

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

*Un algoritmo rápido para la transformación canónica lineal.*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO

MATEMÁTICAS PRESENTA

CARLOS JARED FIGUEROA CERVANTES.

ASESOR:

DR. RAFAEL GONZÁLEZ CAMPOS.

MORELIA MICHOACÁN, SEPTIEMBRE 2010





## Agradecimientos

Esta tesis no hubiese sido posible sin el trabajo de investigación, el apoyo y la asesoría del Dr. Rafael González Campos.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y la Tecnología (CONACyT) por el apoyo para la realización de esta tesis.

También agradezco a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Agradezco a todos los profesores que me han instruído y con quienes he trabajado. Agradezco profundamente a mis padres Artemisa Guadalupe Cervantes Vázquez y Juan Carlos Figueroa Ambríz, quienes me apoyaron en todo momento para mi formación y desarrollo. A mi hermana Artemisa Itzel Figueroa Cervantes que me apoyó en los momentos difíciles y me acompañó en los de diversión. A mi nueva “hermana” Jazmin Sarahí Figueroa López porque me ha enseñado muchas cosas. A mis abuelos Juan Figueroa Jiménez, Juanita Ambríz García, Evangelina Vázquez Rubio y Francisco Cervantes González.

A mis bisabuelos Jesús Vázquez Huerta y Soledad Rubio Aguilar.

Agradezco a mi novia Meztli Neyda Cruz Dávila por su apoyo, comprensión, cariño, y por todas las actividades que hemos organizado juntos y nos han permitido crecer y formar una relación excelente.

A Abraham Tavera Vázquez, quien me ha apoyado mucho desde que éramos pequeños y ha sido como mi hermano mayor.

A Misael García Vázquez por orientarme y apoyarme en la Licenciatura.

A todos mis tíos y tías Chucho, Tita, Edi, Benjo, Lucy, Beto, Chuchín, Není, Fahri, Izzet, Saray, Miguel, Yuri, Benja, Guille, Humberto Luis, también a Jaime, Adriana, Eduardo, Gaby, Ernesto y Alex, así como a mi tía Janet porque han sido ejemplos a seguir.

A mis primos David, Diana, Jessica, Stephanie, Juan Daniel, Estefanía, Karen, Laila y Lalo, así como a Yunuén, Evangelina y Sergio por los ratos de diversión y deporte. Y en cuanto puedan leer, quiero animar a la nueva generación de la familia: Itzamná, Regina, Fernanda, Santiago, José María, Rodrigo y a los que vienen en camino a que se mantengan unidos.

A mis amigos Efraín, Toño, Ivan, Beto, David, Chonso, Héctor Téllez, Rodolfo, Oswaldo, Fernando, Gil, Yussel, Gustavo Torres, Iris Paulina, Juan Cristóbal, Salvador Sierra, Heather, Marian, Ezequiel, César León, Dinorah, Irma, Juan Netzahualcóyotl, Lalo, Roy, Fede y Héctor Santoyo por los ratos de estudio y diversión. Y a todos los que pasé por alto a pesar de que estuvieron ahí.

Gracias Fofy, Guantes, Borona, Astro, Mancha y Nova.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Transformaciones Canónicas</b>	<b>9</b>
2.1. Formulación de Lagrange . . . . .	9
2.2. Formulación de Hamilton . . . . .	13
2.3. T. C. en la Mecánica Clásica . . . . .	14
2.4. T. C. en la Mecánica Cuántica . . . . .	17
<b>3. Transformación Canónica Lineal</b>	<b>19</b>
3.1. Operador, Kernel y Transformada . . . . .	19
3.2. Transformada Inversa . . . . .	23
3.3. Casos especiales . . . . .	25
<b>4. Una TCL discreta y rápida</b>	<b>27</b>
4.1. Una FRFT discreta . . . . .	27
4.2. Una Transformación Canónica Lineal Rápida . . . . .	35
4.3. Un algoritmo rápido para la TCL . . . . .	38
4.3.1. Los códigos . . . . .	40
4.4. Ejemplos . . . . .	42
<b>5. Aplicaciones</b>	<b>47</b>
5.1. Filtrado de Audio . . . . .	48
5.2. Una aplicación en 2 Dimensiones . . . . .	53
5.3. Tonos de marcación telefónicos. . . . .	57
<b>6. Conclusión</b>	<b>63</b>
<b>A. Filtrado</b>	<b>65</b>
A.1. Filtro Digital . . . . .	65
A.2. Algunos tipos de Filtros . . . . .	66



# Capítulo 1

## Introducción

Dentro de las transformaciones integrales, una de gran relevancia por su gran número de aplicaciones es la Transformación Canónica Lineal, que surge claramente en la Mecánica Cuántica. Es bien conocido que muchas técnicas poderosas para resolver problemas de la Mecánica Clásica se basan en transformaciones canónicas, es decir, en las transformaciones en el espacio fase que cumplen con algunas condiciones,<sup>1</sup> por lo que se puede considerar que antes de consolidarse como Transformación Canónica Lineal, se utilizaban sus bases como herramientas para resolver problemas en la Mecánica Clásica, como mencionó Marcos Moshinsky alrededor de 1973 en [1].

La Transformación Canónica Lineal generaliza a otras transformaciones integrales como la *fraccional de Fourier* que a su vez generaliza la transformada estándar de *Fourier*. Otros casos especiales de la Transformación Canónica Lineal son la transformada *bilateral de Laplace* y la de *Fresnel*, entre otras.

Algunas de sus aplicaciones se dan en Holografía, Análisis de señales, Reconocimiento de patrones, Propagación de ondas electromagnéticas, Difracción óptica, etc.

En *Holografía*, se utiliza la Transformada de Fourier para almacenar información en espacios muy pequeños, lo cual permite hacer dispositivos de almacenamiento que ocupen menos espacio[2].

Una aplicación importante de la transformada de Fourier en el *Reconocimiento de patrones* es en el control de calidad [3], [4]. Por ejemplo, una industria que produzca artículos de vidrio, puede aplicar esta Transformación para crear un patrón ideal de uno de sus artículos e ir comparándolo con los patrones de los otros artículos

---

<sup>1</sup>En los primeros capítulos se verán detalles de las condiciones que se deben cumplir y se abordará con detalle como surge la Transformación Canónica Lineal.

que se producen, de modo que cuando alguno de estos artículos tiene un defecto mínimo, se ve revelado fácilmente como un desplazamiento notable entre los patrones de los artículos.

En el análisis de señales, tiene un gran número de aplicaciones, entre ellas el filtrado de señales de audio[5] que permite eliminar ruido mediante la transformación de la señal, luego aplicando un filtro en el espacio de frecuencias para eliminar las no deseadas y posteriormente aplicando la transformada inversa.

Para trabajar con señales se utiliza la Transformada Fraccional de Fourier, ya que ésta mantiene la relación tiempo-frecuencia al transformar las señales, mientras que la Transformada de Fourier estándar no lo hace, solo transforma la señal al espacio de frecuencias, sin importar en que tiempo ocurrió cada frecuencia.

La teoría de antenas es suficientemente análoga a las teorías ondulatorias y de espectros de frecuencias, de modo que puede llevarse de una a otra, por ejemplo, el tiempo  $t$  en el análisis de Fourier tiene una analogía con la *distancia de apertura* en la teoría de antenas, cuando ésta se da en términos de longitudes de onda ( $x_\lambda$ ), y de manera semejante se relacionan las otras cantidades, de modo que la propagación de señales mediante antenas se simplifica al poder llevarla fácilmente a la forma que se trata con el análisis de Fourier.

Uno de los usos de la Transformación Canónica Lineal es como herramienta para resolver ecuaciones diferenciales [6].

Hay que resaltar que todos los ejemplos anteriores son casos especiales de la Transformación Canónica Lineal o bien, casos del uso directo de la misma.

En el capítulo 1 comenzaré con una breve explicación sobre las Transformaciones Canónicas, partiendo de la formulación Lagrangiana en Mecánica Clásica para luego pasar a la formulación Hamiltoniana y ver como en ese contexto surgen las Transformaciones Canónicas. Después daré una breve explicación de las transformaciones canónicas en la Mecánica Cuántica, con algunos de sus usos.

En el capítulo 2 se aborda la definición y propiedades de la Transformación Canónica Lineal, siguiendo los pasos de [12]. Posteriormente desarrollamos un algoritmo rápido para la Transformación Canónica Lineal (que abreviaremos TCL) partiendo de la construcción de una fórmula de cuadratura para la Transformada de Fourier que se basa en los polinomios de Hermite y nos da ventajas comparada con las discretizaciones conocidas. Después se implementa en forma de productos matriz - vector para obtener el algoritmo rápido.

Finalmente se muestran ejemplos de funciones transformadas, se comparan los resultados con las funciones analíticas y damos ejemplos de algunas aplicaciones.

# Capítulo 2

## Transformaciones Canónicas

Dentro de la mecánica clásica, tenemos la ecuación de movimiento de Newton que nos expresa la ley de movimiento para una sola partícula y es bien conocida:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.1)$$

donde  $\vec{p}$  es el *momento lineal* que se define como

$$\vec{p} = m\vec{v} = m\frac{d\vec{x}}{dt}$$

y  $\vec{F}$  es la *fuerza* que actúa sobre una partícula. Esta ecuación se puede generalizar a las ecuaciones de Lagrange.

### 2.1. Formulación de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange, están en función de *coordenadas generalizadas*. Esta formulación es útil porque simplifica el análisis del sistema tratado, ya que podemos elegir un conjunto de coordenadas generalizadas para caracterizar completamente los posibles movimientos de las partículas de nuestro sistema.

Para obtener las ecuaciones de Lagrange, comencemos considerando una partícula con masa  $m$  y vector de posición  $\vec{r}$  sometida a una fuerza  $\vec{F}$  que tiene la característica de que puede ser expresada como el gradiente de una función  $V(\vec{r}, t)$ , es decir,

$$\vec{F} = -\nabla V,$$

de modo que la segunda ley de Newton es un conjunto de tres ecuaciones diferenciales de segundo orden, por lo que el movimiento de la partícula puede ser descrito por las componentes cartesianas del vector de posición  $\{\vec{r}_x, \vec{r}_y, \vec{r}_z\}$  y sus derivadas con respecto al tiempo.

Entonces queremos trabajar con un conjunto de coordenadas generalizadas y sus respectivas derivadas y proponemos una transformación del tipo

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N, t).$$

En [7] se menciona que el trabajo realizado por las fuerzas internas de un sistema es cero, por lo que sólo se toma en cuenta el trabajo realizado por las fuerzas externas. Mientras que en [8] se toma el *trabajo* porque se considera el producto escalar entre la ecuación de Newton (2.1) y tres vectores base del sistema de coordenadas generalizadas para obtener las ecuaciones de movimiento generalizadas. Es conveniente utilizar el trabajo ya que cuando se trata con cuerpos rígidos, la consecuencia mencionada en [7] simplifica las ecuaciones (al menos en número). De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r}.$$

Teniendo al trabajo como una cantidad escalar, podemos escribirlo en términos de  $N$  coordenadas generalizadas como

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\nabla V \cdot \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_j} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} dq_i = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i. \quad (2.2)$$

Por el otro lado de la igualdad tenemos que

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \sum_{i,j=1}^N \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} dq_j,$$

separamos en dos sumatorias agrupándolas de la siguiente manera

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] dq_j,$$

reescribimos la ecuación sumando y restando dos términos

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \ddot{\vec{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j} - \ddot{\vec{r}}_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j} \right] dq_j,$$

y si vemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} + \vec{r}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j},$$

y que

$$-\vec{r}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) = -\vec{r}_i \frac{\partial \dot{\vec{r}}_i}{\partial q_j},$$

entonces podemos reescribir la ecuación como

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] \right] dq_j.$$

Tengamos en cuenta las igualdades

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial q_i},$$

y

$$\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_j}{\partial \dot{q}_i},$$

sustituyéndolas podemos ver que

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \dot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right] \right] dq_j,$$

si cambiamos el orden de diferenciación

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = m \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \vec{r}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \vec{r}_i^2 \right) \right] \right] dq_j,$$

incluimos la masa  $m$  en las sumatorias y cambiamos el orden de las mismas, obtenemos

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \vec{r}_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \vec{r}_i^2 \right) \right] dq_j.$$

Si llamamos  $T = \frac{1}{2} m \vec{r}^2$ , que es la energía cinética de la partícula, obtenemos

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dq_i,$$

y recordando de (2.2) la igualdad

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dq_i = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial q_i} dq_i,$$

entonces nuestra ecuación toma la forma

$$\sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} \right] dq_i = 0,$$

y como debe cumplirse para cualesquiera  $dq_i$ 's, debemos tener que

$$\left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - V)}{\partial q_i} \right] = 0.$$

Simplifiquemos el resultado notando que  $V$  es independiente de la primera derivada de las coordenadas generalizadas<sup>1</sup> entonces debe cumplirse

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (2.3)$$

y por lo tanto su derivada con respecto al tiempo también

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Utilizando esto y definiendo  $\mathcal{L} = T - V$ , entonces las ecuaciones toman la forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad q_i = q_1, q_2, q_3, \dots, q_N. \quad (2.4)$$

Tendremos una ecuación por cada coordenada generalizada  $q_i$ , y se conocen como ecuaciones de Lagrange.

El proceso hecho puede generalizarse fácilmente a un sistema de muchas partículas.

---

<sup>1</sup>De no cumplirse (2.3),  $\vec{F}$  no sería una fuerza conservativa.

## 2.2. Formulación de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton se obtienen como una reformulación de las ecuaciones de Lagrange.

Comenzamos definiendo el *momento generalizado* como

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}. \quad (2.5)$$

Entonces el Hamiltoniano es la *Transformación de Legendre*<sup>2</sup> del Lagrangiano

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t), \quad (2.6)$$

donde  $q$  representa el conjunto de  $N$  coordenadas generalizadas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  y  $\dot{q}$  representa el conjunto de sus derivadas.

Veamos que el diferencial  $d\mathcal{H}$  está dado por

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt. \quad (2.7)$$

De la definición (2.6) podemos ver que

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i + \sum_{i=1}^N p_i d\dot{q}_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

Usando la definición (2.5) los términos que son coeficientes de  $d\dot{q}_i$  se anulan, dado que

$$\sum_{i=1}^N p_i d\dot{q}_i = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i,$$

entonces el diferencial  $d\mathcal{H}$  se reduce a

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i dp_i - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Para comprender las transformaciones de Legendre, tenemos que observar que una manera de describir a una función es en términos del conjunto envolvente de rectas tangentes a ella, de modo que si conocemos las funciones de las rectas tangentes (que pueden ser las derivadas de la función) y su pendiente, podemos conocer el conjunto envolvente de rectas tangentes a la función y por lo tanto a la función en si.

y comparando término a término (2.7) y (2.8) obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Las ecuaciones (2.9), (2.10) y (2.11) son las ecuaciones de movimiento en la mecánica Hamiltoniana.

### 2.3. Transformaciones Canónicas en la Mecánica Clásica

En la Mecánica Clásica, el *paréntesis de Poisson* es un operador que en el espacio fase, con coordenadas canónicas  $(q_i, p_j)$  y dadas dos funciones  $f(q_i, p_i, t)$  y  $g(q_i, p_i, t)$ , toma la forma

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right]. \quad (2.12)$$

Es en este contexto de la mecánica Hamiltoniana donde se definen las *transformaciones* canónicas como los cambios de coordenadas canónicas del tipo

$$\begin{aligned} & Q_1(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_m, t) \\ & Q_2(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_m, t) \\ & \quad \vdots \\ & Q_N(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_m, t) \\ & P_1(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_m, t) \\ & P_2(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_m, t) \\ & \quad \vdots \\ & P_N(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_m, t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

que dejan invariantes las ecuaciones de Hamilton.

Otra definición equivalente para las transformaciones canónicas es un cambio

de coordenadas del tipo (2.13) en el espacio fase que conserva los paréntesis de Poisson (2.12) <sup>3</sup>.

Por ejemplo, todas las transformaciones de coordenadas son transformaciones canónicas, como puede verse en [9]. Una Transformación Canónica que además sea lineal, debe cumplir con las características mencionadas, y con las propiedades de Linealidad. Una transformación Lineal de manera general, sería del tipo

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \\ P_1 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \\ p_1 \\ \vdots \\ p_N \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

donde  $A$  es la representación matricial de un operador lineal.

Un ejemplo de una transformación que es lineal y canónica es

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_N \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

donde los elementos  $a_{ij}$  son constantes. Entonces lo que realiza esta transformación es una multiplicación por constantes  $a_{ij}$  a cada  $Q_j$ , y deja iguales a los momentos, es decir  $P_i = p_i$ .

Una transformación que es Lineal pero no Canónica (tomando 3 coordenadas

---

<sup>3</sup>Que preservan el paréntesis de Poisson quiere decir que  $\{q_i, p_i\} = 1 = \{Q_i, P_i\}$ .

generalizadas) es

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

lo podemos ver sustituyendo esta transformación en la expresión para los paréntesis de Poisson y verificando que nos dan como resultado  $-1$  en lugar de  $1$  como es requerido para que sea transformación canónica, sin embargo, este es un caso interesante de transformaciones, puesto que es una transformación de inversión. Para aclarar este tipo de transformaciones, consideremos el conjunto de coordenadas cartesianas conocidas  $\{x, y, z\}$  y apliquemos la transformación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

vemos que  $x \rightarrow z$ ,  $y \rightarrow y$  y  $z \rightarrow x$ , es decir, intercambia  $x$  por  $z$  y viceversa de modo que un sistema de dextrógiro queda convertido en uno levógiro.

## 2.4. Transformaciones Canónicas en la Mecánica Cuántica

Las coordenadas  $(q_i, p_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , que eran variables dinámicas del espacio fase en la Mecánica Clásica, ahora las consideraremos como operadores (u observables) que actúan en un espacio de Hilbert, que usualmente es el espacio de funciones cuadráticamente integrables y corresponde a las funciones de onda.

En [10] se propone la definición de transformaciones canónicas en la Mecánica Cuántica como un cambio de variables de la forma (2.13) que preserve los *conmutadores* (conocidos también como *paréntesis de Dirac*)

$$[q, p] = qp - pq = i\mathbb{1} = [Q(q_i, p_i, t), P(q_i, p_i, t)]. \quad (2.17)$$

Estas transformaciones se realizan mediante un operador  $T(q_i, p_i, t)$  de modo que

$$\begin{aligned} Q_i &= Tq_iT^{-1}, \\ P_i &= Tp_iT^{-1}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Notemos que no necesariamente se ocupa de un espacio fase (ni de un espacio de Hilbert) para esta definición. Dado que introducimos el uso del operador  $T$ , las transformaciones canónicas en la Mecánica Cuántica podrían ser o no unitarias, dependiendo si el operador  $T$  cumple con  $T^\dagger = T^{-1}$  o no, sin embargo, como nuestro interés se enfoca en la Transformación Canónica Lineal, no profundizaremos en este tema pero para el interesado, se pueden encontrar más detalles sobre  $T$  en [11].



# Capítulo 3

## Transformación Canónica Lineal

### 3.1. Operador, Kernel y Transformada

Ahora nos concentraremos en los operadores de transformación en la Mecánica Cuántica vistos anteriormente, siguiendo los pasos de [12] para llegar a la forma integral de la Transformación Canónica Lineal, de la cual sólo abordaremos el caso real.

De manera algebraica proponemos un operador lineal  $C$  que haga combinaciones lineales de las variables  $q$ 's y  $p$ 's en sí mismas<sup>1</sup>, de la siguiente manera

$$Q_i = Cq_iC^{-1} = \mathfrak{d}q_i - \mathfrak{b}p_i, \quad (3.1)$$

$$P_i = Cp_iC^{-1} = -\mathfrak{c}q_i + \mathfrak{a}p_i, \quad (3.2)$$

donde  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathbb{R}$ . Como queremos que sea una transformación canónica, tiene que preservar el conmutador (2.17)

$$[Q_i, P_i] = [\mathfrak{d}q_i - \mathfrak{b}p_i, -\mathfrak{c}q_i + \mathfrak{a}p_i] = i(\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c})\mathbb{1} = i\mathbb{1}, \quad (3.3)$$

por lo que los parámetros  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$  están restringidos por la condición

$$\mathfrak{a}\mathfrak{d} - \mathfrak{b}\mathfrak{c} = 1. \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Recordemos que ya no estamos considerando a las  $q$ 's y a las  $p$ 's como coordenadas canónicas ni elementos del espacio fase, sino como las observables en la Mecánica Cuántica.

Llamaremos  $C_M$  al operador cuya matriz asociada sea

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}, \quad \det(M) = 1,$$

pidiendo además, que sea *lineal*. Este operador actúa sobre un espacio de funciones que por el momento llamaremos  $\mathcal{EF}$ .

De ahora en adelante, cambiaremos de notación, de manera que las relaciones  $Q \rightarrow q$ , y  $P \rightarrow p$  ahora serán  $y \rightarrow x$  y  $p_y \rightarrow p_x$ , respectivamente.

Si denotamos  $g(y) = C_M f(x)$  como la transformación  $C_M$  de  $f(x)$ , entonces la transformación  $C_M$  de  $x f(x)$  será

$$C_M x C_M^{-1} C_M f(x) = (\mathbf{d}y - \mathbf{b}p_y)g(y), \quad (3.5)$$

y su representación sobre la base de la posición (o dicho de otra manera, donde  $x$  es diagonal y  $p$  tiene la representación  $p \rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx}$ ), es

$$\mathbf{d}yg(y) + i\mathbf{b} \frac{dg(y)}{dy}.$$

De igual manera, la transformada  $C_M$  de  $(p_x f)(x) = -i\hbar \frac{df(x)}{dx}$  es

$$C_M p C_M^{-1} C_M f(x) = (-\mathbf{c}y + \mathbf{a}p_y)g(y), \quad (3.6)$$

y de igual manera que la ecuación anterior

$$-\mathbf{c}yg(y) - i\mathbf{a} \frac{dg(y)}{dy}.$$

Notemos que en las dos ecuaciones anteriores (5.14) y (3.6) se comienza con  $x$  e  $y$  como operadores cuánticos y al final, después de tomar la representación sobre la base de la posición, tenemos como resultado funciones de variable real  $y$ .

Ahora proponemos una transformación de tipo integral<sup>2</sup> con un kernel  $K(x, y)$

$$g(y) = C_M f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) K(x, y) dx, \quad (3.7)$$

---

<sup>2</sup>Hacemos esto con el fundamento de que cualquier tipo de transformación lineal es generalizada por una transformación de tipo integral.

donde  $\mathbb{R}$  son todos los reales.

Las ecuaciones (5.14) y (3.6) aplicadas en (3.7) producen

$$\int_{\mathbb{R}} xf(x)K(x,y)dx = \left( \mathfrak{d}y + i\mathfrak{b}\frac{d}{dy} \right) \int_{\mathbb{R}} f(x)K(x,y)dx, \quad (3.8)$$

$$\int_{\mathbb{R}} [-idf(x)/dx]K(x,y)dx = \left( -\mathfrak{c}y + i\mathfrak{a}\frac{d}{dy} \right) \int_{\mathbb{R}} f(x)K(x,y)dx. \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.8) y (3.9) requieren que el kernel  $K(x,y)$  cumpla con

$$xK(x,y) = \left( \mathfrak{d}y + i\mathfrak{b}\frac{\partial}{\partial y} \right) K(x,y), \quad (3.10)$$

$$i\frac{\partial}{\partial x}K(x,y) = \left( -\mathfrak{c}y + i\mathfrak{a}\frac{\partial}{\partial y} \right) K(x,y), \quad (3.11)$$

donde suponemos que  $f(x)K(x,y)|_{-\infty}^{\infty} = 0$ .<sup>3</sup> Proponemos una solución de la forma  $e^{(Ax^2+Bxy+Cy^2)}$  y sustituyendo obtenemos

$$A = \frac{i\mathfrak{a}}{2\mathfrak{b}}, \quad (3.12)$$

$$B = \frac{-i}{\mathfrak{b}} \quad (3.13)$$

$$C = i\frac{\mathfrak{d}}{2\mathfrak{b}}. \quad (3.14)$$

Entonces el kernel de la transformada es

$$K(x,y) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\mathfrak{b}}} e^{i\frac{\mathfrak{a}x^2 - 2xy + \mathfrak{d}y^2}{2\mathfrak{b}}}. \quad (3.15)$$

Este Kernel es una función altamente oscilante para valores grandes de  $y$  y  $x$ , como se muestra en la figura 3.1.

---

<sup>3</sup>Esta condición es parecida a la de la transformada de Fourier en la que se pide que esté acotada la función mediante la disminución rápida de su valor al tender a infinito y a menos infinito, y ya que esto lleva a que la transformada de Fourier sea válida para funciones en  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , entonces  $\mathcal{EF}$  resulta ser también  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ .

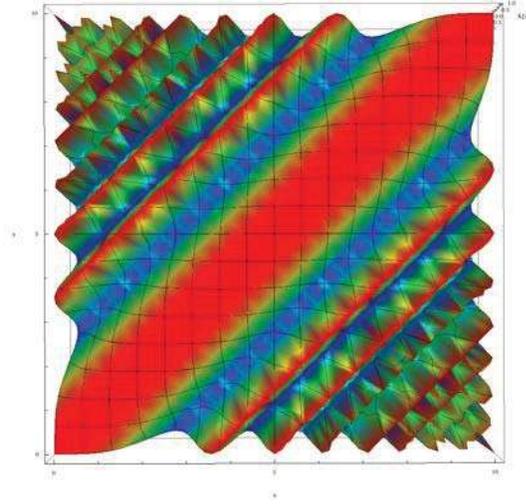


Figura 3.1: Kernel de la TCL en su proyección en el plano  $xy$ .

Entonces la Transformación Canónica Lineal  $\mathcal{L}(y)$  de una función  $f(x)$  se define como

$$\mathcal{L}^{\{a,b,c,d\}}[y, f(x)] = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i}{2b}(ax^2 - 2xy + dy^2)} dx, \quad (3.16)$$

para  $b \neq 0$ , y para  $b = 0$  se toma el límite cuando  $|b| \rightarrow 0$  de (3.16), para obtener<sup>4</sup>

$$\sqrt{d} e^{\frac{i}{2}cy^2} f(dy). \quad (3.17)$$

De ahora en adelante, cada vez que se haga referencia a la Transformación Canónica Lineal o “TCL”, será a (3.16) a quien nos referiremos.

<sup>4</sup>Se pueden encontrar más detalles sobre cómo se obtiene (3.17) en [12].

### 3.2. Transformada Inversa

Para mostrar la inversión de la Transformación Canónica Lineal, mostraremos la siguiente identidad

$$C_M^{-1}C_M f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} [f(x + \epsilon) + f(x - \epsilon)] = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L g(y) K(x, y)^* dy, \quad (3.18)$$

donde  $K(x, y)^*$  es el conjugado del kernel de la TCL.

Comenzamos tomando las ecuaciones (3.7) y (3.15), y las sustituimos en la última parte de (3.18) para tener

$$\begin{aligned} & \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left[ \int_{\mathbb{R}} f(y') K(y, y') dy' \right] K(x, y)^* dy = \\ & \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \left[ \int_{\mathbb{R}} f(y') \frac{1}{2\pi\mathfrak{b}} e^{\frac{i}{2\mathfrak{b}}(\mathfrak{a}y'^2 - 2yy' + \mathfrak{d}y'^2 - \mathfrak{a}x^2 + 2xy - \mathfrak{d}y^2)} dy' \right] dy = \\ & \frac{1}{2\pi\mathfrak{b}} e^{-\frac{i}{2\mathfrak{b}}\mathfrak{a}x^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{2\mathfrak{b}}\mathfrak{a}y'^2} f(y') e^{\frac{i}{\mathfrak{b}}y(x-y')} dy' dy = \\ & \frac{1}{2\pi\mathfrak{b}} e^{-\frac{i}{2\mathfrak{b}}\mathfrak{a}x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{2\mathfrak{b}}\mathfrak{a}y'} f(y') \delta\left(\frac{i}{\mathfrak{b}}(x-y')\right) dy' = \\ & e^{-\frac{i}{2\mathfrak{b}}\mathfrak{a}x^2} e^{\frac{i}{2\mathfrak{b}}\mathfrak{a}x^2} f(x) = f(x), \end{aligned} \quad (3.19)$$

lo que prueba que si utilizamos el conjugado del kernel de la TCL ( $K(x, y)^*$ ), efectivamente tenemos la transformación canónica lineal inversa.

A continuación abordaremos el caso elegante de la composición de Transformaciones Canónicas Lineales, sin embargo esto no es fundamental para el trabajo que aquí se presenta.

Ahora que tenemos la transformada inversa, naturalmente podríamos preguntarnos acerca de la composición de transformadas. Para esto supongamos que  $x$  es transformada en  $y$  bajo la acción de  $C_{M_1}$  y luego  $y$  es transformada en  $y'$  bajo la acción de  $C_{M_2}$ , mientras que de manera semejante para  $p_x$ , es transformado en  $p_y$  mediante  $C_{M_1}$  y luego  $p_y$  es transformado en  $p'_y$  mediante  $C_{M_2}$ , es decir

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{C_{M_1}} & y & \xrightarrow{C_{M_2}} & y' \\ p_x & \xrightarrow{C_{M_1}} & p_y & \xrightarrow{C_{M_2}} & p'_y \end{array}$$

entonces la relación entre  $x$ ,  $p$  y  $y'$ ,  $p'_y$  respectivamente está dada por:

$$\begin{aligned} y' &= C_{M_2}yC_{M_2}^{-1} = C_{M_2}C_{M_1}x(C_{M_2}C_{M_1})^{-1} = C_{M_2}(d_1x - b_1p_x)C_{M_2}^{-1} \\ &= d_1C_{M_2}xC_{M_2}^{-1} - b_1C_{M_2}p_xC_{M_2}^{-1} = d_1(d_2x - b_2p_x) - b_1(-c_2x + a_2p_x) \\ &= (c_2b_1 + d_2d_1)x - (a_2b_1 + b_2d_1)p = C_{M_{12}}xC_{M_{12}}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} p'_y &= C_{M_2}p_yC_{M_2}^{-1} = C_{M_2}C_{M_1}p_x(C_{M_2}C_{M_1})^{-1} = C_{M_2}(-c_1x + a_1p_x)C_{M_2}^{-1} \\ &= -c_1C_{M_2}xC_{M_2}^{-1} + a_1C_{M_2}p_xC_{M_2}^{-1} = -c_1(d_2x - b_2p_x) + a_1(-c_2x + a_2p_x) \\ &= -(c_2a_1 + d_2c_1)x + (a_2a_1 + b_2c_1)p_x = C_{M_{12}}p_xC_{M_{12}}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde

$$C_{M_{21}} = C_{M_2}C_{M_1} = \kappa C_{M_2M_1}, \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

y

$$M_2M_1 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix} = M_{21}.$$

Entonces, la composición de  $C_{M_2}$  y  $C_{M_1}$  (de modo que aplicamos primero  $C_{M_1}$  y luego  $C_{M_2}$ ), resulta ser una transformada  $C_{M_2M_1}$ <sup>5</sup>, con una matriz asociada, cuyos parámetros son el producto de los parámetros de las matrices de las transformadas  $C_{M_1}$  y  $C_{M_2}$ .

---

<sup>5</sup>Notemos que en la ecuación (3.22) hay una constante  $\kappa$  que surge del hecho de que la transformación de similaridad que involucra a  $C_{M_2}$  y  $C_{M_1}$  permite que  $C_{M_2M_1}$  y  $C_{M_{21}}$  difieran por un factor constante.

### 3.3. Casos especiales

La Transformación Canónica Lineal tiene como casos especiales a varias transformaciones integrales que podemos obtener manejando los parámetros  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  y  $\mathbf{d}$ .

La TCL para el caso  $\mathbf{b} \neq 0$  se escribe como

$$\mathcal{L}^{\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}}[y, f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mathbf{b}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i}{2\mathbf{b}}(\mathbf{a}x^2 - 2xy + \mathbf{d}y^2)} dx. \quad (3.23)$$

Si ponemos los parámetros  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{b} = 1$  y  $\mathbf{d} = 0$ , la TCL se reduce a la bien conocida transformada de Fourier con un factor de escala  $1/\sqrt{2\pi}$

$$\mathcal{F}[y, f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixy} dx. \quad (3.24)$$

Si damos los parámetros  $\mathbf{a} = 1$ ,  $\mathbf{b} = \lambda z$  y  $\mathbf{d} = 1$ , se convierte en la Transformada de Fresnel que, entre otras cosas, se utiliza para calcular la *difracción* de la luz en un sistema óptico.

Aplicando directamente los parámetros, obtenemos

$$\mathfrak{F}[y, f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i}{2\lambda z}(x^2 - 2xy + y^2)} dx,$$

y ahora simplemente factorizando obtenemos la forma de la transformada de Fresnel

$$\mathfrak{F}[y, f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda z}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i}{2\lambda z}(x-y)^2} dx. \quad (3.25)$$

Recordemos que la Transformada de *Laplace* de una función  $f(t)$  está definida para todos los números reales  $t \geq 0$  como

$$\mathfrak{L}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad (3.26)$$

entonces si el rango de integración se extiende a todos los números reales, se le conoce como *transformada bilateral de Laplace* y ésta es otro caso especial de la TCL si utilizamos los parámetros  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{b} = i$  y  $\mathbf{d} = 0$ , para obtener

$$\mathfrak{L}[y, f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-xy} dx, \quad (3.27)$$

que corresponde a la transformada bilateral de Laplace con un factor de escala  $1/\sqrt{2\pi i}$ .

Otro caso especial de la TCL es la transformada fraccional de Fourier (FRFT<sup>6</sup>), que se obtiene utilizando los parámetros  $\mathbf{a} = \cos(\theta)$ ,  $\mathbf{b} = \sin(\theta)$  y  $\mathbf{d} = \cos(\theta)$ . Sustituyendo directamente, obtenemos

$$\mathcal{F}^\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin(\theta)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i}{2\sin(\theta)}(\cos(\theta)x^2 - 2xy + \cos(\theta)y^2)} dx,$$

y utilizando algunas identidades trigonométricas, obtenemos la transformada fraccional de Fourier

$$\mathcal{F}^\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin(\theta)}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{\frac{i}{2}(\cot(\theta)x^2 - 2\csc(\theta)xy + \cot(\theta)y^2)} dx. \quad (3.28)$$

También podemos convertir la TCL en un producto por un “chirp” utilizando los parámetros  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{b} = 1$ ,  $\mathbf{c} = q/2$  y  $\mathbf{d} = 1$  en la transformación canónica lineal para  $\mathbf{b} = 0$  (3.17), obteniendo

$$e^{iqy^2} f(\mathfrak{d}y), \quad (3.29)$$

donde  $q \in \mathbb{R}$ . Los “chirps” son funciones altamente oscilantes y están relacionados con las transformaciones “chirplet”, que son un caso de transformaciones integrales que involucran chirps.

Existe una versión de la Transformada de Fourier que se le llama “FFT” que quiere decir “Fast Fourier Transform” por sus siglas en Inglés. FFT es en realidad un algoritmo eficiente que calcula la transformada de Fourier discreta (DFT) y su inversa. Lo que hace es producir el mismo resultado que la transformada de Fourier discreta

$$x_i = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.30)$$

pero con mucha mayor rapidez.

Calcular la transformada de Fourier con (3.30) requiere de  $\mathcal{O}(N^2)$  operaciones, mientras que los algoritmos de la FFT requieren solamente de  $\mathcal{O}(N \log N)$  operaciones para calcular la transformada.

---

<sup>6</sup>Ponga especial atención en esta notación ya que será utilizada más adelante.

# Capítulo 4

## Una TCL discreta y rápida

### 4.1. Una FRFT discreta

En trabajos anteriores [29], [30], [31], se derivó una fórmula de cuadratura para la transformada de Fourier continua que produce una transformada de Fourier discreta que da resultados precisos. Aquí daremos un breve repaso de los pasos más importantes que hay que seguir para obtener dicha fórmula ya que será básica para la construcción del algoritmo rápido para la TCL. Consideremos la familia de polinomios de Hermite  $H_n(x)$ ,  $n = 0, 1, \dots$  que satisfacen la ecuación de recurrencia:

$$H_{n+1}(x) + 2H_{n-1}(x) = 2xH_n(x), \quad (4.1)$$

con  $H_{-1}(x) = 0$ . Note que la ecuación de recurrencia (4.1) puede ser escrita como el problema de eigenvalores:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} H_0(x) \\ H_1(x) \\ H_2(x) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Ahora consideremos la submatriz principal de (4.2) de dimensión  $N$

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es conveniente que utilicemos la transformación de similaridad  $S\mathcal{H}S^{-1}$  para simetrizar  $\mathcal{H}$  y así simplificar el problema de eigenvalores. Definimos  $S$  como la matriz diagonal

$$S = \text{diag} \left\{ 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{(N-1)!2^{N-1}}} \right\}.$$

Entonces, haciendo el producto  $H = S\mathcal{H}S^{-1}$ , obtenemos la matriz simétrica

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{\frac{N-1}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{\frac{N-1}{2}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Consideremos el problema de eigenvalores asociado, evaluado en las raíces  $x_k$  de los polinomios de Hermite

$$Hu_k = x_k u_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

notando que es una versión de dimensión finita de (4.2).

Tomamos la ecuación de recurrencia normalizada (es decir, la ecuación de recurrencia que surge de la matriz (4.3)).

$$xH_n(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}H_{n+1}(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}H_{n-1}(x). \quad (4.4)$$

El  $k$ -ésimo eigenvector  $u_k$  está dado por

$$c_k(s_1 H_0(x_k), s_2 H_1(x_k), \dots, s_N H_{N-1}(x_k))^T,$$

donde  $s_1, \dots, s_N$  son los elementos diagonales de  $S$  y  $c_k$  es una constante de normalización que puede ser determinada a partir de la condición  $u_k^T u_k = 1$ , es decir, de

$$c_k^2 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x_k) H_n(x_k)}{2^n n!} = 1. \quad (4.5)$$

La fórmula de Christoffel - Darboux nos dice que

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} = \begin{cases} \frac{H_N(x) H_{N-1}(y) - H_{N-1}(x) H_N(y)}{2^N (N-1)! (x-y)}, & x \neq y \\ \frac{H'_N(x) H_{N-1}(x) - H'_{N-1}(x) H_N(x)}{2^N (N-1)!}, & x = y \end{cases}, \quad (4.6)$$

y la aplicamos en (4.5), tomando el caso en el que  $x = y$ , lo que nos da el resultado

$$c_k^2 \frac{H'_N(x_k) H_{N-1}(x_k) - H'_{N-1}(x_k) H_N(x_k)}{2^N (N-1)!} = 1,$$

utilizamos que  $H_N(x_k) = 0$  porque  $x_k$  son raíces de los polinomios de Hermite y también usamos el hecho  $H'_N(x_k) = 2N H_{N-1}(x_k)$  tomado de [32], para obtener

$$c_k^2 \frac{2N [H_{N-1}(x_k)]^2}{2^N (N-1)!} = 1,$$

lo que implica que

$$c_k = \sqrt{\frac{2^{N-1} (N-1)!}{N} \frac{1}{|H_{N-1}(x_k)|}}.$$

Para calcular  $|H_{N-1}(x_k)|$ , consideremos nuevamente la relación  $H'_N(x_k) = 2N H_{N-1}(x_k)$ , que nos da la derivada de  $H_N(x_k)$ , por lo tanto está relacionada con la pendiente de  $H_N(x_k)$ . A partir de las gráficas de los polinomios de Hermite, podemos verificar que  $|H_N(x_k)| = (-1)^{N+k} H_{N-1}(x_k)$ , es decir, las pendientes de los polinomios de Hermite pares son negativas antes de que empiece a oscilar, y las de los impares son positivas. Para dejar más claro esto, veamos las figuras 4.1 y 4.2, donde observamos que la pendiente después de la primera raíz de un polinomio de Hermite par es negativa, y en el caso de un polinomio de Hermite impar, sucede lo contrario.

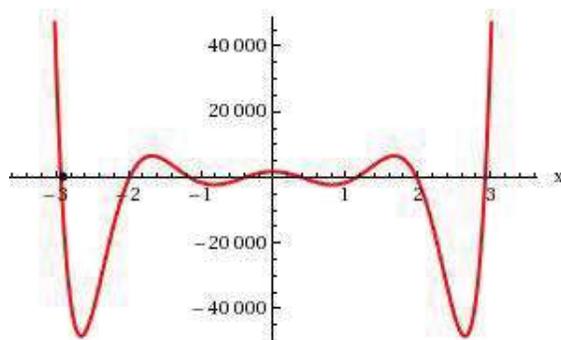


Figura 4.1: Polinomio de Hermite  $H_8(x)$ , resaltando su primer raíz con un punto.

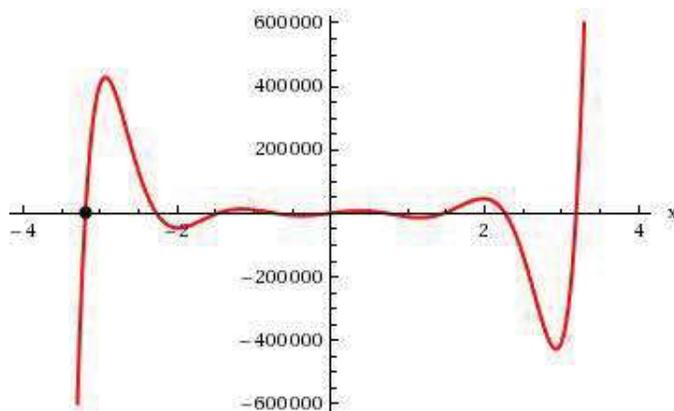


Figura 4.2: Polinomio de Hermite  $H_9(x)$ , resaltando su primer raíz con un punto.

Entonces, las componentes de los vectores ortonormales  $u_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ , son

$$(u_k)_n = (-1)^{N+k} \sqrt{\frac{2^{N-n}(N-1)!}{N(n-1)!}} \frac{H_{n-1}(x_k)}{H_{N-1}(x_k)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Notemos que los vectores  $u_k$  son ortonormales por ser eigenvectores de una matriz simétrica.

Para llegar a una fórmula de cuadratura para la transformada de Fourier,

definimos  $U$  como la matriz ortogonal cuya  $k$ -ésima columna sea el vector  $u_k$  y entonces definimos también la matriz

$$\mathcal{F}_z = \sqrt{2\pi}U^{-1}D(z)U, \quad (4.8)$$

donde  $D(z)$  es la matriz diagonal  $D(z) = \text{diag}\{1, z, z^2, \dots, z^{N-1}\}$  y  $z$  es un número complejo. El factor  $\sqrt{2\pi}$  se introduce con el fin de que más adelante la cuadratura corresponda a la transformada de Fourier usual

$$\mathcal{F} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ixy}dx. \quad (4.9)$$

Entonces las componentes de  $\mathcal{F}_z$  están dadas por

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} = \sqrt{2\pi} \frac{(-1)^{j+k} 2^{N-1} (N-1)!}{N H_{N-1}(x_j) H_{N-1}(x_k)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x_j) H_n(x_k). \quad (4.10)$$

Notemos que la matriz  $D(z)$  se introdujo en (4.8) con el fin de producir la forma de (4.10)<sup>1</sup>. Ahora queremos probar que si  $N$  es suficientemente grande, (4.10) se acerca al kernel de una transformada integral de Fourier (que volveremos a encontrar más adelante) evaluada en  $x = x_j, y = x_k$ .

$$\mathcal{F}_z[f(x), y] = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1+z^2)(y^2+x^2)-4xyz}{2(1-z^2)}} f(x) dx.$$

Para probar esto usamos la expresión asintótica para  $H_N(x)$  obtenida en [32]

$$H_N(x) \simeq \frac{\Gamma(N+1)e^{x^2/2}}{\Gamma(N/2+1)} \cos\left(\sqrt{2N+1}x - \frac{N\pi}{2}\right). \quad (4.11)$$

Como estamos evaluando en las raíces  $x_k$ , se debe cumplir que

$$\cos\left(\sqrt{2N+1}x_k - \frac{N\pi}{2}\right) = 0,$$

es decir

$$\sqrt{2N+1}x_k - \frac{N\pi}{2} = \frac{2k+1}{2\pi}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

---

<sup>1</sup>Esto se verá que es útil más adelante para poder utilizar la fórmula de Mehler.

pero debemos confinar esto debido a que la región donde se encuentran las raíces está acotada por  $-\sqrt{2N+1}$  y  $\sqrt{2N+1}$ , [32] entonces dado que la diferencia entre dos raíces consecutivas de los polinomios de Hermite es

$$\varepsilon = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}}, \quad (4.12)$$

podemos ordenar el conjunto muestreado de la siguiente manera

$$\left\{ \frac{-N}{2}\varepsilon, \left(\frac{-N}{2} + 1\right)\varepsilon, \left(\frac{-N}{2} + 2\right)\varepsilon, \dots, \frac{N}{2}\varepsilon \right\}, \quad (4.13)$$

por lo que cada  $x_k$  está dada por

$$x_k = \left(\frac{-N}{2} + k - 1\right)\varepsilon = \left(\frac{2k - N - 2}{2}\right)\varepsilon, \quad (4.14)$$

entonces con (4.14) cumplimos con confinar los valores al intervalo

$$\left(-\sqrt{2N+1}, \sqrt{2N+1}\right)$$

y a ordenarlos con el índice  $k$ , de modo que finalmente manejaremos

$$x_k \simeq \left(\frac{2k - N - 1}{\sqrt{2N}}\right)\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.15)$$

Usando (4.11) y (4.15) resulta

$$H_{N-1}(x_k) \simeq (-1)^{N+k} \frac{\Gamma(N)}{\Gamma(\frac{N+1}{2})} e^{x_k^2/2}, \quad N \rightarrow \infty,$$

y al sustituir esta expresión asintótica en (4.10) resulta

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} \simeq \sqrt{2\pi} \frac{2^{N-1} [\Gamma(\frac{N+1}{2})]^2}{\Gamma(N+1)} e^{-(x_j^2 + x_k^2)/2} \sum_{2^n n!}^{\infty} \frac{z^n}{2^n n!} H_n(x_j) H_n(x_k).$$

Finalmente usando la aproximación de Stirling, que nos dice

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (4.16)$$

y la fórmula de Mehler obtenida en [33]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} \left(\frac{1}{2}w\right)^n = (1-w^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2xyw-(x^2+y^2)w^2}{1-w^2}}, \quad (4.17)$$

producen

$$(\mathcal{F}_z)_{jk} \simeq \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \exp\left(-\frac{(1+z^2)(x_j^2+x_k^2)-4x_jx_kz}{2(1-z^2)}\right) \Delta x_k \quad (4.18)$$

donde  $\Delta x_k$  es la diferencia entre dos raíces asintóticas de Hermite, i. e.

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}}. \quad (4.19)$$

Ahora consideremos un vector cuyas entradas sean una función  $f$  evaluada en las raíces de los polinomios de Hermite  $x_n$ .

$$f = (f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N))^T.$$

La multiplicación de la matriz  $\mathcal{F}_z$  por el vector  $f$  produce el vector  $g$  con entradas

$$g_j = \sum_{k=1}^N (\mathcal{F}_z)_{jk} f(x_k) \simeq \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \sum_{k=1}^N e^{-\frac{(1+z^2)(x_j^2+x_k^2)-4x_jx_kz}{2(1-z^2)}} f(x_k) \Delta x_k, \quad (4.20)$$

donde  $j = 1, 2, \dots, N$ . Esta ecuación es la suma de Riemann para la integral

$$\mathcal{F}_z[f(x), y] = \sqrt{\frac{2}{1-z^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1+z^2)(y^2+x^2)-4xyz}{2(1-z^2)}} f(x) dx, \quad (4.21)$$

donde  $|z| < 1$ . Notemos que si hacemos  $z = \theta i$ , (4.21) se convierte en

$$\mathcal{F}_z[f(x), y] = \sqrt{\frac{2}{1+\theta^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1-\theta^2)(y^2+x^2)-4xy\theta i}{2(1+\theta^2)}} f(x) dx, \quad (4.22)$$

y si hacemos  $\theta = e^{i\alpha}$ , la ecuación (4.21) se convierte en

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(1+e^{2i\alpha})(y^2+x^2)-4xye^{i\alpha}}{2(1-e^{2i\alpha})}} f(x) dx,$$

que puede ser reescrita como

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2xye^{i\alpha} - e^{2i\alpha}(x^2+y^2)}{1-e^{2i\alpha}}} e^{-\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} f(x) dx,$$

para llevarla a la forma

$$C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{2} \cot \alpha x^2 + \frac{ixy}{\sin(\alpha)}} f(x) dx, \quad (4.23)$$

que es una transformada fraccional de Fourier (como puede verse en [34]) donde observamos que si hacemos  $\alpha = \pm\pi/2$ , se convierte en la transformada de Fourier usual (4.9).

Entonces (4.21) es una transformada fraccional de Fourier discreta.

## 4.2. Una Transformación Canónica Lineal Rápida

Notemos que si  $b \neq 0$ , la TCL se puede escribir como un transformación de tipo chirp - transformada de Fourier - chirp<sup>2</sup>

$$\mathcal{L}^{\{a,b,c,d\}}[f(x), y] = \frac{e^{\frac{id y^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixy}{b}} e^{\frac{iax^2}{2b}} f(x) dx, \quad (4.24)$$

entonces, para  $b \neq 0$ , la TCL de una función  $f(x)$  puede ser representada por la transformada de Fourier con un factor de escala  $1/b$  de la función

$$g(x) = e^{\frac{iax^2}{2b}} f(x),$$

multiplicada por

$$\frac{e^{\frac{id y^2}{2b}}}{\sqrt{2\pi b}}.$$

Ahora, recordemos que para el caso  $z = \pm i$ , (4.18) produce una transformada de Fourier discreta

$$(\mathcal{F}_{\pm i})_{jk} \simeq e^{\pm i x_j x_k} \Delta x_k,$$

que puede relacionarse con la transformada discreta de Fourier estándar como sigue.

El uso de (4.15) y (4.19), produce

$$(\mathcal{F}_{\pm i})_{jk} = e^{\pm i x_j x_k} \Delta x_k = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{i \frac{\pi^2}{2N} (j - \frac{N-1}{2})(k - \frac{N-1}{2})}. \quad (4.25)$$

Y sabemos que

$$\sum_{k=1}^N (\mathcal{F}_i)_{jk} f(x_k),$$

es una cuadratura<sup>3</sup> y por lo tanto, una aproximación de

$$g(y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy_j x} f(x) dx.$$

<sup>2</sup>Ver el final de la sección 3.3 para más detalles sobre chirps.

<sup>3</sup>Una *cuadratura* es un método para aproximar el valor numérico de alguna integral.

Una transformada de Fourier con un factor de escala

$$g(\kappa y_j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa y_j x} f(x) dx, \quad (4.26)$$

tiene la cuadratura

$$\sum_{k=1}^N \tilde{F}_{jk} f(x_k), \quad (4.27)$$

donde

$$\tilde{F}_{jk} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{i\kappa \frac{\pi^2}{2N} (j - \frac{N-1}{2})(k - \frac{N-1}{2})}.$$

Si elegimos  $\kappa = 4/\pi$ , podemos escribir la ecuación (4.27) como

$$\tilde{F}_{jk} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{(i\kappa \frac{i2\pi}{N})(j - \frac{N-1}{2})(k - \frac{N-1}{2})} = \frac{\pi}{\sqrt{2N}} e^{\left(\frac{i2\pi}{N}\right)\left(jk - j\frac{N-1}{2} - k\frac{N-1}{2} + \frac{(N-1)^2}{4}\right)},$$

para llegar a la forma

$$\tilde{F}_{jk} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2} \frac{(N-1)^2}{N}}}{\sqrt{2N}} \left[ e^{-i\pi \frac{N-1}{N} j} \right] \left[ e^{i\frac{2\pi}{N} jk} \right] \left[ e^{-i\pi \frac{N-1}{N} k} \right], \quad (4.28)$$

con  $j, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , donde vemos que de las tres exponenciales entre corchetes, la del centro encierra la transformada de Fourier discreta usual, lo que nos permite implementar la fórmula de cuadratura a manera de producto matriz - vector, haciendo posible la realización de un algoritmo rápido.

Ahora veamos que la cuadratura

$$\sum_{k=1}^N \tilde{F}_{jk} f(x_k),$$

es una aproximación de  $g(4y_j/\pi)$ . Tomando  $\kappa = 4b/\pi$ , y manteniendo la misma matriz (4.28), entonces se vuelve una aproximación de

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{y_j}{b} x} f(x) dx,$$

y ahora ponemos  $f(x_k)$  como la función  $e^{\frac{iax^2}{2b}}$  y tomamos en cuenta (4.24), para obtener

$$\sum_{k=1}^N \tilde{F}_{jk} e^{\frac{iax_k^2}{2b}} f(x_k),$$

que resulta ser una aproximación del producto de funciones

$$\frac{e^{\frac{i\alpha y^2}{2\mathfrak{b}}}}{\sqrt{2\pi\mathfrak{b}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixy}{\mathfrak{b}}} e^{\frac{i\alpha x^2}{2\mathfrak{b}}} f(x) dx,$$

evaluada en los puntos  $y_j = 4\mathfrak{b}x_j/\pi$ .

Entonces, una Transformación Canónica Lineal Discreta escalada  $\mathcal{L}$  puede darse en forma cerrada. Si denotamos  $G(y)$  la Transformada Canónica Lineal de  $f(x)$ , entonces

$$G(y_j) = G\left(\frac{4\mathfrak{b}x_j}{\pi}\right) = \sum_{k=1}^N (S_1 F S_2)_{jk} f(x_k),$$

donde  $S_1$  y  $S_2$  son las matrices diagonales cuyos elementos están dados por

$$\frac{e^{\frac{i\alpha y_j^2}{2\mathfrak{b}}}}{\sqrt{2\pi\mathfrak{b}}},$$

y

$$e^{\frac{i\alpha x_j^2}{2\mathfrak{b}}},$$

respectivamente.

Ahora podemos observar que la matriz  $L = S_1 F S_2$  que da la Transformación Canónica Lineal discreta (que corresponde a la XFT[36]), consiste en una transformación de tipo chirp-DFT-chirp, donde DFT es la transformada discreta de Fourier estándar, entonces podemos usar cualquier algoritmo del tipo FFT para dar rapidez a los cálculos la nueva transformación Canónica Lineal  $G = Lf$ .

### 4.3. Un algoritmo rápido para la Transformación Canónica Lineal

Ahora daremos un algoritmo rápido<sup>4</sup> para calcular una aproximación de un vector

$$G = (G_1, G_2, \dots, G_N)^T,$$

cuyas entradas sean la Transformación Canónica Lineal

$$G(y) = \mathcal{L}^{\{a,b,c,d\}}[f(x), y],$$

evaluada en los puntos

$$y_j = \frac{4b x_j}{\pi},$$

donde

$$x_j = \left( \frac{2j - N - 1}{\sqrt{2N}} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Para lograrlo, debemos seguir los siguientes pasos.

1. Para una  $N$  dada, creamos el vector  $u$  cuyas entradas están dadas por

$$u_k = e^{-i\pi \frac{(k-1)(N-1)}{N}} e^{\frac{iax_k^2}{2b}} f\left(\pi \frac{2k - N - 1}{2\sqrt{2N}}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

2. Fijamos

$$y_j = \frac{4b x_j}{\pi}$$

y calculamos la matriz diagonal  $S$  de acuerdo con

$$S_{jk} = \frac{\pi e^{i\frac{\pi}{2} \frac{(N-1)^2}{N}} e^{\frac{ia y_j^2}{2b}} e^{-i\pi \frac{N-1}{N}(j-1)}}{\sqrt{2N} \sqrt{2\pi i b}} \delta_{jk}, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

3. Con  $D_F$  la transformada de Fourier discreta

$$(D_F)_{jk} = e^{i\frac{2\pi}{N}jk}, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots, N - 1,$$

---

<sup>4</sup>La rapidez de un algoritmo está dada por el número de operaciones que se realizan para completar un ciclo del algoritmo, ya que mientras menor sea el número de operaciones, más rápido podrá completarse el algoritmo, independientemente de la velocidad del procesador y las características de la computadora que lo realice.

obtenemos la aproximación  $G_j$  que es  $G(\frac{4b}{\pi}x_j)$  mediante el cálculo del producto matriz vector

$$G = SD_F u.$$

Con este algoritmo, el cálculo del vector  $G = SD_F u$  toma  $\mathcal{O}(N \log N)$  operaciones, lo cual clasifica a este algoritmo como *rápido*.

### 4.3.1. Los códigos

A continuación muestro los códigos de los algoritmos rápidos para calcular la Transformación Canónica Lineal en Matlab<sup>®</sup> y Mathematica<sup>®</sup>.

```
function [x,ga]=FLCT(n,a,b,d)
% The function [x,ga]=FLCT(n,a,b,d)returns the approximation ga
% to the linear canonical transform evaluated at x, according to
% the lines given in R.G. Campos and Jared Figueroa, ‘‘A fast
% algorithm for the linear canonical transform’’,
% arXiv:0912.1379v1 [math.NA].
% The fun argument is a function handle, n is the number of
% samples and a, b, and d are the parameters of the linear
% canonical transform.
% -----
fun=@(t) sin(t);
c=(a*d-1)/b; epsi = pi/sqrt(2*n); x=epsi*((1:n)' - n/2 - 1/2);
y= 4*b*x/pi; palf= pi*exp(1i*2*pi*((n - 1)/2)^2/n)/sqrt(2*n);
f = fun(x);
S2=diag(exp(-1i*pi*(n - 1)*((1:n)')-1)/n+1i*a*x.^2/2/b));
S1=diag(exp(-1i*pi*(n - 1)*((1:n)')-1)/n+1i*d*y.^2/2/b))/sqrt(2*pi*1i*b);
fs=S2*f; ga = palf*S1*fft(fs);
end
```

Ahora el código para Mathematica<sup>®</sup>.

```

n = 256;
a = 0;
b = 1;
d = 0;
fun[t_] := I/( $\pi$  t);
c = (a d - 1)/b;
epsi =  $\pi$ /Sqrt[2 n];
x = Table[epsi (j - n/2 - 1/2), {j, 1, n}];
y = Table[4 b x[[j]]/ $\pi$ , {j, 1, n}];
palf =  $\pi$  Exp[I 2  $\pi$ ] ((n - 1)/2)^2/n/Sqrt[2 n];
f = Table[fun[x[[j]]], {j, 1, n}];
listS2 = Table[Exp[-I  $\pi$  (n - 1) (j - 1)/n + I a x[[j]]^2/2/b], {j,
1, n}];
listS1 = Table[Exp[-I  $\pi$  (n - 1) (j - 1)/n + I d y[[j]]^2/2/b]/Sqrt[2
 $\pi$  I b], {j, 1, n}];
S1 = DiagonalMatrix[listS1];
S2 = DiagonalMatrix[listS2];
fs = S2.f;
ga = palf*S1.Fourier[fs, FourierParameters  $\rightarrow$  {1, 1}];

```

## 4.4. Ejemplos

Para mostrar los resultados, se tomó una fórmula integral de [35] que nos da la función

$$f(x) = e^{-(\alpha x^2 - 2\beta x + \gamma)}, \quad \alpha > 0, \quad (4.29)$$

y su Transformación Canónica Lineal

$$G(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi i \mathbf{b} (\alpha^2 + \frac{\mathbf{a}^2}{4\mathbf{b}^2})^{\frac{1}{4}}}} e^{\frac{\alpha(\beta^2 - \alpha\gamma)}{\alpha^2 + \frac{\mathbf{a}^2}{4\mathbf{b}^2}}} e^{i \frac{1}{2} \arctan(\frac{\mathbf{a}}{2\alpha\beta})} e^{-\frac{\alpha y^2 + 2\beta \mathbf{a} y + \mathbf{a}^2 \gamma}{4\mathbf{b}^2 \alpha^2 + \mathbf{a}^2}} e^{i \frac{\alpha \mathbf{c} y^2}{2(4\mathbf{b}^2 \alpha^2 + \mathbf{a}^2)}} e^{i \frac{2\mathbf{b}(\alpha^2 \mathfrak{d} y^2 + 2\beta \alpha y \mathfrak{b} \beta^2 \mathbf{a})}{4\mathbf{b}^2 \alpha^2 + \mathbf{a}^2}}. \quad (4.30)$$

En la figura 4.3 se muestra la TCL exacta con  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$ , y se compara con la aproximación obtenida mediante el algoritmo rápido con  $N = 2048$ ,  $\mathbf{a} = 1$ ,  $\mathbf{b} = 2$ ,  $\mathbf{c} = 1/2$ , y  $\mathfrak{d} = 0$ .

Se muestran las partes reales e imaginarias de la función exacta comparadas con las respectivas partes de la función aproximada.

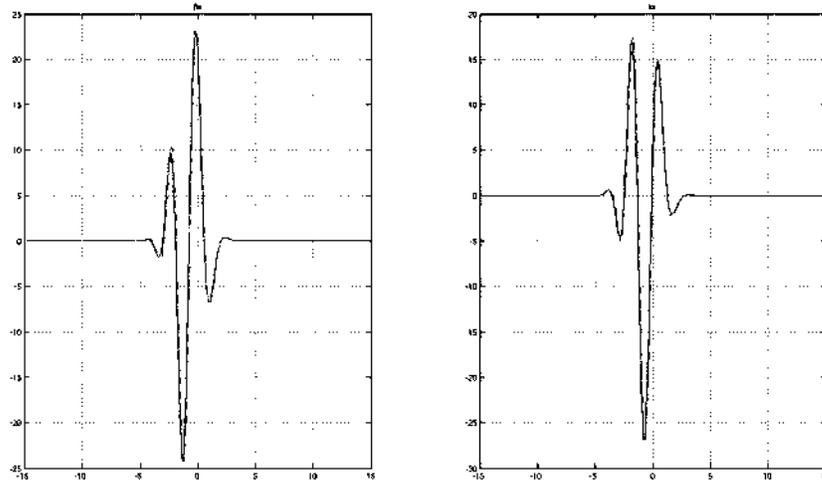


Figura 4.3: Función exacta (línea continua) comparada con la función aproximada (línea discontinua). Partes reales (lado izquierdo) y partes imaginarias (lado derecho).

Y ahora veamos una gráfica del error del algoritmo en la figura 4.4, en donde se muestra el valor absoluto de la diferencia de la función exacta y la función aproximada mediante el algoritmo.

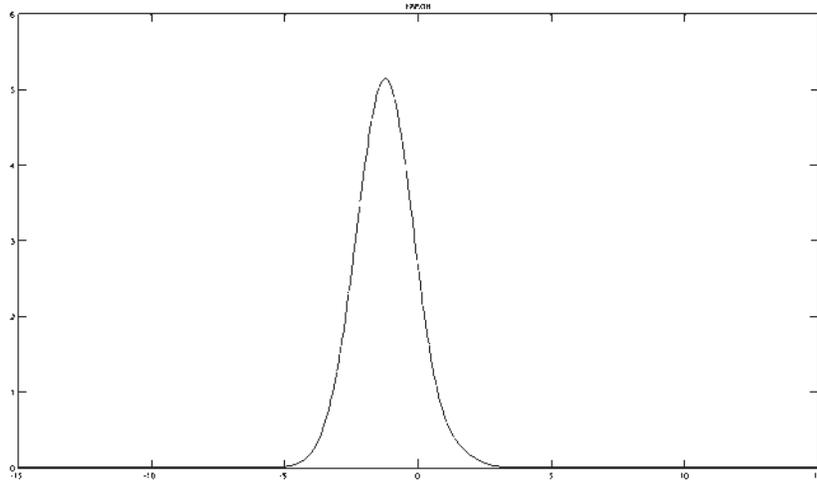


Figura 4.4: Error del algoritmo al ser comparado con la función exacta.

Ahora, la función, (4.30) pero con los parámetros  $N = 1024$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\mathbf{a} = 1$ ,  $\mathbf{b} = 2$ ,  $\mathbf{c} = 1/2$  y  $\mathbf{d} = 2$  se muestra en la figura 4.5.

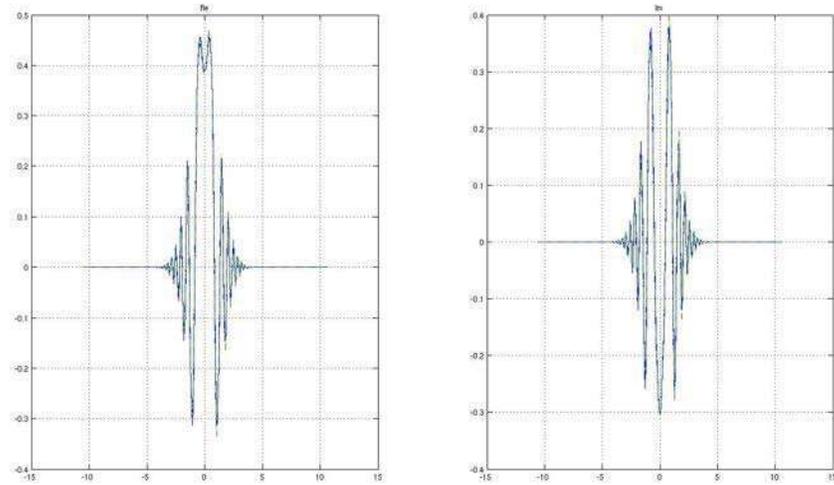


Figura 4.5: Función exacta (línea continua) y función aproximada mediante el algoritmo rápido (línea discontinua). Partes reales comparadas en la gráfica del lado izquierdo y partes imaginarias comparadas en la gráfica del lado derecho.

Veamos también el error que presenta el algoritmo para esta función en la figura 4.6.

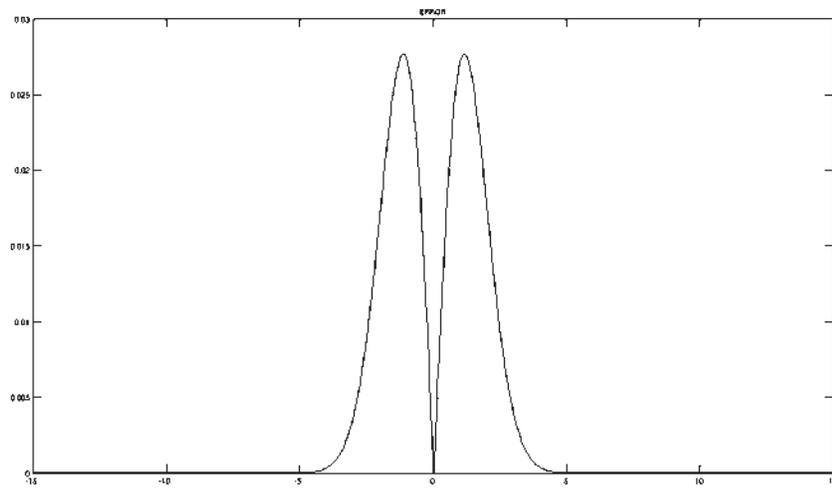


Figura 4.6: Error del algoritmo al ser comparado con la función exacta.

Recordemos del capítulo anterior que la Transformación Canónica Lineal con los parámetros  $\mathbf{a} = 0$ ,  $\mathbf{b} = 1$ , y  $\mathbf{c} = 0$ , se reduce a la conocida transformada de Fourier, entonces con el algoritmo rápido y los parámetros para la transformada de Fourier, se transformó la función

$$f(x) = \frac{i}{\pi x}, \quad (4.31)$$

cuya transformada de Fourier es  $-\text{sgn}(y)$  y las comparamos en la figura 4.7.

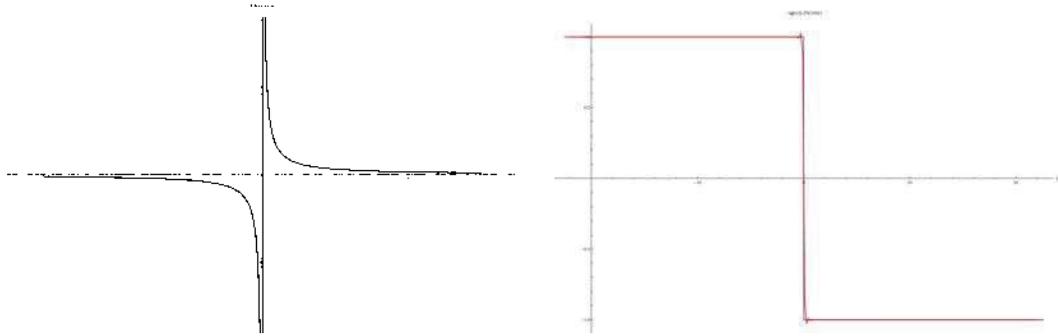


Figura 4.7: Gráfica de la función  $f(x) = \frac{i}{\pi x}$  (izquierda), y gráfica de la función transformada utilizando el algoritmo rápido con  $N = 512$  y la función analítica  $-\text{sgn}(y)$ , (derecha).

Debe mencionarse que los algoritmos que calculan la FFT no pueden calcular la transformada de (4.31) debido a que sólo pueden manejar funciones periódicas o cuasi-periódicas, sin embargo, el algoritmo rápido para la Transformación Canónica Lineal lo logra muy bien, sólo presentando el *fenómeno de Gibbs* en los puntos donde hay discontinuidades.

El *fenómeno de Gibbs* es un exceso en el valor de una función que se presenta al utilizar series de Fourier y otras eigenfunciones en una discontinuidad. Se puede encontrar más información sobre este fenómeno en [37].

# Capítulo 5

## Aplicaciones

Dentro de las aplicaciones que tiene la Transformación Canónica Lineal se encuentran todas las aplicaciones de la Transformada de Fourier, más el gran número de aplicaciones de la transformada bilateral de Laplace, más todas las aplicaciones que tiene la transformada de Fresnel, así como las aplicaciones de las demás transformaciones integrales que son casos especiales de la Transformación Canónica Lineal, sin embargo sólo en una parte (que sigue siendo grande) se utilizan los algoritmos para aproximar dichas transformadas.

En las próximas páginas se presentan algunas de las aplicaciones de la Transformación Canónica Lineal o bien de algunas de las transformadas que son casos especiales de la misma, pero en todas ellas se utiliza el algoritmo obtenido en éste trabajo.

*Nota importante:* Las aplicaciones que aquí se presentan fueron desarrolladas sin profundizar en las áreas de cada una de ellas, ya que solamente se elaboraron con el fin de ejemplificar las aplicaciones que tiene el algoritmo obtenido. Si existe interés en alguna de las áreas de aplicación se recomienda consultar material relacionado directamente con el campo de estudio correspondiente.

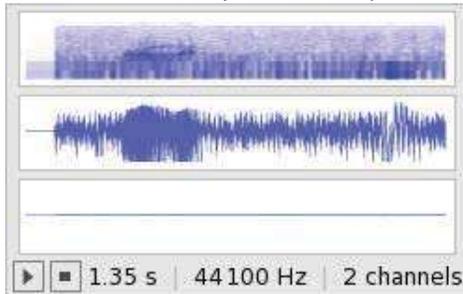
## 5.1. Filtrado de Audio

Utilizando la Transformación Canónica Lineal con los parámetros que la reducen a la transformada de Fourier podemos hacer uso del algoritmo rápido para filtrar señales de audio.

Tomamos una señal de audio y la digitalizamos, convirtiéndola en un arreglo unidimensional al que después se le aplica el algoritmo rápido para transformarlo, y una vez que está en el espacio de frecuencias, se *filtra*<sup>1</sup> y luego se le aplica la transformada inversa para obtener una señal con menor ruido o incluso sin él. De igual manera se pueden aislar distintas frecuencias de las señales de audio que se sometan al procedimiento.

Se muestra el algoritmo implementado en Mathematica<sup>®</sup> utilizado para el procedimiento, explicado en cada paso.

```
(*Primero Fijamos el directorio de trabajo en el que se
encuentre el archivo de audio con el que se trabajará, por ejemplo*)
SetDirectory[ '/home/Jared/Octavo/Servicio Social/Sonidos' ];
(*Ahora importamos el archivo "archivo-de-audio.wav",
convirtiéndolo en un arreglo unidimensional de datos*)
sonid=Import[ 'archivo-de-audio.wav' ];
sndt=sonid[[1,1]][[1]];
```



```
(*Procedemos a transformar los datos*)
nx=Length[sndt];
epsx= $\pi/\text{Sqrt}[2 \text{ nx}]$ ;
x=Table[(k-nx/2-1/2)epsx, {k, nx}];
 $\alpha x = \pi/\text{Sqrt}[2 \text{ nx}] \text{ Exp}[I 2 \pi/\text{nx} ((\text{nx}-1)/2)^2]$ ;
Sx=Table[Exp[-I  $\pi$  (nx-1)/nx j], {j, 0, nx-1}];
```

<sup>1</sup>Ver el apéndice A para más información sobre filtrado

```

sonidotrans=Table[0,{i,nx}];
fsx=Sx*snd;
sonidotrans= $\alpha$ x*Sx*Fourier[fsx,FourierParameters→{1,1}];
(*Ahora graficamos las partes transformadas con el fin de
planear mejor el filtro que se aplicará*)
funcionr=Table[{x[[j]],Re[sonidotrans[[j]]]}, {j,Length[x]}];
funcioni=Table[{x[[j]],Im[sonidotrans[[j]]]}, {j,Length[x]}];
ListLinePlot[funcionr,PlotRange→All]
ListLinePlot[funcioni,PlotRange→All]

```

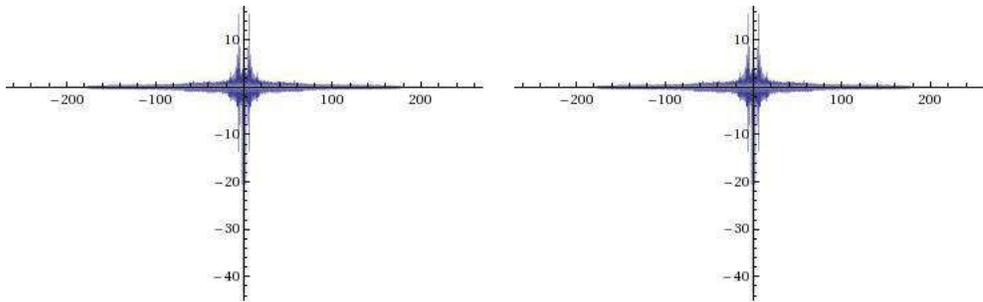


Figura 5.1: Parte real de la señal transformada (izquierda) y parte imaginaria de la señal transformada (derecha).

```

(*Ahora filtramos la señal utilizando un simple filtro pasa altas*)
Filtros=Table[{x[[j]],Re[sonidotrans[[j]]]}, {j,Length[x]}];
Filtroi=Table[{x[[j]],Im[sonidotrans[[j]]]}, {j,Length[x]}];
For[i=1,i≤Length[x],i++,If[Abs[Filtros[[i,2]]]<.7,Filtros[[i,2]]=0,0]];
For[i=1,i≤Length[x],i++,If[Abs[Filtroi[[i,2]]]<.7,Filtroi[[i,2]]=0,0]];

```

(\*Graficamos la señal para ver como quedó después del filtrado y la comparamos con la señal sin filtrar\*)

```
ListLinePlot[Filtror]
ListLinePlot[funcionr,PlotRange→All]
```

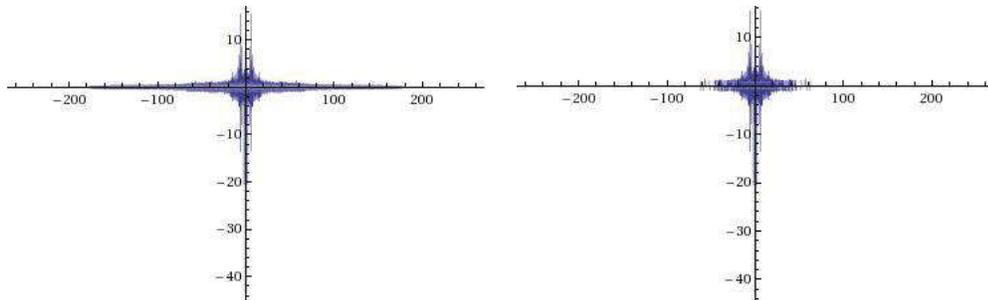
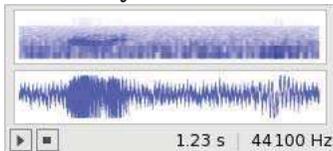


Figura 5.2: Señal sin filtrar (izquierda) y señal filtrada (derecha).

```
sfiltransr=Table[0,{j,Length[x]}];
For[i=1,i≤Length[x],i++,sfiltransr[[i]]=Filtror[[i,2]];
sfiltransi=Table[0,{j,Length[x]}];
For[i=1,i≤Length[x],i++,sfiltransi[[i]]=Filtroir[[i,2]];
sfiltrans=sfiltransr+I sfiltransi;
(*Ahora aplicamos la transformada inversa*)
invSx=Table[Exp[I π (nx-1)/nx j,{j,0,nx-1}];
invαx=1/(αx)
invfsx=invSx*sfiltrans;
sndfilin=Table[0,{i,Length[snd]}];
sndfilin=invαx*invSx*InverseFourier[invfsx,FourierParameters→{1,1}];
sndfilfinr=Re[sndfilin];
sndfilfini=Im[sndfilin];
(*Y finalmente reproducimos el sonido procesado*)
ListPlay[sndfilfinr,SampleRate→44100]
```



Un ejemplo del archivo de audio que se trató con el método descrito puede encontrarse en

<http://www.freesound.org/samplesViewSingle.php?id=93762>  
y el archivo filtrado puede descargarse de la siguiente dirección  
<http://www.freesound.org/samplesViewSingle.php?id=93763>

Ahora trataremos la misma señal utilizando la transformada de Fourier usual con el siguiente código.

```
SetDirectory[‘/home/Jared/Noveno/Tesis/Sonidos’];
sonid = Import[‘holaoriginal.wav’]
snd = sonid[[1, 1]][[1]];
sonidotrans = Fourier[snd];
Filtror = Re[sonidotrans];
Filtroi = Im[sonidotrans];
For[i = 1, i ≤ Length[sonidotrans], i++, If[Abs[Filtror[[i]]] <.3,
Filtror[[i]] = 0, 0]];
For[i = 1, i ≤ Length[sonidotrans], i++, If[Abs[Filtroi[[i]]] <.3,
Filtroi[[i]] = 0, 0]];
sfiltrans = Filtror + I Filtroi;
sndfilfin = InverseFourier[sfiltrans];
sndfilfinr = Re[sndfilfin];
sndfilfini = Im[sndfilfin];
Export[‘holaTnormal.wav’, ListPlay[sndfilfinr, SampleRate → 44100]]
```

Comparamos las gráficas de las señales transformadas mediante el algoritmo rápido y mediante la transformada de Fourier usual en la siguiente figura.

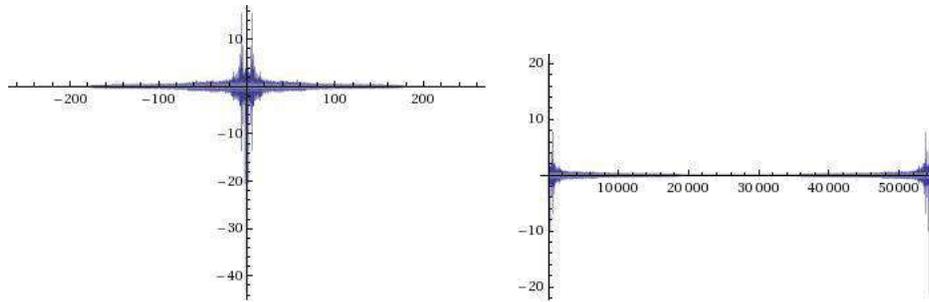


Figura 5.3: Comparación del algoritmo rápido para la TCL con los parámetros para la transformada de Fourier (izquierda) y de la transformada de Fourier usual (derecha).

Notemos que en la figura 5.3 ambas gráficas son el resultado directo de los algoritmos, no se les realizó ninguna especie de tratamiento ni modificación, y ambas corresponden a la transformada de Fourier de la misma señal. En la figura de la izquierda vemos lo que produce el algoritmo rápido para la TCL desarrollado en este trabajo, que corresponde a la aproximación de la transformada de la señal original y no requiere mayor tratamiento, mientras que en la gráfica de la derecha se puede apreciar el resultado directo de la transformada de Fourier utilizando un algoritmo convencional, a la cual usualmente se le tienen que realizar modificaciones para tratarla.

## 5.2. Una aplicación en 2 Dimensiones

El algoritmo para obtener la Transformación Canónica Lineal puede llevarse fácilmente a dos dimensiones mediante productos de Kronecker y al darle los parámetros para reducir la Transformación Canónica Lineal a la Transformada de Fourier, podemos encontrar la imagen en el *plano de frecuencias* de un objeto bidimensional, que es la transformada de Fourier del objeto. Este procedimiento se utiliza en la industria con fines de control de calidad en productos semitransparentes, por ejemplo, productos de vidrio. Dentro de la Óptica se tienen varios tipos de objetos, como los *objetos de fase* y los *objetos de amplitud*, y trabajaremos con los objetos de amplitud en un arreglo de Laboratorio que produce la transformada de Fourier de objetos bidimensionales.



Figura 5.4: Imagen del arreglo utilizado para transformar los objetos en el Laboratorio de Holografía.

En la figura 5.5, se muestra el primer objeto que se transformó, que está grabado en un segmento de negativo de película fotográfica.

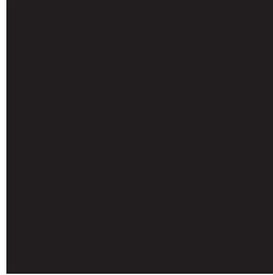


Figura 5.5: Imagen de un segmento de una señal cuadrada.

En la figura 5.6 se muestra la imagen 5.5 llevada al plano de frecuencias mediante la transformada de Fourier, utilizando 2 maneras distintas.



Figura 5.6: Imagen de los planos de frecuencias obtenidos mediante el arreglo de laboratorio (izquierda) y mediante el algoritmo rápido para la TCL (derecha).

Ahora, en la figura 5.7 veamos el segundo objeto que transformamos.



Figura 5.7: Rejilla grabada en película fotográfica

En la parte izquierda de la figura 5.8 se muestra el objeto 5.7 transformado utilizando el arreglo de laboratorio que se puede apreciar en la figura 5.4.

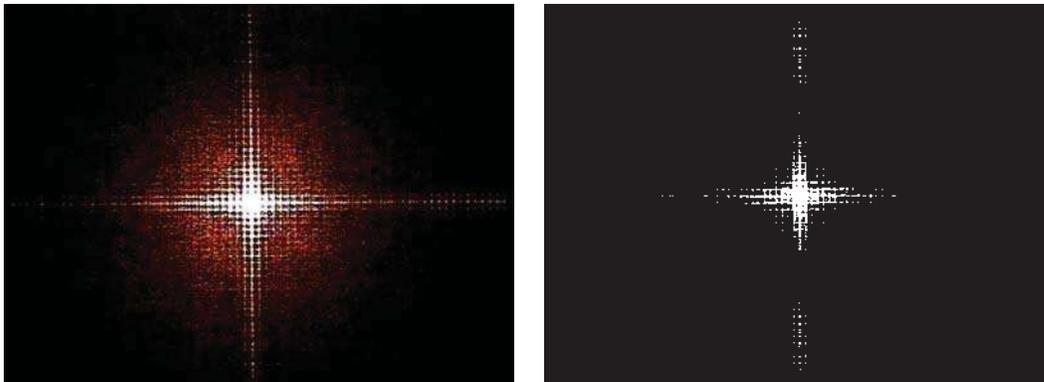


Figura 5.8: Imágenes de las transformadas de Fourier de la figura 5.7 obtenida mediante un arreglo en el laboratorio (izquierda) y mediante el algoritmo rápido para la TCL (derecha).

Ahora veamos el tercer y último objeto que se transformó utilizando el arreglo de laboratorio y al algoritmo rápido para la TCL. En la figura 5.9 se muestra el último objeto que se transformó.



Figura 5.9: Tercer objeto a transformar, grabado en una película fotográfica.

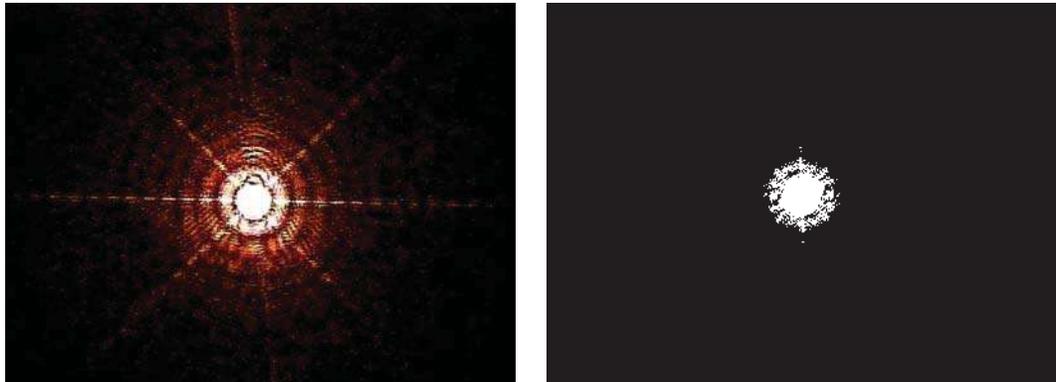


Figura 5.10: Imagen 5.9 transformada mediante el algoritmo rápido para la TCL. Imagen obtenida en el laboratorio de Holografía (izquierda) e imagen obtenida mediante el algoritmo (derecha).

### 5.3. Tonos de marcación telefónicos.

La transformada de Fourier está presente en un gran número de situaciones cotidianas, una de ellas es en los aparatos telefónicos que emplean tonos de marcación, los “tonos duales multifrecuencia” (DTMF). Ahí la transformada de Fourier se utiliza para identificar los números que se están pulsando. Para comprender la manera de lograrlo, debemos ver que los tonos de marcación están dados por un par de frecuencias superpuestas, siendo las frecuencias básicas

$$\begin{aligned} f_r &= (697, 770, 852, 941) \\ f_c &= (1209, 1336, 1477). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Están escritas como vectores debido a que el teclado de marcación actúa como una matriz de  $4 \times 3$  asociando cada frecuencia con un renglón y una columna de la matriz.

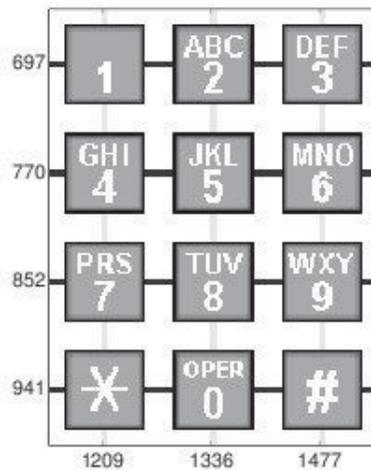


Figura 5.11: Teclado telefónico.

Por ejemplo, si la tecla con el número 5 fuera presionada, escucharíamos las frecuencias 770 y 1336.

La manera de conocer los números que se presionan es sacando la transformada de Fourier de la señal y verificando a qué frecuencia corresponden los máximos principales para finalmente comparar a qué números corresponden las combinaciones de las frecuencias detectadas. El proceso más detallado se puede encontrar en [38].

Tomamos los datos del paquete *touchtone.mat* que está disponible en la red, de donde se obtiene una señal de muestra y su respectiva frecuencia de muestreo.

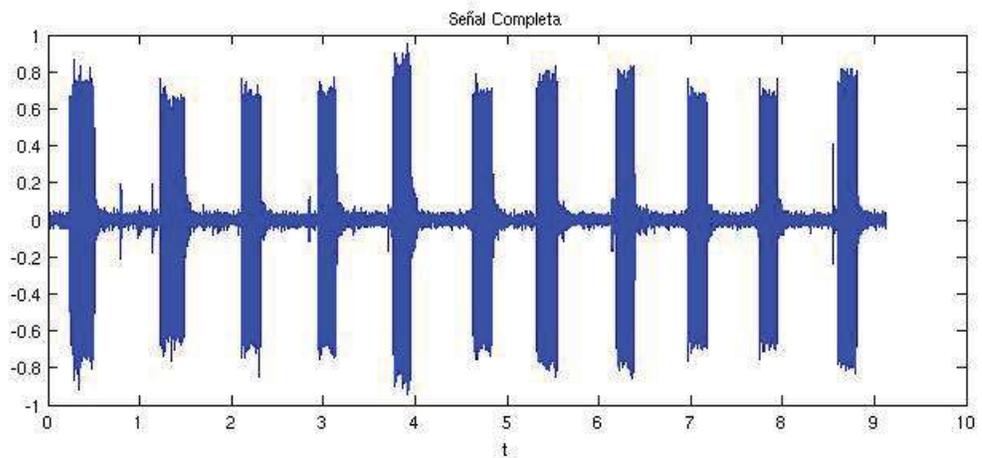


Figura 5.12: Señal completa obtenida del archivo *touchtone.mat*.

Como podemos apreciar de la figura 5.12, la señal corresponde al marcado de 11 dígitos en el teclado telefónico, por lo que se separó la señal en 11 segmentos iguales.

El primer segmento es el siguiente

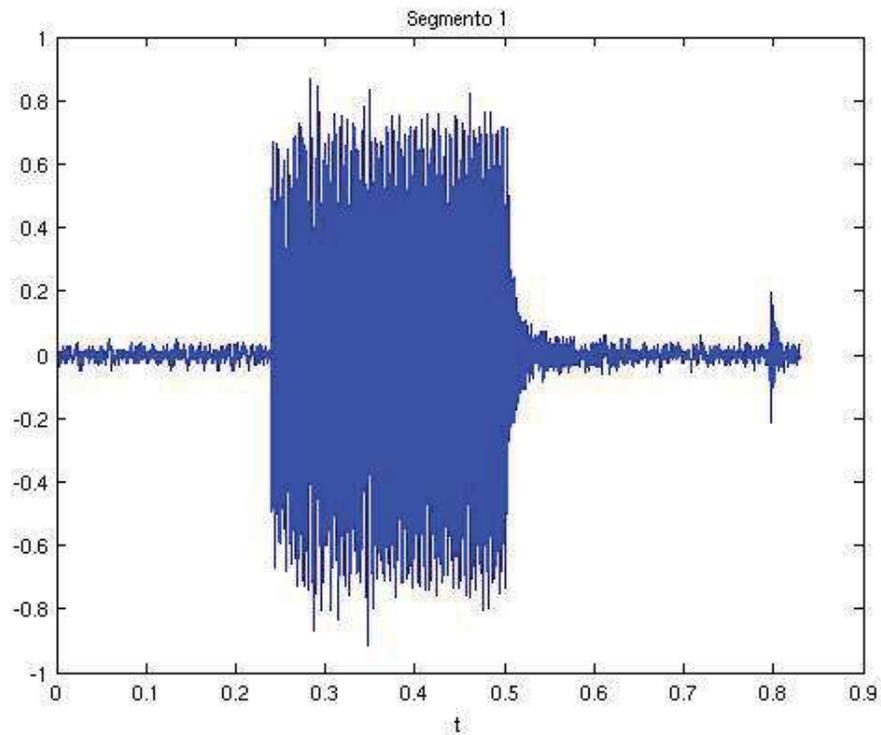


Figura 5.13: Gráfica del primer segmento de la señal.

Utilizamos un código simple para realizar la separación de la señal completa que se muestra en la figura 5.12 y mediante el algoritmo rápido para la TCL obtuvimos la transformada de Fourier de cada segmento. A continuación se muestra la transformada del primer segmento.

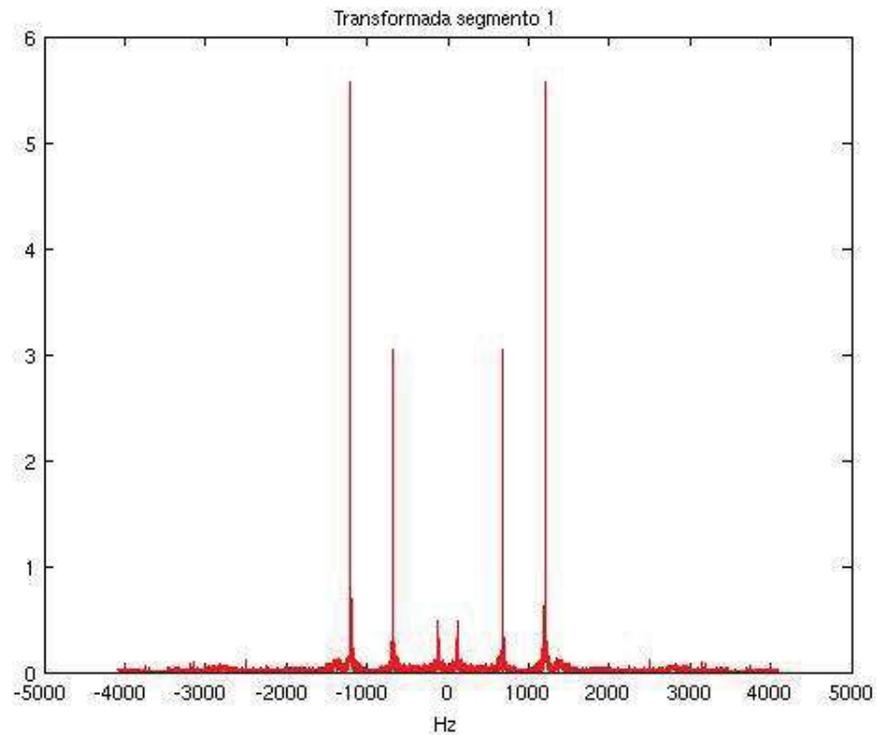


Figura 5.14: Gráfica de la transformada de Fourier del primer segmento de la señal.

Notemos que ésta gráfica es obtenida directamente del algoritmo, no se le realizó modificación alguna. Al emplear otros algoritmos es necesario realizar cambios a los vectores producidos para poder interpretar adecuadamente los datos.

Haciendo un acercamiento a la parte positiva de la gráfica

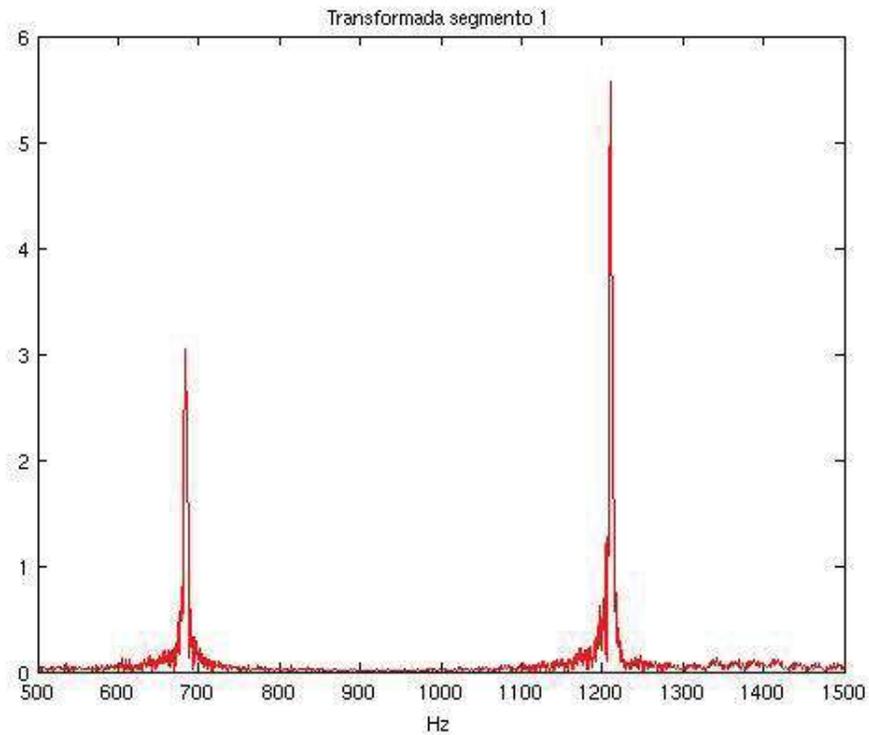


Figura 5.15: Acercamiento de la transformada de Fourier del primer segmento de la señal.

podemos apreciar que los máximos principales ocurren en 697 y 1209, por lo que esta señal corresponde a la tecla con el número 1.

Se aplicó el mismo procedimiento al segundo segmento de la señal.

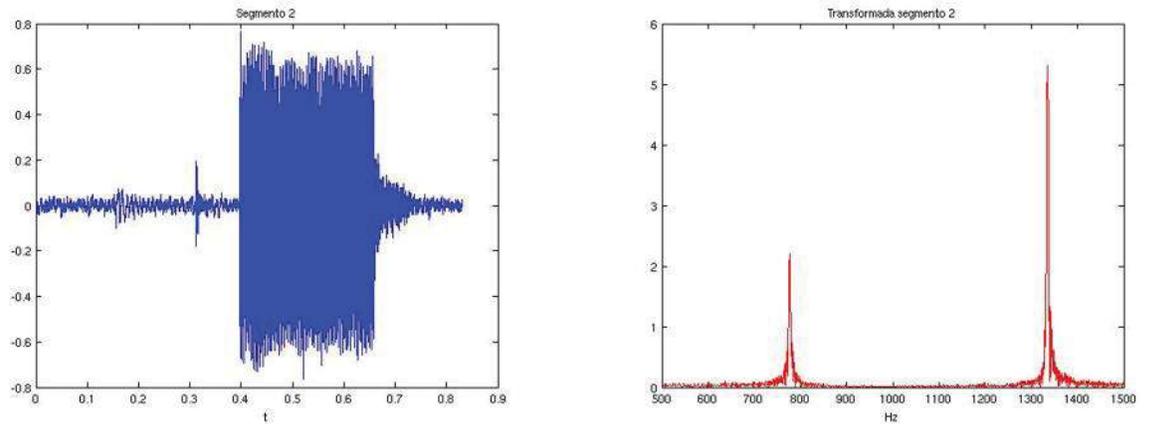


Figura 5.16: Segundo segmento de la señal (izquierda) y acercamiento de la transformada de Fourier del segundo segmento de la señal (derecha).

Como podemos ver en la figura 5.16 (derecha), los máximos principales ocurren en 770 y 1336, por lo que corresponde a la tecla con el número 5. Y siguiendo con el mismo proceso para todos los segmentos de la señal, desciframos que el número que corresponde a esa grabación es 15086477001.

# Capítulo 6

## Conclusión

Se desarrolló un algoritmo rápido para la Transformación Canónica Lineal a partir de una fórmula de cuadratura para la transformada fraccional de Fourier, basada en los polinomios de Hermite. Dentro de la fórmula de cuadratura se puede encontrar en el núcleo una transformada de Fourier discreta, rodeada de transformaciones diagonales, lo cual dió la posibilidad de construir el algoritmo rápido, de modo que le toma  $\mathcal{O}(N \log(N))$  operaciones para completar los cálculos.

Gracias a que la Transformación Canónica Lineal generaliza a un gran número de transformaciones integrales, el algoritmo tiene también un número grande de aplicaciones.

El algoritmo resultó ser aplicable a un mayor número de funciones debido a que los algoritmos rápidos para la transformada de Fourier, como los que calculan la transformada fraccional de Fourier, por su construcción sólo se pueden aplicar a funciones periódicas o cuasiperiódicas y sin singularidades asimétricas, sin embargo, el algoritmo rápido para la Transformación Canónica Lineal que se desarrolló en este trabajo logra transformar funciones no periódicas e incluso con singularidades asimétricas.



# Apéndice A

## Filtrado

Podemos considerar un filtro como cualquier medio a través del cual pasa una señal, sin embargo, no lo consideramos como tal, a menos que modifique dicha señal de algún modo.

La idea principal del filtrado es encontrar una muy buena estimación del valor “real” de un sistema, partiendo de observaciones del sistema contaminadas con ruido.

### A.1. Filtro Digital

Es un sistema que realiza operaciones matemáticas en una muestra discreta de una señal para reducir o aumentar algunos aspectos de dicha señal. Los filtros se pueden ver como una fórmula para pasar de una señal a otra. El filtrado de señales se puede aplicar en el dominio del tiempo o en el de las frecuencias. Muchos filtros digitales se basan en las transformadas rápidas de Fourier, que rápidamente extraen el espectro de frecuencias de una señal para que pueda ser manipulado antes de regresarlo a su forma dependiente del tiempo.

## A.2. Algunos tipos de Filtros

*Filtro pasa bajas (lowpass filter):*

Este tipo de filtros al aplicarlos a señales, mantiene inalteradas las frecuencias bajas, mientras que rechaza las frecuencias altas. Para este fin, se define una frecuencia de corte  $f_c$ , a partir de la cual las frecuencias son eliminadas de la señal, mientras que las frecuencias por debajo de la frecuencia de corte pasan sin ser alteradas.

Análogamente existe el *filtro pasa altas (highpass filter)*, que mantiene inalteradas las frecuencias altas mientras rechaza las frecuencias bajas.

*Filtro pasa-bandas (bandpass filter):*

Este tipo de filtros permite el paso a ciertas regiones de la señal, mientras que al resto de las regiones las elimina, y análogamente se define el filtro “*bandstop*” que tiene la función de sólo detener ciertas regiones de la señal.

# Bibliografía

- [1] M. Moshinsky “*Canonical Transformations and Quantum Mechanics*”, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 5, No. 2 Sep. 1973.
- [2] H. M. Smith, “*Principles of Holography*”, John Wiley and Sons.
- [3] A. M. Lyalikov, “*Universal interferometric device for the quality control of optical elements*”, Pis'ma v Zhurnal Tekhnicheskoi Fiziki, 2009, Vol. 35, No. 4, pp. 66-71.
- [4] I. Kassamakov, J. P. Aaltonen, E. Haeggstorm, M. Osterberg, “*Scanning white light interferometry for quality control of transparent polymer films*”, Proc. SPIE, Vol. 5578, 509 (2004); doi:10.1117/12.567057.
- [5] R. N. Bracewell, “*The Fourier Transform and its Applications*”, McGraw-Hill.
- [6] A. Anderson, “*Canonical Transformations in Quantum Mechanics*”, arXiv:hep-th/9305054, 1993.
- [7] W. Yourgrau, S. Mandelstam, “*Variational principles in dynamics and quantum theory*” Pág. 34, Dover Publications, New York, 1968.
- [8] W. Hauser, “*Introduction to the Principles of Mechanics*”, Addison - Wesley, Reading, Massachusetts.
- [9] H. Goldstein, “*Classical Mechanics*”, Addison - Wesley.
- [10] M. Born, W. Heisenberg und P. Jordan, *Zur Quantenmechanik II*, Zeitschrift für Physik 35, S. 557 (1926).
- [11] A. Anderson, “*Canonical Transformations in Quantum Mechanics*”, arXiv:hep-th/930505.

- [12] K. B. Wolf, "*Integral Transforms in Science and Engineering*", Plenum Press, New York, 1979.
- [13] E. Merzbacher "*Quantum Mechanics, second edition*", University of North Carolina, John Wiley and Sons, 1961, pp. 343-347.
- [14] W. Hauser "*Introduction to the Principles of Mechanics*" Northeastern University, Addison - Wesley.
- [15] J. B. Marion "*Classical Dynamics of particles and systems*", University of Maryland, Academic Press.
- [16] H. Goldstein, "*Classical Mechanics*" Harvard University, Addison - Wesley.
- [17] W. Yourgrau and S. Mandeltam, "*Variational principles in dynamics and quantum theory*", New York, Dover Publications.
- [18] M. Moshinsky and C. Quesne, "*Linear Canonical Transformations and their unitary representations*" J. Math. Phys., vol 12 pp. 1772-1783, 1971.
- [19] K. B. Wolf, "*Integral Transforms in Science and Engineering*", Ch. 9-10 New York: Plenum Press, 1979.
- [20] J. J. Healy, J. T. Sheridan, "*Sampling and discretization of linear canonical transform*", Signal Processing, vol. 89, pp. 641-648, 2009.
- [21] A. Koç, H. M. Ozaktas, C. Canadian, M. A. Kutay, "*Digital computation of linear canonical transforms*" IEEE Trans. Sig. Processing vol. 56 pp. 2383-2394, 2008.
- [22] K. K. Sharma S. D. Joshi, "*Uncertainty Principle for Real Signals in the Linear Canonical Transform Domains*", IEEE Trans. Sig. Proc., vol.56, pp. 2677-2683, 2008.
- [23] A. Stern, "*Sampling of Linear Canonical Transformed Signals*", Signal Processing, vol. 86 pp. 1421-1425, 2006.
- [24] B. M. Hennelly, J. T. Sheridan, "*Fast numerical algorithm for the linear canonical transform*" J. Opt. Soc. Am. vol A22, pp 928-937, 2005.

- [25] B. M. Hennelly, J. T. Sheridan, “*Generalizing, optimizing and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and Linear Canonical Transforms*”, J. Opt. Soc. Am., vol A22, pp. 917-927, 2005.
- [26] B. Z. Li, R. Tao, Y. Wang, “*New sampling formulae related to linear canonical transform*” Signal Processing, vol. 87, pp. 983-990, 2007.
- [27] S. C. Pei, J. J. Ding, “*Eigenfunctions of linear canonical transform*” IEEE Trans. Sig. Proc., vol. 50, pp 11-26, 2002.
- [28] R. G. Campos, J. Rico-Melgoza, E. Chávez, “*RFT: A fast discrete fractional Fourier transform*” unpublished.
- [29] R. G. Campos and L. Z. Juárez, “*A discretization of the Continuous Fourier Transform*”, Il Nuovo Cimento, vol 107B pp 703-711, 1992.
- [30] R. G. Campos, “*A Quadrature Formula for the Hankel Transform*”, Numerical Algorithms, vol 9, pp 343-354, 1995.
- [31] R. G. Campos, F. Domínguez Mota and E. Coronado, “*Quadrature formulas for integral transforms generated by orthogonal polynomials*”, arXiv.0805.2111v1 [math.NA].
- [32] G. Szego, “*Orthogonal Polynomials*”. Providence, Rhode Island: Colloquium Publications, American Mathematical Society, 1975.
- [33] A. Erdélyi, “*Higher Transcendental Functions*”, Vols I and II. New York: McGraw Hill, 1953.
- [34] V. Namias “*The fractional order Fourier transform and its Application to Quantum Mechanics*”, J. Inst. Maths. Applics. vol. 25, pp. 241-265, 1980.
- [35] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, “*Table of Integrals, Series and Products, Fifth edition*” New York: Academic Press, 1994, p.520.
- [36] R. G. Campos, J. Rico - Melgoza, E. Chávez, “*XFT: Extending the Digital Application of the Fourier Transform*, arXiv:0911.0952.
- [37] G. B. Arfken, H. J. Weber, “*Mathematical Methods for Physicists*”, Academic Press.
- [38] C. Moler, “*Numerical Computing with Matlab*”.