es localmente compacto. Supongamos que sí lo es. Sean $x \in \mathbb{R}$ y U vecindad compacta de x; por ser U vecindad, existe $y > x$ con $[x, y) \subset U$; como $[x, y)$ es cerrado y está contenido U, que es compacto, $[x, y)$ es compacto, pero $\Gamma = \{[x, z) : x < z < y\}$ es cubierta abierta sin subcubierta finita para $[x, y)$, lo cual es una contradicción. □

- $\mathbb{R}_l$ no es metrizable. Esto es porque todo métrico separable es segundo numerable.

Aplicación conocida de $\mathbb{R}_l$:

- $\mathbb{R}_l^2$ (con la topología producto) no es normal, lo cual nos da otro ejemplo para probar que producto de normales no necesariamente es normal.

  Demostración. Observemos que los básicos son rectángulos que incluyen sus lados izquierdo e inferior pero no sus lados derecho y superior, así que la diagonal D a 135º por el origen es un conjunto cerrado y, como subespacio, tiene la topología discreta, así que todo subconjunto de él es cerrado en $\mathbb{R}_l^2$. Suponiendo que $\mathbb{R}_l^2$ es normal, tenemos que todo cerrado $A \subset D$ se puede separar de su complemento $D \setminus A$ en D, así que existen abiertos (de $\mathbb{R}_l^2$) ajenos U_A y V_A tales que $A \subset U_A$ y $D \setminus A \subset V_a$. Sean $D = \wp(D) \setminus \{\emptyset, D\}$ y

$Q = \wp(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\}$. Definamos $\phi : D \to Q$ por $\phi(A) = U_A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}_l$, tenemos que ϕ está bien definida. Probaremos que ϕ es inyectiva, lo cual es claramente una contradicción, por cardinalidades.
Sean $A, B \in D$ distintos; sin pérdida de generalidad tomemos $a \in A \setminus B \subset D \setminus B$; entonces $a \in U_A \cap V_B$ así que $U_A \cap V_B$ es abierto no vacío, por lo que contiene puntos de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Entonces

$$\emptyset \neq U_A \cap V_B \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \subset (U_A \setminus U_B) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = (U_A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})) \setminus (U_B \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})).$$

□

7.3. La Recta Larga

Ahora trabajaremos un poco con la recta larga definida antes; $\mathbb{L} = [0, \Omega) \times [0, 1)$, con el orden lexicográfico y la topología dada por éste. También se define de forma análoga **la recta larga extendida** como $\mathbb{L}^* = L \cup \{\Omega \times 0\}$. Notemos algunas de sus propiedades:

- $\mathbb{L}$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$ (en todos los puntos salvo en su primer elemento), lo cual es claro.

- Toda sucesión creciente converge en $\mathbb{L}$ y en $\mathbb{L}^*$. Esto se sigue de lo anterior y de que todo subconjunto numerable en $[0, \Omega)$ tiene cota superior. Más aún, $\mathbb{L}$ es compacto por sucesiones. Esto se sigue de que todo subconjunto infinito en Ω tiene punto de acumulación. Una consecuencia inmediata de lo anterior es que no existe función estrictamente creciente de $\mathbb{L}$ en $\mathbb{R}$.

- Como su topología es la del orden, tanto $\mathbb{L}$ como $\mathbb{L}^*$ son normales.

- $\mathbb{L}$ no es compacto pues la cubierta $\gamma = \{[0 \times 0, \alpha \times 0) : 0 < \alpha < \Omega\}$ no tiene subcubierta finita, aunque sí es numerablemente compacto (esto es consecuencia inmediata de que $[0, \Omega)$ lo es (proposición 16)).

- $\mathbb{L}$ no es metrizable pues es compacto por sucesiones pero no compacto, y esto es imposible en espacios métricos (como vimos en el lema 10). En consecuencia $\mathbb{L}^*$ (aunque sí es compacto) tampoco es metrizable (si lo fuera, entonces también $\mathbb{L}$ lo sería, pues subespacio de métrico es métrico).

- $\mathbb{L}$ no es Lindelöf. Esto es consecuencia de que todo conjunto numerable en $[0, \Omega)$ tiene cota superior en $[0, \Omega)$.

- $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}^*$ son ambos no separables. Esto por la misma razón que en el inciso anterior.

- $\mathbb{L}$ y $\mathbb{L}^*$ son ambos localmente compactos, $\mathbb{L}$ por ser localmente homeomorfo a $\mathbb{R}$, y $\mathbb{L}^*$ por ser compacto.

- $\mathbb{L}$ es conexo por trayectorias, (ver ejemplo 19) y también localmente conexo por trayectorias pues es localmente como $\mathbb{R}$.

Capítulo 8

Subconjuntos de $\mathbb{R}$

En este capítulo analizaremos lo que pasa con los subconjuntos de $\mathbb{R}$ considerando la topología que induce el orden de $\mathbb{R}$ restringido a ellos. Centremos nuestra atención en lo que pasa en el Ejemplo 6 (en tal ejemplo teníamos a $(0,1) \cup [2,3)$); en éste las topologías del orden y de subespacio no coinciden, pero sí se tiene para este subconjunto en particular que es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{R}$. Surge entonces una pregunta bastante natural. ¿Pasará esto siempre?, mejor dicho, ¿para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ como espacio ordenado existirá un subespacio de $\mathbb{R}$ tal que son homeomorfos?. La respuesta a esto afortunadamente es sí, de hecho lo que intentaremos hacer es imitar lo que pasó en el ejemplo 6 "pegar lo que haga falta", y es lo que probaremos enseguida.

Para $X \subset \mathbb{R}$ consideremos la siguiente notación:

- Para $z \in X$ denotamos $X \setminus \{z\}$ por X_z.
- Para $z \in X$ decimos que z es **punto de acumulación sólo por la izquierda** si existe sucesión $(x_n)_n$ de elementos de X_z tal que $x_n \nearrow^{\tau} z$, y no existe sucesión $(y_n)_n$ de elementos de X_z tal que $x_n \searrow_{\tau} z$.
  Análogamente, z es **punto de acumulación sólo por la derecha** si existe sucesión $(x_n)_n$ de elementos de X_z tal que $x_n \searrow_{\tau} z$, y no existe sucesión $(y_n)_n$ de elementos de X_z tal que $x_n \nearrow^{\tau} z$.
- X_i denota al conjunto de puntos de acumulación sólo por la izquierda de X.
- X_d denota al conjunto de puntos de acumulación sólo por la derecha de X.
- $A :=$ el conjunto de los puntos aislados de X (es decir, los $a \in X$ tales que existe una vecindad V de a en τ tal que $V \cap X = \{a\}$).
- $Y = X' \setminus (X_i \cup X_d)$.

También, como es costumbre, denotamos por $\mathcal{N}_x^{\sigma}$ al conjunto de vecindades de x según la topología σ.

Lema 16. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Entonces $\{x \in X : \mathcal{N}_x^{\tau} \neq \mathcal{N}_x^{\tau_o}\}$ es numerable.

Demostración. Para ver esto, nótese primero que el conjunto de los puntos en los cuales no coinciden las topologías es un subconjunto de $X_i \cup X_d \cup A$ pues el resto de puntos de X son puntos de acumulación por ambos lados y, por el mismo argumento del Ejemplo 2, en tales puntos las topologías coinciden. Por esto, si cada uno de los uniendos es numerable, ya terminamos. En efecto, es claro que el conjunto de puntos aislados es numerable, basta ver entonces que X_i es numerable (análogamente X_d lo será). Para cada $x \in X_i$, como es punto de acumulación sólo por la izquierda existe un $a_x \in \mathbb{R}$ con $x < a_x$ y tal que $(x, a_x) \cap X = \emptyset$, de lo que se sigue que tales intervalos son ajenos para elementos distintos pues $(x, a_x) \cap (y, a_y) \neq \emptyset$ implica $y \in (x, a_x)$ o $x \in (y, a_y)$, pero esto es imposible pues ningún intervalo intersecta a X; de lo anterior y como $\mathbb{R}$ es separable se tiene entonces que X_i es numerable. $\square$

Tenemos ahora que dado un $X \subset \mathbb{R}$, el conjunto de puntos donde las topologías no coinciden es numerable, por lo que ahora podemos definir una función explícita de "pegado", para lo cual primero debemos identificar todos estos puntos, así como también qué distancia habremos de recorrer una parte de nuestro conjunto X para "pegar" donde tengamos que hacerlo. Tal identificación de estos puntos se hace de la siguiente forma. Para cada $x \in X$ defínanse

$$\eta(x) = inf_{\mathbb{R}} \{y \in X : y > x\} \quad \text{y} \quad \sigma(x) = sup_{\mathbb{R}} \{y \in X : y < x\}.$$

Sean

$$E = X_i \cup X_d \cup A \cup \{\eta(x) : x \in X_i \cup X_d \cup A\} \cup \{\sigma(x) : x \in X_i \cup X_d \cup A\} \text{ y}$$
$$Z = \{a \times b \in E \times E : [a < b] \wedge [(a, b) \cap X = \emptyset] \wedge [(a \in X \wedge b \notin X) \vee (a \notin X \wedge b \in X)]\}.$$

Nótese que Z es numerable, y justamete Z nos identifica cuáles son los puntos de X que deberían ser pegados (es decir, son puntos para lo cuales existe sucesión en X que converge a ellos en X, pero la misma sucesión no converge a ellos en $\mathbb{R}$). Sea $\{a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, \ldots\}$ una enumeración para Z. Defínanse para cada $n \in \mathbb{N}$, $d_n = b_n - a_n$ y para $x, y \in X$ con $x < y$, $M_x^y \subset \mathbb{N}$ como sigue: $n \in M_x^y$ si se tiene que $(a_n, b_n) \subset [x, y]$. Sea f la función de "pegado" definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x - \sum_{m \in M_0^x} d_m, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ x + \sum_{m \in M_x^0} d_m, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Veamos algunas observaciones importantes de lo anterior.

1. Los intervalos (a_n, b_n) con $n \in \mathbb{N}$ son ajenos entre sí.

2. Para todo $x, y \in X$, si $x < y$ entonces $\sum_{m \in M_x^y} d_m \leq y - x$.
   Lo anterior pues la suma considera las longitudes de intervalos (a_k, b_k), los cuales están contenidos en $[x, y]$.

3. Para cualesquiera $x, y, z \in X$, si $x < z < y$ entonces $\sum_{m \in M_x^y} d_m = \sum_{l \in M_x^z} d_l + \sum_{l \in M_z^y} d_l$.
   Esto es gracias a la observación anterior y a que no importa que la suma se divida en 2 sumandos (esto pues son series absolutamente convergentes (véase series absolutamente convergentes [5])).

4. Para todo $x, y \in X$, si $x < y$ entonces se tiene que $f(x) \leq f(y)$.
   Para ver esto podemos suponer que $0 \leq x, y$ pues de no ser así y si $y > 0$ consideraríamos entonces $x = 0$ (pues si $x < 0$ nótese que por la definición de f y por la observación 2 se tiene que $f(x) \leq 0$). Ahora nótese que, por como se define f y por las observaciones 2 y 3, es claro que $f(x) \leq f(y)$. El caso en que $x, y \leq 0$ es análogo.

Nótese también que en la observación 4 la función preserva el orden pero puede no ser inyectiva. Para ver que esto es posible considérese el siguente ejemplo.
Sea $W \subset \mathbb{R}$ definido inductivamente de la siguiente manera. Sea $V = \{1/8 + 1/8^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0, 1\}$; tal V es la unión de dos puntos aislados y una sucesión que no tiene punto de convergencia en V (esto considerando la topología de subespacio en V). Sea $W_1 = V$. Ahora para cada dos puntos consecutivos en W_1 pongamos una copia (a escala) de V donde los puntos consecutivos corresponden a 0 y 1. Entonces W_2 es igual a W_1 unión las sucesiones que le agrega el poner las copias de V antes mencionadas. Supongamos que tenemos W_n. Para cada par de puntos consecutivos en W_n pongamos una copia de V (a escala) de la misma forma en que lo hicimos para pasar de W_1 a W_2, entonces W_{n+1} es la unión de W_n con las sucesiones que se agregan al poner las copias de V.
Sea $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$. Es claro que si aplicamos a W nuestra función de pegado, nuestra f es constante, por lo cual f puede no ser inyectiva.

El ejemplo anterior se menciona para ver que lo que haremos enseguida es necesario.

Una vez teniendo en claro que nuestra función podría tener problemas para ser inyectiva, fijémonos en tales puntos considerando el siguiente conjunto; $C = \{c \in f(X) : |f^{-1}(c)| > 1\}$.
Notemos lo siguiente: Si $c \in C$, se tiene que $f^{-1}(c)$ es un OLD. En efecto consideremos $x, y \in X$ con $f(x) = c = f(y)$; entonces x y y no pueden ser elementos consecutivos, pues si lo fueran, por la definición de f, $f(x) \neq f(y)$. Más aún, $f^{-1}(c)$ es igual a un intervalo (posiblemente rayo) intersección con X (esto por la observación 4). Sea $X(c) = f^{-1}(c) \setminus \{max[f^{-1}(c)], min[f^{-1}(c)]\}$.
Para resolver este detalle, es decir, los puntos donde f no es inyectiva, veamos los siguientes lemas. Éstos nos darán una solución a esto.

Lema 17. Sea X un **OLDSE** numerable. Entonces $X \cong \mathbb{Q}$ como espacios ordenados.

Demostración. Sean $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ enumeraciones para $\mathbb{Q}$ y X, respectivamente. Lo que haremos es dar una relación $\backsim$ inyectiva y suprayectiva entre los elementos de $\mathbb{Q}$ y los de X tal que $\backsim$ preserve el orden, es decir, un isomorfismo.

- Definimos $x_1 \backsim q_1$.

- Ahora tomamos q_2 y nos fijamos en dónde se localiza (a la izquierda o derecha de q_1); tomamos k mínimo tal que x_k se encuentre en la misma ubicación con respecto a x_1 que q_2 respecto a q_1. Entonces definimos $q_2 \backsim x_k$.

- A continuación consideramos x_l con l mínimo entre los que todavía no están relacionados y tomamos $q_m \in \mathbb{Q}$ con m mínimo entre los no relacionados todavía, de manera que q_m se encuentre en la misma posición relativa con los q_i ya relacionados que x_l con los x_i ya relacionados. Definimos entonces $x_l \backsim q_m$.

- Así sucesivamente vamos tomando en forma alternada los elementos de X y de $\mathbb{Q}$ para definir la relación.

Es claro que la relación que se construye arriba es un isomorfismo entre espacios ordenados. $\square$

En el siguiente lema generalizamos un poco el anterior para subconjuntos de $\mathbb{R}$, no necesariamente numerables.

Lema 18. Sea $X \subset \mathbb{R}$ un OLDSE. Entonces existe un $D \subset (0,1)$ denso tal que $X \cong D$ como espacios ordenados.

Demostración. Primero vamos a ver que podemos encontrar un OLDSE numerable que sea denso en X. En efecto, sin pérdida de generalidad, supongamos que $X \subset (0,1)$. Ahora consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la siguiente familia $\mathcal{U}_n = \{((k-1)/n, k/n) : k = 1, 2, \ldots, n\}$, y sean $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ y $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : U \cap X \neq \emptyset\}$. Sea E el conjunto formado por la elección de un punto de cada $V \in \mathcal{V}$. Es claro que E es OLDSE numerable y denso en X. Por el lema anterior sea $f : E \to (0,1) \cap \mathbb{Q}$ isomorfismo. Sean $C \subset [0,1]$ la "completación" de E y $F : C \to [0,1]$ la extensión de f (de hecho F se puede ver de forma precisa como sigue; para $x \in C$ sea $(x_n)_n$ sucesión en E tal que $x_n \to x$. Entonces $F(x) = lim_{n\to\infty} f(x_n)$). Consideremos ahora $F{\restriction}X$; es claro que F es inyectiva pues lo es en un denso, preserva el orden y $F(X)$ es denso en $(0,1)$, por lo tanto $D = F(X)$ es el que buscabamos. $\square$

Volvamos a nuestra demostración. Recordemos que la f definida anteriormente no necesariamente es inyectiva. Modificaremos nuestro conjunto original X en los puntos donde nuestra f no es inyectiva. Para cada $c \in C$, y por el lema anterior, sea $D(c) \subset (inf_{\mathbb{R}}[f^{-1}(c)], sup_{\mathbb{R}}[f^{-1}(c)])$ denso tal que $X(c) \cong D(c)$ con isomorfismo g_c.
Consideremos la siguiente función $G = (\bigcup_{c\in C} g_c) \cup (id \restriction X \setminus \cup_{c\in C} X(c))$. Observemos que G abre los puntos que f colapsa. Es claro que $X \cong G(X)$ como espacios ordenados. Análogamente de como se definió f anteriormente definamos, para $G(X)$, $F : G(X) \to \mathbb{R}$ que haga lo mismo: "pegar lo que se tenga que pegar".
Afirmación: $G(X) \cong F(G(X))$ como espacios ordenados y, más aún, en $F(G(X))$ coinciden las topologías del orden y la de subespacio. Si se prueba la anterior afirmación habremos terminado.
Dem : Notemos primero que, por la definición de F, ésta satisface también las observaciones 1, 2, 3 y 4. Veamos que F es también inyectiva: Si suponemos que no lo es, entonces existen $x, y \in G(X)$ con $x < y$ tales que $F(x) = F(y)$, pero nótese que tales $x, y \notin G(\cup_{c\in C} X(c))$ pues cada uniendo es denso en un intervalo y, por la definición de F, ésta es inyectiva en $\cup_{c\in C} X(c)$, por lo que $x, y \in G(X \setminus \cup_{c\in C} X(c)) = X \setminus \cup_{c\in C} X(c)$, pero esto no puede ser pues f es inyectiva en $X \setminus \cup_{c\in C} X(c)$ y F "se comporta igual" en este conjunto, por lo que F es inyectiva; es más, para todo $x, y \in G(X)$, si $x < y$ entonces $F(x) < F(y)$.

Veamos ahora que la topología del orden y de subespacio coinciden en $F(G(X))$. Es claro que si $x \in X$ es tal que $\mathcal{N}_x^{\tau} = \mathcal{N}_x^{\tau_o}$; entonces $\mathcal{N}_{F(G(x))}^{\tau} = \mathcal{N}_{F(G(x))}^{\tau_o}$. Por otro lado, si para $x \in X$ se tenía que $\mathcal{N}_x^{\tau} \neq \mathcal{N}_x^{\tau_o}$, esto se debía a que pasa:

$$
\begin{gathered}
x \in X_d \wedge \sigma(x) \notin X \text{ o} \\
x \in X_i \wedge \eta(x) \notin X \text{ o} \\
x \in A \wedge \eta(x), \sigma(x) \notin X \text{ o} \\
x \in A \wedge [(\eta(x) \in X \wedge \sigma(x) \notin X) \vee (\eta(x) \notin X \wedge \sigma(x) \in X)].
\end{gathered}
$$

Haremos ver que para alguno de los casos pasa que $\mathcal{N}^{\tau}_{F(G(x))} = \mathcal{N}^{\tau_o}_{F(G(x))}$; los otros son análogos. Supongamos entonces que $x \in X_i$ y que $\eta(x) \notin X$; entonces si $x \in X(c)$ para algún $c \in C$, es claro que en $F(G(x))$ las topologías son iguales pues $F(G(X(c)))$ es denso en un intervalo y en los densos sí se tiene la igualdad de las topologías (ver ejemplo 2). Por otro lado, si para cada $c \in C$, $x \notin X(c)$, entonces, como $\eta(x)$ es un ínfimo, sea $(x_n)_n \searrow \eta(x)$; por la observación 2 y por como se definen F y G, y en vista que $x \times \eta(x) \in Z$, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$, $F(G(x_n)) - F(G(x)) \leq x_n - \eta(x)$. Para ver esto supongamos que $F(G(x)) = x$ (pues, por como es F, sólo hay que desplazar un poco todo pero esto facilita las cuentas); entonces, de nuevo, por la definición de F, se tiene que para cada $n \in \mathbb{N}$ pasa que $F(G(x_n)) \leq x_n - (\eta(x) - x) = x_n - \eta(x) + x$, de lo cual, sumando $F(G(x))$ (que es igual a x) a ambos lados de la desigualdad, se tiene que $F(G(x_n)) - F(G(x)) \leq x_n - \eta(x)$, pero $(x_n - \eta(x))_n \to 0$, por lo que, bajo la composición de G con F, se tiene que $F(G(x_n))_n \searrow F(G(x))$; por lo tanto las topologías coinciden en $F(G(x))$. Es claro que la composición de G con F es continua, esto porque en $F(G(X))$ las topologías coinciden y porque esta composición es un isomorfismo de espacios ordenados (con su imagen), por lo tanto es continua y abierta.

En conclusión $F(G(X))$ es tal como se quería.

Nótese que el resultado que se probó arriba no se puede generalizar a $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico pues en la demostración se usa fuertemente la separabilidad de $\mathbb{R}$. Para hacer esto evidente observemos el siguiente ejemplo:
Sea $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico, gracias a la proposición 5 tenemos que $\mathbb{R}^2$ con el orden lexicográfico es metrizable, por lo que, si se cumpliera el resultado anterior tendríamos entonces que todo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ con la topología dada por el orden lexicográfico es metrizable, pero $[0,1] \times [0,1]$ no lo es (esto se vió en el ejemplo 20).

Bibliografía

[1] Munkres J.R., *Topology, a first course*, Prentice-Hall, Inc.,1975.

[2] Lynn Arthur Steen y J. Arthur Seebach,Jr., *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, Inc., 1995.

[3] Ma. Luisa Pérez S., *Notas de Topología I*, FCFM,UMSNH, 2007.

[4] Fernando Hernández H., *Teoría de conjuntos (una introducción)*, Serie Textos de Aportaciones Matemáticas, SMM., 2003.

[5] Michael Spivak, *Calculus*, W.A. Benjamin., Inc., New York.