UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS.
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Física y Matemáticas

TESIS:

DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA EN MÓDULOS Y ALGUNAS APLICACIONES EN VARIEDADES ALGEBRAICAS.

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas
Presenta:

Petra Rubí Pantaleón Mondragón.

Asesor: Dr. en Matemáticas Luis Abel Castorena Martínez.

Morelia, Michoacán - agosto de 2013.

Dedicado a
mi familia

INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas principales de la geometría algebraica es conocer el conjunto de puntos en K^n, donde K es un campo, que satisfacen un sistema de ecuaciones

$$f_1(x_1,\ldots,x_n) \;=\; \ldots = f_r(x_1,\ldots,x_n) = 0, \tag{1}$$

este conjunto de soluciones es llamado variedad algebraica y depende sólo del ideal $I = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle$.

La descomposición primaria de un ideal es una de las herramientas fundamentales que nos permite obtener información sobre dicho ideal y por tanto, obtener información sobre la variedad que este define. Surgue al generalizar la idea de la factorización de un entero como producto de potencias de números primos.

Cuando se calcula una descomposición primaria de un ideal J en un anillo Noetheriano obtenemos dos listas de ideales: los primos asociados y las componentes primarios de J. Probablemente el primer conjunto sea el más importante ya que proporciona mucho más información sobre J.

La descomposición primaria no es única, sin embargo, los primos asociados si están unicamente determinados.

La presente tesis esta basada principalmente en los artículos de Guerrieri ([15]) y Swanso, (ver [15] y [16]), Boffi y Bruns (ver [3]).

La estructura de la tesis es como sigue: En el primer capítulo recordamos algunas de las definiciones que usaremos a lo largo del trabajo, empezamos de manera general, es decir, definiendo la descomposición primaria en módulos en un anillo conmutativo con unidad, así como de algunos resultados en módulos. Como nuestro propósito es entender la parte geométrica, nuestro siguiente paso es restringirnos a módulos muy particulares: los ideales en el anillo de polinomios sobre un campo algebraicamente cerrado. También encontramos de manera explicita ejemplos de descomposición primaria de un ideal.

De hecho, de manera general, calcular una descomposición primaria es muy difícil, pero por medio de algoritmos computacionales estos calculos se hacen más fáciles.

En el segundo capítulo trabajamos con una clase especial de ideales; los ideales determinatales. La estructura de este tipo de ideales aún no es del todo conocida, al menos que la matriz de la cual obtenemos el ideal satisfaga ciertas condiciones. De hecho uno de los casos mejores entendidos es el ideal determinantal generado por menores maximales. Eisenbud demostró que estos ideales son primos (ver [11]).

En el caso de ideales que no son maximales, Guerrieri y Swanso, aplicaron la teoría de matrices $1-$genéricas, ellos trabajaron con matrices de Hankel generalizadas las cuales son matrices $1-$genéricas y que están en conexión con la formas trilineales diagonales no degeneradas en forma acotada.

De manera particular, Guerrieri junto a sus colaboradores, estudiaron la estructura de matrices M de Hankel generalizadas de $m \times n$ con $m \geq 3$, en particular analizaron a los ideales $I_2(M)$ generados por menores de 2×2 de matrices cuyas entradas son formas lineales, para eso introducen dos números enteros s, t al transformar la matriz M a una forma especial, estos números les permitieron decidir cuando el ideal $I_2(M)$ es o no primo. Además prueban que en el caso cuando $I_2(M)$ no es primo, se tiene 2 componentes aisladas o 2 componentes aisladas y una encajada.

La información que se obtiene de $I_2(M)$ se usa para describir el conjunto de primos asociados de J_A el ideal Jacobiano de una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada $A = \sum a_{ijk}x_iy_jz_k$. La condición diagonal de A se debe a $a_{ijk} = 0$ si, y sólo si $i = j + k - 1$ y en forma acotada por $n = m+p-1$ y no degenerada nos indica que el hiperdeterminante es distinto de cero. Aunque se ha podido eliminar la condición diagonal y se ha demostrado los casos para $n > m + p - 1$ con la teoría de matrices $1-$genéricas, en este caso sólo analizaremos cuando ocurre la igualdad.

Por último, en el tercer capítulo trabajamos algunos ejemplos con el uso de un sistema de álgebra computacional llamado SINGULAR. Como veremos las variedades correspondientes a los primos minimales en la descomposición primaria de un ideal I, es decir, las componentes irreducibles de la variedad $Z(I)$, son las únicas geométricamente "visibles", en el sentido de que si un primo asociado no es minimal, la correspondiente componente que define en $V(I)$, esta contenida en una componente más "grande".

En este último capítulo, notemos que introducimos la definición de bases de Gröbner, por la siguiente razon: Las soluciones de un sistema de ecuaciones como (1) son deducidas de manera fácil apartir de una base de Gröbner, cuando esta base se calcula obtenemos más propiedades del ideal, una de las principales es la descomposición primaria. De hecho, Singular tiene implementado dos comandos para obtener la descomposicioń primaria de un ideal, basadas en Gianni, Trager y Zacharias (GTZ) y la que está basada en Shimoyama y Schoenemann (SY), las cuales están basadas en calcular la base de Gröbner.

Por otra parte, en el artículo de Brodhead-Cummings-Seidler (ver [4]) demuestran que para una matriz de Hankel generalizada M, si G es una base de Gröbner de $I_n(M)$, y si la descomposición primaria de $I_n(M)$ es $Q_1, \ldots, Q_k$, entonces, cada Q_i es de la forma $I_n(M) + J_i$, para algún ideal J_i, pero aún más que esto, si los generadores de Q_i son $\{h_1, \ldots, h_{m_i}\}$, entonces $J_i = \langle \overline{h_1}^G, \ldots, \overline{h_{m_i}}^G \rangle$, donde cada $\overline{h_l}^G$ es la forma normal de h_l con respecto a G, que con mayor formalidad daremos su definición en este capítulo.

Índice general

Capítulo 1

DESCOMPOSICIÓN PRIMARIA EN MÓDULOS.

1.1. Descomposición primaria en submódulos.

En esta sección se definirá la descomposición primaria para un submódulo N de un módulo M. Para ello a lo largo del texto, A denota un anillo conmutativo con unidad, M un $A-$módulo y K un campo.

Empezaremos con definiciones y algunas propiedades de los primos asociados y el soporte de un módulo.

Recordemos que si P es un ideal primo, entonces $M_P =: S^{-1}M$ es el módulo de fracciones con respecto al conjunto multiplicativo $S = A - P$.

Definición 1. *Sea X el conjunto de todos los ideales primos en A. Sea $I \subset A$ un ideal, se define* $\boldsymbol{V(I)} := \{P \in X : I \subset P\}$.

Observemos que estos conjuntos satisfacen los axiomas de conjuntos cerrados para una topología. En efecto:

1. Dado que todos los ideales primos contienen al ideal $\langle 0 \rangle$, entonces

$$V(\langle 0 \rangle) = X.$$

Además observemos que si $E \subset A$, para $J = \langle E \rangle$ se cumple que

$$V(J) = V(E) = V(rad(J))^1$$

[1]donde rad(J) denota el radical del ideal J

esto se debe a que, si $P \in V(J)$, por definición $J \subset P$, y por hipótesis $E \subset J$, por lo que $E \subset P$, y así $P \in V(E)$, es decir, $V(J) \subset V(E)$.

Ahora sea $P \in V(rad(J))$, tenemos que $J \subset rad(J) \subset P$, por tanto $P \in V(J)$, es decir, $V(rad(J)) \subset V(J)$.

Sea $P \in V(E)$, esto implica que $E \subset P$, por lo que $\langle E \rangle \subset P$, esto debido a que cada elemento de $\langle E \rangle$ es una combinación de elementos en $E \subset P$, por lo que también estan en P.

Dado que $rad(J) = \bigcap\limits_{Q \in X, J \subset Q} Q \subset P$ tenemos $V(E) \subset V(rad(J))$ y con esto se prueba las tres igualdades.

Además, de esto obtenemos que $V(rad\langle 1 \rangle) = \emptyset$.

2. Sea $\{J_i\}_{i \in I}$ una familia de ideales de A, sea $Q \in \bigcap\limits_{i \in I} V(J_i)$, es decir, $Q \in V(J_i)\ \forall i \in I$, por lo cual $J_i \subset Q\ \forall i \in I$, entonces $\bigcup\limits_{i \in I} J_i \subset \bigcup Q = Q$, por lo que $Q \in V(\bigcup\limits_{i \in I} J_i)$, es decir, $\bigcap\limits_{i \in I} V(J_i) \subset V(\bigcup\limits_{i \in I} J_i)$.

   Ahora, si $P \in V(\bigcup\limits_{i \in I} J_i)$, tenemos $\bigcup\limits_{i \in I} J_i \subset P$, pero para cada $i \in I$; $J_i \subset \bigcup\limits_{i \in I} J_i$ así $P \in V(J_i)\ \forall i \in I$, por lo que se sigue $P \in \bigcap\limits_{i \in I} V(J_i)$.

   Por lo cual se tiene $\bigcap\limits_{i \in I} V(J_i) = V(\bigcup\limits_{i \in I} J_i)$.

3. Sean $I, J \subset A$ ideales, $P \in V(I) \cup V(J)$, implica $P \in V(I)$ o $P \in V(J)$, es decir, $I \subset P$ o $J \subset P$, y dado que $I \cap J \subset I$ y $I \cap J \subset J$, entonces $I \cap J \subset P$, por lo que $P \in V(I \cap J)$.

   Por otra parte, como $IJ \subset I$ y $IJ \subset J$, entonces $IJ \subset I \cap J$, así $V(I \cap J) \subset V(IJ)$.

   Supongamos que existe $P \in V(IJ)$ de tal forma que $P \notin V(I) \cup V(J)$, esto nos dice que $I \not\subset P$ y $J \not\subset P$, por tanto existe $i \in I$ y $j \in J$ tal que $i, j \notin P$, pero $ij \in P$, lo cual es una contradicción por que P es primo. Por lo tanto $V(IJ) \subset V(I) \cup V(J)$.

Esta topología es llamada la *topología de Zariski* de X. El espacio topológico X se denomina el *espectro primo* de A y es denotado por $Spec(A)$.

Definición 2. *Sea K algebraicamente cerrado. El $n-$espacio afín sobre K, es el conjunto de elementos $(a_1, \ldots, a_n)$ en K^n,es denotado por $\mathbb{A}_K^n$ o simplemente $\mathbb{A}^n$.*

Sean $A = K[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n indeterminadas sobre K y $f \in A$. Si consideramos a f como una función de $\mathbb{A}^n$, es decir, $f : \mathbb{A}^n \to K$, entonces podemos hablar del kernel de f.

Al kernel de cada elemento $f \in A$ lo denotaremos por $Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0\}$. De manera más general, si $J \subset A$, entonces se define el conjunto de ceros de todos los elementos J como:

$$Z(J) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0 \forall f \in J\}.$$

Definición 3. *Un subconjunto $Y \subset \mathbb{A}^n$ se dice que es* ***conjunto algebraico*** *si existe $T \subset A$ de tal forma $Y = Z(T)$.*

Si Y es un conjunto algebraico, se define $I(Y) := \{f \in A : f(p) = 0, \forall p \in \mathbb{A}^n\}$.

Además si Y es un conjunto algebraico, se define el ***anillo de coordenadas*** *de Y como*

$$A(Y) := \frac{K[x_1, \ldots, x_n]}{I(Y)}$$

Si Y es irreducible, se dice que Y es una ***variedad algebraica afín*** *o simplemente variedad afín.*

Regresando a nuestra notación inicial,

Definición 4. *Sea P un ideal primo en A. En algebra conmutativa, la* ***altura*** *de P se define como el supremo de las cadenas de ideales primos $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_r = P$, contenidos en P, y es denotada por $ht(P)$.*

En el lenguaje de geometría algebraica, la altura de un ideal primo P, es la codimensión de la subvariedad de $Spec(A)$ correspondiente a P.

Ejemplo 1. *Consideremos a $Y = \{(t, t^2, t^3) : t \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^3$, entonces $I(Y) = \langle x^2 - y, x^3 - z\rangle$. Ahora consideremos la siguiente función:*

$$\begin{array}{rccl} \phi : & K[x, y, z] & \to & K[t] \\ & x & \mapsto & t \\ & y & \mapsto & t^2 \\ & z & \mapsto & t^3 \end{array}$$

Observemos que ϕ es un homomorfismo de $K-$álgebras, por que ϕ se esta definiendo en los generadores. Además es sobreyectivo.

También se cumple $Ker(\phi) = I(Y)$.

Primero; $I(Y) \subset Ker(\phi)$, pues $x^2 - y, x^3 - z$ se anulan bajo ϕ. Si $h(x, y, z) \in Ker(\phi)$ entonces $h(t, t^2, t^3) = 0$, por lo que $h(x, y, z) \in I(Y)$.

Así, $\dfrac{K[x, y, z]}{Ker(\phi)} \simeq K[t]$. Dado que $A(Y) = \dfrac{K[x, y, z]}{I(Y)}$, entonces, $A(Y) \simeq K[t]$.

Entonces $Spec(A(Y)) = \{\langle f\rangle : f \in K[t], f \text{ irreducible } \} \cup \{\langle 0\rangle\}$.

Definición 5. *El **soporte** de M es el subconjunto*

$$Supp(M) := \{P \in Spec(A) : M_P \neq 0\} \subset Spec(A).$$

Definición 6. *Un elemento $a \in A$ es un divisor de cero de M si $am = 0$ para algún $m \in M$ con $m \neq 0$, entonces, si $m \in M$ se define*

$$\boldsymbol{ann(m)} := \{a \in A : am = 0\}$$

$$y \ \boldsymbol{ann(M)} := \{a \in A : aM = 0\}.$$

Observemos que $ann(M) = \bigcap_{m\in M} ann(m)$; pues si $b \in \bigcap_{m\in M} ann(m)$, entonces $b \in ann(m)$, $\forall m \in M$, es decir, $bm = 0$ $\forall m \in M$, así $bM = 0$ y con ello $b \in ann(M)$. De manera inversa, consideremos $a \in ann(M)$, así $am = 0$ $\forall m \in M$, por tanto $a \in \bigcap_{m\in M} ann(m)$.

Proposición 1.

1. *Si $M = \langle m\rangle$ y $J = ann(m)$, entonces $Supp(M) = V(J)$.*
2. *Si $M = \sum_{i\in I} M_i$, entonces $Supp(M) = \bigcup_{i\in I} Supp(M_i)$.*
3. *Si $L \subset M$ y $N = M/L$, entonces $Supp(M) = Supp(L) \cup Supp(N)$.*
4. *Si M es finitamente generado, entonces $Supp(M) = V(ann(M))$.*
5. *Si $P \in Supp(M)$, entonces $V(P) \subset Supp(M)$.*

Demostración. (1) Si $0 = \frac{m}{1} \in M_p$ si, y sólo si existe $s \notin P$ de tal forma $sm = 0$ si, y sólo si $(A - P) \cap ann(m) \neq \emptyset$, por lo tanto, si $P \in Supp(M)$, $0 \neq \frac{m}{1} \in M_p$ si, y sólo si $(A - P) \cap ann(m) = \emptyset$ si, y sólo si $ann(m) \subset P$, es decir $P \in V(ann(m))$.

(2) $\subset\rfloor$ Si $P \notin \bigcup(Supp(M_i))$, entonces para todo i, se tiene $P \notin Supp(M_i)$, por lo cual, $\forall i$ $(M_i)_P = 0$, por lo que cada elemento de M es anulado por algún $s \notin P$.

Así $sm = 0$ implica $\frac{m}{1} = 0 \in M_p$, por lo que $P \notin Supp(M)$.
$\supset\rfloor$ Dado que $M_i \subset M$, entonces $(M_i)_P \subset M_P$, si $P \in \cup(Supp(M_i))$, implica que para algún i,$P \in Supp(M_i)$, así $(M_i)_P \neq 0$ y por tanto $M_p \neq 0$, por lo que $P \in Supp(M)$.

3)Si $P \in Supp(M)$, luego $M_P \neq 0$ y por tanto $N_p = M_p/L_p \neq 0$, por lo cual $P \in Supp(N)$ y en consecuencia $P \in Supp(L) \cup Supp(N)$.

Ahora, si $P \in Supp(N) \cup Supp(L)$, implica que $P \in Supp(N)$ o $P \in Supp(L)$, por lo que tenemos $N_P = M_P/L_P \neq 0$ o $L_P \neq 0$, por tanto en el primer caso si $L_P = 0$, $0 \neq N_P = M_P$,y si $L_P \neq 0$, entonces $M_p \neq 0$.

El otro caso, es similar, si $L_P \neq 0$, entonces $M_P \neq 0$, por lo tanto en cualquiera de los casos $P \in Supp(M)$.

(4) Primero recordemos que si $P \in SpecA$ e I_i son ideales en A, entonces $\cap I_i \subset P$ si, y sólo si existe k_0 tal que $I_{k_0} \subset P$.

En efecto: $\subset\rfloor$ Supongamos que para todo i, existe $j_i \in I_i$ tal que $j_i \notin P$. Entonces $\prod j_i \in \cap I_i \subset P$, y dado que P es primo esta es una contradición.

$\supset\rfloor$ Supongamos que existe un $k \in \cap I_i$ tal que $k \notin P$, como $k \in I_i$ para toda i, esto nos dice que $I_i \nsubseteq P$ para toda i.

Ahora supongamos que $M = \langle m_1, \ldots, m_n\rangle$. Sean $M_i = \langle m_i\rangle$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces $M = \sum\limits_{i=1}^{n} M_i$,$Supp(M_i) = V(ann(m_i))$, esto implica $Supp(M) = \cup_{i=1}^{n} V(ann(m_i)) = V(\bigcap\limits_{i=1}^{n} ann(m_i)) = V(annM)$.

(5) Sea $Q \in V(P)$ si, y sólo si $P \subset Q$. Sea $S = A - Q$ y $T = A - P$, dado que $P \in Supp(M)$, entonces $M_P \neq 0$, y dado que $M_P = (M_Q)_{PA_Q}$, por

lo que $M_Q \neq 0$, es decir, $Q \in SuppM$. □

Definición 7. *Sea M un $A-$módulo. Un **primo asociado** de M es un ideal P de A tal que:*

i) $P \in Spec(A)$,

ii) *M contiene un submódulo isomorfo a A/P.*

Al conjunto de todos los primos asociados de M se denota por

$$\boldsymbol{Ass(M)} = \{P \in Spec(A) : P \text{ es asociado de } M\}$$

Observación 1. *La definición de primo asociado es equivalente a la existencia de $x \in M$ tal que $P = ann(x)$.*

Para ver esto, supongamos que $P = ann(x)$, para algún $x \in M$, $x \neq 0$. El homomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : \quad A/P &\longrightarrow M \\ [a] &\mapsto ax \end{aligned}$$

es inyectivo; $ax = 0$, implica $a \in ann(x) = P$, por tanto $[a] = [0]$.

Así A/P es isomorfo a un submódulo de M y por tanto $P \in Ass(M)$.

Por otro lado, si A/P es isomorfo a un submódulo de M, entonces existe un homomorfismo $\phi : A/P \to M$ inyectivo.

Dado que $[1] \neq [0]$ en A/P, por la inyectividad de ϕ, tenemos $\phi([1]) \neq 0$, sea $x := \phi([1]) \in M$, observemos que si $a \in P$, entonces $[a] = [0]$ en A/P. Luego $0 = \phi([a]) = a\phi([1]) = ax$, es decir, $a \in ann(x)$.

Por otra parte, si $b \in ann(x)$, $0 = bx = b\phi([1])$ por ser ϕ inyectiva, así $0 = \phi([b])$, es decir, $[b] = 0$, por tanto $b \in P$.

Proposición 2.

a) *Sea $x \in M$ tal que $ann(x) = P$ es primo. Si $y \in \langle x \rangle$, distinto de cero, entonces $ann(y) = P$. En particular $Ass(A/P) = \{P\}$, para algún $P \in Spec(A)$.*

b) *Consideremos el subconjunto de ideales de A de la forma*

$$\{ann(x) : 0 \neq x \in M\}$$

entonces cualquier elemento máximal de este conjunto es primo.

c) Si A es Noetheriano y $M \neq 0$, entonces $Ass(M) \neq \emptyset$.

d) Si $L \subset M$ y $N = M/L$, entonces $Ass(M) \subset Ass(N) \cup AssL$.

Demostración. (a).– Sea $x \in M$, $x \neq 0$, consideremos

$$\begin{array}{rccc} \phi: & A & \longrightarrow & \langle x \rangle \\ & a & \mapsto & ax \end{array}$$

ϕ es sobre pues si $n \in \langle x \rangle$, entonces $n = cx$, para algún $c \in A$, por tanto, $\phi(c) = n$.

Además el $Ker(\phi) = ann(x)$, ya que $a \in ann(x)$, implica $ax = 0$, pero $ax = \phi(a)$, por tanto $ann(x) \subset Ker(\phi)$. De manera inversa, si $b \in Ker(\phi)$, tenemos $\phi(b) = bx = 0$, por lo que $Ker(\phi) \subset ann(x)$.

Entonces $A/P \cong \langle x \rangle$.

Sean $[y] \in A/P$ con $y \neq 0$, $a \in ann([y])$, entonces $a[y] \in P$, pero como $[y] \neq [0]$, implica $y \in P$, por tanto $a \in P$, es decir, $ann([y]) \subset P$. Por otra parte $[y] \in A/P$ nos dice P anula a $[y]$, y así $P \subset ann([y])$.

(b).– Supongamos que $x \in M$ tal que $ann(x) = P$ es máximal entre los elementos anuladores. Entonces P es primo, ya que si $fg \in P$, por definición de P; $fgx = 0$. Si $gx = 0$ tenemos $g \in P$.

Supongamos que $gx \neq 0 \in M$, por tanto $P = ann(x) \subset ann(gx)$, y dado que Pes maximal $ann(gx) = P$, por lo cual, $fgx = 0$ implica $f \in P$ y así P es primo.

(c).– Sea $x \neq 0 \in M$. Como A es Noetheriano existe un ideal máximal $I = ann(x) \subset A$ dentro del conjunto de todos los anuladores de elementos no ceros de M.
I es propio; pues si $I = A$, entonces $1 \in I$, es decir, $0 = 1x = x$ y esta es una contradicción en la elección de x.
I es primo; si $ab \in I$ con $a \neq I$ entonces $abx = 0$, pero $ax \neq 0$, esto implica $b \in ann(ax)$, pero $I \subset ann(ax)$ y por maximalidad de I, tenemos $ann(ax) = ann(x)$, por tanto $b \in I$. Así $Ass(M) \neq \emptyset$.

(d).– Sea $P \in Ass(M)$, por definición M tiene un submódulo $M_0 \cong A/P$ y sin perder generalidad podemos suponer $M_0 = A/P$. Entonces tenemos 2 casos:

1. $(A/P) \cap L = \{0\}$. Sea $\pi : M \to N$, dado que $(A/L) \cap L = \{0\}$, entonces $\pi \mid_{A/P}$ es inyectiva. Por tanto A/P es un submódulo de N, así $P \in Ass(N) \subset Ass(N) \cup Ass(L)$.

2. $(A/P) \cap L \neq \{0\}$. Sea $x \in (A/P) \cap L$ con $x \neq 0$. Por tanto $P = ann(x)$, dado que $\langle x \rangle \subset L$ y por parte de la demostración en $a)$ $A/P = \langle x \rangle \subset L$, es decir $P \in AssL \subset AssL \cup Ass(N)$.

□

Observemos que si $N \subset M$, entonces si $P \in Ass(N)$, entonces por definición, N contiene un submódulo $N_0 \simeq A/P \subset N \subset M$, por lo que N_0 es un submódulo de M también, así $P \in Ass(M)$, es decir, si $N \subset M$, entonces $Ass(N) \subset Ass(M)$.

Además, cada $P \in Ass(M)$, contiene a $ann(M)$. Pues dado que $ann(M) = \bigcap_{x \in M} ann(x) \subset ann(x)$ para todo $x \in M$, y dado que $ann(x) = P$, para algún $P \in Spec(A)$, entonces $P \in Ass(M)$, y $ann(M) \subset P$.

Definición 8. *Sea* ***Z(M)*** $:= \{a \in A : am = 0$ *para algún* $m \in M, m \neq 0\}$, *es decir, el conjunto de divisores de cero de* M *en* A.

Corolario 1. $\bigcup_{P \in Ass(M)} P \subset Z(M)$. *Si* A *es Noetheriano, entonces se da la igualdad.*

Demostración. Sea $a \in \bigcup_{P \in Ass(M)} P$, así $a \in P$ para algún $P \in Ass(M)$, por equivalencia en la definición de asociados, $a \in ann(m) = P$, para algún $m \in M$, es decir, $am = 0$, así $a \in Z(M)$.

Ahora consideremos que A es Noetheriano, y sea $a \in Z(M)$, así $am = 0$ para algún $m \neq 0 \in M$. Entonces $\langle m \rangle \neq 0$, por la proposición 2, $Ass(\langle m \rangle) \neq \emptyset$. Sea $P = ann(bm) \in Ass(\langle m \rangle)$. Como $am = 0$, entonces $abm = 0$, por lo que $a \in ann(bm) = P \in Ass(\langle m \rangle) \subset Ass(M)$, por tanto $a \in \bigcup_{P \in Ass(M)} P$. □

Definición 9. *Sean* $N \subset M$ *submódulo,* $a \in A$ *y sea*

$$\begin{array}{rccc} f_a : & M/N & \longrightarrow & (M/N) \\ & [x] & \mapsto & [ax] = a[x] \end{array}$$

Decimos que N *es un submódulo* ***primario*** *de* M *si* $N \subsetneq M$, *y para cada* $a \in A$, f_a *es inyectiva o nilpotente.*

f_a inyectiva para toda $a \in A$, significa que para toda $x \in M$, la condición $ax \in N$ implica $x \in N$.

f_a nilpotente significa que existe un entero $n > 0$ tal que $a^n M \subset N$, $a^n \in ann(M/N) := \{b \in A : b(M/N) = 0\}$, entonces $a \in rad(ann(M/N))$.

Otra forma de ver que un submódulo es primario en un módulo finitamente generado lo obtenemos del siguiente teorema.

Teorema 1. *Sean A anillo Noetheriano, M un $A-$módulo finitamente generado y $N \subset M$, entonces N es primario si, y sólo si $Ass(M/N) = \{P\}$, para algún $P \in Spec(A)$. En este caso decimos que N es $P-$primario.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que N es primario, si $P \in Ass(M/N)$, entonces para cada elemento $a \in P$ divisor de cero de M/N, se tiene $a \in rad(ann(M/N))$, por tanto $P \in rad(ann(M/N))$.

Dado que todo primo asociado contiene al anulador del modúlo, tenemos $ann(M/N) \subset P \subset rad(ann(M/N))$. Como P es primo se tiene $P = rad(ann(M/N))$, por tanto $Ass(M/N) = \{P\}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $Ass(M/N) = \{P\}$, así $P = ann([m])$, donde $[m] \in M/N$.

Por el inciso 4 de la proposición 1, dado que M es finitamente generado, entonces $Supp(M/N) = V(ann(M/N))$, pero $V(ann(M/N)) = V(P)$, pues $ann(M/N) = \bigcup\limits_{[m] \in M/N} ann([m]) = P$ Entonces por el teorema de los ceros de Hilbert, $P = rad(ann(M/N))$.

Sea $a \in Z(M/N)$ un divisor de cero de M/N, como A es Noetheriano, $Z(M/N) = \bigcup\limits_{P \in Ass(M/N)} P = P$, por tanto $a \in P = rad(ann(M/N))$. Así N es primario. $\square$

Corolario 2. *Si $N_1, N_2, \ldots, N_r$ son submódulos de M $P-$primarios, es decir, $Ass(M/N_i) = \{P\}$ para $i = 1, \ldots, r$ entonces $\bigcap\limits_{i=1}^{n} N_i$ es $P-$primario.*

Demostración. Para $r = 2$, consideremos el homomorfismo

$$\begin{array}{rcc} \phi : M & \longrightarrow & (M/N_1) \oplus (M/N_2) \\ x & \mapsto & \bar{x}_{N_1} + \bar{x}_{N_2} \end{array}$$

Donde $\bar{x}_{N_j}$ denota la clase de x en M/N_j para $j = 1, 2$.

Si $\phi(x) = 0$, implica que $\bar{x}_{N_i} = 0$, para $i = 1, 2$, si y sólo si, $x \in N_1 \cap N_2$, así tenemos

$$M/(N_1 \cap N_2) \hookrightarrow (M/N_1) \oplus (M/N_2).$$

Entonces ocupando las propiedades del los asociados de un módulo, obtenemos:

$Ass(M/N_1 \cap N_2) \subset Ass((M/N_1) \oplus (M/N_2)) = Ass(M/N_1) \cup Ass(M/N_2) = \{P\}$ Por lo tanto $Ass(M/N_1 \cap N_2) = \{P\}$.

Supongamos que es cierto para $r = k$, y sean $N_1, \ldots, N_{k+1}$ submódulos P-primarios, entonces de manera análoga al caso $r = 2$, tenemos $M/(\bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i \cap N_{k+1}) \hookrightarrow (M/(\bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i)) \oplus (M/N_{k+1})$, entonces $Ass(M/(\bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i \cap N_{k+1})) \subset Ass(M/(\bigcap\limits_{i=1}^{k} N_i)) \cup Ass(M/N_{k+1})$, que por hipótesis de inducción,

$$Ass(M/(\bigcap_{i=1}^{k} N_i)) = \{P\} = Ass(M/N_{k+1}),$$

por tanto,

$$Ass(M/(\bigcap_{i=1}^{k} N_i \cap N_{k+1})) = \{P\}$$

$\square$

Definición 10. *Un submódulo $N \subset M$, se dice **reducible** si $N = N_1 \cap N_2$ para ciertos submódulos $N_1, N_2 \subset M$, y N se dice **irreducible** si no es reducible.*

Definición 11. *Una **descomposición primaria** de N en M es una representación de N como la intersección finita de submódulos P_i-primarios, es decir,*

$$N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$$

*Si además ningun N_i puede omitirse de la intersección, es decir, que ningún N_i contiene a $\bigcap\limits_{i \neq j} N_j$ y si los P_i son todos diferentes. Entonces la descomposición se dice ser **minimal**, **reducida** o **irredundante**.*

Teorema 2. *Sea A un anillo Noetheriano y M un A-módulo finitamente generado. Entonces todo submódulo propio de M, tiene una descomposición primaria*

Demostración. Sea $N \subsetneq M$. Si N es irreducible, entonces N es primario.

Supongamos que N no es primario, entonces existen $P_1, P_2 \in Ass(M/N)$ con $P_1 \neq P_2$ y submódulos F_1, F_2 de M/N de tal forma que $F_i \simeq A/P_i$ para $i = 1, 2$.

Como para cada $x \in F_i$; $i = 1, 2$ diferente de cero, cumple $P_i = ann(x)$ con $i = 1, 2$, entonces $F_1 \cap F_2 = \{[0]\} \subset M/N$, por tanto $N = F_1 \cap F_2$, pues es el submódulo cero en M/N, así N no es irreducible y por tanto es una contradicción.

Ahora dado que cada submódulo propio admite una descomposición en módulos irreducibles, entonces por lo anterior, esta descomposición es una descomposición primaria. □

1.2. Descomposición primaria en ideales.

Ahora consideremos un caso particular de módulos sobre el anillo A, la cual será una de las principales herramientas para nuestro objetivo.

Sea $Q \subset A$ un ideal, diremos que Q es un ideal primario si para $a, b \in A$, si $ab \in Q$, entonces $a \in Q$ o $b^n \in Q$, para algún $n \geq 1$.

Observación 2. *Todo ideal primo es primario: Sean $P \in Spec(A)$ y $a, b \in A$ tal que $ab \in P$, supongamos que $a \notin P$, dado que P es primo, entonces $b \in P$ y en este caso $n = 1$.*

Definición 12. *Sean $P, Q \subset A$ ideales. Q es P-primario si Q es primario y $rad(Q) = P$.*

Recordemos un resultado con respecto a los ideales radicales.

Proposición 3.

1. *Sea $Q \subset A$ un ideal, entonces $rad(Q)$ es la intersección de todos los ideales primos en A que contienen a Q.*

2. *Si $\{Q_i\}_{i=1}^n$ es un conjunto de ideales en A. Entonces $rad(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i) = \bigcap_{i=1}^{n} rad(Q_i)$*

Demostración. (1) $\subset\rfloor$ Si $x \in rad(Q)$, entonces $x^n \in Q$ para algún $n \geq 1$, luego sea P ideal primo que contiene a Q, tenemos $x^n \in P$, y dado que P es primo, entonces $x \in P$. Por tanto x pertece a la intersección de todos los ideales primos que contienen Q.

$\supset\rfloor$ Por contradicción, supongamos que $x \notin rad(Q)$, es decir , para toda $n \geq 1$, $x^n \notin Q$, sea $\Sigma = \{J \subset A : J \text{ ideal}, x^n \notin J, \text{ para toda } n > 0\}$.

Observemos que $\Sigma \neq \emptyset$, pues $rad(Q) \in \Sigma$. Si ordenamos por inclusión, Σ tiene un orden parcial, y por el lema de Zorn, existe un elemento máximal en Σ. Supongamos que dicho elemento es S.

Entonces S es primo; en efecto: si $z, y \notin S$, entonces $S \subsetneq S + \langle z \rangle$ y $S \subsetneq S + \langle y \rangle$, entonces por la maximalidad de S, estos ideales no perteneces a Σ. Por lo que $x^m \in S + \langle z \rangle$ y $x^k \in S + \langle y \rangle$ para algunos $m, k > 0$.

Entonces $x^{m+k} \in S + \langle zy \rangle$. Esto nos dice que $S + \langle zy \rangle \notin \Sigma$, así $yz \notin S$. Por tanto S es primo.

Dado que $Q \subset rad(Q) \subset S$ y $x \notin rad(Q)$, entonces $x \notin S$. Por lo cual x no perteneces a la intersección de los ideales primos que contienen a Q.

(2) $\subset\rfloor$ Sea $x \in rad(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i)$, entonces $x^k \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$ para algún $k > 0$, así, $x^k \in Q_i$, para toda $i = 1, \ldots, n$, por lo cual $x \in rad(Q_i)$ para toda $i = 1, \ldots, n$, por tanto $x \in \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$.

$\supset\rfloor$ Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} rad(Q_i)$, entonces $x \in rad(Q_i)$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Entonces $x^{m_i} \in Q_i$ para algún $m_i > 0$. Sea $m = m_1 + \ldots + m_n$, entonces $x^m = x^{m_1} \ldots x^{m_n} \in Q_1 \ldots Q_n \subset \bigcap_{i=1}^{n} Q_i$, y con ello $x \in rad(\bigcap_{i=1}^{n} Q_i)$. $\square$

Lema 1. *Si Q es un ideal tal que $rad(Q) = \mathfrak{m}$ es máximal, entonces Q es $\mathfrak{m}-$primario. En particular si $\mathfrak{m}$ es un ideal máximal entonces $\mathfrak{m}^k$ es $\mathfrak{m}-$primario para toda $k \geq 1$.*

Demostración. Q es primario, pues sean $a, b \in A$, tales que $ab \in Q$, y supongamos $b \notin \mathfrak{m}$. Dado que $\mathfrak{m}$ es maximal, $\mathfrak{m} + \langle b \rangle = A$, así, para cierto $s \in \mathfrak{m}$, y $r \in A$ tenemos $s + rb = 1$. Como $s \in \mathfrak{m}$, entonces $s^k \in Q$ para algún $k \geq 1$, así $1 = 1^k = (s + rb)^k = s^k + vb$, para algún $v \in A$. Entonces $a = a(s^k + vb) = as^k + avb = as^k + vab \in Q$, por tanto Q es $\mathfrak{m}-$primario.

Ahora observemos que si P es un ideal primo, entonces $rad(P^n) = P$, ya que $x \in P$, entonces $x^n \in P^n$, así $x \in rad(P^n)$. Por la proposición 3, y el hecho que $P^n \subset P$, entonces $rad(P^n) \subset P$.

Con esta observación dado que $\mathfrak{m}$ es primo, tenemos $rad(\mathfrak{m}^k) = \mathfrak{m}$, y por lo demostrado anteriormente $\mathfrak{m}^k$ es $\mathfrak{m}-$primario. □

Lema 2. *Si $Q_1, Q_2 \subset A$ son $P-$primarios, entonces $Q_1 \cap Q_2$ es $P-$primario.*

Demostración. Por el inciso (2) de la proposición 3 tenemos $rad(Q_1 \cap Q_2) = rad(Q_1) \cap rad(Q_2) = P$.
Además si $a, b \in A$, tal que $ab \in Q_1 \cap Q_2$, entonces $ab \in Q_i$, con $i = 1, 2$. Dado que Q_i $i = 1, 2$ es primario, $a \in Q_1$ o $b^n \in Q_1$ y $a \in Q_2$ o $b^m \in Q_2$, para algunos $n, m > 0$.

1. Si $a \in Q_1$ y $a \in Q_2$, entonces $a \in Q_1 \cap Q_2$.

2. Si $b^n \in Q_1$ y $b^m \in Q_2$, entonces $b^{n+m} = b^n b^m \in Q_1 Q_2 \subset Q_1 \cap Q_2$.

□

1.3. Ejemplos.

Sea $A = k[x, y]$, y $J = \langle x^3, xy \rangle$. Entonces una descomposición primaria minimal de J es $\langle x \rangle \cap \langle x^3, y \rangle$.

En efecto: Primero observemos que $\langle x \rangle, \langle x^3, y \rangle$ son primarios.

Dado que $A/\langle x \rangle \simeq k[y]$ el cual es dominio entero, entonces $\langle x \rangle$ es primo, por tanto por la observación 2, $\langle x \rangle$ es $\langle x \rangle-$primario.

Sea $p(x, y) = p_1(x, y)x + p_2(x, y)y \in \langle x, y \rangle$, dado que $p(x, y)^3 = (p_1(x, y))^3$ $x^3 + q(x, y)y \in \langle x^3, y \rangle$, entonces $\langle x, y \rangle \subset rad(\langle x^3, y \rangle)$.

Por otro lado, si $p(x, y) \in rad(\langle x^3, y \rangle)$, entonces $p(x, y)^s = p_1(x, y)x^3 + p_2(x, y)y = p_3(x, y)x + p_2(x, y)y \in \langle x, y \rangle$ para algún $s > 0$, y dado que $\langle x, y \rangle$ es máximal, entonces $p(x, y) \in \langle x, y \rangle$.

Así tenemos que $rad(\langle x^3, y \rangle) = \langle x, y \rangle$, y por el lema 1; $\langle x^3, y \rangle$ es $\langle x, y \rangle-$ primario.

Ahora probaremos que $J = \langle x \rangle \cap \langle x^3, y \rangle$.

$\subset\rfloor$ Dado que los generadores de J perteneces a la intersección de $\langle x\rangle$ y $\langle x^3, y\rangle$, tenemos $J \subset \langle x\rangle \cap \langle x^3, y\rangle$.

$\supset\rfloor$ Si $p = p(x, y) \in \langle x\rangle \cap \langle x^3, y\rangle$, implica $p = q_1 x$ y $p = q_2 x^3 + q_3 y$, donde $q_1, q_2, q_3 \in A$. Como $p = q_1 x$, entonces $q_3 \in \langle x\rangle$, así $p = q_2 x^3 + q_4 xy \in J$. Por lo tanto tenemos la igualdad deseada.

También observemos que $\langle x\rangle \neq \langle x, y\rangle$, pues $y \notin \langle x\rangle$ y dado que $x \notin \langle x^3, y\rangle$ y $y \notin \langle x\rangle$, entonces la descomposición de J es minimal.

Un método que permite extraer componentes encajadas, es estudiar proyecciones, para ello se definen los siguientes conceptos.

El *Proj* de un ideal graduado se define como el conjunto de todos los ideales primos que no contienen la parte de grado lineal.

Definición 13. *Sea $W \subset V \subset k^n$ una variedad afín. Sea R el anillo de coordenadas afines de V. supongamos que el ideal de W en V es $I \subset R$. El* ***blow-up*** *de V a lo largo de W se define por*

$$BL_W V := Proj(R \oplus I \oplus I^2 \oplus \ldots) = Proj(R[tI])$$

El ***cono normal*** *de W en V es $N_W V = Proj(R/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3 \oplus \ldots)$.*

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 2. *Sean $W = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{A}^n$ el origen en $\mathbb{A}^n$ y $V = \mathbb{A}^n$. Sea $R = K[x_1, \ldots, x_n]$ e $I = \langle x_1, \ldots x_n\rangle$. Por definición $Proj(R \oplus I \oplus I^2 \oplus \ldots) := \{P \in Spec(R) : I \oplus I^2 \oplus \ldots \not\subset P\}$.*

Además observemos que $I \supset I^2 \supset I^3 \supset \ldots$, por tanto, sólo necesitamos saber cuales son los primos que no contienen a I. Dado que I es máximal en R, entonces ningún primo distinto a I lo contiene, por tanto el blow-up de $\mathbb{A}^n$ a lo largo del origen, es $BL_W V = Spec(R) - \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$.

Utilizando la definición 1, todos los ideales primos que no contienen a el ideal $I = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ corresponde a el conjunto $V(I)$, geométricamente y por los ceros de Hilbert $V(I)$ está en correspondencia con el punto W en V, entonces $BL_W(V)$ corresponde en calcular el blow-up de un punto en el espacio afín.

Capítulo 2

VARIEDADES DETERMINANTALES.

2.1. Variedades determinantales.

Sea A una anillo conmutativo con unidad, y sea $X = (a_{ij})$ una matriz de $m \times n$ con coeficientes en A, consideremos enteros $b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots, c_t$ donde $1 \leq b_i \leq m$, $1 \leq c_j \leq n$, entonces se define:

$$[b_1, \ldots, b_t \mid c_1, \ldots, c_t] := det \begin{pmatrix} a_{b_1c_1} & \ldots & a_{b_1c_t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{b_tc_1} & \ldots & a_{b_tc_t} \end{pmatrix}$$

Observese que si $t > min(m, n)$ entonces $[b_1, \ldots, b_t \mid c_1, \ldots, c_t] = 0$.

Si $b_1 \leq \ldots \leq b_t$ y $c_1 \leq \ldots \leq c_t$, $[b_1, \ldots, b_t \mid c_1, \ldots, c_t]$ es llamado $t-$menor de X. Cuando $t = min(m, n)$, $[b_1, \ldots, b_t \mid c_1, \ldots, c_t]$ es denominado t-menor máximal.

El ideal $I_t(X)$ generado por los $t-$menores de X es denominado **ideal determinantal**.

Sea K un campo algebraicamente cerrado y supongamos que Y es una matriz de $m \times n$ cuyas entradas son indeteminadas x_i, es decir,

$$Y = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ x_{m1} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Observemos que $I_t(Y)$ es un ideal homogéneo en $K[x_{11},\ldots,x_{mn}]$, por lo que la variedad que define pertenece al espacio proyectivo $\mathbb{P}^{mn-1}$, pero esta variedad también puede ser considerada en el espacio afín por medio del cono afín de la variedad proyectiva.

Definición 14. *Sea $I_t(Y)$ un ideal determinantal de Y. La variedad definida por $I_t(Y)$ es denominada* **variedad determinantal.**

Dichas variedades es una de las clases más importantes. Entre ellas estan las variedades obtenidas del encaje de Segre de un producto de dos variedades proyectivas, la variedad del encaje de Veronese , entre otras.

Ejemplo 3. *Consideremos el $3-$ésimo encaje de Veronese:*

$$\begin{array}{rccl} \rho_3: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^3 \\ & [x:y] & \mapsto & [x^3:x^2y:xy:y^3]=[z_0:z_1:z_2:z_3] \end{array}$$

Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

Probemos que $\rho_3(\mathbb{P}^1)=Z(z_0z_2-z_1^2, z_0z_3-z_1z_2, z_1z_3-z_2^2)$.

En efecto:
Llamemos $F_1=z_0z_2-z_1^2$, $F_2=z_0z_3-z_1z_2$ y $F_3=z_1z_3-z_2^2$.
$\subset\rfloor$ *Sea $z=[x^3:x^2y:xy:y^3]\in\rho_3(\mathbb{P}^1)$, entonces*

$$\begin{array}{rcl} F_1(z) & = & x^3xy^2-(x^2y)^2 \\ & = & x^4y^2-x^4y^2=0. \\ F_2(z) & = & x^3y^3-x^2yxy^2=0. \\ F_3(z) & = & x^2yy^3-(xy^2)^2=0. \end{array}$$

Por tanto $\rho_3(\mathbb{P}^1)\subset Z(F_1,F_2,F_3)$.

$\supset\rfloor$ *Sea $[z_0:z_1:z_2:z_3]\in Z(F_1,F_2,F_3)$.*
Supongamos que $z_0\neq 0$, entonces $[z_0:z_1]\in\mathbb{P}^1$ tal que $\rho_3([z_0:z_1])=[z_0^3:z_0^2z_1:z_0z_1^2:z_1^3]$. Dado que $[z_0:z_1:z_2:z_3]\in Z(F_1,F_2,F_3)$, entonces

$$\begin{array}{rcl} z_0z_2 & = & z_1^2;\ \textit{por tanto} \\ z_1^3 & = & z_0z_1z_2;\ \textit{y dado que} \\ z_1z_2 & = & z_0z_3;\ \textit{entonces} \\ z_1^3 & = & z_0^2z_3. \end{array}$$

Con estas ecuaciones y tomando $\lambda = \frac{1}{z_0}$ *tenemos:*

$$
\begin{aligned}
\lambda z_0^3 &= z_0 \\
\lambda z_0^2 z_1 &= z_1 \\
\lambda z_0 z_1^2 &= \lambda z_0^2 z_2 \\
&= z_2 \\
\lambda z_1^3 &= \lambda z_0^2 z_3 \\
&= z_3
\end{aligned}
$$

Por tanto $\rho_3([z_0 : z_1]) = [z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$.

Definición 15. *Sea* M *una matriz de* $n \times m$, *de formas lineales en* $K[x_1, \ldots, x_s]$ *con filas* $\lambda_i = (\lambda_{i,1} \ldots \lambda_{i,n})$, *donde* $m \leq n$ *y* $s \geq m + n - 1$.

Una ***fila generalizada*** *de* M *es una combinación* K*-lineal de las filas de* M, *donde no todos los coeficientes son cero. Es decir,* $\sum_i l_i \lambda_i$, *con* $\lambda_j \neq 0$ *para algún subindice* j. *Análogamente se define una* ***columna generalizada***.

Una ***entrada generalizada*** *de* M *es una combinación* $K-$*lineal de las entradas de alguna fila generalizada.*

Se dice que M *es* $1-$***genérica*** *si cada entrada generalizada es distinta de cero.*

Ejemplo 4. *Sean* K *un campo y* $x_1, \ldots, x_s$ *indeterminadas sobre* K *y* $n, m \in \mathbb{Z}$ *tales que* $2 \leq m \leq n$.

Consideremos la siguiente matriz.

$$
M = \begin{pmatrix}
a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \ldots & a_{1n}x_n \\
a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \ldots & a_{2,n+1}x_{n+1} \\
a_{33}x_3 & a_{34}x_4 & \ldots & a_{3,n+2}x_{n+2} \\
\vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\
a_{mm}x_m & a_{m,m+1}x_{m+1} & \ldots & a_{m,m+n-1}x_{m+n-1}
\end{pmatrix}
$$

donde $a_{ij} \in K^*$.

Este tipo de matrices es llamada **matrices de Hankel generalizadas**. Si $a_{ij} = 1$ para toda i, j y la matriz es cuadrada solo es llamada una matriz de Hankel.

Observemos que los a_{ij} indica la fila i y la indeterminada j por la que esta multiplicada. Esta es una matriz $1-$genérica, y de hecho es un ejemplo de una matriz cuyos ideales de menores no-maximales no son primos, pero esto lo veremos has adelante.

Ahora para analizar la estructura de los ideales generados por menores no maximales de matrices M de Hankel generalizadas $1-$genéricas, supondremos que $m \geq 3$.

Sea $I_2(M) \subset K[x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}]$ el ideal generado por los menores 2×2 de M, la pregunta es ¿cuándo dicho ideal es primo ?.

En el caso de una matriz de Hankel, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3. *Supongamos que $a_{ij} = 1$ para toda i, j en la matriz del ejemplo 4. Entonces $I_2(M)$ es un ideal primo de altura $m + n - 3$.*

Demostración. Dado que los $a_{ij} = 1$, entonces M es la matriz de Hankel. Gruson, demostró que

$$I_2(M) = I_2 \left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_{m+n-2} \\ x_2 & x_3 & \ldots & x_{m+n-1} \end{pmatrix} \right]$$

es el ideal máximal de menores de una matriz $1-$genérica.

Por un resultado de Eisenbud,(ver en [10]) ,$I_2(M)$ es primo y además tiene codimensión

$$((m + n - 2) - 1)(2 - 1) = m + n - 3.$$

□

De manera general, para saber cuando $I_2(M)$ es primo, primero se necesita introducir dos número enteros s, t. Estos números involucran transformar a M de una forma especial.

Supongamos que para toda $j = 1, \ldots, n$; $a_{1j} = 1$ en la matriz generalizada de Hankel del ejemplo 4.

Ahora sea j el máximo indice en $[n]$, tal que $a_{2j} \neq 1$. Entonces dividase la $(j - 1)-$ésima columna entre a_{2j}. Entonces obtenemos la siguiente matriz:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & a_{2j}^{-1}x_{j-1} & \dots & x_n \\ a_{22}x_2 & a_{23}x_3 & \dots & x_j & \dots & a_{2,n+1}x_{n+1} \\ a_{33}x_3 & a_{34}x_4 & \dots & a_{3,j+1}a_{2j}^{-1}x_{j+1} & \dots & a_{3,n+2}x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{mm}x_m & a_{m,m+1}x_{m+1} & \dots & a_{m,m+j-1}a_{2j}^{-1}x_{m+j-1} & \dots & a_{m,m+n-1}x_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

Observemos que la $(j-1)-$ésima entrada de la primera fila, el coeficiente ya no es 1, pero si hacemos un cambio de "coordenada", es decir, si $\bar{x}_{j-1} = a_{2j}^{-1}x_{j-1}$, entonces podemos obtener otra matriz en donde los coeficientes de las entradas en la primer fila sean todos igual a 1. Además los coeficientes de las entradas en la segunda fila, es decir, los $a_{2l} = 1$ para toda $l = j, \dots, n+1$.

Luego repitiendo este proceso se puede obtener una matriz donde $a_{1k} = a_{2k+1} = 1$, para toda $k = 1, \dots, n$.

Por tanto sin perder generalidad y abusando de la notación, la matriz M para la cual se puede estudiar a $I_2(M)$, es de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ a_{33}x_3 & a_{34}x_4 & \dots & a_{3,n+2}x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{mm}x_m & a_{m,m+1}x_{m+1} & \dots & a_{m,m+n-1}x_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

donde los $a_{ij} \in K^*$.

Aun más, se puede multiplicar la fila 3, por a_{33}^{-1}, y nuevamente por un cambio de variables adecuado, podemos suponer que $a_{3,n+2} = 1$. Luego al continuar con este proceso en cada una de las filas, se puede suponer que los coeficientes de la primer y ultima columna de M son 1, es decir, nuestra matriz M tiene la forma que sigue:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{n+1} \\ x_3 & a_{34}x_4 & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_m & a_{m,m+1}x_{m+1} & \dots & x_{m+n-1} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Cuando hagamos referencia de esta matriz, la llamaremos la forma especial.

Definición 16. *Sea M la matriz de la forma 2.1. Si $a_{ij} \neq 1$ para algún par (i,j), definimos el entero s como:*

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{M}) := \mathbf{min}\{\mathbf{j} : \textit{ existe } \mathbf{i} \geq \mathbf{3} \textit{ tal que } \mathbf{a_{ij}} \neq \mathbf{1}\}.$$

Observación 3.

1. *s puede no existir cuando $a_{ij} = 1$, para todo par (i,j).*

2. *Si s existe, la columna en la cual aparece no es la primera ni la ultima, por la forma de la matriz 2.1.*

3. *Además, dado que estamos suponiendo que $n \geq m \geq 3$, y ocupando la matriz en su forma 2.1, obtenemos que $s \geq 4$.*

Lema 3. *Si s existe, entonces $x_j x_s \in I_2(M)$, para cada $j = 1, \ldots, s-1$.*

Demostración. Supongamos que M es de la forma especial. Dado que $s \geq 4$, consideremos los siguentes casos.

Si $j = s-1$, consideremos la siguiente submatriz de la matriz M.

$$\begin{pmatrix} x_{s-3} & x_{s-2} & x_{s-1} \\ x_{s-2} & x_{s-1} & a_{i-1s}x_s \\ x_{s-1} & a_{is}x_s & a_{i,s+1}x_{s+1} \end{pmatrix}$$

Por tanto obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (a_{i-1,s} - a_{is})x_j x_s &= (a_{i-1,s} - a_{is})x_{s-1}x_s \\ &= a_{i-1,s}x_{s-1}x_s - a_{is}x_{s-1}x_s \\ &= a_{i-1,s}x_{s-1}x_s - a_{is}x_{s-1}x_s \\ &\quad -a_{i,s+1}x_{s-2}x_{s+1} + a_{i,s+1}x_{s+1}x_{s-2} \\ &= -(a_{i-1,s}x_{s-1}x_s - a_{i,s+1}x_{s+1}x_{s-2}) \\ &\quad +(a_{is+1}x_{s+1}x_{s-2} - a_{i,s}x_s x_{s-1}) \in I_2(M). \end{aligned}$$

Ahora, si $j = s-2$; entonces

$$\begin{pmatrix} x_{s-3} & x_{s-2} & x_{s-1} \\ x_{s-2} & x_{s-1} & a_{i-1,s}x_s \\ x_{s-1} & a_{is}x_s & a_{i,s+1}x_{s+1} \end{pmatrix}$$

es una submatriz de M.

Nuevamente tenemos

$$\begin{aligned}(a_{is}-a_{i-1,s})x_jx_s &= (a_{is}-a_{i-1,s})x_{s-2}x_s\\ &= a_{is}x_{s-2}x_s - a_{i-1,s}x_{s-2}x_s\\ &= a_{is}x_{s-2}x_s - a_{i-1,s}x_{s-2}x_s\\ &\quad +x_{s-1}^2 - x_{s-1}^2\\ &= (a_{is}x_{s-2}x_s - x_{s-1}^2) - (a_{i-1,s}x_{s-2}x_s - x_{s-1}^2) \in I_2(M).\end{aligned}$$

Si $j < s-2$, entonces $j \leq s-3$, por tanto las siguientes dos matrices son submatrices de M.

$$\begin{pmatrix} x_j & x_{s-2} & x_{s-1}\\ x_{j+1} & x_{s-1} & a_{i-1,s}x_s\\ x_{j+2} & a_{is}x_s & a_{i,s+1}x_{s+1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{j+1} & x_{s-2}\\ x_{j+2} & x_{s-1}\end{pmatrix}$$

Así, obtenemos:

$$\begin{aligned}(a_{is}-a_{i-1,s})x_jx_s &= a_{is}x_jx_s - x_jx_s\\ &= a_{is}x_jx_s - x_jx_s - x_{j+2}x_{s-2}\\ &\quad +x_{j+2}x_{s-2} + x_{j+1}x_{s-1} - x_{j+1}x_{s-1}\\ &= (a_{is}x_jx_s - x_{j+2}x_{s-2}) - (a_{i-1,s}x_jx_s\\ &\quad -x_{j+1}x_{s-2}) + (x_{j+2}x_{s-2} - x_{j+1}x_{s-1}) \in I_2(M).\end{aligned}$$

$\square$

Análogamente como se definió s, es decir, considerando a la matriz generalizada de Hankel, supongamos que $a_{mj} = 1$, para toda $j = m, \ldots, m-1$, elegir el mínimo j del conjunto de indices $\{m-1, \ldots, m+n-2\}$ de tal forma $a_{m-1,j} \neq 1$. Así, podemos dividir su respectiva columna entre $a_{m-1,j}$, dado que el coeficiente de la entrada x_{j+1} en la fila m ya no es uno, entonces, podemos hacer un cambio de variables, en este paso tenemos $a_{m-1,k} = 1$ para toda $k = m-1, \ldots, j-1$, después repetir este proceso con las columnas. Entonces tendriamos $a_{m-1,j} = 1$, para $j = m-1, \ldots, m+n-2$ y $a_{mj} = 1$ para $j = m, \ldots, m+n-1$. Por tanto, podemos multiplicar a la fila $m-2$ por $a_{m-2,m-2}^{-1}$ y otra vez con un cambio adecuado de variables podemos suponer que $a_{m-2,m+n-2} = 1$ también. Entonces repetimos este proceso en cada una de las filas, obteniendo la siguiente matriz que como en el caso anterior llamaremos la forma especial de M.

$$\begin{pmatrix} x_1 & a_{12}x_2 & a_{13}x_3 & \dots & a_{1,n-1}x_{n-1} & x_n \\ x_2 & a_{23}x_3 & a_{24}x_4 & \dots & a_{2,n}x_n & x_{n+1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ x_{m-2} & a_{m-2,m-1}x_{m-1} & a_{m-2,m}x_m & \dots & a_{m-2,m+n-4}x_{m+n-4} & x_{m+n-3} \\ x_{m-1} & x_m & x_{m+1} & \dots & x_{m+n-3} & x_{m+n-2} \\ x_m & x_{m+1} & x_{m+2} & \dots & x_{m+n-2} & x_{m+n-1} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Definición 17. *Sea M es su forma especial (2.2),definimos el entero t como;*

$$\mathbf{t = t(M) = max\{j :} \textit{ existe } \mathbf{i \leq m - 2} \textit{ tal que } \mathbf{j - i + 1 < n} \textit{ y } \mathbf{a_{ij} \neq a_{i,j+1}\}}$$

Observación 4.

i) *$t \leq m+n-4$, pues supongamos que $t = m+n-3$, por tanto $t-i+1 < n$ implica $m+n-3-i+1 < n$, es decir, $m-2 < i$ lo cual es una contradicción.*

Lema 4. *Supongamos que t existe. Entonces para todo $j \geq t+1$, $X_tX_j \in I_2(M)$.*

Demostración. Haciendo una analogía de la demostración del lema 3 ocupando la matriz 2.2 obtenemos el resultado. □

Además observemos que t existe si, y sólo si s existe, esto se debe a que podemos pasar de la matriz 2.1 a la matriz 2.2, e inversamente.

De ahora en adelante, supondremos que s y t existen.

Lema 5.

1. *Si $s > t$, entonces $\langle x_1, \dots, x_t\rangle\langle x_s, \dots, x_{m+n-1}\rangle \subset I_2(M)$.*

2. *$\forall i = 0, \dots m+n-1-s$ se tiene $x_1^{i+1}x_{s+i} \in I_2(M)$.*

3. *$\forall j = 0, \dots, t-1$, se cumple, $x_{m+n-1}^{j+1}x_{t-j} \in I_2(M)$.*

Demostración.

1. Por demostrar que para cada i, j tal que $i \leq t < s \leq j$, los productos $x_i x_j \in I_2(M)$.

   Si $i = t$, entonces por el lema 4, tenemos $x_t x_j \in I_2(M)$.

   Si $j = s$, entonces por el lema 3, tenemos $x_i x_s \in I_2(M)$.

   Por tanto, sean $i < t < s < j$. Consideremos la siguiente submatriz de M.
$$\begin{pmatrix} x_i & x_{i-1} \\ x_{j-1} & x_j \end{pmatrix}$$
   Observemos
$$\begin{aligned} x_i x_j &= x_i x_j - x_{j-1} x_{i+1} + x_{j-1} x_{i+1} \\ &= (x_i x_j - x_{j-1} x_{i+1}) + x_{i+1} x_{j-1}. \end{aligned}$$
   Donde el primer sumando pertenece a $I_2(M)$, por tanto, $x_i x_j \in I_2(M)$ si, y sólo si $x_{i+1} x_{j-1} \in I_2(M)$. Pero si $i + 1 = t$ o $j - 1 = s$, entonces tenemos que $x_{i+1} x_{j-1} \in I_2(M)$ y por tanto $x_i x_j \in I_2(M)$, continuando de manera descendente, obtenemos el resultado.

2. Para demostrar que $x_1^{i+1} x_{s+i} \in I_2(M)$ para toda $i = 0, \ldots, m+n-1-s$, haremos inducción sobre i.

   a) Base de inducción. Si $i = 0$, entonces por el lema 3, los monomios $x_1^{i+1} x_{s+i} \in I_2(M)$.

   b) Sea $i > 0$, y supongamos que para todo $j < i$ se cumple que $x_1^{j+1} x_{s+j} \in I_2(M)$.
   Sea $x_1^{i+1} x_{s+i}$, observemos
$$\begin{aligned} x_1^{i+1} x_{s+i} &= x_1^{i+1} x_{s+i} - a x_1^i x_2 x_{s+i-1} + a x_1^i x_2 x_{s+i-1} \\ &= x_1^i (x_1 x_{s+i} - a x_2 x_{s+i-1}) + a x_2 x_1^i x_{s+i-1} \end{aligned}$$
   para algún $a \in K^*$. Pero $(x_1 x_{s+i} - a x_2 x_{s+i-1}) \in I_2(M)$ pues corresponde al menor $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ a x_{s+i-1} & x_{s+i} \end{smallmatrix}\right)$, y $x_1^i x_{s+i-1} \in I_2(M)$ por hipótesis.

3. Análogamente al caso 2, para probar el inciso (3), haremos inducción sobre j.

   a) Si $j = 0$, como $m + n - 1 \geq t$, por el lema 4 tenemos
$$x_{m+n-1} x_t = x_{m+n-1}^{j+1} x_{t-j} \in I_2(M).$$

b) Sea $j > 0$, y supongamos que para toda $k < j$ se cumple

$$x_{m+n-1}^{k+1} x_{t-k} \in I_2(M).$$

Sean $x_{m+n-1}^{j+1} x_{t-j}$ y $b \in K^*$ entonces:

$$\begin{aligned} x_{m+n-1}^{j+1} x_{t-j} &= x_{m+n-1}^{j+1} x_{t-j} - b x_{m+n-1}^{j} x_{t-j+1} x_{m+n-2} \\ &\quad + b x_{m+n-1}^{j} x_{t-j+1} x_{m+n-2} \\ &= x_{m+n-1}^{j} (x_{m+n-1} x_{t-j} - b x_{t-j+1} x_{m+n-2}) \\ &\quad + b x_{m+n-1}^{j} x_{t-j+1} x_{m+n-2}. \end{aligned}$$

Pero $x_{m+n-1} x_{t-j} - b x_{t-j+1} x_{m+n-2} \in I_2(M)$, pues corresponde al menor $\left(\begin{smallmatrix} x_{t-j} & b x_{t-j+1} \\ x_{m+n-2} & x_{m+n-1} \end{smallmatrix}\right)$.

Además $x_{m+n-1}^{j} x_{t-j+1} \in I_2(M)$ por hipótesis de inducción. Por tanto $x_{m+n-1}^{j+1} x_{t-j} \in I_2(M)$.

□

Corolario 3. *$x_1^{m+n-4} \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, $x_{m+n-1}^{m+n-4} \langle x_1, \ldots, x_t \rangle \subset I_2(M)$.*

Demostración. Por el inciso (2) del lema 5, para toda

$$i = 0, \ldots, m+n-1-s$$

los monomios

$$x_1^{i+1} x_{s+i} \in I_2(M)$$

es decir, los monomios $x_1 x_s, x_1^2 x_{s+1}, \ldots, x_1^{m+n-s} x_{m+n-1} \in I_2(M)$.

Dado que $s \geq 4$, tenemos $m+n-s \leq m+n-4$, por tanto para toda $j \geq s$, se tiene $x_1^{m+n-4} x_j \in I_2(M)$.

Nuevamente, por el inciso (3) del lema 5, los monomios

$$x_{m+n-1} x_t, x_{m+n-1}^2 x_{t-1}, \ldots, x_{m+n-1}^t x_1 \in I_2(M)$$

por tanto, $x_{m+n-1}^{m+n-4} x_{t-j} = x_{m+n-1}^{m+n-5-j} x_{m+n-1}^{j+1} x_{t-j} \in I_2(M)$, para toda $j = 0, \ldots, t-1$. □

Ahora consideremos los siguientes ideales en $K[x_1, x_2, \ldots, x_{m+n-1}]$.

$$\begin{aligned} Q_1 &= I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle, \\ Q_2 &= I_2(M) + \langle x_1, \ldots, x_t \rangle, \\ Q_3 &= I_2(M) + \langle x_1^{m+n-4}, x_{m+n-1}^{m+n-4} \rangle. \end{aligned}$$

Teorema 4.
Q_1, Q_2, Q_3 son ideales primarios de $\langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$ y $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, respectivamente.

Demostración. 1. Por demostrar que $rad(Q_1) = \langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$:

$\subset \rfloor$ Como $\langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle \subset \langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, entonces es suficiente observar que $I_2(M) \subset \langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, pero como los elementos de $I_2(M)$ involucran las variables $x_1, \ldots, x_{m+n-1}$ y dado que $\langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$ es primo, tenemos $rad(Q_1) \subset \langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$.

$\supset \rfloor$ Por demostrar $\langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle \subset rad(Q_1)$. Para esto observemos que si $f \in \langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$ que involucra las indeterminadas $x_s, \ldots, x_{m+n-1}$, entonces $f \in Q_1 \subset rad(Q_1)$. Por tanto, analicemos el caso en que f involucra a las indeterminadas x_i para $2 \leq i \leq s-1$.

Si $j = s-1$, entonces consideremos la siguiente submatriz de M;

$$\begin{pmatrix} x_{s-2} & x_{s-1} \\ x_{s-1} & a_{is} x_s \end{pmatrix}$$

Dado que $a_{is} x_{s-2} x_s - x_{s-1}^2 \in I_2(M) \subset Q_1 \subset rad(Q_1)$. Como $x_s \in rad(Q_1)$, entonces $a_{is} x_{s-2} x_s \in rad(Q_1)$ y así $x_{s-1}^2 \in rad(Q_1)$, por tanto $x_{s-1} \in rad(Q_1)$.

Ahora consideremos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} x_{s-3} & x_{s-2} \\ x_{s-2} & x_{s-1} \end{pmatrix}$$

Nuevamente, $x_{s-3} x_{s-1} - x_{s-2}^2 \in I_2(M) \subset rad(Q_1)$, como $x_{s-1} \in rad(Q_1)$, entonces $x_{s-3} x_{s-1} \in rad(Q_1)$, y por tanto $x_{s-2}^2 \in rad(Q_1)$. Así x_{s-2} también pertenece a $rad(Q_1)$.

Siguiendo de esta manera, obtenemos que $x_2, \ldots, x_{s-1} \in rad(Q_1)$, por tanto $rad(Q_1) = \langle x_2, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$.

2. Por demostrar $rad(Q_2) = \langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$.

   $\subset]$ Como el primer caso, $\langle x_1, \ldots, x_t \rangle \subset \langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$, además los elementos de $I_2(M)$ involucran a las indeterminadas $x_1, \ldots, x_{m+n-1}$, por tanto, $rad(Q_2) \subset \langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$, pues $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$ es primo.

   $\supset]$ Sea $h \in \langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$, si h involugra indeterminadas $x_1, \ldots, x_t$ entonces $h \in Q_2$ y por tanto en su radical. Analicemos cuando h involucra indeterminadas $x_{t+1}, \ldots, x_{m+n-2}$.

   Consideremos la siguiente submatriz de M;

$$\begin{pmatrix} a_{i,t}x_t & a_{i,t+1}x_{t+1} \\ a_{i+1,t+1}x_{t+1} & a_{i+1,t+2}x_{t+2} \end{pmatrix}$$

   Entonces $a_{i,t}a_{i+1,t+2}x_t x_{t+2} - a_{i+1,t+1}a_{i,t+1}x_{t+1}^2 \in I_2(M)$, que a su vez pertenecen a $rad(Q_2)$. Dado que $x_t \in rad(Q_2)$, entonces el primer sumando pertenece a $rad(Q_2)$, y así $a_{i+1,t+1}a_{i,t+1}x_{t+1}^2 \in rad(Q_2)$, por tanto $x_{t+1} \in rad(Q_2)$.

   Continuando este proceso, obtendremos que $x_{t+1}, \ldots, x_{m+n-2} \in rad(Q_2)$. Por tanto $rad(Q_2) = \langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$.

3. Para demostrar que Q_3 es un ideal primario, y dado que $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$ es máximal en $A = K[x_1, \ldots, x_{m+n-1}]$, entonces es suficiente probar por el lema 1 que el $rad(Q_3) = \langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$.

   Como los elementos en $I_2(M)$ involucran a $x_1, \ldots, x_{m+n-1}$, entonces cualquier elemento en Q_3 pertenece a $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, por tanto $rad(Q_3)$ $\subset \langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$.

   De manera inversa, observemos que x_1 y $x_{m+n-1} \in rad(Q_3)$, pues x_1^{m+n-4} y $x_{m+n-1}^{m+n-4} \in Q_3$. Prosigamos por inducción sobre j.
   Para $j = 1$, tenemos $x_1 \in rad(Q_3)$.
   Si $j = 2$, consideremos la matriz dada por

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

   Como $x_1 x_3 - x_2^2 \in I_2(M) \subset Q_3 \subset rad(Q_3)$, además $x_1 \in rad(Q_3)$, por tanto $x_1 x_3 \in rad(Q_3)$, así $x_2^2 \in rad(Q_3)$, esto implica $x_2 \in rad(Q_3)$.

Ahora supongamos que para algún $j \in \{2, \ldots, m+n-2\}$ se cumple $x_j \in I_2(M)$.

Con la matriz

$$\begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} \end{pmatrix}$$

obtenemos $x_j x_{j+2} - x_{j+1}^2 \in I_2(M)$, pero por hipótesis, $x_j \in rad(Q_3)$, por tanto, $x_j x_{j-2} \in rad(Q_3)$, y así $x_{j+1} \in rad(Q_3)$.

Por lo tanto $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle \subset rad(Q_3)$. Así $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-1} \rangle = rad(Q_3)$. □

Teorema 5.
Si $s > t$, entonces $Q_1 \cap Q_2$ es una descomposición primaria de $I_2(M)$.

Demostración. Por demostrar que $I_2(M) = Q_1 \cap Q_2$.

$\subset\rfloor$ Dado que

$$I_2(M) \subset Q_1 = I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$$

$$I_2(M) \subset Q_2 = I_2(M) + \langle x_1, \ldots, x_t \rangle,$$

entonces

$$I_2(M) \subset Q_1 \cap Q_2.$$

$\supset\rfloor$ Sea $B = \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$ y $C = \langle x_1, \ldots, x_t \rangle$. Observemos, que

$$Q_1 \cap Q_2 = I_2(M) + (B \cap (I_2(M) + C))$$

En efecto: Sea $f \in Q_1 \cap Q_2$, esto no dice que

$$f = a + b = \lambda a + c,$$

donde $a \in I_2(M)$, $b \in B$, $c \in C$ y $\lambda \in K[x_1, \ldots, x_{m+n-1}]$.

Así, tenemos

$$b = \lambda_2 a + c \in I_2(M) + C,$$

por tanto,

$$f \in I_2 + (B \cap (I_2(M) + C)).$$

De manera análoga, sea

$$f \in I_2(M) + (B \cap (I_2(M) + C))),$$

entonces $f = a + b$, donde $a \in I_2(M)$ y $b \in (B \cap (I_2(M) + C)))$, por lo cual, $b \in B$ y $b \in I_2(M) + C$, así, $f \in I_2(M) + B$ y $f \in I_2(M) + C$.

Ahora sea $f \in I_2(M) + (B \cap (I_2(M) + C))$. Por demostrar que $f \in I_2(M)$. Dado que $f \in Q_1 \cap Q_2$, entonces $f = g + h$ donde $g \in I_2(M)$ y $h \in (B \cap (I_2(M) + C))$, por lo que es suficiente probar que $h \in I_2(M)$.

Observemos que h, tiene al menos grado 2. Luego $h \in B$, implica que $h = \sum_{i=s}^{m+n-1} a_i x_i$, donde las a_i son polinomios de grado al menos 1. Pero $h \in I_2(M) + C$, por lo que podemos considerar que $a_i \in K[x_{t+1}, \ldots, x_{m+n-1}]$.

Consideremos el término $a_s x_s$, el cual se puede escribir como

$$(\sum_{i=t-1}^{m+n-1} c_{si} x_i) x_s,$$

análogamente como se escribio en la demostración del lema 5 inciso (2), cada $x_i x_s \equiv \lambda x_{i-1} x_{s+1} mod(I_2(M))$, es decir, $a_s x_s = \sum_{i=t+1}^{m+n-1} \lambda_{i,s} c_{si} x_{i-1} x_{s+1}$, y otra vez por el lema 5 inciso (1), toda esta suma pertenece a $I_2(M)$.

Ahora siguiendo el mismo procedimiento para todo término $a_i x_i$, para $s \leq i < m + n - 1$, tenemos que es suficiente considerar a h como $h = a_{m+n-1} x_{m+n-1}$.

Dado $h = a_{m+n-1} x_{m+n-1} \in (I_2(M) + C) = Q_2$, y Q_2 es primario en $\langle x_1, \ldots, x_{m+n-2} \rangle$, por el teorema 4, tenemos $a_{m+n-1} \in Q_2$, por tanto por lema 5 inciso (1), $h \in I_2(M)$.

Ahora solo falta el caso $i = m + n - 1$, pero otra vez por lema 5 inciso (1); $x_{m+n-1} \langle x_1, \ldots, x_t \rangle \subset I_2(M)$. $\square$

Para obtener una descomposición de $I_2(M)$, en el caso de que $s \leq t$, es necesario otra componente, como se vera en los siguientes resultados.

Lema 6. *Sea $s \leq t$. La descomposición primaria minimal de $I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_t \rangle$ es*

$$(I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle) \cap (I_2(M) + \langle x_1, \ldots, x_t \rangle).$$

Demostración. Por el teorema 4, se sigue que $Q_1 = I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$ y $Q_2 = I_2(M) + \langle x_1, \ldots, x_t \rangle$ son primarios.

Por demostrar que $Q_1 \cap Q_2 = I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_t \rangle$.

$\subset]$ Sea $f \in Q_1 \cap Q_2$. Entonces $f = g + h$ donde $g \in I_2(M)$ y $h \in \langle x_1, \ldots, x_t \rangle$, además como $f \in Q_1$, sin perder generalidad, dado que $g \in I_2(M)$, entonces $h \in \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$, es decir,

$$h \in \langle x_1, \ldots, x_t \rangle \cap \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle = \langle x_s, \ldots, x_t \rangle.$$

$\supset]$ Como $\langle x_s, \ldots, x_t \rangle \subset \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1} \rangle$ y dado que $s \leq t$ entonces $\langle x_s, \ldots, x_t \rangle \subset \langle x_1, \ldots, x_t \rangle$. Por tanto $I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_t \rangle \subset Q_1 \cap Q_2$. $\square$

Teorema 6. *Si $s \leq t$, entonces $I_2(M) = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ es una descomposición primaria minimal.*

Demostración. Por demostrar que $I_2(M) = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$.

Primero notemos que como $I_2(M) \subset Q_i$, para $i = 1, 2, 3$. Entonces $I_2(M) \subset Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$.

Ahora sea

$$\begin{aligned}
Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 &= (I_2(M) + \langle x_s, \ldots, x_{m+n-1}\rangle) \cap (I_2(M) + \langle x_1, \ldots, x_t\rangle) \\
&\quad \cap (I_2(M) + \langle x_1^{m+n-4}, x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle) \\
&= (Q_1 \cap Q_2) \cap I_2(M) + (Q_1 \cap Q_2) \cap \langle x_1^{m+n-4}, x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \\
&= I_2(M) + (Q_1 \cap Q_2) \cap \langle x_1^{m+n-4}, x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \\
&= I_2(M) + (Q_1 \cap (\langle x_1^{m+n-4}\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle)) \\
&\quad \cap (Q_2 \cap (\langle x_1^{m+n-4}\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle)) \\
&= I_2(M) + (\langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle + \langle x_1^{m+n-4}\rangle \cap Q_1) \cap (\langle x_1^{m+n-4}\rangle \\
&\quad + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \cap Q_2) \\
&= I_2(M) + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \cap [\langle x_1^{m+n-4}\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \cap Q_2] \\
&\quad + \langle x_1^{m+n-4}\rangle \cap Q_1 \cap [\langle x_1^{m+n-4}\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \cap Q_2] \\
&= I_2(M) + Q_2 \cap \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle + \langle x_1^{m+n-4}\rangle\langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \\
&\quad + Q_1 \cap [\langle x_1^{m+n-4}\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle\langle x_1^{m+n-4}\rangle] \\
&= I_2(M) + Q_2 \cap \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle + Q_1 \cap \langle x_1^{m+n-4}\rangle \\
&\quad + \langle x_1^{m+n-4}\rangle\langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle \\
&= I_2(M) + \langle x_1^{m+n-4}\rangle Q_1 + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle Q_2 + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle\langle x_1^{m+n-4}\rangle \\
&= I_2(M) + \langle x_1^{m+n-4}\rangle I_2(M) + \langle x_1^{m+n-4}\rangle\langle x_s, \ldots, x_{m+n-1}\rangle \\
&\quad + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle I_2(M) + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle\langle x_1, \ldots, x_t\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle\langle x_1^{m+n-4}\rangle \\
&\subset I_2(M) + \langle x_1^{m+n-4}\rangle\langle x_s, \ldots, x_{m+n-1}\rangle + \\
&\quad \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle\langle x_1, \ldots, x_t\rangle + \langle x_{m+n-1}^{m+n-4}\rangle\langle x_1^{m+n-4}\rangle \\
&\subset I_2(M) \text{ por el corolario 3.}
\end{aligned}$$

□

2.2. Descomposición primaria de un ideal Jacobiano.

Siguendo con la notación, K denotara un campo algebraicamente cerrado.

Sea $S = K[x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1}, z_0, \ldots, z_{p-1}]$, donde $n \geq m \geq p \geq 2$. Sea

$$A = \sum_{0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1, 0 \leq k \leq p-1} a_{ijk} x_i y_j z_k$$

una forma trilineal de S.

Consideremos J_A el jacobiano de A, es decir,

$$J_A := \langle \frac{\partial A}{\partial x_i}, \frac{\partial A}{\partial y_j}, \frac{\partial A}{\partial z_k} : 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1, 0 \leq k \leq p-1 \rangle$$

el ideal de S generado por todas las derivadas parciales de A.

Definición 18. *Se dice que A es una forma trilineal diagonal no degenerada de forma acotada con $n = m + p - 1$ y $a_{ijk} \neq 0$ si y sólo si, $i = j + k$.*

Observemos que

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{i} a_{ii-kk} y_{i-k} z_k & \text{si } 0 \leq i \leq p-1. \\ \sum_{k=0}^{p-1} a_{ii-kk} y_{i-k} z_k & \text{si } p-1 \leq i \leq m-1. \\ \sum_{k=i-m+1}^{p-1} a_{ii-kk} y_{i-k} z_k & \text{si } m-1 \leq i \leq n-1. \end{cases}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y_j} = \sum_{k=0}^{p-1} a_{j+kjk} x_{j+k} z_k, \text{si } 0 \leq j \leq m-1.$$

$$\frac{\partial A}{\partial z_k} = \sum_{j=0}^{m-1} a_{j+kjk} x_{j+k} y_j \text{ si } 0 \leq k \leq p-1.$$

Denotemos por A_{x_i}, A_{y_j} y A_{z_k} las derivadas parciales anteriores respectivamente, entonces

$$J_A = \langle A_{x_i}, A_{y_j}, A_{z_k} \rangle$$

Ahora para calcular la descomposición primaria de J_A, veremos cuales son los primos minimales.

Proposición 4. *Sea A una forma trilineal diagonal no degenerada de forma acotada. Sea Q un ideal primo tal que $J_A \subset Q$, entonces Q incluye al ideal $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}} \rangle$ o $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$, donde*

$$X = \begin{pmatrix} a_{000}x_0 & a_{110}x_1 & \ldots & a_{m-1m-10}x_{m-1} \\ a_{101}x_1 & a_{211}x_2 & \ldots & a_{mm-11}x_m \\ a_{202}x_2 & a_{312}x_3 & \ldots & a_{m+1m-12}x_{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p-10p-1}x_{p-1} & a_{p1p-1}x_p & \ldots & a_{n-1m-1p-1}x_{n-1} \end{pmatrix}_{p\times m}$$

Demostración. Observemos que si $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}\rangle \subset Q$, dado que $J_A \subset Q$, entonces $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}}\rangle \subset Q$.

Por lo tanto, supongamos que $\underline{Z} = \langle z_0, \ldots, z_{p-1}\rangle \nsubseteq Q$.

Sean $A_X = \langle A_{x_0}, \ldots, A_{x_{n-1}}\rangle$ y $Y = (A_{x_i z_k})$ la matriz de segundas derivadas parciales de A de tamaño $p \times n$, es decir,

$$Y = \begin{pmatrix} a_{000}y_0 & a_{110}y_1 & \ldots & a_{m-1m-10}y_{m-1} & 0 & \ldots & 0 & \\ 0 & a_{101}y_0 & \ldots & a_{m-1m-21}y_{m-2} & a_{mm-11}y_{m-1} & \ldots & 0 & \\ \vdots & & \ldots & & & & & \\ 0 & & & & & & a_{n-1m-1p-1}y_{m-1} & \end{pmatrix}$$

Sea Y' una submatriz de Y de tamaño $p \times p$, entonces

$$\begin{aligned} \underline{Z}I_p(Y') &= I_1(\underline{Z}det(Y')) \\ &= I_1(\underline{Z}Y'adjY') \\ &\subset I_1(\underline{Z}Y') \\ &\subset I_1(\underline{Z}Y) \end{aligned}$$

Dado que $I_1(\underline{Z}Y) = \underline{Z}Y$ y además $\underline{Z}Y$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{0} a_{00-kk}y_{0-k}z_k & \ldots & \sum_{k=0}^{p-1} a_{m-1m-1-kk}y_{m-1-k}z_k & \ldots & \sum_{k=n-m}^{p-1} a_{n-1n-1-kk}y_{n-1-k}z_k \end{pmatrix}$$

Así $\underline{Z}Y = A_X$, y como Y' es arbitraria, tenemos $\underline{Z}I_p(Y) \subset A_X$.
Usando que Q es primo y el hecho de que $\underline{Z} \nsubseteq Q$, entonces $I_p(Y) \subset Q$. Además observemos que por la forma de la matriz Y, tenemos $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}\rangle \subset rad(I_p(Y)) \subset Q$. Así $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}\rangle \subset Q$.

De manera similar,

$$\underline{Z}X = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p-1} a_{k0k}x_k z_k & \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+11k+1}x_{k+1}z_k & \ldots & \sum_{k=0}^{p-1} a_{k+m-1m-1k}x_{k+m-1}z_k \end{pmatrix}$$

Por lo cual $I_1(ZX) = \langle A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}\rangle = A_Y$.

Sea X' es una submatriz de X de $p \times p$. Tenemos

$$\underline{Z}I_p(X') = I_1(ZX'adjX') \subset I_1(ZX') \subset I_1(ZX).$$

Por tanto $\underline{Z}I_p(X) \subset I_1(ZX) \subset Q$. Concluimos que $I_p(X) \subset Q$, así

$$\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X)\rangle \subset Q$$

$\square$

Para calcular los primos minimales de J_A, se analizan dos caso.

1. Caso $p < m$.
2. Caso $p = m$.

Proposición 5. *Sea $A = \sum a_{ijk}x_iy_jz_k$ una forma trilineal diagonal no generada de forma acotada. Si $p < m$ el ideal $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}}\rangle$ es un primo minimal de J_A.*

Demostración. Dado que A_{y_j}, A_{x_i} están en términos de los $z_k's$, entonces,

$$J_A \subset \langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}}\rangle.$$

Sea $W = K[y_0, \ldots y_{m-1}]$ y sea $Y \in Mat_{p\times n}(W)$ la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} a_{000}y_0 & \ldots & & \ldots & a_{m-1m-10}y_{m-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & a_{m-1m-21}y_{m-2} & a_{mm-11}y_{m-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ldots & a_{p-10p-1}y_0 & \ldots & & & & a_{n-1m-1p-1}y_{m-1} \end{pmatrix}$$

Donde a_{ijk} son constantes en K diferentes de cero y las entradas de Y involucran a las indeterminadas y_i que aparecen en las $(i+1)-$ésima diagonal.

Entonces $I_p(Y) = \langle y_0, \ldots, y_{m-1}\rangle^p$.

En efecto; como las variables de $y_0, \ldots, y_p$ estan involucradas en el determinante de las submatrices de $p \times p$ de Y, entonces $I_p(Y) \subset \langle y_0, \ldots, y_{m-1}\rangle^p$.

Para demostrar la otra inclusión, es suficiente considerar la siguiente matriz

$$Y = \begin{pmatrix} y_0 & \ldots & & \ldots & y_{m-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & & \ldots & y_{m-2} & y_{m-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ldots & y_0 & \ldots & & & & y_{m-1} \end{pmatrix}$$

por que los a_{ijk} son unidades. Sea $J = \langle y_0, \ldots, y_{m-1}\rangle$.

1. Primero probemos que $y_0 J^{p-1} \subset I_p(Y)$.
   Por inducción sobre p, tenemos:

a) Si $p=1$; $y_0J^0 = y_0W = \langle y_0\rangle \subset \langle y_0, \ldots y_{m-1}\rangle = I_1(Y)$.
Si $p=2$; $y_0J = \langle y_0^2, y_0y_1, \ldots, y_0y_{m-1}\rangle$, entonces

$$y_0y_j = \begin{vmatrix} y_0 & * \\ 0 & y_j \end{vmatrix} \in I_2(Y)$$

b) Ahora supongamos que para $t < p$ se cumple $y_0J^{t-2} \subset I_{t-1}(Y)$.

c) Sea $p = t$, $y_0J^{t-1} = \langle y_0 \sum_{i_0+\ldots+i_{m-1}=t-1} y_0^{i_0} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}\rangle$.

Sin perder generalidad, sea $f = y_0(y_0^{i_0} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}) \in y_0J^{t-1}$.

Sea j el mínimo indice tal que $i_j \neq 0$, entonces:

$$y_0(y_0^{i_0} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}) = y_j(y_0y_j^{i_j-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}})$$

Como

$$y_0y_j^{i_j-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}} \in y_0J^{t-2} \subset I_{t-1}(Y)$$

por hipótesis. Entonces existe una matriz de $t-1 \times t-1$, submatriz de Y, tal que $y_0y_j^{i_j-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}$ es igual al determinante de dicha matriz, por tanto:

$$y_j(y_0y_j^{i_j-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}) = y_j \begin{vmatrix} y_0 & * & & \ldots & * \\ 0 & & & & \\ 0 & \ddots & & \ldots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & * \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} y_j & * & \ldots & * \\ 0 & y_0 & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \ldots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} \in I_t(Y)$$

2. Ahora probemos $\langle y_0\rangle + I_p(Y) = \langle y_0\rangle + J^p$.

Dado que $I_p(Y) \subset J^p$, entonces $\langle y_0\rangle + I_p(Y) \subset \langle y_0\rangle + J^p$.

Ahora proseguiremos por inducción sobre p.

a) Si $p = 1$, entonces $\langle y_0 \rangle + J \subset \langle y_0 \rangle + I_1(Y)$, de hecho es igualdad. Si $p = 2$, sea $f = y_i y_j \in J^2$. Como

$$y_i y_j = y_i y_j - y_{j-1} y_{i+1} + y_{j-1} y_{i+1}$$

Dado

$$y_i y_j - y_{j-1} y_{i+1} = \begin{vmatrix} y_j & y_{i+1} \\ y_{j-1} & y_i \end{vmatrix} \text{ y } y_{j-1} y_{i+1} = \begin{vmatrix} y_{j-1} & * \\ 0 & y_{i+1} \end{vmatrix}$$

y ambos pertenecen a $I_2(Y)$, entonces $\langle y_0 \rangle + J^2 \subset \langle y_0 \rangle + I_2(Y)$.

b) Supongamos que se cumple para $\langle y_0 \rangle + J^{p-1} \subset \langle y_0 \rangle + I_{p-1}(Y)$.

c) Sea $f \in \langle y_0 \rangle + J^p$. Sin perder generalidad, supongamos que $f = y_0^{i_0} y_1^{i_1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}$. Sea $l = min\{j : i_j \neq 0\}$, entonces $f = y_j (y_j^{i_j - 1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}})$, por lo cual, $y_j^{i_j-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}} \in J^{p-1}$, entonces por hipótesis existe una submatriz de Y de $p-1 \times p-1$, digamos Y', de tal forma que el determinante de Y' es $y_j^{i_j-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}$. Así,

$$f = \begin{vmatrix} y_j & * \\ 0 & Y' \end{vmatrix} \in I_p(Y).$$

3. Además $\langle y_0 \rangle \cap I_p(Y) = y_0 J^{p-1} = \langle y_0 \rangle \cap J^p$.

En efecto: Dado que $y_0 J^{p-1} \subset I_p(Y)$ y $y_0 J^{p-1} \subset \langle y_0 \rangle$, entonces $y_0 J^{p-1} \subset \langle y_0 \rangle \cap I_p(Y)$.

Además, como $I_p(Y) \subset J^p$, entonces $\langle y_0 \rangle \cap I_p(Y) \subset \langle y_0 \rangle \cap J^p$.

Ahora si $f \in \langle y_0 \rangle \cap J^p$, entonces, sin perder generalidad podemos suponer $f = y_0^{i_0} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}}$, donde $i_0 > 0$ y $i_0 + \ldots + i_{m-1} = p$. Entonces $f = y_0 g$ donde $g = y_0^{i_0-1} \ldots y_{m-1}^{i_{m-1}} \in J^{p-1}$, así $f \in y_0 J^{p-1}$. Por tanto $\langle y_0 \rangle \cap J^p \subset y_0 J^{p-1}$.

De estas tres observaciones tenemos

$$\langle y_0 \rangle \cap J^p \subset y_0 J^{p-1} \subset \langle y_0 \rangle \cap I_p(Y) \subset \langle y_0 \rangle \cap J^p \subset y_0 J^{p-1}$$

Por tanto tenemos las igualdades deseadas.

4. Ahora concluiremos que $I_p(Y) = J^p$. Para ello basta probar $J^p \subset I_p(Y)$.

   Sea $f \in J^p$. Si $f \in \langle y_0 \rangle \cap J^p = \langle y_0 \rangle \cap I_p(Y) \subset I_p(Y)$.

   Si $f \notin \langle y_0 \rangle \cap J^p$, es decir, $f \notin \langle y_0 \rangle$, entonces $f \notin y_0 J^{p-1} \subset I_p(Y) \subset J^p$, lo cual es una contradicción.

Enunciemos el siguiente teorema de Huneke (ver teorema (1,1),[20]).

Teorema 7. *Sea R un dominio Cohen-Macaulay y sea M un $R-$módulo que tiene una resolución libre finita*

$$0 \to R^r \xrightarrow{C} R^s \to M \to 0, \textit{donde } C = (c_{ij}).$$

Entonces el algebra simétrica $S(M)$ es un dominio Cohen-Macaulay si, y sólo si, $grade(I_t(C)) \geq r + 2 - t$ para $1 \leq t \leq r$, donde $grade(I_t(C))$ (también llamado profundidad depth) denota la longitud de una $R-$secuencia máximal en $I_t(C)$.

Sea N el $W-$módulo obtenido de la siguente sucesión exacta corta:

$$0 \to W^p \xrightarrow{Y} W^n \to N \to 0.$$

Entonces su algebra simétrica $S(N) \simeq \frac{k[x_0,\ldots,x_{n-1},y_0,\ldots,y_{m-1}]}{\langle A_{z_0},\ldots,A_{z_{p-1}} \rangle}$, por tanto, por el teorema 7, $S(N)$ es dominio Cohen-Macaulay si, y sólo si, $grade(I_t(Y)) \geq p + 2 - t$ para $1 \leq t \leq p$.

Dado que $I_p(Y) = \langle y_0, \ldots, y_{m-1} \rangle^p$ y $I_p(Y) \subset I_t(Y)$, para todo $t \in [p]$, entonces por $y_0, \ldots, y_{m-1}$ es una W-secuencia máximal en $I_t(Y)$, por lo tanto $grade(I_t(Y)) = m$, pero $m \geq p + 1 \geq p + 2 - t$, para $1 \leq t \leq p$. Entonces $S(N)$ es dominio Cohen-Macaulay, así $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}} \rangle$ es un ideal primo. $\square$

La siguiente proposición es un resultado muy útil, pues muestra que el ideal $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$ es un ideal primo de J_A, para los dos casos que estamos considerando, es decir, cuando $p \leq m$. Sin embargo, la prueba requiere de teoría mucho más avanzada por lo que solo daremos un bosquejo de ella.

Proposición 6. *Sea A una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada. Entonces $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$ es un ideal primo perfecto, por tanto un ideal primo minimal de J_A.*

Demostración. Bosquejemos la demostración de este resultado. Sea X la matriz de $p \times m$ de las segundas derivadas de la forma trilineal A, observemos que $I_p(X)$ es un ideal perfecto.
En efecto: Bruns y Vetter (ver[6]), demuestran que para una matriz X de $p \times m$ con $p \leq m$ con entradas en un anillo $R = K[x_0, \ldots, x_{n-1}]$, si $grade(I_p(X)) = m - p + 1$, entonces $I_p(X)$ es perfecto (ver teorema (2.7), [6]).
También demuestran que siempre se tiene $ht(I_p(X)) \leq m - p + 1$ (ver teorema (2.11),[6]). Como un campo satisface la definición de un anillo Cohen-Macaulay si, y sólo si $K[x_0]$ es Cohen-Macaulay, entonces por inducción R es Cohen-Macaulay. Por tanto es suficiente probar que $ht(I_p(X)) \geq m - p + 1$.
Sean $R = K[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ y $R' = K[x_{p-1}, \ldots, x_{m-1}]$, consideremos el homomorfismo ϕ de R a R', el cual envia x_i a x_i, para $p - 1 \leq i \leq m - 1$ y 0 en otro caso, entonces por parte de la demostración de la proposición (5), $ht(\phi(I_p(X))) = m - p + 1$, así $dim(R'/\phi(I_p(X))) = 0$, luego por el teorema de la dimensión,

$$\begin{aligned} ht(I_p(X)) &= dimR - dimR/(I_p(X)) \\ &= n - dimR/I_p(X) \end{aligned}$$

dado que el kernel de ϕ es generado por $n - (m - p + 1)$ elementos, entonces

$$\begin{aligned} dim(R/I_p(X)) &\geq dim(R'/\phi(I_p(X))) + n - (m - p + 1) \\ ht(I_p(X)) &\geq n - (dim(R'/\phi(I_p(X))) + n - (m - p + 1)) \\ &= n - (n - (m - p + 1)) = m - p + 1. \end{aligned}$$

Por tanto $I_p(X)$ es perfecto.
Ahora, sea $Z = \langle z_0, \ldots, z_{p-1} \rangle$, que se puede interpretar como una matriz de $1 \times p$. Dado que $I_1(ZX) = \langle A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}} \rangle$ entonces ocupando un resultado del trabajo de Boffi, Bruns y Guerrieri (ver proposición (1.10),[3]) se verifica que el ideal $I_1(ZX) + I_p(X)$ es perfecto, por lo tanto, es suficiente probar que $I_1(ZX) + I_p(X)$ es primo.
Para ello se demuestra que z_0 es un elemento regular módulo $I_p(X) + I_1(ZX)$, es decir, no es un divisor de cero y por lo tanto tendrá sentido tomar al conjunto de sus potencias como un conjunto multiplicativamente cerrado. Es necesario probar que $ht(I_1(ZX) + I_p(X) + z_0) \geq m + 1$, esto se demuestra por inducción sobre $p \geq 2$.
Cuando $p = 2$, dado que A es una forma acotada, tenemos que $n = m + p - 1$, así $n = m + 1$ y

$$X = \begin{pmatrix} a_{000}x_0 & \ldots & a_{m-1m-10}x_{m-1} \\ a_{101}x_1 & \ldots & a_{mm-11}x_m \end{pmatrix}$$

Por tanto $I_1(ZX) + I_p(X) + \langle z_0 \rangle = \langle a_{101}x_1z_1, \ldots, a_{mm-11}x_mz_1, I_2(X), z_0 \rangle$. Sea Q un primo minimal de $\langle a_{101}x_1z_1, \ldots, a_{mm-11}x_mz_1, I_2(X), z_0 \rangle$. Si $z_1 \notin Q$, entonces $\langle x_1, \ldots, x_m, I_2(X), z_0 \rangle \subset Q$ y $ht(Q) \geq m + 1$.
Si $z_1 \in Q$, entonces $\langle z_0, z_1, I_2(X) \rangle \subset Q$, por lo demostrado al comienzo de esta demostración, tenemos $ht(I_2(X)) = m - 2 + 1 = m - 1$, así $ht(Q) \geq m - 1 + 2 = m + 1$.

Ahora supongamos que la declaración se cumple para $p' < p$, con $p > 2$. Sean $\bar{X}$ la submatriz $(p-1) \times m$ de X al quitar la primera fila y $\bar{Z} = \langle z_1, \ldots, z_{p-1} \rangle$.
Observemos que $I_1(ZX) + I_p(X) + \langle z_0 \rangle = I_1(\bar{Z}\bar{X}) + I_p(X) + \langle z_0 \rangle$, pues los elementos de $I_1(ZX)$ que faltan en $I_1(\bar{Z}\bar{X})$ pertenecen a $\langle z_0 \rangle$, luego sea Q un primo minimal sobre $I_1(\bar{Z}\bar{X}) + I_p(X) + \langle z_0 \rangle$.
Dado que $\bar{Z}I_{p-1}(\bar{X}) \subset I_1(\bar{Z}\bar{X}) \subset Q$, por la prueba de la proposición 4.
Si $\bar{Z} \subset Q$, entonces $\bar{Z} + I_p(X) \subset Q$, así $ht(Q) \geq p-1+1+m-p+1 = m+1$.
Si $I_{p-1}(\bar{X}) \subset Q$, entonces $I_{p-1}(\bar{X}) + I_1(\bar{Z}\bar{X}) + \langle z_0 \rangle \subset Q$ y por hipótesis de inducción $ht(Q) \geq m+1$. Con esto se concluye que z_0 es un elemento regular módulo $I_1(ZX) + I_p(X)$.
Para probar que $I_1(ZX) + I_p(X)$ es primo, observemos que cuando $T = \{z_0^t : t \geq 0\}$ un conjunto multiplicativamente cerrado entonces $T^{-1}(I_1(ZX) + I_p(X)) = T^{-1}(I_1(ZX))$ es primo, pues $I_1(ZX) = \langle A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}} \rangle$ es primo como podemos ver en la demostración de la proposición (5). $\square$

Teorema 8. *Sea $A = \sum a_{ijk}x_iy_jz_k$ una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada. Si $p < m$, entonces los primo minimales de J_A son $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{p-1} \rangle$ y $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$*

Demostración. Por la proposición 4, un ideal primo en J_A contiene a

$$\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}} \rangle$$

o a $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$, entonces por la proposición 5 tenemos que $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}} \rangle$ es un primo minimal de J_A, y por la proposición 6 tenemos que $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$ tambien es primo minimal de J_A. $\square$

Teorema 9. *Sea $A = \sum a_{ijk}x_iy_jz_k$ una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada. Si $p = m$ entonces los primos minimales de J_A son*

$$P_1 = \langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}}, I_p(X) \rangle$$
$$P_2 = \langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}}, I_p(X) \rangle$$

y

$$P_3 = \langle y_0, \ldots, y_{m-1}, z_0, \ldots, z_{p-1} \rangle$$

Demostración. Por la proposición 6; P_1 es un primo minimal de J_A. Por la proposición 4, P_2 es primo minimal de J_A.

Si Q es un ideal primo de J_A distinto de P_1 y de P_2, entonces por la proposición 4 debe contener a $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, A_{z_0}, \ldots, A_{z_{p-1}} \rangle$ y dado que $m = p$, también debe contener a $\langle y_0, \ldots, y_{m-1}, A_{y_0}, \ldots, A_{y_{m-1}} \rangle$, por lo tanto contiene a $\langle z_0, \ldots, z_{p-1}, y_0, \ldots, y_{m-1} \rangle$ y como este ideal es primo y esta contenido en J_A, entonces por minimalidad de Q, tenemos $Q = P_3$. $\square$

Lema 7. *Sea $A = \sum a_{ijk} x_i y_j z_k$ una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada. Entonces $y_0^{k+1} z_k \in J_A$ para toda $0 \leq k \leq p-1$.*

Demostración. Por inducción sobre k.

1. Si $k = 0$, $A = a_{000}x_0y_0z_0 + a_{100}x_1y_0z_0 + \ldots + a_{n-100}x_{n-1}y_0z_0 + a_{010}x_0y_1z_0 + \ldots + a_{0m-10}x_0y_{m-1}z_0$, por tanto $\frac{\partial A}{\partial x_1} = a_{100}y_0z_0 \in J_A$, además como $a_{100} \neq 0$, entonces $y_0^{k+1} z_k = y_0 z_0 \in J_A$.

2. Sea $k > 0$, y supongamos que $y_0^{h+1} z_h \in J_A$ para toda $0 \leq h \leq k-1$.

   Como $y_0^k A_{x_k} = y_0^k (\sum\limits_{l=0}^{k} a_{k,k-l,l} y_{k-l} z_l) = \sum\limits_{l=0}^{k} a_{k,k-l,l} y_{k-l} y_0^k z_l \in J_A$.

   Además $\sum\limits_{l=0}^{k} a_{k,k-l,l} y_{k-l} y_0^k z_l = \sum\limits_{l=0}^{k-1} a_{k,k-l,l} y_{k-l} y_0^k z_l + a_{k0k} y_0^{k+1} z_k$, lo cual por hipótesis de inducción, el primer sumando pertenece a J_A, así como en el caso $k = 0$, concluimos que $y_0^{k+1} z_k \in J_A$.

$\square$

Teorema 10. *Sea $A = \sum a_{ijk} x_i y_j z_k$ una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada. El ideal $\langle x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{m-1}, z_0, \ldots, z_{p-1} \rangle$ es un primo asociado de J_A.*

Demostración. Sean $\mu = y_0^{p-1} z_{p-1}^{m-1}$ y $\mu' = y_{m-1}^{p-1} z_0^{m-1}$, Bruns y Guerrieri en [5] demuestran tres cosas;

1. μ y μ' no pertenecen a $J_X = \langle A_{x_0}, \ldots, A_{x_{n-1}} \rangle$.

2. existe $a \in K$, $a \neq 0$, tal que $\mu \equiv a\mu' (mod J_X)$, y

3. $y_j \mu$, $z_k \mu \in J_X$ para toda j, k.

Sean $y_0^{p-1}z_{p-1}^{m-2}A_{Y_j} \in J_A$ para $0 \leq j \leq m-1$. Entonces

$$\begin{aligned} y_0^{p-1}z_{p-1}^{m-2}A_{Y_j} &= y_0^{p-1}z_{p-1}^{m-2}\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_{j+kjk}x_{j+k}z_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_{j+kjk}x_{j+k}y_0^{p-1}z_kz_{p-1}^{m-2} + a_{j+p-1jp-1}x_{j+p-1}y_0^{p-1}z_{p-1}^{m-1}. \end{aligned}$$

Por el lema 7, tenemos que $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_{j+kjk}x_{j+k}y_0^{p-1}z_kz_{p-1}^{m-2} \in J_A$. Esto implica que $a_{j+p-1jp-1}x_{j+p-1}y_0^{p-1}z_{p-1}^{m-1} \in J_A$, es decir, si $i = j+p-1$, $\mu x_i = x_iy_0^{p-1}z_{p-1}^{m-1} \in J_A$, para $p-1 \leq i \leq n-1$.
Al considerar el automorfismo de S:

$$\begin{array}{rccc} \tau: & S & \longrightarrow & S \\ & x_i & \mapsto & x_{n-1-i} \\ & y_j & \mapsto & y_{m-1-j} \\ & z_k & \mapsto & z_{p-1-k} \end{array}$$

se tiene que $\mu' x_i \in J_A$, para $0 \leq i \leq m-1$. Dado que existe $a \in K$, $a \notin 0$ tal que $\mu - a\mu' \in J_X$, tenemos $\mu x_i \in J_A$ para toda i.
Además por el número 3 anterior, tenemos $y_j\mu, z_k\mu \in J_X \subset J_A$ para toda j y k. Por tanto, el ideal homogéneo maximal es un primo asociado de J_A. $\square$

Capítulo 3

ALGORITMOS

3.1. Bases de Gröbner.

Las bases de Gröbner nos permite resolver problemas de ideales polinomiales en un algoritmo o una manera computacional.

Sea $\sum c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$ un polinomio en $K[x_1,\ldots,x_n]$. Un *orden monomial* $>$ sobre $K[x_1,\ldots,x_n]$, es un orden total sobre los monomio y satisface:

1. $x^\alpha > x^\beta$ entonces $x^\alpha x^\gamma > x^\beta x^\gamma$
2. Un conjunto de monomios $\{x^\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}}$ tiene un elemento minimal. Es decir, cualquier sucesión decreciente de monomios $x^{\alpha(1)} > x^{\alpha(2)} > x^{\alpha(3)} > \ldots$ eventualmente termina.

Algunos ejemplo de orden monomial son los siguientes: sean $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ y $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

1. *orden lexicográfico* **lp** se define como: $x^\alpha >_{lp} x^\beta$ si, y sólo si la primer entrada no cero de $\alpha - \beta$ es positiva.
2. *orden lexicográfico graduado* **Dp**, definido como: $x^\alpha >_{Dp} x^\beta$ si y sólo si $deg(x^\alpha) > deg(x^\beta)$ o $deg(x^\alpha) = deg(x^\beta)$ y $x^\alpha >_{lp} x^\beta$.
3. *orden lexicográfico graduado inverso* **dp**, y decimos $x^\alpha >_{dp} x^\beta$ si y sólo si $deg(x^\alpha) > deg(x^\beta)$ o $deg(x^\alpha) = deg(x^\beta)$ y la ultima entrada no cero de $\alpha - \beta$ es negativa.

Fijando un orden monomial en $K[x_1,\ldots,x_n]$ y considerando un polinomio no cero $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in K[x_1,\ldots,x_n]$, se define lo siguiente:

Definición 19. *El multigrado de f está definido por*

$$multideg(f) = max\{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} : c_\alpha \neq 0\}.$$

El coeficiente principal de f es $LC(f) = c_{multideg(f)} \in K$.
El monomio principal de f, $LM(f) = x^{multideg(f)}$,con coeficiente 1.
El término principal de f es $LT(f) = LC(f) \cdot LM(f)$.

Un *ideal monomial* $J \in K[x_1, \ldots, x_n]$ es un ideal generado por un conjunto de monomios $\{x^\alpha\}_{\alpha \in A}$.

Definición 20. *Sea $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ un ideal distinto del $\{0\}$.*

1. *$LT(I)$ es el conjunto de términos principales de elementos de I. Es decir, $LT(I) = \{cx^\alpha : \exists f \in I$ con $LT(f) = cx^\alpha\}$.*

2. *$\langle LT(I)\rangle$ es el ideal generado por los elementos de $LT(I)$. Por convención $LT(\langle 0\rangle) = \langle 0\rangle$.*

3. *Sea $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$, se dice que f es reducible módulo I si, $f \neq 0$ y $LT(f) \in \langle LT(I)\rangle$. En otro caso, se dice que f es reducido módulo I.*

Definición 21. *Fijemos un orden monomial. Un subconjunto finito $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ de un ideal I se dice ser un* ***base de Gröbner (o base estandar)*** *si $\langle LT(g_1), \ldots, LT(g_t)\rangle = \langle LT(I)\rangle$, es decir, si cada elemento no cero de I es reducible módulo G.*

3.1.1. Propiedades de las bases de Gröbner:

Teorema 11. ***Teorema de existencia*** *Sea $>$ un orden monomial, e $I \neq 0$ un ideal en $K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces I admite una base de Gröbner finita (para el orden $>$).*

Demostración. Por el teorema de Dickson se tiene que un ideal monomial tiene una base finita, entonces, dado que $\langle LT(I)\rangle$ es un ideal mononial, existen $g_1, \ldots g_r \in I$, tal que $\langle LT(g_1), \ldots, LT(g_r)\rangle = \langle LT(I)\rangle$.
Por demostrar que $I = \langle g_1, \ldots, g_r\rangle$.
Obviamente $\langle g_1, \ldots, g_r\rangle \subset I$, por tanto sea $f \in I$, entonces por el algoritmo de división, existen $a_1, \ldots, a_r, s \in K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$f = a_1g_1 + \ldots + a_rg_r + s$$

donde cada término de s no es divisible por $LT(g_1), \ldots, LT(g_r)$.
Como $s = f - a_1g_1 - \ldots - a_rg_r \in I$, entonces supongamos que $s \neq 0$, por lo tanto $LT(s) \in \langle LT(I) \rangle$, por lo cual es divisible por algún $LT(g_i)$ contradiciendo la definición de residuo.
Así $s = 0$ y por lo tanto $f \in \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$ Por tanto G es una base para I □

Para calcular bases de Gröbner, primero necesitamos sabes cuando un conjunto de polinomios no cumple las condiciones para ser una base de Göbner.

Definición 22. *Sea $f, g \in K[x_1, \ldots, x_n]$ polinomios no cero.*

i) *Si $multideg(f) = \alpha$ y $multideg(g) = \beta$, entonces sea $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, donde $\gamma_i = max(\alpha_i, \beta_i)$ para cada i. Llamamos a x^γ el mínimo común múltiplo de $LM(f)$ y $LM(g)$, escribimos $x^\gamma = LCM(LM(f), LM(g))$.*

ii) *El S-polinomial de f y g es la combinación*
$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g$.

Corolario 4. *Sean $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$ una base de Gröbner de un ideal $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ y $f \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces $f \in I$ si, y sólo si el residuo de dividir a f por G es cero.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Por la unicidad del residuo r en el algoritmo de división, tenemos que $f = f + 0$, por tanto $r = 0$.
$\Leftarrow\rfloor$ Si $r = 0$, entonces $f = a_1g_1 + \ldots + a_sg_s \in G \subset I$. □

Notación: Se denota por $\overline{f}^F$, el residuo en la división de f por la $s-$eneada ordenada $F = (f_1, \ldots, f_s)$.

Teorema 12. ***El criterio de Buchberger***
Fijando un orden monomial, y polinomios $g_1, \ldots, g_s \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Las siguientes declaraciones son equivalentes:

1. *$G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ es una base de Gröbner para $I = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$.*

2. *para todo par $i \neq j$, el residuo en la división de $S(g_i, g_j)$ por G es cero.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Como $S(g_i, g_j) \in G \subset I$ $\forall i \neq j$, por el corolario 4, $\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$ $\forall i \neq j$.
$\Leftarrow\rfloor$ Sea $f \in I$, entonces

$$f = \sum_{k=1}^{s} h_k g_k \tag{3.1}$$

Defínase $m_i = multideg(h_i g_i)$, y sea $\delta = max(m_i)$. Por propiedades del multigrado obtenemos

$$multideg(f) \leq \delta. \tag{3.2}$$

Después, considerando todas las posibles formas de expresar a f como en (3.1), posiblemente se obtenga una δ diferente. Así, se puede considerar a δ mínimal. Con ella se probará que se da la igualdad en (3.2).
Supongamos que $multideg(f) < \delta$. Separando los términos de multigrado δ en f, se puede escribir como sigue:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{m(i)=\delta} h_i g_i + \sum_{m(i)<\delta} h_i g_i \\ &= \sum_{m(i)=\delta} LT(h_i) g_i + \sum_{m(i)=\delta} (h_i - LT(h_i)) g_i + \sum_{m(i)<\delta} h_i g_i. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dado que los monomios de la segunda y tercera suma son de multigrado menor a δ, y por suposición f también, entonces el primer sumando debe tener multigrado menor a δ.

Sea $LT(h_i) = c_i x^{\alpha(i)}$. Entonces $\sum\limits_{m(i)=\delta} LT(h_i) g_i = \sum\limits_{m(i)} c_i x^{\alpha(i)} g_i$, sea $f_i = x^{\alpha(i)} g_i$

Por tanto, $\sum\limits_{m(i)=\delta} c_i f_i$ es una combinacion lineal de los $S-$polinomios $S(f_i, f_j)$, para esta declaración, ver [8].

Por definición $S(x^{\alpha(i)} g_i, x^{\alpha(j)} g_j) = \frac{x^\delta}{x^{\alpha(i)} LT(g_i)} \cdot x^{\alpha(i)} g_i + \frac{x^\delta}{x^{\alpha(j)} LT(g_j)} \cdot x^{\alpha(j)} g_j = x^{\gamma_{ij}} S(g_i, g_j)$ donde $x^{\gamma_{ij}} = LCM(LM(g_i), LM(g_j))$.

Entonces

$$\sum_{m(i)=\delta} LT(h_i) g_i = \sum c_{jk} x^{\delta - \gamma_{jk}} S(g_j, g_k). \tag{3.4}$$

Además, por hipótesis, $\overline{S(g_j, g_k)}^G = 0$ para todo par j, k distintos, esto significa $S(g_j, g_k) = \sum\limits_{l=1}^{s} a_{jkl} g_l$, donde $a_{ijk} \in K[x_1, \ldots, x_n]$ y que $multideg(a_{jkl} g_l) \leq multideg(S(g_j, g_k))$ $\forall j, k, l$.

Ahora $x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j,g_k)=\sum\limits_{l=1}^{s}x^{\delta-\gamma_{jk}}a_{jkl}g_l$, por tanto

$$multideg(x^{\delta-\gamma_{jk}}a_{jkl}g_l)\leq multideg(x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j,g_k))<\delta.$$

Sustituyendo en la ecuación (3.4),

$$\begin{aligned}\sum_{m(i)=\delta}LT(h_i)g_i &= \sum c_{jk}x^{\delta-\gamma_{jk}}S(g_j,g_k) \qquad (3.5)\\ &= \sum_{m(i)=\delta}c_{jk}(\sum_{l=1}^{s}x^{\delta-\gamma_{jk}}a_{jkl}g_l)\\ &= \sum_{l}h'_lg_l\end{aligned}$$

y cumple que $multideg(h'_lg_l)\leq\delta$. Ahora sustituyendo esta última ecuación en (3.3) obtenemos

$$f = \sum_{l}h'_lg_l+\sum_{m(i)=\delta}(h_i-LT(h_i))g_i+\sum_{m(i)<\delta}h_ig_i.$$

es decir, una expresión de f como combinación de los g'_is y donde cada término tiene multigrado menor a δ, lo cual es una contradición pues δ era mínimo.

Por tanto $multideg(f)=\delta$, así tenemos $LT(h_ig_i)$ divide a $LT(f)$, para algún i, entonces $LT(f)\in\langle LT(g_1),\ldots,LT(g_s)\rangle$, por lo que concluimos que G es una base de Gröbner para I. $\square$

Observemos que este criterio sólo nos garantiza la existencia de una base de Gröbner para cualquier ideal diferente del ideal cero, sin embargo una manera constructiva de obtenerla, es por el siguiente algoritmo dado por Buchberger.

Teorema 13. ***Algoritmo de Buchberger*** *Sea $I=\langle f_1,\ldots,f_s\rangle\neq\{0\}$ es un ideal polinomial. Entonces una base de Gröbner para I puede ser construido en un número finito de pasos por el siguiente algoritmo:*

Input: $F=(f_1,\ldots,f_s)$
Output: a Gröbner basis $G=(g_1,\ldots,g_t)$ para I, con $F\subset G$
$G:=F$
REPEAT
$G':=G$
FOR each pair $\{p,q\},p\neq q$ in G' DO
$S:=\overline{S(p,q)}^{G'}$
IF $S\neq 0$ THEN $G:=G\bigcup\{S\}$
UNTIL $G=G'$

Demostración. G es base por que contiene la base F de I. Para cada par $p, q \in G$ distintos, como $G \subset I$, y los residuos se obtienen de la división entre los elementos de $G' \subset I$, entoces $S \in I$, por lo tanto G se mantiene en I en cada etapa del algoritmo, es decir, que aun al añadir a G el residuo S, tenemos $G \cup \{S\} \subset I$.

El algoritmo termina cuando $G' = G$, lo que significa que $\overline{S(p,q)}^{G'} = 0$ $\forall p, q \in G$ y por tanto por el criterio de Buchberger, G es una base de Gröbner para $I = \langle G \rangle$.

Ahora, observemos que el algoritmo termina. Dado que G consiste de G' junto con un residuo no cero de un $S-$polinomios de elementos en G', entonces $G' \subset G$ y así

$$\langle LT(G') \rangle \quad \subset \quad \langle LT(G) \rangle \tag{3.6}$$

Ahora, si $G \neq G'$, entonces (3.6) es una contención propia, en efecto: sea r un residuo de un $S-$polinomio en G', y supongamos que este es unido a G, por definición de residuo $LT(r)$ no es divisible por los terminos principales de los elementos de G' y por tanto $LT(r) \notin \langle LT(G') \rangle$, sin embargo $LT(r) \in \langle LT(G) \rangle$.

Al aplicar el algoritmo iteradas veces, por (3.6), se obtiene una cadena ascendente de ideales $\langle LT(G') \rangle$ en $K[x_1, \ldots, x_n]$, la cual se estabiliza por que $K[x_1, \ldots, x_n]$ es Noetheriano, así $\langle LT(G') \rangle = \langle LT(G) \rangle$, implicando que $G = G'$ y por tanto el algoritmo términa en un número finito de pasos. $\square$

Veamos un ejemplo de este algoritmo.

Ejemplo 5. *Sea* $I(Y) = \langle f_1, f_2 \rangle \subset K[x_1, x_2, x_3]$, *donde* $f_1 = x_2 - x_1^2$ *y* $f_2 = x_3 - x_1^3$.

Utilizando el orden dp. Tenemos $LT(f_1) = x_1^2$ *y* $LT(f_2) = x_1^3$.

Consideremos a $G = \{f_1, f_2\}$.

Por lo tanto $S(f_1, f_2) = \dfrac{x_1^3}{x_1^2} f_1 - \dfrac{x_1^3}{x_1^3} f_2 = x_1 f_1 - f_2 = x_1 x_2 - x_1^3 - x_3 + x_1^3 = x_1 x_2 - x_3$.

Observemos que $LT(x_1 x_2 - x_3) = x_1 x_2$ *y que* $LT(f_i) \nmid LT(f_3)$ *para* $i = 1, 2$.

Entonces sean $f_3 = x_x x_2 - x_3$ *y* $G = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Nuevamente $S(f_1, f_3) = \dfrac{x_1^2x_2}{x_1^2}f_1 - \dfrac{x_1^2x_2}{x_1x_2}f_3 = x_2f_1 - x_1f_3 = x_2x_1^2 - x_2^2 - x_1^2x_2 + x_3x_1 = x_3x_1 - x_2^2$.

Sea $f_4 = x_3x_1 - x_2^2$.

Por lo cual $S(f_2, f_3) = \dfrac{x_1^3x_2}{x_1^3}f_2 - \dfrac{x_1^3x_2}{x_1x_2}f_3 = x_2f_2 - x_1^2f_3 = x_2x_1^3 - x_2x_3 - x_1^3x_2 + x_1^2x_3 = x_1^2x_3 - x_2x_3 = x_3f_1$.

Así $\overline{S(f_2, f_3)}^G = 0$.

Como $LT(f_4) = x_2^2$, *y* $LT(f_i) \nmid LT(f_4)$ *para* $i = 1, 2, 3$ *entonces consideremos* $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Así $S(f_1, f_4) = \dfrac{x_1x_2^2}{x_1^2}f_1 - \dfrac{x_1x_2^2}{x_2^2}f_4 = x_2^2f_1 - x_1^2f_4 = x_2^3 - x_1^2x_2^2 - x_1^3x_3 + x_1^2x_2^2 = x_2^3 - x_1^3x_3 = x_1x_3f_1 - x_2f_4$.

Por lo cual $\overline{S(f_1, f_4)}^G = 0$.

$S(f_2, f_4) = \dfrac{x_1^3x_2^2}{x_1^3}f_2 - \dfrac{x_1^3x_2^2}{x_2^2}f_4 = x_2^2f_2 - x_1^3f_4 = x_2^2x_3 - x_2^2x_1^3 - x_1^4x_3 - x_1^3x_2^2 = x_2^2x_3 - x_1^4x_3 = x_3(x_2 + x_1^2)f_1$, *entonces* $\overline{S(f_2, f_4)}^G = 0$.

$S(f_3, f_4) = \dfrac{x_1x_2^2}{x_1x_2}f_3 - \dfrac{x_1x_2^2}{x_2^2}f_4 = x_2f_3 - x_1f_4 = x_2x_3 - x_1x_2^2 - x_1^2x_3 + x_1x_2^2 = x_2x_3 - x_1^2x_3 = x_3f_1$.

Por lo cual $\overline{S(f_3, f_4)}^G = 0$.

Así $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ *es una base de Gröbner para* $I(Y)$, *pero observemos que* $LT(f_1) \mid LT(f_2)$, *por lo que podemos reducir la base a* $\{f_1, f_3, f_4\}$.

Como podemos darnos cuenta en el ejemplo anterior, se puede reducir aun más las bases de Gröbner, por lo cual se tiene la siguiente definición:

Definición 23. *Una* ***base de Gröbner minimal*** *para un ideal polinomial* I *es una base de Gröbner* G *para* I *tal que:*

i) $LC(p) = 1 \forall p \in G$

ii) $\forall p \in G, LT(p) \notin \langle LT(G - \{p\})\rangle$.

Es decir, cualquier p elemento no cero en G es reducido módulo $G - \{p\}$.

También observemos, si $f \in G$ es reducible módulo $G - \{f\}$, es decir, $LT(f) \in \langle LT(G - \{f\})\rangle$ entonces $\langle LT(G)\rangle \subset \langle LT(G - \{f\})\rangle$, y dado que $\langle LT(G-\{f\})\rangle \subset \langle LT(G)\rangle$, entonces G es base de gröbner si, y sólo si $G-\{f\}$ lo es. Con esto tenemos que de cualquier base de Gröbner se puede obtener una minimal, con el simple hecho de quitar los elementos que son reducibles sobre otros.

3.2. Sistema de álgebra computacional: Singular

Singular es un programa de software libre, es un sistema de álgebra computacional para calculos polinómicos especialmente del álgebra conmutativa, geometría algebraica y la teoría de singularidades.

Tiene implementado varios algoritmos para calcular bases de Gröebner, entre ellos incluye el algoritmo de Buchberger y el algoritmo de Mora como casos especiales, fue desarrollada en 1984, el programa está dirigido y coordinado por Wolfram Decker, Gert-Martin Greuel, Gerhard Pfister y Hans Schönemann.

Para comenzar trabajar con Singular, y salvo las operaciones triviales, se requiere con anterioridad la definición de un anillo dado que trabajamos con módulo, matrices e ideal polinomiales.

Estos anillos pueden ser del tipo:

1. Anillos polinomiales sobre un campo.
2. Una localización de un anillo polinomial.
3. El anillo cociente por el ideal de un anillo de las dos formas anteriores.
4. El producto tensorial de anillos de la forma 1 o 2 de esta lista.

Excepto por los anillos cocientes, todos los anillos pueden determinarse por el campo, sus variables y el orden de sus variables, por tanto los anillos definidos en Singular, constan de tres partes, los cuales son: la característica del campo, el nombre de las variables en el anillo, y el orden monomial.

Por ejemplo, podemos escribir:

ring A=0,(x,y,z),lp;

donde A denota el nombre del anillo que se esta definiendo, 0 nos dice que la característica del campo es 0, x, y, z son las variables y lp nos dice que estamos trabajando con el orden lexicográfico.

Es importante que al final de cada declaración definida se use el punto y coma.

Entre muchos comandos que existe en Singular, los que frecuentemente usaremos son los siguientes:

1. **poly nombre= expresión**. Para definir a un polinomio.
2. **ideal nombre= generadores** . Define un ideal. Es seguido de sus generadores por comas.
3. **intmat o matrix nombre[filas][columnas]=lista de entradas de la matriz, fila por fila de izquierda a derecha**. El primer comando define a una matriz de coeficientes enteros y el segundo define una matriz con expresiones polinomiales.
4. **jacob**, es el comando para calcular el ideal jacobiano.
5. **minor(M,h)**, donde M es una matriz y h un entero, así este comando nos calcula el los menores de tamaño h de la matriz M.
6. Para calcular la base de Gröbner, se utiliza el comando **groebner**, con el orden lp, ya que Singular implemento el algoritmo de Buchberger a través del comando **std** que se refiere a la base estándar.
7. El comando **plot();**, que se encarga de la curvas planas y las superficies.
8. Hay dos comandos para calcular la descomposición primaria, ambos envian una lista de dos ideales donde el primer ideal de la lista corresponde al ideal primario y el segundo corresponde al ideal primo:

    a) **primdecGTZ**; basado en *Gianni-Trager-Zacharias*, escrito por *Gerhard Pfister*, y

    b) **primdecSY**; basado en *Shimoyama-Yokoyama*, escrito por *Hans Schoenemann.*

9. **minAss**, se utiliza para calcular los primos minimales en una descomposición primaria.

10. **quotient(I,J)**. Calcula el ideal cociente $(I : J)$ de los ideales I, J.

11. **spoly(,)**;, es usado para calcular el $S-$polinomio.

12. **NF(f,H)**; calcula la forma normal de f con respecto a H, es decir, calcula el residuo de dividir f con respecto a H.

Observemos que en caso de los monomios, el grado se indica del lado derecho de la indeterminada si no se quiere usar ˆ y del lado izquierdo indica el coeficiente, por ejemplo, $4x5 = 4x^5$.

También se utiliza los valores booleanos, donde 1 representa el valor verdadero y 0 es valor falso.

Para realizar las diferentes operaciones elementales de en matrices, polinomios, etc, se usan diversas librerias, por ejemplo (para nuestros fines) por mencionar algunas:

libreria	propósito
surf.lib	Se usa para graficar.
matrix.lib	Realiza las operaciones para matrices.
primdec.lib	Calcula la descomposición primaria.
latex.lib	Visualiza los calculos en latex.
teachstd.lib	Es usada para los procedimientos en la base estándar.

3.3. Ejemplos

En esta sección como su nombre lo indica daremos un par de ejemplos de ideales cuya estructura fue estudiada en el capítulo 2, calculando su descomposición primaria y así mismo en los casos en donde es visiblemente posible presentaremos las variedades correspondientes de dichos ideales.

Todos los ejemplos que consideremos son calculados por medio de Singular. Vamos a utilizar el orden monomial **dp**, y trabajaremos sobre en un anillo de característica 0.

Ejemplo 6. *Consideremos al ideal*

$$I = \left\langle \begin{array}{c} -y^2z^2 - xyzt + yz^2, \\ -xyzt - x^2t^2 + xt^2, \\ -xy^2z^3 - y^3z^3 + xyz^3 + 2y^2z^3 - yz^3, \\ -y^2z^3 + y^2z^2t + yz^3 - yz^2t \end{array} \right\rangle \subset K[x,y,z,t]$$

Al calcular la descomposición primaria de I con el uso de Singular, obtenemos la siguente lista de ideales que como comentamos anteriormente, esta lista nos arroja dos clases de ideales los cuales modificamos un poco en su notación.

[1] :

I_1 :

$$\_[1] = t^3$$
$$\_[2] = zt^2$$
$$\_[3] = z^2t$$
$$\_[4] = z^3$$
$$\_[5] = yzt + xt^2 - t^2$$
$$\_[6] = yz^2 + xzt - z^2$$

P_1 :

$$\_[1] = t$$
$$\_[2] = z$$

[2] :

I_2 :

$$\_[1] = z - t$$
$$\_[2] = x + y - 1$$

P_2 :

$$\_[1] = z - t$$
$$\_[2] = x + y - 1$$

[3] :

I_3 :

$$\_[1] = t$$
$$\_[2] = y - 1$$

P_3 :

$$\_[1] = t$$
$$\_[2] = y - 1$$

[4] :

I_4 :

$$\_[1] = t^2$$
$$\_[2] = y$$

P_4 :

$$\_[1] = t$$
$$\_[2] = y$$

[5] :

I_5 :

$$\_[1] = z$$
$$\_[2] = x - 1$$

P_5 :

$$\_[1] = z$$
$$\_[2] = x - 1$$

[6] :

I_6 :

$$\_[1] = z^2$$
$$\_[2] = x$$

P_6 :

$$\_[1] = z$$
$$\_[2] = x$$

[7] :

I_7 :

$$\_[1] = y - 1$$
$$\_[2] = x$$

P_7 :

$$\_[1] = y - 1$$
$$\_[2] = x$$

[8] :

I_8 :

$$\_[1] = y$$
$$\_[2] = x - 1$$

P_8 :

$$\_[1] = y$$
$$\_[2] = x - 1$$

[9] :

I_9 :

$$\_[1] = y$$
$$\_[2] = x$$

P_9 :

$$\_[1] = y$$
$$\_[2] = x$$

Esto significa que $I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_9$, *donde* I_k *es* I_k-*primario para* $k = 2, 3, 5, 7, 8, 9$ *e* I_k *es* P_k-*primario para* $k = 1, 4, 6$.

Además el conjunto de primos minimales de I *es* $minAss(I) = \{P_1, \ldots, P_9\}$, *por tanto, es una descomposición minimal.*

Ejemplo 7. *Al calcular el ideal jacobiano de* I, *este viene dado por:*
$J_I = \langle -yzt, -2yz^2 - xzt + z^2, -2y^2z - xyt + 2yz, -xyz, -yzt - 2xt^2 + t^2, -xzt, -xyt, -xyz - 2x^2t + 2xt, -y^2z^3 + yz^3, -2xyz^3 - 3y^2z^3 + xz^3 + 4yz^3 - z^3, -3xy^2z^2 - 3y^3z^2 + 3xyz^2 + 6y^2z^2 - 3yz^2, -2yz^3 + 2yz^2t + z^3 - z^2t, -3y^2z^2 + 2y^2zt + 3yz^2 - 2yzt, y^2z^2 - yz^2\rangle$

Entonces, como en el caso anterior, obtenemos que una descomposición primaria de J_I *es:*

$$J_I = J_1 \cap \ldots \cap J_6,$$

donde :
$J_1 = \langle t, z\rangle$ *es* J_1-*primario,*
$J_2 = \langle t, z^2, y\rangle$ *es* $\langle t, z, y\rangle-$*primario,*
$J_3 = \langle t^2, z, x\rangle$ *es* $\langle t, z, x\rangle-$*primario,*
$J_4 = \langle t^2, zt, z^2, y - 1, x\rangle$ *es* $\langle t, z, y - 1, x\rangle-$*primario,*
$J_5 = \langle t^2, zt, z^2, y, x - 1\rangle$ *es* $\langle t, z, y, x - 1\rangle-$*primario, y*
$J_6 = \langle t^2, z^2, y, x\rangle$ *es* $\langle x, y, z, t\rangle-$*primario.*

Además observemos que J_1, *es un subconjunto de* $rad(J_i)$, *para* $i = 1, \ldots, 6$, *así la descomposición primaria de* J_I *no es minimal, es decir, tiene componentes encajadas.*

Ejemplo 8. *Consideremos el ideal* $I = \langle x^2, xy\rangle \subset K[x, y]$.

Calculando un descomposición primaria para I, *tenemos*

$$I = \langle x\rangle \cap \langle y, x^2\rangle,$$

donde $\langle x\rangle$ *es* $\langle x\rangle-$*primario y* $\langle y, x^2\rangle$ *es* $\langle x, y\rangle-$*primario.*
Obsevemos que esta descomposición no es minimal.

Ejemplo 9. *Un ejemplo de un ideal con descomposición primaria minimal y el cual podemos visualizar su variedad que define está dada por el siguiente ideal. Sea* $G = \langle -xyz - x^2 + x\rangle$, *nuevamente, obtenemos:*

$$G = \langle yz + x - 1\rangle \cap \langle x\rangle$$

siendo $\langle yz + x - 1\rangle$ *y* $\langle x\rangle$ *ideales* $\langle yz + x - 1\rangle$*−primario y* $\langle x\rangle$*−primario respectivamente. Aunque en este caso también es muy facíl de calcularla sin Singular.*

La figura 3.1 nos muestra las dos componentes irreducibles de $Z(G)$*:*

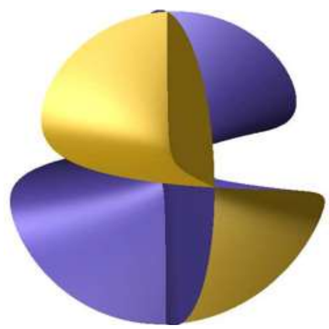

Figura 3.1: $Z(-xyz - x^2 + x)$

Además $J_G = \langle -yz - 2x + 1, -xz, -xy\rangle$ *tiene una descomposición primaria :*

$$J_G = \langle yz - 1, \frac{1}{2}yz + x - \frac{1}{2}\rangle \cap \langle z, y, \frac{1}{2}yz + x - \frac{1}{2}\rangle$$

donde ambos ideales son primos y ninguno esta contenido en el otro, es decir, la descomposición de J_G *es minimal. La variedad definida por este ideal la podemos visualizar en la figura 3.2.*

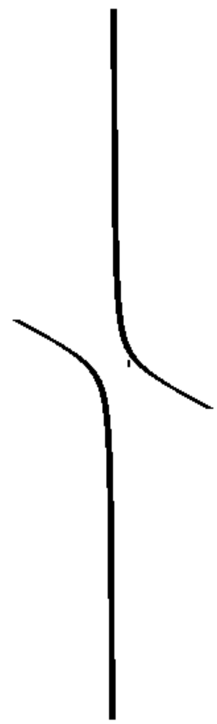

Figura 3.2: $Z(-yz-2x+1,-xz,-xy)$

Ejemplo 10. *Sea* $I=\langle x^2y^3-x^3yz, y^2z-xz^2\rangle \subset K[x,y,z]$. *Calculando la descomposición primaria obtenemos lo siguiente:*

$$I=\langle y^2-xz\rangle \cap \langle y,z^2\rangle \cap \langle x^2,z\rangle$$

donde $\langle y^2-xz\rangle$ *es un ideal primo, y los ideales* $\langle z^2,y\rangle$ *y* $\langle z,x^2\rangle$ *son ideales* $\langle z,y\rangle-$*primario y* $\langle z,x\rangle-$*primario respectivamente.*

Además observemos que $\langle y^2-xz\rangle \subset \langle z,y\rangle$, *por tanto,* $\langle z,y\rangle$ *es una componente encajada, y obtenemos:*

$$Z(I)=\{y^2-xz=0\}\cup\{y=0=z^2\}\cup\{x^2=0=z\}$$

como se muestra en la figura 3.3.

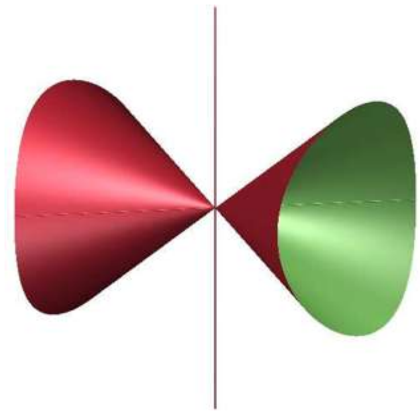

Figura 3.3: $Z(x^2y^3 - x^3yz, y^2z - xz^2)$

Ejemplo 11. *Ahora consideremos el ideal jacobiano de* $I = \langle x^2y^3 - x^3yz, y^2z - xz^2\rangle$ *del ejercicio anterior, que por medio de Singular obtenemos:*

$$J_I = \langle 2xy^3 - 3x^2yz, 3x^2y^2 - x^3z, -x^3y, -z^2, 2yz, y^2 - 2xz\rangle$$

Calculando su descomposición primaria, Singular nos dice que:

$$J_I = \langle z, y\rangle \cap \langle z^2, yz, -y^2 + 2xz, x^2y^2, x^3\rangle,$$

donde el primer ideal es un ideal primo y el segundo ideal es un ideal $\langle x, y, z\rangle-$*primario. Además observemos que* J_I *tiene una componente encajada y una componente aislada, pues* $\langle z, y\rangle \subset \langle z, y, x\rangle$*. Geométricamente estas corresponden a la siguientes componentes de la figura 3.4 :*

Figura 3.4: $Z(z^2, yz, -y^2 + 2xz, x^2y^2, x^3)$

Ejemplo 12. *Observemos otro ejemplo. Sea* $J = \langle xz - y^2, x^3 - yz\rangle \in K[x, y, z]$*, por Singular, una descomposición primaria de* J *es:*

$$J = \langle y, x\rangle \cap \langle y^5 - z^4, -y^2 + xz, xy^3 - z^3, x^2y - z^2, x^3 - yz\rangle$$

donde ambos ideales son primos y la variedad que define J*, corresponde a la figura 3.5.*

Calculando el ideal jacobiano de I*, obtenemos;*

$$J_I = \langle z, -2y, x, 3x^2, -z, -y\rangle$$

Pero observemos que $J_I = \langle x, y, z\rangle$*, es decir es primo y en este caso la variedad* $Z(J_I)$ *solo es el origen, por lo cual no se visualizara.*

Ejemplo 13. *Veamos un ejemplo del ideal* $I_2(M)$*. Consideremos a la matriz de Hankel generalizada de la siguiente manera:*

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & w \\ z & 2w & t \end{pmatrix}$$

Figura 3.5: $Z(xz - y^2, x^3 - yz)$

En este caso $s = 4$ *y* $t = 2$.
Singular nos calcula al ideal $I_2(M)$ *y obtenemos;*

$$I_2(M) = \left\langle \begin{array}{lll} -2w^2 + zt, & -zw + yt, & -2zw + yt, \\ -z^2 + xt, & z^2 - 2yw, & yz - 2xw, \\ -z^2 + yw, & -yz + xw, & y^2 - xz \end{array} \right\rangle$$

Calculando su descomposición primaria, tenemos:

$$I_2(M) = \langle t, w, z^2, yz, y^3, -y^2 + xz \rangle \cap \langle w^3, -2w^2 + zt, zw, z^2, y, x \rangle$$

donde el primer ideal es $\langle t, w, z, y \rangle -$*primario y el segundo es* $\langle w, z, y, x \rangle -$*primario, y además es una descomposición primaria minimal.*

Ejemplo 14. *Sea* M *una matriz de Hankel generalizada de la siguiente forma:*

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & 2x_4 & 5x_5 & x_6 \\ x_4 & 3x_5 & 7x_6 & x_7 \end{pmatrix}$$

Por Singular, sabemos que el ideal $I_2(M)$ *generado por los menores de* 2×2

es:

$$\begin{pmatrix}
-7x_6^2+5x_5x_7, \\
-3x_5x_6+2x_4x_7, \\
-x_4x_6+x_3x_7, \\
-7x_5x_6+x_4x_7, \\
-3x_5^2+x_3x_7, \\
-x_4x_5+x_2x_7, \\
-7x_4x_6+x_3x_7, \\
-3x_4x_5+x_2x_7, \\
-x_4^2+x_1x_7, \\
15x_5^2-14x_4x_6, \\
5x_4x_5-7x_3x_6, \\
3x_4x_5-7x_3x_6, \\
x_4^2-7x_2x_6, \\
3x_3x_5-7x_2x_6, \\
x_3x_4-7x_1x_6, \\
-2x_4^2+3x_3x_5, \\
-x_3x_4+3x_2x_5, \\
-x_2x_4+3x_1x_5, \\
-5x_5^2+x_4x_6, \\
-2x_4x_5+x_3x_6, \\
-x_3x_5+x_2x_6, \\
-5x_4x_5+x_3x_6, \\
-2x_4^2+x_2x_6, \\
-x_3x_4+x_1x_6, \\
2x_4^2-5x_3x_5, \\
x_3x_4-5x_2x_5, \\
2x_3x_4-5x_2x_5, \\
x_3^2-5x_1x_5, \\
-x_3^2+2x_2x_4, \\
-x_2x_3+2x_1x_4, \\
-x_4^2+x_3x_5, \\
-x_3x_4+x_2x_5, \\
-x_2x_4+x_1x_5, \\
x_3^2-x_2x_4, \\
x_2x_3-x_1x_4, \\
-x_2^2+x_1x_3
\end{pmatrix}$$

Una descomposición primaria de $I_2(M)$ *es* $M_1 \cap M_2 \cap M_3$, *donde*

$$M_1 = \langle x_7, x_6, x_5, x_4, x_3^2, x_2x_3, x_2^3, -x_2^2+x_1x_3 \rangle$$

es $\langle x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2\rangle -$*primario,*

$$M_2 = \langle x_6^3, -7x_6^2 + 5x_5x_7, x_5x_6, x_5^2, x_4, x_3, x_2, x_1\rangle$$

es $\langle x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1\rangle -$*primario y*

$$M_3 = \langle x_7, x_6^2, x_5x_6, x_5^2, x_4x_6, x_4x_5, x_4^2, x_3x_6, x_3x_5, x_3x_4, x_3^2, x_2x_6, x_2x_5, x_2x_4, x_2x_3, x_2^2, x_1\rangle$$

el cual es $\langle x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1\rangle -$*primario.*

También obtenemos que el conjunto de primos minimales es

$$\langle x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2\rangle, \langle x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1\rangle$$

Ejemplo 15. *Sean* $m = p = 2, n = 3$, *y* $S = K[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, z_0, z_1]$. *Consideremos la siguiente forma trilineal diagonal no degenerada de forma acotada.*

$$A = x_0y_0z_0 + x_1y_0z_1 + x_1y_1z_0 + x_2y_1z_1.$$

Al calcular el ideal jacobiano de A *con Singular, obtenemos;*

$$J_A = \langle y_0z_0, y_1z_0 + y_0z_1, y_1z_1, x_0z_0 + x_1z_1, x_1z_0 + x_2z_1, x_0y_0 + x_1y_1, x_1y_0 + x_2y_1\rangle$$

Entonces, obtenemos que $J_A = J_1 \cap J_2 \cap J_3 \cap J_4$, *en donde*

$$J_1 = \langle z_1, z_0, x_1y_0 + x_2y_1, x_0y_0 + x_1y_1, x_1^2 - x_0x_2\rangle$$
$$J_2 = \langle z_1, z_0, y_1, y_0\rangle$$
$$J_3 = \langle y_1, y_0, x_1z_0 + x_2z_1, x_0z_0 + x_1z_1, x_1^2 - x_0x_2\rangle$$
$$J_4 = \langle x_2, x_0, z_1^2, y_1z_1, x_1z_1, z_0^2, y_1z_0 + y_0z_1, y_0z_0, x_1z_0, y_1^2, x_1y_1, y_0^2, x_1y_0, x_1^2\rangle$$

siendo J_1, J_2 *y* J_3 *primos y* J_4 *es un ideal* $\langle x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, z_0, z_1\rangle -$*primario.*

Ejemplo 16. *Ahora consideremos el caso cuando* $p < m$. *Supongamos que* $p = 2$ *y* $m = 3$, *entonces* $n = 3 + 2 - 1 = 4$. *Así consideremos* $S = K[x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1]$ *y la forma trilineal siguiente:*

$$A = x_0y_0z_0 + 3x_1y_0z_1 + 3x_1y_1z_0 + 5x_2y_1z_1 + 5x_2y_2z_0 + 7x_3y_2z_1.$$

Obtenemos su ideal jacobiano:

$$J_A = \langle y_0z_0, 3y_1z_0 + 3y_0z_1, 5y_2z_0 + 5y_1z_1, 7y_2z_1, x_0y_0 + 3x_1z_1,$$

$$3x_1z_0 + 5x_2z_1, 5x_2y_0 + 7x_3z_1, x_0y_0 + 3x_1y_1 + 5x_2y_2, 3x_1y_0 + 5x_2y_1 + 7x_3y_2\rangle$$

con descomposición primaria

$$J_A = J_1 \cap J_2 \cap J_3$$

donde $J_1 = \langle z_1, y_2, 3x_1y_0{+}5x_2y_1{+}7x_3y_2, x_0y_0{+}3x_1y_1{+}5x_2y_2, 9x_1^2y_1{-}5x_0x_2y_1{+}15x_1x_0y_1 - 7x_0x_3y_2\rangle$

$J_2 = \langle y_2, y_1, y_0, 5x_2z_0{+}7x_3z_1, 3x_1z_0{+}5x_2z_1, x_0z_0{+}3x_1z_1, 25x_2^2{-}21x_1x_3, 15x_1x_2{-}7x_0x_3, 9x_1^2 - 5x_0x_2\rangle$

$J_3 = \langle y_2z_1, y_2z_0{+}y_1z_1, y_1z_0{+}y_0z_1, y_0z_0, 5x_2z_0{+}7x_3z_1, 3x_1z_0{+}5x_2z_1, x_0z_0{+}3x_1z_1, y_2^2, y_1^2, 3x_1y_0{+}5x_2y_1{+}7x_3y_2, x_0y_0{+}3x_1y_0{+}3x_1y_1{+}5x_2y_2, x_3^2, z_1^3, y_1z_1^2, y_0y_1z_1, x_3y_1z_1, x_2y_1z_1, x_1y_1z_1, x_0y_1z_1, y_0^2z_1, x_3y_0z_1, x_2y_0z_1, 25x_2^2z_1{-}21x_1x_3z_1, 15x_1x_2z_1{-}7x_0x_3z_1, 9x_1^2z_1{-}5x_0x_2z_1, z_0^3, 9x_1^2y_1{-}5x_0x_2y_1{+}15x_1x_2y_2{-}7x_0x_3y_2, y_0^3, x_1^3, x_3z_0z_1^2, x_3z_0^2z_1, x_0x_1x_3z_1, x_0^2x_3z_1, 15x_1x_2y_1y_2{-}7x_0x_3y_1y_2, 5x_2y_0^2y_2{-}7x_3y_0y_1y_2, 5x_2y_0^2y_1{+}7x_3y_0^2y_2, 25x_0x_2^2y_1{-}75x_1x_2^2y_2{+}63x_1^2x_3y_2{+}35x_0x_2x_3y_2, 5x_0x_1x_2y_1{-}15x_1^2x_2y_2{+}7x_0x_1x_3y_2, 18x_0x_1^2x_2{-}5x_0^2x_2^2, x_0^4, x_0x_2x_3z_1^2, x_0^3x_1z_1, x_3y_0^2y_1y_2, x_2x_3y_0y_1y_2, x_2^2y_0y_1y_2, x_0x_2x_3y_1y_2, x_0x_1x_3y_1y_2, x_0^2x_3y_1y_2, 45x_1^2x_2^2{-}25x_0x_2^3y_2{+}21x_0x_1x_2x_3y_2, 75x_0x_1x_2^2y_2{+}63x_0x_1^2x_3y_2{-}35x_0^2x_2x_3y_2, 3x_0^3x_1y_1{+}5x_0^3x_2y_2, x_0^2x_1x_2^2, x_0^3x_2z_1^2x_0^3x_2y_1y_2, 9x_0^2x_1^2x_3y_2{-}5x_0^3x_2x_3y_2, 25x_0^2x_2^3y_2{-}42x_0^2x_1x_2x_3y_2, 25x_0^3x_2^2y_2{-}14x_0^3x_1x_3y_2, x_0^3x_2^3, x_0^3x_1x_2x_3y_2, x_2^7, x_0x_2^6x_3y_2, \rangle$

En donde los dos primeros ideales son primos y el tercero es un ideal $\langle x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_1, y_2, z_0, z_1\rangle$*−primario.*

3.3.1. Nota final

En una descomposición primaria como se mencionó en la introducción obtenemos dos clases de ideales; las componentes primarias y los ideales primos asociados, y como podemos darnos cuenta tanto en la practica como en la teoría, si conocemos a las componentes primarias, entonces podemos conocer a los ideales primos asociados. Sin embargo, aun conociendo a los ideales primos asociados, no necesariamente se conocen las componentes primarias como ocurre en el caso del ideal jacobiano de una forma trilineal J_A.

Dado que nuestro objetivo fue estudiar la estructura de la descomposición primaria del ideal jacobiano de una forma trilineal diagonal no degenerada en forma acotada J_A, y aunque al final se hizo de una manera general, en la practica nos centramos en el caso $p = 2$.

Como podemos ver en los ejemplos 16 y 15, los ideales que corresponden a los primos asociados encajados en J_A no son muy fácil de entende, sobre todo, por que el número de generadores que los define no son muy manejables a simple vista.

De hecho, conocer la estructura en general de este tipo de ideales hasta el momento sigue siendo un problema abierto. Sin embargo, Boffi, Bruns y Guerrieri dan una conjetura para este tipo de ideales (ver [3]). Ellos por medio de un extenso experimento computacional basado en un sistema para calculos en geometria algebraica y algebra computacional llamado Macaulay conjeturaron que estos ideales son de la siguiente forma:

$$\langle y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, z_0, \ldots, z_{p-1}, I_t(X) \rangle$$

donde $1 \leq t \leq p-1$ y X es la matriz de las segundas derivadas con respecto a los y_i's y a los z_j's dada en la proposición (4).

Por tanto, como podemos ver, esto no es tan ovbio, sin embargo, se han trabajado casos muy particulares como es el caso de $p = 3$ y $m \geq 3$, en donde Guerrieri y Swanson (ver [17]), llegan a una confirmación paricial de tal conjetura, pero aun sigue siendo un problema muy interesante de resolver y que podría llegar a ser tratado más adelante.

Bibliografía

[1] Aginagalde Nafarrete Alexander,Alegría Ezquerra Pedro, Ibañez Torres Rául, Lozano Rojo Álvaro, Stadler Marta, Imaginary una mirada matemática. Real sociedad matemáticas Española.

[2] Atiyah M.F, Macdonald I.G., Introducción al álgebra conmutativa, reverté, s.a.1980.

[3] Boffi G., Bruns W., Guerrieri A., On the Jacobian Ideal of a Trilinear Form, Journal of algebra 197, article no. $JA977129$, 1997, $512 - 534$.

[4] Brodhead Paul, Cummings Malarie, Seidler Cora,Primary Decomposition of ideals Arising from Hankel Matrices, 2000.

[5] Bruns Winfried, Guerrieri Anna, The Dedekind-Mertens Formula and Determinantal Rings, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 127, number 3, March 1999, p. $657 - 663$.

[6] Bruns Winfried, Vetter Udo, Determinantal Rings, Springer-Verlag, 1988.

[7] Buchberger Bruno, Winkler Franz, Gröbner Bases and Applications, Cambridge University Press, London Mathematical society Lecture Note series. 251. 1998

[8] Cox David, Little John, O'Shea Donal, Ideals, Varieties, and Algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, second Edition, Springer-Verlag New York, Inc, 1997.

[9] Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: Singular 3-1-3 — A computer algebra system for polynomial computations. http://www.singular.uni-kl.de (2011).

[10] Eisenbud David, Commutative Algebra with a View Toward Algebra Geometry, Springer-Verlag New York, Inc, 1995.

[11] Eisenbud David, Linear Sections of Determinantal Varieties, American Journal of Mathematics,Vol. 110, No. 3, (Jun. 1988), $541 - 575$.

[12] Gianni Patrizia, Trager Barry, Zacharias Gail, Gröbner Bases and Primary Decomposition of Polynomial Ideals. J.Symbolic Computation, p.$149 - 167$, 1988.

[13] Greul Gert-Martin, Pfister Gerhard, A Singular Introduction to Commutative Algebra,Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2002.

[14] Greul Gert-Martin, Pfister Gerhard, Schoenemann H., Manual, Singular version $3 - 0 - 2$. University of Kaiserslautern, Department of Mathematics and Center for Computer Algebra, $1986 - 2006$.

[15] Guerrieri Anna, Multilinear Forms, Jacobian Ideals and Primary Decompositions, 1991.

[16] Guerrieri Anna, Swanso Irena, Jacobian Ideal of Trilineal Forms: An application of $1-$genericity, Journal of Algebra 226, p.$410-435$, 2000.

[17] Guerrieri Anna, Swanso Irena , On the Ideal of Minors of Matrices of Linear Forms.

[18] Harris Joe, Algebra Geomtetry A First Course, Springer-Verlag New York, Inc, 1992.

[19] Hartshorne Robin, Algebra Geometry, Springer-Verlag New York Inc, 1977.

[20] Huneke Craig, On the Symmetric Algebra of a Module, Journal of algebra 69, p. $113 - 119$, 1981.

[21] Imaginary- trucos avanzados para el programa Surfer. http://www.argentina.imaginary.org.

[22] Lazard D., Ideal Bases and Primary Decomposition: Case of Two variables. J. Symbolic Computation, p. $260 - 270$,1985.

[23] Sausse Alain, A New Approach to Primary Decomposition, J. Symbolic Computation, 1996, p.$1 - 15$.

[24] Shafarevich Igor R. , Basic Algebraic Geometry Varieties in Projective Space 1, Springer-Verlag, 1994.

[25] Smith Karen E., et. al., An Invitation to Algebraic Geometry, Springer, New York, 2000.