



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO



FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMATICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

“EL PROBLEMA DEL HAMILTONIANO INVERSO”

TESIS PARA OBTENER EL TITULO DE:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ALBERTO SÁNCHEZ LUVIANO

ASESORES:

Dr. JOAQUIN ESTEVEZ DELGADO
Dr. VICTOR MANUEL YEPEZ GARCIA

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”
U.M.S.N.H.

MORELIA, MICHOACAN, SEPTIEMBRE DE 2010

*Para mi madre Raquel Luviano Jiménez
no sé qué haría sin ti.*

Agradecimientos

La persona a la que principalmente quiero agradecer es a mi madre que ha estado siempre a mi lado en todas las circunstancias más allá de lo que una madre debería. A mis hermanos Francisco Javier Reyna Luviano, Jose Rafael Sánchez Luviano y Heidi Sánchez Luviano.

A mis amigos de la prepa: Indely Leon Romero, Jorge Luis Santibañez Flores, Lizzeth Campuzano Pineda, Yosahandy Manriquez Miranda, Oscar Alvarado, Felegrina Campos Salmerón, por haber estado cuando los necesitaba.

A mis amigos de la Facultad: Nayeli Casillas Rodriguez, Antonio Tavera Vazquez, Carlos Jared Figueroa Cervantes, Tania Oyuki Chang Martinez, David Becerril Rodriguez, Alonso Espinoza Chavez, Fatima González Fernández, Yuritzzy Ruiz Barrera, Mirna Iveth Bustos Vazquez, Thalia Jiménez Centeno, Ivan Naumkin Kaikin, Itzia Guzman, Ariana Gaona, Jessica García, Rafael Garcia Ruiz, Alejandra García Pimentel, Erandi Morales, Rodrigo Zalapa, por haber estado en momentos de mi vida importantes.

A mis amigos de la Universidad: Juan Pablo Cruz Pérez, Harlem López, Juan Cristóbal López Calderón, Mauricio Ortiz Gutiérrez.

A mis asesores Joaquín Estévez Delgado y Víctor Manuel Yopez García por haberme dado la oportunidad de presentar este trabajo.

Gracias a todos.

Índice general

Introducción, Sistemas Dinámicos	1
1. Teoría de Lagrange y teoría de Hamilton	3
1.1. Coordenadas generalizadas	3
1.2. Principio de Hamilton	4
1.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del principio de Hamilton	6
1.3.1. Ejemplos	8
1.4. El problema inverso del Cálculo Variacional	14
1.5. Teoremas de conservación	15
1.6. Transformaciones de Legendre	18
1.7. Ecuaciones de Hamilton a partir del principio De Hamilton	20
1.8. Transformaciones canónicas	21
1.9. Corchete de Poisson	24
2. Teoría d Lyapunov	27
2.1. Introducción	27
2.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales	28
2.3. Existencia y unicidad	29
2.4. Espacio Fase y sistemas autónomos	30

2.5. Estabilidad de sistemas lineales	33
2.5.1. Ejemplos	39
2.6. Sistemas cuasi-lineales	40
2.7. Sistemas gradientes	41
2.8. Teoremas de Lyapunov	43
2.8.1. Ejemplos	45
3. Aplicaciones	47
3.1. Introducción	47
3.2. Oscilador armónico	47
3.3. El péndulo	50
3.4. Oscilador armónico amortiguado	54
3.5. Partícula en un pozo doble de potencial	58
3.6. Otro ejemplo	61
4. Método alternativo	63
4.1. Introducción	63
4.2. Oscilador armónico	64
4.3. El péndulo	65
4.4. Oscilador armónico amortiguado	67
4.5. Partícula en un pozo doble de potencial	68
4.6. Otro ejemplo	70
5. Conclusiones	73

Introducción

SISTEMAS DINÁMICOS

Podríamos hablar de los sistemas dinámicos como un área joven de las Matemáticas, aunque se remontan a Newton con sus estudios de la Mecánica Celeste y a Henri Poincaré, quien inició el estudio cualitativo de las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, fue hace apenas unos 40 años que los sistemas dinámicos se establecieron como un área propiamente dicha, gracias a los trabajos destacados de matemáticos e ingenieros como: S. Smale, V. Arnold, Lyapunov, etc.

El tratar de entender cómo evolucionan los procesos de la naturaleza nos lleva a estudiar sistemas dinámicos que son sistemas complejos que presentan un cambio o evolución de su estado en el tiempo, el comportamiento en dicho estado se puede caracterizar determinando los límites del sistema, los elementos y sus relaciones; de esta forma se puede elaborar modelos que buscan representar la estructura del mismo sistema. Al definir los límites del sistema se hace, en primer lugar, una selección de aquellos componentes que contribuyan a generar los modos de comportamiento, y luego se determina el espacio donde se llevará a cabo el estudio, omitiendo aspectos irrelevantes.

Los sistemas dinámicos se pueden clasificar en dos grupos, discretos y continuos, según la naturaleza de su variable independiente, el tiempo. Cuando esta evoluciona en forma discreta, típico en problemas de biología, el sistema dinámico se representa mediante una ecuación recursiva. En cambio, cuando evoluciona en forma continua, los sistemas dinámicos se describen mediante ecuaciones diferenciales.

En el estudio de los sistemas dinámicos no es fácil construir soluciones analíticas de las ecuaciones, por lo que se analiza el comportamiento a largo plazo: si se estabilizará, y hacia qué estado, o no se estabilizará, y que pasa si se cambian las condiciones iniciales. Se buscan los puntos fijos, valores de la variable que son constantes en el tiempo, y los puntos periódicos, estados del sistema que se repiten una y otra vez.

Existen sistemas dinámicos sensiblemente dependientes de las condiciones iniciales. Una consecuencia de este comportamiento es la imposibilidad de prever completamente la evolución futura del sistema. Incluso conociendo exactamente la definición de las reglas de evolución de estos sistemas la predicción a largo plazo resulta imposible, tal como sucede al querer predecir el clima.

De esta forma los sistemas dinámicos se pueden clasificar básicamente en

- Sistemas estables, que tienden a lo largo del tiempo a un punto, u órbita, según su dimensión.
- Sistemas inestables, que diverge de cualquier punto estable u órbita estable mientras el tiempo avanza.
- Sistemas caóticos, que manifiesta los 2 casos anteriores, por un lado existe el atractor por lo que el sistema se ve atraído, pero a la vez hay fuerzas que lo alejan de este, así el sistema permanece confinado en una zona de su espacio de estados, pero sin tender a un atractor fijo.

En la actualidad las teorías de la física que buscan obtener información cualitativa sobre el comportamiento general de las soluciones están desarrolladas en su mayoría para aplicarse a sistemas conservativos, como el problema inverso del cálculo variacional, que aplicado a la mecánica clásica nos permite que una vez dada la ecuación de movimiento podamos encontrar el Lagrangiano asociado a dicha ecuación y en consecuencia su Hamiltoniano, el cual contiene toda la información del sistema que se está analizando. Otro caso es la teoría de estabilidad de sistemas dinámicos, a partir de su análisis se describe el comportamiento general de las soluciones. A estos objetos que contienen toda la información del sistema les llamaremos funcionales.

El propósito de este trabajo es describir parte de estas teorías y aplicarlas a algunos ejemplos clásicos, planteamos algunas preguntas sobre estos enfoques y finalmente proponemos una teoría que permita de manera sencilla encontrar el funcional.

En la teoría de sistemas dinámicos, los sistemas conservativos, en particular los sistemas Hamiltonianos (donde se cumplen las ecuaciones de Hamilton) juegan un papel importante. Especialmente en aplicaciones de la mecánica, donde la estructura es usualmente Hamiltoniana, a la que se agregan efectos disipativos.

En el primer capítulo abordaremos la teoría de Euler-Lagrange y de Hamilton para encontrar lo Hamiltonianos del sistema que en la mecánica clásica es una función de energía. En el segundo capítulo describiremos la teoría de estabilidad de Lyapunov para encontrar funcionales de los sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden y en ciertos casos estos funcionales serán Hamiltonianos del sistema. Posteriormente aplicaremos estas teorías a ejemplos clásicos y la compararemos con una nueva teoría para encontrar funcionales asociados a los sistemas tratados.

Capítulo 1

TEORÍA DE LAGRANGE Y TEORÍA DE HAMILTON

1.1. Coordenadas Generalizadas

En el tratamiento vectorial de la mecánica el concepto abstracto de coordenada no entra en acción, el método es esencialmente geométrico.

El método vectorial es extremadamente útil en problemas de estática. De cualquier forma, cuando tenemos problemas de movimiento, el número de estos problemas que pueden ser resueltos con vectores es relativamente pequeño. Para resolver un mayor número de problemas de este tipo, los métodos geométricos de la mecánica vectorial son más adecuados y nos llevan a un tratamiento analítico más abstracto. En este nuevo fundamento analítico de la mecánica el concepto de coordenada en su aspecto más general ocupa una posición central.

La mecánica analítica se ha logrado formalizar como una ciencia matemática. Todo es hecho por cálculos en el campo abstracto de cantidades. El mundo físico es trasladado a relaciones matemáticas, estas traslaciones ocurren con ayuda de las coordenadas, las coordenadas establecen una correspondencia uno a uno entre los puntos del espacio físico y los números. Después de establecer esta correspondencia, podemos operar con las coordenadas como cantidades algebraicas y olvidarnos de su significado físico. Los resultados finales de nuestros cálculos son finalmente trasladados al mundo físico.

Durante el siglo de Fermat y Descartes al siglo de Euler y Lagrange se llevaron a cabo grandes avances en métodos matemáticos. Uno de los más importantes fue la generalización de las coordenadas originales, idea de Descartes. Si el propósito de las coordenadas es establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos del espacio y

los números, el establecimiento de 3 ejes perpendiculares y la determinación de la longitud, anchura y altura relativa a estos ejes es una forma de establecer esta correspondencia. Por ejemplo, las coordenadas esféricas (r, θ, φ) pueden ser transformadas a las coordenadas rectangulares (x, y, z) . Es una de las características principales del tratamiento analítico de la mecánica que trasladan una situación física dada a una situación matemática abstracta.

Consideremos primero un sistema mecánico que se compone de N partículas libres, "libre" en el sentido de que no están restringidas por ninguna condición cinemática. Las coordenadas rectangulares de estas partículas (x_i, y_i, z_i) ($i = 1, 2, \dots, N$), caracteriza la posición del sistema mecánico, y el problema del movimiento se resuelve si (x_i, y_i, z_i) son dadas en función del tiempo t .

El mismo problema es resuelto si (x_i, y_i, z_i) son expresadas en términos de algunas otras cantidades q_1, q_2, \dots, q_{3N} y entonces esas cantidades q_k son determinadas como funciones del tiempo t .

Este procedimiento indirecto del resolver el problema del movimiento nos provee de un avance analítico y es de hecho el factor decisivo para resolver problemas dinámicos, matemáticamente lo llamamos una transformación de coordenadas. Por ejemplo, la forma de pasar de las coordenadas rectangulares (x, y, z) , a un punto del espacio de coordenadas polares (r, θ, φ) es descrita por las relaciones

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

y así las nuevas variables son expresadas como funciones arbitrarias de las nuevas variables. El número de variables no es 3 sino $3N$, ya que la posición de sistemas mecánicos requiere $3N$ coordenadas para su caracterización. Y de esta manera la forma general de tales transformaciones de coordenadas aparecen como

$$x_i = f_i(q_1, \dots, q_{3N}) \quad , \quad i = 1, \dots, N.$$

1.2. Principio de Hamilton

De acuerdo a la dinámica clásica, asociamos con el sistema descrito un conjunto de coordenadas generalizadas, cada una de las cuales tienen valores bien definidos en cada instante del tiempo, después se asume que la evolución temporal del sistema está completamente determinada si su estado se conoce en algún instante dado. Analíticamente la dinámica clásica se basa en el hecho de que las coordenadas

generalizadas satisfacen un conjunto de ecuaciones diferenciales como funciones del tiempo con condiciones iniciales. Entonces este método consiste en encontrar las coordenadas generalizadas del sistema y sus ecuaciones de movimiento que predicen la evolución temporal del sistema.

Un método de obtener las ecuaciones de movimiento es con el principio Hamilton. Este método se basa en la idea de que un sistema evoluciona sobre el camino de menor resistencia. Este principio tiene una gran historia en la teoría de la física, que data desde la Grecia antigua cuando Hero de Alexandria estableció un principio minimal sobre el camino de los rayos de luz reflejados. En el siglo XVII, el *principio de Fermat* sobre los rayos de luz que viajan sobre una trayectoria de menor tiempo, fue anunciado. Para sistemas mecánicos el *principio de Maupertuis de mínima acción* establece que los sistemas evolucionan de un estado a otro tal que la acción (un término vagamente definido con unidades de energía por tiempo) es mínima, Lagrange y Gauss defendieron un principio similar. En la primera parte del siglo XIX, W. R. Hamilton estableció el que se ha convertido en el principio que puede ser generalizado para muchas áreas de la física.

La configuración instantánea de un sistema viene descrita por los valores de las $3N$ coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_{3N} , cuyo espacio formado se llama espacio de configuraciones. Al ir transcurriendo el tiempo cambia el estado del sistema y el punto representativo del sistema se mueve en el espacio de configuraciones describiendo una curva. El tiempo se puede considerar formalmente como parámetro de la curva, el camino del movimiento en el espacio de configuraciones no tendrá necesariamente alguna semejanza con el camino real de la partícula en el espacio, y cada punto de dicho sistema representa la configuración entera del sistema en un instante dado.

El principio de Hamilton es un principio integral que describe el movimiento de los sistemas mecánicos para los cuales todas las fuerzas pueden derivar de un potencial escalar generalizado; cuando el potencial es función explícita de las coordenadas de posición únicamente, el sistema mecánico será conservativo.

Para sistemas derivados de un potencial escalar generalizado, el principio de Hamilton se enuncia diciendo que el movimiento del sistema entre el tiempo t_1 y el tiempo t_2 es tal que la integral curvilínea

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

tiene un valor estacionario para el camino del movimiento, y $\mathcal{L} = T - V$.

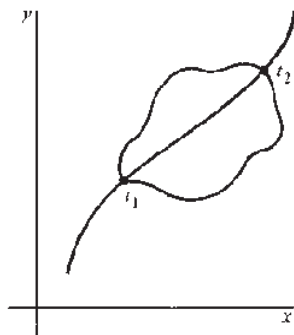


Figura 1. Camino del sistema en el espacio de configuraciones

Así, podemos resumir el principio de Hamilton diciendo que el movimiento es tal que la variación de la integral curvilínea J para t_1 y t_2 fijos es nula:

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt = 0,$$

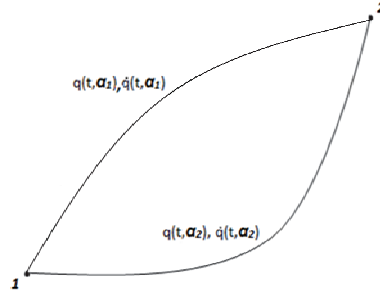
donde $\mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t)$ tiene derivadas parciales continuas de segundo orden respecto a todos sus argumentos.

1.3. Ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del principio de Hamilton

El problema fundamental del cálculo de variaciones se generaliza fácilmente al caso en que \mathcal{L} sea una función de varias variables independientes q_i y sus derivadas \dot{q}_i . Entonces se obtiene una variación de la integral

$$\delta J = \delta \int_1^2 \mathcal{L}(q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t) dt.$$

La variación de J se da en función de un parámetro α que etiqueta un posible conjunto de curvas que podrían minimizar J siendo así



$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} d\alpha = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \alpha} d\alpha \right) dt.$$

Integrando por partes, el segundo termino de la suma,

$$\int_1^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial^2 q_i}{\partial t \partial \alpha} dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) dt,$$

ahora, $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ es la velocidad generalizada sobre la trayectoria especificada por un punto por un cierto parámetro α ; esto es, la derivada temporal se toma para un α fijo. Y ya que se trata de una derivada parcial, podemos intercambiar el orden

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial q_i}{\partial \alpha}.$$

La condición para toda la variedad de curvas es que pasen por los puntos 1 y 2, por lo que la derivada parcial de q_i con respecto a α en los puntos 1 y 2 será cero. Así, δJ queda como

$$\delta J = \int_1^2 \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt,$$

donde $\delta q_i = (\partial q_i / \partial \alpha) d\alpha$, y como las variables q_i son independientes, también lo serán las δq_i . La condición de que δJ sea cero exige que se anulen por separado los coeficientes de las δq_i , por lo que se tiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0.$$

A estas ecuaciones se les conoce como ecuaciones de Euler-Lagrange. Cuyas soluciones representan curvas para las cuales la variación de una integral de la forma δJ se anula.

1.3.1. Ejemplos

1. Distancia más corta entre dos puntos en un plano.

En un plano, el elemento de longitud de arco es

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

y la longitud total de toda la curva que vaya del punto 1 al punto 2 es

$$J = \int_1^2 ds = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (1.2)$$

La condición de que la curva constituya el camino más corto es que J sea mínima. Queremos encontrar una función $y(x)$ para la cual el funcional (1.2) alcance un valor extremo, siendo en este caso:

$$\mathcal{L} = \sqrt{1 + (\dot{y})^2},$$

donde $\frac{dy}{dx} = \dot{y}$. Ahora calculemos la curva que minimiza la distancia usando la variación de J mediante de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0.$$

Como en este caso \mathcal{L} no depende de y , tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = c,$$

donde c es una constante, resolviendo la ecuación diferencial obtenemos que la curva que minimiza la distancia está dada por

$$y(x) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} x + d,$$

donde d es una constante de integración, por lo que la función que minimiza la distancia entre 2 puntos es una recta. Estrictamente hablando solo se ha probado que la línea recta es un extremo, pero en este caso es claro que es también un mínimo. Las constantes de integración c y d se obtienen mediante las condiciones de que la curva pasa por dos puntos, uno inicial (x_1, y_1) y otro final (x_2, y_2) .

De forma similar podemos obtener la distancia más corta entre 2 puntos en una esfera, poniendo la longitud de arco en la superficie de la esfera en términos de las coordenadas angulares de posición en la esfera. En general, curvas que dan la distancia más corta entre 2 puntos en una superficie se llaman *geodésicas* de la superficie.

2. El problema de la Braquistócrona.

Este conocido problema consiste en hallar la curva que une 2 puntos, a lo largo de la cual una partícula que parte del reposo bajo la influencia de la gravedad pasa del punto más alto al punto más bajo en un tiempo mínimo.

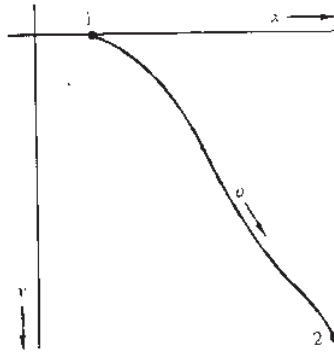


Figura 3. El problema de la Braquistócrona.

Si v es la rapidez a lo largo de la curva, el tiempo que se tarda la partícula en caer un arco de longitud ds será ds/v y el problema se reduce a hallar el mínimo de la integral

$$t_{1,2} = \int_1^2 \frac{ds}{v}.$$

Si se mide y hacia abajo desde el punto del reposo, el teorema de conservación de la energía de la partícula se puede escribir en la forma

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2,$$

o sea

$$v = \sqrt{2gy},$$

y así la expresión para $t_{1,2}$ será

$$t_{1,2} = \int_1^2 \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}} dx,$$

donde en este caso, para minimizar la integral tenemos,

$$\mathcal{L} = \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2}{2gy}}.$$

Cuya solución en forma paramétrica es

$$x(t) = t - \sin t,$$

$$y(t) = 1 - \cos t,$$

donde

$$\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}.$$

La solución es una cicloide, y para \dot{y} tenemos

$$\dot{y}(t) = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

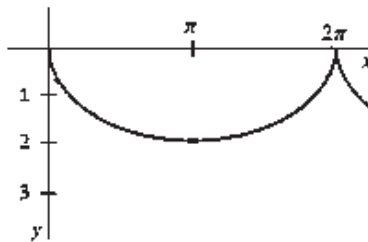


Figura 4. Cicloide. Solución al problema de la Baquistócrona.

Este problema es famoso en la historia de la Matemática, ya que fue el análisis de este problema fue el que llevó a John Bernoulli al fundamento formal del cálculo de variaciones. Incluso Galileo en 1668 estudió el problema en su famoso trabajo “Discurso

sobre 2 nuevas ciencias”, en su versión del problema fue encontrar de un punto A hasta otro punto sobre una línea vertical en el menor tiempo.

3. Oscilador armónico simple.

Para el oscilador armónico simple tenemos la energía cinética como

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2,$$

y la energía potencial

$$V = \frac{1}{2}kx^2.$$

Por lo que la función Lagrangiana es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2.$$

Así resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la ecuación del oscilador armónico simple

$$M\ddot{x} = -kx,$$

cuyas soluciones son

$$x(t) = Ae^{i\sqrt{\frac{k}{M}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{k}{M}}t},$$

y concuerdan con las ecuaciones de Newton.

4. Movimiento en un campo de fuerza central.

Considere un movimiento en un plano de una masa m que es atraída al origen con una fuerza que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen. Como coordenadas generalizadas tomamos las coordenadas polares r y θ de la masa. La energía cinética es

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Ya que la fuerza es de inverso cuadrado, la energía potencial está dada por

$$V = -\int -\frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r}.$$

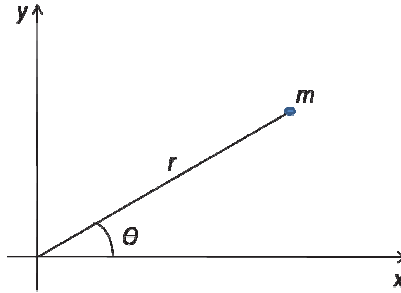


Figura 5. Masa m sujeta a una fuerza de tipo central.

El principio de Hamilton requiere que

$$J(r, \theta) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \right\} dt,$$

sea mínima, entonces se cumplen las ecuaciones de Lagrange que en este caso son 2, una para r y otra para θ

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0,$$

resolviendo para θ obtenemos

$$\frac{d(mr^2 \dot{\theta})}{dt} = 0,$$

$$mr^2 \dot{\theta} = \text{constante} = l,$$

donde definimos l como el momento angular, y es constante. Ahora para r

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0,$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + \frac{k}{r^2} = 0,$$

y usando $mr^2 \dot{\theta} = l$

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} = 0, \quad (1.4)$$

cambiando $r = r(\theta)$ obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} \right) = \ddot{\theta} \frac{dr}{d\theta} + \dot{\theta} \frac{d}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \ddot{\theta} \frac{dr}{d\theta} + \dot{\theta}^2 \frac{d^2r}{d\theta^2},$$

derivando $\dot{\theta}$ obtenemos

$$\ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \frac{l}{mr^2} = -\frac{2l}{mr^3} \frac{dr}{dt} = -\frac{2l}{mr^3} \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\theta},$$

entonces \ddot{r} queda en función de θ como

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{2l^2}{m^2r^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{m^2r^4} \frac{d^2r}{d\theta^2},$$

donde la fuerza efectiva que ejerce el centro de fuerzas sobre la masa m es

$$F_{eff} = m \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{2l^2}{mr^5} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l^2}{mr^4} \frac{d^2r}{d\theta^2}.$$

Si analizamos la energía

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r), \quad (1.5)$$

usando la conservación del momento angular. De (1.4) obtenemos

$$m\dot{r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right), \quad (1.6)$$

si multiplicamos ambos lados de (1.6) por \dot{r} , el lado izquierdo nos queda como

$$m\dot{r}\dot{r} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right),$$

y para el lado derecho

$$-\frac{d}{dr} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right) \dot{r} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right) \frac{dr}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right),$$

donde el último paso se llevo a cabo utilizando la regla de la cadena. Entonces (1.6) nos queda como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \right) = - \frac{d}{dt} \left(\frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) \right) = 0,$$

usando (1.5) tenemos

$$\frac{dE}{dt} = 0,$$

lo que implica que la cantidad E denominada como energía, es constante, algo que se verá con mas formalidad en la sección 1.5 y 1.6. En este caso cuando E es constante la ecuación se puede graficar en el espacio de r y su derivada \dot{r} , este espacio es muy útil ya que no es necesario resolver la ecuación analíticamente, ya que analizando los puntos del espacio r vs \dot{r} se pueden encontrar las trayectorias de las partículas.

1.4. El problema inverso del Cálculo Variacional

Generalmente, el cálculo de variaciones se encarga de la optimización de cantidades variables llamadas funcionales. Muchos de los métodos fueron desarrollados hace más de 200 años por Euler (1701-1783), Lagrange (1737-1813), y otros. En el presente continúan desarrollándose importantes técnicas en muchas áreas de la ingeniería y física, de cualquier forma, y en el área de las matemáticas se introducen muchos métodos importantes de análisis.

En general un principio variacional existe para un sistema físico si hay una Lagrangiana tal que las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes a la integral $\int \mathcal{L} dt$ coincide con la ecuación que rige al sistema. Para ciertos sistemas mecánicos el principio de Hamilton nos dice que $\mathcal{L} = K - V$, ahora la pregunta es ¿Cómo conocemos la Lagrangiana del sistema si conocemos la ecuación de movimiento?, este es conocido como el problema inverso del cálculo variacional. Podemos establecer este problema para el caso de una partícula y después generalizarlo para muchas. Dada una ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} = F(t, y, \dot{y}), \tag{1.7}$$

para determinar la Lagrangiana tal que (1.7) este en la ecuación de Euler-Lagrange tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0, \quad (1.8)$$

y escribimos (1.8) como

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{y}} + \dot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}} + \ddot{y} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0,$$

derivando con respecto a \dot{y} y utilizando (1.7) obtenemos

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{y}^2} + \dot{y} \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}^2} + F \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^3} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} = 0, \quad (1.9)$$

donde asumimos que \mathcal{L} es 3 veces continuamente diferenciable tal que los órdenes de derivación se pueden intercambiar. Poniendo

$$u(t, y, \dot{y}) = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(t, y, \dot{y})}{\partial \dot{y}^2}. \quad (1.10)$$

La ecuación (1.9) se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \dot{y} \frac{\partial u}{\partial y} + F \frac{\partial u}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} u = 0,$$

que es una ecuación diferencial de primer orden para u . Si esta ecuación se resuelve para u , entonces el Lagrangiano \mathcal{L} puede ser determinado de (1.10) integrando 2 veces con respecto a \dot{y} .

1.5. Teoremas de conservación

Un sistema de n grados de libertad tendrá n ecuaciones diferenciales que son de segundo orden en el tiempo. La solución de cada ecuación requerirá dos integraciones que darán lugar, entre otras, a $2n$ constantes de integración. En un problema concreto, dichas constantes se determinan a partir de condiciones iniciales, es decir, los valores iniciales de las n coordenadas generalizadas q_j y los valores iniciales de las n velocidades generalizadas \dot{q}_j .

En muchos problemas, se pueden obtener de manera inmediata integrales primeras de las ecuaciones de movimiento; es decir, relaciones del tipo

$$f(q_1, q_2, \dots, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, t) = \text{constante},$$

que son ecuaciones diferenciales de primer orden. Estas integrales primeras incluyen los principios de conservación.

Consideremos, por ejemplo, un sistema de puntos materiales sometidos a fuerzas que derivan de potenciales que solo dependen de la posición. Entonces

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i = p_i$$

es la cantidad de movimiento asociada a la partícula *i*-ésima. Así la cantidad de movimiento generalizada asociada a la partícula q_i se define de la forma

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}.$$

Notemos que si q_i no es una coordenada cartesiana, p_i no tiene que tener necesariamente las dimensiones de una cantidad de movimiento. Es más, si hay un potencial que dependa de la velocidad, incluso en el caso de que sea q_i una coordenada cartesiana la cantidad de movimiento generalizada asociada a ella no será igual a la cantidad de movimiento mecánica usual.

Cuando la Lagrangiana de un sistema no contenga una coordenada dada q_i , diremos que la coordenada es cíclica o ignorable. Así la ecuación de Lagrange del movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.11)$$

se reduce, para una coordenada cíclica, a

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

o sea

$$\frac{dp_i}{dt} = 0,$$

lo que significa que $p_i = \text{constante}$. Luego, podemos enunciar como teorema de conservación general, que la cantidad de movimiento generalizada de una coordenada cíclica se conserva.

Otro teorema de conservación que podríamos esperar obtener en la formulación de Lagrange es la conservación de la energía total en sistemas donde las fuerzas deriven de

potenciales que dependan solo de la posición. Consideremos la Lagrangiana genérica, la cual será función de las coordenadas q_i y de las velocidades \dot{q}_i y puede también depender explícitamente del tiempo. Entonces, la derivada total respecto al tiempo de \mathcal{L} es

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

De las ecuaciones de Lagrange (1.11), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i},$$

y la ecuación (1.12) se puede escribir como

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \frac{dq_j}{dt} + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t},$$

se deduce por tanto que

$$0 = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j - \mathcal{L} \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}, \quad (1.13)$$

donde la cantidad entre paréntesis se denomina cantidad de energía y se representa por h :

$$h(q, \dot{q}, t) = \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j - \mathcal{L},$$

y podemos considerar que la ecuación (1.13) da la derivada total de h con respecto al tiempo,

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}. \quad (1.14)$$

Si la Lagrangiana no es función explícita del tiempo, es decir, si t no aparece explícitamente en \mathcal{L} sino tan solo implícitamente a través de la variación temporal de q y \dot{q} , la ecuación (1.10) implica que h se conserva

$$\frac{dh}{dt} = 0.$$

1.6. Transformaciones de Legendre

La formulación de las leyes de la mecánica por medio de la función de Lagrange presupone que la definición del estado mecánico del sistema se haga dando sus coordenadas y velocidades generalizadas, pero esta definición no es la única posible. En la investigación de diversas cuestiones generales de la mecánica ofrece una serie de ventajas la definición del estado mecánico del sistema mediante coordenadas y momentos generalizados

En la formulación de Lagrange, un sistema con n grados de libertad posee n ecuaciones de movimiento de la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0,$$

como las ecuaciones son de segundo orden, el movimiento del sistema estará siempre determinado cuando se especifiquen $2n$ valores iniciales.

La formulación de Hamilton se basa en una visión diferente, queremos describir el movimiento mediante ecuaciones diferenciales de primer orden, como el número de condiciones iniciales seguirá siendo $2n$, deberá haber $2n$ ecuaciones independientes de primer orden expresadas en función de $2n$ variables independientes. La formulación resulta casi simétrica si tomamos para la otra mitad las cantidades de movimiento conjugadas o generalizadas p_i definidas como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.15)$$

La transición de la formulación de Lagrange a la de Hamilton corresponde a cambiar las variables de nuestras funciones de (q, \dot{q}, t) a (q, p, t) , donde p está relacionada con q y \dot{q} mediante las ecuaciones (1.15). El método para conmutar estas variables nos lo proporciona la transformación de Legendre, planteada para este tipo de cambios de variable.

Considere una función de 2 variables $f(x, y)$, tal que su diferencial es

$$df = u dx + v dy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \quad (1.16)$$

queremos cambiar de x, y a un conjunto nuevo de variables u, y , así las cantidades diferenciales son expresadas en términos de las diferenciales du y dy . Sea g una función de u, y definida por la ecuación

$$g = f - ux,$$

la diferencial de g esta dada entonces por

$$dg = df - udx - xdu,$$

y por (1.16)

$$dg = vdy - xdu,$$

que es exactamente en la forma deseada. Y las cantidades x y v son ahora funciones de las variables u y y dadas por las relaciones

$$v = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad x = -\frac{\partial g}{\partial u}.$$

Al hacer esta transformación nos encontramos con la función

$$H(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t), \quad (1.17)$$

que recibe el nombre de Hamiltoniana. Considerada función de q , p y t solamente, la diferencial de H viene dada por

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (1.18)$$

y también de acuerdo a (1.17)

$$dH = \dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \quad (1.19)$$

de acuerdo a la definición de cantidad de movimiento generalizada (1.15) el término de $d\dot{q}_i$ se anulan, por lo que la ecuación (1.19) se reduce a

$$dH = \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt,$$

y comparando con la expresión de (1.18) obtenemos el conjunto de $2n + 1$ relaciones

$$- \dot{p}_i = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial q_i}, \quad (1.20)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial H(q_j, p_j, t)}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)}{\partial t},$$

donde las ecuaciones (1.20) y (1.21) son llamadas ecuaciones canónicas de Hamilton; constituyen el sistema buscado de $2n$ ecuaciones de movimiento de primer orden que sustituyen a las ecuaciones de Lagrange.

A partir de las ecuaciones canónicas de Hamilton y la derivada de la Hamiltoniana con respecto al tiempo vemos que

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\dot{q}_i \frac{\partial H}{\partial q_i} + \dot{p}_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Pero si H no depende explícitamente del tiempo entonces

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

En el caso en que las coordenadas generalizadas no dependan explícitamente del tiempo, y que las fuerzas deriven de un potencial conservativo V , entonces la Hamiltoniana será automáticamente la energía total

$$H = E = T + V.$$

En el caso general la Hamiltoniana no es la energía total del sistema, usando la definición del momento generalizado se tiene

$$H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

1.7. Ecuaciones de Hamilton a partir del principio de Hamilton

El principio de Hamilton

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0, \quad (1.22)$$

tal como se formuló originalmente se refiere a caminos en el espacio de configuraciones. Por tanto, la primera modificación es que la integral debe calcularse para la trayectoria de un punto del sistema en el espacio fase y los caminos variados deben ser próximos a dicha

trayectoria. En esta formulación q y p debe tratarse como coordenadas independientes, para tal fin el integrando de (1.22) debe expresarse en función de q y p , así como de sus derivadas en función del tiempo mediante la ecuación (1.17). La ecuación (1.22) aparece entonces en la forma

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H) dt = 0. \quad (1.23)$$

Este principio tiene exactamente la forma del problema variacional en un espacio de $2n$ dimensiones

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, p, \dot{p}, t) dt = 0,$$

para el cual las $2n$ ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \quad (1.24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{p}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} = 0. \quad (1.25)$$

El integrando en la ecuación (1.23) contiene \dot{q}_i tan solo a través del término $p_i \dot{q}_i$ y contiene a q_j solo en H . Así la ecuación (1.24) conducen a

$$\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0. \quad (1.26)$$

En cambio, el integrando de (1.23) no tiene dependencia explícita de \dot{p}_j . La ecuación (1.25) se reducen a

$$\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} = 0. \quad (1.27)$$

Las ecuaciones (1.26) y (1.27) son exactamente las ecuaciones de movimiento de Hamilton.

1.8. Transformaciones canónicas

En la forma Lagrangiana de la mecánica existe un sistema de coordenadas en las que resolver las ecuaciones diferenciales del problema se facilita, en la forma Hamiltoniana es

similar. No se tiene un método directo para la integración de las ecuaciones canónicas y la herramienta más efectiva que poseemos es la transformación de coordenadas.

El método de la transformación de coordenadas emplea un punto de vista completamente diferente a la integración directa del problema. No pensamos en q_i y p_i como funciones del tiempo, nos olvidamos completamente de las ecuaciones de movimiento y pensamos en q_i y p_i como variables, como coordenadas de un punto en el espacio fase y nada más. De cualquier forma es importante que nuestra transformación preserve las ecuaciones canónicas, siendo así, llamaremos a estas transformaciones "transformaciones canónicas".

El concepto de transformación de coordenadas debe ampliarse para que incluya la transformación simultánea de las coordenadas y cantidades de movimiento independientes q_i, p_i a un nuevo sistema Q_i, P_i con ecuaciones de transformación

$$Q_i = Q_i(q, p, t),$$

$$P_i = P_i(q, p, t).$$

Así, las nuevas coordenadas estarán definidas en función de las antiguas coordenadas y de las cantidades de movimiento. Al desarrollar la mecánica solo pueden interesarnos las transformaciones para las cuales las nuevas Q, P sean coordenadas canónicas. Este requisito se cumplirá si existe una cierta función $K(Q, P, t)$ tal que las ecuaciones de movimiento en el nuevo sistema estén en la forma de Hamilton

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad (1.28)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (1.29)$$

La función K representa el papel de la Hamiltoniana en el nuevo sistema de coordenadas. Las nuevas coordenadas (Q, P) deben ser coordenadas canónicas no sólo para ciertos sistemas mecánicos sino para todos los sistemas con el mismo número de grados de libertad. Las ecuaciones (1.28), (1.29) deben construir la forma de las ecuaciones de movimiento de las nuevas coordenadas y cantidades de movimiento independientemente de cuál sea la forma inicial de H .

Como Q_i, P_i son coordenadas canónicas, deben cumplir un principio de Hamilton que se puede escribir en la forma

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_i \dot{Q}_i - K(Q, P, t)) dt = 0. \quad (1.30)$$

pero también las coordenadas canónicas antiguas cumplen este principio,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - H(q, p, t)) dt = 0. \quad (1.31)$$

Como la forma general del principio de Hamilton tiene variación nula en los puntos extremos, las 2 ecuaciones (1.30) y (1.31) se satisfarán si los integrandos están relacionados de la forma

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt}, \quad (1.32)$$

ya que

$$\delta \int_1^2 \frac{dF}{dt} dt = \delta \int_1^2 dF = \delta[F(2) - F(1)] = 0.$$

Donde F es una función cualquiera de las coordenadas del espacio fásico con segundas derivadas continuas. La función F es útil para especificar la forma exacta de la transformación canónica tan sólo cuando la mitad de las variables pertenecen al sistema antiguo y la mitad al nuevo, y se denomina función generatriz de la transformación. Supongamos que se dé F en función de las coordenadas generalizadas antiguas y nuevas

$$F = F_1(q, Q, t),$$

entonces la ecuación (1.32) toma la forma

$$p_i \dot{q}_i - H = P_i \dot{Q}_i - K + \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i. \quad (1.33)$$

Como las coordenadas q_i y Q_i , son independientes por separado, las ecuaciones (1.33) se cumplirán tan solo si se anulan los coeficientes de las \dot{q}_i y de las \dot{Q}_i :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad (1.34)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad (1.35)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (1.36)$$

Estas ecuaciones constituyen n relaciones que definen las p_i en función de las q_j , Q_j y t . Suponiendo que se puedan invertir, podríamos despejar las n Q_i en función de q_j , p_j y t en (1.34) y (1.35), dando así las ecuaciones de transformación (1.26) y (1.27).

Sucede a veces que no es adecuado describir la transformación canónica mediante una función generatriz del tipo $F_1(q, Q, t)$, también podríamos escribir a la función F como $F_2(q, P, t)$, $F_3(p, Q, t)$ o $F_4(p, P, t)$ mediante el mismo método que para F_1 .

1.9. Corchetes de Poisson

En la mecánica clásica el corchete de Poisson es un importante operador de la mecánica Hamiltoniana, actuado como pieza fundamental en la definición de la evolución temporal de un sistema dinámico en la formulación Hamiltoniana.

Matemáticamente el corchete de Poisson de 2 funciones u, v respecto a las variables canónicas conjugadas (q, p) se define de la manera siguiente:

$$[u, v]_{q,p} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i}.$$

Supongamos que elegimos las funciones u, v de entre el conjunto de las propias variables canónicas (q, p) . Entonces se deduce trivialmente de la definición, que tales corchetes de Poisson tienen los valores

$$[q_j, q_k]_{q,p} = 0 = [p_j, p_k]_{q,p},$$

y

$$[q_j, p_k]_{q,p} = \delta_{ij} = -[p_j, q_k]_{q,p}.$$

A los corchetes de Poisson de las propias variables canónicas se les da el nombre de corchetes de Poisson fundamentales y se establece que siempre tendrán el mismo valor al calcularlos respecto a cualquier sistema de coordenadas canónicas. Dicho de otro modo, los corchetes de Poisson fundamentales son invariantes ante transformaciones canónicas.

Las propiedades de los corchetes de Poisson son

- 1.- $[u, u] = 0$
- 2.- $[u, v] = -[v, u]$
- 3.- $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$
- 4.- $[uv, w] = [u, w]v + u[v, w]$
- 5.- $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

Se puede reconstruir mediante corchetes de Poisson casi todo el marco de la mecánica Hamiltoniana. A consecuencia de la invariancia canónica de los corchetes de Poisson, las relaciones así obtenidas serán también de forma invariante ante una transformación canónica. Consideremos la derivada total respecto al tiempo de una función de las variables canónicas y el tiempo, $u(q, p, t)$, por uso de ecuaciones de Hamilton tenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

o sea

$$\frac{du}{dt} = [u, H] + \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Que podemos considerarla como la ecuación de movimiento generalizada para una función arbitraria u en la formulación de los corchetes de Poisson. Que contiene como caso particular las ecuaciones de Hamilton si en lugar de u sustituimos una de las variables canónicas

$$\dot{q}_i = [q_i, H],$$

$$\dot{p}_i = [p_i, H].$$

Y también, una magnitud conservada (o constante del movimiento) $F(q, p)$ tiene un corchete de Poisson nulo con el Hamiltoniano:

$$[F, H] = 0,$$

que es una expresión muy simple de una ley de conservación.

Capítulo 2

TEORÍA DE LYAPUNOV

2.1. Introducción

Las funciones de Lyapunov, planteadas principalmente por el ruso Aleksandr Lyapunov, son funciones que demuestran la estabilidad de cierto punto fijo en un sistema dinámico o en las ecuaciones diferenciales autónomas. Así las funciones que podrían probar la estabilidad de un punto cualquiera de equilibrio son llamadas candidatas a funciones de Lyapunov.

No existe un método general para construir o encontrar una función candidata de Lyapunov que demuestre la estabilidad de un equilibrio dado, en este caso, la incapacidad de encontrar una función de Lyapunov no implica automáticamente la inestabilidad del equilibrio.

Para los sistemas dinámicos, como los sistemas físicos, las leyes de conservación proveen frecuentemente las funciones candidatas de Lyapunov, en este caso el Hamiltoniano del sistema.

2.2. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se originaron en el esfuerzo de Newton para explicar el movimiento de partículas. En la ciencia y la tecnología moderna, la descripción matemática de un proceso físico complejo nos conduce a sistemas de ecuaciones diferenciales.

Estudiaremos sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\dot{y}_i = f_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad , \quad i = 1, \dots, n,$$

donde $f_1, f_2, \dots, f_n: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ son n funciones dadas definidas en alguna región D de un espacio Euclideo $(n + 1)$ – dimensional y y_1, y_2, \dots, y_n son las n funciones desconocidas. Para resolver este tipo de sistemas nos referimos a encontrar un intervalo I en el eje t y n funciones $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ definidas en I tal que

- i) $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ existan para cada t en I .
- ii) El punto $(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ permanece en D para cada t en I .
- iii) $\dot{\varphi}_j = f_j(t, y_1, \dots, y_n)$ para cada t en I .

Para nuestros propósitos solo necesitaremos sistemas con $n = 2$, ya que los sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x})\dot{x} + h(x, \dot{x})x = k(x, \dot{x})$$

y tienen asociados sistemas de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden. Haciendo el cambio de variable $y = \dot{x}$ obtenemos 2 ecuaciones de primer orden

$$\dot{y} = -g(x, y)y - h(x, y)x + k(x, y),$$

$$\dot{x} = y.$$

Esto lo podemos escribir en la forma matricial como

$$\dot{\vec{f}} = A\vec{f},$$

o sea

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(x, y) & -h(x, y) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$$

La tarea para formular un modelo matemático para el movimiento de un sistema físico tal como el de una masa con un resorte o el péndulo simple nos conduce a resolver

ecuaciones diferenciales, diferentes aproximaciones físicas nos llevan a diferentes modelos.

2.3. Existencia y unicidad

En esta parte cuando nos referimos a que cierta función vectorial \vec{f} es continua en una región del espacio $(n + 1) - dimensional$ D asumimos que es continua para todos los puntos de D , pero no asumiremos su comportamiento en la frontera de la región. Así si \vec{f} es continua en algunos puntos de la frontera de D pero también en el interior de D , \vec{f} seguirá siendo continua en D .

Teorema 2.3.1. Sea \vec{f} una función vectorial (con n componentes) definida en una región D del espacio Euclidiano. Sean los vectores \vec{f} y $\partial\vec{f}/\partial y_k$ continuas en D . Entonces dado cualquier punto (t_0, η) en D existe una única solución ϕ del sistema

$$\dot{y} = \vec{f}(t, \vec{y}),$$

que satisface la condición inicial $\phi(t_0) = \eta$. La solución ϕ existe en cualquier intervalo I que contenga a t_0 para los cuales los puntos $(t, \phi(t))$, con t en I , permanecen en D [3].

Ahora consideraremos soluciones $\phi(t)$ de la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} = g(t, y, \dot{y}), \tag{2.1}$$

con condiciones iniciales $\phi(t_0) = y_0$, $\dot{\phi}(t_0) = \dot{y}_0$, donde $g(t, y, \dot{y})$ es definida en una región D del espacio (t, y, \dot{y}) . La ecuación (2.1) es equivalente a

$$\dot{y}_1 = y_2, \tag{2.2}$$

$$\dot{y}_2 = g(t, y_1, y_2), \tag{2.3}$$

usando la sustitución $y = y_1$, $\dot{y} = y_2$. De esta manera si ϕ es la solución de (2.1) que satisface las condiciones iniciales $\phi(t_0) = y_0$, $\dot{\phi}(t_0) = \dot{y}_0$, entonces $\psi(t) = (\psi_1, \psi_2) = (\phi(t), \dot{\phi}(t))$ es la correspondiente solución del sistema (2.2), (2.3) que satisface la condición inicial $\psi(t_0) = (\phi(t_0), \dot{\phi}(t_0))$. Por lo tanto tenemos el siguiente resultado sobre la existencia y unicidad de soluciones con problemas de valores iniciales para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

Teorema 2.3.2. Sean g , $\partial g/\partial y$, $\partial g/\partial \dot{y}$ continuas en cierta región D . Sea (t_0, y_0, \dot{y}_0) un punto dado de D . Entonces existe un intervalo que contiene a t_0 y exactamente una

solución ϕ , definida en este intervalo, de la ecuación diferencial $\dot{y} = g(t, y, \dot{y})$ que pasa a través de (t_0, y_0, \dot{y}_0) . La solución existe para aquellos valores de t para los cuales los puntos $(t, \phi(t), \dot{\phi}(t))$ permanecen en D [3].

Existen otros teoremas menos restrictivos en cuanto a la continuidad de las funciones, tal es el caso de la continuidad de Lipschitz por ejemplo. La definición de continuidad utilizada es más conveniente para nuestros propósitos.

2.4. Espacio Fase y Sistemas Autónomos

El estado de un sistema puede ser completamente especificado en función del tiempo, si 2 cantidades son dadas en un instante del tiempo, por ejemplo, las condiciones iniciales $x(t_0)$ y $\dot{x}(t_0)$, son necesarias 2 ya que la ecuación diferencial del movimiento es de segundo orden. Consideremos $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ como coordenadas de un punto en el espacio bidimensional, llamado espacio fase. Con la variación del tiempo, el punto $P(x, \dot{x})$ que describe el estado del sistema se moverá sobre cierta trayectoria en el espacio fase. Para diferentes condiciones iniciales del sistema el movimiento será descrito por diferentes trayectorias. Cualquier trayectoria representa la historia completa del sistema para un cierto conjunto de condiciones iniciales. El conjunto de todas las posibles trayectorias constituye un diagrama de fase del sistema.

En el sistema $\dot{y} = \vec{f}(t, \vec{y})$ un caso de considerable importancia en aplicaciones ocurre si \vec{f} no depende explícitamente de t . Tales sistemas son llamados autónomos y \vec{f} es una función definida en algún dominio $n - dimensional$ D .

$$\dot{y} = \vec{f}(t, \vec{y}). \quad (2.4)$$

Los sistemas autónomos tienen varias propiedades importantes

1. Son invariantes bajo traslaciones de la variable independiente, si $\varphi(t)$ es una solución de (2.4) para la que $\varphi(0) = a$, entonces $\varphi(t - t_0)$ es solución de (2.4) que satisface la condición $\varphi(t_0) = a$.
2. Las soluciones de sistemas autónomos son convenientemente representadas por curvas en espacios $n - dimensionales$, ya que no depende de t .

De esta manera podemos pensar que (2.4) representa la ecuación de movimiento de una partícula, entonces cada punto y en D le corresponde el vector $\vec{g}(y)$ que es el vector velocidad de la partícula en y , y este vector velocidad no depende de t .

Sea $\varphi(t, a)$ la solución de (2.4), que satisface la condición inicial $\varphi(t_0, a) = a$, donde a es un punto en D . Entonces φ representa el movimiento de la partícula que obedece a (2.4) y pasa sobre el punto a en D al tiempo $t = t_0$, así podemos caracterizar completamente el movimiento por la curva C (Figura 6) en la región n -dimensional D descrita por la ecuación paramétrica $y = \varphi(t, a)$, donde el tiempo t es el parámetro de la ecuación. Y así ponemos la dirección de la curva C (Figura 6) de acuerdo a la dirección de incremento en t .

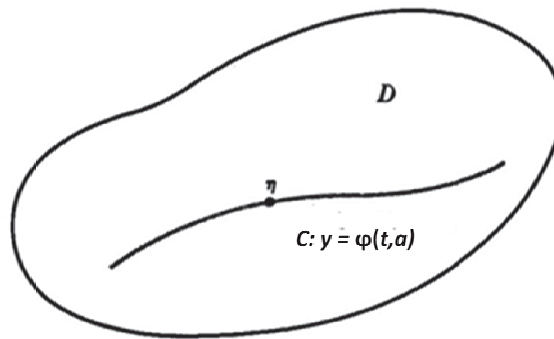


Figura 6. Movimiento caracterizado por la curva C en la región n – dimensional D .

En el caso de sistemas dinámicos conservativos las curvas de espacio fase se representan por estados de energía, de acuerdo a la ecuación de conservación de la energía como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x).$$

Donde $V(x)$ es la el potencial al que está sometido la partícula y poniendo $x = x(\dot{x})$ se obtienen las curvas del espacio fase para diferentes estados de energía, Figura 7.

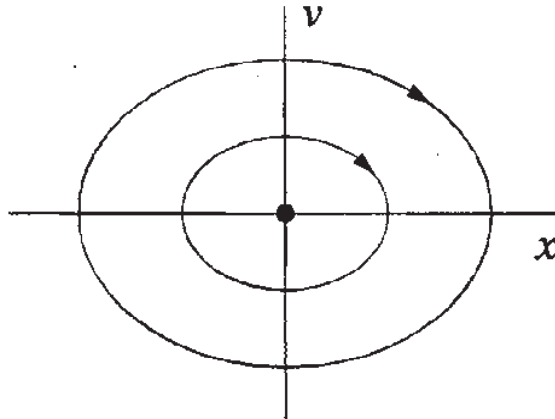


Figura 7. Espacio fase de un potencial $V(x)$

En el caso de sistemas dinámicos en los que x es el desplazamiento, y \dot{x} , la aceleración, es determinada por una ecuación escalar de la forma

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}).$$

Escribimos $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$ obtenemos el sistema autónomo

$$\dot{y}_1 = y_2,$$

$$\dot{y}_2 = F(y_1, y_2).$$

Ahora las soluciones pueden ser representadas en el plano (y_1, y_2) . Mas general, si (2.4) representa el movimiento de un sistema dinámico con n grados de libertad, su movimiento puede ser representado por curvas en el espacio fase de $2n$ dimensiones.

Como el sistema (2.4) es invariante bajo translaciones de tiempo $\varphi(t - t_0, a)$ es, para cualquier constante t_0 también solución de (2.4). Pero para diferentes t_0 el movimiento no es el mismo, pero sí su representación en la curva del espacio fase.

Definición 2.4.1. Un punto en D es llamado punto crítico del sistema (2.4) si y solo si $\vec{f}(\vec{y}) = 0$. Por lo que los puntos críticos son aquellos puntos de D en los que el campo vectorial $\vec{f}(\vec{y})$ se anula. Si a es un punto crítico de (2.4) entonces el vector constante $\varphi(t) = a$ es una solución de (2.4), así la órbita de esta solución es el simple punto a de D en el espacio fase. Desde el punto de vista físico los puntos críticos corresponden a estados de equilibrio.

Por ejemplo para la ecuación del péndulo simple

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{sen}\theta = 0,$$

le corresponde el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= -\frac{g}{l} \text{sen}(y_1). \end{aligned}$$

Donde sus puntos crítico son $(n\pi, 0)$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y D es todo el plano (y_1, y_2) .

2.5. Estabilidad de sistemas lineales

En principio queremos calcular explícitamente todas las soluciones para cada ecuación diferencial o sistema de ecuaciones diferenciales, pero no es posible para la gran mayoría de ellas, por lo que buscamos un comportamiento cualitativo en lugar de resolver las ecuaciones diferenciales explícitamente.

Un fenómeno cualitativo de gran interés es la noción de estabilidad de cierto estado o solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Consideremos un sistema físico cuyas ecuaciones de movimiento están dadas por el sistema autónomo

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad (2.5)$$

donde la función vectorial real continua \vec{f} con n componentes esta definida en una región D en el espacio real Euclidiano n -dimensional. Entonces la solución de (2.5) puede ser convenientemente graficada como curvas del espacio fase, el comportamiento de estas soluciones esta dado por dichas curvas.

Definición 2.5.1. Sea $y = y_0$ un punto crítico aislado de (2.5), tal que $\varphi(t) = y_0$ es una solución del sistema. Veremos lo que ocurre con el sistema cuando empezamos el movimiento en un punto a diferente de y_0 , en la proximidad de y_0

- La solución de equilibrio y_0 de (2.5) se dice **estable** si para cada $\varepsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ tal que si $\Psi(t)$ es cualquier solución de (2.5) teniendo que $\|\Psi(t) - y_0\| < \delta$, entonces la solución $\Psi(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ y $\|\Psi(t) - y_0\| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$ (Figura 8).

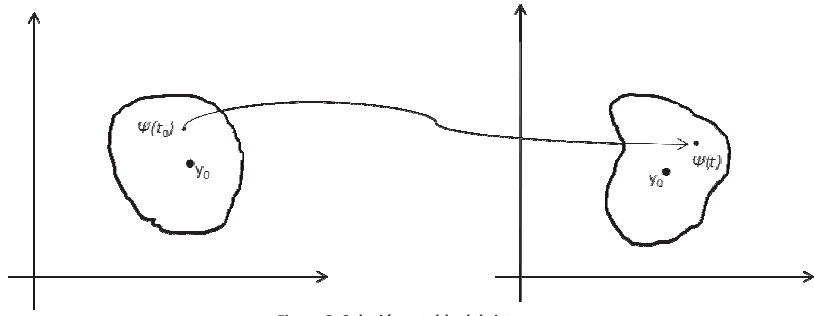


Figura 8. Solución estable del sistema.

- La solución de equilibrio y_0 se dice **asintóticamente estable** si es estable y si existe un número $\delta_0 > 0$ tal que si $\Psi(t)$ es una solución de (2.5) teniendo $\|\Psi(t) - y_0\| < \delta_0$, entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = y_0$ (Figura 9).

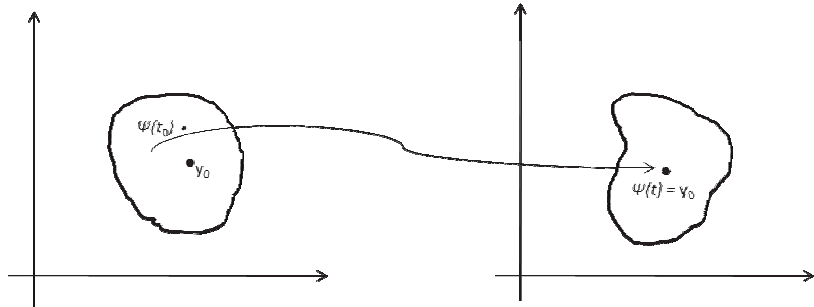


Figura 9. Solución asintóticamente estable del sistema.

Definición 2.5.2. La solución de equilibrio se dice inestable si es no estable (Figura 10).

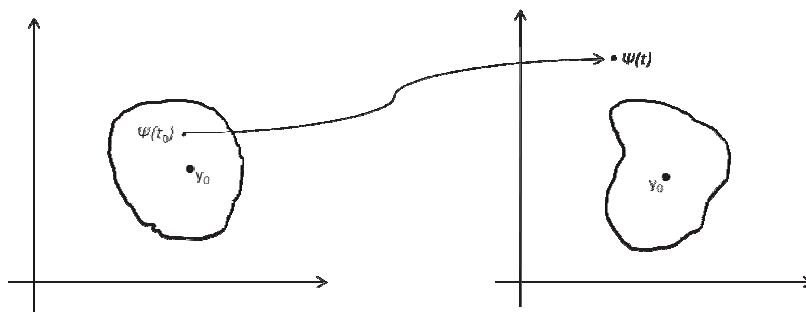


Figura 10. Solución inestable del sistema.

Definición 2.5.3. Sea la función

$$\dot{y} = (A + B(t))y, \quad (2.6)$$

donde A es una matriz constante y $B(t)$ es continua y pequeña tal que si t es muy grande esperamos que la solución de (2.6) se comporte como la de $\dot{y} = Ay$.

- Si todos los eigenvalores tienen parte real negativa y si $B(t)$ es continua para $0 < t < \infty$ con $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0$, Entonces la solución cero de (2.6) es **globalmente asintóticamente estable**.

El caso más simple y para el cual las preguntas sobre la estabilidad son contestadas fácil y completamente son las de un sistema lineal

$$\dot{y} = Ay, \quad (2.7)$$

donde A es una matriz real de 2×2 . Un simple criterio para analizar la solución cero del sistema (2.7) puede ser dada en términos de los eigenvalores de A , así

$$x(t) = e^{\lambda t}v,$$

donde $v \neq 0$ es algún vector fijo a determinar, y λ es un radio de crecimiento (eigenvalores).

Los eigenvalores de una matriz están dados por su ecuación característica $\det(A - \lambda I) = 0$, que para 2 dimensiones es

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr}(A) + \det(A) = 0,$$

entonces

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr}(A) \pm \sqrt{\text{Tr}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2},$$

por lo que los eigenvalores dependen de la traza y del determinante de la matriz A .

Se tienen los siguientes tipos de espacios fase para distintas combinaciones de eigenvalores:

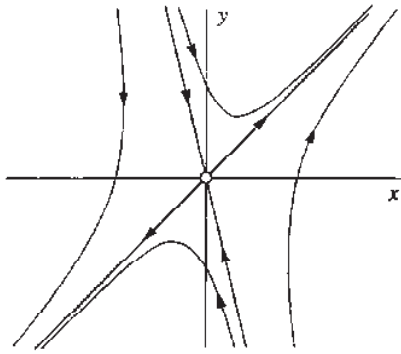


Figura 11. Punto silla, eigenvalores $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$.

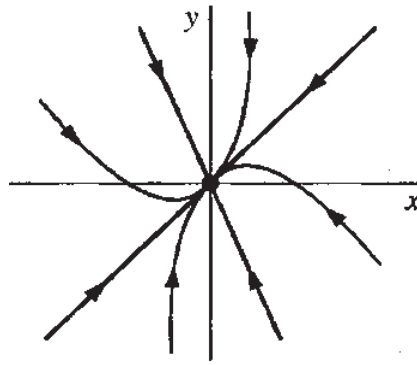


Figura 12. Nodo estable, eigenvalores $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

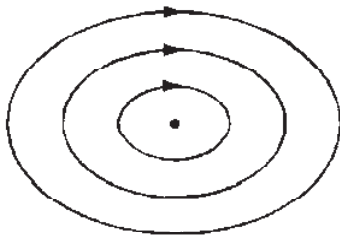


Figura 13. Centro, eigenvalores complejos conjugados.

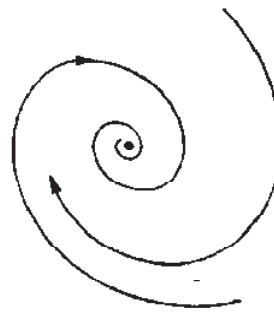


Figura 14. Espiral estable eigenvalores complejos con $Re < 0$

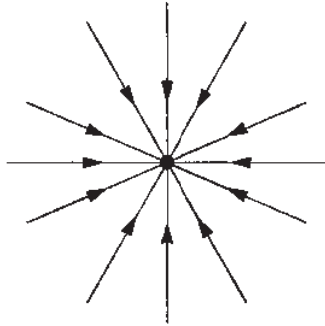


Figura 15. Nodo estable eigenvalores $\lambda_1 = \lambda_2$



Figura 16. Nodo degenerado estable eigenvalores $\lambda_1 = \lambda_2$

Sin embargo podemos hacer un diagrama general por medio del discriminante de las soluciones de la ecuación característica, graficando $Tr(A)$ vs $\det(A)$ y donde tenemos las relaciones $\det(A) = \lambda_1\lambda_2$ y $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$.

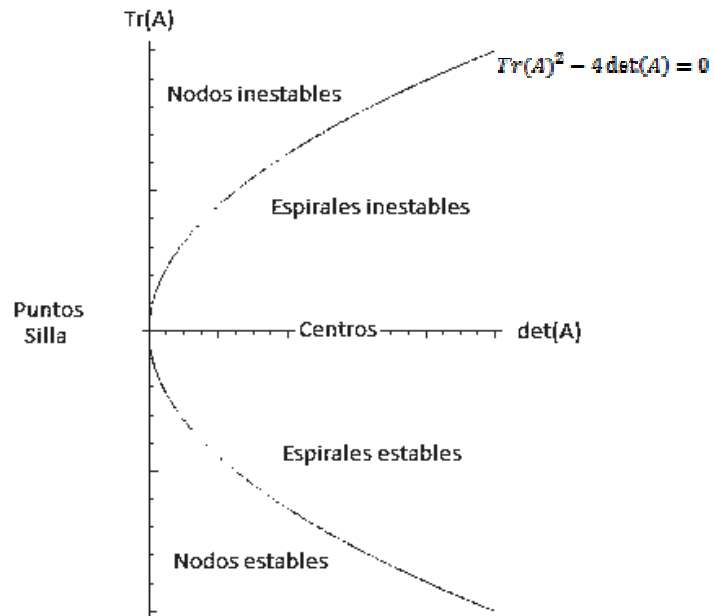


Figura 17. Clasificación de puntos fijos.

Con la Figura 17 podemos observar que

- Si el $\det(A) < 0$, los eigenvalores son reales y con signo opuesto tenemos un punto silla.
- Si el $\det(A) > 0$, y los eigenvalores son reales con el mismo signo tenemos nodos estables o inestables.
- Si el $\det(A) > 0$, y los eigenvalores son complejos conjugados tenemos centros o espirales estables o inestables.
- Si el $\det(A) = 0$, al menos uno de los eigenvalores es cero y el origen no es un punto fijo aislado, es toda una línea de puntos fijos o un plano de puntos fijos si $A = 0$.

Los nodos satisfacen $Tr(A)^2 - 4\det(A) > 0$ y las espirales satisfacen $Tr(A)^2 - 4\det(A) < 0$. La parábola $Tr(A)^2 - 4\det(A) = 0$ es el borde entre nodos y espirales, los nodos y nodos degenerados se localizan en esta parábola. La estabilidad de los nodos y las espirales son determinadas por la $Tr(A)$, cuando $Tr(A) < 0$, ambos eigenvalores son negativos y el punto fijo es estable es mayor que cero para puntos inestables. Los centros estables se localizan en la línea $Tr(A) = 0$, donde los eigenvalores son puramente imaginarios.

Un ciclo límite es una trayectoria cerrada aislada. Al decir aislado nos referimos a que toda trayectoria vecina es abierta, dichas curvas son espirales que se aproximan o se alejan del ciclo límite.



Figura 18. Ciclos Límite.

Si todas las trayectorias vecinas se aproximan al ciclo límite, decimos que el ciclo límite es estable. En caso de que se alejen decimos que es inestable, o en casos excepcionales semi-estable.

Los ciclos límite son muy importantes científicamente, por medio de ellos se modelan sistemas que muestran oscilaciones auto-sostenidas, como el bombeo de sangre al corazón, las vibraciones de las alas de un avión, los ritmos diarios de temperatura corporal, etc., en cada caso hay una oscilación típica (con alguna frecuencia) si se perturba el sistema, este tiende a regresar a su ciclo límite. En otras palabras, estos sistemas oscilan incluso en ausencia de fuerzas externas periódicas.

2.5.1. Ejemplos

Veamos lo que sucede con la solución cero de los siguientes sistemas, analizando su estabilidad.

- $\ddot{u} - u = 0$, encontremos el sistema equivalente

$$\dot{u}_1 = u_2,$$

$$\dot{u}_2 = u_1.$$

Que tiene la representación matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

y resolviendo el problema de eigenvalores para el sistema obtenemos que los eigenvalores correspondientes son ± 1 , por lo que la solución cero del sistema es inestable.

Para ver como se comportan las soluciones en el espacio fase (Figura 19), hacemos uso de los eigenvectores correspondientes a cada eigenvalor. Así al eigenvalor $\lambda = 1$ le corresponde el eigenvector $(1,1)$ y al eigenvalor $\lambda = -1$ el eigenvector $(1,-1)$.

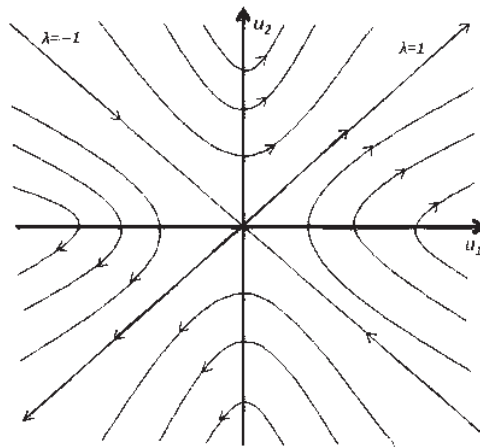


Figura 19. Espacio fase del sistema $\ddot{u} - u = 0$.

- $\ddot{u} + 2k\dot{u} + u = 0$, con $k > 0$, haciendo el mismo cambio de variable

$$\dot{u}_1 = u_2,$$

$$\dot{u}_2 = -2ku_2 - u_1.$$

Con representación matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

con eigenvalores $\lambda = -k \pm \sqrt{k^2 - 1}$, ahora si $k \geq 1$, ambos eigenvalores tienen parte real negativa, y la solución es asintóticamente estable. Si $0 \leq k < 1$ los eigenvalores son complejos conjugados con parte real negativa, por lo que la solución es una espiral estable.

Un oscilador armónico amortiguado se puede modelar por medio de la ecuación $\ddot{u} + 2k\dot{u} + u = 0$, por lo que sabemos del oscilador, la amplitud va decreciendo conforme avanza el tiempo debido a la pérdida de energía por la fricción.

En los ejemplos es importante la caracterización del espacio fase, ya que las curvas en dicho espacio muestran cómo se comporta la solución del sistema con diferentes condiciones iniciales y como avanzará mientras el parámetro temporal crece, así las definiciones de estabilidad tienen un papel importante en la teoría de estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales.

2.6. Sistemas cuasi-lineales

Suponga que y_0 es un punto crítico del sistema autónomo no lineal

$$\dot{y} = \vec{F}(y), \tag{2.8}$$

donde \vec{F} es continua y tiene primera derivada parcial continua en el dominio D en el espacio fase n -dimensional. Para ver si este punto de equilibrio es estable o no consideramos la solución Ψ dada por

$$\vec{\Psi}(t) = \vec{y}_0 + \vec{z}(t),$$

de esta manera

$$\dot{\vec{z}}(t) = \vec{F}(\vec{y}_0 + \vec{z}(t)),$$

pero como $\vec{F}(\vec{y}_0) = 0$, $\vec{F}(\vec{y}_0 + \vec{z}(t)) = \vec{F}(\vec{y}_0 + \vec{z}(t)) - \vec{F}(\vec{y}_0)$. Aplicando el teorema del valor medio a esta diferencia obtenemos el sistema cuasi-lineal

$$\dot{\vec{z}}(t) = F_y(\vec{y}_0)\vec{z} + \vec{g}(\vec{z}), \quad (2.9)$$

donde $\vec{g}(\vec{z})$ es continua

$$\lim_{|\vec{z}| \rightarrow 0} \frac{|\vec{g}(\vec{z})|}{|\vec{z}|} = 0,$$

y $\vec{g}(0) = 0$, y donde $F_y(\vec{y}_0)$ es la matriz constante cuyos elementos son $\partial F_i / \partial y_j (y_0)$. Si los componentes de $\vec{F}(\vec{y})$ se pueden expandir en serie de potencias, $\vec{g}(\vec{z})$ será el vector cuyas componentes son series de potencias que comienzan con términos cuadráticos de la componente z . Claramente, si $\vec{z} \equiv 0$ es una solución estable o asintóticamente estable de (2.9), entonces el mismo resultado será válido para el punto de equilibrio \vec{y}_0 de (2.8), que se puede ver de la definición de estabilidad o estabilidad asintótica de la solución $\vec{y} \equiv \vec{y}_0$ de (2.8). Todo esto sugiere que podemos estudiar las propiedades de estabilidad de la solución cero de sistemas de la forma

$$\dot{\vec{y}} = A\vec{y} + \vec{f}(t, \vec{y}),$$

donde A es una matriz constante con eigenvalores con parte real negativa, y donde asumimos que \vec{f} es continua en (t, \vec{y}) en la región $D = \{(t, \vec{y}) | 0 \leq t < \infty, |\vec{y}| < k\}$, donde $k > 0$ es alguna constante, $\vec{f}(t, 0) \equiv 0$, y $|\vec{f}|$ es pequeña para $|\vec{y}|$ pequeña en el sentido de

$$\lim_{|\vec{y}| \rightarrow 0} \frac{|\vec{f}(t, \vec{y})|}{|\vec{y}|} = 0,$$

que es uniformemente continua. De esta manera la adición de un término "pequeño" no lineal al sistema $\dot{\vec{y}} = A\vec{y}$ no afecta la estabilidad asintótica de la solución cero del sistema. Por lo que la solución se puede trasladar a la solución cero del sistema.

2.7. Sistemas gradientes

En lugar de intentar determinar la estabilidad del sistema no lineal examinando su aproximación lineal, emplearemos la técnica inventada por Lyapunov a finales del siglo XIX, esta técnica es también llamada el método directo porque se aplica directamente a las ecuaciones diferenciales, sin conocimiento de las soluciones. En adición a darnos un

criterio de estabilidad, estabilidad asintótica e inestabilidad de las soluciones, el método nos da una forma de estimar las regiones de estabilidad asintótica.

Si en una cierta posición de descanso en un sistema mecánico conservativo se tiene una energía potencial mínima, entonces esta posición corresponde a un equilibrio estable, si la posición de descanso no pertenece a un mínimo de la energía potencial entonces el equilibrio es inestable. Consideraremos una partícula de masa m moviéndose en línea recta bajo la acción de una fuerza $f(y)$ que depende de la posición y pero no del tiempo t . Entonces la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{y} = f(y). \quad (2.10)$$

Como se había mencionado que el sistema es conservativo tenemos que la fuerza se genera a partir de un potencial escalar como $f(y) = -dU/dy$, y $U(y)$ es llamada energía potencial. En un caso particular, la gráfica de la energía potencial puede ser dada por la Figura 20, donde los correspondientes puntos de críticos son $A, 0, B, C, D$. Y los puntos $0, D$ son estables mientras que A, B, C son inestables.

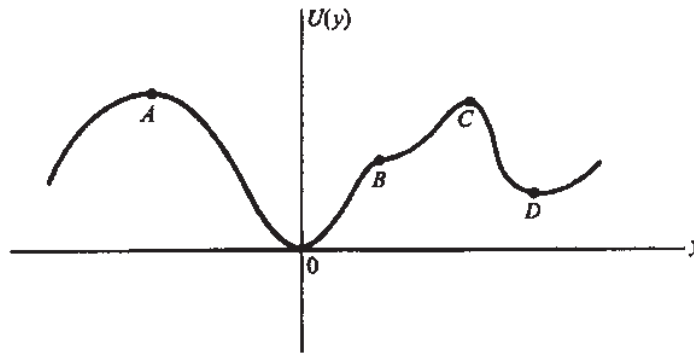


Figura 20. Potencial mecánico.

Podemos escribir el sistema (2.10) como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden autónomas poniendo $y_1 = y$, $y_2 = \dot{y}$, así

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad (2.11)$$

$$\dot{y}_2 = f(y_1) = -\frac{dU(y_1)}{dy_1}, \quad (2.12)$$

y la energía cinética del sistema es $T = (m/2)y_2^2$ y la energía total E es

$$E(y_1, y_2) = U(y_1) + \frac{m}{2}y_2^2,$$

que es constante en función del tiempo, por lo que decimos que se conserva la energía, entonces este es un sistema conservativo. Y podemos escribirlo de la siguiente manera

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{m} \frac{\partial E}{\partial y_2},$$
$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{m} \frac{\partial E}{\partial y_1},$$

que es la forma de las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x},$$
$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y}.$$

Donde el Hamiltoniano para el sistema (2.11), (2.12) es

$$H(x, y) = \frac{1}{m} E(x, y).$$

El hecho de que el Hamiltoniano coincida por un factor constante con la energía mecánica del sistema no ocurre para todos los sistemas, solo en los sistemas conservativos.

2.8. Teoremas de Lyapunov

Consideremos sistemas autónomos de la forma

$$\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y}), \tag{2.13}$$

donde \vec{f} y $\partial \vec{f} / \partial y_i$ son continuas en una región D del espacio n -dimensional. Asumimos que D contiene al origen, así $\vec{f}(0) = 0$, por lo que es un punto crítico aislado de (2.13). Esta consideración no es un problema ya que el problema de estabilidad de

cualquier punto $\vec{y} \equiv \vec{y}_0$, puede ser investigado transformándolo a la solución cero del sistema, ya que tratamos con un sistema lineal.

Queremos construir cierta función escalar (función de Lyapunov) para lo que requerimos cierto número de definiciones [2].

Definición 2.8.1. Sea $V(\vec{y})$ una función escalar continua definida en una región Ω que contiene al origen; Ω puede ser todo el espacio.

Definición 2.8.2. La función escalar $V(\vec{y})$ se dice definida positiva en el conjunto Ω si y solo si $V(0) = 0$ y $V(\vec{y}) > 0$ para $y \neq 0$ y \vec{y} en el conjunto Ω .

Definición 2.8.3. La función escalar $V(\vec{y})$ se dice definida negativa en el conjunto Ω si y solo si $-V(\vec{y})$ es definida positiva en Ω .

Asumiremos que la función escalar $V(\vec{y})$ tiene primeras derivadas parciales continuas en cada punto de la región Ω .

Definición 2.8.4. La derivada de V con respecto al sistema $\dot{\vec{y}} = \vec{f}(\vec{y})$ es el producto escalar

$$V^*(\vec{y}) = \nabla V(\vec{y}) \cdot \vec{f}(\vec{y}) \quad (2.14)$$

Observamos que si $\vec{\varphi}(t)$ es cualquier solución de (2.13), entonces por la regla de la cadena, la definición de solución y (2.14) tenemos

$$\frac{d}{dt} V(\vec{\varphi}(t)) = \frac{\partial V(\vec{\varphi}(t))}{\partial y_j} \dot{\varphi}_j(t) = \frac{\partial V(\vec{\varphi}(t))}{\partial y_j} f_j(t) = V^*(\vec{y})$$

Donde observamos, que a través de una solución φ la derivada total de $V(\vec{\varphi}(t))$ con respecto a t coincide con la derivada de V con respecto al sistema evaluada en $\vec{y} = \vec{\varphi}(t)$.

Ahora veremos los teoremas originales de Lyapunov para sistemas autónomos [3].

Teorema 2.8.1. Si existe una función escalar $V(y)$ que es definida positiva y para la que $V^*(y) \leq 0$ en alguna región Ω que contiene al origen, entonces la solución cero de $\dot{y} = f(y)$ es estable.

Teorema 2.8.2. Si existe una función escalar $V(y)$ que es definida positiva y para la que V^* es definida negativa en alguna región Ω que contiene al origen, entonces la solución cero de $\dot{y} = f(y)$ es asintóticamente estable.

Teorema 2.8.3. Si existe una función escalar $V(y)$, $V(0) = 0$, tal que V^* es positiva definida o negativa definida en alguna región Ω que contiene al origen y si existe en cada vecindad N del origen, $N \subset \Omega$, por lo menos un punto $a \neq 0$ tal que $V(a)$ tiene el mismo signo que $V^*(y)$, entonces la solución cero de $\dot{y} = f(y)$ es inestable.

Los teoremas de Lyapunov proporcionan condiciones suficientes para determinar la estabilidad, pero no son necesarias. Además es necesario encontrar la función de Lyapunov, pero el hecho de que una candidata a función de Lyapunov no cumple las condiciones del teorema, no se puede inferir que el equilibrio sea inestable. De hecho este es uno de los mayores inconvenientes del método de Lyapunov; no propone candidatas a funciones de Lyapunov, no existe forma sistemática de encontrarlas. Sin embargo existen métodos que proporcionan o bien funciones de Lyapunov para un sistema dado, o bien candidatas que normalmente necesitan comprobaciones posteriores, la mayoría de ellos requieren resolver ecuaciones diferenciales parciales o realizar procesos de tipo prueba y error.

2.8.1. Ejemplos

Considere el sistema

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.15)$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 \quad (2.16)$$

Ya que no existe un método general para construir una función de Lyapunov para este sistema tomemos la función de la suma de cuadrados de y_1 y y_2

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}[y_1^2 + y_2^2] \quad (2.17)$$

Y derivando con respecto al tiempo la ecuación (2.17)

$$\frac{d}{dt}V(y_1, y_2) = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 \quad (2.18)$$

Y sustituyendo (2.15) y (2.16)

$$y_1y_2 - y_2(y_1 + 2y_2) = -2y_2^2$$

Por lo que la solución del sistema es asintóticamente estable.

Ahora consideremos el sistema

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.19)$$

$$\dot{y}_2 = -y_1 \quad (2.20)$$

Tomemos la misma función de Lyapunov (2.17), derivando (2.17) obtenemos la ecuación (2.18) y sustituyendo (2.19) y (2.20) obtenemos

$$\frac{d}{dt}V(y_1, y_2) = y_1\dot{y}_1 + y_2\dot{y}_2 = y_1(y_2) + (-y_1) = 0.$$

Encontramos que la solución del sistema es estable, ya que el sistema representa la ecuación del oscilador armónico, y las orbitas en el espacio fase son elipses cerradas.

Capítulo 3

APLICACIONES

3.1. Introducción

En este capítulo aplicaremos la teoría desarrollada hasta este punto, en algunos ejemplos físicos como el oscilador armónico, el péndulo, el oscilador amortiguado, una partícula en un pozo doble de potencial y un ejemplo escogido a conveniencia de mostrar que las ecuaciones de Hamilton de la forma en que se dedujeron no ayudan a encontrar el funcional (Hamiltoniano) que contiene toda la información del sistema en cuestión.

3.2. Oscilador armónico

Consideremos la ecuación

$$\ddot{u} + g(u) = 0, \tag{3.1}$$

donde si $g(u)$ es lineal se reduce al oscilador armónico simple, en general $g(u) \in C^1$ para $|u| < k$, con alguna constante $k > 0$, y $ug(u) > 0$ si $u \neq 0$, por continuidad $g(0) = 0$, escribamos la ecuación en un sistema de ecuaciones de primer orden,

$$\dot{x} = y, \tag{3.2}$$

$$\dot{y} = -g(x), \tag{3.3}$$

en la cual el origen es un punto crítico. Para ver la estabilidad de este punto crítico queremos aplicar uno de los teoremas de Lyapunov. Para esto debemos encontrar una función de Lyapunov. Si pensamos físicamente en la ecuación diferencial de segundo orden lo vemos como un resorte donde la fuerza restauradora del resorte es $g(u)$, la energía del sistema la veremos como

$$E = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(z)dz. \quad (3.4)$$

Tomemos esta función como función de Lyapunov del sistema

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(z)dz, \quad (3.5)$$

esta función está definida en $\Omega = \{(x, y) \mid |x| < k, |y| < \infty\}$, $V(0,0) = 0$ y como $zg(z) > 0$, la función $g(x) > 0$ para $0 < |x| < k$, por lo tanto la función $V(x, y)$ es definida positiva en Ω , ahora veamos la derivada temporal de la función de Lyapunov y usando (3.2) y (3.3) tenemos,

$$V^*(x, y) = y\dot{y} + g(x)\dot{x} = y[-g(x)] + g(x)y = 0. \quad (3.6)$$

Esta función es definida positiva y su derivada es igual a cero para todo punto (x, y) por lo que de acuerdo al Teorema 2.7.1, la solución cero del sistema es estable.

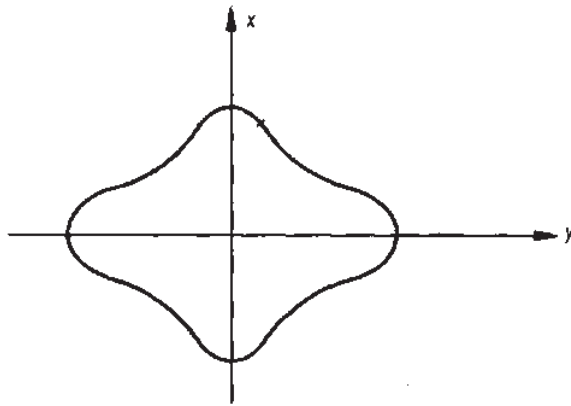


Figura 21. Posible espacio fase de la ecuación (3.5)

En el caso del oscilador armónico, $g(u) = (k/m)u$, por lo que la función de Lyapunov es

$$V(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2, \quad (3.7)$$

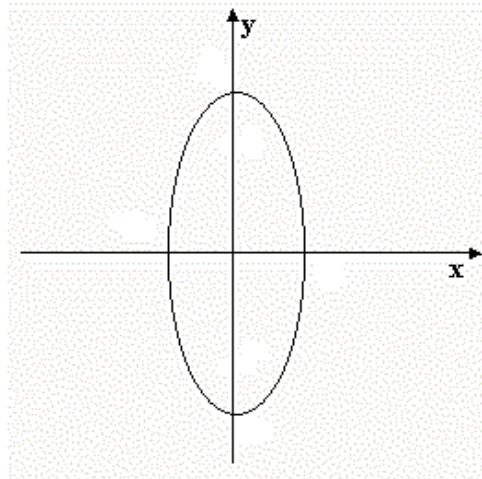


Figura 22. Espacio fase de la ecuación (3.7)

pero esta ecuación es exactamente la misma que el Hamiltoniano del sistema

$$H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + \frac{1}{2}kx^2.$$

Para comprobarlo usamos las ecuaciones canónicas de Hamilton para llegar al sistema (3.2), (3.3).

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx,$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} = my,$$

uniendo este sistema de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden en una ecuación diferencial de segundo orden obtenemos

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

que efectivamente es la ecuación del oscilador armónico simple.

3.3. El péndulo

En cursos elementales, la no linealidad del péndulo se hace a un lado asumiendo que $\sin \theta \approx \theta$. En este apartado haremos uso del espacio fase para no asumir un ángulo pequeño.

En ausencia de fuerzas externas y de amortiguamiento, el movimiento del péndulo viene dado por la ecuación

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0. \quad (3.8)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente es

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (3.9)$$

$$\dot{\omega} = -\sin \theta, \quad (3.10)$$

donde ω es la velocidad angular.

En este sistema los puntos críticos son $(\theta, \omega) = (n\pi, 0)$ donde n es un entero. No hay diferencia física entre ángulos que difieren entre si por 2π , por lo que solo tomaremos dos puntos críticos, $(0,0)$ y $(\pi, 0)$.

Cuando estamos en $(0,0)$, encontramos la matriz correspondiente

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$. Por lo que los eigenvalores son $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, que son complejos, por lo que tenemos que el origen es un centro.

El sistema es de hecho conservativo, multiplicando (3.8) por $\dot{\theta}$ e integrando obtenemos

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \cos \theta = \text{constante},$$

y podemos considerarla como función de energía

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 - \cos \theta. \quad (3.11)$$

Como el sistema es conservativo podemos encontrar un sistema gradiente al que está sometido el sistema, en este caso tenemos $U = -\cos \theta$, que tiene un mínimo local en $(0,0)$.

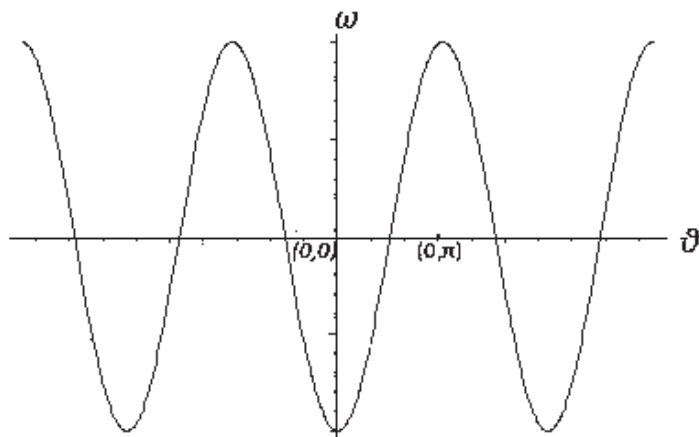


Figura 23. Potencial $U(\theta) = -\cos \theta$

Una vez analizado el origen falta ver que ocurre en el punto fijo $(0, \pi)$, obtenemos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuya ecuación característica es $\lambda^2 - 1 = 0$. Por lo que los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, cuyos vectores propios son $v_1 = (1, -1)$ y $v_2 = (1, 1)$, y se tienen puntos silla. Así con la información que hemos obtenido podemos obtener el espacio fase cercano a los puntos críticos.

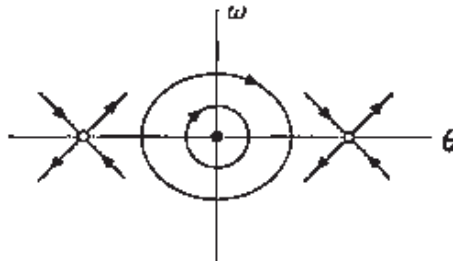


Figura 24. Espacio fase cercano a los puntos críticos.

Para terminar la grafica, incluiremos los contornos de energía $E = \frac{1}{2}\omega^2 - \cos\theta$ para diferentes valores de E . El espacio fase resultante se muestra en la Figura 3.5, que como se esperaba es periódica en θ .

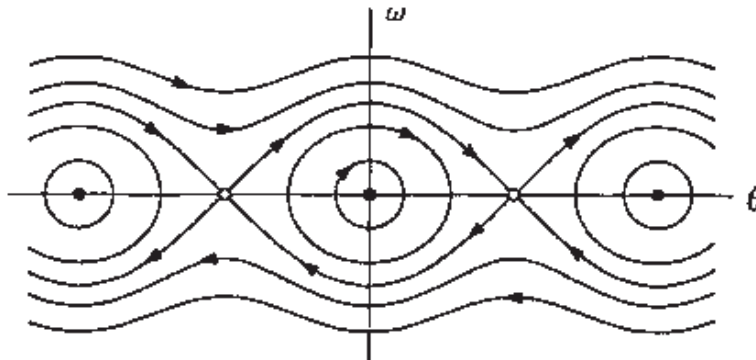


Figura 25. Espacio fase para diferentes estados de energía.

Ahora la interpretación física, los centros corresponden a estados de equilibrio estables con el péndulo en reposo colgando hacia abajo, en este punto se tiene el mas bajo nivel de energía. Las pequeñas orbitas alrededor del centro representan pequeñas oscilaciones que pasan sobre el punto de equilibrio estable. Mientras E se incrementa, las orbitas crecen, el caso critico se tiene cuando las trayectorias unen en los puntos silla, los puntos silla representan el péndulo invertido en reposo. Cuando la energía rebasa este límite, el péndulo da vueltas repetidamente.

El espacio fase del péndulo es más ilustrativo si lo envolvemos en una superficie cilíndrica. De hecho el cilindro es el espacio fase natural para el péndulo, porque incorpora la geometría fundamental entre ω y θ .

Ya que θ es periódico, con periodo 2π , tomamos uno de esos periodos y cortamos transversalmente el eje x y unimos ambos cortes, formando un cilindro, este espacio forma todas las posibles soluciones de la ecuación (3.8).

De (3.11) obtenemos que para $E = -1$, entonces $\omega = 0$.

Para $E = 1$, entonces

$$1 = \frac{1}{2}\omega^2 - \cos \theta,$$

$$\omega^2 = 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

cuando $\theta = (2n + 1)\pi$, $\omega = 0$, y cuando $\theta = 0$, $\omega = \pm 2$.

Para $E > 1$, entonces

$$1 < \frac{1}{2}\omega^2 - \cos \theta,$$

$$\omega^2 > 4 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

cuando $\theta = (2n + 1)\pi$, $\omega > 0$, y cuando $\theta = 0$, $\omega > 2$ y $\omega < -2$.

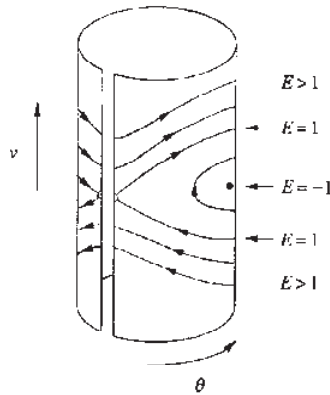


Figura 26. Espacio fase cilíndrico del péndulo.

3.4. Oscilador armónico amortiguado

Consideremos un oscilador armónico simple en el que una masa m esta suspendida de un resorte cuya constante de fuerza es k el sistema está dispuesto como se muestra en la Figura 3.7,

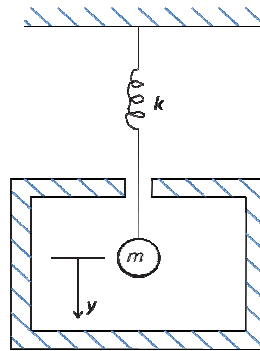


Figura 27. Oscilador armónico amortiguado

El orificio genera una fuerza que se opone al movimiento y es denotada por $a\dot{y}$, donde a es una constante y y es el desplazamiento de la masa desde el equilibrio. De las leyes de Newton tenemos

$$m\ddot{y} = -ky - a\dot{y},$$

que es lo mismo que

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + ky = 0, \tag{3.12}$$

esta ecuación representa el oscilador armónico amortiguado. Aquí el sistema no es conservativo debido al amortiguamiento y a que no se deriva de un potencial escalar. Buscaremos el Lagrangiano $\mathcal{L}(y, \dot{y}, t)$ tal que (3.12) es una ecuación de Euler-Lagrange. Multiplicando (3.12) por una función no negativa $f(t)$ obtenemos

$$mf(t)\ddot{y} + af(t)\dot{y} + kf(t)y = 0, \tag{3.13}$$

la ecuación (3.13) debe coincidir con la ecuación de Euler-Lagrange

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y} \partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} \ddot{y} = 0.$$

Una opción obvia es tomar

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y}^2} = mf(t),$$

así, integrando obtenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = mf(t)\dot{y} + M(t, y),$$

Integrando nuevamente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mf(t)\dot{y}^2 + M(t, y)\dot{y} + N(t, y), \quad (3.14)$$

donde M y N son funciones arbitrarias. Se sigue de (3.13) que

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{y} \partial t} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial \dot{y}} \dot{y} = af(t)\dot{y} + kf(t)y,$$

o también

$$-(M_y \dot{y} + N_y) + m\dot{f}(t)\dot{y} + M_t + M_y \dot{y} = af(t)\dot{y} + kf(t)y, \quad (3.15)$$

de donde obtenemos

$$-N_y + M_t = kf(t)y. \quad (3.16)$$

Supongamos que $M = M(y)$ entonces de (3.14)

$$N_y = -kf(t)y,$$

Integrando obtenemos

$$N = -\frac{1}{2}kf(t)y^2,$$

Sustituyendo N en (3.14)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 - ky^2)f(t) + M(y)\dot{y}$$

Mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange debemos reproducir la ecuación (3.12),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{d}{dt} (m\dot{y}f(t) + M(y)) + kyf(t) + M_y \dot{y} \\ &= m\ddot{y}f(t) + m\dot{y}\dot{f}(t) + kyf(t) + M_y \dot{y} = 0, \end{aligned}$$

Debido al término $M_y \dot{y}$ la ecuación no tiene semejanza con (3.12) por lo que $M = M(y)$ no es una opción válida.

Tomemos $M = 0$. Entonces (3.15) se convierte en

$$-(N_y) + m\dot{f}(t)\dot{y} = af(t)\dot{y} + kf(t)y,$$

y obtenemos las siguientes ecuaciones

$$m\dot{f}(t) = af(t),$$

$$-(N_y) = kf(t)y,$$

resolviendo obtenemos

$$f(t) = e^{\frac{a}{m}t},$$

$$N = -\frac{1}{2}ke^{\frac{a}{m}t}y^2,$$

así obtenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 - ky^2)e^{\frac{a}{m}t}. \quad (3.17)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange debemos obtener la ecuación diferencial de segundo orden inicial,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{d}{dt} (m\dot{y}e^{\frac{a}{m}t}) + kye^{\frac{a}{m}t} = a\dot{y}e^{\frac{a}{m}t} + m\ddot{y}e^{\frac{a}{m}t} + kye^{\frac{a}{m}t} \\ &= (m\ddot{y} + a\dot{y} + ky)e^{\frac{a}{m}t} = 0 \end{aligned}$$

ya $e^{\frac{a}{m}t}$ es definida positiva para todo t ,

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + ky = 0$$

En este método la función M solo puede satisfacer las ecuaciones si es igual a 0 en otro caso no se cumple, esto es debido a que las ecuaciones de Euler-Lagrange no fueron desarrolladas para sistemas disipativos como el del oscilador armónico amortiguado, se necesita un principio más general que cumpla las condiciones de un sistema disipativo.

Mediante una transformación de Legendre de (3.17) obtenemos el Hamiltoniano asociado al sistema

$$H(y, p, t) = p\dot{y} - \mathcal{L}(y, \dot{y}, t) = p\dot{y} - \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 - ky^2)e^{\frac{a}{m}t},$$

usando el momento generalizado $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}e^{\frac{a}{m}t}$ así obtenemos

$$\begin{aligned} H(y, p, t) &= mp\dot{y} - \frac{1}{2}(m\dot{y}^2 - ky^2)e^{\frac{a}{m}t} \\ &= mp^2e^{-\frac{a}{m}t} - \frac{1}{2}(mp^2e^{-2\frac{a}{m}t} - ky^2)e^{\frac{a}{m}t} \end{aligned}$$

$$H(y, p, t) = \frac{1}{2}mp^2e^{-\frac{a}{m}t} + \frac{1}{2}ky^2e^{\frac{a}{m}t},$$

y con las ecuaciones de Hamilton obtenemos

$$m\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p} = mpe^{-\frac{a}{m}t},$$

$$m\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -kye^{\frac{a}{m}t},$$

estas ecuaciones deberían conducirnos a la ecuación diferencial del oscilador armónico amortiguado. Derivando \dot{y} obtenemos

$$m\ddot{y} = m\dot{p}e^{-\frac{a}{m}t} - ape^{-\frac{a}{m}t},$$

y de \dot{p} obtenemos

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= m\dot{p}e^{-\frac{a}{m}t} - ape^{-\frac{a}{m}t} = m\left(-\frac{k}{m}ye^{\frac{a}{m}t}\right)e^{-\frac{a}{m}t} - a\left(\dot{y}e^{\frac{a}{m}t}\right)e^{-\frac{a}{m}t} \\ &= -ky - a\dot{y}, \end{aligned}$$

$$m\ddot{y} + a\dot{y} + ky = 0,$$

que es exactamente la ecuación con la cual iniciamos los cálculos y pertenece al oscilador armónico amortiguado.

Para analizar la estabilidad de los puntos críticos del sistema, separemos la ecuación (3.12) en un sistema de ecuaciones

$$\dot{y} = x, \tag{3.18}$$

$$\dot{x} = -\frac{k}{m}y - \frac{a}{m}x, \tag{3.19}$$

con la matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{a}{m} \end{pmatrix},$$

con $\det(A) = \frac{k}{m}$ y $\text{Tr}(A) = -\frac{a}{m}$ para determinar que tipo de estabilidad existe, debemos ver que ocurre con el discriminante $\text{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$

$$\text{Tr}(A)^2 - 4\det(A) = \left(\frac{a}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m},$$

y tenemos 3 posibles casos

1. Si $\text{Tr}(A)^2 > 4\det(A)$ lo punto crítico son nodos estables.
2. Si $\text{Tr}(A)^2 < 4\det(A)$ lo punto crítico son espirales estables.
3. Si $\text{Tr}(A)^2 = 4\det(A)$ el punto crítico es un nodo degenerado.

Estos posibles casos hacen referencia a los 3 posibles osciladores armónicos amortiguados, el oscilador sobreamortiguado, el oscilador ligeramente amortiguado y el oscilador críticamente amortiguado.

3.5. Partícula en un pozo doble de potencial

Considere una partícula de masa $m = 1$ que se mueve en el pozo doble de potencial dado por

$$U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4. \quad (3.20)$$



Figura 28. Potencial de la ecuación (3.15)

Para la ecuación de movimiento tomamos $F = -\frac{dU}{dx} = x - x^3$, así obtenemos

$$\ddot{x} = x - x^3.$$

Esto puede ser escrito como el sistema

$$\dot{x} = y, \tag{3.21}$$

$$\dot{y} = x - x^3, \tag{3.22}$$

donde y representa la velocidad de la partícula. Los puntos críticos ocurren cuando $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0)$. Para conocer la estabilidad de los puntos críticos de este problema, observemos la matriz asociada a este sistema

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix},$$

en $(0, 0)$, tenemos que $\det(A) = -1$, así de acuerdo a la clasificación de puntos críticos (Figura(27)), tenemos que el origen es un punto silla. Pero cuando $(x, y) = (\pm 1, 0)$ encontramos que $\det(A) = 2$ y $\text{Tr}(A) = 0$; así estos puntos son centros.

Podríamos pensar que el término no lineal haría fallar la predicción de los centros ubicados en $(\pm 1, 0)$. Pero este no es el caso debido a la conservación de la energía. Las trayectorias son curvas cerradas definidas por el contorno de energía constante, es decir,

$$E = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \text{constante}.$$

Para decidir la dirección de las trayectorias cerradas, simplemente calculamos el vector (\dot{x}, \dot{y}) en algunos lugares convenientes. Por ejemplo, $\dot{x} > 0$ y $\dot{y} = 0$ sobre el eje

positivo y , el movimiento es hacia la derecha. La orientación de trayectorias vecinas se sigue por continuidad.

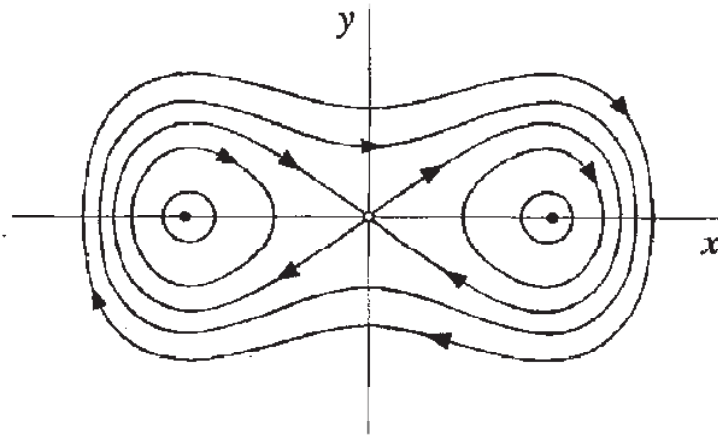


Figura 29. Espacio fase del potencial (3.15)

Como se esperaba el sistema tiene un punto silla en $(0,0)$ y centros en $(1,0)$ y en $(-1,0)$. Cada uno de los centros estables está rodeado de una familia de pequeñas orbitas cerradas. Incluso existen orbitas cerradas grandes que encapsulan a los 3 puntos críticos. Por lo tanto las soluciones del sistema son típicamente periódicas, excepto por las soluciones de equilibrio estable y dos trayectorias muy especiales que son las que comienzan y terminan en el origen, más precisamente estas trayectorias se aproximan al origen cuando $t \rightarrow \infty$. Por último, los puntos de equilibrio estable corresponden a los puntos más bajos de la Figura 28 y las pequeñas orbitas representan oscilaciones alrededor de esos puntos de equilibrio. Las orbitas grandes representan oscilaciones más energéticas que repetidamente hacer pasar a la partícula sobre el origen. El punto silla representa el máximo local ubicado en $x = 0$, y la partícula se quedara ahí a menos que una pequeña perturbación la mueva, entonces regresaría a la misma posición en un $t \rightarrow \infty$.

3.6. Otro ejemplo

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = y, \quad (3.23)$$

$$\dot{y} = -ax + \frac{b}{y}, \quad (3.24)$$

si aplicamos la teoría de Hamilton a nuestro sistema, debemos encontrar el Hamiltoniano asociado al sistema y después con dicho Hamiltoniano regresar a las ecuaciones (3.23) y (3.24), normalizando con respecto a la masa, $m = 1$ obtenemos

$$\dot{x} = y = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\dot{y} = -ax + \frac{b}{y} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

Integrando \dot{y} con respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial H}{\partial x} dx &= \int \left(ax - \frac{b}{y} \right) dx = \int ax dx - \int \frac{b}{y} dx \\ &= \frac{1}{2} ax^2 - \int b \frac{1}{dx} dx = \frac{1}{2} ax^2 - \int b dt \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2} ax^2 - bt + g(y), \quad (3.25)$$

derivando (3.25) con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{g}(y) = y,$$

ahora integramos $g(y)$

$$g(y) = \frac{1}{2} y^2,$$

así, el Hamiltoniano asociado al sistema es

$$H = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{2} y^2 - bt, \quad (3.26)$$

Mediante (3.26) y las ecuaciones de Hamilton debemos recupera (3.23) y (3.24)

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y = \dot{x},$$
$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -ax = \dot{y},$$

sin embargo este sistema de ecuaciones diferenciales no corresponde a (3.23) y (3.24), de hecho corresponde al oscilador armónico simple. Este es uno de los múltiples casos en los que la teoría de Hamilton no puede ser adaptada directamente para un sistema disipativo o un sistema no lineal, ya que fue deducido para sistemas conservativos y la complejidad de ciertos sistemas no lineales no permite el uso de las ecuaciones de Hamilton.

La teoría de Lyapunov no es aplicable en este caso ya que la candidata a función de Lyapunov del sistema (H) no puede depender explícitamente del tiempo.

Capítulo 4

MÉTODO ALTERNATIVO

4.1. Introducción

Toda la teoría desarrollada hasta ahora se enfoca principalmente para sistemas conservativos, para los sistemas disipativos existen complicaciones. Sin embargo propondremos un teorema que nos ayudara a encontrar ciertas funciones $H(x, y, t)$ y $\frac{dH}{dt}(x, y, t)$ que nos darán información de cómo cambia en el tiempo, pudiendo ser $H(x, y, t)$ constante pero $\frac{dH}{dt}(x, y, t)$ variable de tal forma que oscile.

Teorema (V. M. Yepes G.) Dado el sistema $\dot{x} = f(x, \dot{x}, t)$, existe una función única suave $H(x, y, t)$ y una $\frac{dH}{dt}(x, y, t)$ asociada al sistema que satisface

$$\int \frac{dx}{dt} dy - \int \frac{dy}{dt} dx = H - \int \frac{dH}{dt} dt \quad (4.1)$$

\Updownarrow

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad (4.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t}\right) \quad (4.3)$$

Donde $x = x(t)$ y $y = \dot{x}(t)$ representan las variables de estado del sistema.

4.2. Oscilador armónico

Consideremos la ecuación

$$\ddot{x} + g(x) = 0,$$

Ponemos esta ecuación en un sistema de 2 ecuaciones de primer orden

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -g(x),$$

ahora aplicamos el teorema para obtener los funcionales H y $\frac{dH}{dt}$

$$\int \dot{x} dy - \int \dot{y} dx = \int y dy + \int g(x) dx = \frac{y^2}{2} + \int g(x) dx,$$

$$\frac{y^2}{2} + \int g(x) dx = H - \int \frac{dH}{dt} dt,$$

de donde obtenemos que

$$H = \frac{y^2}{2} + \int g(x) dx,$$

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

donde podemos observar que la H es la misma energía total del sistema y a la función de Lyapunov tomadas en la sección 3.2, y ya que este tipo de osciladores son conservativos obtenemos que H no cambia en el tiempo.

Para el caso del oscilador armónico simple, ponemos $g(x) = x$, que al integrarla obtenemos

$$H = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2},$$

que con $m = 1, k = 1$, tenemos la misma ecuación de la Hamiltoniana de la sección 3.2.

Veamos que ocurre con $\frac{dH}{dt}$

$$\frac{dH}{dt} = g(x)\dot{x} + y\dot{y} = g(x)y - yg(x) = 0.$$

También queremos que satisfaga el sistema (4.2), (4.3), y ya sabemos que el sistema es conservativo por lo que $\frac{dH}{dt} = 0$, entonces el sistema (4.2), (4.3) se reduce a las ecuaciones de Hamilton convencionales

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

de donde obtenemos el sistema original

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -g(x),$$

y así obtenemos la ecuación inicial

$$\ddot{x} + g(x) = 0.$$

4.3. El péndulo

Consideremos la ecuación que modela el péndulo

$$\ddot{\theta} + \sin \theta = 0,$$

y por conveniencia hagamos el cambio de variable $\theta = x$ y $\dot{\theta} = y$

$$\ddot{x} + \sin x = 0,$$

de esta ecuación obtenemos el sistema siguiente

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -\sin x.$$

Aplicando el teorema (V. M. Yepes G.) a este sistema de ecuaciones diferenciales que representan a un sistema conservativo obtenemos

$$\int \dot{x} dy - \int \dot{y} dx = \int y dy + \int \sin x dx = \frac{y^2}{2} + \int \sin x dx,$$

$$\frac{y^2}{2} - \cos x = H - \int \frac{dH}{dt} dt,$$

de donde

$$H = \frac{y^2}{2} - \cos x,$$

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

que concuerda con el resultado obtenido en la sección 3.3. del péndulo sin rozamiento, siendo H la energía total del sistema, aunque en esta teoría no sea exactamente lo mismo. Ahora veamos si se cumple la segunda parte del teorema.

Confirmaremos el resultado de la variación en el tiempo de H

$$\frac{dH}{dt} = y\dot{y} + \sin x \dot{x} = -y \sin x + \sin x y = 0,$$

ahora usemos las ecuaciones (4.2) y (4.3) para comprobar el teorema

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

de donde obtenemos el sistema original

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\sin x,$$

y también obtenemos la ecuación inicial

$$\ddot{x} + \sin x = 0$$

4.4. Oscilador armónico amortiguado

Sea la ecuación

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0,$$

de esta ecuación obtenemos el sistema siguiente

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -by - x.$$

Apliquemos de nuevo el teorema a este sistema de ecuaciones diferenciales que representan a un sistema no conservativo, obtenemos

$$\int \dot{x} dy - \int \dot{y} dx = \int y dy + \int (by + x) dx = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \int by dx,$$
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \int by^2 dt = H - \int \frac{dH}{dt} dt,$$

de donde obtenemos los funcionales H y $\frac{dH}{dt}$

$$H = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2},$$

$$\frac{dH}{dt} = -by^2,$$

donde resulta que H es la misma que en el caso del oscilador armónico mientras que ahora el término $\frac{dH}{dt}$ ahora es diferente de cero lo que resulta fácil de entender ya que el sistema en cuestión no es conservativo. Ahora veamos la segunda parte del teorema.

Para comenzar veamos que ocurre con el cambio de H en el tiempo

$$\frac{dH}{dt} = y\dot{y} + x\dot{x} = -xy - by^2 + xy = -by^2,$$

ahora si usemos las ecuaciones (4.2) y (4.3) para comprobar el teorema

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1} \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t}\right),$$

de donde obtenemos el sistema original

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y,$$
$$\frac{\partial H}{\partial x} = -x + \frac{1}{y}(-by^2 - 0) = -x - by,$$

y también obtenemos la ecuación inicial

$$\ddot{x} + b\dot{x} + x = 0.$$

En la teoría general de Hamilton un Hamiltoniano solo describe un sistema mientras que aquí observamos que la funcional H coincide en ambos sistemas pero la funcional $\frac{dH}{dt}$ es diferente, esto se debe a que en la teoría de Hamilton se trataban de funciones canónicas conjugadas en las que el paréntesis de Poisson es cero, mientras que en el teorema propuesto no lo son.

4.5. Partícula en un pozo doble de potencial

Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden obtenida en la sección 3.5 para la partícula en un pozo doble de potencial

$$\ddot{x} = x - x^3,$$

y separando en un sistema de ecuaciones de primer orden

$$\dot{x} = y,$$
$$\dot{y} = x - x^3.$$

Ahora aplicamos la primera parte del teorema a este sistema de ecuaciones diferenciales

$$\int \dot{x} dy - \int \dot{y} dx = \int y dy - \int (x - x^3) dx = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} = H - \int \frac{dH}{dt} dt.$$

Veamos que ocurre con la variación de H en el tiempo

$$\frac{dH}{dt} = y\dot{y} - x\dot{x} + x^3\dot{x} = y(x - x^3) - xy + x^3y = 0,$$

por lo que obtenemos

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4},$$

$$\frac{dH}{dt} = 0.$$

Apliquemos ahora la segunda parte del teorema

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{y} \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

y tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \dot{y},$$

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = x - x^3.$$

Y con este par de ecuaciones obtenemos el sistema de ecuaciones originales y la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} = x - x^3,$$

así en este ejemplo no lineal el Teorema propuesto se sigue cumpliendo.

4.6. Otro ejemplo

Como observamos en la sección 3.6. el sistema analizado no cumplía las ecuaciones de Hamilton ya que estas no son generales. En esta sección aplicaremos el Teorema propuesto para verificar que el sistema sí cumple este nuevo conjunto de ecuaciones.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales de la sección 3.6.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -ax + \frac{b}{y},\end{aligned}$$

y apliquemos el Teorema propuesto a este sistema

$$\begin{aligned}\int \dot{x} dy - \int \dot{y} dx &= \int y dy - \int \left(\frac{b}{y} - ax\right) dx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}ax^2 - \int \frac{b}{y} dx \\ &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}ax^2 - \int b \frac{1}{\frac{dx}{dt}} dx = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}ax^2 - \int b dt \\ &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}ax^2 - bt = H - \int \frac{dH}{dt} dt,\end{aligned}$$

así obtenemos

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}ax^2 - bt, \\ \frac{dH}{dt} &= 0,\end{aligned}$$

donde observamos que H es la misma que se encontró con el método de Hamilton, también comprobaremos que $\frac{dH}{dt} = 0$, con ayuda del sistema inicial

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} = ax\dot{x} + y\dot{y} - b \\ &= axy + y\left(-ax + \frac{b}{y}\right) - b = axy - axy + b - b = 0.\end{aligned}$$

Ahora comprobaremos que podemos llegar al sistema de ecuaciones mediante la segunda parte del problema,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{y} \left(\frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial t} \right),$$

ya obtuvimos el valor de $\frac{dH}{dt}$, ahora necesitamos las derivadas parciales de H

$$\frac{\partial H}{\partial y} = y,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = ax,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -b,$$

introduciendo esto en el Teorema obtenemos

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -ax + \frac{1}{y} [0 - b] = -ax + \frac{b}{y}$$

que es exactamente el mismo sistema con el que se inicio el análisis.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Existen varias formas de calcular funcionales de sistemas de ecuaciones diferenciales (sistemas dinámicos), sin embargo no se ha generalizado un método para ello, por ejemplo; las funciones de Lyapunov no dependen explícitamente del tiempo y no hay métodos definitivos para obtenerlas; el formalismo de Hamilton es deducido basándose en sistemas conservativos, aún cuando las ecuaciones se pueden forzar para encontrar Hamiltonianos de algunos sistemas disipativos.

Con el Teorema propuesto se busca generalizar la forma de encontrar el conjunto de funcionales H y $\frac{dH}{dt}$ que contengan toda la información del sistema de una manera sencilla y sin restringirnos a sistemas independientes del tiempo o sistemas lineales.

Bibliografía

- [1] Yépez García Víctor Manuel (1990), "Dinámica caótica en controladores adaptables", CINVESTAV IPN Unidad Zacatenco, México D.F. (Tesis de maestría Depto. Ing. Eléctrica).
- [2] Herbert Goldstein, Charles Poole y John Safko, "Classical Mechanics", Third Edition.
- [3] Fred Brauer y John A. Nohel, "The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations", Dover publications 1989.
- [4] Steven H. Strogatz, "Nonlinear Dynamics and Chaos", with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering, Perseus Book Publishing 1994.
- [5] L. Elsgoltz, "Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional", Editorial MIR, Moscú 1969.
- [6] Ferdinand Verhulst, "Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems", Springer 2nd Edition.
- [7] Jorge V. José, Eugene J. Saletan, "Classical Dynamics a contemporary approach", Cambridge University Press.
- [8] Fowles & Cassiday, "Analytical Mechanics", Thomson Seventh Edition.
- [9] Lawrence Perko, "Differential Equations and Dynamical Systems", Springer Third Edition.