Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Control óptimo de la ecuación de onda mediante el método del problema de momentos

TESIS

Que para obtener el grado de Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:
Erick Adan Castillo Jiménez

Asesor:
Dr. Abdon E. Choque Rivero

Morelia Michoacán, México, Mayo 2010.

A mis padres:
Antonio Castillo Presa
Eusebia Jiménez Domínguez

Agradecimientos

Agradezco a la *Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo* por darme la oportunidad de realizar mis estudios de nivel superior, así como a la *Facultad de Ciencias Físico Matemáticas* por prepararme en esta profesión, dandome una educación de calidad. Es para mi motivo de orgullo haber formado parte de esta institución educativa.

Del mismo modo y de manera respetuosa, agradezco ha cada uno de los profesores que me impartieron clase durante este tiempo, ya que fueron parte fundamental en mi desarrollo académico. Es un honor para mi haberlos conocido.

En especial quiero agradecer a mi asesor de tesis, el Dr. Abdon E. Choque Rivero por su paciencia, comprensión y por el gran apoyo que me ha brindado durante todo este tiempo.

GRACIAS.

Índice general

Introducción

En el presente trabajo consideramos una cuerda vibrante acotada en el intervalo $[0, S]$ (ver Figura 1.). Asumimos que están dadas la amplitud inicial $\Gamma_0(x)$ y la velocidad inicial en cada punto $\Gamma_1(x)$. Donde $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ están definidas en $[0, S]$ y son C^1 a trozos.

Las condiciones de contorno de la cuerda vibrante están descritas por las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$. Nuestro problema consiste en hallar las funciones $u_1(t)$ y $u_2(t)$ de la clase $L^2[0, T]$ tal que el estado y la velocidad de la cuerda vibrante en tiempo T, para $x \in [0, S]$, sea cero. Además, requeriremos que el tiempo T sea el mínimo posible, este problema se llama el tiempo de control óptimo de una cuerda vibrante, el cual será reducido al problema de momentos en espacios normados(ver capítulo 3).

A continuación daremos el planteamiento del problema en términos de una ecuación diferencial en derivadas parciales, más precisamente, la ecuación de onda con condiciones iniciales dadas y condiciones de contorno por determinar.

0.1. Planteamiento del problema

Consideremos la ecuación de onda con condiciones iniciales dadas y condiciones de contorno siguientes:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq S, \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{0.1}$$

$$Q(x, 0) = \Gamma_0(x), \qquad \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \Gamma_1(x), \tag{0.2}$$

$\Gamma_0, \Gamma_1 \in C^1$ a trozos. Sea el control $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ con $\mathbf{u}(t) \in L_2^2[0, T]$[1]

$$Q(0, t) = u_1(t), \qquad Q(S, t) = u_2(t). \tag{0.3}$$

[1] $\mathbf{u}(t) \in L_2^2[0, T]$ si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son medibles y $\int_{[0,T]} [u_1^2(t) + u_2^2(t)]dt$ existe.

Se requiere hallar el control $\mathbf{u}(t)$ tal que (0.1)-(0.3) satisface

$$Q(x,T) = \left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = 0, \tag{0.4}$$

donde T es tiempo mínimo. Además

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L_2^2[0,T]} \leq \ell, \qquad \ell > 0. \tag{0.5}$$

En el presente trabajo consideremos el caso en que $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$. Consecuentemente, utilizaremos el espacio $L^2[0,T]$ en lugar del espacio $L_2^2[0,T]$. En este caso, la desigualdad (0.5) tiene la forma

$$\|u\| \leq l \tag{0.6}$$

donde $l = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\ell$.

Interpretación física

Físicamente el problema considerado consiste en mover los puntos terminales de la cuerda vibrante a lo largo de las rectas $(0,Q)$ y (S,Q) en el plano xQ, de tal manera que la cuerda con condiciones iniciales $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ se lleve a reposo en tiempo mínimo T, es decir, $Q(x,T) = Q_t(x,T) = 0$, para $x \in [0,S]$. El mencionado movimiento en los puntos terminales está dado por las funciones

$$u_1(t) = u_2(t) = u(t), \qquad t \in [0,T], \tag{0.7}$$

las cuales debemos hallar. Además, el control $u(t) \in L^2[0,T]$ debe satisfacer la condición $\|u(t)\| \leq l$.

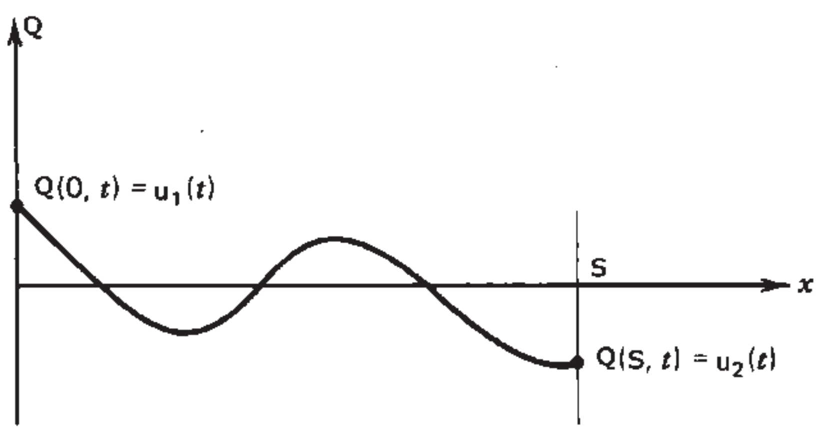


Figura 1. Control en los puntos extremos.

En virtud a la condición (0.7), para que exista solución del problema planteado, las funciones $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ deben ser simétricas respecto de la mitad del intervalo $[0, S]$ (ver pag. 23).

El problema planteado esta inmerso dentro del área de la teoría de control, ésta disciplina pertenece tanto a las matemáticas aplicadas como a la ingeniería. Más adelante veremos que este problema se puede trasladar a un problema de momentos, el cual a su vez, pertenece al área del análisis matemático.

A continuación daremos algunos conceptos de la teoría de control, en particular, de la teoría del control óptimo.

Objetos controlables

En teoría de control se estudian, desde el punto de vista matemático, objetos controlables.

Por ejemplo, se desea construir trayectorias a lo largo de las cuales un vehículo espacial, controlado por un motor a propulsión, pueda llegar a su destino en un tiempo mínimo o usando el mínimo de combustible.

En la teoría de control, controlar sistemas o modelos matemáticos obtenidos de la naturaleza, que en general son muy complejos, significa manipular el sistema para llevarlo a un objetivo dado.

Por ejemplo, un proceso de control descrito mediante un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que contiene control, llamado sistema controlable, se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \Omega \in \mathbb{R}^r,$$

Ω compacto. El problema de control consiste en: dados dos extremos x_0, x_1 y algún $T > 0$, hallar una función $u(t)$ continua a trozos en $[0, T]$, llamada control, tal que la trayectoria del sistema

$$\dot{x} = f(x, u(t)),$$

inicie en $x(0) = x_0$ y termine en $x(T) = x_1$.

Sobre el problema de control óptimo

En la antigua Grecia hechos como

- La distancia entre dos puntos en un plano se obtiene sobre la recta que une estos puntos.

- El círculo es la forma que encierra el área máxima para una longitud de parámetro dado.

ya eran conocidos para los griegos, quienes utilizaron un enfoque geométrico para la solución de problemas de extremo o de busqueda de mínimos y máximos.

En el siglo *XVIII* apareció una teoría sistemática de resolución de tales problemas, llamada Teoría de Optimización, la cual a rasgos generales trata de maximizar o minimizar un funcional sujeto a condiciones sobre sus variables. En la práctica estas variables las podemos observar como: temperatura, velocidad, información, etc.

Por otra parte, la tecnología ha sido parte importante en las aplicaciones de las, tan variadas, técnicas de optimización, tal y como ocurre en el control óptimo de cohetes y proyectiles; así que la teoría de optimización puede considerarse como parte de la teoría de control.

L. Pontryagin [1908 - 1988]

La teoría de control óptimo surgió como tal en los años 50´s, gracias a los trabajos de Bellman [3], Pontryagin [8] entre otros, en respuesta a los esfuerzos de los estadounidenses y rusos por explorar el espacio.

El control óptimo se ocupa del problema de hallar un control para un sistema dado, tal que cierto criterio de optimalidad se cumple. Un problema de control óptimo incluye un funcional, que es una función que depende de variables de estado y de control.

0.2. Método de resolución

En el presente trabajo, siguiendo el libro de Butkovskii [4], se ha resuelto el problema planteado para funciones iniciales $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ de clase C^1 a trozos, simétricas respecto de la mitad del intervalo $[0, S]$. Este problema se ha reducido en un *problema de momentos en espacios normados* [7].

Los resultados expuestos en el capítulo 2 de esta tesis, corresponden a aquellos enunciados en los libros de Ahiezer-Krein [7] y Butkovskii [4].

Nuestro trabajo ha consistido en elaborar, de manera detallada, la aplicación de los resultados del capítulo 2 para la solución del problema de tiempo de control óptimo de la ecuación de onda.

A continuación indicamos algunos conceptos de la teoría del problema de momentos.

Sobre el problema de momentos

Stieltjes [1856 - 1894]

El concepto de problema de momentos lo introdujo Stieltjes en 1894, en cuyo honor se introdujo el concepto de integral de Stieltjes [1].
En su manuscrito sobre fracciones continuas Stieltjes escribió:

"Vamos a llamar problema de momentos al siguiente problema: Encontrar la distribución de una masa positiva en el intervalo $[0, \infty)$, si son dados sus momentos de orden k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$."

Dar una distribución de masa positiva en la recta $[0, \infty)$, significa dar una función no decreciente $\sigma(u)$ $(u \geq 0)$ tal que el incremento $\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)$ representa para cualquier $\alpha \geq 0$ y $\beta > \alpha$ la masa que corresponde al intervalo $[\alpha, \beta]$. La masa completa del conjunto $[0, \infty)$ se representa en la forma

$$\lim_{\beta \to \infty} [\sigma(\beta) - \sigma(0)] = \int_0^\infty d\sigma(u),$$

mientras que

$$\int_0^\infty u d\sigma(u), \qquad \int_0^\infty u^2 d\sigma(u),$$

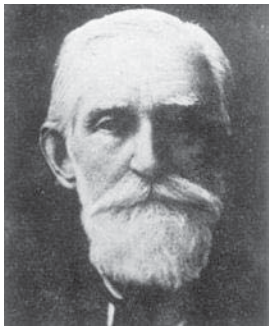
representan los momentos estáticos de la distribución de masa considerada y el momento de inercia respecto del punto $u = 0$. Stieltjes llama momento generalizado de orden k a la integral

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u).$$

Consecuentemente en el problema de Stieltjes se tiene una sucesión de números s_k $(k = 1, 2, \ldots)$ y se busca una función no negativa $\sigma(u)$, para $u \geq 0$, tal que se satisface

$$\int_0^\infty u^k d\sigma(u) = s_k, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Antes de Stieltjes, el matemático ruso Chebyshev había considerado trabajos relativos al problema de momentos.



Chebyshev [1821 - 1894]

La interpretación mecánica del problema de Chebyshev [1] se describe así: Sean dados la longitud, el peso, el lugar del centro de gravedad y los momentos de inercia de una barra rectilínea con densidad desconocida que cambia de un punto a otro. Se requiere hallar la función densidad, es decir,

$$c_0 = \int_a^b f(u)du, \qquad c_1 = \int_a^b uf(u)du, \qquad c_k = \int_a^b u^k f(u)du.$$

El problema de momentos se puede abordar utilizando varios métodos entre los cuales podemos mencionar: las fracciones continuas, el método de M. Riesz, teoría de operadores y la teoría de las funciones analíticas.

Contenido de esta tesis

En el primer capítulo se deduce el $l-$problema de momentos en un espacio lineal normado abstracto, para un sistema de parámetros distribuidos. En el segundo capítulo se dan las condiciones necesarias y suficientes para la solución del $l-$problema de momentos en L^2. También se dan los teoremas de existencia y unicidad del funcional f cuya norma no supera a un valor l. En el capítulo tres, aplicando los resultados del capítulo dos, se resuelve el problema de tiempo de control óptimo de la ecuación de onda. El capítulo cuatro consiste de ejemplos. En el apéndice se incluyen definiciones y resultados preliminares utilizados en esta tesis.

Capítulo 1

El problema de momentos en espacios normados

El método de problema de momentos es un aparato matemático bastante desarrollado, en particular, el método l–problema de momentos es un aparato muy fructífero para la solución de problemas de control óptimo de sistemas lineales. La historia de la aplicación de este método ilustra ampliamente el hecho de que la selección de un aparato matemático conveniente, permite resolver completamente una clase de problemas de control. Para resolver el problema de control óptimo es conveniente aplicar el método del $l-$problema de momentos el cual permite tomar en cuenta las condiciones de acotamiento dadas sobre el control y sobre las coordenadas actuales del objeto. Tales condiciones representan dificultades relevantes en la construcción de sistemas de control óptimo y restringe la aplicación de métodos clásicos del cálculo variacional.

Los métodos de ésta teoría permiten determinar la forma del control óptimo y también demostrar los teoremas de existencia y unicidad. Ya que la aplicación del control óptimo depende de un número de parámetros, el problema de momentos permite organizar el proceso iterativo convergente para el hallazgo de estos parámetros.

Éste método da un procedimiento de cálculo unificado independientemente de la dificultad y orden del objeto lineal controlable y el número de controles aplicados. Es interesante observar que el método no sólo es aplicable cuando se tienen las restricciones sobre el control, sino, cuando se tienen restricciones sobre las coordenadas del sistema.

Los resultados más generales en la teoría del $l-$problema de momentos han sido descritos por M. G. Krein en el libro [7], quien formuló este problema en un espacio lineal normado abstracto. Ya que estos resultados son muy importantes en los problemas considerados, en la presente tesis vamos a describir algunas nociones de esta teoría.

N. Krasovsky [6] fue el primero en aplicar el problema de momentos a la teoría de control óptimo de sistemas lineales descritos por ecuaciones diferenciales ordinarias.

En esta tesis vamos a considerar la aplicación de resultados obtenidos en la teoría del $l-$problema de momentos a problemas de control óptimo de sistemas lineales, con parámetros distribuidos, es decir, cuyo estado es infinito dimensional, por ejemplo en L^2.

Consideremos el siguiente problema:

Sea el estado de un sistema lineal controlable con parámetros distribuidos, descrito mediante la función $\tilde{Q}(x,t)$, donde x es la variable de espacio que recorre el intervalo $[0,S]$, y t el tiempo que recorre el intervalo $[0,T]$. Sea que el sistema está bajo influencia del control que depende del tiempo, caracterizado por la función $u = u(t)$. Vamos a asumir que la función $u(t)$ pertenece a la clase L^2 de funciones medibles e integrables en módulo al cuadrado, además la norma de ésta función no puede ser mayor a un número l dado, es decir,

$$||u|| \leq l. \tag{1.1}$$

La restricción (1.1) se puede escribir de la siguiente manera

$$\left(\int_0^T |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq l.$$

Ésta restricción corresponde a las necesidades energéticas del sistema.

Para la condición inicial $\tilde{Q}(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq S$, el estado del sistema controlable lo vamos a describir mediante la fórmula

$$\tilde{Q}(x,t) = \int_0^t K(x,t,\tau)u(\tau)d\tau, \tag{1.2}$$

donde $K(x,t,\tau)$ es una función continua respecto de todas sus variables.

Planteemos el siguiente problema de control óptimo: Sea $Q^*(x)$, $0 \leq x \leq S$, una distribución la cual se desea alcanzar. Hallar un control $u(t)$ bajo la condición (1.1), tal que la igualdad

$$Q^*(x) = \int_0^T K(x,T,t)u(t)dt, \tag{1.3}$$

se satisfaga en tiempo mínimo $T = T^0$.

Este problema se puede reformular de la siguiente manera:

Sea dada la función $K(x,t,\tau)$, la función $Q^*(x) \neq 0$ en el intervalo $[0,S]$ y el número $l > 0$. Hallar las condiciones necesarias y suficientes tal que exista una función $u(t) \in L^2$ para $0 \leq t \leq T$ y que satisface las condiciones (1.1) y (1.3).

Ya que en la formulación de las condiciones necesarias y suficientes se tiene al parámetro T (tiempo) como límite superior de la integral (1.3), entonces el problema de control óptimo se reduce al problema de hallar $T = T^0$ mínimo, para el cual se satisfacen las condiciones de solubilidad del $l-$problema de momentos.

Vamos a dar una formulación del $l-$problema de momentos. Tomemos un sistema arbitrario completo de funciones o base de funciones en L^2

$$\{h_k(x)\}, \quad 0 \leq x \leq S, \quad k = 1, 2, \ldots$$

y desarrollemos en virtud de este sistema, las funciones $Q^*(x)$ y $K(x, t, \tau)$. Asumiendo que estas funciones son C^1 respecto de x, para cada t y τ fijos del intervalo $[0, T]$, obtenemos

$$\hat{Q}^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h_k(x), \qquad 0 \leq x \leq S \tag{1.4}$$

y

$$K(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t, \tau) h_k(x), \qquad 0 \leq x \leq S, \quad 0 \leq \tau \leq t \leq T. \tag{1.5}$$

Entonces la igualdad (1.3) toma la forma

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i h_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T g_i(T, t) u(t) dt \cdot h_i(x), \tag{1.6}$$

igualando miembro a miembro los coeficientes que acompañan $h_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots$ en las partes izquierda y derecha de la igualdad (1.6) obtenemos un sistema numerable de igualdades cuyo cumplimiento es una condición necesaria y suficiente para la validez de la ecuación (1.3)

$$\alpha_i = \int_0^T g_i(T, t) u(t) dt, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Los números α_i se llaman momentos de la función $u(t)$ respecto de la sucesión de funciones $\{g_i(T, t)\}_{i=1}^{\infty}$.

Entonces el $l-$problema de momentos consiste en determinar las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la función $u(t) \in L^2$ que satisface la condición (1.1) y que tiene en calidad de sus momentos a los números α_i, respecto de la sucesión de funciones $\{g_i(T, t)\}$.

De esta manera la solución del $l-$problema de momentos responde completamente a la pregunta: ¿Es controlable este sistema o no es controlable?, sí el $l-$problema de momentos tiene una solución el sistema es controlable, en caso contrario, el sistema es no controlable respecto de las condiciones iniciales y terminales. Ya que los números α_i y las funciones g_i dependen de T y las condiciones necesarias y suficientes para la solución del $l-$problema de momentos están dadas mediante los números α_i y las funciones g_i, entonces éstas condiciones van a depender del parámetro T. El problema posterior consiste en hallar el valor mínimo del parámetro $T = T^0$ (que juega el papel del tiempo de traslado del proceso) bajo el cual el sistema es aún controlable.

Notemos que la transformación de la igualdad (1.3) en el sistema de ecuaciones numerables (1.7) puede inmediatamente determinar la no solubilidad del $l-$problema de momentos para algunos l y T, en efecto, por ejemplo, sí para algún número fijo j, el número $\alpha_j \neq 0$ mientras $g_j(T,t) = 0$ (es decir, en la descomposición de la función $K(x,t,T)$ está ausente el miembro $g_j(T,t)h_j(x)$, mientras que el coeficiente α_j que acompaña al miembro $h_j(x)$ para la distribución $\hat{Q}^*(x)$ no es igual a cero), entonces ningún control en ningún tiempo T puede hallar en el sistema la distribución deseada $\hat{Q}^*(x)$.

Los problemas citados anteriormente admiten una más amplia generalización. Consideremos el siguiente hecho, si la expresión (1.7) para T fijo se considera como un funcional lineal f determinado por la función $u(t)$, entonces la ecuación (1.7) para $i = 1, 2, \ldots$ se puede considerar como el valor de cierto funcional $f(g)$ sobre los elementos $g_i = g_i(T,t)$, de ésta manera la función $u(t) \in L^2$ se identifica con el funcional, además, $\|f\| = \|u\|$, es decir,

$$\|f\| = \|u\| = \left(\int_0^T |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

este funcional es lineal en L^2. La función $g_i(t,T)$ para T fijos debe ser elemento de este espacio.

Tomando en cuenta lo anterior, formulemos el $l-$problema de momentos en una forma más abstracta en términos del análisis funcional. Sea E un espacio lineal normado y sea que en él están dados $g_1, \ldots, g_n$ elementos linealmente independientes. Sea un funcional f definido sobre E. Los números

$$\alpha_i = f(g_i) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.8}$$

se llaman momentos del funcional f respecto de la sucesión $\{g_i\}$.

Entonces el $l-$problema de momentos en este caso consiste en señalar las condiciones necesarias y suficientes para que la sucesión dada de números $\{\alpha_i\}$ sea una sucesión de momentos del funcional f respecto de la sucesión de elementos $\{g_i\}$ bajo la condición

$$\|f\| \leq l. \tag{1.9}$$

El problema planteado se llama $l-$problema de momentos en un espacio lineal abstracto normado [7]. Si el número de ecuaciones (1.8) es infinito entonces el $l-$problema de momentos se llama infinito, en caso contrario, tenemos un problema de momentos finito.

Capítulo 2

Teoría del l-problema de momentos

El problema de control óptimo se reduce al problema de momentos, que es el de encontrar una función $u(t) \in L^2$ para la cual existe $l > 0$ tal que

$$\|u\| \leq l \tag{2.1}$$

y se cumpla el siguiente sistema infinito de igualdades

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t)u(t)dt, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

donde los α_k son números dados y los $g_k(t)$ son funciones linealmente independientes en L^2 , además T debe ser el tiempo de control mínimo. El teorema fundamental para la solución de este problema es el siguiente:

Teorema 2.1. *Para que en el espacio L^2, exista una función $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, con norma que no supere el valor l y exista la sucesión de momentos α_k respecto de la sucesión g_k, es necesario y suficiente que para todas las sucesiones finitas de números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ se satisfaga la desigualdad*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k\right| \leq l \left(\int_0^T \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Demostración. Supongamos que $u(t) \in L^2$ es una solución del problema de momentos, entonces multiplicando ambas partes de las ecuaciones (2.2) correspondientemente por los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, y luego sumando miembro a miembro, tenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k = \int_0^T \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k(t)u(t)dt.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy y tomando en cuenta la desigualdad (2.1) tenemos la desigualdad requerida

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k\right| &= \left|\int_0^T\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(t)u(t)dt\right| \leq \\ &\leq \left(\int_0^T |u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq l\left(\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(t)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Veamos ahora la suficiencia. Supongamos que la desigualdad (2.3) se cumple para toda colección finita de números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Se requiere demostrar que existe una función acotada $u(t) \in L^2[0, T]$, la cual es una solución del $l-$problema de momentos antes formulado, es decir, satisface el sistema infinito de ecuaciones (2.2). Fijemos n y supongamos que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ adicionalmente satisfacen

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k = 1 \tag{2.5}$$

(esto es posible, ya que los números $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ son arbitrarios). En virtud de la desigualdad (2.3) y la condición (2.5) se tiene

$$l^{-2} \leq \gamma_n, \tag{2.6}$$

entonces $\gamma_n = \displaystyle\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(t)\right|^2 dt$ tiene un mínimo finito respecto de los $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ que satisfacen la condición (2.5). Este mínimo se puede hallar por la regla de los multiplicadores de Lagrange.

Derivando parcialmente respecto de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ la función

$$s_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \int_0^T |r_n(t)|^2 dt - \beta\varphi_n^2, \tag{2.7}$$

donde $r_n(t) = \sum_{k=1}^{n}\xi_k g_k(t)$, y β es un multiplicador de Lagrange, tenemos que para cada $k = 1, \ldots, n$ se satisface la igualdad

$$\frac{\partial s_n}{\partial\xi_k} = \int_0^T |r_n(t)|\mathrm{sgn} r_n(t) g_k(t)dt - \beta\alpha_k\varphi_n = 0. \tag{2.8}$$

Multiplicando cada una de estas igualdades por ξ_k y sumando respecto de $k = 1, \ldots, n$, tenemos:

$$\int_0^T |r_n(t)| \mathrm{sgn} r_n(t) \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) dt - \beta \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k \varphi_n = 0.$$

Utilizando la igualdad (2.5) obtenemos que en el punto extremo

$$\gamma_n = \int_0^T |r_n(t)|^2 dt = \beta. \tag{2.9}$$

En base a las condiciones (2.5) y (2.8) inmediatamente se puede concluir que si el punto $(\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ es un punto mínimo relativo de la integral γ_n, entonces

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t) \frac{1}{\beta} |r_n^0(t)| \mathrm{sgn} r_n^0(t) dt\,, \qquad k = 1\,, \ldots, n, \tag{2.10}$$

donde

$$r_n^0(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t).$$

Comparando las ecuaciones (2.2) y (2.10), vemos que

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{1}{\beta} |r_n^0(t)| \mathrm{sgn} r_n^0(t) = \\ &= \frac{1}{\beta} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \right| \mathrm{sgn} \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde β, definido como en (2.9) (para $\xi_k = \xi_k^0$), determina completamente la solución finita del problema de momentos para $k = 1, \ldots, n$. Ahora demostremos que la condición (2.1) también se cumple. Utilizando (2.11) obtenemos

$$\int_0^T |u_n(t)|^2 dt = \frac{1}{\beta^2} \int_0^T |r_n^0(t)|^2 dt \tag{2.12}$$

de donde utilizando la igualdad (2.9) y la desigualdad (2.6), tenemos

$$\int_0^T |u_n(t)|^2 dt = \frac{1}{\beta} \leq l^2, \tag{2.13}$$

de esta manera

$$\|u_n\| \leq l. \tag{2.14}$$

Ahora demostremos que para n cuando $n \to \infty$, existe un función acotada $\|u(t)\| \leq l$ la cual da la solución del problema de momentos infinito. En efecto, ya que la sucesión $\|u_1(t)\|$, $\|u_2(t)\|$, $\ldots$, $\|u_n\|$, $\ldots$ está acotada para todo n por el número l, entonces la sucesión de funciones $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\ldots$, $u_n(t)$, $\ldots$ contiene una subsucesión que converge débilmente, cuyo límite que denotamos por $u(t)$, está acotada por el número l teniendo lugar la igualdad

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t)u(t)dt, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2.15}$$

consecuentemente en las condiciones del teorema se demuestran la existencia de la función buscada $u(t) \in L^2$. De esta manera, el teorema que da la condición necesaria y suficiente para la solución del problema de momentos infinitos, ha sido completamente demostrado. □

De la demostración de este teorema obtendremos, además, algunas afirmaciones que son útiles para la solución de problemas de momentos finitos de dimensión n.

Teorema 2.2. *Para que en el espacio $L^2\,[0, T]$, exista la función $u(t)$ cuya norma no supere a un número positivo l y cuya sucesión de $n-$momentos respecto de las funciones $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\ldots$, $g_n(t)$ sea α_1, α_2, $\ldots$, α_n, es decir, tal que exista el problema de momentos finito*

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t)u(t)dt, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.16}$$

es necesario y suficiente que existan n números ξ_1^0, ξ_2^0, $\ldots$, ξ_n^0 que den solución a uno de los siguientes problemas:

1. *Hallar.*

$$\min_{\xi_1,\ldots,\xi_n} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k g_k(t) \right|^2 dt = \int_0^T \left| \sum_{k=1}^n \xi_k^0 g_k(t) \right|^2 dt \geq l^{-2} \tag{2.17}$$

bajo la condición

$$\sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k = 1; \tag{2.18}$$

2. *Hallar*

$$\max_{\xi_1,\ldots,\xi_n} \sum_{k=1}^n \xi_k \alpha_k \leq l \tag{2.19}$$

bajo la condición

$$\int_0^T \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k(t) \right|^2 dt = 1; \tag{2.20}$$

además, la función $u(t)$ que da solución del $l-$problema de momentos tiene la forma

$$u(t) = \frac{1}{\beta} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 g_k(t) \right| sgn \sum_{k=1}^{n} \xi_k^0 g_k(t), \tag{2.21}$$

donde $\beta \geq l^{-2}$ se determina por (2.9), mientras que $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ es solución de los problemas (2.19) y (2.20).

El teorema 2.2 con el problema 1 se contiene en la demostración del teorema fundamental.

Usando el teorema 2.2, el teorema 2.1 se puede reformular de la siguiente manera.

Teorema 2.3. *Para que exista una solución del $l-$problema de momentos infinito es necesario y suficiente que exista una solución del $l-$problema de momentos finito arbitrario.*

Observación 2.1. *Un problema de momentos finito se obtiene del $l-$problema de momentos infinito fijando un número finito de ecuaciones de momentos.*

2.1. $l-$problema de momentos finito

Vayamos ahora a la solución del problema formulado en el párrafo anterior del $l-$problema de momentos en un espacio lineal normado abstracto. Consideremos primero el caso finito. Planteemos el siguiente problema:

Hallar un elemento $\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n$ en el espacio E_n tal que

$$\inf_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\| = \frac{1}{\lambda_n} \geq \frac{1}{l}, \tag{2.22}$$

bajo la condición adicional

$$\xi_1 \alpha_1 + \ldots + \xi_n \alpha_n = 1, \tag{2.23}$$

donde $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, mientras que los valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ no todos son cero al mismo tiempo.

En virtud a la linealidad de la parte izquierda de la expresión (2.23) y la homogeneidad de la norma en (2.22), el problema (2.22) y (2.23) se puede escribir así:

Hallar el elemento $\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k$ tal que

$$\text{máx}(\alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n) = \lambda_n \leq l \tag{2.24}$$

bajo la condición

$$\|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\| = 1. \tag{2.25}$$

De esta manera cada solución del problema (2.22), (2.23) es una solución del problema (2.24), (2.25) y viceversa, es decir, estos dos problemas son equivalentes.

El valor λ_n determinado por las ecuaciones (2.22), (2.23) o (2.24) y (2.25) depende de los valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ por eso lo vamos ha denotar como $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Lema 2.1. *Existe el vector ξ^0 tal que*

$$\inf_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\| = \|\xi_1^0 g_1 + \ldots + \xi_n^0 g_n\| = \frac{1}{\lambda_n} \tag{2.26}$$

bajo la condición

$$\xi_1\alpha_1 + \ldots + \xi_n\alpha_n = \xi_1^0\alpha_1 + \ldots + \xi_n^0\alpha_n = 1. \tag{2.27}$$

Demostración. En principio observemos que el ínfimo de la ecuación (2.26) bajo la condición (2.27) se alcanza. En efecto, sea ξ^k, $k = 1, 2, \ldots$, una sucesión de vectores minimizante $\left(\xi_1^k, \xi_2^k, \ldots, \xi_n^k\right)$, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \|\xi_1^k g_1 + \xi_2^k g_2 + \ldots + \xi_n^k g_n\| = \frac{1}{\lambda_n}, \tag{2.28}$$

además

$$\alpha_1\xi_1^k + \alpha_2\xi_2^k + \ldots + \alpha_n\xi_n^k = 1. \tag{2.29}$$

De (2.28) se sigue que los elementos

$$g^k = \xi_1^k g_1 + \xi_2^k g_2 + \ldots + \xi_n^k g_n$$

forman un conjunto acotado en E, es decir,

$$\|g^k\| \leq c, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.30}$$

donde c es una constante positiva. Si consideramos un espacio $n-$dimensional g, que es una combinación lineal de vectores $g_1, g_2, \ldots, g_n$ con norma

$$\|g\| = \|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\|,$$

entonces el conjunto acotado y finito de elementos g^k para $k = 1, 2, \ldots$, que satisface la condición (2.30), pertenecen a un conjunto compacto, ya que toda esfera de un espacio de dimensión finita es compacta en ese espacio. Consecuentemente existe una subsucesión ξ^{k_m}, $m = 1, 2, \ldots$ que minimiza la sucesión ξ^k , $k = 1, 2, \ldots$ y que existe el límite

$$\lim_{m\to\infty}\left(\xi_1^{k_m} g_1 + \xi_2^{k_m} g_2 + \ldots + \xi_n^{k_m} g_n\right) = \xi_1^0 g_1 + \xi_2^0 g_2 + \ldots + \xi_n^0 g_n.$$

Pero de esta igualdad se sigue (ver la demostración del Teorema 2.1) que

$$\|\xi_1^0 g_1 + \xi_2^0 g_2 + \ldots + \xi_n^0 g_n\| = \lim_{m\to\infty} \|\xi_1^{k_m} g_1 + \xi_2^{k_m} g_2 + \ldots + \xi_n^{k_m} g_n\|,$$

y además

$$\lim_{m\to\infty} \xi_i^{k_m} = \xi_i^0 \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

consecuentemente

$$\alpha_1\xi_1^0 + \alpha_2\xi_2^0 + \ldots + \alpha_n\xi_n^0 = 1.$$

De esta manera, queda demostrado que el vector ξ^0 existe. □

Consideremos algunas propiedades de $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

a) $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) > 0$,

b) $\lambda_n(a\alpha_1, \ldots, a\alpha_n) = |a|\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, para cada a

c) $\lambda_n(\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n) \leq \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \lambda_n(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

Si consideramos un espacio $n-$dimensional E_n de vectores $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ entonces en virtud de las propiedades a), b) y c) de la función $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se puede determinar la norma de α con la ayuda de la ecuación

$$\|\alpha\| = \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Pero en virtud de que el espacio E_n es finito, es posible hallar dos constantes positivas $m > 0$ y $M > 0$ tal que

$$m\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} < \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) < M\sqrt{\alpha_1^2 + \ldots + \alpha_n^2} \tag{2.31}$$

y la función $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ va a ser función continua de sus argumentos α_1, α_2, $\ldots$, α_n en el punto $\alpha = 0$.

Demostremos que la función $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es una función continua. Para esto usemos la siguiente desigualdad de normas

$$\Big|\|\alpha + \beta\| - \|\alpha\|\Big| \leq \|\beta\|.$$

La continuidad de la función $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en un punto arbitrario $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se sigue de la desigualdad

$$|\lambda_n(\alpha_1 + \triangle\alpha_1, \ldots, \alpha_n + \triangle\alpha_n) - \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| \leq |\lambda_n(\triangle\alpha_1, \ldots, \triangle\alpha_n)|,$$

ya que en virtud a la continuidad de la función $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en $\alpha = 0$, tenemos que $\lambda_n(\triangle\alpha_1, \ldots, \triangle\alpha_n) \to 0$ cuando $\max\limits_{i=1,\ldots,n} |\triangle\alpha_i| \to 0$.

Finalmente observemos otra propiedad de la función $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Con el crecimiento de la dimensión del espacio E_n el mínimo de (2.22) puede solamente decrecer, entonces

d) $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq \lambda_m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ para $m > n$.

Demostremos ahora el teorema fundamental de existencia.

Teorema 2.4. *Para que en el espacio E^*(espacio dual de E) exista un funcional lineal f cuya norma no supere a un número positivo dado l y cuya sucesión de momentos respecto de los elementos $g_1, g_2, \ldots, g_n$ del espacio normado E sea $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, es necesario y suficiente que*

$$\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \leq l \tag{2.32}$$

donde $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se determina por la ecuación (2.22) o (2.24) bajo la condición adicional (2.23) o (2.25) correspondientemente.

Demostración. Demostremos primero la parte necesaria. Supongamos que el funcional lineal $f(g)$ es una solución del $l-$problema de momentos, entonces multiplicando la ecuación $k-$ésima (1.8) por ξ_k y sumando miembro a miembro obtenemos:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\alpha_k\right| = \left|f\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k\right)\right| \leq \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k\right\| \leq l \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k\right\|.$$

De donde en virtud a (2.23) obtenemos:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k\right\| \geq \frac{1}{l}$$

y consecuentemente,

$$\min_{\xi} \left\|\sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k\right\| = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \geq \frac{1}{l},$$

donde el mínimo se toma a través de todos los ξ que satisfacen la condición (2.23). De esta manera se demuestra la parte necesaria del teorema.

Demostremos la parte de suficiencia. Supongamos que la condición (2.32) se satisface. Consideremos un espacio $n-$dimensional E_n que está compuesto de elementos de tipo

$$g = \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k.$$

Introduzcamos en E_n un funcional lineal

$$\varphi(g) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k$$

con norma $\|\varphi\|_{E_n} = \text{máx}_{\|g\|=1} |\varphi(g)|$ tomando en cuenta (2.24) tenemos

$$\|\varphi\|_{E_n} = \max_{\|g\|=1} |\varphi(g)| = \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Observemos que el máximo en la última definición de norma, en virtud a la condición del teorema que estamos demostrando, se alcanza (ver(2.24)).

De acuerdo al teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal $f_0(g)$, definido en E, tal que

$$\|f_0\| = \|\varphi\|_{E_n} = \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq l,$$

y $f_0(g) = \varphi(g)$ para cada $g \in E_n$ y, consecuentemente,

$$f_0(g_i) = \varphi(g_i) = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

De esta manera el funcional lineal $f_0(g)$ es el funcional buscado que da la solución al $l-$problema de momentos $n-$dimensional en el espacio lineal abstracto normado. □

En adelante, requeriremos de otra propiedad de la función $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Supongamos que se considera un conjunto de espacios lineales normados E_T que dependen de un parámetro T. Por ejemplo, en el caso del espacio $L^2[0, T]$, tal parámetro puede ser el punto terminal derecho del intervalo $[0, T]$.

Entonces la norma de este espacio también depende de este parámetro T. Esta dependencia de las normas del parámetro T la vamos a denotar como $\|g\|_T$. Bajo esta condición la función $\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ va a depender, además, del parámetro T. Denotemos

$$\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T) = \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\|_T \tag{2.33}$$

bajo la condición

$$\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n = 1 \tag{2.34}$$

Teorema 2.5. *Si la norma $\|g\|_T$ y los números $\alpha_1(T), \ldots, \alpha_n(T)$ son funciones continuas del parámetro T, entonces $\lambda_n(\alpha_1(T), \alpha_2(T), \ldots, \alpha_n(T), T)$ también es función continua de T.*

Demostración. Por una parte, para $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ constantes tenemos,

$$\begin{aligned} |\lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T + \triangle T) &- \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, T)| = \\ &= \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\|_{T+\triangle T} - \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \ldots + \xi_n g_n\|_T \qquad (2.35) \\ &\leq \|\xi_1^0 g_1 + \ldots + \xi_n^0 g_n\|_{T+\triangle T} - \|\xi_1^0 g_1 + \ldots + \xi_n^0 g_n\|_T, \end{aligned}$$

donde $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ es solución de (2.22) bajo la condición (2.23). Consecuentemente, para las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ la parte izquierda de (2.35) tiende a cero cuando $\Delta T \to 0$. Por otra parte, de (2.23), la solución $\xi^0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ depende continuamente de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ los cuales, a su vez, por condición del teorema también dependen del parámetro T. De esta manera, el teorema queda demostrado. □

Para definir la forma del control óptimo en el caso general es necesario introducir algunas nuevas nociones.

Llamaremos elemento *extremo* de un funcional lineal f al elemento $\bar{g}$ diferente de cero, para el cual se satisface la igualdad,

$$|f(\bar{g})| = \|f\| \cdot \|\bar{g}\|. \qquad (2.36)$$

El sentido del elemento extremo $\bar{g}$ consiste en que el valor del funcional en cualquier elemento g que pertenece a la esfera

$$\|g\| \leq \|\bar{g}\|,$$

no supera su valor en el elemento extremo.

Lo anterior se explica, si recordamos la definición de norma del funcional lineal,

$$\|f\| = \sup_{g \neq 0} \frac{|f(g)|}{\|g\|},$$

además,

$$|f(g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad \forall g \in E.$$

donde E es un espacio lineal normado.

Al funcional lineal f cuyos elementos extremales difieren uno del otro en un factor escalar, se llama *normal*.

El elemento g se llama *normal*, si el funcional f se define mediante la igualdad (2.36) con exactitud salvo un factor escalar.

Ahora se pueden establecer algunos teoremas importantes para la solución del l-problema de momentos.

Teorema 2.6. *Para que el elemento* $g = \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k$*, con* $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k = 1$*, sea el elemento minimizador de los problemas (2.22), (2.23) o (2.24), (2.25), es necesario y suficiente que el elemento* g *sea extremal de algún funcional arbitrario* f *de norma mínima, que da la solución del problema*

$$f(g_k) = \alpha_k \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.37}$$

$$\|f\| = \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \tag{2.38}$$

Si además, para cualesquiera $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ *el elemento* $g = \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k$ *es normal, entonces el sistema (2.37) tiene solución única .*

Demostración. Sea f_0 una solución de (2.37) y $h = \sum_{k=1}^{n} \eta_k g_k$ algún elemento minimizante del problema (2.22) y (2.23), es decir,

$$\|h\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \eta_k g_k \right\| = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} \tag{2.39}$$

bajo la condición

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k = 1,$$

entonces

$$1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k = |f_0(h)| = \|h\| \cdot \lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|f_0\| \cdot \|h\|. \tag{2.40}$$

En esta relación la segunda igualdad se obtiene de (2.37), la tercera de (2.39) y la última de (2.38).

En el sentido opuesto, sea $h = \sum_{k=1}^{n} \eta_k g_k$, con $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \eta_k = 1$, el elemento extremo del funcional f_0, entonces se satisface la igualdad $f_0(h) = \|f_0\| \cdot \|h\| = 1$. De esta relación y de (2.38) para f_0 tenemos,

$$\|h\| = \frac{1}{\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}.$$

Sea además, que h es elemento normal. Entonces de acuerdo a la definición de elemento normal, el funcional lineal f que da la solución del sistema (2.37) se define con exactitud hasta un factor escalar. Pero ya que $f(h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i \eta_i = 1$, entonces este factor escalar se define unívocamente. El teorema queda demostrado. □

2.2. $l-$problema de momentos infinito

Pasemos ahora a la resolución del l-problema de momentos infinito en un espacio lineal abstracto normado.

Teorema 2.7. *Sea un espacio lineal normado y separable. Entonces para que en este espacio exista un funcional lineal que sea la solución del l-problema de momentos infinito es necesario y suficiente que exista la solución del l-problema de momentos de dimensión n para todo* $n = 1, 2, \ldots$.

Demostración. La parte necesaria es obvia. Demostremos la parte suficiente. Sea $f_n(g)$ un funcional que da la solución del l-problema de momentos, de dimensión n, es decir,

$$f_n(g_k) = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

y para todo n la norma de este funcional estará acotada por el número l, es decir,

$$\|f_n(g)\| \leq l.$$

De esta manera, las normas de los funcionales $f_n(g)$ son acotadas en conjunto. De ahí en virtud a la separabilidad del espacio E se puede concluir que la sucesión de funcionales $f_1(g), f_2(g), \ldots$ contiene una subsucesión débilmente convergente, la cual converge a algún funcional lineal $f(g)$, que posee la propiedad

$$f(g_k) = \alpha_k$$

para todo k y $\|f(g)\| \leq l$. El teorema queda completamente demostrado. □

Consideremos ahora el l-problema de momentos infinito. Consideremos tres problemas.

I. Sea dado el sistema de funciones $g_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, $\ i = 1, 2, \ldots; \ \ g_i \in L^2$, y los números $c_i; \ \ i = 1, 2, \ldots$

   Se require hallar la función $u(t)$ tal que

$$\int_0^T g_i(t)u(t)dt = c_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0, \quad l > 0,$$
$$\|u(t)\|_2 \leq l, \quad u(t) \in L^2.$$

II. Sea dado el sistema de funciones linealmente independientes

$$g_i(t) \in L^2, \ i = 1, 2, \ldots$$

   Se requiere hallar el funcional lineal χ tal que

$$\chi(g_i) = c_i, \quad \|\chi\| \leq l, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0, \quad l > 0.$$

III. Sea dado el sistema de funciones linealmente independientes

$$g_i(t),\ 0 \le t \le T,\ i = 1, 2, \ldots$$

Se requiere hallar el elemento minimizador $\psi(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i(t)$ tal que

$$\frac{1}{\lambda} = \|\psi\|_2 = \inf_{\xi} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right\|$$

bajo la condición

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i^2 > 0, \quad l > 0.$$

El problema I es un caso particular del problema II. Por eso, más adelante se van a considerar los problemas II y III y sus relaciones.

La condición de existencia de la solución del problema II se garantiza por el siguiente teorema.

Teorema 2.8. *Para que exista la solución del problema II es necesario y suficiente que se cumpla la condición $l \ge \lambda$.*

Demostración. Definamos el funcional χ en el elemento g_i, $i = 1, 2, \ldots$, de la siguiente manera,

$$\chi(g_i) = c_i.$$

De esta manera, el funcional lineal χ está definido en el subespacio formado por las combinaciones lineales de g_i.

Por el teorema de Hanh-Banach, el funcional χ se puede extender a todo el espacio L^2 sin hacer crecer la norma de χ. Así, para que χ sea la solución del problema II es necesario y suficiente que $\|\chi\| \le l$.

Demostremos que $\|\chi\| = \lambda$. En efecto,

$$\lambda = \frac{1}{\inf\limits_{\xi_i} \left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right\|} = \sup_{\xi_i} \frac{\chi\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right)}{\left\| \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right\|},$$

donde el ínfimo y el supremo se calculan bajo la condición

$$\chi\left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \right) = 1.$$

Sea

$$\sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} = M > 0.$$

Esto es válido para el funcional lineal continuo. Demostraremos que

$$\sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} \geq \sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|}. \tag{2.41}$$

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ existe ψ, tal que $M - \chi(\psi) < \varepsilon,\ \|\psi\| = 1,\ \chi(\psi) = c > 0$ (c es un número).

Consideremos $\psi_1 = \frac{\psi}{c},\ \chi(\psi_1) = 1,\ \|\psi_1\| = \frac{1}{c}$, de donde

$$M - \frac{\chi(\psi_1)}{\|\psi_1\|} < \varepsilon$$

y consecuentemente (2.41) queda demostrado. Ahora demostremos que

$$\sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} \geq \sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|}. \tag{2.42}$$

Sea

$$\sup_{\|\chi(\psi)\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} = M_1 > 0.$$

El valor M_1 puede ser finito o infinito. Nos limitaremos al caso $M_1 \neq \infty$. Para $\varepsilon > 0$ hallemos ψ tal que $M_1 - \frac{1}{\|\psi\|} < \varepsilon$, $\|\psi\| = c$.

Consideremos $\psi_1 = \frac{\psi}{c}$, $\|\psi_1\| = 1$, $\chi(\psi_1) = \frac{1}{c}$, de donde $M_1 - \frac{\chi(\psi_1)}{\|\psi_1\|} = M_1 - \frac{1}{c} < \varepsilon$. Que es lo que se quería demostrar.

Observemos que para el espacio L^2 el problema III tiene solución. En efecto, tenemos

$$\lambda = \sup_{\chi(\psi)=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|} = \sup_{\|\psi\|=1} \frac{\chi(\psi)}{\|\psi\|}.$$

Ya que el espacio L^2 es reflexivo y consecuentemente, la esfera en este espacio es débilmente compacta, entonces la norma del funcional χ se alcanza en algún elemento $\psi \in L^2$. El teorema queda demostrado. □

Teorema 2.9. *Para que el elemento* $\psi = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i g_i \left(\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i c_i = 1 \right)$ *sea el elemento que minimiza el problema III, es necesario y suficiente que el elemento* ψ *sea el elemento extremo de alguna solución del problema II:*

$$\chi(g_i) = c_i, \qquad \|\chi\| = l = \lambda.$$

Demostración. Demostremos en principio la parte necesaria. Sea la solución del problema III. Entonces

$$\chi(\psi) = \lambda\|\psi\| = \|\chi\| \cdot \|\psi\|.$$

La necesidad queda demostrada.

Demostremos la suficiencia. Sea ψ el elemento extremo del problema II, es decir,

$$|\chi(\psi)| = \|\chi\| \cdot \|\psi\| = 1.$$

De donde,

$$\|\chi\| = \frac{1}{\|\psi\|}.$$

Que es lo que se quería demostrar. □

Teorema 2.10. *Todo elemento extremo ψ, $\psi \in L^2$, es un elemento normal.*

Demostración. Sea que se tienen dos funcionales χ_1 y χ_2 tales que

$$|\chi_1(\psi)| = \|\chi_1\| \cdot \|\psi\|,$$
$$|\chi_2(\psi)| = \|\chi_2\| \cdot \|\psi\|.$$

Considerando ψ como un elemento del espacio L^2, concluimos que χ_1 y χ_2 son elementos extremales para $\psi \in (L^2)^*$. Demostremos que $\chi_1 = c\chi_2$.

Notemos que, en particular, el espacio L^2 es un espacio estrictamente normado, es decir, en la fórmula $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ la igualdad se alcanza solo y solo si $y = \lambda x$ o $x = \lambda y$, $\lambda \geq 0$. Para espacios estrictamente normados tiene lugar el siguiente hecho: los elementos extremos de cualquier funcional lineal se diferencian uno del otro en un factor escalar(ver teorema .15). Consecuentemente, ψ es un elemento normal. El teorema queda demostrado. □

Utilizando lo anterior se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 2.11. *Sea ψ_0 la solución del problema III en el espacio L^2, entonces*

$$\chi(\psi) = \frac{1}{\int_0^T |\psi_0(t)|^2 dt} \int_0^T \psi(t)|\psi_0(t)|\operatorname{sgn}\psi_0(t)dt$$

es solución del problema II, tomando en cuenta que

$$\int_0^T |\psi_0(t)|^2 dt = \frac{1}{l^2} \tag{2.43}$$

la solución del problema I va a tener la siguiente forma

$$u(t) = l^2|\psi_0(t)|\operatorname{sgn}\psi_0(t).$$

Demostración. Sea $g_0 \in L^2$, un elemento extremo para el conjunto de funcionales lineales continuos χ_α. Tomemos un funcional lineal χ_{α_0} de este conjunto. Tenemos:

$$\chi_{\alpha_0}(y) = \int_0^T \chi^*_{\alpha_0}(t)y(t)dt,$$

donde $\chi^*_{\alpha_0} \in L^2$. Entonces,

$$|\chi^*_{\alpha_0}(g_0)| = \left|\int_0^T |\chi^*_{\alpha_0}(t)|^2 dt\right|^{\frac{1}{2}} \left|\int_0^T |g_0(t)|^2 dt\right|^{\frac{1}{2}}.$$

Colocando,

$$|\chi^*_{\alpha_0}|^2 = |g_0|^2,$$

tenemos:

$$\chi^*_{\alpha_0}(t) = |g_0(t)|\mathrm{sgn} g_0(t).$$

Consecuentemente,

$$\chi_{\alpha_0}(y) = \int_0^T y(t)|g_0(t)|\mathrm{sgn} g_0(t)dt.$$

De donde para todo funcional $\chi_\alpha(y)$ tenemos,

$$\chi_\alpha(y) = c_\alpha \int_0^T y(t)|g_0(t)|\mathrm{sgn} g_0(t)dt,$$

donde c_α es una constante.

Sea ahora ψ_0 la solución del problema III, entonces por el teorema 2.9, ψ_0 es un elemento extremo de alguna solución del problema II. Por el teorema 2.10, ψ_0 es normal para χ. De donde

$$\chi(\psi) = c \int_0^T \psi(t)|\psi_0(t)|\mathrm{sgn}\psi_0(t)dt.$$

La condición $\|\chi\| = \lambda = l$ determina la constante c univocamente. De donde

$$c = \frac{1}{\int_0^T |\psi_0(t)|^2 dt}$$

y consecuentemente, el funcional

$$\chi(\psi) = \frac{1}{\int_0^T |\psi_0(t)|^2 dt} \int_0^T \psi(t)|\psi_0(t)|\mathrm{sgn}\psi_0(t)dt$$

es la solución del problema II. De donde la solución del problema I tiene la forma

$$u(t) = \frac{1}{\int_0^T |\psi_0(t)|^2 dt}|\psi_0(t)|\mathrm{sgn}\psi_0(t)dt.$$

El teorema queda demostrado. □

Capítulo 3

Control óptimo de la ecuación de onda

En este capítulo vamos a resolver el problema de tiempo de control óptimo para la ecuación de onda.

3.1. Del problema de tiempo de control óptimo al problema de momentos

Ahora demostraremos como se puede reducir el problema de tiempo de control óptimo para la ecuación de onda a un problema de momentos. Consideremos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq S, \qquad t \geq 0, \tag{3.1}$$

donde a representa la velocidad de extensión de perturbación en un medio fijo dado y la función $Q = Q(x,t)$ representa el cambio de amplitud de las oscilaciones en este medio, en el punto x, en tiempo t. Vamos a considerar esta oscilación en el intervalo $[0, S]$.

Asumimos que en el momento inicial $t = 0$ se tienen las siguientes condiciones iniciales

$$Q(x, 0) = \Gamma_0(x), \tag{3.2}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=0} = \Gamma_1(x). \tag{3.3}$$

Sea que el control tiene la forma vectorial $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$, cuyas componentes son valores de la función Q en los puntos $x = 0$ y $x = S$, es decir,

$$u_1(t) = Q(0,t), \tag{3.4}$$

$$u_2(t) = Q(S,t), \tag{3.5}$$

además

$$\|\mathbf{u}(t)\| \leq \ell, \qquad \ell > 0. \tag{3.6}$$

Utilizando $\mathbf{u}(t)$ que satisface (3.6), deseamos hacer que la cuerda dada obtenga su estado de reposo en tiempo T mínimo. En otras palabras, comenzando de las condiciones iniciales (3.2) y (3.3) de amplitud, es necesesario obtener en tiempo mínimo T que $Q(x,T) = 0$ y que $Q_t(x,T) = 0$, en particular se puede obviar la última condición.

En esta tesis consideraremos el caso en que $u_1(t) = u_2(t) = u(t)$ y $\|u\| \leq l$; además requerimos que $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ sean simétricas respecto de la mitad del intervalo $[0, S]$. En caso contrario, el problema de estabilización no tiene solución.

Representemos la solución de la ecuación de onda en forma de superposición de dos funciones

$$Q(x,t) = Q_1(x,t) + Q_2(x,t), \tag{3.7}$$

donde la función $Q_1(x,t)$ describe las oscilaciones libres del medio para algunas condiciones iniciales; mientras que $Q_2(x,t)$ describe las oscilaciones obligadas determinadas por perturbación de las condiciones de contorno (3.4) y (3.5)(ver [11]).

$$Q_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a}{S} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{S} t \right) \sin \frac{\pi k}{S} x, \tag{3.8}$$

donde

$$A_k = \frac{2}{S} \int_0^S \Gamma_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \tag{3.9}$$

$$B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^S \Gamma_1(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \tag{3.10}$$

y

$$Q_2(x,t) = \int_0^t K(x, t-\tau) u(\tau) d\tau, \tag{3.11}$$

donde

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k}{S} x \sin \frac{\pi k a}{S} t \tag{3.12}$$

$$C_k = \frac{2a}{S} \left[1 - (-1)^k \right] \tag{3.13}$$

Caso: $\Gamma_0(x) \equiv \Gamma_0$ y $\Gamma_1(x) \equiv 0$

Consideremos el caso particular cuando $\Gamma_0(x) \equiv \Gamma_0$ y $\Gamma_1(x) \equiv 0$, entonces de las ecuaciones (3.9) y (3.10) tenemos

$$A_k = \frac{2\Gamma_0}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right] \quad \text{y} \quad B_k = 0, \tag{3.14}$$

mientras que la función $Q_1(x,t)$ toma la forma

$$Q_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\Gamma_0}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right] \cos\frac{\pi k a}{S} t \sin\frac{\pi k}{S} x. \tag{3.15}$$

La condición de ausencia de oscilaciones y velocidad de oscilación en el momento T se puede escribir como

$$Q(x,T) = Q_1(x,T) + Q_2(x,T) = 0, \qquad 0 \le x \le S, \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{\partial Q}{\partial t}\right|_{t=T} = \left.\frac{\partial Q_1}{\partial t}\right|_{t=T} + \left.\frac{\partial Q_2}{\partial t}\right|_{t=T} = 0, \qquad 0 \le x \le S. \tag{3.17}$$

Consideremos en principio a que lleva la condición (3.16). Tomando en cuenta (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) y (3.15), la ecuación (3.16) toma la forma

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\Gamma_0}{\pi k}\left[1-(-1)^k\right] \cos\frac{\pi k a}{S} T \sin\frac{\pi k}{S} x = \\ = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{S}\left[1-(-1)^k\right] \sin\frac{\pi k}{S} x \sin\left[\frac{\pi k a}{S}(T-\tau)\right] u(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Se puede observar que en ambas partes de esta igualdad están ausentes los coeficientes pares. Si en la parte izquierda se ubicara una descomposición de una función no simétrica respecto del punto $x = \frac{S}{2}$, entonces en este caso estarán presentes las armónicas pares y la ecuación (3.18) no tendría solución.

Cambiando en (3.18) el orden de la integral y la suma e igualando los coeficientes, miembro a miembro, con respecto a las funciones independientes $\sin\frac{\pi k}{S}x$ obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$-\frac{\Gamma_0 S}{a\pi k} \cos\frac{\pi k a}{S} T = \int_0^T \sin\frac{\pi k a}{S}(T-t) u(t) dt, \tag{3.19}$$

donde k recorre los números positivos impares enteros, ya que de ambas partes de la ecuación (3.18) se tiene el factor $[1-(-1)^k]$ el cual es cero para k par entero.

Consideremos ahora, el problema de hallar las condiciones adicionales a las (3.19) con el fin de obtener, no solamente distribución de amplitud de onda cero en algún tiempo mínimo, además deseamos garantizar que también la distribución de velocidades del medio sea cero, está claro que si nosotros alcazamos la distribución cero para ambos parámetros (cambio de perturbación y velocidad) en todo el intervalo $[0, S]$ en algún momento de tiempo, entonces la posición de equilibrio obtenida para condiciones de frontera cero se mantendrá.

De esta manera vamos a transformar la segunda condición de equilibro del medio oscilante que se determina por la ecuación (3.17).

Es fácil ver que para el cumplimiento de esa condición es necesario y suficiente que se satisfaga la ecuación:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\Gamma_0 a}{S}\left[1-(-1)^k\right]\sin\frac{\pi k a}{S}T\sin\frac{\pi k}{S}x = \tag{3.20}$$

$$= \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a^2\pi k}{S^2}\left[1-(-1)^k\right]\sin\frac{\pi k}{S}x\cos\left[\frac{\pi k a}{S}(T-\tau)\right]u(\tau)d\tau,$$

la cual se puede obtener formalmente diferenciando la ecuación (3.18) respecto de T. Cambiando el orden de suma con la integral (ver teorema .4) y realizando la comparación miembro a miembro de ambas partes de esta ecuación, obtenemos el sistema de ecuaciones de momentos para la función $u(t)$:

$$\frac{\Gamma_0 S}{a\pi k}\sin\frac{\pi k a}{S}T = \int_0^T \cos\frac{\pi k a}{S}(T-t)u(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.21}$$

Así, el problema de tiempo de control óptimo formulado arriba se redujo al problema de hallar un control $u(t)$, $(0 \leq t \leq T)$ que satisfaga la ecuación (3.6) y que garantice el cumplimiento de los sistemas (3.19) y (3.21), talque T tome valor mínimo.

Demostremos que el parámetro T que aparece en esta ecuación se puede excluir de ambas partes de estas ecuaciones, fijándolo sólo como límite superior de la integral.

Para cálculos auxiliares introduzcamos las siguientes notaciones:

$$\begin{gathered} b = \frac{\Gamma_0 S}{a\pi k}, \qquad \alpha = \cos\frac{\pi k a}{S}T, \qquad \beta = \sin\frac{a\pi k}{S}T, \\ x = \int_0^T \cos\tfrac{\pi k a}{S}t\,u(t)dt, \qquad y = \int_0^T \sin\tfrac{\pi k a}{S}t\,u(t)dt. \end{gathered} \tag{3.22}$$

Usando relaciones trigonométricas conocidas, el sistema (3.19) y (3.21) con la notación propuesta, se puede escribir en la forma:

$$\left.\begin{aligned} -b\alpha &= \beta x - \alpha y, \\ b\beta &= \alpha x + \beta y. \end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

Este sistema se puede considerar como un sistema de dos ecuaciones lineales algebraicas respecto de las incógnitas x, y. El determinante de este sistema, en virtud de (3.22), es igual a la ecuación

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta & -\alpha \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \beta^2 + \alpha^2 = 1 \neq 0. \tag{3.24}$$

Donde fácilmente hallamos x, y

$$x = \begin{vmatrix} b\alpha & -\alpha \\ -b\beta & \beta \end{vmatrix} = b\alpha\beta - b\alpha\beta = 0,$$

$$y = \begin{vmatrix} \beta & -b\alpha \\ \alpha & b\beta \end{vmatrix} = b\beta^2 + b\alpha^2 = b.$$

De esta manera los cálculos hechos tienen lugar en sentido contrario y el sistema de ecuaciones (3.21), (3.22) es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$0 = \int_0^T \cos\frac{a\pi k}{S} tu(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \dots, \tag{3.25}$$

$$\frac{\Gamma_0 S}{a\pi k} = \int_0^T \sin\frac{a\pi k}{S} tu(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \dots \tag{3.26}$$

Sin embargo, notemos que ya no contamos con la equivalencia de las ecuaciones (3.19) y (3.25), así como de las ecuaciones (3.21) y (3.26). Contamos con la equivalencia del sistema (3.19), (3.21) con el sistema (3.25), (3.26).

Si introducimos la notación $\mu_k = \frac{a\pi k}{S}$, el sistema (3.25), (3.26) toma la forma

$$0 = \int_0^T \cos \mu_k tu(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \dots, \tag{3.27}$$

$$\frac{\Gamma_0}{\mu_k} = \int_0^T \sin \mu_k tu(t)dt. \tag{3.28}$$

Caso: $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ funciones arbitrarias de clase C^1.

Sean ahora dadas dos funciones arbitrarias $\Gamma_0(x)$, $\Gamma_1(x)$ simétricas respecto del punto $x = \frac{S}{2}$. Entonces, de acuerdo a las fórmulas (3.9) y (3.10) todos los coeficientes A_k y B_k, con índices pares, se reducen a cero (ver teorema .12). Mientras que las ecuaciones (3.16) y (3.17) nos llevan al sistema:

$$-\frac{A_k S}{4a}\cos\frac{\pi k a}{S}T - \frac{B_k S}{4a}\sin\frac{\pi k a}{S}T = \int_0^T \sin\frac{\pi k a}{S}(T-t)u(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \dots \tag{3.29}$$

$$\frac{A_k S}{4a} \sin \frac{\pi k a}{S} T - \frac{B_k S}{4a} \cos \frac{\pi k a}{S} T = \int_0^T \cos \frac{\pi k a}{S} (T - t) u(t) dt. \tag{3.30}$$

De manera análoga al caso estudiado anteriormente, se puede excluir el tiempo T dejandolo sólo en calidad de límite superior de integración. En efecto, denotando

$$A = \frac{A_k S}{4a} \quad \text{y} \quad B = \frac{B_k S}{4a}$$

y utilizando las notaciones de la relación (3.22) obtenemos un sistema de ecuaciones lineales algebraicas

$$\begin{aligned} -A\alpha - B\beta &= \beta x - \alpha y, \\ A\beta - B\alpha &= \alpha x + \beta y, \end{aligned}$$

cuyo determinante, en virtud a (3.22), es igual a 1. De donde

$$x = \begin{vmatrix} -A\alpha - B\beta & -\alpha \\ A\beta - B\alpha & \beta \end{vmatrix} = -A\alpha\beta - B\beta^2 + A\beta\alpha - B\alpha^2 = -B,$$

$$y = \begin{vmatrix} \beta & -A\alpha - B\beta \\ \alpha & A\beta - B\alpha \end{vmatrix} = A\beta^2 - B\alpha\beta + A\alpha^2 + B\beta\alpha = A.$$

De ésta manera el sistema (3.29), (3.30) se reduce al sistema de ecuaciones de momentos

$$-\frac{B_k S}{4a} = \int_0^T \cos \frac{\pi k a}{S} t u(t) dt, \qquad k = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.31}$$

$$\frac{A_k S}{4a} = \int_0^T \sin \frac{\pi k a}{S} t u(t) dt. \tag{3.32}$$

3.2. Tiempo de control óptimo

Consideremos la ecuación (3.19)

$$-\frac{\Gamma_0 S}{a\pi k} \cos \frac{\pi k a}{S} T = \int_0^T \sin \frac{\pi k a}{S} (T - t) u(t) dt, \tag{T_{opt}}$$

de la ecuación (T_{opt}) se puede obtener el control óptimo que satisface $\|u\| \leq l$. Con ayuda de este control se puede obtener la distribución cero de amplitud en toda la longitud del intervalo $[0, S]$ en tiempo mínimo, sin embargo, la distribución de las velocidades al término del proceso óptimo es arbitraria.

Es fácil verificar que la ecuación (T_{opt}) se satisface para

$$T_0 = \frac{S}{2a} \quad \text{y} \quad u_0(t) = 0, \qquad 0 < t \leq T_0$$

El control $u_0(t)$ es solución al problema de tiempo de control óptimo pero con la distribución de las velocidades arbitraria. Además, T_0 es el tiempo mínimo que resulta igual al tiempo de recorrido de la onda, en el medio, a la mitad del intervalo $[0, S]$. Por razones físicas, es claro que ninguna señal que parte de los puntos terminales 0 y S, puede llegar al punto medio del intervalo más rápido que en tiempo $T_0 = \frac{S}{2a}$.

3.3. El problema de momentos en tiempo mínimo

Coloquemos ahora $T = \frac{S}{a}$, entonces las ecuaciones (3.31) y (3.32) toman la forma

$$-\frac{B_k S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \cos\frac{\pi k a}{S} t \cdot u(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \ldots, \tag{3.33}$$

$$\frac{A_k S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \sin\frac{\pi k a}{S} t \cdot u(t)dt, \qquad k = 1, 3, 5, \ldots \tag{3.34}$$

Asumiendo $k = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \ldots$ reescribimos este sistema en la forma

$$-\frac{B_m S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \cos\frac{a(2m-1)\pi}{S} t \cdot u(t)dt, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.35}$$

$$\frac{A_m S}{4a} = \int_0^{\frac{S}{a}} \sin\frac{a(2m-1)\pi}{S} t \cdot u(t)dt \tag{3.36}$$

Planteamos ahora el siguiente problema:

Encontrar en el intervalo $[0, \frac{S}{a}]$ una función de control $u(t)$ cuya norma sea la mínima. Consideremos el caso cuando en calidad de norma de la función $u(t)$ se toma la forma cuadrática

$$||u|| = \left(\int_0^{\frac{S}{a}} |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.37}$$

Nosotros vamos a minimizar el cuadrado de la norma, es decir,

$$||u||^2 = \int_0^{\frac{S}{a}} |u(t)|^2 dt. \tag{3.38}$$

De esta manera, obtenemos un l-problema de momentos. En virtud al teorema 2.1, la condición necesaria y suficiente para que este problema tenga solución es que sean solubles todos los l-problema de momentos finitos, es decir, problemas en los cuales el índice m en las condiciones (3.35) y (3.36) toman el valor de 1 hasta n, donde n es un número positivo entero fijo.

Con base en el teorema 2.2, para que el $l-$problema de momentos finito tenga solución, es necesario y suficiente que sea soluble el siguiente problema.

Hallar

$$\min_{\xi_k,\eta_k}\left[\int_0^{\frac{S}{a}}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m \sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t+\eta_m\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t\right)\right]^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\lambda}, \tag{3.39}$$

bajo la condición

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{A_mS}{4a}\xi_m-\frac{B_mS}{4a}\eta_m\right)=1. \tag{3.40}$$

Además, la norma mínima del control $u(t)$ que se determina por la igualdad (3.39) será igual a λ, mientras que la función buscada tiene la forma

$$u_n^0(t)=\lambda^2\sum_{m=1}^{n}\xi_m^0\sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t+\eta_m^0\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t, \tag{3.41}$$

donde $\xi_m^0,\ \eta_m^0\quad m=1,\ldots,n$, es solución del problema (3.39) y (3.40).

Calculemos ahora ξ_m^0 y $\eta_m^0\quad m=1,\ldots,n$. Para la regla de los multiplicadores de Lagrange existe un número μ para el cual las derivadas parciales respecto de ξ_m y η_m de la función

$$f(\xi,\eta)=\int_0^{\frac{S}{a}}\left[\sum_{m=1}^{n}\left(\xi_m\sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t+\eta_m\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t\right)\right]^2 dt- \tag{3.42}$$

$$\mu\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{A_mS}{4a}\xi_m-\frac{B_mS}{4a}\eta_m\right)$$

en el punto del extremo $\xi=\xi^0$ y $\eta=\eta^0$ se reducen a cero. Aquí hemos usado la notación $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n),\quad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$. De esta manera tenemos:

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial\xi_p}=2\int_0^{\frac{S}{a}}\left(\sum_{m=1}^{n}\xi_m\sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t+\right. \tag{3.43}$$

$$\left.+\eta_k\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t\right)\sin\frac{a\pi(2p-1)}{S}tdt-\mu\frac{A_pS}{4a}=0,\qquad p=1,\ldots,n$$

y

$$\frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta_p} = 2\int_0^{\frac{S}{a}} \left[\left(\sum_{m=1}^{n} \xi_m \sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t + \right.\right. \tag{3.44}$$

$$\left.\left. + \eta_k cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t\right) cos\frac{a\pi(2p-1)}{S}t\right] dt + \mu\frac{B_p S}{4a} = 0.$$

Abriendo los paréntesis en las últimas igualdades y tomando en cuenta que el sistema

$$\left\{\sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t, \quad \cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

es ortogonal en $[0, \frac{S}{a}]$ tenemos:

$$2\xi_p \int_0^{\frac{S}{a}} \sin^2\frac{a\pi(2p-1)}{S}tdt - \mu\frac{A_p S}{4a} = 0, \quad p = 1, \ldots, n, \tag{3.45}$$

$$2\eta_p \int_0^{\frac{S}{a}} \cos^2\frac{a\pi(2p-1)}{S}tdt + \mu\frac{B_p S}{4a} = 0, \tag{3.46}$$

de donde obtenemos los valores extremos

$$\xi_p^0 = \mu\frac{A_p S}{2\cdot 4a}\cdot\frac{2a}{S} = \mu\frac{A_p}{4},$$

$$\eta_p^0 = -\mu\frac{B_p S}{2\cdot 4a}\cdot\frac{2a}{S} = -\mu\frac{B_p}{4}.$$

Sustituyendo los valores obtenidos ξ^0 y η^0 en la condición (3.40) obtenemos la ecuación para hallar el parámetro μ :

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{A_m^2 S}{16a}\mu + \frac{B_m^2 S}{16a}\mu\right) = 1,$$

en donde

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \frac{16a}{S\sum_{m=1}^{n}\left(A_m^2 + B_m^2\right)}, \\ \xi_p^0 &= \frac{4aA_p}{S\sum_{m=1}^{n}\left(A_m^2 + B_m^2\right)}, \\ \eta_p^0 &= -\frac{4aB_p}{S\sum_{m=1}^{n}\left(A_m^2 + B_m^2\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{3.47}$$

Calculemos ahora los valores de mínimo de la integral (3.39)

$$\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{\mu}{4} A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - \frac{\mu}{4} B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right) \right]^2 dt$$

$$= \frac{\mu^2}{16} \int_0^{\frac{S}{a}} \left[\sum_{m=1}^{n} \left(A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t \right)^2 \right] dt.$$

En virtud de la ortogonalidad del sistema de funciones obtenemos

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu^2 S}{32a} \sum_{m=1}^{n} \left(A_m^2 + B_m^2 \right).$$

De donde usando la ecuación (3.47) para μ tenemos

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{8a}{S \sum_{m=1}^{n} \left(A_m^2 + B_m^2 \right)}$$

y consecuentemente,

$$\lambda^2 = \frac{S}{8a} \sum_{m=1}^{n} \left(A_m^2 + B_m^2 \right) \quad \text{y} \quad \lambda^2 \xi_m = \frac{A_m}{2}, \quad \lambda^2 \eta_m = -\frac{B_m}{2}.$$

3.4. Solución del problema

De esta manera, el control buscado se expresa de la siguiente manera

$$u_n^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t, \tag{3.48}$$

donde A_m y B_m son los coeficientes de Fourier dados en (3.9) y (3.10) respectivamente.

El cuadrado de la norma es mínima e igual a

$$||u_n^0(t)||^2 = \frac{S}{8a} \sum_{m=1}^{n} \left(A_m^2 + B_m^2 \right). \tag{3.49}$$

Pasando al límite, cuando n tiende al infinito, obtenemos el control óptimo buscado (respecto del mínimo del cuadrado) y se determina mediante la expresión

$$u^0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t - B_m \cos \frac{a\pi(2m-1)}{S} t, \qquad 0 \leq t \leq \frac{S}{a}, \tag{3.50}$$

además

$$\text{mín}\,\|u(t)\|^2 = \|u^0(t)\|^2 = \frac{S}{8a}\sum_{m=1}^{\infty}\left(A_m^2 + B_m^2\right). \tag{3.51}$$

Sea dado la velocidad inicial igual a cero, es decir, $\Gamma_1(x) = 0$ de (3.9) es claro que los coeficientes $A_m, \quad m = 1, 2, \ldots$ son coeficientes de Fourier de la ecuación inicial $\Gamma_0(x) \in [0, S]$ respecto de las funciones $\sin\frac{\pi k}{S}t, \quad k = 1, 2, \ldots$, por eso tiene lugar la igualdad de Parseval

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m^2 = \frac{2}{S}\int_0^S [\Gamma_0(x)]^2\,dx$$

y consecuentemente, en este caso

$$\int_0^{\frac{S}{a}} u^2(t)dt = \text{mín}\,\|u(t)\|^2 = \|u^0(t)\|^2 = \frac{1}{4a}\int_0^S [\Gamma_0(x)]^2\,dx.$$

de esta manera la última fórmula da el valor mínimo de la energía del control $u(t)$ bajo el cual en tiempo $T = \frac{S}{a}$, es posible que el sistema oscilatorio obtenga completamente el estado de reposo.

Veamos que el control se puede escribir explícitamente en términos de las funciones $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$.

Coloquemos en la fórmula (3.50) los valores de los coeficientes A_m y B_m del control óptimo definidos mediante (3.9) y (3.10). Tomando en cuenta que $\Gamma_0(x)$ y $\Gamma_1(x)$ son simétricos respecto de la mitad del intervalo $[0, \frac{S}{a}]$ tenemos

$$u^0(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{S}\int_0^S \Gamma_0(\xi)\sin\frac{\pi(2m-1)}{S}\xi d\xi \sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t - \tag{3.52}$$

$$-\frac{2}{a\pi(2m-1)}\int_0^S \Gamma_1(\xi)\sin\frac{\pi(2m-1)}{S}\xi d\xi \cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t.$$

Con ayuda del cambio de variable $\xi = at$ e integración por partes tenemos

$$-\frac{2}{a\pi(2m-1)}\int_0^S \Gamma_1(\xi)\sin\frac{\pi(2m-1)}{S}\xi d\xi = \tag{3.53}$$

$$= \frac{2a}{S}\int_0^{\frac{S}{a}}\left[\int_0^t \Gamma_1(a\tau)d\tau\right]\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}tdt.$$

Aquí utilizamos el hecho

$$\sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t\Big|_0^{\frac{S}{a}} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Utilizando la identidad obtenida (3.53), la fórmula (3.52) para el control óptimo se puede escribir de la forma

$$u^0(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2a}{S}\int_0^{\frac{S}{a}}\Gamma_0(a\tau)\sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}\tau d\tau \sin\frac{a\pi(2m-1)}{S}t+$$

$$+\frac{2a}{S}\int_0^{\frac{S}{a}}\left[\int_0^{t'}\Gamma_1(a\tau)d\tau\right]\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t'dt'\cos\frac{a\pi(2m-1)}{S}t,$$

$$0 \leq t \leq \tfrac{S}{a}.$$

Pero la última expresión para el control óptimo por definición del desarrollo en series de Fourier se puede representar de la siguiente forma

$$u^0(t) = \frac{1}{2}\left[\Gamma_0(at) + \int_0^t \Gamma_1(a\tau)d\tau\right], \qquad 0 < t < \frac{S}{a}, \tag{3.54}$$

$$u^0(t) = 0 \quad \text{para} \quad \frac{S}{a} \leq t.$$

La fórmula obtenida tiene un sentido físico sencillo si $\Gamma_1(x) = 0$. En éste caso bajo la influencia del control desde los puntos terminales del medio oscilatorio van al encuentro, con velocidad a las ondas cuyas formas coinciden con la distribución inicial de movimiento, además de cada lado viaja una onda de amplitud media.

Capítulo 4

Ejemplos

En los siguientes ejemplos se resuelve el problema planteado al inicio del capítulo 3. Utilizando los resultados dados se obtiene el control óptimo.

Ejemplo 4.1. *Consideremos una onda que se describe en el momento* $t = 0$ *por la igualdad*

$$\Gamma_0(x) = A \sin \frac{\pi}{S} x, \qquad 0 \leq x \leq S,$$

mientras que la velocidad es cero, es decir, $\Gamma_1(x) = 0$.

Para lograr el estado de reposo de la onda estática en tiempo $\frac{S}{a}$ con gasto mínimo de energía se requiere utilizar un control de la forma

$$u^0(t) = \frac{A}{2} \sin \frac{a\pi}{S} t, \qquad 0 \leq t \leq \frac{a}{S},$$

el cual lo obtenemos utilizando la ecuación para el control (3.54), cuyo valor mínimo de energía es igual a

$$\int_0^{\frac{S}{a}} u_0^2(t) dt = \frac{1}{4} A^2.$$

Ejemplo 4.2. *Hallar el control* $u(t)$ *para hacer que el medio oscilatorio esté en reposo, si en el momento inicial la distribución tiene la forma*

$$\Gamma_0(x) = \Gamma_0 = constante, \quad y \quad \Gamma_1 = 0.$$

En correspondencia con las fórmulas (3.50), (3.9) y (3.10) obtenemos los valores para A_m y B_m como en (3.14), así entonces el control óptimo que envia a reposo al sistema en tiempo $\frac{S}{a}$ con gasto de mínimo de energía tiene la forma

$$u^0(t) = \frac{2\Gamma_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)} \sin \frac{a\pi(2m-1)}{S} t.$$

La suma de esta serie es igual $\frac{\pi}{4}$ y consecuentemente

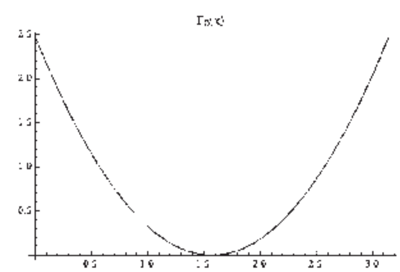
$$u^0(t) = \frac{\Gamma_0}{2}, \qquad 0 < t < \frac{S}{a}.$$

Entonces la norma de $u(t)$ es:

$$\int_0^{\frac{S}{a}} u^2(t)dt = \frac{1}{4a}\int_0^S [\Gamma_0]^2\, dx = \frac{S\Gamma_0^2}{4a}.$$

Ejemplo 4.3. *Sean $\Gamma_0(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$ y $\Gamma_1(x) = 1$. Hallar el control $u(t)$ tal que $\|u(t)\| \leq l$ de manera que la función $Q(x,t)$ $(0 \leq x \leq S)$ $(0 \leq t \leq T)$ obtenga su estado de reposo en tiempo T mínimo, es decir, $Q(x,T) = 0$ y $Q_t(x,T) = 0$.*

Sean $\Gamma_0(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$



y como $Q(x,t)$ es solución de la ecuación de onda, tenemos que para $S = \pi$ y $a = 1$ y de acuerdo a las ecuaciones (3.9), (3.10)

$$A_k = \frac{k^2\pi - 8}{2k^3\pi}[1 - (-1)^k], \qquad B_k = \frac{2}{k^2\pi}[1 - (-1)^k]$$

además observemos que el tiempo mínimo es igual a $T = \frac{S}{a} = \pi$.

Con base al sistema de ecuaciones (3.35) y (3.36) y a las ecuaciones (3.9), (3.10) podemos asumir $k = 2m - 1$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ y reescribimos este sistema de la siguiente manera

$$-\frac{1}{(2m-1)^2} = \int_0^{\pi} \cos[(2m-1)t]u(t)dt \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.1}$$

$$\frac{(2m-1)^2\pi - 8}{4(2m-1)^3} = \int_0^{\pi} \sin[(2m-1)t]u(t)dt. \tag{4.2}$$

Ahora, vamos a minimizar el cuadrado de la norma, es decir,

$$\|u\|^2 = \int_0^{\pi} |u(t)|^2 dt, \tag{4.3}$$

lo que nos permite llegar completamente al problema de momentos. Con base a la teoría presentada en el capítulo 2 de esta tesis, para que este problema tenga solución es necesario y suficiente que sea soluble el siguiente problema:

Hallar

$$\min_{\xi_k,\eta_k}\left[\int_0^{\pi}\left[\sum_{m=1}^{n}(\xi_m\sin((2m-1)t)+\eta_m\cos((2m-1)t))^2\right]dt\right]^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\lambda},\tag{4.4}$$

bajo la condición

$$\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{(2m-1)^2\pi-8}{4(2m-1)^3}\xi_m-\frac{1}{(2m-1)^2}\eta_m\right)=1,\tag{4.5}$$

en esto la norma mínima del control $u(t)$ definido por la ecuación (4.4) será igual a λ mientras que la función buscada tiene la forma

$$u_n^0(t)=\lambda^2\sum_{m=1}^{n}\xi_m^0\sin((2m-1)t)+\eta_m^0\cos((2m-1)t),\tag{4.6}$$

donde $\xi_m^0,\eta_m^0\quad m=1,\ldots,n$ es solución del problema (4.4) y (4.5).

Entonces de acuerdo a la regla de los multiplicadores de Lagrange y considerando la condición (4.5) obtenemos:

$$\left.\begin{aligned}
\mu&=\frac{16}{\pi\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{(2m-1)^2\pi-8}{(2m-1)^3\pi}\right)^2+\left(\frac{4}{(2m-1)^2\pi}\right)^2\right)}\\
\xi_m^0&=\frac{4[(2m-1)^2\pi-8]}{(2m-1)^3\pi^2\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{(2m-1)^2\pi-8}{(2m-1)^3\pi}\right)^2+\left(\frac{4}{(2m-1)^2\pi}\right)^2\right)}\\
\eta_m^0&=-\frac{16}{(2m-1)^2\pi^2\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{(2m-1)^2\pi-8}{(2m-1)^3\pi}\right)^2+\left(\frac{4}{(2m-1)^2\pi}\right)^2\right)}
\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

Así que calculando ahora los valores de mínimo de la integral (4.4) obtenemos:

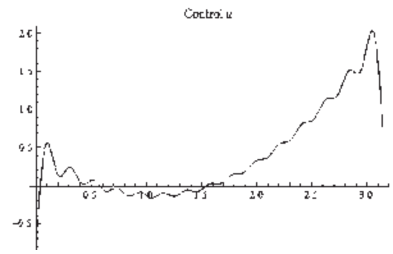
$$\lambda^2=\frac{\pi}{8}\sum_{m=1}^{n}\left(\left(\frac{(2m-1)^2\pi-8}{(2m-1)^3\pi}\right)^2+\left(\frac{4}{(2m-1)^2\pi}\right)^2\right),$$

$$\lambda^2\xi_m=\frac{(2m-1)^2\pi-8}{2(2m-1)^3\pi},\quad \lambda^2\eta_m=-\frac{2}{(2m-1)^2\pi}$$

de esta manera el control buscado, se expresa de la siguiente forma

$$u_n^0(t) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(2m-1)^2\pi - 8}{(2m-1)^3\pi}\sin(2m-1)t - \frac{4}{(2m-1)^2\pi}\cos(2m-1)t. \tag{4.8}$$

Cuya gráfica para $n = 15$ es:



El cuadrado de la norma es mínima e igual a

$$\|u_n^0(t)\|^2 = \lambda^2. \tag{4.9}$$

Apéndice

Solución de ecuaciones homogéneas

Consideremos el problema de Cauchy:

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L \tag{.1}$$

con condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} w(x,0) &= \psi(x), \\ w_t(x,0) &= \phi(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq x \leq L \tag{.2}$$

y condiciones de contorno

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= h_0(t), \\ w_t(l,t) &= h_L(t), \end{aligned}\right\} \quad t > 0 \tag{.3}$$

Para solucionar este problema es conveniente llevarlo a un problema con condiciones de contorno homogéneas, para tal efecto consideremos $Q = w - v$ donde $v = \frac{x}{L} h_L(t) + \left(1 - \frac{x}{L}\right) h_0(t)$; tal que al sustituir Q en (.1),(.2) y (.3) obtenemos:

$$Q_{tt} - a^2 Q_{xx} = -\frac{x}{L} h_L''(t) - \left(1 - \frac{x}{L}\right) h_0''(t) = f(x,t) \tag{.4}$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} Q(x,0) &= \psi(x) - \tfrac{x}{L} h_L(0) - \left(1 - \tfrac{x}{L}\right) h_0(0) = h(x), \\ Q_t(x,0) &= \phi(x) - \tfrac{x}{L} h_L'(0) - \left(1 - \tfrac{x}{L}\right) h_0'(0) = g(x), \end{aligned} \tag{.5}$$

y con condiciones de contorno

$$\begin{aligned} Q(0,t) &= 0, \\ Q_t(L,t) &= 0, \end{aligned} \tag{.6}$$

Con base a lo desarrollado anteriormente consideremos el siguiente problema:

$$Q_{tt} = a^2 Q_{xx} + f(x,t), \qquad a^2 = \frac{k}{\rho}, \qquad 0 < x < l \tag{.7}$$

con condiciones iniciales

$$\left.\begin{aligned} Q(x,0) &= h(x), \\ Q_t(x,0) &= g(x), \end{aligned}\right\} \quad 0 \leq x \leq l \tag{.8}$$

$$\left.\begin{aligned} Q(0,t) &= 0, \\ Q_t(l,t) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad t > 0. \tag{.9}$$

Vamos a buscar la solución del problema en la forma de una serie de Fourier con respecto a x

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{.10}$$

considerando a t como parámetro. Para hallar $Q(x,t)$ es necesario determinar la función $Q_n(t)$. Representemos la función $f(x,t)$ y las condiciones iniciales en la forma de series de Fourier

$$\left.\begin{aligned} f(x,t) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad & f_n(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \\ h(x) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & h_n &= \frac{2}{l} \int_0^l h(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \\ g(x) &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, & g_n &= \frac{2}{l} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi \end{aligned}\right\} \tag{.11}$$

Sustituyendo la forma propuesta de solución (.10) en la ecuación (.7)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left\{ -a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Q_n(t) - Q_n''(t) + f_n(t) \right\} = 0.$$

Veamos que ésta se va a satisfacer si los coeficientes de esta serie son cero, es decir,

$$Q_n''(t) + a^2 \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 Q_n(t) = f_n(t). \tag{.12}$$

Para determinar $Q_n(t)$ hemos obtenido una ecuación ordinaria con coeficientes constantes.

Las condiciones iniciales dan

$$Q(x,0) = h(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

$$Q_t(x,0) = g(x) = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} Q_n'(0) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

de donde se sigue

$$\left.\begin{aligned} Q_n(0) &= h_n, \\ Q_n'(0) &= g_n. \end{aligned}\right\} \tag{.13}$$

estas condiciones determinan completamente la solución de la ecuación (.12). La función $Q_n(t)$ se puede representar en la forma

$$Q_n(t) = Q_n^I(t) + Q_n^{II}(t),$$

donde

$$Q_n^I(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\cdot f_n(\tau)d\tau \tag{.14}$$

es la solución de la ecuación no homogénea con condiciones iniciales cero y

$$Q_n^{II}(t) = h_n\cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}g_n\sin\frac{\pi n}{l}at \tag{.15}$$

es solución de la ecuación homogenea con condiciones iniciales dadas. De esta manera la solución buscada se escribe en la forma

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot f_n(\tau)d\tau + \tag{.16}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n\cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}g_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{l}{\pi n a}f_n(\tau) &= \frac{l}{\pi n a}\tfrac{2}{l}\int_0^l f(\xi,\tau)\sin\tfrac{\pi n}{l}\xi d\xi\\ &= \tfrac{2}{\pi n a}\int_0^l\left[-\tfrac{\xi}{L}h_L''(\tau) - \left(1-\tfrac{\xi}{L}\right)h_0''(\tau)\right]\sin\tfrac{\pi n}{l}\xi d\xi.\end{aligned} \tag{.17}$$

Considerando $h_0''(\tau) = h_L''(\tau) = h''(\tau)$, sustituyéndolo e integrando en (.17) para $h''(\tau) = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 u(\tau)$, donde $u(\tau)$ es la condición de contorno en (3.4) y (3.5), tenemos

$$\frac{l}{\pi n a}f_n(\tau) = \frac{2a}{l}\left[1-(-1)^n\right]u(\tau).$$

Por lo tanto, (.16) toma la forma

$$Q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n\cos\frac{\pi n}{l}at + \frac{l}{\pi n a}g_n\sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x + \tag{.18}$$

$$+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a}{l}\left[1-(-1)^n\right]\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot u(\tau)d\tau.$$

Convergencia de la serie de Fourier [5][Pags. 452 - 456]

El teorema siguiente ofrece una condición suficiente para que la serie de Fourier converja uniformemente.

Teorema .1. *Si una función f es absolutamente continua y la derivada de f pertenece a $L^2[-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de la función f converge hacia f uniformemente en toda la recta.*

Series de Funciones

Convergencia uniforme e integración de Riemann-Stieltjes

Definición .1. *[2] Sea f definida en $[a, b]$. Si $P = x_0, x_1, \dots, x_n$ es una partición de $[a, b]$, escribiremos $\Delta_k f = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, \dots, n$. Si existe un número positivo M talque*

$$\sum_{k=1}^{n} |\Delta f_k| \leq M$$

para toda partición de $[a, b]$, entonces diremos que f es de variación acotada en $[a, b]$

Teorema .2. *Si f es monótona en $[a, b]$ entonces f es de variación acotada en $[a, b]$.*

Teorema .3. *Sea α de variación acotada en $[a, b]$. Supongamos que cada término de la sucesión f_n es una función real tal que $f_n \in \mathbb{R}(\alpha)$[1] en $[a, b]$ para cada $n = 1, 2, \dots$ Supongamos que $f_n \to f$ uniformemente en $[a, b]$ y definimos $g_n = \int_a^x f_n(t)d\alpha(t)$ si $x \in [a, b]$, $n = 1, 2, \dots$ Entonces tenemos:*

1. *$f \in \mathbb{R}(\alpha)$ en $[a, b]$*
2. *$g_n \to g$ uniformemente en $[a, b]$ en donde $g(x) = \int_a^x f(t)d\alpha(t)$.*

Nota .1. *La conclusión implica que, para cada x en $[a, b]$, podemos escribir*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)d\alpha(t) = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)d\alpha(t)$$

[1]Denotemos mediante $\mathbb{R}(\alpha)$ al conjunto de las funciones Riemann-Stieltjes integrables respecto de α.

Esta propiedad se enuncia a menudo diciendo que una sucesión uniformemente convergente se puede integrar término a término.

Teorema .4. *Sea α de variación acotada en $[a,b]$, y supongamos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en $[a,b]$), en donde cada f_n es una función real tal que $f_n \in \mathbb{R}(\alpha)$ en $[a,b]$. Entonces tenemos:*

1. *$f \in \mathbb{R}(\alpha)$ en $[a,b]$*
2. *$\displaystyle\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)d\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t)d\alpha(t)$ (uniformemente en $[a,b]$)*

Diferenciación e integración

Teorema .5 (Regla de Leibnitz)**.** *[10][Pag. 390] Sea*

$$I(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)dx$$

donde $f(x,t)$ y $\frac{\partial f}{\partial t}$ son continuas en el rectángulo $[A,B] \times [c,d]$ donde $[A,B]$ contiene la uníon de todos los intervalos $[a(t),b(t)]$, y si $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en $[c,d]$, entonces

$$\frac{dI}{dt} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx + f(b(t),t)b'(t) - f(a(t),t)a'(t)$$

Teorema .6 (Convergencia uniforme y diferenciación)**.** *[2] Supongamos que cada f_n es una función real definida en (a,b) tal que la derivada $f_n'(x)$ existe para cada x de (a,b). Supongamos que para un punto x_0 de (a,b), por lo menos, la serie $\sum f_n(x_0)$ converge. Supongamos además que existe una función g tal que $\sum f_n'(x) = g(x)$ (uniformemente en (a,b)). Entonces:*

1. *Existe una función f tal que $\sum f_n(x) = f(x)$ (uniformemente en (a,b))*
2. *Si $x \in (a,b)$, la derivada $f'(x)$ existe y es igual a $\sum f_n'(x)$.*

Conjuntos medibles [9][Pags. 244-248]

Medida exterior de un conjunto

Sea E un conjunto arbitrario sobre una recta numérica. Se denomina recubrimiento $S = S(E)$ de un conjunto E a todo sistema finito o numerable de intervalos

$\{\Delta_n\}$, la suma de los cuales contiene el conjunto E. La suma de longitudes de todos los intervalos $\{\Delta_n\}$ que integran el recubrimiento $S = S(E)$ se denotará con el símbolo $\sigma(S)$.

Así pues,

$$\sigma(S) = \sum_n |\Delta_n| \leq \infty.$$

Definición .2. *Se llama medida exterior del conjunto E a una cota inferior exacta de* $\sigma(S)$ *sobre el conjuto de todos los recubrimientos* $S = (SE)$ *del conjunto E.*

La medida exterior del conjunto E se denotará con el símbolo $|E|^*$. Así pues, por definición

$$|E|^* = \inf_{S(E)} \sigma(S)$$

Conjuntos medibles y sus propiedades

Definición .3. *Un conjunto E se llama medible, si para cualquier número positivo* ε *existe un conjunto arbitrario G que cotiene E y es de tal índole que la medida exterior de la diferencia* $G \setminus E$ *es inferior a* ε.

La medida exterior del conjunto medible E se llamará medida de dicho conjunto y se denotará con el símbolo $|E|$.

Teorema .7. *Todo conjunto abierto es medible, con la particularidad de que su medida es igual a la suma de intervalos disjuntos dos a dos que lo componen.*

Teorema .8. *Todo conjunto cerrado F es medible.*

Corolario .1. *Para que un conjunto E sea medible, es necesario y suficiente que para cualquier número positivo* ε *exista un conjunto cerrado F que se contenga en E y que sea de tal índole que la medida exterior de la diferencia* $E \setminus F$ *sea inferior a* ε

Funciones medibles [9][Pags. 251 - 256]

Concepto de función medible

En lo que sigue adelante se examinarán las funciones que están definidas en los conjuntos medibles de la recta númerica ordinaria y que toman valores pertenecientes a la recta númerica extendida.

Convengamos en denotar con el símbolo $E[f$ satisface la condición $A]$ un conjunto de todos los valores x en E, para los cuales $f(x)$ satisface la condición A.

Definición .4. *Una función $f(x)$ definida en un conjunto E se denomina medible en este conjunto, si para cualquier número real a el conjunto $E[f \geq a]$ es medible.*

Teorema .9. *Para que una función $f(x)$ sea medible en el conjunto E, es necesario y suficiente de que uno de los siguientes tres conjuntos:*

$$E[f > a], \qquad E[f < a] \qquad E[f \leq a] \tag{.19}$$

sea medible para cualquier a real.

Propiedades de las funciones medibles

Definición .5. *Dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, definidas sobre un conjunto medible E, se denominan equivalentes (denotandolo como $f \approx g$) en dicho conjunto, si el conjunto $E[f \neq g]$ es de medida cero.*

1. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes en el conjunto E y si $f(x)$ es medible en E, será también medible en E la función $g(x)$

Sucesiones de funciones medibles

Teorema .10. *Si una sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$, medibles sobre el conjunto E, converge casi en todo punto de E hacia una función $f(x)$, la función $f(x)$ será medible en E.*

Definición .6. *Supongamos que las funciones $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ y $f(x)$ son medibles en un conjunto E y toman casi en todo punto de E valores finitos. Se dice que la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge hacia $f(x)$ en medida sobre el conjunto E, si para cualquier número positivo ε se verifica una igualdad*

$$\lim_{n\to\infty} |E[|f - f_n| \geq \varepsilon]| = 0 \tag{.20}$$

Integral de Lebesgue [9][Pags. 258 - 261]

Conceptos de integral de Lebesgue de una función acotada.

Llamaremos partición de un conjunto medible E a toda familia T de un número finito de subconjuntos medibles y disjuntos dos a dos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ del conjunto E que en suma integran el conjunto E.

Para denotar la partición del conjunto E se empleará el símbolo $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$, o bien un símbolo más breve $T = \{E_k\}$.

Examinemos en el conjunto E de medida finita una función acotada $f(x)$. Para una partición arbitraria $T = \{E_k\}$ del conjunto E, designemos por los símbolos M_k y m_k las cotas exactas superior e inferior, respectivamente, de la función $f(x)$ sobre un conjunto parcial E_k e introduzcamos en el análisis dos sumas

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k|E_k| \quad \text{y} \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k|E_k|$$

que se denominan sumas superior e inferior, respectivamente de la partición T.

Notemos enseguida que para toda partición $T = \{E_k\}$

$$s_T \leq S_T \tag{.21}$$

Para cualquier función $f(x)$, acotada sobre el conjunto de medida finita E, tanto el conjunto de todas las sumas superiores $\{S_T\}$, como también el de todas las sumas inferiores $\{s_T\}$ (correspondientes a toda clase de particiones $T = \{E_k\}$ del conjunto E) están ambos acotados. Por eso, existe una cota inferior exacta del conjunto $\{S_T\}$, que se denotará con el símbolo $\bar{I}$ y se llamará integral superior de Lebesgue, y una cota superior exacta del conjunto $\{s_T\}$ que se denotará con $\underline{I}$ y se llamará integral inferior de Lebesgue.

Definición .7. *Una función $f(x)$, acotada sobre conjunto de medida finita E, se denomina integrable según Lebesgue en dicho conjunto, si $\underline{I} = \bar{I}$, es decir, si las integrales de Lebesgue superior e inferior de dicha función coinciden.*

En este caso el número $\underline{I} = \bar{I}$ se llama integral de Lebesgue, extendida a E, respecto de la función $f(x)$ y se denota con el símbolo

$$\int_E f(x)dx.$$

Corolario .2. *Toda función integrable según Riemann es integrable según Lebesgue, con la particularidad de que las integrales de Lebesgue y de Riemann respecto de tal función coinciden.*

Teorema .11. *Cualquiera que sea un conjunto medible de medida finita E, toda funcional $f(x)$, acotada y medible sobre E, es integrable en dicho conjunto.*

Espacio L^2 [9][Pags. 276 - 278]

Recordemos que un espacio lineal R se llama normado, si se cumplen las siguientes dos exigencias: 1) se conoce una regla, por cuyo intermedio a todo elemento f del espacio R se le pone en correspondencia un número real llamado norma de dicho elemento y denotado con el símbolo $\|f\|$, 2) la citada regla satisface los siguientes tres axiomas

1. $||f|| > 0$, si $f \neq 0$[2], $||f|| = 0$, si $f = 0$.
2. $||\lambda f|| = |\lambda| \cdot ||f||$ para todo f y todo número real λ.
3. Para cualesquiera f y g se verifica la desigualdad triangular $||f+g|| \leq ||f||+||g||$

Examinemos en el espacio normado lineal R una sucesión arbitraria de elementos $\{f_n\}$

Definición .8. *Una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de un espacio normado lineal R se llama fundamental, si*

$$\lim_{\substack{m \geq n \\ n \to \infty}} ||f_m - f_n|| = 0$$

Definición .9. *Se dice que una sucesión $\{f_n\}$ de elementos de un espacio normado lineal R converge en R hacia un elemento de este espacio f, si*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f|| = 0$$

La convergencia de esta índole se denomina también convergencia en norma, o convergencia fuerte en R.

- Toda sucesión de elementos $\{f_n\}$ convergente en R es siempre fundamental.
- Si $f_n \to f$ entonces $||f_n|| \to ||f||$ (Continuidad de norma)

Definición .10. *Un espacio lineal normado R se llama completo, si toda sucesión fundamental de elementos $\{f_n\}$ del espacio R converge en R hacia cierto elemento f de este espacio.*

Propiedades del espacio $L^2(E)$ [9][Pags. 395 - 396]

Se denomina espacio $L^2(E)$ a un conjunto de todas las funciones $\{f(x)\}$ de tal género que cada función $f(x)$ es medible sobre el conjunto E, y cada función $f^2(x)$, integrable en el sentido de Lebesgue sobre un conjunto E, con la particularidad que no distinguimos funciones equivalentes sobre E, considerándolas como un solo elemento de $L^2(E)$.

El espacio $L^2(E)$ es un espacio normado lineal con la norma de cualquier elemento $f(x)$ de la forma

$$||f|| = \left(\int_E f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{.22}$$

[2] 0, elemento nulo del espacio R

Además $L^2(E)$ es un espacio dotado de producto escalar de cualquiera dos elementos $f(x)$ y $g(x)$ de la forma

$$(f,g) = \int_E f(x) \cdot g(x)dx. \tag{.23}$$

De (.22) y (.23) se deduce que la norma y el producto escalar en L^2 están ligados entre sí mediante la relación

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}.$$

Recordemos, además que el espacio $L^2(E)$ es completo.

Definición .11. *Un sistema de elementos $\{\varphi_n\}$, se llama base del espacio $L^2(E)$, si a todo elemento f de $L^2(E)$ le corresponde univocamente un desarrollo de este elemento en serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n$ con coeficientes constantes c_n, convergente hacia el elementos f en la norma del espacio $L^2(E)$.*

Los siguientes resultados se pueden ver en el libro [9][Pags. 402 - 406]

Definición .12. *Una sucesión $\{f_n(x)\}$ de elementos del espacio $L^2(E)$ se denomina débilmente convergente hacia un elemento $f(x)$ de este espacio, si para cualquier elemento $g(x)$ de $L^2(E)$ es válida la relación*

$$(f_n, g) \to (f, g) \quad para \quad n \to \infty.$$

o bien, que es lo mismo

$$\int_E f_n(x)g(x)dx \to \int_E f(x)g(x)dx \quad para \quad n \to \infty.$$

Notemos que la convergencia de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$ en la norma de $L^2(E)$ se deduce convergencia débil de $\{f_n(x)\}$ hacia $f(x)$.

Definición .13. *Sea R un espacio lineal normado. La transformación $l : R \to \mathbb{R}$ que actúa sobre el espacio R y toma valores reales se llama **funcional**.*

Definición .14. *Una funcional $l(f)$ definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$ se llama lineal, si para cualesquiera dos elementos $f, g \in L^2(E)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad*

$$l(\alpha f + \beta g) = \alpha l(f) + \beta l(g).$$

Definición .15. *Una funcional $l(f)$, definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$ se llama continua en un punto f_0 de dicho espacio, si para cualquier sucesión $\{f_n\}$ de elementos de $L^2(E)$, convergente en norma de $L^2(E)$ hacia el elemento f_0, una sucesión numérica $l(f_n)$ converge hacia $l(f_0)$.*

Definición .16. *Una funcional $l(f)$ se denomina simplemente continua, si es continua en cada punto f del espacio $L^2(E)$.*

Observemos que si una funcional lineal en $L^2(E)$ es continua al menos en un solo punto de $L^2(E)$, será continua en todo punto de $L^2(E)$, es decir, simplemente continua.

Definición .17. *Un conjunto infinito E de elementos de L^2 se llama débilmente compacto, si en cualquier sucesión de elementos $\{f_n\}$, pertenece al conjunto E, puede elegirse una subsucesión débilmente convergente.*

Además, en $L^2(E)$ se tienen afirmaciones tales como

1. Cualquier conjunto acotado en norma de $L^2(E)$, que contiene un número infinito de elementos de $L^2(E)$, es débilmente compacto.

2. Para toda funcional lineal continua $l(f)$ definida sobre los elementos f del espacio $L^2(E)$, existe uno y sólo un elemento g del espacio $L^2(E)$ de tal género que para todos los elementos f del espacio $L^2(E)$ se verifica una igualdad $l(f) = (f, g)$, con la particularidad de que

$$||l|| = \sup_{f \neq 0} \frac{|l(f)|}{||f||} = ||g||.$$

Otros conceptos

Lema .1. *Para cualesquiera funciones $f(x)$ y $g(x)$, integrables sobre el segmento $[a, b]$, se verifica la siguiente desigualdad*

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx}$$

llamada desigualdad de Cauchy-Buniakovski

Teorema .12. *Sea f una función par. Entonces f' es una función impar.*

Los siguientes resultados se pueden ver en [5]

Definición .18. *Sean L un espacio lineal, L_0 sub espacio lineal de L. Sea $f \in L_0$ un funcional lineal. Un funcional lineal f, definido sobre todo L, se llama prolongación del funcional f_0 cuando*

$$f(x) = f_0(x) \qquad \forall x \in L_0$$

Teorema .13 (Teorema de Hahn-Banach). *Sea E un espacio normado real; L, un subespacio suyo y f_0 un funcional lineal acotado sobre L. Este funcional lineal se puede prolongar a un funcional lineal f, definido sobre todo E, sin aumentar la norma, esto es, de manera que*

$$||f_0||_L = ||f||_E$$

Teorema .14. *Si $A \subset X$ es compacto entonces cada sucesión $\{a_n\} \subset A$ tiene un subsucesión convergente en A*

Teorema .15. *Para que cualquier funcional lineal $f \in E^*$ no tenga elementos extremos o para que sus elementos extremos difieran uno del otro solamente con un factor escalar (es decir, que f sea normal), es necesario y suficiente que el espacio E sea estrictamente normado, es decir, para cualesquiera dos elementos arbitrarios g y h en la relación (desigualdad del triángulo)*

$$||g + h|| \leq ||g|| + ||h||$$

el signo de igualdad tenga lugar solo y solo si $g = \lambda h$ y $h = \lambda g$, donde $\lambda \geq 0$.

Bibliografía

[1] Akhiezer N. I.: *The Classical Moment Problem*, 1965, Oliver and Boyd

[2] Apostol T. M.: *Análisis Matemático*, Segunda edición

[3] Bellman R.: *On the Theory of Dynamic Programming*, 1952, National Academy of Sciences

[4] Butkovskii A.G.: *Structural Theory of Distributed Systems*, 1984, Prentice Hall PTR

[5] Kolmogorov A. N.: *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, MIR Moscú, segunda edición

[6] Krasovsky N . N.: *Theory of Motion Control*, 1973, Nauka, Moscú

[7] Krein M., Ahiezer N. I.: *Some questions in the theory of moments*, 1962, American Mathematical Society, Vol. 2

[8] Pontryagin L. S.: *The mathematical theory of optimal processes*, 1977, Gordon and Breach Science, Vol. 4

[9] Pozniak E. y Ilin V.: *Fundamentos del análisis matemático*, MIR Moscú, Vol. 3

[10] Strauss W. A.: *Partial Differential Equations, An introduction*, Jhon Wiley y Sons

[11] Tikhonov A. y Samarski A.: *Ecuaciones de la Física Matemática*, 1983, MIR Moscú