



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS
MATEMÁTICAS UNAM-UMSNH



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

Grupo de Veech en Superficies Planas Asociadas a Billares Irracionales

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE:
Maestro en Ciencias Matemáticas

Presenta:

Willy Alejandro APAZA PEREZ

Asesor:

Dr. Jose Ferrán VALDEZ *f*

Julio, 2013.



*“Dedicado con cariño a mis padres Nicolás y Teodora
a mi hermano Freddy”.*

Willy Alejandro Apaza Pérez

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia, por su inmenso apoyo y la confianza que me proporcionaron durante toda mi trayectoria hasta donde actualmente estoy, por el cual mi deuda hacia ellos será infinita.

Agradecer también, a los profesores del “Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH”, quienes a través de sus enseñanzas me ayudaron a crecer en conocimiento y como persona, en particular agradecer al Dr. Fernando Hernández Hernández, quien me ha brindado además de sus enseñanzas académicas, su valiosa amistad, su apoyo y su comprensión. Un agradecimiento especial a mi tutor, el Dr. Ferrán Valdez, por su apoyo y sugerencias durante la elaboración de este trabajo, con quien no sólo se aprende mucho de matemática, también se gana una amistad más.

Agradecer al personal administrativo del Posgrado Conjunto en Ciencias Matemáticas UNAM-UMSNH, por la colaboración y la oportunidad de realizar esta maestría en un grato ambiente de trabajo, con las mejores consideraciones científicas y humanas.

A mis compañeros y amigos de la maestría, que me acompañaron en esta etapa de conocimiento y aprendizaje. A mis paisas Leo, Alex, Victor; por el apoyo en los momentos difíciles y haber hecho mi estancia en Morelia aún más agradable. A mis amigos de Bolivia que están al pendiente de mí.

Por último agradecer Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT, por brindarme los recursos económicos para la realización de esta etapa de mis estudios.

W. Alejandro

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	IV
1. Billares	1
1.1. Billar en el círculo y en el cuadrado	2
1.2. Billares poligonales	4
1.3. Construcción Katok-Zemlyakov	5
2. Superficies planas y superficie asociada a un billar	10
2.1. Estructura de la superficie asociada al billar poligonal	12
2.1.1. Caso racional	13
2.1.2. Caso irracional	16
2.2. Acción del grupo de reflexiones en $S(P_0)$	17
3. Grupo de Veech de un billar poligonal irracional	19
3.1. Vectores de holonomía	20
3.2. Grupo de Veech	21
3.2.1. Acción del grupo de Veech en los vectores de holonomía	22
3.2.2. Teorema	23
Bibliografía	26

Introducción

La noción de un juego de billar en una mesa rectangular puede ser abstraído y ser estudiado desde el punto de vista matemático, donde la mesa de billar puede tomar la forma de un polígono arbitrario y estudiar la trayectoria de la bola en ella. Formalmente la teoría del billar apareció en el trabajo de Ya. G. Sinai [Sin70] en el año 1970, está teoría que está a sólo 43 años de edad, creció y se desarrolló a una velocidad notable; mostrando tener cierta relación con procesos físicos, haciendo un uso sofisticado de la teoría ergódica, lo que le ha permitido introducirse en el ámbito moderno de los sistemas dinámicos y la mecánica estadística; prueba de ello es que en enero de 2005, MathSciNet dio más de 1.4000 entradas relacionadas al “Billar”, aunque cabe destacar que la mayor parte está relacionada a billares en polígonos que tienen todos sus ángulos interiores de la forma $\lambda\pi$ con λ número racional (polígonos racionales), y no así para el caso irracional, este último es una de las razones que motivan a desarrollar propiedades para el caso de billares en polígonos irracionales, en particular el teorema 3.10, expuesto al final, que caracteriza el grupo de Veech $\Gamma(S)$ (definición 3.9) de la superficie asociada al polígono irracional P .

Para entender y probar ese resultado, estructuramos el trabajo de la siguiente manera:

En el primer capítulo, desarrollamos los conceptos relacionados al billar, estudiando en particular el billar en el cuadrado, mostrando la equivalencia existente entre las trayectorias del billar y las trayectorias del flujo geodésico en el toro $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$, a través de una construcción; y en lo que sigue, dicha construcción será generalizada a un polígono cualquiera por medio de la construcción de Katok-Zemlyakov, atribuida al trabajo de A. Katok, A Zemlyakov [Kat87].

En el segundo capítulo, desarrollamos las definiciones de superficies de traslación y superficies planas, donde dotaremos de una estructura de variedad al espacio topológico $S(P)$ obtenido por la construcción de Katok-Zemlyakov en el polígono P , además de exponer una caracterización topológica de la superficie $S(P)$, cuando P es racional y cuando P es irracional, este último debido al trabajo de F. Valdez [Val09]. Prosiguiendo con la acción del grupo de reflexiones lineales (definida en la construcción de Katok-Zemlyakov) sobre la superficie $S(P_0)$.

En el tercer capítulo, explicamos lo que son las superficies de Veech, para ver que la dicotomía que cumple la superficie toro $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$ no es exclusiva de ella, esta dicotomía también

es válida para superficies de Veech, dando lugar al célebre teorema dentro de la teoría del billar: el teorema de la dicotomía de Veech [Vee89]. En este proceso se ve además uno de los potenciales del grupo de Veech, que relaciona la geometría de la superficie plana y la geometría hiperbólica. Proseguimos con la acción del grupo de Veech en los vectores de holonomía, con ello procedemos a enunciar y demostrar el teorema 3.10.

Capítulo 1

Billares

La teoría matemática de billares nació en 1970, cuando Ya. G. Sinai publicó su trabajo seminal [Sin70], como un ejemplo de un sistema hamiltoniano de interacción, que muestra las propiedades termodinámicas físicas: todas sus posibles trayectorias son ergódicas y tiene un exponente de Lyapunov positivo. Y ahora que la teoría está a sólo 43 años de edad, creció y se desarrolló a una velocidad notable y se convirtió en un área bien establecida, introduciéndose en la teoría moderna de los sistemas dinámicos y mecánica estadística.

El análisis de la trayectoria de billar, puede implicar el uso sofisticado de la teoría ergódica y sistemas dinámicos, como lo mostrarán los resultados más adelante.

Un *Billar* es un sistema dinámico asociado al movimiento de una masa puntual dentro de \bar{C} , donde \bar{C} es la cerradura de un conjunto abierto C en R^2 , con $\partial\bar{C}$ la frontera de \bar{C} suave a pedazos. Dicha masa tiene un movimiento rectilíneo a velocidad constante tal que la colisión de la masa en la frontera cumple la condición de Descartes: ángulo de incidencia y de reflexión son iguales.

Observación: Existen leyes de reflexión diferentes a las de Descartes. Por ejemplo los billares con chanfle estudiados por A. Arroyo, R. Markarian y P. Sanders [AMS09].

Por ejemplo consideremos los siguientes billares, cuya característica resulta directamente de su aspecto geométrico:

1. *Billar Elipsoidal.* Consideremos una elipse E con focos f_1 y f_2 . Los billares en elipses tienen la siguiente propiedad: toda trayectoria de billar que pasa por f_1 , pasa tras un rebote por f_2 .

2. *Billar Parabólico.* En este ejemplo, toda trayectoria de billar que pasa por un foco pasa por el otro, aunque este sea el punto al infinito.

Ahora veamos el billar en el círculo y en el cuadrado, cuyas dinámicas tienen propiedades interesantes y una estrecha relación.

1.1. Billar en el círculo y en el cuadrado

Círculo. A pesar de que el círculo es una figura muy simple, hay algunos aspectos interesantes que uno puede decir sobre el billar en su interior.

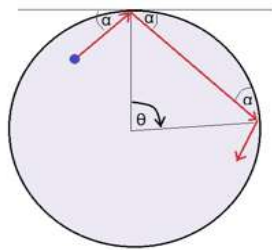


FIGURA 1.1: Dinámica en el círculo.

El círculo goza de una simetría de rotación: una trayectoria del billar, está totalmente determinada por el ángulo α hecho con la tangente en el punto de colisión del círculo, este ángulo sigue siendo el mismo después de cada colisión, y cada punto de impacto consecutivo se obtiene a partir del anterior por una rotación del círculo a un ángulo $\theta = 2\alpha$, en el sentido de la trayectoria.

Si $\theta = \frac{2\pi p}{q}$, entonces cada órbita de billar es q -periódica y hace p vueltas alrededor del círculo; uno dice, que el número de rotación de tal órbita es $\frac{p}{q}$.
 Si θ no es un múltiplo racional de π , entonces cada órbita es infinita. El primer resultado en rotaciones π -irracional del círculo es dado por Jacobi, que denota la rotación del círculo con ángulo θ por T_θ .

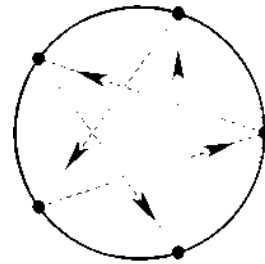


FIGURA 1.2: $\frac{p}{q} = \frac{2}{5}$.

Un desarrollo más amplio del siguiente resultado puede consultarse [Teb05].

Teorema 1.1 (Jacobi). *Si θ es π -irracional, entonces la T_θ -órbita de cada punto es densa en el círculo. En otras palabras, cada intervalo contiene puntos de esta órbita.*

Cuadrado. Consideremos ahora billares en el interior de un cuadrado unitario. Aunque el cuadrado tiene una forma diferente a la del círculo, la dinámica del billar en el cuadrado está codificada por la simetría de rotación en un círculo.

Reflejando el cuadrado respecto a sus lados sucesivamente, vemos que tesela el plano y de esta manera las trayectorias del billar se convierten en líneas rectas en el plano. Dos

líneas en el plano corresponden a la misma trayectoria del billar, si ellas difieren por una traslación a través de un vector de la retícula $2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$; es decir, $L_1 = L_2 + (u, v)$ para algún $(u, v) \in 2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z}$.

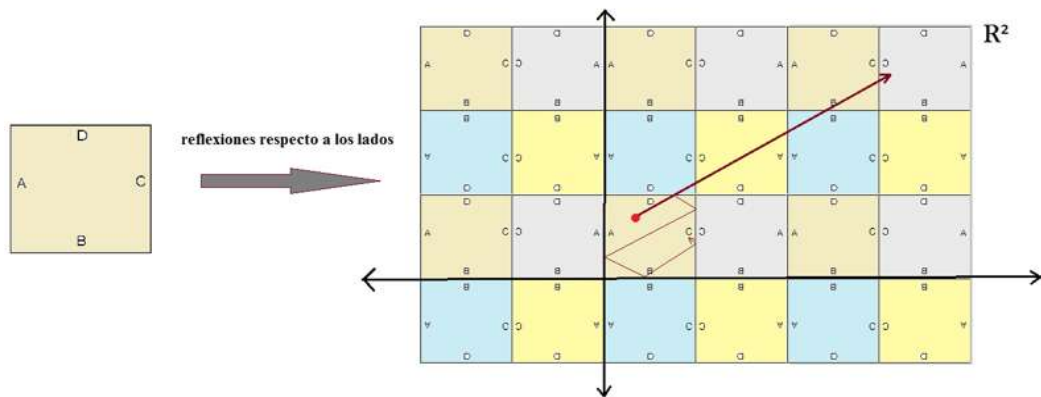


FIGURA 1.3: Reflexión del cuadrado respecto a sus lados.

Notemos que dos cuadrados vecinos tienen orientaciones opuestas: ellos son simétricos con respecto a su lado común. Consideremos un cuadrado más grande, que consiste de cuatro cuadrados unitarios con un vértice común, e identificamos sus lados opuestos para obtener un *toro*. Una trayectoria de billar se convierte en una geodésica en este toro plano.

El mismo enfoque aplica a billares dentro de un cubo en \mathbb{R}^n . Fijando una dirección de

Consideremos las trayectorias en una dirección fija α . Iniciando una trayectoria en un punto x de la parte inferior del cuadrado 2×2 , la trayectoria interseca la parte superior en el punto $(x + 2 \cot \alpha \pmod{2})$; ajustando el tamaño por un factor de $\frac{1}{2}$, llegamos al círculo $\mathbb{S}^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ con simetría de rotación $x + \cot \alpha \pmod{1}$. Así, el flujo billar en una dirección fija se reduce a una rotación del círculo. En particular, si la pendiente de una trayectoria es racional; entonces esta trayectoria es periódica, y si la pendiente es irracional, entonces ésta es densa en cada parte y uniformemente distribuido en el cuadrado.

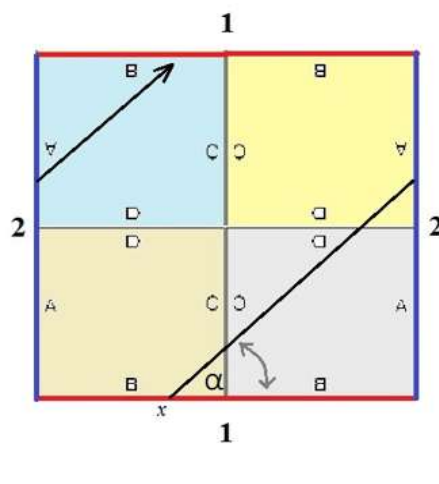


FIGURA 1.4: Toro Plano.

las trayectorias del billar, uno reduce el billar a la rotación en el toro T^{n-1} .

Uno puede considerar trayectorias de billar en mesas de billar poligonales y estos son los que nos interesa en este trabajo.

1.2. Billares poligonales

En este trabajo consideraremos únicamente billares en polígonos simplemente conexos, un billar que no es este tipo es juntamente el billar de Sinai; cuya mesa es un cuadrado removido de su interior un disco, cuyos centros coinciden. En la gráfica se muestra un pedazo de una trayectoria del sistema, a pesar de su comportamiento caótico, cumple ciertas propiedades ergódicas.

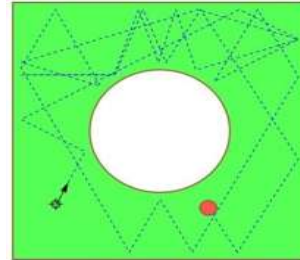


FIGURA 1.5: Billar de Sinai.

Definición 1.2. Un polígono P es denominado *racional* si todos sus ángulos interiores son conmensurables con π (i.e. tienen la forma $\lambda\pi$ con $\lambda \in \mathbb{Q}$). Y un polígono que no sea racional será denominado *polígono irracional*.

Una trayectoria de billar que comience en un punto $p \in P$, con una dirección $\theta \in \mathbb{S}^1$, se denomina *trayectoria periódica* si después de un número finito de botes, la bola regresa al punto p con la dirección θ . La *longitud combinatoria de una trayectoria periódica* es el número de botes que la bola realiza con ∂P antes de regresar a punto original.

Definición 1.3. Dado un billar en un polígono, una trayectoria de billar que une dos vértices del polígono P es llamada *diagonal generalizada*.

Por ejemplo consideremos el billar en un triángulo águo como se ve en la figura 1.6, en el que se muestra la trayectoria de una diagonal generalizada. Por el resultado debido al conde Fargano que data de 1775, existe al menos una trayectoria periódica descrita en el triángulo órtico (formado por las alturas respecto a sus vértices) de longitud combinatoria 3. Aunque por un instante se pensaría que encontrar trayectorias periódicas no es difícil, nos encontramos con la siguiente conjetura atribuida a Anatole Katok, que aún no está resuelta del todo: “Todo billar triangular posee una trayectoria periódica”.

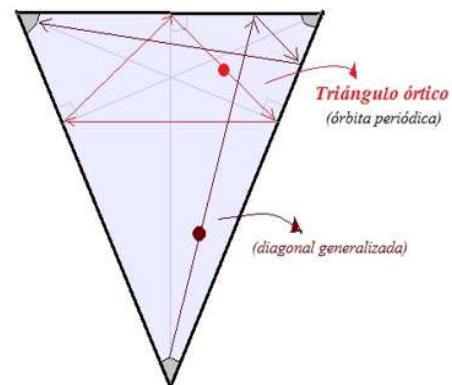


FIGURA 1.6: Billar en un triángulo águo.

Un resultado relacionado a la existencia de trayectorias periódicas en billares poligonales, se tiene el siguiente teorema, dado por Howard Masur.

Teorema 1.4. [Mas86] *Todo billar poligonal racional tiene al menos una trayectoria periódica.*

El cual es puramente existencial, pues no muestra la manera de construir dicha trayectoria.

Los avances recientes en el estudio de billares poligonales se deben a las aplicaciones de la teoría de las estructuras planas sobre superficies (diferenciales cuadráticas), y al estudio de la acción del grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ en el espacio de las diferenciales cuadráticas, el cual puede verse con mayor detalle en el libro de Anton Zorich [Zor06].

1.3. Construcción Katok-Zemlyakov

La construcción de Katok-Zemlyakov, reduce un billar en un polígono a un flujo geodésico en una superficie $S(P)$ con una estructura plana, donde el estudio de las trayectorias del billar es equivalente al estudio de las geodésicas en la superficie $S(P)$, que observaremos más adelante.

Aunque esta construcción en repetidas ocasiones a sido atribuida a A. N. Katok y A. B. Zemlyakov [ZK76], las ideas en que está basada pueden encontrarse en los trabajos de los años 30 del siglo XX de Fox y Kerschner [FK36]. El enfoque realizado, al entender la dinámica del billar en el cuadrado como vimos en 1.1 es un hecho particular de esta construcción, como se observará. Sea $A(P)$ el grupo de transformaciones del plano generado por las reflexiones en los lados de P , donde se ve que $A(P)$ es un subgrupo del grupo de isometrías del plano $Isom(\mathbb{R}^2)$; de esto se muestra que cada copia de P involucrado en el despliegue, es la imagen de P bajo la acción de un elemento del grupo $A(P)$. El producto de un número par de elementos de este grupo $A(P)$ conserva la orientación, mientras que de un número impar la invierte.

Para efectos técnicos consideraremos la siguiente versión de la construcción de Katok-Zemlyakov.

Consideremos, las siguientes notaciones:

$P :=$ polígono en el plano,

$P_0 := P \setminus \{ \text{vértices de } P \},$

$P_1 := P_0 \cup \{ \text{vértices de } P \text{ de la forma } \frac{\pi}{m} \text{ con } m \in \mathbb{N} \},$

$P_2 := P_0 \cup \{ \text{vértices de } P \text{ de la forma } \lambda\pi \text{ con } \lambda \in \mathbb{Q} \}.$

Donde se genera la siguiente secuencia de encajes, a través de la inclusión:

$$P_0 \hookrightarrow P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P. \quad (1.1)$$

Construcción. Tomemos un polígono P de n lados $\{l_1, \dots, l_n\}$, y

$$\tilde{r}_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c_i \text{ donde } r_i \in O(2, \mathbb{R}), \ c_i \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2)$$

las reflexiones respecto al lado l_i de P , el cual abreviaremos simplemente por $\tilde{r}_i = r_i + c_i$; tomando r_i la parte lineal obtenemos $R := \langle r_i \mid i \in \{1, \dots, n\} \rangle$ el grupo generado por las partes lineales de las reflexiones, donde se observa que R es subgrupo de $O(2, \mathbb{R})$ matrices ortogonales.

Definimos $\tilde{S}(P_k) = P_k \times R$ con $k = 0, 1, 2$ con la topología producto, donde R tiene la topología discreta.

Definimos la siguiente relación de equivalencia en $\tilde{S}(P_k)$:

$$(a, s) \sim (b, t) \text{ si y solo si } \begin{cases} a = b \text{ y } s = t, & \text{ó} \\ a = b \text{ está solamente en el lado } l_i \text{ de } P_k \text{ y } s^{-1}t = r_i, & \text{ó} \\ a = b \in P_k \text{ es un vértice de } P_k \text{ con lados } l_i, l_j \text{ y } s^{-1}t \in \langle r_i, r_j \rangle. \end{cases} \quad (1.3)$$

Definimos $S(P_k) := \frac{\tilde{S}(P_k)}{\sim}$, con la topología cociente.

Observación 1.3.1. Una clase $[x, t] \in S(P_0)$ tal que si $x \notin \text{int}(P)$, entonces consta de dos elementos $[x, t] = \{(x, t), (x, tr_i)\}$ y si $x \in \text{int}(P)$, tenemos que $[x, t] = \{(x, t)\}$.

Considerando 1.1, obtenemos nuevamente una secuencia de encajes:

$$S(P_0) \hookrightarrow S(P_1) \hookrightarrow S(P_2). \quad (1.4)$$

Cuando una trayectoria de un billar en P se refleja en un lado su dirección se cambia por la acción del elemento de R . Los polígonos racionales son densos en el espacio de polígonos; una trayectoria en una mesa de billar racional tendrá sólo un número finito de direcciones diferentes: R actúa en el círculo unitario S^1 y sea T la composición de las proyecciones naturales $P \times S^1 \rightarrow S^1 \rightarrow \frac{S^1}{R}$ (que es un intervalo), entonces la función T es constante a lo largo de toda la trayectoria de billar en un polígono racional.

Definición 1.5. Dado un polígono P , este se llamará un *billar integrable*, si las imágenes bajo el grupo de isometrías $A(P)$ tesela el plano.

Ejemplos de billares integrables son billares en cuadrados, rectángulos, triángulos equiláteros y triángulos rectángulos con un ángulo agudo de $\frac{\pi}{4}$ ó $\frac{\pi}{6}$. Notemos que en estos ejemplos cuando aplicamos la construcción de Katok-Zemlyakov, obtenemos un toro plano y que en todos esos casos, uno puede definir la extensión de una trayectoria de billar a través de un vértice del billar poligonal.

* Aunque polígonos integrables son excepcionales, porque su dinámica puede ser estudiada a través de flujos geodésicos de una superficie compacta asociada; algunas propiedades de la dinámica del billar en el caso integrable se extiende a polígonos racionales en general, como se verá a partir de la construcción de Katok-Zemlyakov más adelante. Lo que pretendemos a la vez es extender algunas propiedades de la dinámica en el caso de polígonos racionales a polígonos irracionales, muestra de ello es el teorema 3.10, que veremos más adelante.

Lema 1.6. *Sea P un polígono simplemente conexo en \mathbb{R}^2 , de ángulos interiores $\{\lambda_i\pi | i = 1, \dots, n\}$. El grupo R de reflexiones lineales es finito si y sólo si $\lambda_i \in \mathbb{Q}$, para todo $i = 1, \dots, n$.*

Prueba.- Sean $Vert(P) = \{v_i : i = 1, \dots, n\}$ el conjunto de vértices del polígono P tal que, cada ángulo $\lambda_i\pi$ está situado en v_i y $Lad(P) = \{l_i : i = 1, \dots, n\}$ el conjunto de lados de P tales que, $\lambda_i\pi$ está situado entre los lados l_{i-1} y l_i para $i = 2, \dots, n$. Cambiamos la numeración de $\{\lambda_i | i = 1, \dots, n\}$ de ser necesario.

Sea $T_\alpha \in SO(2, \mathbb{R})$ una rotación tal que $T_\alpha(v_2 - v_1) \in \mathbb{R} \times \{0\}$; donde:

$$T_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(2\alpha\pi) & -\sin(2\alpha\pi) \\ \sin(2\alpha\pi) & \cos(2\alpha\pi) \end{pmatrix}, \text{ además denotamos } r := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

entonces

$$\begin{aligned} \tilde{r}_1 &= rT_\alpha + (Id - rT_\alpha)v_1, & \text{donde } r_1 &= rT_\alpha \text{ y para } 1 < j \leq n \\ \tilde{r}_j &= rT_{(\lambda_2+\dots+\lambda_j)}T_\alpha + (Id - rT_{(\lambda_2+\dots+\lambda_j)}T_\alpha)v_j & \text{donde } r_j &= rT_{(\lambda_2+\dots+\lambda_j)}T_\alpha. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Además los ángulos interiores del polígono deben satisfacer:

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n - 2 \quad (1.7)$$

del cual obtenemos $\tilde{r}_n = rT_{\lambda_1}T_\alpha + (Id - rT_{\lambda_1}T_\alpha)v_j$, donde $r_n = rT_{\lambda_1}T_\alpha$; con ello denotamos

$$\begin{aligned} r_{\lambda_1} &:= r_n r_1 = T_{\lambda_1} \\ r_{\lambda_j} &:= r_{j-1} r_j = T_{\lambda_j} \text{ para } 1 < j \leq n \end{aligned} \tag{1.8}$$

los cuales están en el grupo de reflexiones lineales R .

Si R es finito, entonces los grupos $\langle r_{\lambda_i} \rangle$ son finitos, para todo $i = 1, \dots, n$, de donde $\lambda_i \in \mathbb{Q}$.

Si $\lambda_i := \frac{p_i}{q_i} \in \mathbb{Q}$ para todo $i = 1, \dots, n$, con p_i y q_i primos relativos; sea N el mínimo común múltiplo de $\{q_i \mid i = 1, \dots, n\}$, lo cual garantiza que

$$R \text{ es subgrupo de } \langle rT_\alpha, T_{\frac{1}{N}} \rangle \tag{1.9}$$

que es un grupo diédrico de cardinalidad $2N$; esto es inmediato considerando lo siguiente $r_j = rT_\alpha T_{\frac{1}{N}}^{N(\lambda_2 + \dots + \lambda_j)}$. □

Observando la prueba del lema anterior 1.6, podemos considerar sin pérdida de generalidad que P tiene un vértice en el origen y un lado adyacente a ese de norma 1 contenido en el eje real; el lema 1.6 sigue siendo válido si cambiamos P por $T(P)$, donde T es un movimiento rígido del plano o una dilatación.

Observación: Cuando P no es simplemente conexo, el lema anterior no necesariamente es válido; por ejemplo, consideremos un cuadrado con un cuadrado más pequeño extraído de su interior, como muestra la figura 1.7 donde λ es un número irracional. La reflexión respecto al lado l_1 es

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\lambda\pi & \sin 2\lambda\pi \\ -\sin 2\lambda\pi & \cos 2\lambda\pi \end{pmatrix} \in R$$

donde $\langle r_1 \rangle$ no es finito.

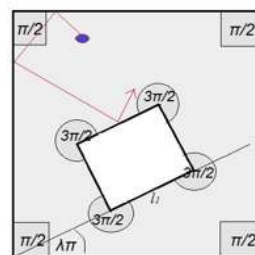


FIGURA 1.7: Polígono racional.

Corolario 1.7. Sea P un polígono racional simplemente conexo en \mathbb{R}^2 , de ángulos interiores $\{\frac{p_i}{q_i}\pi \mid i = 1, \dots, n\}$ con p_i y q_i primos relativos, sea $N := m.c.m.(q_1, \dots, q_n)$ mínimo común múltiplo. Entonces el grupo R de reflexiones lineales tiene cardinalidad $2N$.

Prueba.- Usando la notación de la prueba del lema 1.6 anterior con $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$, tenemos que

$$R \text{ es subgrupo de } \langle rT_\alpha, T_{\frac{1}{N}} \rangle \text{ donde } N = m.c.m.(q_1, \dots, q_n)$$

para tener la igualdad de grupos recordemos que $T_{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, T_{\frac{p_n}{q_n}}$ pertenecen al grupo R . Donde observamos que $\langle T_{\frac{p_i}{q_i}} \rangle = \langle T_{\frac{1}{q_i}} \rangle$, para todo $i = 1, \dots, n$; esto porque $T_{\frac{p_i}{q_i}} = (T_{\frac{1}{q_i}})^{p_i}$ y ambos grupos tienen la misma cardinalidad.

Procediendo por inducción sobre

$$\langle T_{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, T_{\frac{p_n}{q_n}} \rangle = \langle T_{\frac{1}{N}} \rangle. \quad (1.10)$$

1. Para $n = 2$, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\left(T_{\frac{1}{q_1}}\right)^a * \left(T_{\frac{1}{q_2}}\right)^b = T_{\frac{1}{N}} \quad (1.11)$$

esto porque, con la condición $q_1 q_2 = NM$ donde $M = m.c.d.(q_1, q_2)$ máximo común divisor; la ecuación 1.11 es equivalente a la ecuación diofántina lineal (identidad de Bézout) $aq_2 + bq_1 = M$, la cual tiene al menos una solución con $a, b \in \mathbb{Z}$.

2. Supongamos que la igualdad 1.10 es válida para $n - 1$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle T_{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, T_{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}, T_{\frac{p_n}{q_n}} \rangle &= \langle T_{\frac{1}{N'}}, T_{\frac{p_n}{q_n}} \rangle \quad \text{donde } N' = m.c.m.(q_1, \dots, q_{n-1}) \\ &= \langle T_{\frac{1}{N}} \rangle \quad \text{por 1.} \end{aligned}$$

donde $N = m.c.m.(N', q_n) = (q_1, \dots, q_n)$.

Por tanto, $\langle rT_\alpha, T_{\frac{1}{N}} \rangle$ es subgrupo de R .

Así,

$$R = \langle rT_\alpha, T_{\frac{1}{N}} \rangle$$

que tiene cardinalidad $2N$. □

Capítulo 2

Superficies planas y superficie asociada a un billar

Sea M una superficie orientable, conexa de dimensión real 2.

Definición 2.1. Una *estructura de traslación* en M es un atlas \mathcal{A} , consistiendo de cartas de la forma (U, φ) donde U es un dominio en M y φ es un homeomorfismo de U en un dominio en \mathbb{R}^2 , tal que las siguientes condiciones son válidas:

- i Los dominios U cubren toda la superficie M .
- ii Todas las funciones de cambio de coordenadas son traslaciones en \mathbb{R}^2 .
- iii El atlas \mathcal{A} es maximal con respecto a i y ii.

Varios autores, suelen llamar a las superficies con la anterior propiedad *superficies de traslación*, término que también optaremos.

Ejemplos de este tipo de superficies tenemos al toro $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$, el plano \mathbb{R}^2 y el cilindro $\frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}}$.

Una de las propiedades interesantes que cumple las superficies con estructura de traslación es la siguiente:

Lema 2.2. Si M es una superficie de traslación, entonces su haz tangente es trivial; es decir, $TM = M \times \mathbb{R}^2$.

Prueba.- En general los cociclos del haz tangente TS son de la forma $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})$, donde (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) son cartas de M . Como M es superficie de traslación, siempre tenemos que $D(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}) = Id_{\mathbb{R}^2}$, lo que implica que el haz tangente es trivial. \square

Una superficie a través de su estructura de translación hereda una métrica plana (de curvatura cero) de \mathbb{R}^2 mediante el pullback, con ello consideramos el haz tangente unitario asociado a la superficie de translación M ,

$$T_1M := \{(x, v) \in TM \mid \|v\| = 1\} = M \times \mathbb{S}^1. \quad (2.1)$$

Además de la proyección natural $\pi : M \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, definida por $\pi(x, v) = v$.

Definición 2.3. Definimos:

1. El *campo de vectores paralelos a v de norma uno*, como $X_v := \pi^{-1}(v)$.
2. Una *curva integral* para X_v es una curva $\gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ curva suave, tal que $\gamma'(t) = v$ para todo $t \in (a, b)$.
3. Una curva integral maximal $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ del campo de vectores X_v , es denominada *geodésica* de M en la dirección v .

Ahora vamos a definir un nuevo concepto que está muy relacionado al anterior, pero en sí diferente.

Definición 2.4. Una *estructura plana* en M es un atlas \mathcal{A} , consistiendo de cartas de la forma (U, φ) donde U es un dominio en M y φ es un homeomorfismo de U en un dominio en \mathbb{R}^2 , tal que las siguientes condiciones son válidas:

- i Los dominios U cubren toda la superficie M , excepto un conjunto discreto de puntos x_1, \dots, x_k, \dots ; llamadas singularidades.
- ii Todas las funciones de cambio de coordenadas son traslaciones en \mathbb{R}^2 .
- iii El atlas \mathcal{A} es maximal con respecto a i y ii.
- iv Para cada punto x_i existe un vecindad punteada \dot{U}_i que no contiene otros puntos singulares, una función φ_i de esta vecindad a una vecindad punteada \dot{V}_i de un punto de \mathbb{R}^2 , que es una translación en las coordenadas locales de \mathcal{A} y tal que cada punto en \dot{V}_i tiene exactamente m_i preimágenes. Este número m_i es llamado multiplicidad del punto singular x_i .

Las singularidades x_i que menciona la definición 2.4 serán denominadas *singularidades cónicas de ángulo finito*. Al igual que en el caso de las superficies con estructura de translación; las superficies que admiten un estructura plana, también la denominaremos *superficies planas*.

Nota.- La definición 2.4 extiende la definición dada por Vorobets [Vor96] para superficies compactas, esta definición 2.4 se adapta a superficie no compactas.

Definición 2.5. Una *singularidad cónica de ángulo infinito*, es un punto en la completación métrica (con respecto a la métrica natural) de la superficie plana M , donde localmente la superficie es isométrica a un cubriente cíclico infinito de $\epsilon D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \epsilon\}$.

Ejemplo 2.1. Consideremos el triángulo rectángulo de ángulos interiores $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$, a través de la construcción de Katok-Zemlyakov obtenemos un octágono con lados paralelos identificados.

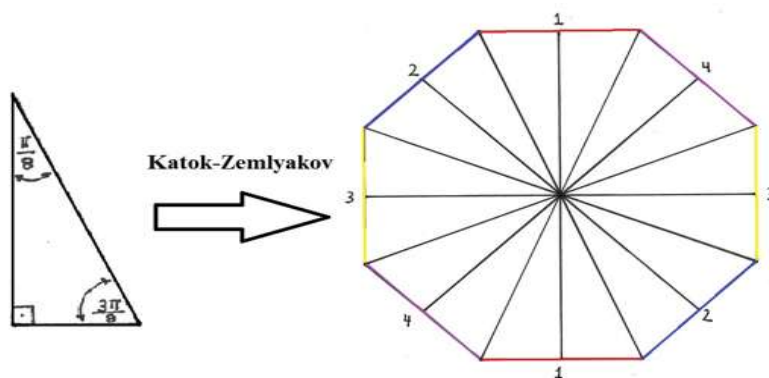


FIGURA 2.1: Superficie asociada al triángulo rectángulo.

Definición 2.6. Sean (M, \mathcal{A}) y (N, \mathcal{B}) dos superficies planas, un homeomorfismo $f : M \rightarrow N$ es llamado *isomorfismo afín*, si este mapea los puntos singulares de M en puntos singulares de N y es una función afín en las coordenadas locales de las estructura planas \mathcal{A} y \mathcal{B} . Cuando $(M, \mathcal{A}) = (N, \mathcal{B})$, el isomorfismo afín será denominado *automorfismo afín* y denotaremos al conjunto de automorfismos afines en (M, \mathcal{A}) por $Aff(M)$.

La definición anterior nos permitirá clasificar las superficies planas, observemos además que $Aff(M)$ es no vacío, pues $Id_M \in Aff(M)$.

2.1. Estructura de la superficie asociada al billar poligonal

A partir de un polígono P , mediante la construcción de Katok-Zemlyakov obtenemos los espacios topológicos $S(P_0)$, $S(P_1)$ y $S(P_2)$; en esta sección veremos que es posible dotarlos de una estructura de traslación y plana, además de que cumplen ciertas propiedades dinámicas. Para ello, distinguiremos dos casos: cuando P es racional y cuando es irracional.

2.1.1. Caso racional

Lema 2.7. $S(P_0)$ es una superficie de traslación.

Prueba.- Construiremos una estructura de traslación para la $S(P_0)$, para ello distinguimos dos casos:

- 1) Para cada $[x, t] \in S(P_0)$ con $x \in \text{int}(P_0)$, definimos (U, φ) , donde
 $U := \{[y, s] \mid (y, s) \in \text{int}(P_0) \times \{t\}\}$ y

$$\varphi : U \rightarrow W \quad , \text{ donde } W := t(\text{int}(P_0)) = \text{int}(t(P_0)) \quad (2.2)$$

$$[y, t] \mapsto t(y).$$

- 2) Para cada $[x, t] \in S(P_0)$ con x en un lado l_i de P_0 , definimos (V, ψ) , donde
 $V := \{[y, s] \mid (y, s) \in B \times \{t, tr_i\}\}$ y B un conjunto abierto del polígono de P , tal que $x \in B$ y $B \cap l_j = \emptyset$ si $j \neq i$;

$$\psi : V \rightarrow H \quad , \text{ donde } H := t(B) \cup tr_i(B) = t(B \cup r_i(B))$$

definida por

$$\psi([y, s]) = \begin{cases} t(y) & \text{si } (y, s) \in B \times \{t\} \\ t\tilde{r}_i(y) & \text{si } (y, s) \in B \times \{tr_i\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Veamos los cambios de coordenadas:

- Sean (U_t, φ_t) y $(V_{t'}, \psi_{t'})$ definidos como en 1) y 2), respectivamente; tales que $U_t \cap V_{t'} \neq \emptyset$, lo que implica que $t = t'$ ó $(t = t'r_i \Leftrightarrow t' = tr_i)$, así

$$\psi_{t'} \circ \varphi_t^{-1} : \varphi_t(U_t \cap V_{t'}) \rightarrow \psi_{t'}(U_t \cap V_{t'}).$$

- a) Para $t = t'$.

$$(\psi_t \circ \varphi_t^{-1})(y) = \psi_t([t^{-1}(y), t]) = t(t^{-1}(y)) = y.$$

- b) Para $t = t'r_i$.

$$\begin{aligned} (\psi_{t'} \circ \varphi_t^{-1})(y) &= \psi_{t'}([t^{-1}(y), t]) = \psi_{t'}([(t)^{-1}(y), t'r_i]) \\ &= t'\tilde{r}_i(t^{-1}(y)) = t'r_it^{-1}(y) + t'(c_i) \\ &= y + \lambda \quad , \text{ donde } \lambda = t'(c_i) \text{ es constante.} \end{aligned}$$

- Sean (V_t, ψ_t) , $(V_{t'}, \psi_{t'})$ definidos como en 2) tales que $V_t \cap V_{t'} \neq \emptyset$, lo que implica $t = t'$ ó $t = t'r_i$; además observemos que $V_t \cap V_{t'} = \{[y, s] \mid (y, s) \in (B \cap B') \times \{t, tr_i\}\}$.

a) Para $t = t'r_i$

$$\begin{aligned}
 (\psi_{t'} \circ \psi_t^{-1})(y) &= \begin{cases} \psi_{t'}([t^{-1}(y), t]) & \text{si } y \in t(B \cap B') \\ \psi_{t'}([(t\tilde{r}_i)^{-1}(y), t\tilde{r}_i]) & \text{si } y \in t\tilde{r}_i(B \cap B') \end{cases} \\
 &= \begin{cases} t'\tilde{r}_i(t^{-1}(y)) & \text{si } y \in t(B \cap B') \\ t'(t\tilde{r}_i)^{-1}(y) & \text{si } y \in t\tilde{r}_i(B \cap B') \end{cases} \\
 &= t'r_i(t^{-1}(y)) + t'(c_i) = y + \lambda, \text{ donde } \lambda = t'(c_i) \text{ es constante.}
 \end{aligned}$$

b) Para $t = t'$, el anterior proceso implica que $(\psi_{t'} \circ \psi_t^{-1})(y) = y$.

El atlas \mathcal{A}_0 formado (U, φ) y (V, ψ) para cada elemento de $S(P_0)$, forma una estructura de traslación de $S(P_0)$. \square

Lema 2.8. $S(P_1)$ es una superficie de traslación.

Prueba.- Cuando $[x, t] \in S(P_1)$ tal que x es un vértice de P_1 con ángulo interior $\frac{\pi}{n}$, donde $n \in \mathbb{N}$; una vecindad de $[x, t]$ en $S(P_1)$ consiste de $2n$ -copias de P_1 pegadas respecto al vértice x , cuyo ángulo será $2n * \frac{\pi}{n} = 2\pi$, con lo cual podemos construir una carta compatible con el atlas \mathcal{A}_0 que extiende a un atlas \mathcal{A}_1 , lo que implica que $S(P_1)$ junto con la estructura \mathcal{A}_1 es una superficie de traslación. \square

Lema 2.9. $S(P_2)$ es una superficie plana.

Prueba.- Usando las cartas del atlas \mathcal{A}_1 podemos levantar la métrica euclidiana de \mathbb{R}^2 a una métrica Riemanniana de curvatura cero en $S(P_1)$. En un elemento $[x, t]$ de $S(P_2)$ con x un vértice de P_2 de ángulo interior $\frac{m}{n}\pi$ con $m \neq 1$, m y n primos relativos; una vecindad de $[x, t]$ en $S(P_2)$ consiste de $2n$ -copias de P_2 pegadas respecto al vértice x ; en este punto tiene una singularidad de ángulo $2n * \frac{m}{n}\pi = 2m\pi$, en una vecindad de este punto la función $f(z) = z^{\frac{1}{m}}$, definida en una cubriente cíclico $m : 1$ a una vecindad $0 \in \mathbb{C}$, define una carta que extiende la estructura de traslación \mathcal{A}_1 a una estructura de superficie de Riemann. Métricamente, una vecindad de la singularidad de ángulo $2m\pi$ se obtiene pegando m copias de un disco plano como se indica en la figura 2.2. Claramente existe una proyección de esta vecindad al disco punteado, cuyas fibras tienen todas m preimágenes. Por lo cual, $S(P_2)$ es una superficie plana. \square

Observemos del último párrafo; si un vértice de P con tiene ángulo interior $\frac{m}{n}\pi$, $S(P_2)$ tiene $\frac{|R|}{2n}$ puntos singulares de multiplicidad m , correspondientes a dicho vértice.

Ahora calculemos el género de la superficie $S(P)$ cuando P es un polígono racional; en este caso $S(P)$ es una superficie compacta, orientable y sin frontera. Por lo cual, su

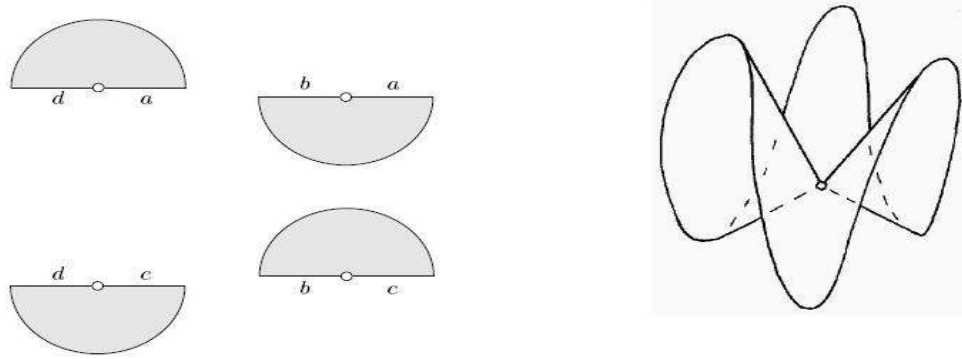


FIGURA 2.2: Singularidad Cónica de ángulo 4π .

género está relacionado con la característica de Euler-Poincaré:

$$\chi = C + V - A.$$

Así, la superficie tiene que ser homeomorfa a una unión finita de g toros, donde $\chi = 2 - 2g$.

El siguiente lema indica que los ángulos interiores de un polígono P racional, determinan topológicamente a la superficie plana $S(P)$.

Lema 2.10. *Supongamos que los ángulos interiores del polígono P son de la forma $\frac{p_i}{q_i}\pi$, $i = 1, \dots, n$ con p_i y q_i primos relativos. Sea N el mínimo común múltiplo de los q_i 's. Entonces*

$$g(S(P_2)) = 1 + \frac{N}{2} \left(n - 2 - \sum \frac{1}{q_i} \right). \quad (2.4)$$

Prueba. Debemos observar como se hace la identificación de la construcción de Katok-Zemlyakov alrededor de un vértice.

Consideremos v_i un vértice de P con ángulo $\frac{p_i}{q_i}\pi$; y sea $\langle r_i, r_{i-1} \rangle$ el grupo generado por las reflexiones lineales asociadas a las reflexiones \tilde{r}_i y \tilde{r}_{i-1} de los lados de P junto a v_i . Entonces $\langle r_i, r_{i-1} \rangle$ consiste de $2q_i$ elementos.

De acuerdo con la construcción de Katok-Zemlyakov el número de polígonos P que son pegados junto al vértice v_i es igual a la cardinalidad de $\langle r_i, r_{i-1} \rangle$, es decir igual a $2q_i$. Originalmente tenemos $2N$ copias de P , por tanto $2N$ copias de v_i ; después de las identificaciones tenemos $\frac{N}{q_i}$ copias del vértice en la superficie $S(P_2)$.

De donde obtenemos que el número de vertices en $S(P_2)$ es $N(\sum \frac{1}{q_i})$, el número total de lados es Nn , y el número de caras es $2N$. Por tanto, la característica de Euler-Poincaré de $S(P_2)$ es igual a

$$N \sum \frac{1}{q_i} - Nn + 2N = 2 - 2g$$

donde g es el género de $S(P_2)$. □

Ejemplo 2.2. Consideremos el billar en un triángulo rectangular de ángulo $\frac{\pi}{5}$, haciendo las reflexiones y la identificación como muestra la 2.3, obtenemos la superficie conocida como “el doble pentágono”; calculando la característica de Euler, se observa que la superficie tiene género 2.

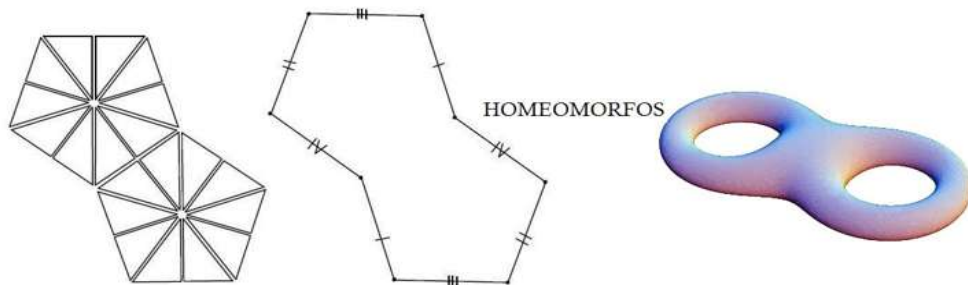


FIGURA 2.3: Singularidad cónica de ángulo 6π .

Además, la superficie tiene solamente un punto singular de ángulo 6π , y una vecindad de esa singularidad tiene la apariencia de cubierta ramificada de un disco en el plano, como se ve en la 2.4.

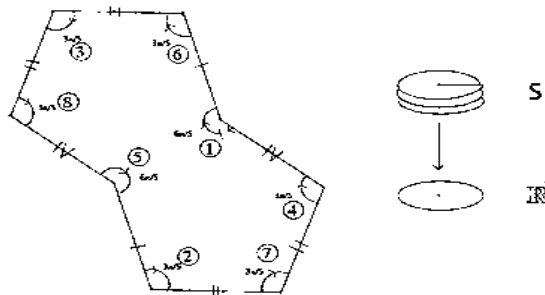


FIGURA 2.4: Vecindad de la singularidad.

2.1.2. Caso irracional

Si uno traza un polígono P en el plano de manera aleatoria, la probabilidad de este polígono sea racional es cero, esta es otra de las motivaciones por el cual nos interesa entender las propiedades de billares en polígonos irracionales.

Cuando aplicamos la construcción de Katok-Zemlyakov a un polígono irracional P , obtenemos un espacio topológico $S(P)$ que no es una variedad. En efecto, si $x \in S(P)$ corresponde a un vértice de ángulo no conmensurable a π , x no tiene vecindades compactas, lo que implica que $S(P)$ no es localmente compacto, por lo tanto $S(P)$ no es

variedad. Por tal razón denotaremos $S(P) := S(P_2)$.

En superficies $S(P)$ asociadas a polígonos P irracionales encontramos una caracterización topológica, el cual lo mencionamos a través del siguiente teorema:

Teorema 2.11. [Val09] *Sea $\lambda_1\pi, \dots, \lambda_N\pi$ los ángulos interiores del polígono P . Supongamos que existe $j \in \{1, \dots, N\}$ tal que λ_j no es un número racional. Entonces, la superficie plana $S(P)$ es homeomorfa al monstruo del Lago Ness, que es, la única superficie topológica orientable, de género infinito con exactamente un fin.*

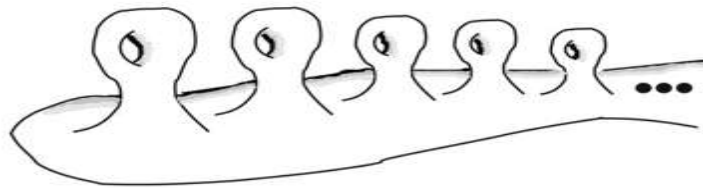


FIGURA 2.5: Monstruo del Lago Ness.

Definimos una proyección natural:

$$\begin{aligned} \Pi_{P_k} : S(P_k) &\rightarrow P_k \\ [x, t] &\rightarrow x \end{aligned} \tag{2.5}$$

la cual está bien definida, donde las geodésicas son proyectadas en trayectorias del billar, esto sucede por la construcción misma de Katok-Zemlyakov 1.3.

2.2. Acción del grupo de reflexiones en $S(P_0)$

Como R denota el grupo de reflexiones lineales del polígono P ; definimos la siguiente acción por la izquierda del grupo R sobre $S(P_0)$:

$$\begin{aligned} \phi : R \times S(P_0) &\longrightarrow S(P_0) \\ (s, [q, t]) &\longmapsto [q, st] \end{aligned} \tag{2.6}$$

por la observación 1.3.1 ϕ está bien definida; de donde definimos el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \phi_s : S(P_0) &\longrightarrow S(P_0) \\ [q, t] &\longmapsto [q, st] \end{aligned} \tag{2.7}$$

para cada $s \in R$.

Proposición 2.12. *La aplicación $\phi_s : S(P_0) \rightarrow S(P_0)$ definida por $\phi_s[q, t] = [q, st]$ para cada $s \in R$, es un difeomorfismo.*

Prueba.- Consideremos dos casos:

- 1) Sea $[x, t] \in S(P_0)$ tal que $x \in \text{int}(P_0)$, entonces tomamos las cartas (U_t, φ_t) , (U_{st}, φ_{st})

$$\begin{aligned} (\varphi_{st} \circ \phi_s \circ \varphi_t^{-1})(y) &= (\varphi_{st} \circ \phi_s)([t^{-1}(y), y]) \\ &= \varphi_{st}([t^{-1}(y), st]) = st(t^{-1}(y)) = s(y). \end{aligned}$$

- 2) Sea $[x, t] \in S(P_0)$ tal que x está en un lado l_i de P_0 , con las cartas (V_t, ψ_t) y (V_{st}, ψ_{st})

$$\begin{aligned} (\psi_{st} \circ \phi_s \circ \psi_t^{-1})(y) &= \begin{cases} \psi_{st} \circ \phi_s([t^{-1}(y), t]) & \text{si } y \in t(B \cap B') \\ \psi_{st} \circ \phi_s([(t\tilde{r}_i)^{-1}(y), tr_i]) & \text{si } y \in t\tilde{r}_i(B \cap B') \end{cases} \\ &= \begin{cases} \psi_{st}([t^{-1}(y), st]) & \text{si } y \in t(B \cap B') \\ \psi_{st}([(t\tilde{r}_i)^{-1}(y), str_i]) & \text{si } y \in t\tilde{r}_i(B \cap B') \end{cases} \\ &= \begin{cases} st((t^{-1}(y))) & \text{si } y \in t(B \cap B') \\ st\tilde{r}_i((t\tilde{r}_i)^{-1}(y)) & \text{si } y \in t\tilde{r}_i(B \cap B') \end{cases} \\ &= s(y). \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

Grupo de Veech de un billar poligonal irracional

Como vimos en la sección 1.1 la dinámica del billar en el cuadrado es equivalente al flujo geodésico en el toro, y este flujo geodésico satisface una dicotomía expresada a través del siguiente teorema, cuya prueba puede consultarse [KH95]:

Teorema 3.1 (Weyl). *Sea $\theta \in S^1 = \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ y g_θ^t el flujo geodésico del toro en la dirección θ . Entonces:*

1. *Toda órbita de g_θ^t es cerrada y del mismo período si y sólo si θ es un múltiplo racional de π .*
2. *El flujo g_θ^t es únicamente ergódico y la medida invariante es Lebesgue si y sólo si θ es un múltiplo irracional de π .*

La dicotomía anterior no es exclusiva del toro, también sucede en las superficies planas denominadas superficies de Veech, este último concepto surge de lo siguiente.

Cuando una superficie plana S es compacta, entonces el grupo de Veech $\Gamma(S)$ de la superficie (que definiremos más adelante en 3.9) es un subgrupo discreto (también llamado Fuchsiano) de $SL(2, \mathbb{R})$, donde la imagen de $\Gamma(S)$ en $PSL(2, \mathbb{R}) := \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\pm Id}$ (el cual también denotaremos por $\Gamma(S)$) actúa sobre el espacio hiperbólico $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ por isometrías preservando áreas, junto al siguiente resultado (cuya demostración puede consultarse en el texto Svetlana Katok [Kat92]).

Teorema 3.2. *Un subgrupo Γ de $SL(2, \mathbb{R})$ es discreto (Fuchsiano) si y sólo si su imagen en $PSL(2, \mathbb{R})$ actúa de manera propia y discontinua en \mathbf{H} .*

Tiene sentido definir una superficie hiperbólica $\frac{\mathbf{H} \setminus \mathbf{C}}{\Gamma(S)}$; donde C es un conjunto discreto y numerable de \mathbf{H} que permite que la acción de $\Gamma(S)$ sea libre en $\mathbf{H} \setminus \mathbf{C}$. Cuando el área hiperbólica de $\frac{\mathbf{H} \setminus \mathbf{C}}{\Gamma(S)}$ es finita, S es denominada una superficie de Veech (o superficie retícula).

Lo que nos permite enunciar el célebre teorema de Veech:

Teorema 3.3. [Vee89] *Sea S una superficie de Veech. Entonces para cada dirección $\theta \in \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}}$ el flujo geodésico, o bien es periódico o bien únicamente ergódico con respecto a la medida de Lebesgue.*

El teorema respalda el interés de describir propiedades del grupo de Veech de una superficie plana $S(P)$, asociada a un polígono irracional P y esto lo refleja el teorema principal de este trabajo:

Teorema 3.4. [Val12] *Sea P un polígono simplemente conexo con ángulos interiores $\{\lambda_j\pi\}_{j=1}^N$, $S = S(P)$ la superficie plana obtenida de P a través de la construcción de Katok-Zemlyakov y $\Gamma(S)$ el grupo de Veech de S . Supongamos que existe $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para algún $j \in \{1, \dots, N\}$. Entonces, $\Gamma(S) < SO(2, \mathbb{R})$ y el grupo generado por las rotaciones*

$$R(S) = \left\langle \left(\begin{array}{cc} \cos(2\lambda_j\pi) & -\sin(2\lambda_j\pi) \\ \sin(2\lambda_j\pi) & \cos(2\lambda_j\pi) \end{array} \right) \mid j = 1, \dots, N \right\rangle \quad (3.1)$$

es de índice finito en $\Gamma(S)$.

Para la prueba de este teorema necesitamos algunos conceptos y propiedades antes; los cuales desarrollaremos a continuación.

3.1. Vectores de holonomía

Como vimos en el capítulo anterior, $S(P_1)$ es una superficie de traslación; para cada dirección $\theta \in \mathbb{S}^1$ tenemos un campo constante unitario V_θ en $S(P_1)$ de vectores paralelos a dicha dirección. Dentro de todas las curvas integrales del campo V_θ , que llamamos geodésicas, distinguimos aquellas con extremos en singularidades cónicas de $S(P)$.

Definición 3.5. Toda curva integral maximal de V_θ cuyo dominio máximo de definición sea un intervalo de longitud finita se llama conexión silla. Toda γ geodésica en $S(P_1)$ que tenga un extremo en una singularidad cónica recibe el nombre de separatriz.

A cada conexión silla de la superficie podemos asignarle una representación geométrica en el plano \mathbb{R}^2 , a través de la siguiente definición.

Definición 3.6. Sea $\gamma : (a, b) \rightarrow S(P_1)$ una conexión silla de longitud $L(\gamma)$ del campo V_θ . Llamamos el vector de holonomía asociado a γ al vector en \mathbb{R}^2 con dirección θ de norma L . Denotamos a dicho vector por v_γ y definimos

$$V_{hol}S := \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v \text{ es un vector de holonomía de } S(P)\}. \quad (3.2)$$

Lema 3.7. *Las siguientes afirmaciones son válidas:*

1. *Existe un $c > 0$ que depende solamente del polígono P que acota inferiormente la longitud de cada conexión silla de $S(P_0)$.*
2. *Existe una conexión silla de longitud mínima en $S(P_0)$.*

Prueba. Consideremos $\pi_P : S(P) \rightarrow P$, la proyección natural.

1. Sea γ una conexión silla, la cual se proyecta sobre una diagonal generalizada de P . Como la cantidad de vértices de P es finita, existe $\epsilon > 0$ tal que $dist(v, u) > \epsilon$ para todo par de vértices distintos de P , de donde

$$0 < 2\epsilon < long(\pi_P(\gamma)) \leq long(\gamma)$$

tomando $c = \epsilon$.

2. Sea D_P el conjunto de las diagonales generalizadas de P y γ una conexión silla de $S(P_1)$, consideremos

$$D_P^0 := \{d \in D_P \mid long(d) \leq long(\pi_P(\gamma))\}$$

el cual no es vacío, ya que $\pi_P(\gamma) \in D_P^0$ y además es finito, esto es por [Kat87]; así, existe $d_0 \in D_P^0$ de longitud mínima, a partir de la construcción de Katok-Zemlyakov existe γ_0 tal que $\pi_P(\gamma_0) = d_0$.

□

3.2. Grupo de Veech

Una propiedad importante que cumplen las superficies de traslación $S(P_1)$, en relación a su conjunto de automorfismos afines $Aff(S)$, es la siguiente.

Lema 3.8. *Sea $f : S(P_1) \rightarrow S(P_1)$ un automorfismo afín de una superficie de traslación $S(P_1)$. Entonces Df_z no depende de z .*

Prueba.- Consideremos (U_i, ϕ_i) y (V_i, ψ_i) , $i = 1, 2$ cartas en z y $f(z)$, respectivamente. Como f es afín, entonces:

$$D(\psi_i \circ f \circ \phi_i^{-1})_{\phi_i(z)} = A_i, \quad i = 1, 2$$

para todo $z \in U_1 \cap U_2$. Por otro lado:

$$\begin{aligned} A_1 &= D(\psi_1 \circ f \circ \phi_1^{-1})_{\phi_1(z)} \\ &= D(\psi_1 \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1} \circ \phi_2 \phi_1^{-1})_{\phi_1(z)} \\ &= D(\psi_1 \circ \psi_2^{-1})_{\psi_2(f(z))} \circ D(\psi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1})_{\phi_2(z)} \circ D(\psi_2 \circ \psi_1^{-1})_{\phi_1(z)} \\ &= D(\psi_2 \circ f \circ \phi_2^{-1})_{\phi_2(z)} \\ &= A_2. \end{aligned}$$

Como $S(P_1)$ es conexo por caminos, obtenemos que la diferencial de f no depende de z . \square

El conjunto de difeomorfismos afines de una superficie plana que preservan la orientación, es un grupo cuando consideramos la composición de funciones. Denotemos dicho grupo por $Aff_+(S)$. El lema anterior y la regla de la cadena implican que la función que actúa en cada $f \in Aff_+(S)$ asignándole su matriz derivada Df , define un morfismo de grupos

$$D : Aff_+(S) \rightarrow GL_+(2, \mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Definición 3.9. La imagen del morfismo 3.3 se llama el grupo de Veech de la superficie plana S . Lo denotamos $\Gamma(S)$.

3.2.1. Acción del grupo de Veech en los vectores de holonomía

Sea S una superficie plana. Todo elemento f de $Aff_+(S)$ se extiende de manera continua a las singularidades cónicas, y define una permutación de estas singularidades de manera que manda a cada singularidad de ángulo total $2\pi k$ en una singularidad de ángulo total $2\pi k$, donde $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Por lo cual, dada una conexión silla $\gamma : (a, b) \rightarrow S$, tenemos que $f \circ \gamma$ es una curva cuya traza es la traza de una conexión silla $\psi : (a', b') \rightarrow S$, en principio $f \circ \gamma$ no necesariamente está parametrizada por la longitud de arco. Reparametrizando la curva $f \circ \gamma$ por la longitud de arco y usando una función afín $g : (a', b') \rightarrow (a, b)$, que debe satisfacer $\|(f \circ \gamma \circ g)'(t)\| = 1$; lo que implica $g'(t) = \frac{b-a}{b'-a'} = \frac{1}{\|Df \cdot \gamma'(s)\|}$. Así, obtenemos

$$v_\psi = (b' - a') \frac{Df \cdot \gamma'(s)}{\|Df \cdot \gamma'(s)\|} = (b - a) Df \cdot \gamma'(s) = Df \cdot v_\gamma. \quad (3.4)$$

Lo que nos permite definir una acción lineal del grupo de Veech $\Gamma(S)$ sobre el conjunto de vectores de holonomía:

$$\begin{aligned} V_{hol}(S) \times \Gamma(S) &\rightarrow V_{hol}(S) \\ (v, Df) &\mapsto Df \cdot v. \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2.2. Teorema

Ahora procedemos a enunciar y demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3.10. [Val12] *Sea P un polígono simplemente conexo con ángulos interiores $\{\lambda_j\pi\}_{j=1}^N$, $S = S(P)$ la superficie plana obtenida de P a través de la construcción de Katok-Zemlyakov y $\Gamma(S)$ el grupo de Veech de S . Supongamos que existe $\lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para algún $j \in \{1, \dots, N\}$. Entonces, $\Gamma(S) < SO(2, \mathbb{R})$ y el grupo generado por las rotaciones*

$$R(S) = \left\langle \left(\begin{array}{cc} \cos(2\lambda_j\pi) & -\sin(2\lambda_j\pi) \\ \sin(2\lambda_j\pi) & \cos(2\lambda_j\pi) \end{array} \right) \mid j = 1, \dots, N \right\rangle \tag{3.6}$$

es de índice finito en $\Gamma(S)$.

Prueba. Consideremos P_0 el polígono P sin sus vértices. La identificación de dos copias disjuntas P_0 a lo largo de lados comunes define una estructura euclídea en la esfera N -punteada denotada por $S^2(P)$, que es naturalmente cubierta por $S(P_0)$. Denotaremos la proyección de este cubriente por $\pi : S(P_0) \rightarrow S^2(P)$.

La prueba la desarrollaremos en tres pasos:

1. $R(S) < \Gamma(S)$.

Fijamos un punto q en la esfera N -punteada $S^2(P)$. Sea B_j un lazo en $S^2(P)$ alrededor del vértice faltante de P cuyo ángulo interior es $\lambda_j\pi$, con $j = 1, \dots, N$. Supongamos que $B_j \cap B_i = \{q\}$ para $i \neq j$. Entonces $\{B_j\}_{j=1}^N$ genera $\pi_1(S^2(P), q)$. La estructura euclidiana en la esfera N -punteada $S^2(P)$ da a surgir la representación de holonomía:

$$hol : \pi_1(S^2(P), q) \rightarrow Isom_+(\mathbb{R}^2) \tag{3.7}$$

Dada una isometría $\phi \in Isom_+(\mathbb{R}^2)$, denotamos su derivada por $D \circ \phi$. Un cálculo directo en coordenadas locales muestra que $hol(B_j)$ es afín y que $M_j = D \circ hol(B_j)$ está dada por:

$$M_j = \left(\begin{array}{cc} \cos(2\lambda_j\pi) & -\sin(2\lambda_j\pi) \\ \sin(2\lambda_j\pi) & \cos(2\lambda_j\pi) \end{array} \right) \tag{3.8}$$

como $\Gamma(S(P_0)) \subset \Gamma(S(P))$, concluimos que $R(S)$ es el subgrupo de $\Gamma(S)$ dado por la diferencial de los elementos en el grupo de transformaciones del cubriente $Deck(\pi)$. Este hecho también se puede deducir de la construcción de Katok-Zemlyakov. En efecto, el grupo generado por las reflexiones en los lados del polígono que actúa sobre $S(P_0)$ se mapea inyectivamente al grupo de homeomorfismos afines de la superficie (no necesariamente preserva orientación) 2.12, y por tomar la segunda potencia de cada generador, uno concluye que cada rotación M_j está en el grupo de Veech.

2. $\Gamma(P) < SO(2, \mathbb{R}^2)$.

La longitud de cada conexión silla en $S(P)$ está acotada por debajo por alguna constante $c := c(P) > 0$. En efecto, recordemos que cada conexión silla en $S(P)$ es igual a una unión finita de conexiones silla de $S(P_0)$. De aquí si acotamos por debajo las longitud de cada conexión silla en $S(P_0)$, habríamos terminado. Esto lo tenemos por el lema 3.7, otra alternativa que valida esto es la siguiente: consideremos la proyección natural $f : S^2(P) \rightarrow P$ que es 2 : 1 excepto a lo largo de la frontera de P . La proyección $f \circ \pi : S(P_0) \rightarrow P$ mapea cada conexión silla $\gamma \subset S(P_0)$ en una diagonal generalizada del juego de billar en P . La longitud de γ está acotada por la longitud de la diagonal generalizada $f \circ \pi(\gamma)$. La longitud de cada diagonal generalizada de la mesa de billar P está acotada por debajo por una constante positiva c que depende sólo de P , pues los vértices son discretos entre sí. Esto prueba lo que pretendíamos.

Ahora probaremos $\Gamma(P) < SO(2, (\mathbb{R}))$ por contradicción. Recordemos que $\Gamma(P)$ envía vectores de holonomía en vectores de holonomía. Del párrafo anterior podemos elegir un vector de holonomía v de longitud mínima. Dado que $R(S) < \Gamma(P)$ contiene rotaciones irracionales, la $\Gamma(P)$ -órbita es densa en el círculo de radio $\|v\|$ centrado en el origen. Ahora supongamos que el grupo de Veech $\Gamma(S)$ contiene un elemento A que no es una rotación. Entonces o bien el vector Av o $A^{-1}v$ tiene longitud menor que $\|v\|$, lo que es una contradicción.

En este caso, cuando P es irracional el grupo de Veech $\Gamma(S)$, a diferencia del caso P racional, no es un subgrupo discreto de $SL(2, \mathbb{R})$.

3. $R(P)$ es de índice finito en $\Gamma(P)$.

Pretendemos y probamos después, que el conjunto $V(S)$ de vectores de holonomía de $S(P)$ de longitud mínima es unión finita disjunta de la forma:

$$V(S) = R(S) \cdot v_1 \sqcup \dots \sqcup R(S) \cdot v_k \tag{3.9}$$

donde v_j es un vector de holonomía de $S(P)$ y $R(S) \cdot v_j := \{Av_j | A \in R(S)\}$ para cada $j = 1, \dots, k$. Como $H(S) := \frac{\Gamma(P)}{R(S)}$ actúa libremente en el conjunto de las

$R(S)$ –órbitas formando $V(S)$, el orden de $H(S)$ esta acotado superiormente por k .

Ahora probaremos que 3.9 es válido. Sea $A(S)$ el conjunto de las conexiones silla en $S(P)$ cuyo vector de holonomía está en $V(S)$. La proyección $f \circ \pi(A(S))$ sobre el polígono P es un conjunto finito de diagonales generalizadas $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_k\}$, pues el conjunto de diagonales generalizadas de longitud acotada siempre es finito [Kat87]. Entonces es suficiente mostrar que, para cada diagonal generalizada δ en P , el conjunto de vectores de holonomía surgiendo de las conexiones sillas en $(f \circ \pi)^{-1}(\delta)$ es unión finita de $R(S)$ –órbitas finitas como en 3.9.

Cada diagonal generalizada δ en P está determinada por un par de condiciones $\delta := (v_j, \alpha)$; donde v_j es un vértice de P en el que el ángulo interior es $\lambda_j \pi$ y $0 \leq \alpha \leq \lambda_j \pi$. En la esfera punteada $S^2(P)$ sobre δ están a los más dos geodésicas determinadas por la condición (v_j, α) y $(v_j, \bar{\alpha})$ donde $\bar{\alpha} = d\sigma\alpha$ y σ es la involución natural que satisface $P_\sigma = \frac{S^2}{\sigma}$. Denotemos esas geodésicas por δ' y $\bar{\delta}'$. Por tanto en S sobre δ , están dos familias numerables de conexiones sillas $\Gamma_1 := \pi^{-1}(\delta')$ y $\Gamma_2 := \pi^{-1}(\bar{\delta}')$. Recordemos que el cubriente π es normal, pues está definido por el kernel de la composición:

$$\pi_1(S^2(P)) \rightarrow \text{Isom}_+(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{GL}_+(2, \mathbb{R}). \quad (3.10)$$

Por tanto Γ_1 es la $\text{Deck}(\pi)$ –órbita de un levantamiento $\bar{\delta}'$ a S de δ' . Como $D(\text{Deck}(\pi)) = R(S)$, concluimos que todos los vectores de holonomía que surgen de Γ_1 son de la forma $R(S)v_{\delta'}$, donde $v_{\delta'}$ es el vector de holonomía asociado a la conexión silla $\bar{\delta}'$ sobre δ' .

□

Recordemos que el polígono “genérico” P posee solo una diagonal generalizada de longitud mínima. Deducimos de la prueba del teorema anterior lo siguiente.

Corolario 3.11. *Supongase que P posee solo una diagonal generalizada de longitud mínima. Entonces $R(S)$ es de índice a lo más 2 en $\Gamma(P)$.*

Bibliografía

- [AMS09] Aubin Arroyo, Roberto Markarian, and David P. Sanders. Bifurcations of periodic and chaotic attractors in pinball billiards with focusing boundaries. *Nonlinearity*, 22(7):1499–1522, 2009.
- [FK36] Ralph H. Fox and Richard B. Kershner. Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron. *Duke Math. J.*, 2(1):147–150, 1936.
- [Kat87] A. Katok. The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard. *Comm. Math. Phys.*, 111(1):151–160, 1987.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992.
- [KH95] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza.
- [Mas86] Howard Masur. Closed trajectories for quadratic differentials with an application to billiards. *Duke Math. J.*, 53(2):307–314, 1986.
- [Sin70] Ya. G. Sinai. Dynamical systems with elastic reflections. ergodic properties of dispersing billiards. *Uspehi Mat. Nauk*, 25(2 (152)):141–192, 1970.
- [Teb05] Serge Tebachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [Val09] Ferrán Valdez. Infinite genus surfaces and irrational polygonal billiards. *Geom. Dedicata*, 143:143–154, 2009.
- [Val12] Ferrán Valdez. Veech groups, irrational billiards and stable abelian differentials. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(3):1055–1063, 2012.
- [Vee89] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3):553–583, 1989.

-
- [Vor96] Ya. B. Vorobets. Plane structures and billiards in rational polygons: the Veech alternative. *Uspekhi Mat. Nauk*, 51(5(311)):3–42, 1996.
- [ZK76] A. N. Zemlyakov and A. B. Katok. Letter to the editors: “Topological transitivity of billiards in polygons” (*Mat. Zametki* **18** (1975), no.2, 291–300). *Mat. Zametki*, 20(6):883, 1976.
- [Zor06] Anton Zorich. Flat surfaces. In *Frontiers in number theory, physics, and geometry. I*, pages 437–583. Springer, Berlin, 2006.