

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

*Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales elípticas en
regiones planas irregulares usando diferencias finitas*

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO

MATEMÁTICAS PRESENTA

SANZON MENDOZA ARMENTA

ASESORES:

DR. JOSÉ GERARDO TINOCO RUIZ

DR. FRANCISCO JAVIER DOMÍNGUEZ MOTA

MORELIA MICHOACÁN, SEPTIEMBRE 2010

Dedicatoria

*Con todo cariño a Pablo mendoza Ramirez y
Amalia Armenta Marcos.*

Agradecimientos

Gracias en especial al Dr. Francisco Javier Domínguez Mota y al Dr. José Gerardo Tinoco Ruiz por la asesoría para la realización de esta tesis. También, por dejarme ser parte de su equipo de trabajo y convivir de muchos momentos inolvidables.

Gracias al Dr. Mario César Suárez Arriaga por todos los consejos y las observaciones que hicieron posible mejor este trabajo de tesis.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y la Tecnología (CONACyT) por el apoyo para la realización de esta tesis.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Agradezco profundamente a mis padres Pablo Mendoza Ramirez y Amalia Armenta Marcos por el apoyo que siempre me dieron

A mi hermana Sarai por todo el apoyo y sus siempre acertados consejos.

Muy en especial a Tere por todo su apoyo y cariño.

A mis amigos Eder, Oscar, Cesar, Susana,

Agradezco infinitamente a todos los profesores que contribuyeron en mi formación académica.

En fin, este trabajo de tesis no hubiese sido posible sin la ayuda de todas aquellas

personas con las que conviví.

Prefacio

Muchos fenómenos físicos en ingeniería y ciencias se pueden describir en términos de ecuaciones diferenciales, de las cuales son muy pocas que sean útiles y que puedan resolverse en forma cerrada; de ahí surge la necesidad de aproximar sus soluciones por métodos numéricos que sean fáciles de implementar y entender. En este trabajo emplearemos esquemas en diferencias finitas debido a su sencillez. Estas pueden obtenerse como una aplicación natural del teorema de Taylor.

Es importante mencionar que el estudio de cómo aproximar la solución de una ecuación en derivadas parciales no es algo nuevo, se cuenta con una vasta literatura que nos muestra las diversas formas que hay para aproximar la solución de cierta ecuación. Dependiendo del tipo de ecuación, parabólica, elíptica o hiperbólica, se seleccionan los esquemas para aproximar su solución, ya sea empleando un método específico de forma directa o alguna combinación de ellos.

No obstante, aún hay demasiado que decir y estudiar al respecto, pues es frecuente asumir que el dominio es de una geometría muy sencilla: regiones de forma cilíndrica, esféricas, ect., o variaciones elementales de éstas, y se excluye la posibilidad de estudiar el comportamiento de las soluciones de las ecuaciones clásicas en regiones más irregulares, por ejemplo, la superficie de un lago o el continuo de una montaña.

Sin embargo, es claro que los dominios irregulares aparecen en la naturaleza, por lo que es necesario desarrollar esquemas en diferencias que sean aplicables a mallas estructuradas con celdas no rectangulares.

En este trabajo discutiremos los aspectos anteriores: los esquemas clásicos en el rectángulo, la generación de mallas en regiones irregulares, y el uso de esquemas en diferencias en tales mallas.

Los contenidos de los capítulos en que se divide esta tesis son los siguientes: en el capítulo uno se exponen las ideas básicas de cómo aproximar la derivada usando diferencias finitas en mallas rectangulares, partiendo del proceso de límite que es usado para definir la derivada en el sentido usual. Se presentan esquemas que aproximan la primera y segunda derivada hasta primer y segundo orden: diferencias hacia adelante, diferencia centrada y diferencia hacia atrás.

También se trata el problema de encontrar la solución numérica de la ecuación

de difusión, y se abordan tres puntos importantes de un esquema en diferencias: *consistencia*, *convergencia* y *estabilidad*. Para concluir con este capítulo revisamos un poco la teoría correspondiente a ecuaciones elípticas y resolvemos numéricamente la ecuación de Poisson.

En el capítulo dos se presentan de forma muy sintética las ideas esenciales para generar mallas estructuradas suaves y convexas, se da el concepto de *mall*a, y se habla de las características que deben reunir las mallas, para aproximar la solución de alguna ecuación diferencial parcial. Se menciona que la clave para obtener buenas mallas es la elección adecuada del *funcional*, por lo tanto en este capítulo les dedicamos una sección. Existen una gran variedad de funcionales por ejemplo: de área, longitud, ortogonalidad y sus combinaciones, por mencionar algunos. Las mallas que utilizamos fueron generadas con el programa UNAMALLA 4.0 para Linux [12].

En el capítulo tres presentamos de manera somera el método de elementos finitos (MEF) para poder comparar los resultados que se obtienen usando este método y el de diferencias finitas.

En el capítulo cuatro describimos un esquema particular en diferencias finitas cuya deducción se basa en el método de operadores de soporte. A partir de las discretizaciones para el gradiente y la divergencia, se obtiene una aproximación para la solución de una ecuación diferencial parcial de tipo elíptico sobre mallas convexas.

En el capítulo cinco presentamos algunos ejemplos y resultados numéricos.

En el capítulo final se hace un recuento de los resultados obtenidos y se proponen varias líneas posibles de trabajo a futuro.

Índice general

Dedicatoria	III
Agradecimientos	v
1. Diferencias finitas	1
1.1. Introducción	1
1.2. Diferencias finitas	1
1.3. Análisis de aproximación	5
1.3.1. Consistencia	8
1.3.2. Convergencia	10
1.3.3. Estabilidad	13
1.4. Ecuaciones elípticas	16
1.4.1. Introducción	16
1.4.2. Resolviendo una problema	16
2. Generación variacional de mallas	19
2.1. Introducción	19
2.2. Generación variacional discreta	19
2.3. Funcionales	22
2.3.1. Mallas optimizadas con los funcionales	22
3. Elementos finitos	25
3.1. Introducción	25
3.2. Elementos finitos en 1D	25
3.3. Implementación de elementos finitos	36
4. Esquemas en diferencias para operadores de tipo elíptico	39
4.1. Introducción	39
4.2. Discretización de una función escalar	40
4.3. Un problema con condiciones de frontera de tipo Dirichlet	51
5. Resultados	55
5.1. Ejemplos numéricos	55
5.2. Resultados	56

6. Conclusiones	73
6.1. Trabajos a futuro	74
Bibliografía	75

Índice de figuras

1.1. Mallado uniforme en el intervalo $[0,1]$	3
1.2. Malla en el domino espacio-tiempo.	4
1.3. Estencil del esquema (1.48).	15
2.1. Malla sobre la región Ω	20
2.2. Celda $CE_{i,j}$ de la malla Ω	20
2.3. Cuatro triángulos orientados	21
2.4. Triángulo.	21
3.1. a) elemento. (b) aproximación lineal	27
3.2. (a) Una barra delgada con condiciones de frontera	28
3.3. Resultados de aproximación con elemento finito.	34
3.4. Elemento triangular.	34
3.5. Diagonal más corta de la celda.	37
4.1. Estenciles para los operadores D_x y D_y	42
4.2. Nodos que involucran el stencil del operador divergencia.	46
4.3. Contorno para el operador divergencia.	47
4.4. Aproximación a la frontera.	50
4.5. Aproximación al nodo $p_{1,1}$	51
4.6. Estencil para el operador divergencia gradiente.	53

Capítulo 1

Diferencias finitas

1.1. Introducción

Existen muchos métodos para aproximar la solución de una ecuación diferencial parcial, los más usados son los de diferencias finitas, elementos finitos, método espectral, volúmenes finitos, elementos de frontera, colocación, etc. Nosotros sólo nos concentraremos en el método de diferencias finitas. Este método consiste en discretizar el dominio dado en donde se quiere aproximar la solución de cierta ecuación diferencial parcial u ordinaria, remplazando las derivadas de las ecuaciones diferenciales por una combinación lineal de los valores de la función en cada uno de los nodos de la malla. Como resultado, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas, usualmente grande, que se resuelve en lugar de las ecuaciones diferenciales; generalmente usando un método iterativo.

1.2. Diferencias finitas

La idea principal de los esquemas en diferencias finitas como ya dijimos es reemplazar las derivadas de las ecuaciones diferenciales por combinaciones lineales de los valores de la función, una manera natural de empezar es retomar el proceso de límite que es usado para definir la derivada de manera usual. Consideremos la función $u(x)$ definida en el intervalo abierto (a, b) , sabemos por definición que la derivada de u en x es,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{(x+h) - x},\end{aligned}\tag{1.1}$$

de la expresión anterior podemos obtener un esquema en diferencias finitas de la siguiente manera: En 1D dividimos el intervalo $[a, b]$ en donde está definida la función $u(x)$ en n subintervalos de igual longitud (en un problema real no es

así pero esto lo describiremos más adelante), por lo tanto tenemos $n+1$ puntos a los que llamaremos nodos, digamos, $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$, como se muestra en la figura (1.1). Cada uno de ellos lo indentificamos como $x_{i+1} = x_i + h$ con $h = (b - a)/n$. Ahora, hagamos este pequeño cambio en la ecuación 2.1 y quitemos el limite, para obtener

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} &\cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{(x_i + h) - x_i} \\ &\equiv \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde $u_{i+1} = u(x_i + h)$ y $u_i = u(x_i)$. De esta forma, hemos obtenido una expresión en diferencias finitas que aproxima el valor de la derivada de u en x_i . Haciendo un procedimiento similar al anterior podemos obtener dos aproximaciones adicionales a du/dx , dada por

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} &\cong \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{x_i - (x_i - h)} \\ &\equiv \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \end{aligned} \quad (1.3)$$

y

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \cong \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}. \quad (1.4)$$

A la expresión (1.2) se le conoce como diferencia hacia adelante, a las expresiones (1.3) y (1.4) se les conoce como diferencia hacia atrás y diferencia centrada, respectivamente. También podemos definir aproximaciones en diferencias finitas de orden superior como d^2u/dx^2 , la cual podemos obtener mediante la aplicación repetida de los esquemas anteriores, o bien, por combinación de ellos, por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} &\cong \frac{\left. \frac{du}{dx} \right|_{i+1/2} - \left. \frac{du}{dx} \right|_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \\ &\equiv \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_i - u_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Notemos que estamos usando los esquemas 1.2 y 1.3 con una aproximación en el punto $x_{i\pm 1/2}$, esto es, el punto medio entre x_i y $x_{i\pm 1}$. La razón de hacer esto es simple: si quisiéramos aproximar con diferencias finitas a d^2u/dx^2 ocuparíamos los valores de u_{i-2}, u_i y u_{i+2} , lo que se hizo fue simular con los puntos medios, que tenemos una malla con el doble de puntos aprovechando que sabemos de antemano que los valores $u_{i\pm 1/2}$ no se van a ocupar. En el caso en que el espaciamiento entre los nodos sea constante, esto es, h , la ecuación 1.5 se ve como

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x_i} \cong \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}. \quad (1.6)$$

Más adelante veremos con más detalle como este esquema en diferencias finitas aproxima el valor de la segunda derivada.

Aprovechando los esquemas en diferencias que ya se tienen veremos un ejemplo donde los podemos aplicar a una ecuación diferencial parcial como la que sigue. Consideremos la siguiente ecuación

$$v_t(x, t) = \nu v_{xx}(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.7)$$

$$v(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.8)$$

$$v(0, t) = a(t), \quad v(1, t) = b(t), \quad t \geq 0. \quad (1.9)$$

Esta es la ecuación de difusión o de calor, con una variable en el espacio y una en el tiempo. A ν se le conoce como la constante de difusividad (aunque también puede ser variable). Nuestro objetivo es escribir un esquema en diferencias asociado a dicha ecuación y resolver el sistema de ecuaciones algebraico que resulte, para ver la solución analítica podemos consultar [3].

Para nuestro caso particular, consideraremos la condición inicial como $v(x, 0) = f(x)$, donde $f(x)$ es una función dada, y condiciones de frontera $f(0) = a(0)$ y $f(1) = b(0)$. Antes de empezar, introduzcamos algo de notación: como ya mencionamos, u (la función que aproxima a v) depende de dos variables x y t por lo tanto denotamos como u_k^n la función definida en el punto $(k\Delta x, n\Delta t)$ o simplemente nos referimos como (k, n) con $k = 0, 1, 2, \dots, M$ y $n = 0, 1, 2, \dots, N$. Al conjunto de nodos que aproximan la región es una *mall*.

Comencemos discretizando el dominio en el espacio haciendo un mallado sobre el dominio. Por conveniencia vamos a usar un mallado uniforme, con espacio entre cada nodo de $\Delta x = 1/M$, como se muestra en la Figura 1.1. De la misma

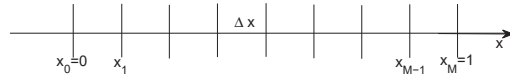


Figura 1.1: Mallado uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

manera, discretizaremos el tiempo con un mallado uniforme Δt . De lo anterior, tenemos un mallado que va a aproximar el domino espacio-tiempo como se muestra en la figura 1.2. El siguiente paso es aproximar la solución de la ecuación (1.7) usando esta malla. Empecemos por aproximar la primera derivada v_t con respecto al tiempo de (1.7) usando (1.2) en el punto $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ como sigue

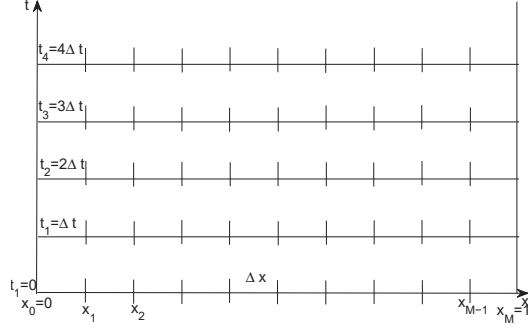


Figura 1.2: Malla en el domino espacio-tiempo.

$$v_t \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}. \quad (1.10)$$

Similarmente, pero ahora usando (1.5) para aproximar v_{xx} en $(k\Delta x, n\Delta t)$ tenemos,

$$v_{xx} \approx \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (1.11)$$

Las expresiones (1.10) y (1.11) las podemos usar para aproximar la ecuación diferencial parcial (1.7) en el punto $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ como,

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (1.12)$$

Despejando u_k^{n+1} de la ecuación anterior tenemos

$$u_k^{n+1} = u_k^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n). \quad (1.13)$$

Para este caso en particular, trataremos las condiciones iniciales y de frontera mediante una aproximación razonable dada por

$$u_k^0 = f(k\Delta x), \quad k = 0, \dots, M \quad (1.14)$$

$$u_0^{n+1} = a((n+1)\Delta t), \quad n = 0, \dots, N \quad (1.15)$$

y

$$u_M^{n+1} = b((n+1)\Delta t), \quad n = 0, \dots, N. \quad (1.16)$$

En resumen, nuestro objetivo es obtener una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial (1.7), resolviendo el problema discreto (1.13-1.16). Que tan buena sea nuestra aproximación eso dependerá de la elección de Δx y Δt ; la experiencia muestra que debemos ser cuidadosos a la hora de elegir Δx y Δt ya que estos serán quienes determinen el comportamiento de la aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial. Más adelante, veremos con más detalle que tanto influye la elección de Δx y Δt en la aproximación de la solución. Como resultado de todo el proceso anterior tenemos un esquema numérico que aproxima la solución del problema con valores iniciales y a la frontera (1.7). Observemos que este esquema es *explícito* en el sentido de que para obtener la aproximación a la solución en un nivel de tiempo sólo es necesario conocer los valores en el nivel temporal anterior. A continuación veremos como obtener este y otros esquemas usando la expansión en serie de Taylor.

1.3. Análisis de aproximación

En la literatura es posible observar que el sistema en diferencias finitas (1.13) nos proporciona buenos resultados para la aproximación a la solución del problema (1.7). Sin embargo, es importante saber qué tan buena es la aproximación del esquema a la ecuación diferencial parcial (1.7). Los esquemas en diferencias finitas anteriores se pueden obtener de una forma más rigurosa usando como herramienta la expansión en serie de **Taylor** para expandir a $u(x)$, por consiguiente, mencionemos enseguida el teorema de Taylor en una dimensión.

Teorema 1 *Taylor*

Sea $u(x)$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ la cual tiene derivadas continuas hasta orden N sobre (a, b) ; dado un punto x^* en (a, b) , entonces para cualquier otro punto x en (a, b) ,

$$u(x) = u(x^*) + \frac{du}{dx} \Big|_{x^*} (x - x^*) + \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x^*} \frac{(x - x^*)^2}{2!} + \dots \\ + \frac{d^{N-1}u}{dx^{N-1}} \Big|_{x^*} \frac{(x - x^*)^{N-1}}{(N-1)!} + R^N$$

donde

$$R^N \equiv \frac{d^N u}{dx^N} \Big|_{\xi} \frac{(x - x^*)^N}{N!}, \quad \xi \in (x, x^*) \quad (1.17)$$

es el residuo [11].

Asumiendo que $u(x)$ satisface las hipótesis del teorema, usemos la expansión en serie de Taylor alrededor de los puntos x_{i-1} y x_{i+1} en el intervalo $[a, b]$ empleando la notación de la sección anterior:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &\equiv u(x_{i+1}) \\ &= u(x_i) + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \dots \\ &\quad + R_{i+1}^N \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned} u_{i-1} &\equiv u(x_{i-1}) \\ &= u(x_i) - \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})}{1!} + \frac{d^2u}{dx^2} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2!} - \dots \\ &\quad + R_{i-1}^N. \end{aligned} \tag{1.19}$$

En las expresiones anteriores R_{i+1}^N y R_{i-1}^N son los residuos de los que se habla en el teorema de Taylor. De (1.18) y (1.19) podemos obtener los esquemas (1.2) y (1.3). Sólo hay que restar u_i de ambos lados y despejar du/dx :

$$\begin{aligned} u_{i+1} - u_i &= u(x_i) - u_i + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + O(\Delta x^2), \\ u_{i+1} - u_i &= \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{x_{i+1} - x_i}{1!} + O(\Delta x^2), \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} &= \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} + O(\Delta x). \end{aligned} \tag{1.20}$$

Haciendo un proceso similar al anterior, pero ahora a partir de (1.19), podemos obtener la ecuación (1.3).

Para el caso del esquema en diferencias finitas centradas (1.4), a (1.18) le restamos (1.19) y despejamos du/dx

$$\begin{aligned} u_{i+1} - u_{i-1} &= \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{1!} + \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} \frac{(x_i - x_{i-1})}{1!} + O(\Delta x^2) \\ u_{i+1} - u_{i-1} &= \frac{du}{dx} \Big|_{x_i} 2 \frac{(x_{i+1} - x_{i-1})}{1!} + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2(x_{i+1} - x_{i-1})} + O(\Delta x^2) \quad (1.21)$$

Para el caso cuando el espaciamento entre un nodo y el siguiente sea constante, las ecuaciones anteriores (sin el término O) se reducen a:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad (1.22)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (1.23)$$

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad (1.24)$$

Veamos ahora como se obtiene una diferencia de segundo orden d^2u/dx^2 usando las expansiones en serie de Taylor alrededor de los puntos x_{i+1} y x_{i-1} , para esto hacemos lo siguiente, expandimos las series (1.18) y (1.19) hasta un orden tres y el cuarto orden lo agrupamos como $O(h^4)$, sumamos estas dos expresiones y despejamos d^2u/dx^2 ,

$$u_{i+1} + u_{i-1} = 2u(x_i) + 2 \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + O(\Delta x^4)$$

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} (x_{i+1} - x_i)^2 = u_{i+1} - 2u(x_i) + u_{i-1} + O(\Delta x^4).$$

Con espaciamento constante tenemos $h = \Delta x$,

$$\left. \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{u_{i+1} - 2u(x_i) + u_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Vemos que hemos obtenido una aproximación a d^2u/dx^2 usando la expansión en serie de Taylor. Hasta esta parte tenemos esquemas en diferencias finitas que se aproximan a la solución de cierta ecuación diferencial, usando una expansión en serie de Taylor en donde al hacer la aproximación a la derivada obtenemos un cierto orden. A continuación analizaremos, con más detalle estos esquemas en diferencias, y veremos brevemente los conceptos consistencia, convergencia y estabilidad.

1.3.1. Consistencia

Recordemos que el esquema en diferencias que para aproximar v_t es,

$$u_t(n\Delta t, k\Delta x) \approx \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t}. \quad (1.25)$$

Vimos que usando la expansión en serie de Taylor alrededor de los puntos x_{i-1} y x_{i+1} , llegamos a esquemas en diferencias que aproximan du/dx . Ahora hagamos algo similar, pero en esta ocasión, alrededor de $(n\Delta t, k\Delta x)$

$$\begin{aligned} u_k^{n+1} &= v((n+1)\Delta t, k\Delta x) = v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{\partial v}{\partial t}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta t}{1!} \\ &\quad + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \end{aligned} \quad (1.26)$$

Notemos que sólo escribimos los tres primeros términos. Pasamos $v(n\Delta t, k\Delta x)$ del lado izquierdo de la ecuación y multiplicamos por $1/\Delta t$ ambos lados para obtener,

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t}(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_k + \dots \quad (1.27)$$

La expresión anterior la reescribimos de una manera general en terminos de la notación “ O grande ” como

$$\frac{\partial v}{\partial t}(n\Delta t, k\Delta x) = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (1.28)$$

si v es suficientemente suave en un rectángulo. Cabe mencionar que la constante A , asociada con la notación “ O grande” puede efectivamente ser muy grande. De hecho, cuando se resuelven problemas en donde la solución tenga cambios bruscos respecto al tiempo, esta constante será muy grande; más adelante veremos como influye Δt en el esquema en diferencias.

Se puede hacer algo similar a lo anterior para ver que el esquema (1.20) y el esquema en diferencias hacia atrás son de orden $O(\Delta x)$, pero nótese que la diferencia centrada (1.21) que aproxima la primera derivada con respecto a x es de orden $O(\Delta x^2)$. Ahora, veamos qué orden tiene el esquema en diferencias (1.11). Usando la expansión en serie de Taylor como en (1.26) tenemos,

$$\begin{aligned} u_{k+1}^n &= v(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{\partial v}{\partial x}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta x^2}{1!} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta x^2}{2!} + \\ &\quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta x^2}{3!} + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{k-1}^n &= v(n\Delta t, k\Delta x) - \frac{\partial v}{\partial x}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta x^2}{1!} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta x^2}{2!} - \\ &\quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(n\Delta t, k\Delta x) \frac{\Delta x^2}{3!} + O(\Delta x^2). \end{aligned}$$

Sumando las dos expansiones en serie de Taylor anteriores y haciendo algo de álgebra finalmente nos queda el esquema que aproxima v_{xx}

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (1.29)$$

Entonces el problema (1.7) lo reescribimos como sigue

$$\begin{aligned} v_t(n\Delta t, k\Delta x) - \nu v_{xx}(n\Delta t, k\Delta x) &= \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}(v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) + \\ &O(\Delta t) + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Otra manera de ver la ecuación (1.30) es suponiendo que $v = v(x, t)$ sea una solución de la ecuación diferencial parcial (entonces el lado derecho de (1.30) es cero); como resultado, se tiene que v satisface el esquema en diferencias con primer orden en Δt y segundo orden en Δx . De cualquier manera, vemos que la ecuación (1.30) muestra qué tan bueno es el esquema en diferencias para aproximar la ecuación diferencial parcial. Hay que resaltar que esto de ninguna manera nos dice como la solución del esquema en diferencias se aproxima a la solución de la ecuación diferencial parcial.

Para definir consistencia denotemos la ecuación diferencial parcial (1.7) como $Lv = F$ y su correspondiente esquema en diferencias finitas como $L_k^n u_k^n = G_k^n$.

Definición 1 Se dice que el esquema en diferencias finitas $L_k^n u_k^n = G_k^n$ es consistente punto a punto con la ecuación diferencial $Lv = F$ en el punto (x, t) si existe alguna función suave y continua $\phi = \phi(x, t)$ tal que

$$(L\phi - F)|_k^n - [L_k^n \phi(n\Delta t, k\Delta x) - G_k^n] \rightarrow 0 \quad (1.31)$$

cuando $\Delta x, \Delta t$ y $((n+1)\Delta t, k\Delta x) \rightarrow 0$.

Observemos que en la ecuación (1.30) estábamos viendo que el esquema (1.13) era consistente punto a punto con la ecuación diferencial parcial (1.7). Debemos notar que cuando usamos la expresión (1.31) como una condición de consistencia, hemos incluido la aproximación a F como parte de nuestro esquema en diferencias.

Podemos elegir ϕ como la solución v de la ecuación diferencial parcial, entonces la expresión en (1.31) la escribimos

$$L_k^n u_k^n - G_k^n \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta x, \Delta t \rightarrow 0. \quad (1.32)$$

Si escribimos el esquema en diferencias como (asumiendo que estamos trabajando en un esquema en diferencias de dos niveles y una ecuación diferencial parcial de primer orden con respecto al tiempo t)

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{G}^n \quad (1.33)$$

de donde $\mathbf{u}^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T$, $\mathbf{G}^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T$ y Q es un operador que actúa en el espacio apropiado, entonces podemos escribir una definición de consistencia más fuerte:

Definición 2 *El esquema en diferencias (1.33) es consistente con la ecuación diferencial parcial con la norma $\|\cdot\|$, si la solución de la ecuación diferencial parcial, v , satisface*

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{G}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n, \quad (1.34)$$

y

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| \rightarrow 0$$

cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, donde $\mathbf{u}^n$ denota el vector cuya k -ésima componente es $v(n\Delta t, k\Delta x)$.

Notemos que la diferencia entre la consistencia punto a punto y la consistencia con la norma es que la consistencia con la norma obliga a todos los componentes del vector $\boldsymbol{\tau}^n$ a converger a cero de una manera uniforme. Por otro lado si tomamos la definición de consistencia punto a punto (1.32) y se aplica al esquema en diferencias (1.33), tenemos que la consistencia punto a punto es equivalente a que $\tau_k^n \rightarrow 0$ cuando $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$. Por lo tanto, la diferencia entre las dos definiciones es si queremos la convergencia de la componente o el vector $\boldsymbol{\tau}^n$ a cero. Debemos enfatizar que el termino de truncamiento, $\boldsymbol{\tau}^n$, contiene ambos truncamientos realizados a la aproximación de L por L_k^n y la aproximación de F .

En seguida damos una ligera variación de la definición de consistencia donde el orden de $\boldsymbol{\tau}^n$ tiende a cero (que es del mismo orden que el esquema en diferencias finitas que aproxima la ecuación diferencial parcial).

Definición 3 *Decimos que el esquema en diferencias (1.33) tiene precisión orden (p, q) de alguna ecuación diferencial parcial dada si*

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q). \quad (1.35)$$

Nos referimos a $\boldsymbol{\tau}^n$ o a $\|\boldsymbol{\tau}^n\|$ como el **error de truncamiento**.

Si el esquema es de orden (p, q) con $p, q \geq 1$ (en la siguiente sección veremos más a detalle lo que es el orden (p, q)), entonces decimos que el esquema es consistente, esto se traduce en que el error de aproximación a cierta ecuación diferencial puede hacerse razonablemente pequeño. El método consiste en expandir la ecuación diferencial parcial en series de Taylor. El enfoque más fácil es hacer la expansión con la solución de la ecuación diferencial parcial, y después usar el hecho de que la función satisface la ecuación diferencial parcial cuando se convierte en una parte de la expansión.

1.3.2. Convergencia

Los esquemas en diferencias finitas como los que se han estado viendo son muy usados ya que presentan resultados satisfactorios a la hora de aproximar la solución de ciertas ecuaciones en diferencias en dominios sencillos. Esto se debe a que estamos obteniendo la solución al sistema en diferencias que surgió de hacer una aproximación a la solución de la ecuación diferencial. Queremos definir

algún tipo de convergencia de tal manera que nos permita describir buenos resultados de la aproximación de la ecuación en diferencias finitas a la solución de la ecuación diferencial. La convergencia que se necesita no es fácil de conseguir en general, y en ocasiones, el proceso que debe seguir para obtenerla es muy laborioso.

Consideremos la siguiente ecuación diferencial parcial,

$$Lv = F, \quad (1.36)$$

con v y F funciones que están definidas en los reales y condición inicial $v(x, 0) = f(x)$. Supongamos que tenemos una aproximación a la solución (de un esquema en diferencias del cual nos vamos a referir como L_k^n , de la misma forma que en la ecuación (1.13)) para este problema, u_k^n define una malla (con el espacio en la malla de Δx y Δt) y satisface la condición inicial $u_k^0 = f(k\Delta x)$, $k \in [a, b]$. Denotemos a v como la solución exacta a nuestro problema inicial.

Definición 4 *Un esquema en diferencias $L_k^n u_k^n = G_k^n$ que aproxima la ecuación diferencial parcial $Lv = F$ es un esquema que converge punto a punto para algún x y t , mientras $(k\Delta x, (n+1)\Delta t)$ converge a (x, t) , u_k^n converge a $v(x, t)$ cuando Δx y Δt tiende a cero.*

Para ver esto con más detalle retomemos el problema (1.7), y analicemos su esquema en diferencias (1.13), el cual reescribimos como sigue:

$$u_k^{n+1} = (1 - 2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n), \quad (1.37)$$

donde $r = \nu\Delta t/\Delta x^2$.

Definamos z_k^n como

$$z_k^n = u_k^n - v(k\Delta x, n\Delta t). \quad (1.38)$$

Si ahora regresamos a la ecuación diferencial parcial (1.13) y la escribimos como

$$\begin{aligned} v_t(k\Delta x, n\Delta t) - \nu v_{xx}(k\Delta x, n\Delta t) &= \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}(v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) + \\ &O(\Delta t) + O(\Delta x^2), \end{aligned}$$

y ponemos la solución exacta v en el lado izquierdo de la ecuación anterior tendremos,

$$0 = \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2}(v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) + O(\Delta t) + O(\Delta x^2);$$

de la expresión anterior despejamos v_k^{n+1} ,

$$v_k^{n+1} = (1 - 2r)v_k^n + r(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t\Delta x^2),$$

finalmente, restando la ecuación anterior de la ecuación (1.37) obtenemos,

$$z_k^{n+1} = (1 - 2r)z_k^n + r(z_{k+1}^n + z_{k-1}^n) + O(\Delta t^2) + O(\Delta t\Delta x^2). \quad (1.39)$$

Si $0 < r \leq 1/2$, los coeficientes del lado derecho de la ecuación (1.39) son positivos y

$$\begin{aligned} |z_k^{n+1}| &\leq (1-2r)|z_k^n| + r(|z_{k+1}^n| + |z_{k-1}^n|) + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2), \end{aligned}$$

donde A es una constante asociada con el termino “ O grande” y $Z^n = \sup_k \{|z_k^n|\}$. Luego, tomando el $\sup$ sobre k del lado izquierdo de la ecuación anterior tenemos

$$Z^{n+1} \leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2). \quad (1.40)$$

Notemos que el supremo del lado derecho de la ecuación anterior incluye los terminos Δt y Δx . En este caso, estamos asumiendo que de cierto valor de la constante A es como una restricción para la derivada de segundo orden en el tiempo y cuarto orden en el espacio en toda la recta real. Aplicando (1.40) varias veces

$$\begin{aligned} Z^{n+1} &\leq Z^n + A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\leq Z^{n-1} + 2A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2) \\ &\vdots \\ &\leq Z^0 + (n+1)A(\Delta t^2 + \Delta t \Delta x^2). \end{aligned}$$

De ahí que si $Z^0 = 0$, $|u_k^{n+1} - v(k\Delta x, (n+1)\Delta t)| \leq Z^{n+1}$ y $(n+1)\Delta t \rightarrow t$.

$$\begin{aligned} |u_k^{n+1} - v(k\Delta x, (n+1)\Delta t)| &\leq (n+1)\Delta t A(\Delta t + \Delta x^2) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \Delta t, \Delta x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Así que para algún x y t , cuando Δt y Δx se aproximan a cero de tal suerte que $(k\Delta x, (n+1)\Delta t) \rightarrow (x, t)$, u_k^n se aproxima a $v(x, t)$. Hay que señalar que, el término $n+1$ en la expresión (1.41) podría ser un problema para nuestra convergencia (no es bueno tener terminos que tiendan a infinito en una expresión, cuando lo que queremos es que tiendan a cero), por lo que en (1.41) es importante que $(n+1)\Delta t \rightarrow t$.

Observaciones.

- Del desarrollo anterior un punto importante que hay que resaltar es que $0 < r \leq 1/2$. Esta condición que hemos puesto en r pone una condición en el paso de tiempo Δt . De este modo, para tener la convergencia del problema anterior debemos tener en cuenta $\Delta t \leq \Delta x^2/2\nu$.
- Otro punto importante que debemos tener en cuenta es que hemos asumido que la misma constante A , la cual salió de la notacion “ O grande” funciona para todos los k puntos de la malla y en todos los niveles de tiempo, i.e. usamos A como una constante general en lugar de un A_k^n .

Notemos que hemos obtenido un resultado fuerte: Hemos probado $Z^n \rightarrow 0$, con $z_k^n = u_k^n - v(k\Delta x, n\Delta t)$.

Denotemos la norma del supremo ℓ_∞ como

$$\| \{ \alpha_k \} \|_\infty = \sup_{-\infty < k < \infty} | \alpha_k |. \quad (1.42)$$

Sea $\mathbf{u}^n = (..., u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, ...)^\top$ y $\mathbf{v}^n = (..., v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, ...)^\top$, sabemos que para t tal que $(n+1)\Delta t$ se aproxime a t , $\mathbf{u}^{n+1}$ se aproxima a $v(\cdot, t)$ donde nuestro concepto de aproximar es tal que la norma ℓ_∞ de $\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}$ se aproxime a cero cuando Δt y Δx se aproximen a cero.

En general, la convergencia punto a punto es difícil de probar y no suele ser tan útil como un tipo de convergencia uniforme, en vez de ello se utiliza una definición de convergencia en términos de una norma de la diferencia entre la solución de la ecuación diferencial parcial y la solución de la ecuación en diferencias.

Si queremos discutir la convergencia en términos de la rapidez con la que solución de la ecuación de diferencia converge a la solución de la ecuación diferencial parcial. Para ello se define la *convergencia de orden* (p, q) como sigue

Definición 5 *Un esquema en diferencias $L_k^n u_k^n = G_k^n$ se aproxima a la ecuación diferencial parcial $Lu = F$, es un esquema convergente de orden (p, q) si para algún t , mientras $(n+1)\Delta t$ converge a t ,*

$$\| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1} \| = O(\Delta x^p) + O(\Delta t^q) \quad (1.43)$$

mientras Δx y Δt convergen a cero.

Recordemos que cuando usamos la notación O esta envuelve una constante, i.e. en la ecuación (1.43) existe una constante C tal que $\| \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1} \| \leq c(\Delta x^p + \Delta t^q)$. En este caso, la constante c dependerá de t .

Usando la definición 5, estamos en condiciones de discutir el rango de convergencia de $\mathbf{u}^n$ a $\mathbf{v}^n$.

1.3.3. Estabilidad

La última parte esencial de cualquier esquema en diferencias es la estabilidad. Una interpretación intuitiva de la estabilidad, es que si el esquema en diferencias de un problema con condiciones iniciales tiene errores pequeños de entrada, entonces tendremos errores pequeños en la solución del sistema aproximada.

La estabilidad de un esquema en diferencias con dos niveles de tiempo se explica en términos de una ecuación de la forma

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n, \quad n \geq 0, \quad (1.44)$$

Definición 6 *El esquema en diferencias (1.44), se dice que es estable con respecto a la norma $\| \cdot \|$ si existen constantes positivas Δx y Δt , y constantes $0 < \alpha, \beta$ tales que*

$$\| \mathbf{u}^{n+1} \| \leq K e^{\beta t} \| \mathbf{u}^0 \|, \quad (1.45)$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t, 0 < \Delta x \leq x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Notemos que, como en el caso de convergencia y consistencia, la definición de estabilidad está dada en terminos de una norma. También, como en el caso de convergencia y consistencia esta norma puede variar dependiendo del problema. Pero independientemente de la norma, el hecho es que la solución puede crecer con el tiempo, pero no con el número de pasos de tiempo. Finalmente, debemos advertir que existen una gran variedad de definiciones de estabilidad, una definición común es exigir que la condición (1.45) se tiene sólo para $(n+1)\Delta t \leq T$ (donde K y β dependen de T). Otra definición común que se utiliza es aquella que no permite un crecimiento exponencial. La desigualdad (1.45) es remplazada entonces por

$$\| \mathbf{u}^{n+1} \| \leq K \| \mathbf{u}^0 \|, \quad (1.46)$$

con o sin la restricción $(n+1)\Delta t \leq T$. Notemos que de la desigualdad (1.45) podemos obtener la desigualdad (1.46) simplemente haciendo $\beta = 0$.

Ahora veamos que pasa con el esquema en diferencias (1.37); veamos si es estable respecto a la norma del supremo.

$$u_k^{n+1} = (1-2r)u_k^n + r(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n). \quad (1.47)$$

Notemos que si $r \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} |u_k^{n+1}| &\leq (1-2r)|u_k^n| + r|u_{k+1}^n| + r|u_{k-1}^n| \\ &\leq \| \mathbf{u}^n \|_\infty. \end{aligned}$$

Tomando la norma del supremo en ambos lados de la desigualdad con respecto a k , tenemos

$$\| \mathbf{u}^{n+1} \|_\infty \leq \| \mathbf{u}^n \|_\infty.$$

De ahí que la desigualdad (1.46) se satisface con $K = 1$ (o la desigualdad 1.45 se satisface con $K = 1$ y $\beta = 0$).

Notemos que para la estabilidad del esquema (1.37) pedimos que $r \leq 1/2$. En este caso decimos que el esquema es **condicionalmente estable** (donde la condición es $r \leq 1/2$). En el caso en donde no se tenga una restricción que este relacionada con Δt y Δx diremos que el esquema es **estable** o **incondicionalmente estable**.

Podemos hacer que el esquema (1.37) sea incondicionalmente estable aplicando el método de **Crank-Nicolson**.

Crank-Nicolson es un método **implícito** que es incondicionalmente estable. Para obtenerlo, hagamos un promedio ponderado de la discretización de la segunda derivada especial en los tiempos n y $n+1$; es decir:

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \theta \left(\frac{u_{k+1}^n - u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2} \right) + (1-\theta) \left(\frac{u_{k+1}^{n+1} - u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right);$$

donde θ está entre 0 y 1. El caso $\theta = 1/2$ es Crank-Nicolson y al poner $\theta = 1$ se tiene la ecuación (1.37). Pasamos al lado izquierdo de la ecuación los términos u_{k+1}^{n+1} , u_{k-1}^{n+1} y u_k^{n+1} tenemos,

$$-r(1-\theta)u_{k+1}^{n+1} + (1-r(1-\theta))u_k^{n+1} - r(1-\theta)u_{k-1}^{n+1} = \theta r(u_{k+1}^n - u_k^n + u_{k-1}^n) + u_k^n. \quad (1.48)$$

El estencil del esquema anterior se muestra en la figura 1.3.

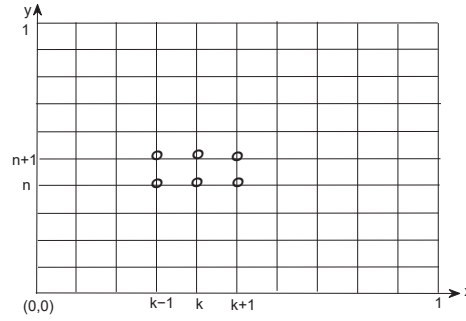


Figura 1.3: Estencil del esquema (1.48).

Aplicando el método de Crank-Nicolson obtenemos un esquema en diferencias que es incondicionalmente estable [2]. Desafortunadamente el sistema (1.48) determina un sistema de ecuaciones $Ax = b$ con A una matriz tridiagonal, de modo que el precio a pagar por una buena aproximación estable y de orden dos es tener que resolver el sistema $Ax = b$, sin embargo este precio es aceptable.

Veremos enseguida como se relacionan estos 3 conceptos, convergencia, consistencia y estabilidad, por medio del **Teorema de Lax**. Las demostraciones se pueden consultar en [1].

Teorema 2 (Teorema de Equivalencia de Lax) *Considérese un problema lineal de valor inicial bien planteado. Un esquema en diferencias finitas para este problema es estable si y solo si es convergente.*

Teorema 3 (Teorema de Lax) *Si para un problema lineal de valor inicial bien planteado se tiene un esquema consistente de 2 niveles de posición (p, q) , entonces dicho esquema es estable con respecto a $\|\cdot\|$ sii es convergente de orden (p, q) con $\|\cdot\|$.*

Algo importante que se pide en ambas versiones que se tenga un problema con condiciones iniciales bien planteado. Un problema con condiciones iniciales es bien planteado si depende continuamente de sus condiciones iniciales [8].

1.4. Ecuaciones elípticas

1.4.1. Introducción

Una de las clases más famosas y más simples de ecuaciones diferenciales parciales son las de tipo *elíptico*. Las simulaciones de flujos de calor constante o los flujos de un fluido viscoso estacionario, un fluido incomprensible, los cálculos de presión, ya sea para un flujo a través de un medio poroso, incomprensible y muchos otros problemas hacen este tipo de ecuaciones tan famosas. Una de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo elíptica más representativas es la ecuación de *Poisson*,

$$-\nabla^2 v = F, \quad (1.49)$$

donde v y F están definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{ó} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.50)$$

dependiendo si nuestro dominio es de dos o tres dimensiones.

Cuando en la ecuación (1.49) se tiene $F = 0$ la ecuación resultante se le conoce como ecuación de *Laplace*, esto es

$$\nabla^2 v = 0. \quad (1.51)$$

El modelo general de la ecuación diferencial parcial de tipo elíptica de segundo orden en el plano tiene la forma,

$$Av_{xx} + Bv_{xy} + Cv_{yy} + Dv_x + Ev_y = G, \quad (1.52)$$

de donde los coeficientes A, B y C satisfacen

$$B^2 - 4AC < 0. \quad (1.53)$$

Lo anterior debe satisfacer para todos los (x, y) en alguna región del plano Ω , con condiciones de frontera en $\partial\Omega$. Por ejemplo, condiciones de frontera de tipo Dirichlet en cuyo caso $u(x, y)$ está dado para todos los puntos $(x, y) \in \partial\Omega$. Si la condición (1.53) se satisface, entonces tenemos un problema bien planteado. Si los coeficientes varían con x y y , entonces la condición (1.53) debe satisfacerse en cada punto de Ω [2].

En seguida trabajaremos con la ecuación de Poisson usando los esquemas en diferencias que hasta ahora hemos desarrollado. En el capítulo 4 desarrollaremos esquemas en diferencias finitas pero ahora haciendo una aproximación a los operadores divergencia y gradiente en regiones irregulares.

1.4.2. Resolviendo una problema

Consideremos el problema.

$$-\nabla^2 v = F, \quad (x, y) \in R = (0, 1) \times (0, 1) \quad (1.54)$$

$$v = f, \quad (x, y) \in \partial R. \quad (1.55)$$

Al igual como se hizo en la sección anterior usaremos diferencias finitas para aproximar la solución de (1.54). Notemos que cuando resolvimos el problema (1.7) se tenía una función que sólo dependía de una variable x . Ahora, en nuestro problema (1.54) depende de dos variables x y y . Usaremos los esquemas en diferencias ya vistos para aproximar la solución de la ecuación. Recordemos que para el caso del problema (1.7) usamos

$$v_{xx} \approx \frac{u_{k+1}^n - 2u_k^n + u_{k-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (1.56)$$

en el punto (n, k) . Ahora, usaremos

$$v_{xx} \approx \frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta x^2}, \quad (1.57)$$

y

$$v_{yy} \approx \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\Delta y^2}, \quad (1.58)$$

en el punto (j, k) , de donde j corre en el eje x y k en el eje y . Nuestra ecuación (1.54) la podemos reescribir como

$$-(v_{xx} + v_{yy}) = F(x, y), \quad (x, y) \in R = (0, 1) \times (0, 1) \quad (1.59)$$

$$v(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial R. \quad (1.60)$$

de modo que usando los esquemas en diferencias tenemos,

$$-\frac{u_{j+1,k} - 2u_{j,k} + u_{j-1,k}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j,k+1} - 2u_{j,k} + u_{j,k-1}}{\Delta y^2} = F_{j,k} \quad (1.61)$$

$$j = 1, \dots, M-1, k = 1, \dots, N-1 \quad (1.62)$$

junto con las condiciones de frontera,

$$\begin{aligned} u_{0,k} &= f_{0,k}, & k &= 1, \dots, N-1 \\ u_{M,k} &= f_{M,k}, & k &= 1, \dots, N-1 \\ u_{j,0} &= f_{j,0}, & j &= 1, \dots, M-1 \\ u_{j,N} &= f_{j,N}, & j &= 1, \dots, M-1. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Como resultado de lo anterior obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma

$$Ax = b, \quad (1.64)$$

con A es una matriz definida positiva, y por lo tanto, invertible.

Si en nuestro problema (1.54) ordenamos los valores desconocidos asociados con el problema (1.61) en orden lexicográfico como,

$$[u_{1,1}, \dots, u_{M-1,1}, u_{1,2}, \dots, u_{M-1,N-1}]^T$$

(suponiendo que todos los valores a la frontera son conocidos y estan del lado derecho de (1.61)), la matriz resultante tiene la siguiente forma,

$$A = \begin{pmatrix} B & -\frac{1}{\Delta y^2} I & 0 & \dots \\ -\frac{1}{\Delta y^2} I & B & -\frac{1}{\Delta y^2} I & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta y^2} I & B \end{pmatrix}$$

con A de tamaño $(N_y - 1) \times (N_y - 1)$, I la matriz identidad de tamaño $(M_x - 1) \times (M_x - 1)$ y B una matriz de tamaño $(M_x - 1) \times (M_x - 1)$

$$B = \begin{pmatrix} 2(-\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{\Delta x^2} & 2(-\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) & -\frac{1}{\Delta x^2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & -\frac{1}{\Delta x^2} I & 2(-\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}) \end{pmatrix}$$

Notemos que A es una matriz simétrica compuesta por bloques (debemos tener cuidado a la hora de programar ya que si observamos con cuidado vemos que tenemos ceros a lado de la diagonal superior). Como podemos observar el sistema de ecuaciones que resulta es grande, este tipo de sistemas se resuelve de manera iterativa usando Gauss-Seidel [1].

Capítulo 2

Generación variacional de mallas

2.1. Introducción

Generar mallas es esencial para poder utilizar diferencias finitas o elementos finitos o volúmenes finitos debido a que los tres métodos requieren dividir la región física Ω en celdas de forma simple cuadrilátera, triangular, hexágonal, etc. Nosotros trabajaremos con cuadriláteros para generar mallas lógicamente rectangulares.

En este capítulo presentaremos de forma muy breve las ideas esenciales para generar mallas estructuradas suaves y convexas; el lector interesado puede consultar [5] para tener un panorama más amplio.

2.2. Generación variacional discreta

En los capítulos anteriores ya hemos usado varios conceptos de manera intuitiva. En esta sección daremos una mejor explicación a todos ellos. Debido a que todo el tiempo estamos hablando de mallas y en el capítulo (1) sólo se mencionó una ligera noción de malla, empecemos por tener una idea más clara de qué es una malla. Sea Ω una región plana cuyas fronteras son curvas poligonales de Jordan orientada positivamente, una malla la denotamos de la siguiente manera.

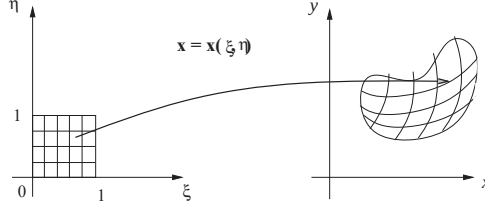
Definición 7 Una malla continua $\mathbf{x}(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ es una biyección continua

$$\mathbf{x} : R \mapsto \Omega$$

con $x(\partial R) = \partial\Omega$ donde R es el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$.

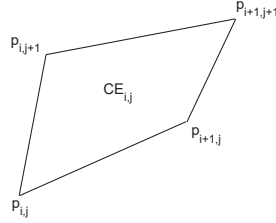
Una malla de orden $m \times n$ es un conjunto G de puntos en el plano,

$$G = \{P_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

Figura 2.1: Malla sobre la región Ω .

donde los puntos $\{p_{1,j}, p_{m,j}, j = 1, \dots, n\}$ representan los lados horizontales, mientras que los puntos $\{p_{i,1}, p_{i,n}, i = 1, \dots, m\}$ nos indican los lados verticales de la malla. Los puntos restantes $\{p_{i,j}, i = 2, \dots, m-1, j = 2, \dots, n-1\}$ son los puntos del interior de la malla.

Sea $CE_{i,j}$ la celda de la malla (ver figura 2.2) cuyos vértices son $p_{i,j}, p_{i+1,j}, p_{i,j+1}$ y $p_{i+1,j+1}$. La celda $CE_{i,j}$ determina cuatro triángulos $\triangle^{(1)} = \triangle(SPQ)$, $\triangle^{(2)} =$

Figura 2.2: Celda $CE_{i,j}$ de la malla Ω .

$\triangle(PQR)$, $\triangle^{(3)} = \triangle(QRS)$ y $\triangle^{(4)} = \triangle(RSP)$ (figura 2.3), una malla de $m \times n$ determina $(m-1)(n-1)$ celdas de tal forma que el número total de triángulos determinados por las celdas de la malla es $N = 4(m-1)(n-1)$. Como podemos observar en la figura 2.3, en el triángulo $\triangle^{(1)}$ dos de sus lados están determinados por dos lados del cuadrilátero y el tercero por una de las diagonales del cuadrilátero.

Existen dos cantidades básicas asociadas a los triángulos de las celdas de las mallas: λ y α . Para el triángulo figura 2.4, orientado de vértices $A, B, C \in \mathbb{R}^2$

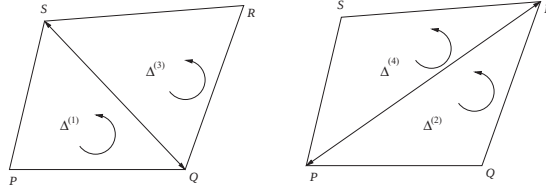


Figura 2.3: Los cuatro triángulos orientados definidos por los vértices de una celda.

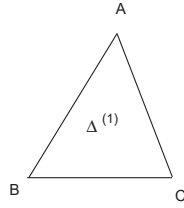


Figura 2.4: Triángulo.

para calcular la longitud de los dos lados de la celda, se define como

$$\lambda(\triangle(A, B, C)) = \|A - B\|^2 + \|C - B\|^2;$$

donde $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ son lados de la celda, $\overline{AC}$ es una diagonal de la celda y

$$\alpha(\triangle(A, B, C)) = (B - A)^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} (B - C) = 2 \text{ área}(\triangle(A, B, C))$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídeana.

Decimos que una malla es convexa si cada una de sus celdas es un cuadrilátero convexo. Notemos que esto ocurre sii

$$\text{mín}\{\alpha(\triangle_q) > 0 | q = 1, \dots, N\},$$

de donde N representa el número total de triángulos en una malla en este caso G y, $\triangle_q$ representa alguno de esos triángulos.

Otras características importantes que nos interesa que tenga una malla es la suavidad y que las variaciones entre el área de las celdas sean pequeñas, además es importante tener mallas no dobladas; es decir, convexas. Ya que una malla doblada no es útil para nuestros propósitos.

2.3. Funcionales

Los funcionales son la clave para generar buenas mallas. De manera intuitiva podemos decir que un funcional $I[f]$ es una función cuyo dominio es un espacio de funciones y cuyo dominio es un escalar (en nuestro caso, los reales). Los funcionales que se utilizaron para generar las mallas empleadas en los ejemplos numéricos son,

el Funcional de Área

$$S_t(G) = \sum_{q=1}^N f(t\alpha_q).$$

En [9] se describe como actualizar t de tal forma que las mallas óptimas del funcional sean convexas.

El Funcional de Suavidad

$$H_w(G) = \sum_{q=1}^N \lambda(\Delta_q) \varphi_w(\Delta_q).$$

Y una combinación de los anteriores $1/2(H_w + A)$ y $1/2(S_w + L)$, con

$$A = \sum_{q=1}^N \alpha^2(\Delta_q)$$

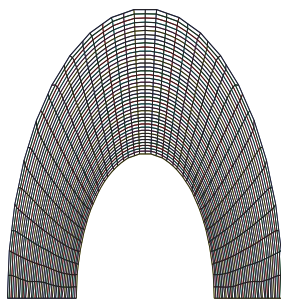
y

$$L = \sum_{q=1}^N \lambda^2(\Delta_q).$$

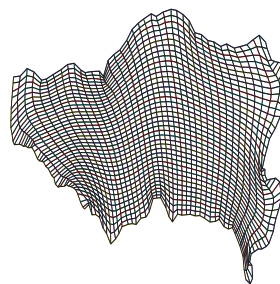
Para conocer más a detalle estos funcionales se recomienda consultar [9].

2.3.1. Mallas optimizadas con los funcionales

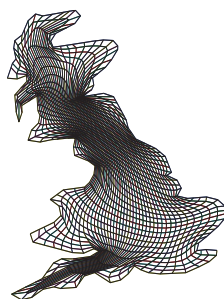
Presentamos enseguida las regiones con las que trabajamos así como también algunos ejemplos de las mallas optimizadas con los funcionales anteriormente mencionados. Para efectos visuales sólo se presentan las mallas generadas con $1/2(H_w + A)$ de 41×41 puntos.



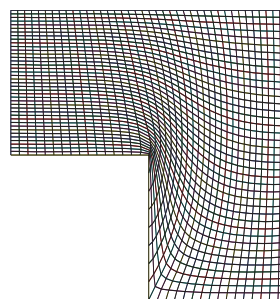
Ann
Ann



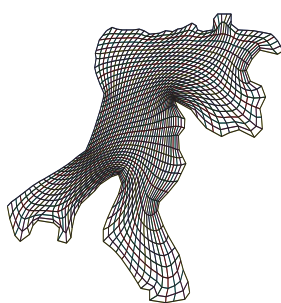
Chapala
Chapala



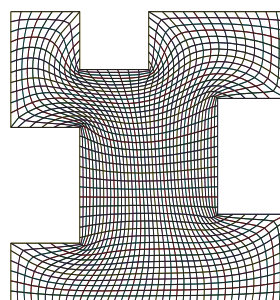
Great Britain
Great Britain



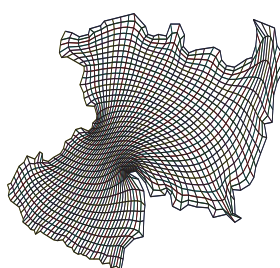
Ele
Ele



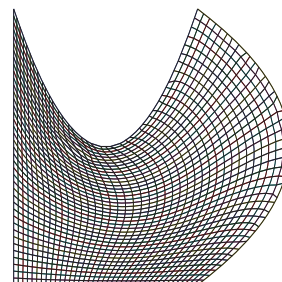
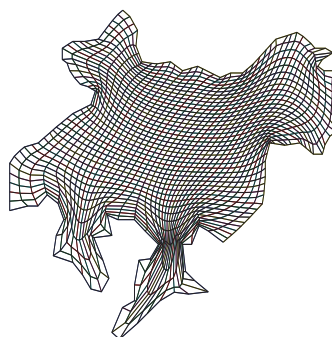
Habana
Habana



M19
M19



Michoacán

Swan
SwanUcha
Ucha

Capítulo 3

Elementos finitos

3.1. Introducción

El MEF es uno de los métodos más usados para aproximar la solución de una ecuación diferencial. La idea física básica del MEF es dividir el dominio del modelo matemático en componentes de geometría simple, como pueden ser triángulos o rectángulos, llamados *elementos finitos*, que son computacionalmente sencillos. De esta manera, un modelo similar de una forma geométrica de elementos discretos en una malla estructurada o no estructurada, representa el dominio físico. La información de cada elemento se expresa en términos de un número finito de grados de libertad caracterizados por el valor de una función desconocida. Las ecuaciones de equilibrio y las consideraciones físicas se aplican a cada elemento usando una interpolación simple, y un sistema de ecuaciones lineales simultáneo se construye. Este sistema se resuelve para los valores desconocidos en los nodos.

El gran éxito del MEF se basa en que aunque el dominio de la ecuación pueda ser muy irregular, es posible dividirlo en *elementos* que faciliten el análisis y el cálculo de la aproximación.

3.2. Elementos finitos en 1D

La implementación del método de elementos finitos usualmente sigue un proceso de tipo estándar que consta de las siguientes etapas:

- **Discretización del dominio**

Este paso consiste en dividir una región Ω en pequeñas regiones interconectadas, llamadas elementos. Los puntos de intersección de las líneas que forman los lados de los elementos se conocen como nodos.

- **Aproximación de las ecuaciones**

El paso siguiente es desarrollar un sistema de ecuaciones que aproximen la

solución de la ecuación en cada elemento. Esto involucra dos pasos adicionales. Primero, debemos escoger una función apropiada la cual usaremos para aproximar la solución de la ecuación. Segundo, evaluamos los coeficientes de modo que la función se aproxime a la solución de la mejor manera posible.

■ **Ensamble del sistema discreto**

Después de que cada elemento está asociado a un sistema de ecuaciones, debemos ensamblar para construir sólo un sistema de ecuaciones. Esto en gran parte es gracias a la continuidad. Una vez que todo el sistema es ensamblado, el sistema entero es expresado en su forma matricial,

$$Ku = F \quad (3.1)$$

donde K es la matriz resultante del ensamble, u y F son vectores.

■ **Incorporación de las condiciones de frontera**

Antes de resolver el sistema (3.1) debemos tomar en cuenta las condiciones de frontera, de modo que hacemos un pequeño ajuste al vector F con la información de la frontera del sistema discreto.

■ **Solución**

Se resuelve el sistema resultante usando algún método iterativo, por ejemplo Gauss-Seidel.

Veamos en seguida un ejemplo sencillo en donde se aplican los pasos anteriores. Consideremos la aproximación a $u(x)$ entre un par de nodos que denotaremos por x_1 y x_2 . Una forma sencilla de hacer la aproximación es empleando la recta

$$u(x) = ax + b \quad (3.2)$$

que pasa por $(x_1, u(x_1))$ y $(x_2, u(x_2))$,

$$u_1 = a + bx_1$$

$$u_2 = a + bx_2$$

donde $u_1 = u(x_1)$ y $u_2 = u(x_2)$. Este sistema de ecuaciones se puede resolver con

$$a = \frac{u_1x_2 - u_2x_1}{x_2 - x_1} \quad b = \frac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1}.$$

Sustituyendo a y b en (3.2) y haciendo algo de álgebra tenemos,

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 \quad (3.3)$$

donde

$$N_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (3.4)$$

y

$$N_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (3.5)$$

N_1 y N_2 son llamadas funciones de interpolación.

La figura 3.1 muestra como es la función $u(x)$ en un elemento, junto con la correspondiente función de interpolación. Note que la suma de la función de interpolación es uno.

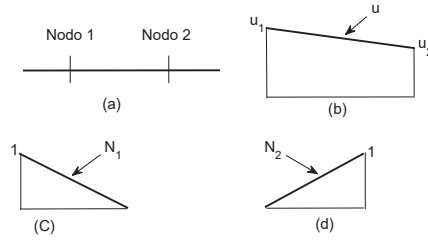


Figura 3.1: (a) elemento. (b) aproximación lineal. (c) y (d) las correspondientes funciones de interpolación

El hecho de usar una ecuación lineal es debido a que facilita el cálculo con las derivadas y integrales. La derivada de la ecuación (3.3) es,

$$\frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx}u_1 + \frac{dN_2}{dx}u_2 \quad (3.6)$$

de acuerdo con (3.4) y (3.5), la derivada de N_1 y N_2 es,

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1} \quad (3.7)$$

de modo que, la derivada de u es,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x_2 - x_1}(-u_1 + u_2). \quad (3.8)$$

La integral puede ser expresada como

$$\int_{x_1}^{x_2} u dx = \int_{x_1}^{x_2} (N_1 u_1 + N_2 u_2) dx.$$

Notemos que cada término del lado derecho de la ecuación anterior, es la integral del triángulo de base $x_2 - x_1$ y altura u . Esto es,

$$\int_{x_1}^{x_2} N u dx = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) u.$$

Así que, la integral es

$$\int_{x_1}^{x_2} u dx = \frac{u_1 + u_2}{2} (x_2 - x_1) \quad (3.9)$$

En otras palabras, es la regla del trapecio.

En seguida veamos un ejemplo del uso de las ecuaciones anteriores.

Consideremos un sistema que puede ser modelado mediante la ecuación de Poisson en 1D,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -f(x) \quad (3.10)$$

donde $f(x)$ es una función que describe la temperatura en una barra, y donde los extremos de la barra tienen la siguiente temperatura (ver figura 3.2),

$$u(0, t) = 40$$

y

$$u(L, t) = 200.$$

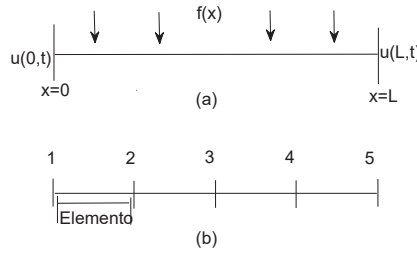


Figura 3.2: (a) Una barra delgada con condiciones de frontera fijas y una fuente de calor continua a lo largo de su eje. (b) La barra dividida en cuatro elementos de la misma longitud.

Supongamos que la barra tiene una longitud de 10cm y condiciones a la frontera de $u(0, t) = 40$ y $u(10, t) = 200$, con $f(x) = 10$.

La ecuación a resolver es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -10. \quad (3.11)$$

Supongamos que la solución al sistema es de la forma,

$$u = ax^2 + bx + c.$$

Derivando dos veces la ecuación anterior nos da $u(x)'' = 2a$. Sustituyendo en (3.11) obtenemos $a = -5$. Ahora usemos las condiciones a la frontera, para la primera condición con $x = 0$ tenemos $c = 40$. Para la segunda condición $x = 10$ tenemos $b = 66$. Por lo tanto, la solución a la ecuación (3.11) es,

$$u = -5x^2 + 66x + 40.$$

Derivando dos veces lo anterior obtenemos (3.11).

Notemos que el objetivo fue encontrar una función u , de tal suerte que satisfaga (3.11).

En la figura 3.1 (a) se muestra un elemento. La distribución de la temperatura para el elemento puede ser representada por medio de la función aproximada,

$$T = N_1T_1 + N_2T_2 \quad (3.12)$$

donde N_1 y N_2 son las funciones de interpolación lineal, específicamente (3.4) y (3.5) respectivamente.

La ecuación diferencial (3.10) la podemos reescribir como,

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x).$$

Por otro lado la función aproximada (3.12), la podemos sustituir en la ecuación anterior. Como la función (3.12) es una aproximación y no la solución exacta, tendremos

$$R = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x), \quad (3.13)$$

con R un residuo.

Para 1D la ecuación (3.13) la podemos sustituir en esta formulación

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + f(x) \right] N_i dx \quad i = 1, 2$$

o bien

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} N_i dx = - \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_i(x) dx \quad i = 1, 2. \quad (3.14)$$

La integral del lado derecho de la ecuación anterior se puede resolver usando integración por partes, de forma general la podemos escribir como

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Si tenemos cuidado y escogemos u y v apropiadamente, la nueva integral del lado derecho será más fácil de evaluar que la original, la del lado izquierdo. Lo que podemos hacer para el término del lado derecho de la ecuación (3.14) es escoger $N_i(x)$ como u y $(\partial^2 T / \partial x^2) dx$ como dv para obtener,

$$\int_{x_1}^{x_2} N_i(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx = N_i(x) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx \quad i = 1, 2. \quad (3.15)$$

En seguida evaluamos los términos x_1 y x_2 para $i = 1$ tenemos,

$$N_1(x) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} = N_1(x_2) \frac{\partial T(x_2)}{\partial x} - N_1(x_1) \frac{\partial T(x_1)}{\partial x}. \quad (3.16)$$

Recordando, de la figura 3.2 $N_1(x_2) = 0$ y $N_1(x_1) = 1$, por lo tanto

$$N_1(x) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} = - \frac{\partial T(x_1)}{\partial x}. \quad (3.17)$$

Hacemos algo similar para el caso $i = 2$

$$N_2(x) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{\partial T(x_2)}{\partial x}. \quad (3.18)$$

El primer término del lado derecho de la ecuación (3.15) representa las condiciones a la frontera en los extremos de los elementos.

Ahora sustituyendo los resultados anteriores, ecuación (3.15) y (3.18) en la ecuación (3.14) y reorganizando para $i = 1$ tenemos,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx = - \frac{\partial T(x_1)}{\partial x} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1(x) dx \quad (3.19)$$

y para $i = 2$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} dx = \frac{\partial T(x_2)}{\partial x} + \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x) dx. \quad (3.20)$$

En términos del método de elementos finitos, el lado izquierdo de la ecuación pasará a ser parte de la matriz resultante,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} dx. \quad (3.21)$$

Sustituyendo la ecuación (3.7) y (3.8) obtenemos,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{T_1 - T_2}{(x_1 - x_2)^2} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (T_1 - T_2) \quad (3.22)$$

hacemos algo similar para $i = 2$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{-T_1 + T_2}{(x_1 - x_2)^2} dx = \frac{1}{x_1 - x_2} (-T_1 + T_2). \quad (3.23)$$

Las dos expresiones anteriores las podemos reescribir en su forma matricial como sigue,

$$\frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones (3.19) y (3.20), y expresando el resultado en su forma matricial, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial T(x_1)}{\partial x} \\ \frac{\partial T(x_2)}{\partial x} \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_1(x) dx \\ \int_{x_1}^{x_2} f(x) N_2(x) dx \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

A continuación resolveremos el problema de la barra que se planteó anteriormente, la ecuación (3.10) usando (3.25) y subdividiendo el intervalo en 4 elementos. Recordemos que es una barra de 10cm de largo con condiciones de frontera de $u(0, t) = 40$ y $u(10, t) = 200$ y $f(x) = 10$, la cual la dividiremos en cuatro elementos igualmente espaciados de 2.5cm de longitud como se muestra en la figura 3.2.

De (3.25), la primera integral la podemos calcular usando (3.4), como sigue

$$\int_0^{2.5} 10 \frac{2.5 - x}{2.5} dx = 12.5 \quad (3.26)$$

de la misma manera, pero ahora para la segunda integral, y usando (3.5), tenemos

$$\int_0^{2.5} 10 \frac{x - 0}{2.5} dx = 12.5 \quad (3.27)$$

estos resultados junto con $1/(x_2 - x_1)$, los sustituimos en (3.25), primer renglón

$$0.4T_1 - 0.4T_2 = -\frac{\partial T}{\partial x}(x_1) + 12.5$$

y el segundo renglón nos da

$$-0.4T_1 + 0.4T_2 = -\frac{\partial T}{\partial x}(x_2) + 12.5.$$

El proceso anterior lo hacemos tres veces, esto debido a que son cuatro elementos en la barra.

Una vez de haber hecho los cálculos anteriores y teniendo presente T_1, T_2, T_3, T_4 y T_5 , como primera parte ensamblamos T_1 y T_2 en el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial T(x_1)/\partial x & + & 12.5 \\ \partial T(x_2)/\partial x & + & 12.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que en el sistema anterior, en los dos primeros renglones de la matriz estan las dos integrales que previamente se calcularon. En seguida vamos llenando el sistema con las otras integrales calculadas y agregando T_3, T_4 y T_5 de la siguiente manera,

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.4 + 0.4 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial T(x_1)/\partial x & + & 12.5 \\ 12.5 & + & 12.5 \\ \partial T(x_2)/\partial x & + & 12.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

observemos que al segundo renglón sumamos el valor de T_2 , esto debido a que primero se hizo la aproximación al primer elemento, i.e., se calcularon las integrales de x_1 a x_2 y después se hizo la aproximación al segundo elemento se calcularon las integrales de x_2 a x_3 para obtener,

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.4 + 0.4 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial T(x_1)/\partial x & + & 12.5 \\ 25 \\ 12.5 & + & 12.5 \\ \partial T(x_2)/\partial x & + & 12.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.4 + 0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial T(x_1)/\partial x & + & 12.5 \\ 25 \\ 25 \\ 12.5 & + & 12.5 \\ \partial T(x_2)/\partial x & + & 12.5 \end{pmatrix}.$$

Por fin obtenemos la versión final del sistema ya ensamblado y queda de esta forma,

$$\begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial T(x_1)/\partial x & + & 12.5 \\ & 25 \\ & 25 \\ & 25 \\ \partial T(x_5)/\partial x & + & 12.5 \end{pmatrix}$$

Ahora tomando en cuenta las condiciones de frontera, i.e., T_1 y T_5 los conocemos, y pasando al lado izquierdo $\partial T(x_1)/\partial x$ y $\partial T(x_5)/\partial x$, el sistema anterior lo podemos escribir como,

$$\begin{pmatrix} \partial T(x_1)/\partial x & -0.4T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8T_2 & -0.4T_3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4T_2 & 0.8T_3 & -0.4T_4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4T_3 & 0.8T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4T_4 & -\partial T(x_5)/\partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 41 \\ 25 \\ 105 \\ -67.5 \end{pmatrix}$$

Observemos que es un sistema de ecuaciones lineal de la forma $Ax = b$, es decir, se puede escribir de la siguiente forma,

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.4 & 0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.4 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial T(x_1)/\partial x \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ \partial T(x_5)/\partial x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 41 \\ 25 \\ 105 \\ -67.5 \end{pmatrix}$$

El sistema anterior es un sistema de ecuaciones sencillo el cual se puede resolver de manera directa, en el caso de que el sistema sea grande generalmente se utiliza un método iterativo, por ejemplo Gauss-Seidel. Resolviendo el sistema anterior obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x}(x_1) &= 66 & T_2 &= 173.75 \\ T_3 &= 245 & T_4 &= 253.75 \\ \frac{\partial T}{\partial x}(x_5) &= -34. \end{aligned}$$

Graficando la solución analítica con la aproximada (gráfica 3.3), podemos tener una idea más clara de la aproximación del método.

Para aproximar la solución de una ecuación en 2D es similar que en el caso de 1D, i.e., se siguen los mismo pasos. Una variación de elementos finitos, pueden ser triángulos o cuadriláteros. En seguida trabajaremos con elementos triangulares

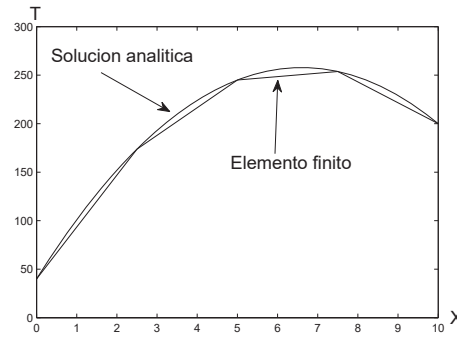


Figura 3.3: Resultados de aproximación con elemento finito.

como el que se muestra en la figura 3.4.

Similar al caso en 1D, el siguiente paso es desarrollar una ecuación que aproxime la solución en cada elemento. En este caso consideremos como elemento un triángulo como el que se muestra en la figura 3.4, una aproximación simple es usando la ecuación de la recta,

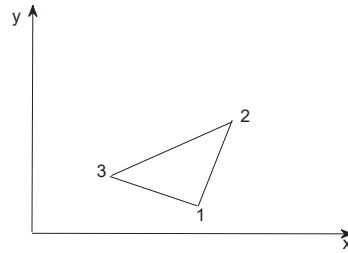


Figura 3.4: Elemento triangular.

$$u(x, y) = a + bx + cy. \quad (3.28)$$

Esta función debe pasar por los valores de $u(x, y)$ en los nodos de los triángulos $u(x_1, y_1)$, $u(x_2, y_2)$ y $u(x_3, y_3)$. De modo que

$$u_1(x, y) = a + bx_1 + cy_1$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= a + bx_2 + cy_2 \\ u_3(x, y) &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned}$$

o en su forma matricial,

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

El sistema anterior se puede resolver usando

$$a = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \quad (3.29)$$

$$b = \frac{1}{2A_e} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \quad (3.30)$$

$$c = \frac{1}{2A_e} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]. \quad (3.31)$$

Donde A_e es el área del elemento triangular,

$$A_e = \frac{1}{2} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3) + (x_1y_2 - x_2y_1)]. \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.29,3.30,3.31) las sustituimos en (3.28), haciendo algo de álgebra y agrupamos términos, para obtener

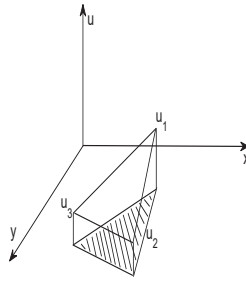
$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (3.33)$$

donde

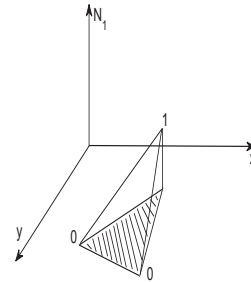
$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{2A_e} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ N_2 &= \frac{1}{2A_e} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ N_3 &= \frac{1}{2A_e} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]. \end{aligned}$$

La ecuación (3.33) nos provee una manera de obtener los valores de los elementos en cada elemento. Las figuras (a), (b), (c) y (d) muestran como es en cada punto la función de interpolación. Note que la suma de las funciones interpolación es uno.

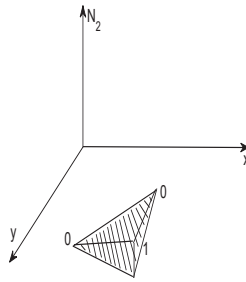
Al igual que en el caso 1D, existen varios métodos disponibles para desarrollar funciones que se aproximen a la solución del sistema, en general las ecuaciones resultantes suelen ser sistemas complicados. Sin embargo, debido a que las funciones de aproximación pueden ser polinomios de bajo orden como (3.28), los elementos de la matriz final serán polinomios de bajo orden. En el siguiente capítulo veremos una manera obtener una función de aproximación de una forma sencilla pero muy robusta, la cual implementamos para aproximar la solución de las ecuaciones con las que se trabajaron, y así poder tener un punto de comparación con el método de diferencias finitas.



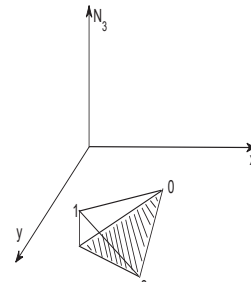
(a)



(b)



(c)



(d)

3.3. Implementación de elementos finitos

Las ideas anteriores pueden aplicarse al caso de un dominio en el plano que se divide en elementos triangulares para ello, empleando las mallas generadas con los funcionales de la sección anterior, dividiremos la celda $CE_{i,j}$, definida

por los vértices $\{P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j+1}\}$ (ver figura 3.5), en *dos* triángulos eligiendo para el efecto la diagonal más corta de la celda.

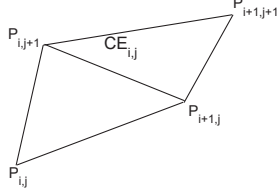


Figura 3.5: Diagonal más corta de la celda.

Usando esta selección de elementos en la malla, emplearemos la aproximación de Galerkin [15] la solución del problema elíptico de valores a la frontera

$$-\nabla \circ (K(x,y)\nabla u(x,y)) = f(x,y) \quad (3.34)$$

con

$$K(x,y) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

$$u(x,y)\big|_{\partial\Omega} = g(x,y), \quad (3.36)$$

matriz de conductividad o de difusividad o de rigidez, según sea el tipo de problema físico.

Por medio de una combinación

$$u(x,y) \approx \sum_i U_i \phi_i$$

de funciones pirámide *trial* y *test* cuyas caras se definen en un triángulo por

$$\phi(x,y) = A + Bx + Cy.$$

Así, de forma estándar, la forma débil de la ecuación (3.34) está dada por

$$\sum_i U_i \int_{\Omega} \nabla \phi_j \circ (K(x,y)\nabla \phi_i) dA = \int_{\Omega} \phi_j f dA$$

lo que produce la matriz de rigidez

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \circ (K(x, y) \nabla \phi_i) d\mathcal{A} \quad (3.37)$$

y el vector de cargas

$$F_j = \int_{\Omega} \phi_j f d\mathcal{A}. \quad (3.38)$$

Naturalmente, es posible elegir otro tipo de funciones prueba. Sin embargo, queremos una implementación sencilla y, como sabemos, el uso de funciones piramidales en triangulaciones permite una implementación eficiente del sistema definido por (3.37) y (3.38); adicionalmente, existen varios paquetes y bibliotecas disponibles en la literatura para este tipo de elementos.

El único propósito de emplear elementos finitos es hacer una comparación con un método confiable y robusto.

Capítulo 4

Esquemas en diferencias para operadores de tipo elíptico

4.1. Introducción

Como hemos visto en el capítulo 1, la idea principal del método en diferencias finitas es remplazar la derivada por esquemas en diferencias, por ejemplo (1.4) y (1.5). La generalización natural de esta idea consiste en expresar la derivada como una combinación lineal de los valores de la función en cada uno de los nodos de la malla, para los cuales requerimos encontrar coeficientes $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ de tal forma que

$$\left. \frac{\partial^q u}{\partial x^l \partial y^{q-l}} \right|_{x=x_*} \approx \sum_i \Gamma_i u_i.$$

Como vimos en el problema (1.7) los coeficientes Γ_i se calculan fácilmente en una región rectangular. El proceso parece sencillo, sin embargo, el uso del teorema de Taylor produce esquemas más complicados en regiones irregulares.

Este tipo de problemas han sido estudiados por Tinoco *et al* [6, 7, 10]. En este capítulo se abordará el problema de aproximar la solución de la ecuación diferencial parcial general de tipo elíptica con valores en la frontera,

$$-[\nabla \cdot (K(x, y) \nabla u(x, y))] = f(x, y) \in \Omega \quad (4.1)$$

en alguna región Ω , y condiciones de frontera de tipo Dirichlet

$$u(x, y) = \varphi, (x, y) \in \partial\Omega. \quad (4.2)$$

Para lograr lo anterior en el presente capítulo desarrollaremos los esquemas de Shashkov [10] para este tipo de ecuaciones. La meta es resolver el sistema para

alguna función u y donde K es una matriz simétrica definida positiva, f es una función dada, y φ está dada por una función u a la frontera.

Tengamos en mente las propiedades de los problemas con valores a la frontera de tipo Dirichlet y asumiremos que todas las funciones con las que trabajaremos son suficientemente suaves C^n con $0 < n$.

Para poder alcanzar nuestra meta construiremos operadores en diferencias $\mathcal{C}, \mathcal{K}, \mathcal{B}$, y $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}u &= -\nabla u, \quad \forall (x, y) \\ \mathcal{K}\vec{w} &= K\vec{w}, \quad \forall (x, y) \\ \mathcal{B}\vec{w} &= \begin{cases} +\nabla\vec{w}, & (x, y) \in \Omega \\ -(\vec{w}, \vec{n}), & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases} \\ \mathcal{D}u &= \begin{cases} 0, & (x, y) \in \Omega \\ \alpha u, & (x, y) \in \partial\Omega \end{cases}\end{aligned}$$

en dos dimensiones.

4.2. Discretización de una función escalar

En el capítulo 1 trabajamos con mallas en regiones rectangulares en las cuales las celdas eran rectángulos o cuadrados, en esta parte de la tesis trataremos el caso de discretización en $2D$ usando las mallas mostradas en el capítulo 2. Claramente el espaciamiento de los nodos en estas mallas no es constante al igual que el área de las celdas. Similar al capítulo 1 podemos identificar cada nodo de la siguiente manera $u_{i,j}$ y cada celda de la malla como $CE_{i,j}$, vamos a escribir $u_{i,j} \in \mathcal{HN}$ para la discretización en los nodos y $CE_{i,j} \in \mathcal{HC}$ para la discretización en las celdas.

Un ejemplo de lo anterior es la ecuación de calor (1.7), $u(x, t)$ nos da el valor de la temperatura en cada punto al tiempo t . Esto quiere decir que en cada tiempo t a cada punto de coordenadas $u(x)$, le podemos asociar el valor de la temperatura como $u(x, t)$.

La función $u(x)$ continua con $x \in [a, b]$, es elemento de algun espacio de funciones H y alguna norma, para comparar dos funciones $u(x), v(x) \in H$, por ejemplo,

$$\|u\|_C = \max_{a \leq x \leq b} |u(x)|$$

o

$$\|u\|_{L2} = \left(\int_a^b u^2(x) dx \right)^{1/2}$$

Donde H es el espacio de funciones escalares continuas y $\mathcal{HN}, \mathcal{HC}$ son espacios de funciones escalares discretas. Los análogos discretos de las normas anteriores para $CE_{i,j} \in \mathcal{HC}$ y $u_{i,j} \in \mathcal{HN}$ son

$$\|u_{i,j}\| = \max_{1 \leq i \leq M-1} |u_{i,j}|$$

o

$$\|u_{i,j}\| = \left(\sum_{i=1}^{N-1} (u_{i,j})^2 * (x_{i+1} - x_i) \right)^{1/2}.$$

Sea $U(x)$ una función continua, la solución exacta de alguna ecuación diferencial parcial. Y sea $u_{i,j}$ una función de aproximación que es el resultado de usar diferencias finitas. Nos interesa saber que tanto se aproxima $u_{i,j}$ a U . Para esto, podemos utilizar lo siguiente.

Usando los valores de la función $u_{i,j}$, podemos determinar la función de un continuo (por ejemplo, usando interpolación lineal). Como resultado, podemos obtener la función $\tilde{u}(x)_{i,j}$. Entonces podemos comparar $(\tilde{u}(x)_{i,j} - u(x)_{i,j})$ en una norma continua $\|\bullet\|_H$.

$$\|\tilde{u}(x)_{i,j} - u(x)_{i,j}\|_H.$$

Teniendo en mente $\mathcal{HC}$ y $\mathcal{HN}$ (espacios de funciones escalares discretas), empecemos a construir la versión discreta del operador gradiente.

$$\nabla : \mathcal{HN} \longrightarrow \mathcal{HC}.$$

Como sabemos el operador gradiente está definido de la siguiente forma

$$\nabla u = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right). \quad (4.3)$$

Por consiguiente, debemos construir una aproximación en diferencias finitas para $\partial u / \partial x$ y $\partial u / \partial y$. Para este tipo de discretización, construiremos dos operadores de diferencias finitas D_x y D_y , los cuales tendrán como dominio $\mathcal{HN}$ y rango de valores $\mathcal{HC}$.

$$D_x, D_y : \mathcal{HN} \longrightarrow \mathcal{HC}$$

los cuales serán analogos a $\partial u / \partial x$ y $\partial u / \partial y$. Usando estos operadores podemos formar la primera aproximación al operador gradiente,

$$\nabla u = \left(\begin{array}{c} D_x \\ D_y \end{array} \right).$$

Para construir los operadores D_x, D_y vamos a usar la fórmula de Green [4].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial\Omega} u dy}{\Omega} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial\Omega} u dx}{\Omega} \quad (4.5)$$

donde Ω es el área y $\partial\Omega$ es la frontera. En el caso discreto, se muestra un ejemplo del papel que toma Ω en una celda de la malla Ω_{ij} como se muestra en la figura 4.1.

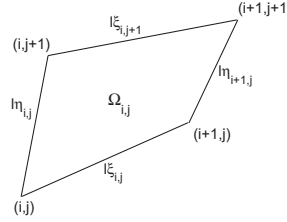


Figura 4.1: Estenciles para los operadores D_x y D_y .

La frontera $\partial\Omega$ es la unión de los $l_{\xi_{i,j}}$, $l_{\eta_{i+1,j}}$, $l_{\xi_{i,j+1}}$ y $l_{\eta_{i,j}}$. Para una aproximación del contorno y de la integral en los lados derecho-izquierdo de (4.4) y (4.5), dividimos el contorno de la integral en cuatro integrales cada una sobre su correspondiente lado del cuadrilátero $\Omega_{i,j}$. Ya que cada lado del cuadrilátero es un segmento lineal, la integral sobre cada lado es una integral en una dimensión que aproxima a esta. Usaremos la regla general del trapecoide que es una manera de aproximar calculando la integral definida. La regla del trapecoide trabaja aproximando la región sobre la gráfica de una función por ejemplo $f(x)$, como un trapecoide y calculando el área de la siguiente manera,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{f(a) + f(b)}{2} (b - a).$$

Esto lo aplicamos a los cuatro lados de una celda de la malla $\Omega_{i,j}$, para obtener la siguiente expresión para diferencias analoga a la derivada $\partial u / \partial y$;

$$\begin{aligned} (D_x u)_{i,j} &= \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j}}{2} (y_{i+1,j} - y_{i,j}) + \frac{u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j}}{2} (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j}) \\ &\quad + \frac{u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}}{2} (y_{i,j+1} - y_{i+1,j+1}) + \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} (y_{i,j} - y_{i,j+1}), \end{aligned}$$

agrupando términos tenemos,

$$(D_x u)_{i,j} = \frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i,j})(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) - (u_{i,j+1} - u_{i+1,j})(y_{i+1,j+1} - y_{i,j})}{2\Omega_{i,j}}.$$

Para obtener $(D_y u)_{i,j}$ hacemos un proceso similar y nos queda,

$$(D_y u)_{i,j} = \frac{(u_{i+1,j+1} - u_{i,j})(x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) - (u_{i,j+1} - u_{i+1,j})(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})}{2\Omega_{i,j}}.$$

Los estenciles de los operadores D_x y D_y en la celda $\Omega_{i,j}$ son similares y contienen únicamente los nodos (i, j) , $(i+1, j)$, $(i+1, j+1)$ y $(i, j+1)$. Usando estos operadores D_x y D_y podemos determinar el operador,

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x u \\ D_y u \end{pmatrix}.$$

De lo anterior obtemos la aproximación para el operador gradiente. Lo siguiente es construir el producto interno en un espacio de funciones discretas. Para el espacio $\mathcal{HN}$, el producto interno debe aproximar al siguiente producto interno en un espacio continuo,

$$(u, v)_{HN} = \int_v u v dA + \oint_{\partial A} u v d\Omega.$$

Vamos a definir el producto interno en el espacio discreto $\mathcal{HN}$ como sigue,

$$\begin{aligned} (u, v)_{HN} = & \sum_{i,j=2}^{M-1,N-1} u_{i,j} v_{i,j} A_{i,j} + \sum_{i=1}^{M-1} u_{i,1} v_{i,1} l_{i,j} + \sum_{i=1}^{N-1} u_{i,1} v_{i,1} l_{i,j} + \\ & \sum_{i=1}^{M-1} u_{i,N} v_{i,N} l_{i,N} + \sum_{j=1}^{N-1} u_{1,j} v_{1,j} l_{1,j} + u_{1,1} v_{1,1} l_{1,1} + u_{M,1} v_{M,1} l_{M-1,1} + \\ & u_{M,n} v_{M,N} l_{M,N-1} + u_{1,N} v_{1,N} l_{1,M}, \end{aligned}$$

donde $A_{i,j}$ es el área de la región $\Omega_{i,j}$ y $l_{i,j}$ es la longitud asociada a los nodos de la frontera.

El producto interno en el espacio discreto $\mathcal{HC}$ se puede determinar como sigue:

$$(\vec{A}, \vec{B})_{\mathcal{HC}} = \sum_{i,j=1}^{M-1,N-1} (AX_{i,j}BX_{i,j} + AY_{i,j}BY_{i,j})\Omega_{i,j}.$$

Recordemos que en el espacio $\mathcal{HC}$, las componentes del vector son cartesianas y estan dadas en cada celda. Ahora construiremos el operador derivada, que nos dará la aproximación al operador divergencia en los puntos internos y la

aproximación a la componente normal del vector en la frontera.

Reagruparemos terminos en la expresión para,

$$(C^h u, \vec{W})_{\mathcal{HC}} = (-\nabla u, \vec{W})_{\mathcal{HC}}$$

para encontrar coeficientes cerca de las componentes del vector $\vec{W}$. Esto nos dará la fórmula para la diferencia analoga al operador $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} (-\nabla u, \vec{W})_{\mathcal{HC}} &= - \sum_{i,j=1}^{M-1,N-1} ((D_x(u))_{i,j} W X_{i,j} + (D_y(u))_{i,j} W Y_{i,j}) \\ &= - \sum_{i,j=1}^{M-1,N-1} \left[\left((u_{i+1,j+1} - u_{i,j}) \frac{(y_{i,j+1} - y_{i+1,j})}{2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left(u_{i,j+1} - u_{i+1,j} \right) \frac{(y_{i+1,j+1} - y_{i,j})}{2} \right) W X_{i,j} \\ &\quad - \left((u_{i+1,j+1} - u_{i,j}) \frac{(x_{i,j+1} - x_{i+1,j})}{2} - \right. \\ &\quad \left. \left(u_{i,j+1} - u_{i+1,j} \right) \frac{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j})}{2} \right) W Y_{i,j} \Big] \\ &= \sum_{i,j=2}^{M-1,N-1} \left[- \left(\frac{y_{i-1,j} - y_{i,j-1}}{2} W X_{i-1,j-1} - \frac{y_{i,j+1} - y_{i+1,j}}{2} W X_{i,j} - \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j-1}}{2} W X_{i,j-1} + \frac{y_{i,j+1} - y_{i-1,j}}{2} W X_{i-1,j} \right) + \\ &\quad \left(\frac{x_{i-1,j} - x_{i,j-1}}{2} W Y_{i-1,j-1} - \frac{x_{i,j+1} - x_{i+1,j}}{2} W Y_{i,j} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j-1}}{2} W Y_{i,j-1} + \frac{x_{i,j+1} - x_{i-1,j}}{2} W Y_{i-1,j} \right) \Big] u_{i,j} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{M-1} \left[\left(\frac{y_{i,2} - y_{i+1,1}}{2} W X_{i,1} - \frac{y_{i,2} - y_{i-1,1}}{2} W X_{i-1,1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x_{i,2} - x_{i+1,1}}{2} W Y_{i,1} - \frac{x_{i,2} - x_{i-1,1}}{2} W Y_{i-1,1} \right) \right] u_{i,1} \\ &\quad + \sum_{j=2}^{N-1} \left[- \left(\frac{y_{M-1,j} - y_{M,j-1}}{2} W X_{M-1,j-1} + \frac{y_{M,j+1} - y_{M-1,j}}{2} W X_{M-1,j} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x_{M-1,j} - x_{M,j-1}}{2} W Y_{M-1,j-1} + \frac{x_{M,j+1} - x_{M-1,j}}{2} W Y_{M-1,j} \right) \right] u_{M,j} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{M-1} \left[- \left(\frac{y_{i-1,N} - y_{i,N-1}}{2} W X_{i-1,N-1} + \frac{y_{i+1,N} - y_{i,N-1}}{2} W X_{i,N-1} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{x_{i-1,N} - x_{i,N-1}}{2} WY_{i-1,N-1} + \frac{x_{i+1,N} - x_{i,N-1}}{2} WY_{i,N-1} \right) \Big] u_{i,N} \\
& + \sum_{j=2}^{N-1} \left[\left(\frac{y_{1,j+1} - y_{2,j}}{2} WX_{1,j} + \frac{y_{2,j} - y_{1,j-1}}{2} WX_{1,j-1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{x_{1,j+1} - x_{2,j}}{2} WY_{1,j} + \frac{x_{2,j} - x_{1,j-1}}{2} WY_{1,j-1} \right) \right] u_{1,j} \\
& + \left(\frac{y_{1,2} - y_{2,1}}{2} WX_{1,1} - \frac{x_{1,2} - x_{2,1}}{2} WY_{1,1} \right) u_{1,1} \\
& - \left(\frac{y_{M,2} - y_{M-1,1}}{2} WX_{M-1,1} - \frac{x_{M,2} - x_{M-1,1}}{2} WY_{M-1,1} \right) u_{M,1} \\
& - \left(\frac{y_{M-1,N} - y_{M,N-1}}{2} WX_{M-1,N-1} - \frac{x_{M-1,N} - x_{M,N-1}}{2} WY_{M-1,N-1} \right) u_{M,N} \\
& + \left(\frac{y_{2,N} - y_{1,N-1}}{2} WX_{1,N-1} - \frac{x_{2,N} - x_{1,N-1}}{2} WY_{1,N-1} \right) u_{1,N}. \\
& = (u, (\mathcal{C}^h)^* \vec{W})_{\mathcal{HN}} = (u, \mathcal{B}^h \vec{W})_{\mathcal{HN}}.
\end{aligned}$$

Del esquema anterior, reconocemos los puntos interiores de la malla $i = 2, \dots, M-1$ y $j = 2, \dots, N-1$ el operador $\mathcal{B}^h$, que es lo mismo que el operador divergencia, como

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \vec{W})_{i,j} &= \sum_{i,j=2}^{M-1,N-1} \left[- \left(\frac{y_{i-1,j} - y_{i,j-1}}{2} WX_{i-1,j-1} - \frac{y_{i,j+1} - y_{i+1,j}}{2} WX_{i,j} \right) \right. \\
& \quad - \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j-1}}{2} WX_{i,j-1} + \frac{y_{i,j+1} - y_{i-1,j}}{2} WX_{i-1,j} \Big) \\
& \quad + \left(\frac{x_{i-1,j} - x_{i,j-1}}{2} WY_{i-1,j-1} - \frac{x_{i,j+1} - x_{i+1,j}}{2} WY_{i,j} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j-1}}{2} WY_{i,j-1} + \frac{x_{i,j+1} - x_{i-1,j}}{2} WY_{i-1,j} \right) \right] / A_{i,j}
\end{aligned}$$

El estencil para el operador divergencia se muestra en la figura 4.2.

Para $i = 2, \dots, M-1$ y $j = 1$ obtenemos los puntos que están en la frontera de la malla con la siguiente aproximación a la componente normal del vector $\vec{W}$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}^h \vec{W})_{i,1} &= \sum_{i=2}^{M-1} \left[\left(\frac{y_{i,2} - y_{i+1,1}}{2} WX_{i,1} - \frac{y_{i,2} - y_{i-1,1}}{2} WX_{i-1,1} \right) \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{x_{i,2} - x_{i+1,1}}{2} WY_{i,1} - \frac{x_{i,2} - x_{i-1,1}}{2} WY_{i-1,1} \right) \right] / l_{i,1}.
\end{aligned}$$

Para $j = 2, \dots, N-1$ y $i = M$, obtenemos los puntos que están a la frontera de

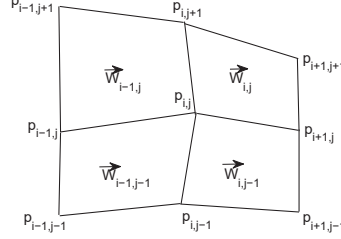


Figura 4.2: Nodos que involucran el estencil del operador divergencia.

la malla.

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{M,j} = \sum_{j=2}^{N-1} \left[- \left(\frac{y_{M-1,j} - y_{M,j-1}}{2} W X_{M-1,j-1} + \frac{y_{M,j+1} - y_{M-1,j}}{2} W X_{M-1,j} \right) + \left(\frac{x_{M-1,j} - x_{M,j-1}}{2} W Y_{M-1,j-1} + \frac{x_{M,j+1} - x_{M-1,j}}{2} W Y_{M-1,j} \right) \right] / l_{M,j}.$$

Para $i = 2, \dots, M-1$ y $j = N$, obtenemos los puntos que están a la frontera (fig)

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{i,N} = \sum_{i=2}^{M-1} \left[- \left(\frac{y_{i-1,N} - y_{i,N-1}}{2} W X_{i-1,N-1} + \frac{y_{i+1,N} - y_{i,N-1}}{2} W X_{i,N-1} \right) + \left(\frac{x_{i-1,N} - x_{i,N-1}}{2} W Y_{i-1,N-1} + \frac{x_{i+1,N} - x_{i,N-1}}{2} W Y_{i,N-1} \right) \right] / l_{i,N}.$$

Para $j = 2, \dots, N-1$ y $i = 1$, obtenemos los puntos que están a la frontera

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{1,j} = \sum_{j=2}^{N-1} \left[\left(\frac{y_{1,j+1} - y_{2,j}}{2} W X_{1,j} + \frac{y_{2,j} - y_{1,j-1}}{2} W X_{1,j-1} \right) - \left(\frac{x_{1,j+1} - x_{2,j}}{2} W Y_{1,j} + \frac{x_{2,j} - x_{1,j-1}}{2} W Y_{1,j-1} \right) \right] / l_{1,j}.$$

Finalmente los cuatro puntos que faltan por obtener,

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{1,1} = \left(\frac{y_{1,2} - y_{2,1}}{2} W X_{1,1} - \frac{x_{1,2} - x_{2,1}}{2} W Y_{1,1} \right) / l_{1,1},$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{B}^h \vec{W})_{M,1} &= \left(\frac{y_{M,2} - y_{M-1,1}}{2} W X_{M-1,1} - \frac{x_{M,2} - x_{M-1,1}}{2} W Y_{M-1,1} \right) / l_{M,1}, \\
(\mathcal{B}^h \vec{W})_{M,N} &= \left(\frac{y_{M-1,N} - y_{M,N-1}}{2} W X_{M-1,N-1} - \frac{x_{M-1,N} - x_{M,N-1}}{2} W Y_{M-1,N-1} \right) / l_{M,N}, \\
(\mathcal{B}^h \vec{W})_{1,N} &= \left(\frac{y_{2,N} - y_{1,N-1}}{2} W X_{1,N-1} - \frac{x_{2,N} - x_{1,N-1}}{2} W Y_{1,N-1} \right) / l_{1,N}.
\end{aligned}$$

Para completar nuestra consideración, debemos escoger una fórmula para obtener $A_{i,j}$ que es el área de la región $\Omega_{i,j}$ y la longitud asociada con los nodos a la frontera $l_{i,j}$. Para tener esto vamos a usar algunas propiedades relacionadas con la construcción del operador.

Primero reagruparemos los términos del esquema que se obtuvo para el operador divergencia como sigue:

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \vec{W})_{i,j} &= \left[(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) W X_{i,j} - (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) W Y_{i,j} \right. \\
&\quad + (y_{i-1,j} - y_{i,j+1}) W X_{i-1,j} - (x_{i-1,j} - x_{i,j+1}) W Y_{i-1,j} \\
&\quad + (y_{i,j-1} - y_{i-1,j}) W X_{i-1,j-1} - (x_{i,j-1} - x_{i-1,j}) W Y_{i-1,j-1} \\
&\quad \left. + (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) W X_{i,j-1} - (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) W Y_{i,j-1} \right] / (2A_{i,j}).
\end{aligned}$$

Ahora denotemos como $CI_{i,j}$ (celda interior) al cuadro que se forma con cuatro celdas juntas como se muestra en la figura 4.3 y denotamos cada uno de sus lados como,

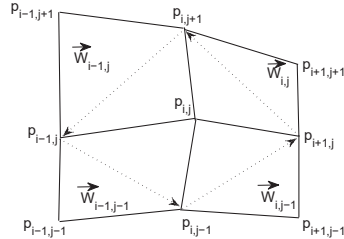


Figura 4.3: Contorno para el operador divergencia.

$$l_{(i,j+1)(i+1,j)}, l_{(i-1,j)(i,j+1)}, l_{(i,j-1)(i-1,j)}, l_{(i+1,j)(i,j-1)},$$

y la normal exterior a estos lados como

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{(i,j+1)(i+1,j)} &= \left(\frac{y_{i,j+1} - y_{i+1,j}}{l_{(i,j+1)(i+1,j)}}, -\frac{x_{i,j+1} - x_{i+1,j}}{l_{(i,j+1)(i+1,j)}} \right), \\
\vec{n}_{(i-1,j)(i,j+1)} &= \left(\frac{y_{i-1,j} - y_{i,j+1}}{l_{(i-1,j)(i,j+1)}}, -\frac{x_{i-1,j} - x_{i,j+1}}{l_{(i-1,j)(i,j+1)}} \right), \\
\vec{n}_{(i,j-1)(i-1,j)} &= \left(\frac{y_{i,j-1} - y_{i-1,j}}{l_{(i,j-1)(i-1,j)}}, -\frac{x_{i,j-1} - x_{i-1,j}}{l_{(i,j-1)(i-1,j)}} \right), \\
\vec{n}_{(i+1,j)(i,j-1)} &= \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j-1}}{l_{(i+1,j)(i,j-1)}}, -\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j-1}}{l_{(i+1,j)(i,j-1)}} \right),
\end{aligned}$$

teniendo esto ultimo en cuenta podemos reescribir el esquema del operador divergencia como sigue,

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \vec{W})_{i,j} &= \left[\left(\vec{W}_{i,j}, \vec{n}_{(i,j+1)(i+1,j)} \right) l_{(i,j+1)(i+1,j)} \right. \\
&\quad + \left(\vec{W}_{i-1,j}, \vec{n}_{(i-1,j)(i,j+1)} \right) l_{(i-1,j)(i,j+1)} \\
&\quad + \left(\vec{W}_{i-1,j-1}, \vec{n}_{(i,j-1)(i-1,j)} \right) l_{(i,j-1)(i-1,j)} \\
&\quad \left. + \left(\vec{W}_{i,j-1}, \vec{n}_{(i+1,j)(i,j-1)} \right) l_{(i+1,j)(i,j-1)} \right] / (2A_{i,j}),
\end{aligned}$$

donde $(,)$ denota el producto usual de dos vectores. Ahora de la definición del operador divergencia,

$$\nabla \cdot \vec{w} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\oint_{\partial A} (\vec{w}, \vec{n}) dA}{A}, \quad (4.6)$$

podemos ver que la expresión para divergencia puede ser considerada como en (4.6) si tomamos $CI_{i,j}$ como A en (4.6), de modo que

$$A_{i,j} = \frac{CI_{i,j}}{2}.$$

Debido a que cada $CI_{i,j}$ contiene cuatro triángulos, como podemos ver en nuestra figura 4.3, $CI_{i,j}$ es dos veces el tamaño de $\Omega_{i,j}$. Para mallas suaves, es posible probar que la elección de $A_{i,j}$ nos da el error de truncación de primer orden. Además, cualquier elección de $A_{i,j}$ donde

$$A_{i,j} = CI_{i,j} + O(h^2),$$

nos dará un error de truncamiento de primer orden en una malla suave. Una manera comun de tomar el valor de $A_{i,j}$ es la siguiente,

$$A_{i,j} = 0.25(\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j} + \Omega_{i-1,j-1} + \Omega_{i,j-1}),$$

que viene siendo el promedio de las cuatro celdas involucradas.

Consideremos el operador $\mathcal{B}^h$ en la frontera. Tomando frontera de la malla, por ejemplo, para $i = 2, \dots, M-1$ y $j = 1$,

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{i,1} = \left[\left(\frac{y_{i,2} - y_{i+1,1}}{2} W X_{i,1} - \frac{y_{i,2} - y_{i-1,1}}{2} W X_{i-1,1} \right) - \left(\frac{x_{i,2} - x_{i+1,1}}{2} W Y_{i,1} - \frac{x_{i,2} - x_{i-1,1}}{2} W Y_{i-1,1} \right) \right].$$

Haciendo algo similar como en el caso del operador divergencia, lo anterior lo podemos reescribir como sigue

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{i,1} = \frac{(\vec{W}_{i,1}, \vec{n}_{(i,2)(i+1,1)}) l_{(i,2)(i+1,1)} + (\vec{W}_{i-1,1}, \vec{n}_{(i-1,1)(i,2)}) l_{(i-1,1)(i,2)}}{2l_{i,1}}.$$

Nótese que podemos ver que $\mathcal{B}_{i,1}^h$ es la aproximación de alguna componente normal del vector $\vec{W}$ debido a que luce como un promedio de las componentes que son normales a $l_{(i,2)(i+1,1)}$ y $l_{(i-1,1)(i,2)}$. Esta fórmula tiene que ser exacta al menos para los vectores constantes, que es, $\mathcal{B}_{i,1}^h$ debe aproximar la componente normal del vector $\vec{W} = (WX, WY) = \text{const}$, respecto a alguna dirección. Si sustituimos el vector constante $\vec{W}$ en la formula (4.7) para $\mathcal{B}_{i,1}^h$, obtenemos

$$(\mathcal{B}^h \vec{W})_{i,1} = \frac{y_{i-1,1} - y_{i+1,1}}{2l_{i,1}} WX - \frac{x_{i-1,1} - x_{i+1,1}}{2l_{i,1}} WY.$$

Sabemos que lo anterior debe aproximar la expresión $-(\vec{W}, \vec{n})$, y no es difícil ver de la formula previa que sólo hay una posibilidad donde la componente normal al vector es mínima. Tomamos,

$$l_{i,1} = 0,5 l_{(i-1,1)(i+1,1)}.$$

Por lo tanto, $(\mathcal{B}^h \vec{W})_{i,1}$ aproxima la expresión $-(\vec{W}, \vec{n}_{(i-1,1)(i+1,1)})$ (ver figura (4.4)). Si vemos detalladamente nuestro problema, veremos que es una aproximación natural para $-(\vec{W}, \vec{n})$ en el nodo $(i, 1)$ debido a que no se tiene una única dirección en el nodo. Notemos que para una malla suave, podemos usar otra expresión para $l_{i,1}$, por ejemplo,

$$l_{i,1} = 0,5(l_{\xi_{i-1,1}} + l_{\xi_{i,1}}).$$

Similar al caso de la frontera para $i = 2, \dots, M-1$ y $j = 1$, encontramos las expresiones para longitud del nodo en las otras fronteras de la malla. Tenemos

$$\begin{aligned} l_{i,1} &= 0,5 l_{(i-1,1)(i+1,1)}, & i &= 2, \dots, M-1, \\ l_{M,j} &= 0,5 l_{(M,j)(M,j+1)}, & j &= 2, \dots, N-1, \\ l_{i,N} &= 0,5 l_{(i-1,N)(i+1,N)}, & i &= 2, \dots, M-1, \\ l_{1,j} &= 0,5 l_{(1,j-1)(1,j+1)}, & j &= 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

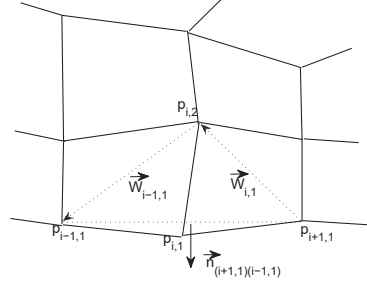


Figura 4.4: Aproximación a la frontera.

y para los cuatro nodos en las esquinas $(1, 1)$, $(M, 1)$, (M, N) y $(1, N)$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} l_{1,1} &= 0,5l_{(1,2)(2,1)}, \\ l_{M,1} &= 0,5l_{(M-1,1)(M,2)}, \\ l_{M,N} &= 0,5l_{(M,N-1)(M-1,N)}, \\ l_{1,N} &= 0,5l_{(2,N)(1,N-1)}, \end{aligned}$$

La figura (4.5) ilustra la aproximación al nodo $(1, 1)$. Así, la expresión $(\mathcal{B}^h \vec{W})$ es la aproximación a $-(\vec{W}, \vec{n}_{(2,1)(1,2)})$.

Como resultado, tenemos una aproximación al operador divergencia en los nodos internos de la malla, y la aproximación para la componente norval del vector en la frontera.

Ahora definiremos operadores $\mathcal{K}$ y $\mathcal{D}$. $\mathcal{K}$ es una matriz simétrica definida positiva; esto para garantizar que el operador sea de tipo elíptico:

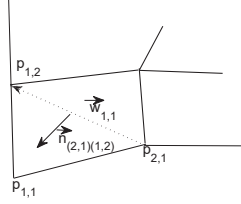
$$K = \begin{pmatrix} KXX & KXY \\ KXY & KYY \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

y

$$\mathcal{K} \vec{W} = \begin{pmatrix} KXXWX + KXYWY \\ KXYWX + KYYWY \end{pmatrix}.$$

K se evalúa en el centro de la celda (similar a las componentes del vector $\vec{W}$), tomando esto en cuenta podemos definir el operador discreto $\mathcal{K}^h$ como sigue:

$$(\mathcal{K}^h \vec{W})_{i,j} = \begin{pmatrix} KXX_{i,j}WX_{i,j} + KXY_{i,j}WY_{i,j} \\ KXY_{i,j}WX_{i,j} + KYY_{i,j}WY_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Figura 4.5: Aproximación al nodo $p_{1,1}$.

Ahora, definamos al operador $\mathcal{D}$. Si asumimos que la función α está dada por el valor de los nodos a la frontera, tenemos

$$(\mathcal{D}^h u)_{i,j} = \alpha_{i,j} u_{i,j},$$

recordemos que el operador $\mathcal{D}$ toma los nodos (i, j) que pertenecen a la frontera.

4.3. Un problema con condiciones de frontera de tipo Dirichlet

Usando los esquemas en diferencias que se obtuvieron para los operadores divergencia y gradiente en la sección anterior, resolveremos una ecuación diferencial parcial de tipo elíptica con condiciones de frontera de tipo Dirichlet, que de forma general podemos escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} [-\nabla \cdot (K(x, y) \nabla u(x, y))]_{i,j} &= \varphi_{i,j} & i &= 2, \dots, M-1; \\ & & j &= 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (4.8)$$

con K una matriz simétrica definida positiva,

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix}$$

y $\varphi_{i,j} = f(x_{i,j}, y_{i,j})$. Las condiciones de frontera de tipo Dirichlet las podemos escribir como sigue,

$$\begin{aligned} u_{i,1} &= \psi_{i,1}, & i &= 1, \dots, M, \\ u_{M,j} &= \psi_{M,j}, & j &= 1, \dots, N, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i,N} &= \psi_{i,N}, \quad i = 1, \dots, M, \\ u_{1,j} &= \psi_{1,j}, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

De las condiciones de frontera de tipo Dirichlet sabemos el valor de u en la frontera, de modo que los nodos de la malla que andamos buscando son los nodos del interior de la malla,

$$u_{i,j}, \quad i = 2, \dots, M-1; j = 2, \dots, N-1.$$

Primero, aplicando los esquemas que se obtuvieron en la sección anterior para el gradiente y multiplicando con la matriz K vemos que,

$$\begin{aligned} K(x, x) \nabla u(x, y) &\approx \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_x u \\ D_y u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} K_{11} D_x u + K_{12} D_y u \\ K_{12} D_x u + K_{22} D_y u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora aplicando los esquemas en diferencias el operador $-\nabla \cdot (K(x, y) \nabla u(x, y))$ en un nodo $p_{i,j}$ de la malla se aproxima mediante:

$$\begin{aligned} [-\nabla \cdot (K(x, y) \nabla u(x, y))]_{i,j} &\approx C_{i,j} u_{i,j} + E_{i,j} u_{i+1,j} + N E_{i,j} u_{i+1,j+1} \\ &\quad + N_{i,j} u_{i,j+1} + N W_{i,j} u_{i-1,j+1} \\ &\quad + W_{i,j} u_{i-1,j} + S W_{i,j} u_{i-1,j-1} \\ &\quad + S_{i,j} u_{i,j-1} + S E_{i,j} u_{i+1,j-1}. \end{aligned}$$

El estencil para este operador en el punto $p_{i,j}$ de la malla involucra nueve puntos, como se muestra en la figura 4.6, donde $C, E, NE, N, NW, W, SW, S$ y SE son los coeficientes de los nodos vecinos. A manera de ejemplo, el valor de E se calcula de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left(\frac{K_{11}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\ &\quad + (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) \left(\frac{K_{11}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \\ &\quad - (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\ &\quad - (y_{i+1,j} - y_{i,j-1}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}) \\ &\quad - (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j})}{2\mathcal{A}_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\ &\quad - (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j-1})}{2\mathcal{A}_{i,j-1}} \right) (y_{i+1,j-1} - y_{i,j}) \end{aligned}$$

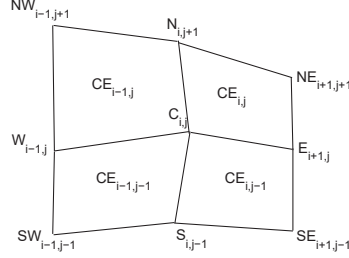


Figura 4.6: Estencil para el operador divergencia gradiente.

$$\begin{aligned}
& + (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left(\frac{K_{22}(P_{i,j})}{2A_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\
& + (x_{i+1,j} - x_{i,j-1}) \left(\frac{K_{22}(P_{i,j-1})}{2A_{i,j-1}} \right) (x_{i+1,j-1} - x_{i,j}).
\end{aligned}$$

y para N se tiene,

$$\begin{aligned}
N_{i,j} = & -(y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left(\frac{K_{11}(P_{i,j})}{2A_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\
& + (y_{i-1,j} - y_{i,j+1}) \left(\frac{K_{11}(P_{i-1,j})}{2A_{i-1,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i-1,j+1}) \\
& + (y_{i,j+1} - y_{i+1,j}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j})}{2A_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\
& - (y_{i-1,j} - y_{i,j+1}) \left(\frac{K_{12}(P_{i-1,j})}{2A_{i-1,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i-1,j+1}) \\
& + (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left(\frac{K_{12}(P_{i,j})}{2A_{i,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i+1,j+1}) \\
& - (x_{i-1,j} - x_{i,j+1}) \left(\frac{K_{12}(P_{i-1,j})}{2A_{i-1,j}} \right) (y_{i,j} - y_{i-1,j+1}) \\
& - (x_{i,j+1} - x_{i+1,j}) \left(\frac{K_{22}(P_{i,j})}{2A_{i,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i+1,j+1}) \\
& + (x_{i-1,j} - x_{i,j+1}) \left(\frac{K_{22}(P_{i-1,j})}{2A_{i-1,j}} \right) (x_{i,j} - x_{i-1,j+1}).
\end{aligned}$$

Los demás se obtienen de manera similar [10].

Con $P_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j})$ el nodo donde queremos aproximar la solución de la

ecuación diferencial, en la figura 4.6 lo representamos como $C_{i,j}$, K es evaluado en el centro de la celda $C_{i,j}$ y $A_{i,j}$ es el promedio de las áreas de las cuatro celdas involucradas $CE_{i,j}$, $CE_{i-1,j}$, $CE_{i,j-1}$ y $CE_{i-1,j-1}$. Como resultado obtenemos un sistema de ecuaciones que se resuelve utilizando *Gauss-Seidel*.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Ejemplos numéricos

Se proponen tres ecuaciones diferenciales de tipo elípticas y se resuelven numéricamente sobre las siguientes regiones: *Havana, England, Chapala, Uca, Michoacán, Ucha, Swan, M19, Anillo y Ele*. Usamos mallas convexas para estas regiones con 21, 41, 61 y 81 puntos las cuales fueron generadas minimizando los funcionales ya mencionados en la sección 2.

1. En primer lugar tenemos a K como la matriz identidad y u como la exponencial,

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = 2 \exp(2x + y).$$

2. En segundo lugar tenemos a K como el producto de dos matrices P y D , y u expresado en senos

$$K(x, y) = P^T D P,$$

con

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{8}) & \sin(\frac{\pi}{8}) \\ -\sin(\frac{\pi}{8}) & \cos(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 \end{pmatrix}$$

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

3. Por ultimo tenemos a K con una ligera variación de P y D , y u la misma del problema anterior,

$$K(x, y) = P^T D P,$$

con

$$P = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

y

$$D = \begin{pmatrix} 1 + 2x^2 + y^2 + y^5 & 0 \\ 0 & 1 + x^2 + 2y^2 + x^3 \end{pmatrix}$$

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

La función f se calculó para que u fuera la solución exacta en cada caso. Para comparar usamos Elementos finitos y en ambos casos los sistemas algebraicos que surgieron se resolvieron usando *Gauss-Seidel*.

5.2. Resultados

Presentamos algunas tablas y gráficas de los resultados numéricos que se obtuvieron de las ecuaciones diferenciales parciales anteriormente mencionadas.

Se utilizaron las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ para medir el error.

La norma $\|\cdot\|_2$ se calculó como una función de malla

$$\|u - U\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j} - U_{i,j})^2 \mathcal{A}_{ij}},$$

de donde u es la solución exacta y U es la aproximada calculadas en el nodo $P_{i,j}$ y $\mathcal{A}_{ij}$ es el área de la celda $CE_{i,j}$. También se calculó un orden de aproximación como sigue, por ejemplo en la tabla uno tenemos el $l2err$ de las mallas de *ann21.red*, *ann41.red*, *ann61.red* y *ann81.red* se tomo

$$O = \frac{\log(\frac{ann21}{ann41})}{\log(\frac{40}{20})}$$

$$O = \frac{\log(\frac{ann41}{ann61})}{\log(\frac{60}{40})}$$

y

$$O = \frac{\log(\frac{ann81}{ann61})}{\log(\frac{80}{60})}.$$

Con O el orden de aproximación obtenido de manera empírica.

A continuación se presentan unas tablas con los resultados obtenidos, en donde la h representa elementos finitos y d representa diferencias finitas.

Las gráficas que se muestran fueron generadas con las mallas de 81×81 como las que se muestran en la sección (2.3.1), tomando el error cuadrático en ambos métodos, esto para los cuatro funcionales con los cuales fueron generadas las mallas.

Cuadro 5.1: Resultados para el problema 1 con el funcional $1/2(Hw+A)$

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	1.5016e-03		8.0069e-03		1.5053e-03		8.4017e-03	
ann41	6.4369e-04	1.22	8.9790e-03	-0.17	4.6886e-04	1.68	3.2419e-03	1.37
ann61	2.0196e-04	2.86	2.3938e-03	3.26	1.8895e-04	2.24	1.9412e-03	1.26
ann81	1.0495e-04	2.28	2.1213e-03	0.42	1.0207e-04	2.14	8.8599e-04	2.73
cha21	1.1731e-03		1.6512e-02		1.1820e-03		1.5041e-02	
cha41	2.8414e-04	2.05	4.8980e-03	1.75	3.1178e-04	1.92	4.2478e-03	1.82
cha61	1.3122e-04	1.91	2.8459e-03	1.34	1.4980e-04	1.81	2.1754e-03	1.65
cha81	7.2536e-05	2.06	1.2608e-03	2.83	8.3310e-05	2.04	1.1140e-03	2.33
ele21	1.3344e-03		1.0033e-02		7.1752e-04		5.2527e-03	
ele41	2.9233e-04	2.19	3.2790e-03	1.61	1.7025e-04	2.08	1.3585e-03	1.95
ele61	1.1845e-04	2.23	1.6467e-03	1.7	7.4928e-05	2.02	6.2116e-04	1.93
ele81	6.0782e-05	2.32	9.8790e-04	1.78	4.1849e-05	2.02	3.5717e-04	1.92
eng21	4.5917e-03		7.0987e-02		4.4693e-03		4.3971e-02	
eng41	1.3423e-03	1.77	2.8461e-02	1.32	1.3534e-03	1.72	1.7812e-02	1.3
eng61	3.8934e-04	3.05	7.7363e-03	3.21	4.9190e-04	2.5	7.0108e-03	2.3
eng81	2.2991e-04	1.83	3.9650e-03	2.32	3.4644e-04	1.22	5.5983e-03	0.78
hab21	7.6563e-03		7.5200e-02		3.2913e-03		3.9397e-02	
hab41	1.4324e-03	2.42	2.0030e-02	1.91	1.0280e-03	1.68	1.6671e-02	1.24
hab61	7.5447e-04	1.58	1.4286e-02	0.83	4.9332e-04	1.81	1.1681e-02	0.88
hab81	3.8681e-04	2.32	6.6376e-03	2.66	2.2474e-04	2.73	3.9450e-03	3.77
m1921	5.7313e-03		2.5781e-02		1.9787e-03		1.1832e-02	
m1941	1.3570e-03	2.08	7.1592e-03	1.85	5.2625e-04	1.91	5.6724e-03	1.06
m1961	5.8192e-04	2.09	3.5541e-03	1.73	2.0739e-04	2.3	3.3897e-03	1.27
m1981	2.8994e-04	2.42	1.8239e-03	2.32	1.0629e-04	2.32	1.2768e-03	3.39
mic21	5.1097e-03		3.9575e-02		3.2617e-03		3.4913e-02	
mic41	1.5821e-03	1.69	1.4989e-02	1.4	8.6374e-04	1.92	1.1650e-02	1.58
mic61	5.8157e-04	2.47	9.3771e-03	1.16	3.7928e-04	2.03	7.1426e-03	1.21
mic81	3.8068e-04	1.47	4.7131e-03	2.39	2.1595e-04	1.96	3.2799e-03	2.71
swa21	3.0908e-03		1.3936e-02		2.2076e-03		1.2594e-02	
swa41	5.0706e-04	2.61	5.1100e-03	1.45	3.5907e-04	2.62	4.0647e-03	1.63
swa61	3.1725e-04	1.16	1.6509e-03	2.79	2.1823e-04	1.23	1.4639e-03	2.52
swa81	1.6952e-04	2.18	7.9115e-04	2.56	1.1221e-04	2.31	1.0004e-03	1.32
uca21	5.9270e-03		9.1224e-02		5.4445e-03		6.4096e-02	
uca41	1.1781e-03	2.33	3.0962e-02	1.56	1.1263e-03	2.27	2.4472e-02	1.39
uca61	4.6475e-04	2.29	1.2435e-02	2.25	4.5177e-04	2.25	8.6966e-03	2.55
uca81	2.9936e-04	1.53	1.5975e-02	-0.87	3.0279e-04	1.39	1.1442e-02	-0.95
uch21	1.2392e-02		1.4054e-01		1.2827e-02		1.1830e-01	
uch41	2.3518e-03	2.4	2.8951e-02	2.28	3.2705e-03	1.97	4.0846e-02	1.53
uch61	1.0216e-03	2.06	2.2533e-02	0.62	1.7443e-03	1.55	3.0584e-02	0.71
uch81	5.2704e-04	2.3	1.1124e-02	2.45	1.0394e-03	1.8	1.9285e-02	1.6

Cuadro 5.2: Resultados para el problema 1 con el funcional $1/2(Sw+L)$

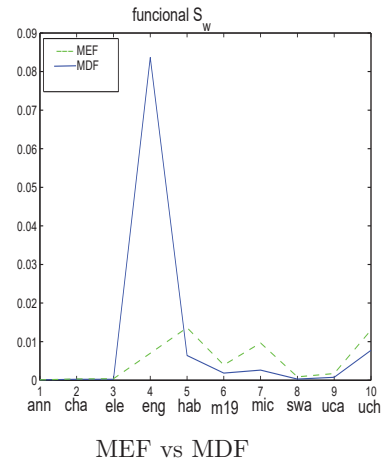
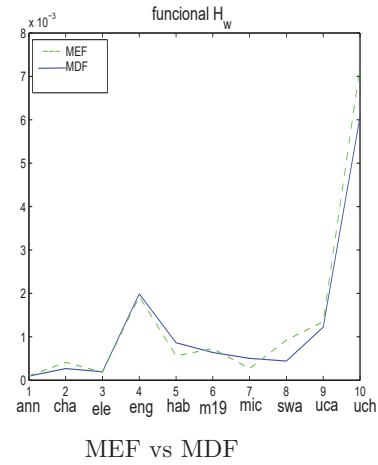
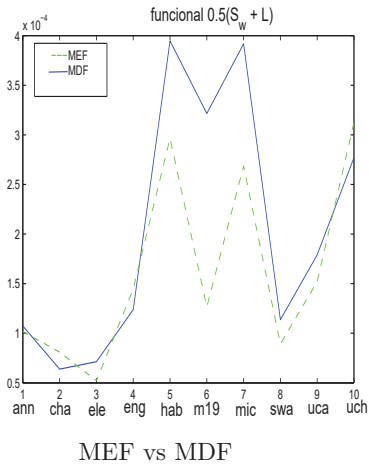
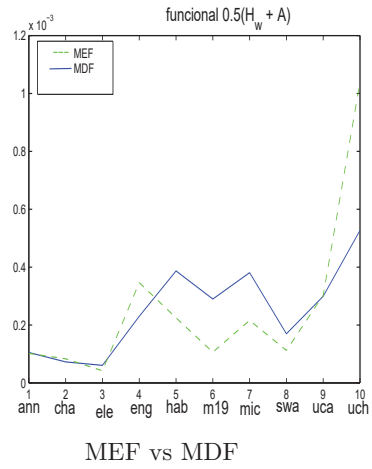
Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	1.4819e-03		1.1854e-02		1.2901e-03		9.2589e-03	
ann41	6.8925e-04	1.1	9.6812e-03	0.29	4.9210e-04	1.39	3.4212e-03	1.44
ann61	2.0477e-04	2.99	2.5595e-03	3.28	1.8733e-04	2.38	2.2608e-03	1.02
ann81	1.0726e-04	2.25	2.2086e-03	0.51	1.0172e-04	2.12	1.0466e-03	2.68
cha21	9.9854e-04		1.6112e-02		1.0447e-03		1.5802e-02	
cha41	2.5191e-04	1.99	4.1162e-03	1.97	3.0460e-04	1.78	3.7949e-03	2.06
cha61	1.1358e-04	1.96	2.0248e-03	1.75	1.3682e-04	1.97	1.6978e-03	1.98
cha81	6.3864e-05	2	1.2401e-03	1.7	8.1002e-05	1.82	1.0652e-03	1.62
ele21	1.5633e-03		1.3495e-02		8.6466e-04		4.5785e-03	
ele41	3.1872e-04	2.29	4.0746e-03	1.73	2.0931e-04	2.05	1.3739e-03	1.74
ele61	1.3536e-04	2.11	2.0146e-03	1.74	9.5234e-05	1.94	8.2572e-04	1.26
ele81	7.1315e-05	2.23	1.2556e-03	1.64	5.2179e-05	2.09	5.4722e-04	1.43
eng21	2.1157e-03		2.3510e-02		1.6312e-03		1.6410e-02	
eng41	5.3140e-04	1.99	4.9204e-03	2.26	5.7762e-04	1.5	7.2876e-03	1.17
eng61	2.2127e-04	2.16	2.3913e-03	1.78	2.2286e-04	2.35	2.7464e-03	2.41
eng81	1.2377e-04	2.02	1.6876e-03	1.21	1.4465e-04	1.5	2.2673e-03	0.67
hab21	7.5000e-03		8.1097e-02		2.3087e-03		1.9456e-02	
hab41	1.4882e-03	2.33	1.9228e-02	2.08	9.8350e-04	1.23	1.7230e-02	0.18
hab61	8.3315e-04	1.43	2.0576e-02	-0.17	5.0263e-04	1.66	8.5972e-03	1.71
hab81	3.9468e-04	2.6	5.6177e-03	4.51	2.9639e-04	1.84	3.7882e-03	2.85
m1921	5.8398e-03		2.6755e-02		1.8016e-03		1.0045e-02	
m1941	1.4427e-03	2.02	7.7678e-03	1.78	5.0978e-04	1.82	5.1068e-03	0.98
m1961	6.1595e-04	2.1	3.7707e-03	1.78	2.2153e-04	2.06	1.7473e-03	2.65
m1981	3.2154e-04	2.26	2.4810e-03	1.46	1.2669e-04	1.94	1.2434e-03	1.18
mic21	5.8067e-03		4.6272e-02		3.7779e-03		3.3835e-02	
mic41	1.5315e-03	1.92	2.1308e-02	1.12	8.7686e-04	2.11	1.2494e-02	1.44
mic61	6.0096e-04	2.31	1.3668e-02	1.1	3.9051e-04	1.99	4.3691e-03	2.59
mic81	3.9179e-04	1.49	6.5369e-03	2.56	2.6849e-04	1.3	2.7264e-03	1.64
swa21	2.0666e-03		1.1633e-02		1.9186e-03		1.4021e-02	
swa41	5.0030e-04	2.05	6.2796e-03	0.89	3.6191e-04	2.41	3.3690e-03	2.06
swa61	2.0964e-04	2.15	1.6932e-03	3.23	1.6583e-04	1.92	1.2826e-03	2.38
swa81	1.1360e-04	2.13	9.4635e-04	2.02	8.9252e-05	2.15	9.3204e-04	1.11
uca21	5.6506e-03		8.9653e-02		5.3104e-03		6.3358e-02	
uca41	8.2756e-04	2.77	1.8383e-02	2.29	5.5259e-04	3.26	1.2749e-02	2.31
uca61	4.0271e-04	1.78	8.2209e-03	1.98	3.1968e-04	1.35	7.0642e-03	1.46
uca81	1.7907e-04	2.82	4.8427e-03	1.84	1.5201e-04	2.58	3.9888e-03	1.99
uch21	5.3345e-03		5.3129e-02		6.1892e-03		6.3519e-02	
uch41	1.0181e-03	2.39	1.7079e-02	1.64	1.3142e-03	2.24	1.5406e-02	2.04
uch61	5.1123e-04	1.7	1.0456e-02	1.21	5.1219e-04	2.32	8.6751e-03	1.42
uch81	2.7711e-04	2.13	6.4561e-03	1.68	3.1246e-04	1.72	5.4825e-03	1.6

Cuadro 5.3: Resultados para el problema 1 con el funcional Hw

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	1.5143e-03		7.0800e-03		1.4069e-03		8.3731e-03	
ann41	5.6169e-04	1.43	6.0327e-03	0.23	4.4353e-04	1.67	2.9321e-03	1.51
ann61	1.9680e-04	2.59	1.3862e-03	3.63	1.8284e-04	2.19	1.3112e-03	1.98
ann81	9.5869e-05	2.5	1.0970e-03	0.81	1.0103e-04	2.06	7.0127e-04	2.18
cha21	2.5155e-03		5.1346e-02		2.7619e-03		3.7309e-02	
cha41	7.9462e-04	1.66	1.9168e-02	1.42	1.0337e-03	1.42	1.4309e-02	1.38
cha61	3.7322e-04	1.86	9.2786e-03	1.79	5.3510e-04	1.62	8.2179e-03	1.37
cha81	2.6915e-04	1.14	8.8876e-03	0.15	4.1267e-04	0.9	6.7481e-03	0.68
ele21	2.1594e-03		2.4198e-02		1.3019e-03		1.2068e-02	
ele41	6.1680e-04	1.81	1.1824e-02	1.03	4.8766e-04	1.42	6.2338e-03	0.95
ele61	3.1110e-04	1.69	7.7931e-03	1.03	2.7536e-04	1.41	4.1150e-03	1.02
ele81	1.9509e-04	1.62	5.8150e-03	1.02	1.8450e-04	1.39	3.0486e-03	1.04
eng21	3.5785e-03		4.7329e-02		3.1932e-03		2.7595e-02	
eng41	5.1518e-03	-0.53	8.9451e-02	-0.92	6.2110e-03	-0.96	6.3791e-02	-1.21
eng61	2.0846e-03	2.23	3.4338e-02	2.36	2.1049e-03	2.67	2.6678e-02	2.15
eng81	1.9914e-03	0.16	3.2224e-02	0.22	1.9263e-03	0.31	2.2952e-02	0.52
hab21	1.0018e-02		7.3778e-02		5.2255e-03		4.4543e-02	
hab41	3.5754e-03	1.49	3.4240e-02	1.11	2.0041e-03	1.38	2.6795e-02	0.73
hab61	1.6282e-03	1.94	3.1189e-02	0.23	7.6226e-04	2.38	7.7930e-03	3.05
hab81	8.6311e-04	2.21	1.2446e-02	3.19	5.6206e-04	1.06	8.7766e-03	-0.41
m1921	7.9368e-03		5.1307e-02		4.8929e-03		3.3848e-02	
m1941	2.4741e-03	1.68	3.5359e-02	0.54	2.2910e-03	1.09	2.2848e-02	0.57
m1961	1.1668e-03	1.85	2.2140e-02	1.15	1.2298e-03	1.53	1.3718e-02	1.26
m1981	6.4001e-04	2.09	1.4731e-02	1.42	7.2745e-04	1.83	8.7306e-03	1.57
mic21	5.6978e-03		4.8488e-02		4.3467e-03		3.9474e-02	
mic41	2.6613e-03	1.1	4.2145e-02	0.2	2.8089e-03	0.63	4.3726e-02	-0.15
mic61	1.9518e-03	0.76	5.4395e-02	-0.63	2.3184e-03	0.47	4.0290e-02	0.2
mic81	5.0262e-04	4.72	9.4022e-03	6.1	2.7119e-04	7.46	6.8629e-03	6.15
swa21	5.7347e-03		3.3119e-02		1.3480e-02		6.9110e-02	
swa41	2.1289e-03	1.43	1.6953e-02	0.97	3.0394e-03	2.15	1.3741e-02	2.33
swa61	7.5514e-04	2.56	7.9452e-03	1.87	1.6732e-03	1.47	8.7404e-03	1.12
swa81	4.4288e-04	1.85	4.8838e-03	1.69	9.2521e-04	2.06	4.6657e-03	2.18
uca21	6.2842e-03		8.2203e-02		5.8592e-03		5.5728e-02	
uca41	1.7634e-03	1.83	3.8740e-02	1.09	1.8451e-03	1.67	3.1222e-02	0.84
uca61	1.3498e-03	0.66	3.6983e-02	0.11	1.3740e-03	0.73	2.3467e-02	0.7
uca81	1.2234e-03	0.34	3.4557e-02	0.24	1.3504e-03	0.06	2.2535e-02	0.14
uch21	2.7365e-02		2.6805e-01		3.0905e-02		2.0916e-01	
uch41	1.2566e-02	1.12	1.4453e-01	0.89	1.4847e-02	1.06	1.2507e-01	0.74
uch61	8.8881e-03	0.85	1.0835e-01	0.71	1.0218e-02	0.92	9.0591e-02	0.8
uch81	6.0736e-03	1.32	7.2037e-02	1.42	7.2173e-03	1.21	6.5254e-02	1.14

Cuadro 5.4: Resultados para el problema 1 con el funcional Sw

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	1.5653e-03		1.3657e-02		1.5069e-03		1.0705e-02	
ann41	5.8217e-04	1.43	6.4361e-03	1.09	5.5292e-04	1.45	4.6186e-03	1.21
ann61	2.1308e-04	2.48	3.0865e-03	1.81	2.0464e-04	2.45	3.0844e-03	1
ann81	1.1042e-04	2.29	2.7380e-03	0.42	1.0989e-04	2.16	1.7108e-03	2.05
cha21	1.3065e-03		1.4526e-02		1.2264e-03		1.2203e-02	
cha41	6.1544e-04	1.09	1.2902e-02	0.17	9.0436e-04	0.44	1.5774e-02	-0.37
cha61	3.0929e-04	1.7	1.2485e-02	0.08	3.9189e-04	2.06	9.7025e-03	1.2
cha81	2.4725e-04	0.78	1.1651e-02	0.24	3.2514e-04	0.65	1.2064e-02	-0.76
ele21	4.1044e-03		3.5987e-02		9.5508e-03		8.0146e-02	
ele41	6.8892e-04	2.57	1.0529e-02	1.77	6.0030e-04	3.99	7.3794e-03	3.44
ele61	4.8052e-04	0.89	4.5747e-03	2.06	1.2212e-03	-1.75	1.0276e-02	-0.82
ele81	2.5070e-04	2.26	6.7523e-03	-1.35	3.8876e-04	3.98	4.9354e-03	2.55
eng21	7.1855e-03		6.6611e-02		9.5443e-03		9.5297e-02	
eng41	4.8560e-03	0.57	8.3424e-02	-0.32	6.7055e-03	0.51	5.8346e-02	0.71
eng61	3.1750e-03	1.05	6.4257e-02	0.64	6.2997e-03	0.15	5.5193e-02	0.14
eng81	8.3640e-02	-11.37	1.2100e+00	-10.2	6.9738e-03	-0.35	8.8340e-02	-1.63
hab21	1.0830e-02		1.1582e-01		1.1359e-02		1.0968e-01	
hab41	1.0354e-02	0.06	1.0785e-01	0.1	2.3659e-02	-1.06	1.8148e-01	-0.73
hab61	4.3224e-03	2.15	7.8427e-02	0.79	1.2202e-02	1.63	1.3784e-01	0.68
hab81	6.3992e-03	-1.36	9.9203e-02	-0.82	1.3619e-02	-0.38	1.3044e-01	0.19
m1921	6.9749e-03		4.9064e-02		9.5102e-03		5.3702e-02	
m1941	1.5561e-03	2.16	1.3918e-02	1.82	2.2142e-03	2.1	1.4851e-02	1.85
m1961	4.3650e-03	-2.54	5.9650e-02	-3.59	1.0795e-02	-3.91	1.0830e-01	-4.9
m1981	1.8639e-03	2.96	2.9972e-02	2.39	3.9469e-03	3.5	4.3866e-02	3.14
mic21	2.2915e-02		2.6808e-01		4.2111e-02		3.9353e-01	
mic41	5.4546e-03	2.07	6.1934e-02	2.11	8.5386e-03	2.3	9.0332e-02	2.12
mic61	3.4950e-03	1.1	5.8854e-02	0.13	1.2879e-02	-1.01	1.3002e-01	-0.9
mic81	2.6141e-03	1.01	5.0345e-02	0.54	9.6652e-03	1	1.1807e-01	0.34
swa21	3.4500e-03		1.7397e-02		2.4662e-03		1.6159e-02	
swa41	8.9557e-04	1.95	1.0174e-02	0.77	1.5728e-03	0.65	1.0995e-02	0.56
swa61	1.0314e-03	-0.35	2.1401e-02	-1.83	4.0173e-03	-2.31	4.4000e-02	-3.42
swa81	3.1143e-04	4.16	2.8110e-03	7.06	8.6128e-04	5.35	1.3109e-02	4.21
uca21	8.0281e-03		1.1825e-01		1.3995e-02		1.3276e-01	
uca41	3.4498e-03	1.22	3.9090e-02	1.6	8.7372e-03	0.68	1.2418e-01	0.1
uca61	4.9294e-03	-0.88	9.1274e-02	-2.09	1.5172e-02	-1.36	2.0086e-01	-1.19
uca81	7.5881e-04	6.5	1.0588e-02	7.49	1.7364e-03	7.53	1.5424e-02	8.92
uch21	2.2573e-02		2.0644e-01		3.2760e-02		3.4958e-01	
uch41	8.7193e-03	1.37	1.3968e-01	0.56	2.0776e-02	0.66	1.7218e-01	1.02
uch61	66.9824e-03	0.55	1.8868e-01	-0.74	1.4264e-02	0.93	1.5888e-01	0.2
uch81	7.7544e-03	-0.36	1.6891e-01	0.38	1.3025e-02	0.32	1.8416e-01	-0.51



Cuadro 5.5: Resultados para el problema 2 con el funcional $1/2(Hw+A)$

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	3.4330e-04		1.9626e-03		4.0522e-04		1.7652e-03	
ann41	1.4378e-04	1.26	1.5967e-03	0.3	1.2102e-04	1.74	5.7865e-04	1.61
ann61	5.4876e-05	2.38	5.0827e-04	2.82	5.0906e-05	2.14	4.4179e-04	0.67
ann81	3.6376e-05	1.43	4.6577e-04	0.3	2.7858e-05	2.1	2.1552e-04	2.5
cha21	1.9756e-04		2.1268e-03		1.0125e-04		1.0265e-03	
cha41	5.3044e-05	1.9	6.0954e-04	1.8	3.0132e-05	1.75	2.5644e-04	2
cha61	3.1900e-05	1.25	4.3241e-04	0.85	1.5253e-05	1.68	1.6915e-04	1.03
cha81	2.7485e-05	0.52	2.5141e-04	1.89	1.0086e-05	1.44	1.4654e-04	0.5
ele21	3.6784e-04		2.1525e-03		2.2437e-04		1.3585e-03	
ele41	7.9212e-05	2.22	6.7684e-04	1.67	5.2074e-05	2.11	4.1968e-04	1.69
ele61	2.6167e-05	2.73	3.6951e-04	1.49	2.2723e-05	2.05	2.4600e-04	1.32
ele81	1.2389e-05	2.6	2.3494e-04	1.57	1.2777e-05	2	1.6290e-04	1.43
eng21	1.4978e-03		1.9743e-02		1.2736e-03		1.0159e-02	
eng41	6.9078e-04	1.12	1.5952e-02	0.31	6.2969e-04	1.02	9.6069e-03	0.08
eng61	1.5937e-04	3.62	2.8299e-03	4.27	2.0934e-04	2.72	4.3269e-03	1.97
eng81	9.8870e-05	1.66	2.1818e-03	0.9	1.3214e-04	1.6	2.3146e-03	2.17
hab21	1.1351e-03		8.3968e-03		6.6394e-04		3.8236e-03	
hab41	3.6187e-04	1.65	3.3120e-03	1.34	2.3192e-04	1.52	4.0103e-03	-0.07
hab61	1.5146e-04	2.15	1.2378e-03	2.43	8.5932e-05	2.45	8.7617e-04	3.75
hab81	9.2595e-05	1.71	1.2213e-03	0.05	4.9549e-05	1.91	8.9734e-04	-0.08
m1921	1.2242e-03		7.1696e-03		6.6697e-04		4.4821e-03	
m1941	2.5162e-04	2.28	1.5980e-03	2.17	1.3632e-04	2.29	1.1090e-03	2.01
m1961	1.2098e-04	1.81	7.5943e-04	1.83	6.2501e-05	1.92	5.4399e-04	1.76
m1981	7.8031e-05	1.52	4.6575e-04	1.7	3.4542e-05	2.06	3.4674e-04	1.57
mic21	8.1943e-04		7.3644e-03		5.2213e-04		2.9076e-03	
mic41	2.2136e-04	1.89	3.0961e-03	1.25	1.7626e-04	1.57	2.4579e-03	0.24
mic61	1.1577e-04	1.6	2.4649e-03	0.56	9.6172e-05	1.49	2.1938e-03	0.28
mic81	7.0144e-05	1.74	1.5330e-03	1.65	5.5482e-05	1.91	1.1688e-03	2.19
swa21	5.2403e-04		2.1692e-03		4.2034e-04		1.9433e-03	
swa41	1.3273e-04	1.98	1.4829e-03	0.55	1.5370e-04	1.45	1.8493e-03	0.07
swa61	5.1935e-05	2.31	2.1593e-04	4.75	4.2895e-05	3.15	2.2973e-04	5.14
swa81	3.5200e-05	1.35	1.4576e-04	1.37	2.1835e-05	2.35	1.5769e-04	1.31
uca21	1.0809e-03		1.5022e-02		8.3088e-04		9.6800e-03	
uca41	2.1449e-04	2.33	3.4420e-03	2.13	1.6778e-04	2.31	1.7460e-03	2.47
uca61	1.2061e-04	1.42	1.7295e-03	1.7	1.0343e-04	1.19	1.5440e-03	0.3
uca81	7.6101e-05	1.6	1.0734e-03	1.66	5.9472e-05	1.92	1.3038e-03	0.59
uch21	1.3004e-03		1.2397e-02		1.1187e-03		1.1050e-02	
uch41	2.7275e-04	2.25	3.3515e-03	1.89	3.3793e-04	1.73	3.6894e-03	1.58
uch61	1.2434e-04	1.94	1.8190e-03	1.51	1.6805e-04	1.72	2.7580e-03	0.72
uch81	7.0436e-05	1.98	8.3883e-04	2.69	1.0290e-04	1.71	1.7624e-03	1.56

Cuadro 5.6: Resultados para el problema 2 con el funcional $1/2(\text{Sw}+\text{L})$

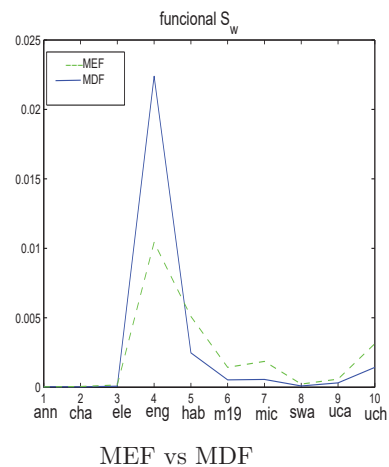
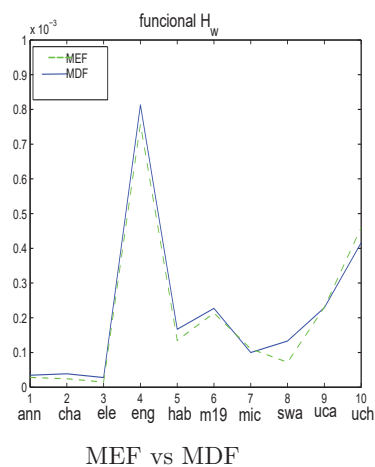
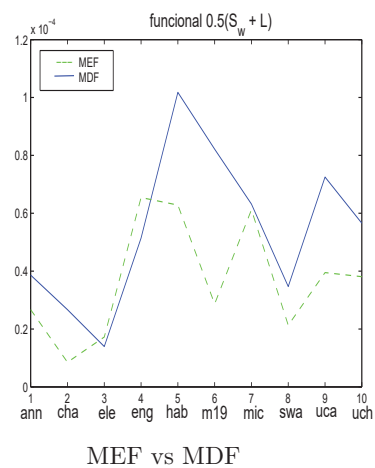
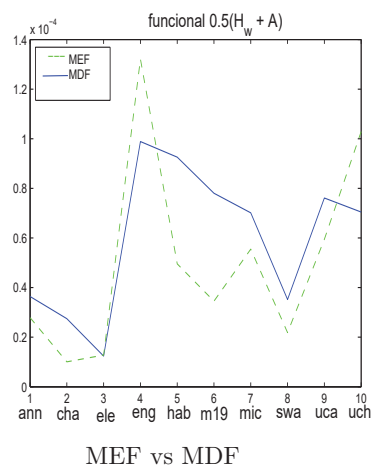
Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	3.8222e-04		3.2082e-03		3.9549e-04		2.1961e-03	
ann41	1.5726e-04	1.28	1.8847e-03	0.77	1.2106e-04	1.71	7.1884e-04	1.61
ann61	5.7019e-05	2.5	5.4079e-04	3.08	5.1118e-05	2.13	5.3445e-04	0.73
ann81	3.8624e-05	1.35	5.0393e-04	0.25	2.6663e-05	2.26	2.5630e-04	2.55
cha21	1.8449e-04		1.8155e-03		1.0368e-04		9.6549e-04	
cha41	4.8856e-05	1.92	5.4900e-04	1.73	2.8488e-05	1.86	3.1559e-04	1.61
cha61	2.9938e-05	1.21	4.4193e-04	0.54	1.3677e-05	1.81	1.7198e-04	1.5
cha81	2.6690e-05	0.4	2.7164e-04	1.69	8.5011e-06	1.65	1.7056e-04	0.03
ele21	3.4701e-04		1.4563e-03		1.8152e-04		1.0865e-03	
ele41	8.4665e-05	2.04	4.8002e-04	1.6	5.4673e-05	1.73	3.7851e-04	1.52
ele61	2.6772e-05	2.84	3.1797e-04	1.02	2.4321e-05	2	1.6311e-04	2.08
ele81	1.3930e-05	2.27	1.7533e-04	2.07	1.7245e-05	1.2	1.5050e-04	0.28
eng21	8.9818e-04		9.8656e-03		6.9919e-04		7.5393e-03	
eng41	2.1777e-04	2.04	2.7094e-03	1.86	2.0476e-04	1.77	2.2106e-03	1.77
eng61	9.2879e-05	2.1	1.5545e-03	1.37	9.7450e-05	1.83	1.3069e-03	1.3
eng81	5.1423e-05	2.06	1.1064e-03	1.18	6.5436e-05	1.38	1.1010e-03	0.6
hab21	1.0743e-03		7.0525e-03		5.9459e-04		4.6888e-03	
hab41	3.8730e-04	1.47	3.0994e-03	1.19	2.1419e-04	1.47	2.6657e-03	0.81
hab61	1.6368e-04	2.12	1.2811e-03	2.18	8.8579e-05	2.18	1.3997e-03	1.59
hab81	1.0179e-04	1.65	1.0832e-03	0.58	6.2824e-05	1.19	1.0972e-03	0.85
m1921	1.2698e-03		6.6723e-03		5.6570e-04		3.5332e-03	
m1941	2.7621e-04	2.2	1.8730e-03	1.83	1.1775e-04	2.26	1.0215e-03	1.79
m1961	1.3137e-04	1.83	9.2451e-04	1.74	5.3613e-05	1.94	5.5476e-04	1.51
m1981	8.2136e-05	1.63	5.7181e-04	1.67	2.8657e-05	2.18	3.7028e-04	1.41
mic21	7.1058e-04		3.9848e-03		5.9949e-04		3.2583e-03	
mic41	1.8966e-04	1.91	3.1652e-03	0.33	1.8348e-04	1.71	2.5028e-03	0.38
mic61	9.8444e-05	1.62	1.7628e-03	1.44	9.3234e-05	1.67	1.5942e-03	1.11
mic81	6.3193e-05	1.54	1.0157e-03	1.92	6.1224e-05	1.46	8.6658e-04	2.12
swa21	4.1871e-04		2.5764e-03		3.9951e-04		1.9437e-03	
swa41	9.4263e-05	2.15	8.5888e-04	1.58	7.7186e-05	2.37	8.6408e-04	1.17
swa61	4.2285e-05	1.98	2.6410e-04	2.91	4.0808e-05	1.57	2.1462e-04	3.44
swa81	3.4684e-05	0.69	1.3882e-04	2.24	2.1270e-05	2.26	1.4727e-04	1.31
uca21	9.7854e-04		1.4684e-02		8.0895e-04		9.6028e-03	
uca41	1.9773e-04	2.31	3.2608e-03	2.17	1.1063e-04	2.87	1.7286e-03	2.47
uca61	1.2720e-04	1.09	1.7945e-03	1.47	8.4785e-05	0.66	1.7037e-03	0.04
uca81	7.2493e-05	1.95	9.2084e-04	2.32	3.9492e-05	2.66	9.6405e-04	1.98
uch21	8.4044e-04		5.1284e-03		5.9995e-04		4.2961e-03	
uch41	1.8555e-04	2.18	1.8627e-03	1.46	1.4916e-04	2.01	1.5055e-03	1.51
uch61	9.6809e-05	1.6	1.1748e-03	1.14	6.4544e-05	2.07	8.7623e-04	1.33
uch81	5.6560e-05	1.87	8.0975e-04	1.29	3.8096e-05	1.83	5.6690e-04	1.51

Cuadro 5.7: Resultados para el problema 2 con el funcional Hw

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	2.9926e-04		1.7787e-03		4.1795e-04		1.4995e-03	
ann41	1.2384e-04	1.27	9.0585e-04	0.97	1.2516e-04	1.74	6.4853e-04	1.21
ann61	5.2307e-05	2.13	3.5352e-04	2.32	5.2947e-05	2.12	3.5107e-04	1.51
ann81	3.4498e-05	1.45	2.8396e-04	0.76	2.8360e-05	2.17	2.0301e-04	1.9
cha21	3.0818e-04		3.3567e-03		1.5262e-04		1.6359e-03	
cha41	1.0185e-04	1.6	1.9612e-03	0.78	6.1320e-05	1.32	9.7870e-04	0.74
cha61	5.2354e-05	1.64	1.2674e-03	1.08	2.8481e-05	1.89	3.5284e-04	2.52
cha81	3.8880e-05	1.03	1.0027e-03	0.81	2.4399e-05	0.54	5.2879e-04	-1.41
ele21	5.3726e-04		3.4455e-03		2.4523e-04		1.5292e-03	
ele41	1.2845e-04	2.06	1.0996e-03	1.65	6.0816e-05	2.01	5.4949e-04	1.48
ele61	5.2350e-05	2.21	5.8092e-04	1.57	2.6824e-05	2.02	2.8235e-04	1.64
ele81	2.7947e-05	2.18	3.7257e-04	1.54	1.4892e-05	2.05	1.9852e-04	1.22
eng21	1.6730e-03		1.9341e-02		1.2648e-03		1.3402e-02	
eng41	1.7811e-03	-0.09	3.0288e-02	-0.65	1.9377e-03	-0.62	2.0460e-02	-0.61
eng61	8.2339e-04	1.9	1.3393e-02	2.01	7.5670e-04	2.32	8.6581e-03	2.12
eng81	8.1307e-04	0.04	1.3502e-02	-0.03	7.5764e-04	0	9.6441e-03	-0.37
hab21	1.7353e-03		1.2547e-02		9.7979e-04		6.9452e-03	
hab41	6.2875e-04	1.46	6.1241e-03	1.03	4.7232e-04	1.05	4.8252e-03	0.53
hab61	2.6718e-04	2.11	2.6049e-03	2.11	1.9651e-04	2.16	2.1803e-03	1.96
hab81	1.6672e-04	1.64	1.9353e-03	1.03	1.3454e-04	1.32	1.9789e-03	0.34
m1921	2.6036e-03		1.9076e-02		1.6389e-03		9.8013e-03	
m1941	8.3402e-04	1.64	9.2423e-03	1.05	6.9984e-04	1.23	5.2060e-03	0.91
m1961	4.1056e-04	1.75	5.5302e-03	1.27	3.7402e-04	1.55	2.9139e-03	1.43
m1981	2.2725e-04	2.06	3.3665e-03	1.73	2.1365e-04	1.95	1.7435e-03	1.79
mic21	8.6607e-04		6.4090e-03		5.5918e-04		2.7465e-03	
mic41	2.9676e-04	1.55	3.9336e-03	0.7	2.3848e-04	1.23	3.0799e-03	-0.17
mic61	1.6305e-04	1.48	3.3816e-03	0.37	1.8963e-04	0.57	3.3663e-03	-0.22
mic81	9.9919e-05	1.7	2.2444e-03	1.42	1.1060e-04	1.87	1.7166e-03	2.34
swa21	2.0070e-03		1.1055e-02		1.1709e-03		5.8811e-03	
swa41	4.8221e-04	2.06	2.8809e-03	1.94	2.2912e-04	2.35	1.1153e-03	2.4
swa61	2.4574e-04	1.66	1.4321e-03	1.72	1.2696e-04	1.46	5.9596e-04	1.55
swa81	1.3313e-04	2.13	8.5603e-04	1.79	7.2038e-05	1.97	3.6054e-04	1.75
uca21	1.1830e-03		1.4010e-02		8.8974e-04		8.4096e-03	
uca41	3.9794e-04	1.57	1.0515e-02	0.41	3.6282e-04	1.29	7.0775e-03	0.25
uca61	2.7986e-04	0.87	9.2908e-03	0.31	2.8151e-04	0.63	6.5720e-03	0.18
uca81	2.2906e-04	0.7	8.1989e-03	0.43	2.3027e-04	0.7	6.0343e-03	0.3
uch21	2.2525e-03		1.6458e-02		2.1449e-03		1.5682e-02	
uch41	8.5372e-04	1.4	8.6417e-03	0.93	9.4557e-04	1.18	8.3434e-03	0.91
uch61	6.0911e-04	0.83	6.5196e-03	0.69	6.6538e-04	0.87	5.6173e-03	0.98
uch81	4.1624e-04	1.32	3.4531e-03	2.21	4.5991e-04	1.28	4.0541e-03	1.13

Cuadro 5.8: Resultados para el problema 2 con el funcional Sw

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	4.4310e-04		3.6909e-03		3.7612e-04		2.6188e-03	
ann41	1.6112e-04	1.46	2.0069e-03	0.88	1.3359e-04	1.49	8.7668e-04	1.58
ann61	5.7979e-05	2.52	7.3039e-04	2.49	5.8614e-05	2.03	8.1106e-04	0.19
ann81	3.7985e-05	1.47	5.4907e-04	0.99	2.9034e-05	2.44	4.1661e-04	2.32
cha21	3.0896e-04		3.6006e-03		3.7930e-04		3.3670e-03	
cha41	1.3284e-04	1.22	2.6624e-03	0.44	2.5770e-04	0.56	2.6316e-03	0.36
cha61	4.5398e-05	2.65	9.4122e-04	2.56	8.3463e-05	2.78	1.4451e-03	1.48
cha81	3.1514e-05	1.27	9.1402e-04	0.1	5.0651e-05	1.74	9.0800e-04	1.62
ele21	1.2087e-03		1.0860e-02		2.4481e-03		1.8913e-02	
ele41	2.0657e-04	2.55	5.0575e-03	1.1	2.4186e-04	3.34	3.4138e-03	2.47
ele61	1.2889e-04	1.16	1.9861e-03	2.31	2.9673e-04	-0.5	2.8891e-03	0.41
ele81	7.6109e-05	1.83	2.5654e-03	-0.89	1.6458e-04	2.05	2.3507e-03	0.72
eng21	6.7466e-03		1.0279e-01		1.1292e-02		1.3479e-01	
eng41	2.0343e-03	1.73	2.9978e-02	1.78	4.2664e-03	1.4	3.2097e-02	2.07
eng61	1.4097e-03	0.9	2.7448e-02	0.22	3.9852e-03	0.17	3.9401e-02	-0.51
eng81	2.2389e-02	-9.61	2.9869e-01	-8.3	1.0431e-02	-3.34	1.2985e-01	-4.15
hab21	1.8329e-03		1.4222e-02		2.3492e-03		1.5814e-02	
hab41	2.4963e-03	-0.45	2.5997e-02	-0.87	5.2448e-03	-1.16	4.4795e-02	-1.5
hab61	9.6061e-04	2.36	1.2250e-02	1.86	2.1855e-03	2.16	1.9204e-02	2.09
hab81	2.4767e-03	-3.29	3.3592e-02	-3.51	5.0937e-03	-2.94	4.7789e-02	-3.17
m1921	2.2059e-03		1.2071e-02		2.3689e-03		1.2521e-02	
m1941	5.3321e-04	2.05	3.8985e-03	1.63	8.0951e-04	1.55	5.4059e-03	1.21
m1961	1.2616e-03	-2.12	1.4211e-02	-3.19	2.6698e-03	-2.94	2.2491e-02	-3.52
m1981	5.3223e-04	3	8.7866e-03	1.67	1.4293e-03	2.17	1.2708e-02	1.98
mic21	5.6641e-03		7.4115e-02		8.4210e-03		7.1400e-02	
mic41	1.4836e-03	1.93	1.8367e-02	2.01	2.2869e-03	1.88	2.2916e-02	1.64
mic61	8.0316e-04	1.51	1.8421e-02	-0.01	3.1201e-03	-0.77	3.1911e-02	-0.82
mic81	5.6394e-04	1.23	1.0963e-02	1.8	1.8597e-03	1.8	2.5708e-02	0.75
swa21	1.1250e-03		9.4970e-03		2.9086e-03		2.0860e-02	
swa41	2.2683e-04	2.31	1.3021e-03	2.87	4.0621e-04	2.84	2.6212e-03	2.99
swa61	2.7508e-04	-0.48	5.9765e-03	-3.76	1.0112e-03	-2.25	1.1908e-02	-3.73
swa81	9.4418e-05	3.72	2.0577e-03	3.71	2.2456e-04	5.23	2.9505e-03	4.85
uca21	1.3435e-03		1.9872e-02		1.5687e-03		1.2055e-02	
uca41	8.7185e-04	0.62	1.4398e-02	0.46	2.0377e-03	-0.38	2.3754e-02	-0.98
uca61	1.1283e-03	-0.64	2.0296e-02	-0.85	2.9468e-03	-0.91	4.1621e-02	-1.38
uca81	3.1655e-04	4.42	6.6270e-03	3.89	5.8901e-04	5.6	7.4958e-03	5.96
uch21	3.7541e-03		2.9394e-02		5.1680e-03		5.7269e-02	
uch41	1.2770e-03	1.56	1.7175e-02	0.78	3.7147e-03	0.48	3.4798e-02	0.72
uch61	9.4476e-04	0.74	1.4604e-02	0.4	2.0473e-03	1.47	2.2234e-02	1.1
uch81	1.4326e-03	-1.45	2.5575e-02	-1.95	3.1350e-03	-1.48	2.8462e-02	-0.86



Cuadro 5.9: Resultados para el problema 3 con el funcional $1/2(Hw+A)$

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	3.2282e-04		1.9520e-03		4.0496e-04		1.7563e-03	
ann41	1.3863e-04	1.22	1.7108e-03	0.19	1.1977e-04	1.76	5.6409e-04	1.64
ann61	5.2717e-05	2.38	5.3219e-04	2.88	5.0644e-05	2.12	4.4614e-04	0.58
ann81	3.4994e-05	1.42	4.2776e-04	0.76	2.7679e-05	2.1	2.1040e-04	2.61
cha21	1.9466e-04		2.1218e-03		1.0637e-04		1.0538e-03	
cha41	5.1527e-05	1.92	6.1140e-04	1.8	3.1285e-05	1.77	3.1238e-04	1.75
cha61	3.0992e-05	1.25	4.3367e-04	0.85	1.5788e-05	1.69	1.8370e-04	1.31
cha81	2.6790e-05	0.51	2.4832e-04	1.94	1.0399e-05	1.45	1.4655e-04	0.79
ele21	3.9194e-04		2.2106e-03		2.4406e-04		1.3504e-03	
ele41	8.5844e-05	2.19	7.0855e-04	1.64	5.7512e-05	2.09	4.1655e-04	1.7
ele61	2.9109e-05	2.67	3.8560e-04	1.5	2.5248e-05	2.03	2.3948e-04	1.37
ele81	1.2940e-05	2.82	2.4420e-04	1.59	1.4210e-05	2	1.5897e-04	1.42
eng21	1.5147e-03		1.9722e-02		1.2669e-03		1.0128e-02	
eng41	6.9030e-04	1.13	1.5947e-02	0.31	6.2940e-04	1.01	9.6145e-03	0.08
eng61	1.6149e-04	3.58	2.8312e-03	4.26	2.1019e-04	2.7	4.3289e-03	1.97
eng81	1.0034e-04	1.65	2.1769e-03	0.91	1.3348e-04	1.58	2.3134e-03	2.18
hab21	1.1204e-03		8.2463e-03		6.6410e-04		3.8311e-03	
hab41	3.5707e-04	1.65	3.2640e-03	1.34	2.2924e-04	1.53	3.9797e-03	-0.05
hab61	1.4940e-04	2.15	1.2254e-03	2.42	8.5507e-05	2.43	8.6278e-04	3.77
hab81	9.1240e-05	1.71	1.2165e-03	0.03	4.9384e-05	1.91	8.9141e-04	-0.11
m1921	1.2044e-03		7.1667e-03		6.3073e-04		4.0903e-03	
m1941	2.4719e-04	2.28	1.6637e-03	2.11	1.3063e-04	2.27	1.0672e-03	1.94
m1961	1.1975e-04	1.79	7.7233e-04	1.89	5.9708e-05	1.93	5.0506e-04	1.85
m1981	7.7518e-05	1.51	4.6414e-04	1.77	3.2885e-05	2.07	3.1300e-04	1.66
mic21	8.3658e-04		7.7730e-03		5.1416e-04		2.8654e-03	
mic41	2.1802e-04	1.94	3.0306e-03	1.36	1.7363e-04	1.57	2.3380e-03	0.29
mic61	1.1594e-04	1.56	2.3874e-03	0.59	9.3908e-05	1.52	2.0952e-03	0.27
mic81	7.0698e-05	1.72	1.4858e-03	1.65	5.4930e-05	1.86	1.1294e-03	2.15
swa21	5.0158e-04		2.1909e-03		4.3308e-04		1.9563e-03	
swa41	1.2823e-04	1.97	1.4533e-03	0.59	1.5174e-04	1.51	1.8302e-03	0.1
swa61	5.0079e-05	2.32	2.0440e-04	4.84	4.3539e-05	3.08	2.3165e-04	5.1
swa81	3.4561e-05	1.29	1.4206e-04	1.26	2.2098e-05	2.36	1.5523e-04	1.39
uca21	1.0979e-03		1.5134e-02		8.6045e-04		9.7566e-03	
uca41	2.1473e-04	2.35	3.4965e-03	2.11	1.6919e-04	2.35	1.7089e-03	2.51
uca61	1.2149e-04	1.4	1.7233e-03	1.74	1.0432e-04	1.19	1.5360e-03	0.26
uca81	7.7459e-05	1.56	1.0735e-03	1.65	5.9022e-05	1.98	1.2989e-03	0.58
uch21	1.3035e-03		1.2317e-02		1.1525e-03		1.1039e-02	
uch41	2.7128e-04	2.26	3.4183e-03	1.85	3.5045e-04	1.72	3.7500e-03	1.56
uch61	1.2433e-04	1.92	1.8131e-03	1.56	1.7589e-04	1.7	2.8494e-03	0.68
uch81	7.1275e-05	1.93	8.7338e-04	2.54	1.0841e-04	1.68	1.8345e-03	1.53

Cuadro 5.10: Resultados para el problema 3 con el funcional $1/2(\text{Sw}+\text{L})$

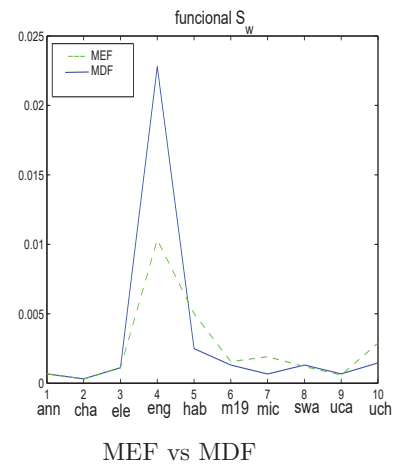
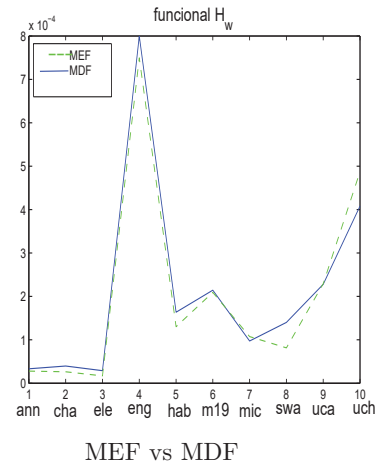
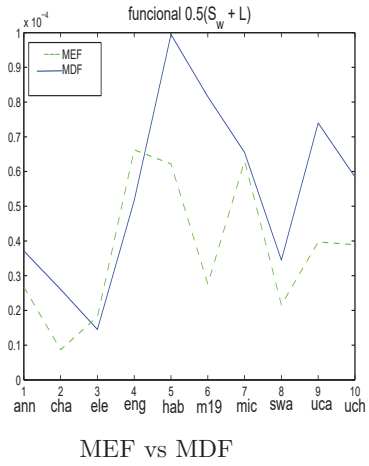
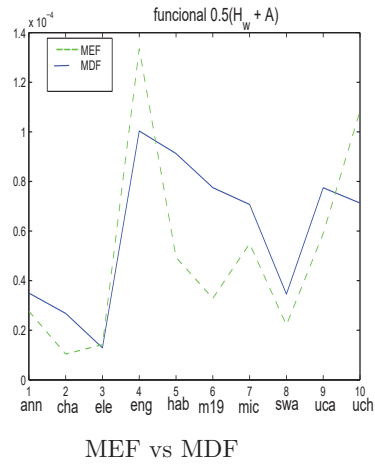
Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	3.6220e-04		3.1959e-03		3.9112e-04		2.1836e-03	
ann41	1.5240e-04	1.25	2.0038e-03	0.67	1.2033e-04	1.7	6.9914e-04	1.64
ann61	5.4886e-05	2.52	5.5450e-04	3.17	5.1035e-05	2.12	5.3171e-04	0.68
ann81	3.7116e-05	1.36	4.5857e-04	0.66	2.6776e-05	2.24	2.5002e-04	2.62
cha21	1.8205e-04		1.8946e-03		1.0519e-04		1.0132e-03	
cha41	4.7907e-05	1.93	6.0775e-04	1.64	2.8795e-05	1.87	3.0467e-04	1.73
cha61	2.9099e-05	1.23	4.5703e-04	0.7	1.3906e-05	1.8	1.7405e-04	1.38
cha81	2.6065e-05	0.38	2.6942e-04	1.84	8.6761e-06	1.64	1.7092e-04	0.06
ele21	3.6515e-04		1.4627e-03		2.0524e-04		1.1036e-03	
ele41	9.0715e-05	2.01	5.1007e-04	1.52	6.0283e-05	1.77	3.7251e-04	1.57
ele61	2.9087e-05	2.81	3.2820e-04	1.09	2.6686e-05	2.01	1.6869e-04	1.95
ele81	1.4527e-05	2.41	1.6983e-04	2.29	1.8173e-05	1.34	1.4417e-04	0.55
eng21	9.2254e-04		9.6478e-03		6.8834e-04		7.5491e-03	
eng41	2.1940e-04	2.07	2.7095e-03	1.83	2.0297e-04	1.76	2.2126e-03	1.77
eng61	9.3425e-05	2.11	1.5544e-03	1.37	9.7840e-05	1.8	1.3154e-03	1.28
eng81	5.1668e-05	2.06	1.1061e-03	1.18	6.6254e-05	1.36	1.1123e-03	0.58
hab21	1.0507e-03		6.7678e-03		5.8715e-04		4.6448e-03	
hab41	3.8112e-04	1.46	3.1170e-03	1.12	2.1212e-04	1.47	2.6404e-03	0.81
hab61	1.6057e-04	2.13	1.2702e-03	2.21	8.7711e-05	2.18	1.3869e-03	1.59
hab81	9.9464e-05	1.66	1.0818e-03	0.56	6.2178e-05	1.2	1.0860e-03	0.85
m1921	1.2636e-03		6.7923e-03		5.3221e-04		3.0930e-03	
m1941	2.7425e-04	2.2	1.9197e-03	1.82	1.1406e-04	2.22	9.7053e-04	1.67
m1961	1.2994e-04	1.84	9.4560e-04	1.75	5.1921e-05	1.94	5.0651e-04	1.6
m1981	8.1565e-05	1.62	5.7555e-04	1.73	2.7601e-05	2.2	3.2932e-04	1.5
mic21	7.2597e-04		4.4041e-03		6.0710e-04		3.3506e-03	
mic41	1.8910e-04	1.94	3.0545e-03	0.53	1.8666e-04	1.7	2.3904e-03	0.49
mic61	1.0141e-04	1.54	1.7144e-03	1.42	9.5514e-05	1.65	1.5484e-03	1.07
mic81	6.5487e-05	1.52	9.9485e-04	1.89	6.3085e-05	1.44	8.4845e-04	2.09
swa21	4.0807e-04		2.6039e-03		4.1107e-04		1.9231e-03	
swa41	8.9504e-05	2.19	7.3422e-04	1.83	8.0339e-05	2.36	8.5580e-04	1.17
swa61	4.1408e-05	1.9	2.6256e-04	2.54	4.1296e-05	1.64	2.1378e-04	3.42
swa81	3.4468e-05	0.64	1.4097e-04	2.16	2.1564e-05	2.26	1.4574e-04	1.33
uca21	9.9240e-04		1.4791e-02		8.4084e-04		9.6984e-03	
uca41	1.9984e-04	2.31	3.3234e-03	2.15	1.1077e-04	2.92	1.7166e-03	2.5
uca61	1.2933e-04	1.07	1.7813e-03	1.54	8.6087e-05	0.62	1.7097e-03	0.01
uca81	7.3973e-05	1.94	9.2328e-04	2.28	3.9736e-05	2.69	9.5704e-04	2.02
uch21	8.2786e-04		5.1544e-03		6.2960e-04		4.3669e-03	
uch41	1.8595e-04	2.15	1.8521e-03	1.48	1.5619e-04	2.01	1.5529e-03	1.49
uch61	9.8706e-05	1.56	1.1556e-03	1.16	6.5945e-05	2.13	8.6931e-04	1.43
uch81	5.8442e-05	1.82	8.4937e-04	1.07	3.8906e-05	1.83	5.6069e-04	1.52

Cuadro 5.11: Resultados para el problema 3 con el funcional Hw

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	2.7742e-04		1.5990e-03		4.1996e-04		1.7334e-03	
ann41	1.1703e-04	1.25	9.4797e-04	0.75	1.2292e-04	1.77	6.3609e-04	1.45
ann61	5.0005e-05	2.1	3.5357e-04	2.43	5.2191e-05	2.11	3.4736e-04	1.49
ann81	3.3396e-05	1.4	2.4970e-04	1.21	2.8014e-05	2.16	1.9837e-04	1.95
cha21	3.0529e-04		3.6310e-03		1.5901e-04		1.8674e-03	
cha41	1.0156e-04	1.59	2.2179e-03	0.71	6.5846e-05	1.27	1.1294e-03	0.73
cha61	5.3026e-05	1.6	1.4398e-03	1.07	3.0173e-05	1.92	4.1787e-04	2.45
cha81	3.9742e-05	1	1.1732e-03	0.71	2.6328e-05	0.47	5.7959e-04	-1.14
ele21	5.6757e-04		3.4646e-03		2.7432e-04		1.5377e-03	
ele41	1.3569e-04	2.06	1.1027e-03	1.65	6.8437e-05	2	5.5757e-04	1.46
ele61	5.5261e-05	2.22	5.8346e-04	1.57	3.0315e-05	2.01	2.8785e-04	1.63
ele81	2.9004e-05	2.24	3.7481e-04	1.54	1.6900e-05	2.03	2.0256e-04	1.22
eng21	1.6770e-03		1.8837e-02		1.2408e-03		1.3384e-02	
eng41	1.7618e-03	-0.07	3.0121e-02	-0.68	1.9245e-03	-0.63	2.0376e-02	-0.61
eng61	8.0360e-04	1.94	1.3355e-02	2.01	7.4281e-04	2.35	8.6735e-03	2.11
eng81	7.9982e-04	0.02	1.3372e-02	0	7.4957e-04	-0.03	9.5993e-03	-0.35
hab21	1.6910e-03		1.1694e-02		9.7879e-04		6.8305e-03	
hab41	6.0726e-04	1.48	5.9958e-03	0.96	4.6212e-04	1.08	4.7085e-03	0.54
hab61	2.6331e-04	2.06	2.6351e-03	2.03	1.9115e-04	2.18	2.1548e-03	1.93
hab81	1.6347e-04	1.66	1.9524e-03	1.04	1.3022e-04	1.33	1.8917e-03	0.45
m1921	2.5017e-03		1.7765e-02		1.5813e-03		9.5210e-03	
m1941	7.8751e-04	1.67	8.6385e-03	1.04	6.9443e-04	1.19	5.0819e-03	0.91
m1961	3.8514e-04	1.76	5.0921e-03	1.3	3.6653e-04	1.58	2.7235e-03	1.54
m1981	2.1447e-04	2.04	3.2768e-03	1.53	2.0916e-04	1.95	1.7093e-03	1.62
mic21	8.6457e-04		6.6169e-03		5.3176e-04		2.5667e-03	
mic41	2.9168e-04	1.57	3.9406e-03	0.75	2.2692e-04	1.23	2.9256e-03	-0.19
mic61	1.6115e-04	1.46	3.3883e-03	0.37	1.8019e-04	0.57	3.2048e-03	-0.22
mic81	9.7336e-05	1.75	2.1804e-03	1.53	1.0741e-04	1.8	1.6680e-03	2.27
swa21	2.0658e-03		1.1343e-02		1.3124e-03		6.3041e-03	
swa41	5.0212e-04	2.04	3.1055e-03	1.87	2.5421e-04	2.37	1.2316e-03	2.36
swa61	2.6011e-04	1.62	1.5476e-03	1.72	1.4264e-04	1.43	6.4574e-04	1.59
swa81	1.4017e-04	2.15	9.6788e-04	1.63	8.1475e-05	1.95	3.9535e-04	1.71
uca21	1.1945e-03		1.4091e-02		9.1202e-04		8.4881e-03	
uca41	3.9605e-04	1.59	1.0409e-02	0.44	3.6166e-04	1.33	7.0707e-03	0.26
uca61	2.7791e-04	0.87	9.2145e-03	0.3	2.8056e-04	0.63	6.5614e-03	0.18
uca81	2.2779e-04	0.69	8.1494e-03	0.43	2.2905e-04	0.71	6.0272e-03	0.3
uch21	2.2778e-03		1.7070e-02		2.2558e-03		1.6570e-02	
uch41	8.6419e-04	1.4	9.0748e-03	0.91	1.0015e-03	1.17	9.0328e-03	0.88
uch61	5.9736e-04	0.91	6.4785e-03	0.83	7.0020e-04	0.88	5.9935e-03	1.01
uch81	4.0823e-04	1.32	3.4749e-03	2.17	4.8758e-04	1.26	4.4013e-03	1.07

Cuadro 5.12: Resultados para el problema 3 con el funcional Sw

Malla	Diferencias Finitas				Elementos Finitos			
	$\ err_d\ _2$	O	$\ err_d\ _\infty$	O	$\ err_h\ _2$	O	$\ err_h\ _\infty$	O
ann21	6.6328e-04		3.4900e-03		9.2874e-04		3.4632e-03	
ann41	6.7781e-04	-0.03	3.0286e-03	0.2	7.4573e-04	0.32	3.1208e-03	0.15
ann61	6.6740e-04	0.04	2.9251e-03	0.09	6.9114e-04	0.19	2.9657e-03	0.13
ann81	6.7466e-04	-0.04	2.9559e-03	-0.04	6.7717e-04	0.07	2.9418e-03	0.03
cha21	4.4807e-04		4.4056e-03		4.7869e-04		3.6364e-03	
cha41	3.3348e-04	0.43	3.3230e-03	0.41	3.9294e-04	0.28	3.4277e-03	0.09
cha61	3.1483e-04	0.14	1.4041e-03	2.12	3.0844e-04	0.6	1.5073e-03	2.03
cha81	3.1744e-04	-0.03	1.3132e-03	0.23	3.0278e-04	0.06	1.3413e-03	0.41
ele21	1.1989e-03		1.0472e-02		2.6269e-03		1.9860e-02	
ele41	1.0365e-03	0.21	4.7384e-03	1.14	1.1019e-03	1.25	3.2960e-03	2.59
ele61	1.0845e-03	-0.11	3.3131e-03	0.88	1.1260e-03	-0.05	3.6186e-03	-0.23
ele81	1.1177e-03	-0.1	3.3273e-03	-0.01	1.1045e-03	0.07	3.2851e-03	0.34
eng21	6.7404e-03		1.0171e-01		1.1294e-02		1.3617e-01	
eng41	2.0917e-03	1.69	3.0981e-02	1.72	4.3566e-03	1.37	3.2289e-02	2.08
eng61	1.4254e-03	0.95	2.8307e-02	0.22	3.9436e-03	0.25	3.7189e-02	-0.35
eng81	2.2798e-02	-9.64	2.9774e-01	-8.18	1.0333e-02	-3.35	1.2812e-01	-4.3
hab21	1.9400e-03		1.4468e-02		2.2126e-03		1.4755e-02	
hab41	2.5027e-03	-0.37	2.5442e-02	-0.81	5.1968e-03	-1.23	4.5158e-02	-1.61
hab61	9.6403e-04	2.35	1.1478e-02	1.96	2.0475e-03	2.3	1.7182e-02	2.38
hab81	2.4920e-03	-3.3	3.3341e-02	-3.71	5.0185e-03	-3.12	4.8351e-02	-3.6
m1921	2.4937e-03		1.1593e-02		1.9421e-03		1.1649e-02	
m1941	1.4048e-03	0.83	4.9451e-03	1.23	1.0477e-03	0.89	4.2214e-03	1.46
m1961	1.5889e-03	-0.3	1.3868e-02	-2.54	2.5780e-03	-2.22	2.1952e-02	-4.07
m1981	1.3148e-03	0.66	1.0714e-02	0.9	1.5617e-03	1.74	1.3300e-02	1.74
mic21	5.4731e-03		7.2810e-02		8.3636e-03		6.8280e-02	
mic41	1.3436e-03	2.03	1.6623e-02	2.13	2.1352e-03	1.97	2.1298e-02	1.68
mic61	7.8865e-04	1.31	1.7601e-02	-0.14	3.1554e-03	-0.96	3.1529e-02	-0.97
mic81	6.6531e-04	0.59	1.0167e-02	1.91	1.9099e-03	1.75	2.4202e-02	0.92
swa21	1.2090e-03		7.2393e-03		3.2606e-03		2.1850e-02	
swa41	1.2727e-03	-0.07	3.9672e-03	0.87	1.1837e-03	1.46	4.6152e-03	2.24
swa61	1.2604e-03	0.02	4.1651e-03	-0.12	1.5447e-03	-0.66	1.4142e-02	-2.76
swa81	1.3106e-03	-0.14	3.8440e-03	0.28	1.2065e-03	0.86	4.0785e-03	4.32
uca21	1.3141e-03		1.9487e-02		1.4852e-03		1.2561e-02	
uca41	1.0022e-03	0.39	1.3445e-02	0.54	2.0342e-03	-0.45	2.2961e-02	-0.87
uca61	1.2828e-03	-0.61	1.8978e-02	-0.85	2.7901e-03	-0.78	3.9490e-02	-1.34
uca81	6.7561e-04	2.23	7.0732e-03	3.43	5.8741e-04	5.42	7.6156e-03	5.72
uch21	3.5418e-03		2.8948e-02		5.2224e-03		5.8906e-02	
uch41	1.3061e-03	1.44	1.6762e-02	0.79	3.5773e-03	0.55	3.3204e-02	0.83
uch61	1.0320e-03	0.58	1.4337e-02	0.39	1.8966e-03	1.56	2.1889e-02	1.03
uch81	1.4663e-03	-1.22	2.4347e-02	-1.84	2.8943e-03	-1.47	2.7931e-02	-0.85



Capítulo 6

Conclusiones

El objetivo de esta tesis consistió en estudiar el uso de algunos esquemas en diferencias finitas para operadores elípticos que se aproximan en mallas convexas lógicamente rectangulares generadas para regiones del plano definidas por poligonales irregulares. Efectuando este estudio se observó lo siguiente:

- Los esquemas en diferencias finitas con los que trabajamos son teóricamente sencillos, y se obtienen como una aplicación natural del teorema de Taylor. Es claro que requieren de más operaciones algebraicas para calcularse que los esquemas para mallas rectangulares, pero no por ello requieren una teoría más complicada.
- Al emplear los esquemas en diferencias sobre mallas lógicamente rectangulares suaves y convexas generadas por métodos variacionales se obtienen resultados satisfactorios. De forma empírica en algunos casos se obtiene orden 2. Además los resultados obtenidos con elemento finito son comparables a los obtenidos usando diferencias finitas.
- De acuerdo con los resultados obtenidos al generar las mallas con los funcionales de la sección 2, podemos afirmar que se obtienen mallas de mejor calidad optimizando los funcionales combinando mitad área y mitad longitud. Dichas mallas tienen además la ventaja de que el tiempo que se requiere para generar la malla optimizada es menor que empleando los funcionales individuales. Cabe destacar que las regiones que podemos caracterizar como las más complicadas, en función del tiempo que se requiere para generar la malla y la norma del error en los experimentos son *England*, *Ucha* y *Michoacán*. Esto realmente no es una sorpresa, pues son regiones irregulares muy no convexas que presentan algunas celdas muy elongadas cerca de tramos muy curvados de la frontera.

En resumen, en función de los puntos anteriores, podemos concluir que el uso de los esquemas que nos propusimos estudiar, en las mallas que seleccionamos, arrojó resultados satisfactorios por lo que podemos proponer que pueden emplearse de manera confiable como una alternativa al método de elemento finito.

6.1. Trabajos a futuro

De trabajos a futuro podemos decir que, en función de las posibilidades que se deducen fácilmente de nuestros resultados, quedan abiertas muchas líneas de investigación, entre otras,

- Seguir probando con otros funcionales que ejerzan un mayor control sobre la malla, y de tal suerte que optimicen la malla en el menor tiempo posible. Esto debido a los resultados observados con los funcionales de área y longitud.
- Usando los resultados obtenidos, realizar una adaptación de la malla (ya sea refinando en alguna subregión o moviendo nodos) con la finalidad de mejorar la aproximación.
- Averiguar si el suavizamiento del contorno en algunas regiones complicadas reduce la dificultad de mallado y aumenta la precisión del método. Trabajar con otras regiones, por ejemplo un lago o un acuífero.

Bibliografía

- [1] J.W. Thomas. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*.
- [2] Randall J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations* .
- [3] William E. Boyce. Richard c. Dippina. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*.
- [4] Jerrold E. Marsden, Anthony J. Tromba. *Cálculo Vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana, S.A., 1991.
- [5] J.G. Tinoco. *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre Regiones Planas Irregulares*. Tesis Doctoral.CIMAT.,Guanajuato, Gto., México. 1997.
- [6] Adán Cortés Medina. *Diferencias Finitas para Solución de Ecuaciones Diferenciales Parciales sobre Regiones Planas Irregulares*. Tesis de Licenciatura. UMSNH., Morelia, Mich., México. 1999.
- [7] Chávez González Azucena. *Diferencias Finitas para EDPs en Regiones Planas Irregulares*. Tesis de Licenciatura. UMSNH., Morelia, Mich., México.
- [8] Heinz W. Engl. *Inverse Problems*. Sociedad Matematica Mexicana, 1995.
- [9] Barrera, P., Cortés J. J., Domínguez-Mota, F.J. y González, F.G., Flores G., Tinoco-Ruiz J. G. *Smoothness and convex area functionals - revisited* . Revisited 40, 2002.
- [10] Mikhail Shashkov. *Conservative Finite-Difference Methods on General Grids*. CRC Press. inc, 1996.
- [11] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. Second Edition.
- [12] UNAMALLA. *An automatic package for numerical grid generation*. Web site: http://www.mathmoo.unam.mx/unamalla/home_e.html.

- [13] A. A. Samarski, E. S. Nikolaev. *Métodos de Solución de las Ecuaciones Reticulares*. Mir, 1982.
- [14] A. A. Samarski, V. B. Andréiev. *Métodos en Diferencias para las Ecuaciones Elípticas*. Mir, 1979.
- [15] Gilbert Strang, George Fix. *An Analysis of the Finite Element Method*. Wellesley-Cambridge Press.