



# Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
Mat. Luis Manuel Rivera Gutierrez

## Espacios de Fischer

### Tesis

Para obtener el título de  
Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta

Luis Antonio Ruiz López

Asesor

Dr. Alberto Gerardo Raggi Cárdenas

Morelia Mich.

Febrero del 2011

# Espacios de Fischer

Luis Antonio Ruiz Lopez

27 de enero de 2011



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>5</b>  |
| <b>1. Preliminares</b>  | <b>9</b>  |
| 1.1. Teoría de gráficas . . . . .                                   | 9         |
| 1.2. Formas cuadráticas en característica 2 . . . . .               | 11        |
| 1.3. Producto semidirecto . . . . .                                 | 13        |
| 1.4. Grupos de Coxeter . . . . .                                    | 16        |
| 1.5. Grupos de Weyl . . . . .                                       | 20        |
| 1.6. Teoría de categorías . . . . .                                 | 22        |
| <b>2. Geometrías Finitas</b>  | <b>25</b> |
| 2.1. Conceptos Básicos . . . . .                                    | 25        |
| 2.2. Geometrías sobre campos finitos . . . . .                      | 28        |
| <b>3. Espacios de Fischer</b>                                       | <b>33</b> |
| 3.1. Definición y propiedades básicas . . . . .                     | 33        |
| 3.2. Espacios de Fischer y grupos . . . . .                         | 40        |
| 3.3. Diagramas . . . . .  | 46        |
| <b>4. Diagramas en <math>\mathcal{FI}</math></b>                    | <b>49</b> |
| 4.1. Gráficas que no son diagramas . . . . .                        | 49        |
| 4.2. Diagramas de Dynkin como diagramas en $\mathcal{FI}$ . . . . . | 55        |
| <b>5. Diagramas en <math>\mathcal{SP}</math></b>                    | <b>63</b> |
| 5.1. Representaciones lineales . . . . .                            | 63        |
| 5.2. Clasificación de espacios simplécticos . . . . .               | 72        |
| 5.3. Existencia de diagramas . . . . .                              | 75        |
| <b>Bibliografía</b>   | <b>85</b> |



# Introducción

Desde hace más de 5000 años, la geometría ha jugado un papel esencial en el desarrollo de las matemáticas, tal vez porque la vista es el sentido con el que el ser humano mejor percibe y entiende lo que le rodea. La geometría fue, inicialmente, tratada como una teoría que explicaba un universo plano de acuerdo con el pensamiento euclideo; esta idea cambió apenas hace un poco más de 200 años. Con el nacimiento de otros pensamientos, la geometría dejó de ser una teoría para pasar a ser una forma de pensar, un área de las matemáticas que, según David Hilbert, estudia espacios de puntos, sus líneas (que son conjuntos de puntos), las transformaciones que hay entre dichos espacios y los invariantes que dejan estas transformaciones.

Con este nuevo concepto de geometría, los espacios geométricos no quedan forzados a ser infinitos. Para formalizar la idea de un espacio geométrico discreto se define un *espacio parcialmente lineal*, que es un conjunto de puntos que, únicamente, posee una estructura de colinealidad; las líneas del espacio son conjuntos de, al menos, dos puntos y tales que éstas concurren en, a lo más, un punto. Tener la idea de un espacio geométrico finito no sería provechosa sin tener transformaciones entre ellos. Éstas transformaciones no pueden preservar otra cosa que no sea la colinealidad, ya que es la única estructura que le damos a los espacios parcialmente lineales.

En este momento es cuando surge una pregunta natural ¿para qué estudiar los espacios geométricos discretos, si ya conocemos espacios con mucho más puntos y mucho más estructura? La respuesta es sencilla, el estudio de las estructuras algebraicas finitas es fundamental para el entendimiento de gran parte de las matemáticas modernas, y los espacios geométricos finitos aparecen de forma natural en muchas de estas estructuras, por ejemplo, a partir de los espacios vectoriales sobre campos finitos podemos obtener espacios proyectivos con algunas de las propiedades que tenemos en los espacios proyectivos sobre los reales. Un hecho parecido fue descubierto por Bernd Fischer; gran parte de su estudio acerca de los *grupos de 3-transposiciones* (donde los clasificó y encontró tres de los grupos simples esporádicos) se basa en estudiar las estructuras geométricas que en estos se esconden (en su *conjunto de 3-transposiciones*), y uso la palabra “esconden” porque no es tan inmediato asociarle dicha geometría.

Una vez que Fischer tuvo tan genial idea sobre la geometrización del

conjunto de 3-transposiciones de un grupo de 3-transposiciones, nos queda estudiar a estos espacios que, sin duda, resultan muy interesantes dado que la estructura geométrica que poseen es particularmente bonita y sencilla. Es ese el objetivo de esta tesis, estudiar la geometría de los *espacios de Fischer*, dejando un poco de lado las propiedades algebraicas que estos nos dan de los grupos en los que están inmersos; estos espacios son interesantes por sí mismos. Se caracterizan (o bien, se definen) por tener, únicamente, planos *afines sobre  $\mathbb{F}_3$*  o *duales de afines sobre  $\mathbb{F}_2$* .

En el primer capítulo daremos un repaso de la teoría que se utilizará en los capítulos posteriores; muchos de los resultados que usaremos en los últimos capítulos no entran dentro del temario de los cursos básicos de licenciatura. Daremos algunas definiciones básicas de la teoría de gráficas y la teoría de Categorías; diremos qué son los grupos de Coxeter y los grupos de Weyl, para posteriormente ver algunos grupos de 3-transposiciones como grupos de estos estilos, y hablaremos del producto semidirecto y de las formas cuadráticas sobre campos de característica 2, que utilizaremos en algunas construcciones y resultados posteriores. Un lector que tenga conocimientos básicos de algún tema puede hacer caso omiso de éste y pasar al siguiente.

En el segundo capítulo se presentará una breve reseña de lo que son las geometrías discretas, o lo que llamamos espacios parcialmente lineales, en particular nos van a interesar más los espacios geométricos finitos cuyas líneas constan, exactamente, de tres puntos, así que en este capítulo casi todos los ejemplos de espacios geométricos serán de este estilo. Definiremos, por supuesto, a los morfismos entre espacios parcialmente lineales y posteriormente generalizaremos algunas construcciones que se tienen de la geometría sobre los reales, como lo son los espacios proyectivos, los espacios afines y los espacios duales; estas construcciones nos darán las bases de lo que, posteriormente, diremos que es un espacio de Fischer.

El tercer capítulo está dedicado a estudiar a los espacios de Fischer en general. Intencionalmente llegaremos a los espacios de Fischer mediante geometría y no mediante grupos de 3-transposiciones, para poder apreciar mejor sus propiedades geométricas. Primero definiremos ciertas funciones de un espacio parcialmente lineal en sí mismo, que nacen de forma relativamente natural; a éstas las llamamos *funciones  $\gamma$* . Posteriormente demostraremos que estas funciones son realmente morfismos cuando el espacio parcialmente lineal es de Fischer, así podremos usar esto y algunas propiedades más, para probar varios resultados relativos a la geometría de los espacios de Fischer. Después diremos qué es una *inmersión* de un espacio parcialmente lineal en un grupo, para con esto dar el resultado principal del capítulo: es equivalente que un espacio parcialmente lineal sea de Fischer, que las funciones  $\gamma$  sean automorfismos y que un espacio de Fischer esté inmerso en un grupo. De esta forma es natural que los grupos donde los espacios de Fischer estén inmersos sean de 3-transposiciones y que todo grupo de 3-transposiciones tenga inmerso un espacio de Fischer. Por último introduciremos un con-

cepto parecido al de una base de un espacio vectorial (aunque más débil, categoricamente), los llamamos *diagramas*, que están dados mediante gráficas. Un par de preguntas interesantes son ¿cuáles gráficas son diagramas? y ¿qué espacios tienen diagramas? Es por esto que los diagramas para los espacios de Fischer, en distintas categorías, serán nuestro objeto de estudio en los dos capítulos posteriores.

En el cuarto capítulo estudiaremos los diagramas en la categoría completa de los espacios de Fischer. Probaremos que los espacios que tienen planos afines no pueden tener diagramas en ninguna categoría que contenga a todos los *espacios simplécticos* (los espacios con únicamente planos duales afines), de esta forma eliminaremos muchas posibilidades para que una gráfica sea diagrama. Posteriormente probaremos que los grupos de Coxeter, asociados a las gráficas restantes (los diagramas de Dynkin), son de 3-transposiciones; esto implica que estas gráficas son diagramas para los espacios inmersos en dichos grupos.

En el quinto y último capítulo estudiaremos los diagramas en la categoría de espacios simplécticos. Primero estudiaremos las representaciones lineales de un espacio simpléctico, es decir, las funciones del espacio en un espacio vectorial que preservan información acerca de la colinealidad. Trabajaremos inicialmente con espacios *reducidos* (los espacios tales que, dada cualquier pareja de puntos, existe un tercero colineal a uno y no al otro) y probaremos que la cantidad de puntos colineales a una pareja de puntos no colineales es independiente de la pareja; con este resultado y un teorema dado por Hall (del cual no incluiremos demostración) daremos una clasificación de los espacios simplécticos: los que tienen la *propiedad de Desargues* y los que tienen la *propiedad de Reye*. Por último usaremos la clasificación dada para demostrar, por separado, que todos los espacios tienen diagrama en la categoría de espacios simplécticos.





# Capítulo 1

## Preliminares

El estudio de los espacios de Fischer inició hace no mucho tiempo, cuando Bernd Fischer los introdujo a mediados del siglo XX para el estudio y clasificación de los grupos de 3-transposiciones. Citando a Aschbacher “Fischer no usó (para la prueba del Teorema de Fischer) nada de la maquinaria sofisticada del momento. Su prueba requería un poco más que teoría elemental de grupos y de geometrías finitas, combinando todo de una forma nueva y original”.

La teoría utilizada en la prueba del Teorema de Fischer es, para nosotros, un poco menos elemental que para Aschbacher y el mismo Bernd Fischer. Es por esto que dedicaremos el primer capítulo a introducir los conceptos elementales y a dar algunos resultados (sin demostración) necesarios para el estudio de los espacios de Fischer.

### 1.1. Teoría de gráficas

**Definición 1.1.1.** Una *gráfica* es una pareja  $\Gamma = (V, A)$ , donde  $V$  es un conjunto cuyos elementos llamaremos *puntos* o *vértices*, y  $A$  un conjunto de parejas no ordenadas de puntos distintos de  $V$  a las que llamaremos *aristas*. Si  $\{a, b\}$  es una arista diremos que  $a$  y  $b$  son *adyacentes*. Una gráfica con  $n$  vértices será *numerada* si a cada uno de éstos se le asocia un número distinto del 1 al  $n$ . Una *subgráfica*  $\Lambda$  de  $\Gamma$  es una pareja  $\Lambda = (V', A')$  donde  $V' \subset V$  y  $A' \subset A$  y tal que  $\Lambda = (V', A')$  es, por sí misma, una gráfica. Denotaremos que  $\Lambda$  es subgráfica de  $\Gamma$  como  $\Lambda \subset \Gamma$ .

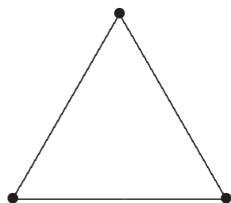
La definición es bastante sugestiva, de hecho, nunca daremos los puntos y las aristas mediante conjuntos, sino haremos un dibujo, trazando una línea entre vértices adyacentes. (Para nuestros objetivos, no será necesario definir gráficas con aristas múltiples o donde una arista vaya de un punto en sí mismo.)

**Definición 1.1.2.** Sea  $\Gamma = (V, A)$  una gráfica.

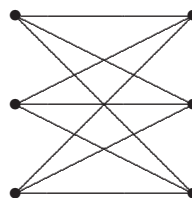
- Un *camino* en  $\Gamma$  es una sucesión de vértices  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , donde  $x_i$  y  $x_{i+1}$  son adyacentes para toda  $1 \leq i < n$ .
- Decimos que  $\Gamma$  es *conexa* si, para cualesquiera  $x, y \in V$  existe un camino  $x_1, x_2, \dots, x_n$  con  $x = x_1$  y  $y = x_n$ .
- Decimos que un camino  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es un *ciclo* si  $x_1 = x_n$ .
- Decimos que  $\Gamma$  es un *árbol* si es una gráfica conexa y sin ciclos.

**Ejemplos 1.1.3.** Dos gráficas.

- Un ciclo de 3 vértices.



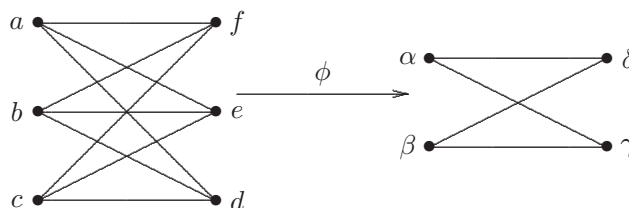
- La gráfica bipartita  $K_{(3,3)}$ .



**Definición 1.1.4.** Sean  $\Gamma = (V, A)$  y  $\Lambda = (V', A')$  gráficas. Un *morfismo*  $\phi : \Gamma \rightarrow \Lambda$  de gráficas es una función  $\phi : V \rightarrow V'$  tal que si  $x, y \in V$  son adyacentes, entonces  $\phi(x)$  y  $\phi(y)$  también lo son, y si  $x$  y  $y$  no son adyacentes entonces  $\phi(x)$  y  $\phi(y)$  tampoco lo son (es decir, la función  $\phi$  manda puntos adyacentes en puntos adyacentes y puntos no adyacentes en puntos no adyacentes).

En la definición anterior podemos notar que si un morfismo  $\phi$  es tal que  $\phi(x) = \phi(y)$ , entonces  $x$  y  $y$  no pueden ser adyacentes dado que  $\phi(x)$  no puede ser adyacente a sí mismo.

**Ejemplo 1.1.5.** Un morfismo  $\phi$  de la gráfica  $K_{(3,3)}$  a la gráfica bipartita  $K_{(2,2)}$ .



Es suficiente darnos cuenta de que, para  $K_{(3,3)}$ , cada punto del conjunto  $\{a, b, c\}$  está conectado con todos los puntos del conjunto  $\{d, e, f\}$  (precisamente por ser bipartita), y lo mismo para  $K_{(2,2)}$ , así que, definiendo a  $\phi$  de forma que  $\phi(\{a, b, c\}) \subset \{\alpha, \beta\}$  y  $\phi(\{d, e, f\}) \subset \{\gamma, \delta\}$ , obtenemos un morfismo de gráficas.

Dada una gráfica  $\Gamma = (V, A)$  es en ocasiones útil pensarla como el conjunto de sus vértices, para así escribir  $x \in \Gamma$  en lugar de  $x \in V$ , para  $x$  un vértice de  $\Gamma$ .

## 1.2. Formas cuadráticas en característica 2

**Definición 1.2.1.** Sea  $\mathbb{F}$  un campo y  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$ . Una *forma bilineal en  $\mathcal{V}$*  es una función  $f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  que es lineal en cada coordenada, es decir

- $f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
- $f(u, v + w) = f(u, v) + f(u, w)$
- $f(\lambda u, v) = f(u, \lambda v) = \lambda f(u, v)$

para todos  $u, v, w \in \mathcal{V}$ ,  $\lambda \in \mathbb{F}$ .

A la forma bilineal se le llamará *simétrica* si  $f(u, v) = f(v, u)$  para cualesquiera  $u, v \in \mathcal{V}$ , y es *simpléctica*  $f(v, v) = 0$  para todo  $v \in \mathcal{V}$ .

Nótese que para definir una forma bilineal en un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  únicamente es necesario definirla en una base de  $\mathcal{V}$ , es decir, si  $\{\beta_i\}_{i \in I}$  es una base para  $\mathcal{V}$ , es suficiente definir  $f(\beta_i, \beta_j)$  para todos los  $i, j \in I$ .

Una *forma cuadrática* sobre  $\mathcal{V}$  es una función  $q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  tal que  $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$  para cualesquiera  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $v \in \mathcal{V}$  y que, además, la función definida por  $f(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)$  es una forma bilineal en  $\mathcal{V}$ . Teniendo definida en  $\mathcal{V}$  una forma bilineal  $f$  es natural asociarle la forma cuadrática  $q(v) = f(v, v)$ . Si dicha forma bilineal es simétrica podemos recuperarla a partir de la forma cuadrática mediante la siguiente ecuación:

$$f(u, v) = 2^{-1}(q(u + v) - q(u) - q(v)). \quad (1.1)$$

Esto nos trae serios problemas en característica 2 así que, en este caso, se hará distinto.

**Definición 1.2.2.** Sean  $\mathbb{F}$  un campo de característica 2,  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$  y  $f$  una forma bilineal simétrica en  $\mathcal{V}$ . Una *forma cuadrática asociada a  $f$*  es una función  $q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}$  tal que

$$f(u, v) = q(u + v) + q(u) + q(v). \quad (1.2)$$

Y además,  $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$  para cualesquiera  $\lambda \in \mathbb{F}$ ,  $v \in \mathcal{V}$ .

Con la ecuación anterior y la que ya teníamos para los otros casos, podemos darnos cuenta que la forma cuadrática define a la forma bilineal, pero el sentido opuesto no es siempre cierto en característica 2, de hecho, podemos obtener una forma cuadrática distinta por cada asignación de ceros y unos a los básicos.

Sea  $\Gamma$  una gráfica con  $n$  vértices y  $\mathbb{F}$  un campo. Llamaremos  $\mathbb{F}\Gamma$  al espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}$  con base los vértices de  $\Gamma$ , es decir,  $\mathbb{F}\Gamma = \{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n : a_i \in \mathbb{F}, x_i \in \Gamma, x_i \neq x_j, 1 \leq i < j \leq n\} \cong \mathbb{F}^n$ .

Cuando  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_2$  asociamos a  $\mathbb{F}_2\Gamma$  la siguiente forma bilineal:

**Definición 1.2.3.** Sea  $\Gamma$  una gráfica y  $f : \mathbb{F}_2\Gamma \times \mathbb{F}_2\Gamma \rightarrow \mathbb{F}_2$  la forma bilineal definida en la base de vértices por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ y } y \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si no lo son} \end{cases}$$

y la extendemos “bilinealmente” a todo el espacio.

A  $f$  le llamaremos *la forma bilineal asociada a  $\mathbb{F}_2\Gamma$* .

**Ejemplo 1.2.4.** Sea  $\Gamma$  una gráfica y  $f$  la forma bilineal asociada a  $\mathbb{F}_2\Gamma$ . Para tener una forma cuadrática asociada a  $f$  es suficiente asignar a cada vértice un 0 o un 1 y así extenderla a todo el espacio mediante la ecuación 1.2.

Dada una forma bilineal  $f$  en  $\mathcal{V}$  diremos que dos puntos,  $u, v \in \mathcal{V}$  son *ortogonales* si  $f(u, v) = 0$ , y lo denotaremos como  $u \perp v$ , así también denotaremos como  $v^\perp$  al conjunto de puntos ortogonales a  $v$ .

**Definición 1.2.5.** Sean  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial y  $f$  una forma bilineal en  $\mathcal{V}$ . El *radical* de  $f$  es el conjunto de puntos ortogonales a todo  $\mathcal{V}$ , es decir,  $rad(f) = \{u \in \mathcal{V} : f(u, v) = 0, \text{ para todo } v \in \mathcal{V}\}$ . Diremos que  $f$  es *no degenerada* si  $rad(f) = \{0\}$ .

Sea  $q$  una forma cuadrática asociada a  $f$ . El *radical* de  $q$  está formado por los vectores  $v \in rad(f)$  tales que  $q(v) = 0$ . De la misma manera diremos que  $q$  es *no degenerada* si  $rad(q) = \{0\}$ .

**Proposición 1.2.6.** Sean  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{F}$ -espacio vectorial y  $f$  una forma bilineal en  $\mathcal{V}$ . Sea  $\mathcal{U}$  un subespacio de  $rad(f)$ , entonces  $f$  induce una forma bilineal  $\tilde{f}$  sobre  $\mathcal{V}/\mathcal{U}$  que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} \times \mathcal{V} & \xrightarrow{p} & \mathcal{V}/\mathcal{U} \times \mathcal{V}/\mathcal{U} \\ \downarrow f & \searrow \tilde{f} \circ p & \\ \mathbb{F} & & \end{array}$$

Donde  $p$  es la proyección natural de  $\mathcal{V}$  en  $\mathcal{V}/\mathcal{U}$ .

Sea  $q$  una forma cuadrática asociada a  $f$ , entonces si  $\mathcal{U}$  es subespacio de  $rad(q)$ , existe una forma cuadrática  $\tilde{q}$  sobre  $\mathcal{V}/\mathcal{U}$  tal que  $\tilde{q} = q \circ p$ . ■

**Proposición 1.2.7.** Sean  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial sobre un campo de característica 2,  $f$  una forma bilineal en  $\mathcal{V}$  y  $q$  una forma cuadrática asociada a  $f$ . Si  $q$  es no degenerada entonces  $dim(rad(f)) \leq 1$ .

*Demostración.* Supongamos que  $\dim(\text{rad}(f)) > 1$ ; entonces tomemos  $u, v \in \text{rad}(f)$  linealmente independientes. Tenemos que  $q(u) = q(v) = 1$  dado que  $\text{rad}(q) = \{0\}$  y, por la ecuación 1.2,  $0 = f(u, v) = q(u + v) + q(u) + q(v)$ ; así,  $q(u + v) = q(u) + q(v) = 0$  de donde,  $u + v \in \text{rad}(q)$ , lo que contradice el hecho de que  $\text{rad}(q) = \{0\}$ . ■

### 1.3. Producto semidirecto

Algunos ejemplos de grupos que daremos más adelante, son más fáciles de entender si los construimos como el producto semidirecto de dos grupos. El producto semidirecto es una generalización del producto directo; serán iguales como conjunto, mas no como grupo. Los resultados no demostrados que veremos en esta sección se encuentran en [6].

**Definición 1.3.1.** Sean  $N$  y  $H$  grupos y sea  $\text{Aut}(N)$  es el grupo de automorfismos de  $N$ . Si  $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$  es un homomorfismo de grupos, decimos que  $H$  actúa en  $N$  a través de  $\phi$  y que  $H$  es un *grupo operador* en  $N$ ; al homomorfismo  $\phi$  lo llamamos una *acción* de  $H$ . Denotaremos  $(\phi(h))(n)$  por  ${}^h n$ .

En esta definición, la acción  $\phi$  de  $H$  no requiere ser un homomorfismo especial. En particular,  $\phi$  puede ser el homomorfismo trivial, es decir,  $\phi(h) = 1$  para todo  $h \in H$ , así, cualquier grupo puede actuar en un grupo  $N$ .

**Proposición 1.3.2.** Sean  $N$  y  $H$  grupos y  $\phi$  una acción de  $N$  en  $H$ . Sea  $G = N \times H$  el producto cartesiano de  $N$  y  $H$ . Definimos la operación  $\bullet : G \times G \rightarrow G$  como sigue

$$(n, h) \bullet (n', h') = (n({}^h n'), hh').$$

Entonces  $G$ , con la operación  $\bullet$ , es un grupo. ■

**Definición 1.3.3.** Al grupo  $G$  construido en la proposición anterior lo llamamos el *producto semidirecto* de  $N$  y  $H$  con respecto a la acción  $\phi$ . Denotaremos a  $G$  como  $N \rtimes_{\phi} H$ .

En el caso de que  $\phi$  sea la acción trivial, tenemos que  $N \rtimes_{\phi} H$  es, simplemente, el producto directo  $N \times H$ .

**Proposición 1.3.4.** Sean  $N$  y  $H$  grupos y sea  $N \rtimes_{\phi} H$  el producto semidirecto de  $N$  y  $H$  con respecto a la acción  $\phi$  de  $H$  en  $N$ . Sean  $\bar{H} = \{(1, H) \in N \rtimes_{\phi} H : h \in H\}$  y  $\bar{N} = \{(n, 1) \in N \rtimes_{\phi} H : n \in N\}$ , entonces,  $N \rtimes_{\phi} H = \bar{N}\bar{H}$ ,  $\bar{N}$  es normal en  $N \rtimes_{\phi} H$  y, además,  $\bar{H}$  es normal en  $N \rtimes_{\phi} H$  si, y sólo si,  $\phi$  es la acción trivial. ■

La siguiente proposición puede entenderse como la propiedad universal del producto semidirecto.

**Proposición 1.3.5.** Sean  $N$  y  $H$  grupos. Si existe un grupo  $G$  y morfismos  $\varphi : H \rightarrow G$ ,  $\psi : N \rightarrow G$  que “respeten la acción de  $H$  en  $N$ ”, es decir, que cumpla  $\psi(hn) = \varphi(h)\psi(n)\varphi(h)^{-1}$ , entonces existe un único morfismo  $\rho : N \rtimes_{\phi} H \rightarrow G$  que hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 N & \xrightarrow{i'} & N \rtimes_{\phi} H & \xleftarrow{i} & H \\
 & \searrow \psi & \downarrow \rho & & \swarrow \varphi \\
 & & G & & 
 \end{array}$$

Donde  $i$  e  $i'$  denotan las “inclusiones” de  $H$  y  $N$ , respectivamente, como lo hicimos en la proposición anterior. ■

Para dar los ejemplos de grupos dados por productos semidirectos, que utilizaremos posteriormente, primero es necesario dar algunas definiciones.

**Definición 1.3.6.** ■ Una *matriz de permutación* es una matriz cuadrada tal que, para cada fila y para cada columna de la matriz, sólo una entrada vale 1 y el resto de las entradas vale 0.

- Una *matriz de permutación con signo* es una matriz cuadrada tal que, para cada fila y para cada columna de la matriz, sólo una entrada vale 1 ó  $-1$  y el resto de las entradas vale 0.

**Proposición 1.3.7.** 1 Sea  $Sim_n$  el grupo simétrico sobre  $[n]$  ( $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ ) y sea  $MP_n$  el conjunto de las matrices de permutación de tamaño  $n$ , entonces  $MP_n$  es un grupo con la multiplicación usual de matrices y, además, es isomorfo a  $Sim_n$ .

- 2 Sea  $MP_n^{sign}$  el conjunto de las matrices de permutación con signo de tamaño  $n$ , entonces  $MP_n^{sign}$  es un grupo con la multiplicación usual de matrices.

*Demostración.* Tenemos que la matriz identidad es una matriz de permutación; que dada una matriz de permutación, su inversa es su matriz transpuesta y, la multiplicación de matrices de permutación es otra matriz de permutación (este hecho quedará claro al mostrar cómo se efectúa la multiplicación). Por lo tanto,  $MP_n$  es un grupo con la multiplicación usual de matrices. Sea  $\tau \in Sim_n$  y sea  $M_{\tau} = (m_{i,j})$  la matriz definida por

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = \tau(i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es decir, en la columna  $i$ , la entrada que vale 1 es la correspondiente a la columna  $\tau(i)$ . Sea  $\phi : Sim_n \rightarrow MP_n$  definida por  $\phi(\tau) = M_{\tau}$ . Para demostrar que  $\phi$  es un homomorfismo de grupos, sean  $\sigma, \tau \in Sim_n$ , entonces la multiplicación de las matrices  $M_{\sigma}M_{\tau}$  se da de la siguiente forma

$$\sigma(\tau(i)) \begin{pmatrix} & 1 & 2 & \cdots & \tau(i) & \cdots & n \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ n & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \tau(i) & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ n & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en la columna  $i$ -ésima de la matriz que resulta al hacer el producto, la entrada con valor uno es la correspondiente al renglón  $\sigma(\tau(i))$ , por lo tanto esta matriz es la correspondiente a la permutación  $\sigma\tau$ .

La demostración de que  $MP_n^{sign}$  es un grupo es análoga. ■

**Proposición 1.3.8.** *El producto semidirecto  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes Sim_n$  es isomorfo a  $MP_n^{sign}$ .*

*Demostración.*  $Sim_n$  actúa de manera natural en  $\mathbb{Z}_2^n$  permutando las coordenadas, es decir, dados  $\tau \in S_n$ ,  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ , definimos  $\tau(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_{\tau^{-1}(1)}, x_{\tau^{-1}(2)}, \dots, x_{\tau^{-1}(n)})$ . Definamos los siguientes morfismos, sea  $\varphi : Sim_n \rightarrow GL_n(\mathbb{F}_3)$  definida por  $\varphi(\tau) = M_\tau$ ; sea  $\phi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{F}_3$  definida por  $\phi(0) = 1$  y  $\phi(1) = -1$ ; y sea  $\psi : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow GL_n(\mathbb{F}_3)$  definida por  $\psi(v) = M_v$  donde

$$M_v = \begin{pmatrix} \phi(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(x_2) & \cdots & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_n) \end{pmatrix}.$$

Por la proposición anterior,  $\varphi$ , es un morfismo y es fácil ver que  $\phi$  y  $\psi$  también lo son; además, los tres son inyectivos. Resta demostrar que  $\varphi$  y  $\psi$  respetan la acción de  $Sim_n$  en  $\mathbb{Z}_2^n$ . Sean  $\tau \in Sim_n$  y  $v = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}_2^n$ , entonces  $(M_\tau M_v) M_{\tau^{-1}v} =$

$$\begin{pmatrix} & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots & n \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ \tau(i) & 0 & 0 & \cdots & \phi(x_i) & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ n & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 & 2 & \cdots & \tau(i) & \cdots & n \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ i & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ n & & & & & & 0 \end{pmatrix} =$$



$$\tau(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \tau(i) & \cdots & n \\ 1 & & & 0 & & \\ 2 & & & 0 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \tau(i) & 0 & 0 & \cdots & \phi(x_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \\ n & & & 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \phi(x_{\tau^{-1}(1)}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi(x_{\tau^{-1}(2)}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi(x_{\tau^{-1}(n)}) \end{pmatrix} =$$

$$M_{(x_{\tau^{-1}(1)}, x_{\tau^{-1}(2)}, \dots, x_{\tau^{-1}(n)})} = \psi^{\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Entonces, por la proposición 1.3.5 existe un morfismo  $\rho : \mathbb{Z}_2^n \rtimes Sim_n \rightarrow GL_n(\mathbb{F}_3)$  que extiende a  $\varphi$  y a  $\psi$ . Además, la imagen de  $\rho$  contiene al subgrupo  $G$  generado por  $\{M_\tau : \tau \in Sim_n\} \cup \{M_v : v \in \mathbb{F}_2^n\}$ , el cual, claramente, contiene a las matrices de permutación con signo, dado que cada  $M_v$  es una matriz elemental que, al multiplicar por izquierda a una matriz de permutación, invierte los signos de los renglones donde  $M_v$  presenta un  $-1$ . Ahora, tenemos que  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes Sim_n$  tiene  $n!2^n$  que es, precisamente, la cantidad de matrices de permutación con signo (hay  $n!$  matrices de permutación y  $2^n$  formas de escoger subconjuntos de renglones para cambiar el 1 por  $-1$ ), así que  $\rho$  es inyectiva y su imagen es el grupo  $MP_n^{sign}$ . ■

## 1.4. Grupos de Coxeter

El material expuesto en esta sección puede encontrarse en [2] y [4].

**Definición 1.4.1.** Sean  $F$  un grupo y  $X \subset F$ . Diremos que  $F$  es libre en  $X$  (o que  $F$  es libre con base  $X$ ) si dados  $G$  un grupo y  $f : X \rightarrow G$ , existe un único homomorfismo  $\tilde{f} : F \rightarrow G$  que extiende a  $f$ , es decir, que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F \\ \downarrow f & \searrow \tilde{f} \circ i & \downarrow \tilde{f} \\ G & & \end{array}$$

En el que  $i$  denota la inclusión de  $X$  en  $F$ . La condición de la unicidad de la extensión  $\tilde{f}$  es equivalente a decir que  $\langle X \rangle = F$ .

No todo grupo es libre, de hecho, los grupos libres están únicamente determinados (salvo isomorfismo) por la cardinalidad del conjunto donde es libre, y son isomorfos al grupo que construiremos a continuación. Con esto tenemos derecho a llamar  $\mathcal{F}_n$  al grupo libre con una base de  $n$  elementos.

**Definición 1.4.2.** Sea  $X$  un conjunto y  $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$  un conjunto ajeno a  $X$ , donde  $x$  y  $x^{-1}$  están en una relación biyectiva.

- Una *palabra* en  $X$  es una sucesión finita  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  donde  $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{1\}$  para todo  $1 \leq i < n$  y  $a_n \neq 1$ . La palabra es *reducida* si  $w = 1$  o bien,  $a_i \in X \cup X^{-1}$  para todo  $1 \leq i \leq n$  y además,  $x$  y  $x^{-1}$  nunca aparecen juntos.
- Una palabra  $v$  es *subpalabra* de una palabra  $w$  si  $v = 1$  o bien  $v$  es una subsucesión de elementos consecutivos de  $w$ .
- Si  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  es una palabra, entonces su *inverso* es la palabra  $w^{-1} = a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$  donde si  $x^{-1} \in X^{-1}$  entonces  $(x^{-1})^{-1} = x$ .

Dadas  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  y  $v = b_1 b_2 \dots b_m$  reducidas, hay una multiplicación natural “concatenando” palabras (es decir,  $wv = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$ ) pero ésta podría no resultar una palabra reducida. Esto puede arreglarse haciendo las cancelaciones necesarias hasta obtener una palabra reducida. La formalidad de la definición implica una aburrida lectura, así que apelaremos a la buena intuición del lector. Este nuevo producto de palabras reducidas se llama *yuxtaposición*.

**Teorema 1.4.3.** Sean  $X$  un conjunto y  $F$  el conjunto de palabras reducidas en  $X$ . Entonces  $F$  es un grupo con la *yuxtaposición*. Además  $F$  es libre en  $X$ . ■

**Corolario 1.4.4.** Todo grupo es cociente de un grupo libre. ■

Los grupos libres, como ya vimos, comparten con los espacios vectoriales esta propiedad de poseer una base, es decir, elementos que podemos mandar con una función a cualquier parte de un grupo y extender esta función a un homomorfismo. Para grupos en general no existe algo tan versátil, pero sí podemos tener otra versión (más débil) de esta propiedad, como veremos a continuación.

**Definición 1.4.5.** Sean  $X$  un conjunto y  $W$  una familia de palabras en  $X$ . Sean  $F$  el grupo libre con base  $X$  y  $R$  el subgrupo normal de  $F$  generado por  $W$ . Si  $G \cong F/R$  diremos que  $G$  tiene *generadores*  $X$  y *relaciones*  $W$ , y llamaremos a la pareja  $(X: W)$  una *presentación* de  $G$ .

Con esto y el corolario 1.4.4 tenemos que todo grupo tiene presentación.

En ocasiones escribiremos las relaciones en forma de ecuaciones en lugar de escribirlas como palabras, por ejemplo, si  $G = (\{a, b\} : a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1})$ , también podremos escribir  $G = (\{a, b\} : a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba)$ .

**Teorema 1.4.6.** *Sea  $G$  un grupo. Entonces  $(X: W)$  es una presentación de  $G$  si, y sólo si, dado cualquier  $H$  grupo y  $f : X \rightarrow H$  función que “respete las relaciones”, es decir, tal que dado  $w \in W$ , si  $w = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \dots a_n^{\varepsilon_n}$ , con  $a_i \in X$  y  $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ , entonces  $f(w) = f(a_1)^{\varepsilon_1} f(a_2)^{\varepsilon_2} \dots f(a_n)^{\varepsilon_n} = 1$ , tenemos que  $f$  se extiende a un homomorfismo de grupos  $\tilde{f} : G \rightarrow H$ . ■*

Es útil tener esta nueva forma de dar un grupo, sobre todo cuando se quiere hacer una construcción sencilla para que éste cumpla ciertas propiedades. Cuando un grupo  $G$  tenga una presentación  $(X: W)$ , escribiremos a  $G$  como  $grp(X: W)$ , refiriéndonos así a un grupo cuya presentación es  $(X: W)$  (el grupo es único salvo isomorfismo).

Ahora estamos en posición de introducir el grupo de Coxeter.

**Definición 1.4.7.** ■ Una *matriz de Coxeter* de tamaño  $n$  es una matriz simétrica  $M = (m_{i,j})$  con entradas enteras, cuyos valores en la diagonal principal son todos 1 ( $m_{i,i} = 1$  para toda  $i$ ) y fuera de ésta son 2 o 3 ( $m_{i,j} \geq 2$  donde  $i \neq j$ ).

- Dada una matriz de Coxeter  $M = (m_{i,j})$ , la *gráfica de Coxeter* asociada a  $M$  es una gráfica numerada donde los vértices  $i$  y  $j$  están unidos por  $m_{i,j} - 2$  aristas.

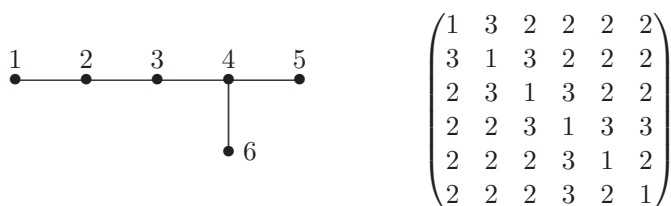
En la teoría general de grupos de Coxeter, para la definición de matriz de Coxeter no se pide que todas las entradas sean menores o iguales a 3 pero, para nuestros objetivos (y para que la definición de gráfica dada en la sección anterior nos sirva en la definición de gráfica de Coxeter), no será necesario incluir dichas matrices en la definición.

**Ejemplos 1.4.8.** Dos gráficas de Coxeter y sus matrices asociadas.

- La gráfica con 6 vértices en la que los pares consecutivos son adyacentes (usualmente llamada  $A_6$ ), tiene como matriz de Coxeter a

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
 \hline
 & & & & & & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

- La matriz de Coxeter correspondiente a la gráfica mostrada en el dibujo (usualmente llamada  $E_6$ ) es



**Definición 1.4.9.** Sea  $M = (m_{i,j})$  una matriz de Coxeter de tamaño  $n$ . Un sistema de Coxeter asociado a  $M$  es una pareja  $(G, X)$ , donde  $X = \{x_i : 1 \leq i \leq n\} \subset G$  y  $G = \text{grp}(X : \{(x_i x_j)^{m_{i,j}} : 1 \leq i, j \leq n\})$ .

Un grupo  $G$  se llama *grupo de Coxeter* si existe  $X \subset G$  tal que  $(G, X)$  es un sistema de Coxeter.

Observemos que, si  $M = (m_{i,j})$  es una matriz de Coxeter, entonces  $(G, X)$  y  $(G', X')$  son dos sistemas de Coxeter asociados a  $M$  si y sólo si  $G \cong G'$  y el isomorfismo manda a  $X$  en  $X'$ .

**Ejemplo 1.4.10.** Una gráfica de Coxeter y su sistema asociado.

Consideremos la siguiente gráfica



Sea  $X = \{(i \ i + 1) : 1 \leq i \leq n\} \subset \text{Sim}_{n+1}$ ; entonces,  $(\text{Sim}_{n+1}, X)$  es un sistema de Coxeter asociado a  $A_n$ .

*Demostración.* Sea  $G_n = \text{grp}(\{\tau_1, \dots, \tau_n\} : \tau_i^2 = (\tau_i \tau_{i+1})^3 = (\tau_i \tau_j)^2 = 1, \text{ para } |i - j| > 1)$ . Asociamos al  $i$ -ésimo vértice de la gráfica la transposición  $(i \ i + 1)$ , es decir, definamos  $f : \{\tau_1, \dots, \tau_n\} \rightarrow \text{Sim}_{n+1}$  por  $f(\tau_i) = (i \ i + 1)$ . Tenemos que  $f$  respeta las relaciones, así que existe un homomorfismo  $\tilde{f} : G_n \rightarrow \text{Sim}_{n+1}$  que extiende a  $f$  y, como  $\langle \{(i \ i + 1) : 1 \leq i \leq n\} \rangle = \text{Sim}_{n+1}$ ,  $\tilde{f}$  es suprayectivo.

Ahora es suficiente demostrar que  $|G_n| \leq |\text{Sim}_{n+1}|$ ; procederemos por inducción. Para  $n = 1$  se cumple trivialmente. Supongamos que para cierta  $n \geq 1$  tenemos que  $G_n \cong S_{n+1}$ , entonces sólo es necesario demostrar que  $|G_n : G_{n+1}| \leq n + 1$  ( $G_n = \langle \tau_2, \dots, \tau_{n+1} \rangle < G_{n+1}$ ). Sea  $H_1 = G_n$  y para  $1 \leq i \leq n$ , sea  $H_{i+1} = H_i \tau_i$ . Sea  $u_i = \tau_1 \dots \tau_{i-1}$ ; por definición,  $H_i = H u_i$ . Con esto tenemos que  $H_{i+1} \tau_i = H_i$ , dado que  $\tau_i^2 = 1$ . Ahora, si  $j \geq i + 1 > 1$  tenemos la relación  $\tau_i \tau_j = \tau_j \tau_i$ , así que  $u_i \tau_j = \tau_j u_i$ ; entonces  $H_i \tau_j = H u_i \tau_j = H \tau_j u_i = H u_i = H_i$ . Por último, para  $j < i - 1$  escribamos a  $u_i = u_j \tau_j \tau_{j+1} v$ , donde  $v = \tau_{j+2} \dots \tau_{i-1}$ , y así  $\tau_j v = v \tau_j$ , además, como  $(\tau_j \tau_{j+1})^3 = 1$ ; entonces  $\tau_j \tau_{j+1} \tau_j = \tau_{j+1} \tau_j \tau_{j+1}$ , por lo tanto tenemos que  $H_i \tau_j = H u_i \tau_j = H u_j \tau_j \tau_{j+1} v \tau_j = H u_j (\tau_j \tau_{j+1} \tau_j) v = H u_j (\tau_{j+1} \tau_j \tau_{j+1}) v = H \tau_{j+1} u_j \tau_j \tau_{j+1} v = H u_i = H_i$ . Así tenemos que no hay más clases laterales derechas (dado que  $G_{n+1} = \langle \tau_1, \dots, \tau_{n+1} \rangle$ ), así que  $|G_n : G_{n+1}| \leq n + 1$ . ■

**Teorema 1.4.11.** *Sea  $(G, X)$  un sistema de Coxeter y sea  $\Gamma$  su gráfica asociada. Si  $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$ , con  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  no vacías y tales que no hay aristas entre ellas, entonces  $X$  es la unión de dos conjuntos no vacíos  $X_1$  y  $X_2$  tales que  $(G_1 = \langle X_1 \rangle, X_1)$  y  $(G_2 = \langle X_2 \rangle, X_2)$  son sistemas de Coxeter y  $G \cong G_1 \times G_2$ .*

*Recíprocamente, si  $G$  es el producto directo de  $G_1$  y  $G_2$ , entonces la gráfica asociada a  $G$  no es conexa. ■*

Por este último resultado, cuando trabajemos con sistemas de Coxeter podremos suponer que su gráfica asociada es conexa, dado que, si tiene  $n$  componentes conexas, por inducción es fácil demostrar que el grupo es producto de  $n$  grupos de Coxeter (cuyas gráficas asociadas son todas conexas). Diremos que un sistema de Coxeter es *irreducible* si su gráfica asociada es conexa.

## 1.5. Grupos de Weyl

En esta sección  $\mathcal{V}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$  o  $\mathbb{R}$ , de dimensión finita  $n$ , y  $q$  es una forma cuadrática en  $\mathcal{V}$  tal que existe una base  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  ortonormal (es decir, si  $f$  es la forma bilineal asociada a  $q$ , entonces  $f(\beta_i, \beta_j) = 0$  para todo  $i \neq j$  y  $q(\beta_i) = 1$  para toda  $1 \leq i \leq n$ ). Denotaremos también a la forma bilineal  $f$  asociada a  $q$  como  $(,)$  (es decir,  $(u, v) = f(u, v)$ ).

**Definición 1.5.1.** Sea  $O(\mathcal{V}, q) = \{T \in GL(\mathcal{V}) : q(v) = q(T(v)) \text{ para } v \in \mathcal{V}\}$  el grupo de isometrías del espacio  $\mathcal{V}$ . Una *reflexión* en  $\mathcal{V}$  es un elemento  $r \in O(\mathcal{V}, q)$  tal que  $[\mathcal{V}, r] = \{r(v) - v : v \in \mathcal{V}\}$  es un subespacio de  $\mathcal{V}$  de dimensión 1. A  $[\mathcal{V}, r]$  se le llama el *centro* de  $r$ .

**Proposición 1.5.2.** *Sean  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  y  $r$  una reflexión con centro  $[\mathcal{V}, r] = \langle v \rangle$ . Sea  $v^\perp = \{u \in \mathcal{V} : (u, v) = 0\}$  (como lo definimos en la sección 2). Entonces*

1  $v^\perp$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$  de dimensión  $n - 1$ .

2  $r(v) = -v$  y, para cada  $u \in v^\perp$ ,  $r(u) = u$ . ■

**Corolario 1.5.3.** *Sea  $v \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ; entonces existe una única reflexión  $r_v$  con centro en  $\langle v \rangle$  determinada por la siguiente ecuación*

$$r_v(u) = u - 2 \frac{(u, v)}{(v, v)} v \quad (1.3) \quad \blacksquare$$

**Proposición 1.5.4.** Sean  $u, v, w \in \mathcal{V}$  entonces:

1  $r_u^2 = id_{\mathcal{V}}$ , es decir,  $r_u$  es de orden dos (dado que  $r_u \neq id_{\mathcal{V}}$ ).

2  $r_u r_v r_u = r_{r_u(v)}$ .

*Demostración.* 1 Sea  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  una base para  $\mathcal{V}$ , con  $\beta_1 = u$  y  $\beta_i \in u^\perp$  para  $1 < i \leq n$ . Entonces  $r_u^2(\beta_i) = \beta_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ .

2 Sea  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  una base para  $\mathcal{V}$ , con  $\beta_1 = r_u(v)$  y  $\beta_i \in r_u(v)^\perp$  para  $1 < i \leq n$ . Entonces  $r_u r_v r_u(\beta_1) = r_u r_v(v) = r_u(-v) = -r_u(v) = r_{r_u(v)}(\beta_1)$  y, para  $1 < i \leq n$ ,  $r_u r_v r_u(\beta_i) = r_u(r_u(\beta_i) - 2\frac{(r_u(\beta_i), v)}{(v, v)}v) = r_u(r_u(\beta_i) - 2\frac{(\beta_i, r_u(v))}{(v, v)}v) = r_u(r_u(\beta_i)) = \beta_i = r_{r_u(v)}(\beta_i)$ . Por lo tanto, como estas dos funciones lineales coinciden en la base, son iguales. ■

El resultado 1.5.3 nos permite hablar, dado un vector  $v \neq 0$ , de la reflexión con centro en  $v$ , y entonces podemos dar la siguiente definición.

**Definición 1.5.5.** Sea  $\Sigma \subset \mathcal{V} \setminus \{0\}$  un conjunto finito y sea  $\mathcal{W}(\Sigma) = \langle r_v : v \in \Sigma \rangle$ . Diremos que  $\Sigma$  es un *sistema de raíces* si

- para cualesquiera  $u, v \in \Sigma$ ,  $r_v(u) \in \Sigma$ .
- para cualquiera  $v \in \Sigma$ ,  $\langle v \rangle \cap \Sigma = \{v, -v\}$ .

Llamaremos a  $\mathcal{W}(\Sigma)$  el *grupo de Weyl* de  $\Sigma$ .

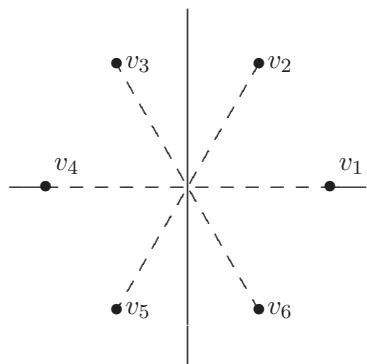
Algunos autores agregan el siguiente axioma

- (*Condición de integralidad*) para cualesquiera  $u, v \in \Sigma$ , la proyección ortogonal de  $u$  en  $\langle v \rangle$  es la mitad de un múltiplo entero de  $v$ , es decir

$$2\frac{(u, v)}{(v, v)} \in \mathbb{Z}.$$

Llaman a  $\Sigma$  un *sistema de raíces cristalográfico*.

**Ejemplo 1.5.6.** Un sistema de raíces.



Sea  $\Sigma = \{v_1, \dots, v_6\}$  el conjunto formado por los vértices de un hexágono regular; entonces  $\mathcal{W}(\Sigma)$  es un subgrupo del grupo diédrico de orden 12 isomorfo a  $Sim_3$ .

**Teorema 1.5.7.** *Sea  $G$  un subgrupo finito de  $O(\mathcal{V}, q)$  y sea  $R \subset G$  un conjunto de generadores invariante bajo la conjugación por elementos de  $G$ . Sea  $\Sigma$  el siguiente conjunto*

$$\Sigma = \{u \in \mathcal{V} \setminus \{0\} : q(u) = 1 \text{ y } \langle u \rangle = [\mathcal{V}, r] \text{ para algún } r \in R\}$$

Entonces  $\Sigma$  es un sistema de raíces. ■

Ahora es momento de deshacernos de los elementos “redundantes” de  $\Sigma$ , en el sentido de los que son necesarios para conocer al grupo de Weyl asociado a éste. Después de esto veremos que no fue casualidad que el grupo de Weyl del ejemplo anterior sea también un grupo de Coxeter.

**Definición 1.5.8.** Sea  $\Sigma$  un sistema de raíces. Un *sistema simple* asociado a  $\Sigma$  es un conjunto  $\Pi \subset \Sigma$  linealmente independiente y tal que cualquier  $v \in \Sigma$  se puede escribir como

$$v = \sum_{u \in \Pi} a_u u,$$

donde los escalares  $a_u \in \mathbb{F}$  son todos positivos o todos negativos.

**Teorema 1.5.9.** *Sean  $\Sigma$  un sistema de raíces,  $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\Sigma)$  y  $R = \{r_x : x \in \Pi\}$ , donde  $\Pi$  es un sistema simple asociado a  $\Sigma$ . Entonces  $R$  genera a  $\mathcal{W}$  y, más aún,  $(\mathcal{W}, R)$  es un sistema de Coxeter. ■*

## 1.6. Teoría de categorías

En los capítulos posteriores usaremos con frecuencia el término “categoría”, así que en esta sección daremos su definición y algunos ejemplos. Omitiremos la formalidad en la definición para evitar entrar en detalles que están fuera de nuestros objetivos<sup>1</sup>.

**Definición 1.6.1.** Una *categoría*  $\mathcal{C}$  consta de:

- Una colección de elementos llamados *objetos*, que denotamos por  $obj(\mathcal{C})$ .
- Para cada pareja (ordenada)  $A$  y  $B$  de objetos (no necesariamente distintos), un conjunto de elementos llamados *morfismos* o *flechas*, que denotamos por  $mor(A, B)$ . Decimos que un morfismo  $f \in mor(A, B)$  tiene como *origen* a  $A$  y *destino* a  $B$ .

<sup>1</sup>La definición formal y detallada puede encontrarse en el elemento [7] de la bibliografía

- Para cada objeto  $A$  de la categoría, un morfismo especial  $Id_A \in \text{mor}(A, A)$ , llamado *morfismo identidad* de  $A$ .
- Para  $A, B, C$  objetos de la categoría, una operación binaria  $\circ : \text{mor}(A, B) \times \text{mor}(B, C) \rightarrow \text{mor}(A, C)$  llamada *composición* (Escribimos  $g \circ f$  en lugar de  $\circ(f, g)$ ) que cumple los siguientes axiomas:
  - (*Asociatividad*)  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .
  - $Id_A \circ f = f = f \circ Id_A$ .

**Ejemplos 1.6.2.** Algunos ejemplos comunes de categorías.

- La categoría de conjuntos. Sus objetos son los conjuntos, sus morfismos son las funciones y las identidades son las funciones identidad.
- La categoría de grupos. Sus objetos son los grupos, sus morfismos son los homomorfismos de grupos y las identidades son las funciones identidad.
- La categoría de espacios topológicos. Sus objetos son los espacios topológicos, sus morfismos son las funciones continuas y las identidades son las funciones identidad.

En general, los morfismos entre objetos de una categoría no siempre son funciones, aunque sí lo son en los ejemplos más comunes.

**Definición 1.6.3.** Una *subcategoría*  $\mathcal{S}$  de una categoría  $\mathcal{C}$  es una categoría tal que todos sus objetos son, también, objetos de  $\mathcal{C}$ ; los morfismos entre objetos en  $\mathcal{S}$  son, también, morfismos en  $\mathcal{C}$ ; las composiciones entre morfismos de  $\mathcal{S}$  son las mismas que las composiciones entre estos morfismos en  $\mathcal{C}$  y, de la misma forma, las identidades en  $\mathcal{S}$  son las mismas que las identidades en  $\mathcal{C}$ .

- Ejemplos 1.6.4.**
- La categoría de los conjuntos finitos, cuyos objetos son los conjuntos finitos y morfismos, las funciones entre conjuntos, es subcategoría de la categoría de conjuntos.
  - La categoría de los grupos abelianos, cuyos objetos son los grupos abelianos y morfismos, los morfismos de grupos, es subcategoría de la categoría de grupos.





## Capítulo 2

# Geometrías Finitas

La mayoría de los espacios geométricos que conocemos (como los espacios euclidianos, proyectivos, hiperbólicos, etc.) constan de una infinidad de puntos y, más que eso, la idea de completez está siempre presente; en algunos casos no es necesario tanto, basta con ciertos conceptos como puntos, rectas y colinealidad, que pueden, perfectamente, ser modelados en espacios geométricos discretos y, con un poco de suerte, hasta finitos.

Los espacios parcialmente lineales serán nuestros espacios geométricos discretos o finitos, según sea el caso. El lector podrá encontrar en este capítulo una breve descripción de éstos y sus propiedades básicas, para después pasar a un caso particular, que es el objetivo de la tesis.

### 2.1. Conceptos Básicos

**Definición 2.1.1.** Un *espacio parcialmente lineal* es una pareja  $S = (P_S, L_S)$ , donde  $P_S$  es un conjunto (usualmente llamado el conjunto de puntos del espacio  $S$ ) y  $L_S$  es una familia de subconjuntos de  $P_S$  llamados *líneas* tales que

- Para cualquier  $l \in L_S$ ,  $l$  contiene al menos dos puntos.
- Dados dos elementos de  $L_S$ , su intersección contiene a lo más un punto (equivalentemente, si dos líneas se intersectan en más de un punto, entonces son iguales).

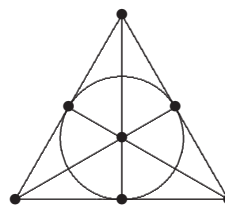
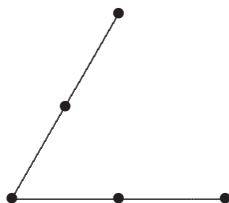
Si todas las líneas de  $S$  tienen exactamente tres puntos decimos que  $S$  es *3-espacio parcialmente lineal* o *espacio parcialmente lineal de orden 2*. También diremos que dos puntos distintos de  $S$  son *colineales* si ambos pertenecen a una misma línea, y dos líneas son *concurrentes* si su intersección es no vacía.

Nótese que los espacios parcialmente lineales sólo respetan *el primer postulado de Euclides* de la geometría euclidea (Dos puntos distintos pueden estar contenidos en, a lo más, una recta).

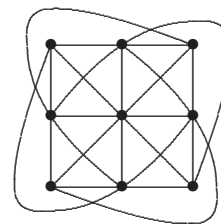
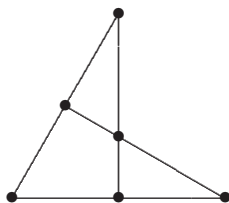
Para nuestros objetivos sólo es necesario tratar con 3-espacios parcialmente lineales. En ocasiones nos referiremos a ellos únicamente como espacios parcialmente lineales o EPL.

**Ejemplos 2.1.2.** Algunos espacios parcialmente lineales.

- Un espacio parcialmente lineal con dos líneas que se intersectan en un punto.
- *Plano de Fano*



- *Plano Dual Afín sobre  $\mathbb{F}_2$*
- *Plano Afín sobre  $\mathbb{F}_3$*



En los ejemplos no dimos explícitamente cuáles son los puntos que forman cada línea, pero con los dibujos queda claro y sin ambigüedades como deberían de estar conformadas las líneas.

**Definición 2.1.3.** 1 Un *subespacio* de un espacio parcialmente lineal  $S$  es una pareja  $R=(P_R, L_R)$  tal que  $P_R \subseteq P_S$ ,  $L_R \subseteq L_S$  y dados dos puntos  $a, b \in P_R$  colineales en  $S$  entonces también son colineales en  $R$  (existe una línea en  $L_R$  que contiene a ambos). Denotaremos esto por  $R \leq S$ .

2 Sean  $S$  un espacio parcialmente lineal y  $X \subseteq P_S$  un conjunto de puntos de  $S$ . El *subespacio generado por  $X$* , denotado por  $\langle X \rangle$ , es el menor subespacio de  $S$  que contiene a  $X$  en sus puntos. Llamamos *plano* al subespacio generado por los puntos de dos líneas distintas que se intersectan.

Dado  $X \subseteq P_S$ , tal vez no sea tan clara la existencia de  $\langle X \rangle$ , pero lo será después de la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.4.** *Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal y sean  $R=(P_R, L_R)$ ,  $R'=(P_{R'}, L_{R'})$  dos subespacios de  $S$ . Entonces,  $R \cap R' = (P_R \cap P_{R'}, L_R \cap L_{R'})$  es un subespacio de  $S$ .*

*Demostración.* Sean  $a, b \in P_R \cap P_{R'}$  dos puntos colineales en  $S$  y sea  $l$  la línea de  $S$  que los contiene. Entonces, dado que  $R$  y  $R'$  son subespacios de  $S$ ,  $l \in L_R$  y  $L_{R'}$ , y así  $l \in L_R \cap L_{R'}$ , lo que hace a los puntos  $a$  y  $b$  colineales en  $R \cap R'$ . ■

**Proposición 2.1.5.** *El plano de Fano, el plano afín sobre  $\mathbb{F}_3$  y el plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$  son planos.*

*Demostración.* En cada uno de los tres casos, cualquier pareja de líneas que se intersecten generan a todo el espacio. ■

A continuación daremos por hecho que el lector tiene conocimiento de lo elemental de *Teoría de Gráficas*<sup>1</sup>.

**Definición 2.1.6.** 1 Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal. La *gráfica de colinealidad de  $S$* , denotada por  $\Gamma_S$ , es la gráfica tal que sus vértices son los puntos de  $S$  y dos de éstos son adyacentes si, y sólo si, son colineales en  $S$ .

2 Un espacio parcialmente lineal es *conexo* si su gráfica de colinealidad es conexa.

**Proposición 2.1.7.** *Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal. Entonces  $S$  es conexo si, y sólo si, para cualesquiera  $a, b \in P_S$  existen  $l_1, l_2, \dots, l_n \in L_S$  tales que  $a \in l_1$ ,  $b \in l_n$  y  $l_i \cap l_{i+1} \neq \emptyset$  para  $1 \leq i < n$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $S$  es conexo. Sean  $a, b \in P_S$ , por la conexidad de  $\Gamma_S$  existen  $c_1, c_2, \dots, c_{n+1} \in P_S$  tales que  $c_1 = a$ ,  $c_{n+1} = b$  y, para  $1 \leq i \leq n$ ,  $c_i$  y  $c_{i+1}$  son colineales (dado que son adyacentes, vistos como vértices de  $\Gamma_S$ ); entonces, para  $1 \leq i < n$  sea  $l_i$  la línea que contiene a  $c_i$  y  $c_{i+1}$ , que cumplen lo que queremos.

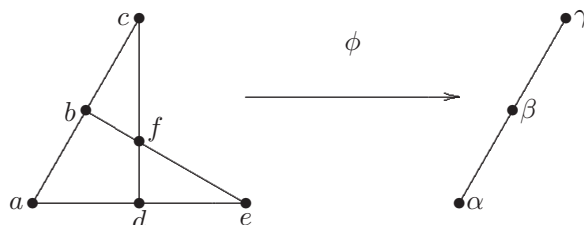
Ahora, sean  $a, b \in P_S$  y supongamos que existen líneas  $l_1, l_2, \dots, l_n$  como en el enunciado del teorema. Sin pérdida de generalidad supondremos que  $a$  y  $b$  no son colineales (en caso de ser colineales, son adyacentes, vistos como vértices de  $\Gamma_S$ ), que  $l_i \neq l_{i+1}$  para  $1 \leq i < n$  y que  $a \notin l_1$  y  $b \notin l_n$ . Entonces, sea  $c_1 = a$ ,  $c_{n+1} = b$  y, para  $1 < i < n + 1$  sea  $c_i$  el único punto en  $l_{i-1} \cap l_i$  (es único dado que supusimos que  $l_i \neq l_{i+1}$ ). Así tenemos que  $c_i$  y  $c_{i+1}$  son colineales y, por lo tanto, son adyacentes en  $\Gamma_S$ . ■

El concepto de gráfica de colinealidad no aporta mucho visualmente. La verdadera importancia de ésta la encontraremos en capítulos posteriores; mientras tanto, daremos unas cuantas definiciones más.

<sup>1</sup>El material que utilizaremos se puede encontrar en el Capítulo 1, primera parte.

**Definición 2.1.8.** Sean  $S$  y  $R$  espacios parcialmente lineales. Un *morfismo*  $\phi : S \rightarrow R$  de espacios parcialmente lineales es una función  $\phi : P_S \rightarrow P_R$  tal que si  $\{a, b, c\}$  es línea de  $S$ , entonces  $\{\phi(a), \phi(b), \phi(c)\}$  es línea de  $R$  (es decir, la función  $\phi$  manda líneas en líneas). Decimos que un morfismo es *isomorfismo* si es biyectivo y su inversa también es morfismo, en este caso, decimos que los espacios  $S$  y  $R$  son *isomorfos*. Un *automorfismo* es un isomorfismo de un espacio en sí mismo.

**Ejemplo 2.1.9.** Un morfismo  $\phi$  de un plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$  a una línea.



Definimos a  $\phi$  de la siguiente forma:  $\phi(a) = \alpha$ ,  $\phi(b) = \beta$ ,  $\phi(c) = \gamma$  (hasta aquí tenemos que la imagen de línea  $\{a, b, c\}$  es una línea). Ahora,  $\phi(d)$  no puede ser  $\alpha$  (dado que  $b$  es colineal con  $a$ ) ni  $\gamma$  (mismo argumento con  $c$ ), así  $\phi(d) = \beta$  y, con esto,  $\phi(e) = \gamma$  y  $\phi(f) = \alpha$  (para asegurar que la imagen de las líneas  $\{a, d, e\}$  y  $\{d, f, c\}$  sea línea). Con esto sólo tenemos que revisar la imagen de  $\{b, f, e\}$ , pero esta también es una línea.

De la misma forma que cuando tratamos con una gráfica, en ocasiones pensaremos a un espacio parcialmente lineal  $S = (P_S, L_S)$  como el conjunto de sus puntos, por ejemplo, escribiremos  $a \in S$  en lugar de  $a \in P_S$ , para así favorecer a la intuición y evitar una aburrida lectura.

## 2.2. Geometrías sobre campos finitos

Hay más de una forma de definir un espacio parcialmente lineal: especificando los puntos y las líneas, mediante un método combinatorio o con herramientas de álgebra lineal. Este último nos brinda una ventaja: podemos darle a nuestro espacio una estructura algebraica.

**Definición 2.2.1.** Sean  $\mathbb{F}$  un campo y  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{F}$ . El *espacio proyectivo de  $\mathcal{V}$* , denotado por  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$ , se define como

$$\mathbf{P}(\mathcal{V}) = \{W < \mathcal{V} : \dim(W) = 1\},$$

es decir, los *puntos* del espacio proyectivo son los subespacios de  $\mathcal{V}$  de dimensión uno, las *líneas* son los subespacios de  $\mathcal{V}$  de dimensión dos y, en general, los subespacios de dimensión  $n - 1$  del espacio proyectivo son los subespacios de dimensión  $n$  de  $\mathcal{V}$ .

Podemos pensar a  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$  de la siguiente forma: En  $\mathcal{V} \setminus \{0\}$  decimos que  $u \sim v$  si existe  $\lambda \in \mathbb{F}$  tal que  $v = \lambda u$ . Esto define una relación de equivalencia en  $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ , donde la clase de  $v$  es  $[v] = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\}$ . Así,  $\mathbf{P}(\mathcal{V}) = (\mathcal{V} \setminus \{0\}) / \sim = \{[v] : v \in \mathcal{V}\}$ . Hecha esta observación, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.2.** *Sea  $\mathbb{F}_q$  el campo con  $q$  elementos y  $\mathcal{V} = \mathbb{F}_q^n$ . Entonces*

1  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$  tiene  $\frac{q^n-1}{q-1}$  puntos y  $\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)}{(q-1)^2(q+1)}$  líneas.

2 Cualesquiera dos puntos son colineales y, si  $n = 3$ , cualesquiera dos líneas son concurrentes.

*Demostración.*  $\mathcal{V} \setminus \{0\}$  tiene  $q^n - 1$  elementos, y cada clase de equivalencia  $[v] = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}\}$  tiene  $q - 1$  elementos, así que la relación  $\sim$  define  $(q^n - 1)/(q - 1)$  clases de equivalencia distintas.

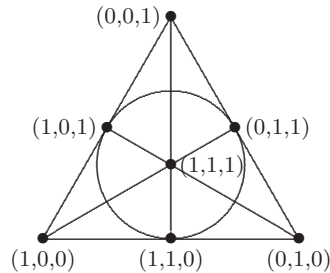
Ahora contemos las líneas de  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$ . Cada pareja de puntos en  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$  linealmente independientes nos determina un subespacio de  $\mathcal{V}$  de dimensión 2, y cada uno de estos contiene  $\frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$  puntos del proyectivo. Así

$$|L_{\mathbf{P}(\mathcal{V})}| = \frac{\binom{\frac{q^n-1}{q-1}}{2}}{\binom{q+1}{2}} = \frac{(q^n-1)(q^n-2)}{(q^2-1)(q^2-2)}.$$

La segunda parte de la proposición es obvia. ■

**Ejemplo 2.2.3.** El plano de Fano

Sea  $\mathcal{V} = \mathbb{F}_2^3$ . Para cada  $v \in \mathcal{V}$ ,  $[v] = \{v\}$ , así que los puntos en  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$  son los elementos de  $\mathcal{V}$  distintos de cero. Ahora, los subespacios de  $\mathcal{V}$  de dimensión 2 son los conjuntos de la forma  $\{0, u, v, u + v\}$ , donde  $(u, v)$  es cualquier pareja de puntos distintos; entonces las líneas del espacio proyectivo son exactamente las ternas  $\{[u], [v], [u + v]\}$ .



Con un poco de abuso de notación, en este caso sólo ponemos  $v$  en lugar de  $[v]$ .

Ahora, podemos revisar directamente que  $\mathbf{P}(\mathcal{V})$  es el plano de Fano.

**Proposición 2.2.4.** Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_3$  y sea  $f$  una forma bilineal simétrica en  $\mathcal{V}$ . Definimos los siguientes conjuntos:

$$P = \{[v] \in \mathbf{P}(\mathcal{V}) : f(v, v) = 1\} \text{ y}$$

$L = \{[u], [v], [w]\} : [u], [v], [w] \in \mathbf{P} \text{ distintos, } w = u + f(u, v)v\}$ . Entonces la pareja  $(P, L)$  es un espacio parcialmente lineal.

*Demostración.* Inicialmente tenemos que probar que los conjuntos  $P$  y  $L$  están bien definidos; después de esto no nos quedarán muchas cosas por hacer.

Para ver que  $P$  está bien definido, sean  $[v] \in \mathbf{P}(\mathcal{V})$  y  $v' \in [v]$ ; así  $v' = -v$  en caso de que sean distintos. Entonces, por la linealidad de  $f$  tenemos que  $f(v', v') = (-1)^2 f(v, v) = f(v, v)$ .

Ahora, veamos que  $L$  está bien definido. Sean  $u, v, w \in \mathcal{V}$  tales que  $w = u + f(u, v)v$  (dado que  $w$  está en términos de  $u$  y  $v$ , sólo es necesario verificar que pasa cuando cambiamos a estos dos por sus respectivos inversos). Al cambiar  $u$  por  $-u$ , tenemos  $-u + f(-u, v)v = -(u + f(u, v)v) = -w \in [w]$ ; al cambiar  $v$  por  $-v$ , tenemos  $u + f(u, -v)(-v) = u + f(u, v)v = w \in [w]$ .

Por último tenemos que probar que las líneas se intersectan en un solo punto. Sean  $u, v, w \in \mathcal{V}$  tales que  $w = u + f(u, v)v$ .

**Caso 1.** Si  $f(u, v) = 1$  tenemos que  $w = u + f(u, v)v = u + v = v + f(v, u)u$  (por la simetría de  $f$ ); con esto,  $u$  y  $v$  determinan el mismo punto sin importar el orden. Ahora sólo falta demostrar que  $w$  intercambia lugar con  $u$  y  $v$  en la ecuación original:  $u + f(u, w)w = u + f(u, u + v)(u + v) = u + f(u, u)(u + v) + f(u, v)(u + v) = u + (u + v) + (u + v) = -v \in [v]$  y  $w + f(w, v)v = u + v + f(u + v, v)v = u + v + f(u, v)v + f(v, v)v = u + v + v + v = u \in [u]$ .

**Caso 2.** Si  $f(u, v) = -1$ , entonces  $-w = -(u + f(u, v)v) = -(u - v) = v - u = v + f(v, u)u$ . El resto es análogo al caso 1. ■

**Definición 2.2.5.** Sea  $\mathbb{F}$  un campo. El *espacio afín* de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{F}$  es  $\mathbb{F}^n$ , pero sin la acostumbrada estructura de espacio vectorial. Los *subespacios afines* de dimensión  $m \leq n$  son los elementos de

$$\{\mathcal{U} + v : \mathcal{U} \leq \mathbb{F}^n, \dim(\mathcal{U}) = m, v \in \mathbb{F}^n\}$$

Las *líneas afines* son los supespacios afines de dimensión 1.

La definición anterior nos dice que un espacio afín es un espacio vectorial que olvidó dónde quedó su cero, es decir, el cero juega el mismo papel que todos los demás puntos.

También podemos hacer las siguientes observaciones:

**Proposición 2.2.6.** Sea  $\mathbb{F}_q$  el campo con  $q$  elementos y sea  $S$  el espacio afín de dimensión  $n$  sobre  $\mathbb{F}_q$ . Se tiene lo siguiente.

1 Cada punto de  $S$  está en  $\frac{q^n - 1}{q - 1}$  líneas.

2  $S$  tiene  $q^{n-1} \frac{q^n - 1}{q - 1}$  líneas.

3 Cualesquiera dos puntos son colineales.

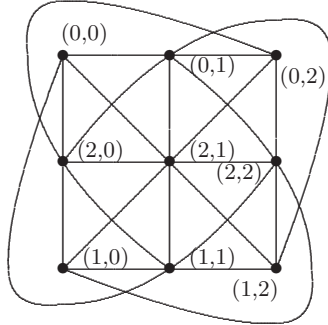
*Demostración.* Tenemos que  $\mathbb{F}_q^n$  tiene  $(q^n - 1)/(q - 1)$  subespacios de dimensión 1 (el número de puntos de su espacio proyectivo), así que el cero de  $\mathbb{F}_q^n$  está en  $(q^n - 1)/(q - 1)$  líneas y, con esto, todos los puntos están en ese número de líneas. Ahora, tenemos que cada línea contiene  $q$  puntos, de donde el número de líneas es

$$\frac{q^n \frac{q^n - 1}{q - 1}}{q} = q^{n-1} \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Para la tercera parte tomemos  $u, v \in \mathbb{F}_q^n$ ; entonces  $\langle u - v \rangle + v$  es una línea afín que contiene a  $u$  y a  $v$ . ■

**Ejemplo 2.2.7.** El plano afín sobre  $\mathbb{F}_3$ .

Tomemos  $\mathbb{F}_3^2$ . Las líneas afines son, por definición, los conjuntos de la forma  $\langle u \rangle + v$ , con  $u, v \in \mathbb{F}_3^2$ ,  $u \neq 0$ . Entonces tenemos 12 líneas (4 por cada punto del espacio proyectivo y 3 posibles translaciones) y cada pareja de puntos aparecen juntos en exactamente una línea. Entonces el espacio se ve como se muestra en la figura.



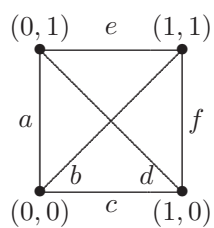
Es por esto que le dimos inicialmente el nombre de plano afín sobre  $\mathbb{F}_3$ .

**Definición 2.2.8.** Sea  $S = (P_S, L_S)$  un espacio parcialmente lineal (no necesariamente de orden 2). Sea  $S'$  el espacio cuyos puntos son las líneas de  $S$  y sus líneas son los conjuntos  $\{l \in L_S : a \in l\}$  para cada  $a \in P_S$ . A  $S'$  le llamamos el *espacio dual* de  $S$ .

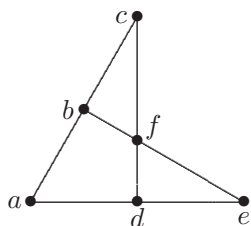
**Ejemplo 2.2.9.** El plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$ .

Tomemos el espacio afín de dimensión 2 sobre  $\mathbb{F}_2$ . Está formado de 4 puntos, cada uno colineal con los otros 3; consta de 6 líneas y cada línea consta de 2 puntos. Le damos nombres a las líneas del espacio como se muestra en la figura.





Con esto tenemos que su espacio dual consta de 6 puntos y 4 líneas, cada línea está formada por 3 puntos y cada punto está contenido en 2 líneas. Si lo construimos con los nombres que dimos a las líneas del espacio afín, tenemos que  $\{a, b, c\}$ ,  $\{a, d, e\}$ ,  $\{d, f, c\}$  y  $\{b, f, e\}$  son las líneas del espacio dual. Así el plano dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$  se ve como se muestra en la figura, que es lo que ya esperábamos.



## Capítulo 3

# Espacios de Fischer

Después de habernos familiarizado un poco con los espacios geométricos finitos estamos listos para estudiar a los espacios de Fischer. Estos nacen de forma “natural” al preguntarnos si ciertas funciones del espacio en sí mismo son automorfismos y, con algunas observaciones más, podremos concluir que hay una relación entre los espacios de Fischer y cierto tipo de grupos (los grupos de 3-transposiciones).

El lector podrá notar lo bonito que es tratar con estos espacios que, más allá de su relación con los grupos, poseen una geometría relativamente sencilla y poco artificial.

Durante lo que resta de la tesis nos referiremos a los planos afín sobre  $\mathbb{F}_3$  y dual afín sobre  $\mathbb{F}_2$  simplemente como los planos afín y dual afín, respectivamente.

### 3.1. Definición y propiedades básicas

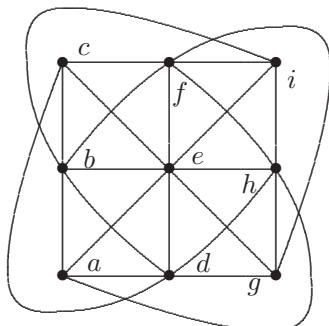
**Definición 3.1.1.** Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal y  $a$  un punto de  $S$ . Sea  $\gamma_a : S \rightarrow S$  definida por:

$$\gamma_a(b) = \begin{cases} b & \text{si } a \text{ y } b \text{ no son colineales} \\ c & \text{si } \{a, b, c\} \text{ es línea} \end{cases}$$

Es claro que  $\gamma_a \in \text{Sim}_S$ , también que  $(\gamma_a)^2 = Id_S$  y, además, el orden de  $\gamma_a = 1$  si y sólo si  $a$  es un punto aislado, es decir, no pertenece a ninguna línea. Pero también se espera que estas funciones no siempre sean automorfismos del espacio (es decir, que no siempre manden líneas en líneas).

**Lema 3.1.2.** Sea  $S$  un plano afín o dual afín y  $a, b \in S$ , entonces existe un automorfismo de  $\phi$  de  $S$  tal que  $\phi(a) = b$  y  $\phi(b) = a$ .

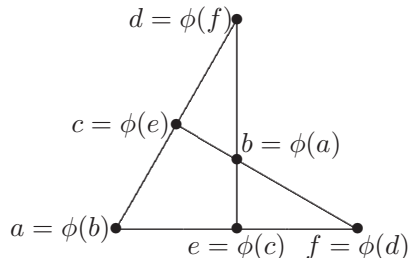
*Demostración.* Si  $S$  es un plano afín, cualesquiera dos puntos puntos son colineales, en particular  $a$  y  $b$  lo son. Entonces, sin pérdida de generalidad, el plano se ve como en el dibujo:



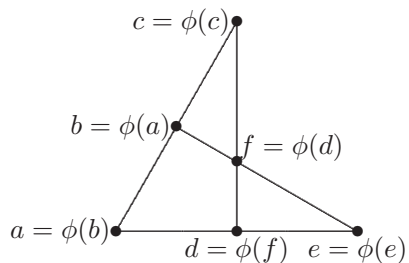
Con esto tenemos que  $\gamma_c(a) = b$ ,  $\gamma_c(b) = a$ ,  $\gamma_c(c) = c$ ,  $\gamma_c(g) = e$ ,  $\gamma_c(e) = g$ ,  $\gamma_c(i) = f$ ,  $\gamma_c(f) = i$ ,  $\gamma_c(h) = d$  y  $\gamma_c(d) = h$ . Por lo tanto, como  $\gamma_c$  es biyectiva y manda líneas en líneas, entonces es un automorfismo de  $S$  y, además,  $\gamma_c(a) = b$  y  $\gamma_c(b) = a$ .

Si  $S$  es un plano dual afín, sean  $a, b \in S$ , tenemos dos casos:

**Caso 1** Si  $a$  y  $b$  no son colineales, sean  $\{a, c, d\}$ ,  $\{a, e, f\}$ ,  $\{c, b, f\}$  y  $\{d, b, e\}$  las líneas de  $S$ , entonces definamos  $\phi$  como  $\phi(a) = b$ ,  $\phi(b) = a$ ,  $\phi(c) = e$ ,  $\phi(e) = c$ ,  $\phi(d) = f$  y  $\phi(f) = d$ . Entonces  $\phi$  manda líneas en líneas, de hecho, es sólo un cambio de posición entre las parejas de puntos no colineales.



**Caso 2** Si  $a$  y  $b$  son colineales, sea  $c$  tal que  $\{a, b, c\}$  es línea y sean  $\{a, d, e\}$ ,  $\{d, f, c\}$  y  $\{b, f, e\}$  las otras líneas de  $S$ . Sea  $\phi = \gamma_c$ , entonces  $\phi(a) = b$ ,  $\phi(b) = a$ ,  $\phi(d) = f$ ,  $\phi(f) = d$ ,  $\phi(e) = e$  y  $\phi(c) = c$ . Así tenemos que  $\phi$  manda líneas en líneas.



■

Este último resultado nos dice que los puntos en los planos afín y dual afín son indistinguibles, todos juegan el mismo papel.

**Lema 3.1.3.** *Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal y  $\Delta = \{\gamma_a : a \in S\}$ , entonces,  $\Delta$  es cerrado bajo la conjugación por automorfismos de  $S$  y, más aún, si  $\phi$  es un automorfismo se cumple lo siguiente:*

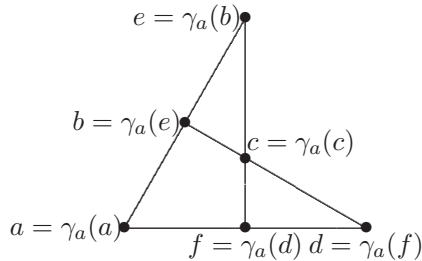
$$\phi\gamma_a\phi^{-1} = \gamma_{\phi(a)} \quad (3.1)$$

*Demostración.* Probemos que las dos funciones se comportan igual en cada punto. Sea  $b \in S$ . Si  $b$  no es colineal a  $\phi(a)$ , entonces  $\phi^{-1}(b)$  no es colineal con  $a$ , por lo tanto  $\gamma_a\phi^{-1}(b) = \phi^{-1}(b)$ , y así,  $\phi\gamma_a\phi^{-1}(b) = b$ . Si  $b$  y  $\phi(a)$  son colineales, sea  $c$  tal que  $\{\phi(a), b, c\}$  es línea, entonces  $\{a, \phi^{-1}(b), \phi^{-1}(c)\}$  también es línea y, por lo tanto,  $\gamma_a\phi^{-1}(b) = \phi^{-1}(c)$ , y así,  $\phi\gamma_a\phi^{-1}(b) = c$ , como se quería demostrar. ■

**Proposición 3.1.4.** *Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal tal que todos sus planos son afines o duales afines, entonces, para cada  $a \in S$ ,  $\gamma_a$  es automorfismo de  $S$ .*

*Demostración.* Sea  $a \in S$  y  $l = \{b, c, d\}$  una línea del espacio. Si  $a$  no es colineal con algún punto de  $l$ , entonces  $\gamma_a$  deja fija a  $l$ . De la misma manera, si  $a \in l$ ,  $\gamma_a$  sólo permuta a los otros dos puntos sobre la línea, y así,  $l$  queda fija. Ahora, si  $a \notin l$ , pero sí es colineal a algún punto de  $l$  (sin pérdida de generalidad, con  $b$ ), entonces tenemos dos líneas que se intersectan y hay dos casos:

**Caso 1** Si lo generado por estas dos líneas es un plano dual afín, sean  $\{b, c, d\}$ ,  $\{a, b, e\}$ ,  $\{a, f, d\}$  y  $\{f, c, e\}$  las líneas del plano, entonces  $a$  y  $c$  no son colineales en  $S$  (de lo contrario, la línea a la que pertenecen ambos estaría obligada a estar en el plano), entonces, como se vió en la demostración del lema 3.1.2,  $\gamma_a$  manda líneas en líneas dentro del plano, en particular, manda a  $\{b, c, d\}$  en  $\{l, c, f\}$ .



**Caso 2** Si lo que generan es un plano afín, entonces tenemos que cualquier punto del plano es colineal con  $a$ , y como vimos en la demostración del lema 3.1.2,  $\gamma_a$  manda líneas en líneas dentro del plano, en particular, la imagen de  $\{b, c, d\}$  es una línea. ■

Este último resultado motiva a la siguiente definición.

**Definición 3.1.5.** Un espacio parcialmente lineal será llamado *espacio de Fischer* si todos sus planos son afines o duales afines.

Los espacios de Fischer cumplen, aparte de lo antes mencionado, bastantes otras cosas que no se tienen en otros espacios, así que, para familiarizarnos con su geometría, daremos algunas propiedades básicas. Usaremos la letra  $F$  para referirnos a un espacio de Fischer.

**Corolario 3.1.6.** Sea  $F$  un espacio de Fischer y sean  $a, b \in F$  puntos no colineales, entonces  $\gamma_a \gamma_b = \gamma_b \gamma_a$ .

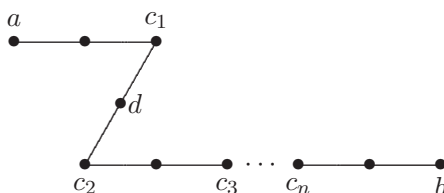
*Demostración.* Tenemos que  $\gamma_a$  es automorfismo, además,  $\gamma_a \gamma_a = Id_F$ , entonces  $\gamma_a \gamma_b = \gamma_a \gamma_b (\gamma_a \gamma_a) = (\gamma_a \gamma_b \gamma_a) \gamma_a = \gamma_{\gamma_a(b)} \gamma_a = \gamma_b \gamma_a$ . ■

**Proposición 3.1.7.** Sean  $F$  un espacio de Fischer,  $l$  una línea de  $F$  y a un punto fuera de  $l$ . Entonces, si  $a$  es colineal con algún punto de  $l$ , lo es con, al menos, dos puntos de esta misma línea.

*Demostración.* Como  $a \notin l$ , pero sí es colineal a un punto de  $l$ , entonces tenemos dos líneas que se intersectan, así que, como  $F$  es un espacio de Fischer, lo que generan estas dos líneas es un plano afín o dual afín. En ambos casos la proposición es obvia y, de hecho, es colineal con exactamente dos si, y sólo si, el plano generado es un plano dual afín. ■

**Proposición 3.1.8.** Sea  $F$  un espacio de Fischer conexo y sean  $a$  y  $b$  dos puntos de  $F$  no colineales. Entonces existe un tercer punto  $c$  colineal con ambos.

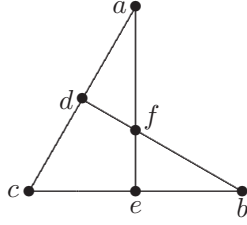
*Demostración.* Como  $F$  es conexo, existen  $l_1, l_2, \dots, l_n \in L_S$  tales que  $a \in l_1$ ,  $b \in l_n$  y  $l_i \cap l_{i+1} = \{c_i\}$  para  $1 \leq i < n$ . Procederemos por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 2$  tenemos que el resultado es cierto; supongamos verdadero el resultado para cierta  $n \geq 2$ , entonces, si tenemos  $n + 1$  líneas entre  $a$  y  $b$ , estamos en una situación como en el dibujo.



Por la proposición anterior, como  $a$  es colineal con  $c_1$ , también lo es con, al menos, otro punto de la línea  $\{c_1, d, c_2\}$  y, de la misma manera, como  $c_3$  es colineal con  $c_2$ , también lo es con, al menos, otro punto de esta misma línea. Entonces, algún punto de la línea  $\{c_1, d, c_2\}$  es colineal con  $a$  y con  $c_3$ . Con esto tenemos que hay  $n$  líneas entre  $a$  y  $b$  y, por hipótesis de inducción, existe  $c$  colineal con  $a$  y con  $b$ . ■

**Proposición 3.1.9.** Sean  $F$  y  $F'$  espacios de Fischer conexos, sean  $a, b \in F$  y  $\phi : F \rightarrow F'$  un morfismo. Entonces, si  $a$  y  $b$  no son colineales,  $\phi(a)$  y  $\phi(b)$  tampoco lo son.

*Demostración.* Sean  $a, b \in F$  dos puntos no colineales; por la proposición anterior existe un tercer punto  $c$  colineal a ambos, entonces, estos puntos generan un plano dual afín. Le asignamos nombres a los puntos del plano como se indica en el dibujo.



Por ser  $\phi$  un morfismo,  $l = \{\phi(a), \phi(d), \phi(c)\}$  y  $l' = \{\phi(b), \phi(e), \phi(c)\}$  son líneas en  $F'$ , entonces, inicialmente hay dos posibilidades para la imagen del plano bajo  $\phi$ .

**Caso 1.** Si  $l = l'$ , tenemos que  $\phi(a) \neq \phi(e)$ , dado que la imagen de  $\{a, f, e\}$  también es línea, y bajo el mismo razonamiento,  $\phi(a) \neq \phi(c)$ , por lo tanto,  $\phi(a) = \phi(b)$ .

**Caso 2.** Si  $l \neq l'$ , entonces,  $l = \{\phi(a), \phi(d), \phi(c)\}$ ,  $l' = \{\phi(b), \phi(e), \phi(c)\}$ ,  $\{\phi(a), \phi(f), \phi(e)\}$  y  $\{\phi(d), \phi(f), \phi(b)\}$  son cuatro líneas distintas que forman un plano dual afín y, como  $F'$  es espacio de Fischer, este plano dual afín es subespacio de  $F'$ , por lo tanto,  $\phi(a)$  y  $\phi(b)$  no son colineales. ■

Con este resultado tenemos, además, que los morfismos entre espacios de Fischer inducen morfismos entre las gráficas de colinealidad.

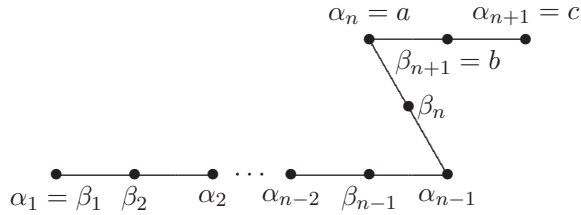
**Corolario 3.1.10.** Sean  $F$  y  $F'$  espacios de Fischer. Si  $\phi : F \rightarrow F'$  es un morfismo biyectivo, entonces  $\phi$  es un isomorfismo.

*Demostración.* Inmediato de la proposición anterior. ■

**Teorema 3.1.11.** Sean  $F = (P_F, L_F)$  un espacio de Fischer y  $X \subset P_F$ . Sea  $F_X$  el conjunto de los  $a \in P_F$  tales que, existen sucesiones  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n : \alpha_i \in P_F\}$  y  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n : \beta_i \in X\}$ , donde  $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_n = a$  y  $l_i = \{\alpha_i, \beta_{i+1}, \alpha_{i+1}\} \in L_F$ . Entonces,  $F_X = \langle X \rangle$ , el subespacio generado por  $X$ .

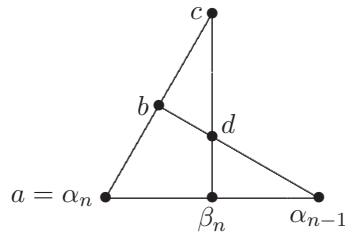
*Demostración.* Es directo de la definición de subespacio que  $F_X \subset \langle X \rangle$ , entonces, es suficiente demostrar que  $F_X$  es supespacio. Para esto, daremos primero un par de definiciones. Tomemos  $a \in F_X$  y sea  $Path_{X,a} = \{(A, B) : A \text{ y } B \text{ son sucesiones para } a \text{ como en el enunciado del teorema}\}$  el conjunto de caminos que existen para alcanzar al punto  $a$  desde  $X$  y sea  $Lm_X(a) = \min\{|A| : (A, B) \in Path_{X,a}\}$  la mínima longitud de estos caminos. Teniendo esto, tomemos  $a, b \in F_X$  dos puntos colineales y sea  $\{a, b, c\}$  la línea

que contiene a ambos puntos. Procederemos por inducción sobre  $k_{a,b} = \min\{Lm_X(a), Lm_X(b)\}$ . Si  $k_{a,b} = 1$ , sin pérdida de generalidad,  $Lm_X(b) = 1$ , entonces  $b \in X$ . Sean  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n = a : \alpha_i \in P_F\}$  y  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n : \beta_i \in X\}$  sucesiones para  $a$  como en el enunciado del teorema, entonces  $A' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n = a, \alpha_{n+1} = c : \alpha_i \in P_F\}$  y  $B' = \{\beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1} = b : \beta_i \in X\}$  son sucesiones para  $c$ , y así,  $c \in F_X$ .



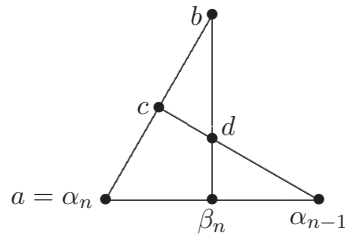
Ahora, supongamos que  $k_{a,b} > 1$  y que el resultado es cierto para toda pareja de puntos  $(c, d)$  tales que  $k_{c,d} < k_{a,b}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $k_{a,b} = Lm_X(a)$  y sean  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n = a : \alpha_i \in P_F\}$  y  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n : \beta_i \in X\}$  sucesiones para  $a$  como en el enunciado del teorema. Si las líneas  $\{\alpha_{n-1}, \beta_n, \alpha_n = a\}$  y  $\{\alpha_n = a, b, c\}$  son iguales, entonces  $c \in F_X$ . Si no lo son, hay tres distintos casos.

**Caso 1.** Lo que generan estas dos líneas es un plano dual afín que se ve como en el siguiente dibujo (donde  $\beta_{n-1}$  y  $b$  son puntos no colineales).



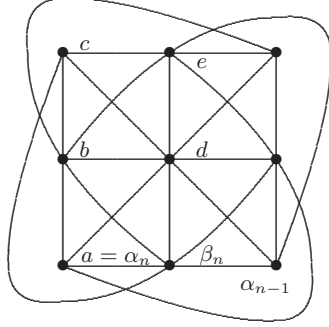
Con esto, podemos aplicar la hipótesis de inducción a la pareja  $(\alpha_{n-1}, b)$ , dado que  $Lm_X(\alpha_{n-1}) \leq Lm_X(a) - 1$ , por lo tanto,  $d \in F_X$  y, por último, por el hecho de que  $\beta_n \in X$ , la pareja  $(d, \beta_n)$  es como en la base de inducción, y así,  $c \in F_X$ .

**Caso 2.** Lo que generan estas dos líneas es un plano dual afín que se ve como en el siguiente dibujo (donde  $\alpha_{n-1}$  y  $b$  son puntos no colineales).



En este caso tenemos que la pareja  $(b, \beta_n)$  es como en la base de inducción, por lo tanto,  $d \in F_X$ . Ahora, aplicamos la hipótesis de inducción a la pareja  $(d, \alpha_{n-1})$ , y con esto,  $c \in F_X$ .

**Caso 3.** Lo que generan estas dos líneas es un plano afín que se ve como en el siguiente dibujo.



Para este caso, primero aplicamos hipótesis de inducción en la pareja  $(b, \alpha_{n-1})$ , con esto tenemos que  $e \in F_X$ . Así, la pareja  $(e, \beta_n)$  es como en la base de inducción, por lo tanto,  $d \in F_X$  y, por último, aplicamos la hipótesis de inducción a la pareja  $(d, \alpha_{n-1})$  y con esto concluimos que  $c \in F_X$ . ■

**Corolario 3.1.12.** Sean  $F$  y  $F'$  espacios de Fischer y sea  $\varphi : F \rightarrow F'$  un morfismo. Sea  $X \subset P_F$ , entonces  $\langle \varphi[X] \rangle \leq \varphi[\langle X \rangle]$ .

*Demostración.* Sea  $a \in \langle \varphi[X] \rangle$  y sean  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n = a : \alpha_i \in P_{F'}\}$  y  $B = \{\beta_1, \dots, \beta_n : \beta_i \in \varphi[X]\}$  sucesiones para  $a$  como en el enunciado del teorema anterior. Entonces, como  $\beta_1, \beta_2 \in \varphi[X]$  y  $\{\beta_1, \beta_2, \alpha_2\}$  es línea, por la proposición 3.1.9, para  $b_1 \in \varphi^{-1}(\beta_1)$  y  $b_2 \in \varphi^{-1}(\beta_2)$  tenemos que  $b_1$  y  $b_2$  son colineales, por lo tanto, existe  $a \in P_{\langle X \rangle}$  tal que  $\{b_1, b_2, a\}$  es línea y  $\varphi(a) = \alpha_2$ , entonces  $\alpha_2 \in \varphi[\langle X \rangle]$ . Por inducción,  $\alpha_i \in \varphi[\langle X \rangle]$  para toda  $1 \leq i \leq n$ . ■

**Corolario 3.1.13.** Sean  $F$  y  $F'$  espacios de Fischer conexos y sea  $\varphi : F \rightarrow F'$  un morfismo, entonces

- 1 La imagen de un plano afín de  $F$  es, también, un plano afín de  $F'$ .
- 2 La imagen inversa de un plano afín de  $F'$  (en la imagen de  $F$  bajo  $\varphi$ ) contiene un plano afín de  $F$ .

*Demostración.* 1 Sean  $l = \{a, b, c\}$  y  $l' = \{a, d, e\}$  líneas concurrentes de  $F$  tales que generan un plano afín. El punto  $b \in l$  es colineal con todos los puntos de  $l'$ , por lo tanto  $\varphi(b) \neq \varphi(a), \varphi(d), \varphi(e)$ , entonces, las imágenes de  $l$  y  $l'$  son dos líneas concurrentes distintas en  $F'$  que, además, por la proposición 3.1.9, generan un plano afín, y así, por el resultado anterior, la imagen de  $\langle l \cup l' \rangle$  es un plano afín.



- 2 Sean  $\lambda = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$  y  $\lambda' = \{\alpha, \delta_1, \delta_2\}$  dos líneas concurrentes de  $F'$  tales que generan un plano afín. Por la proposición 3.1.9 existen líneas concurrentes  $l$  y  $l'$  de  $F$  tales que  $\varphi[l] = \lambda$  y  $\varphi[l'] = \lambda'$ , entonces, si estas líneas generaran un plano dual afín, existirían  $a \in l$  y  $b \in l'$  que no son colineales entre sí, pero sus imágenes sí lo son, por lo tanto,  $l$  y  $l'$  generan un plano afín. ■

### 3.2. Espacios de Fischer y grupos

Ahora que conocemos a los espacios de Fischer y a algunas de sus propiedades básicas, es momento de aprovechar que las funciones  $\gamma_a$  forman parte del grupo de automorfismos para relacionar a los espacios con algunos grupos para que, posteriormente, podamos usar la estructura geométrica de estos espacios para el estudio de sus grupos asociados.

**Definición 3.2.1.** Sean  $S = (P_S, L_S)$  un espacio parcialmente lineal y  $G$  un grupo. Decimos que  $S$  está *inmerso* en  $G$  si existe una *inmersión*  $i$  de  $S$  en  $G$ , es decir, una función  $i : P_S \rightarrow G$  tal que

- I)  $i(a)$  es de orden dos, para toda  $a \in P_S$ .
- II) Si  $a$  y  $b$  son puntos no colineales, entonces  $i(a)i(b) = i(b)i(a)$ .
- III) Si  $\{a, b, c\} \in L_S$ , entonces  $i(a)i(b)i(a) = i(c)$ .
- IV) El conjunto  $\{i(a) : a \in P_S\}$  genera a  $G$ .

Denotaremos este hecho con  $S \prec G$ .

**Definición 3.2.2.** Sea  $S = (P_S, L_S)$  un espacio parcialmente lineal. A  $S$  le asociamos los siguientes grupos.

- 1  $G_0(S)$  el grupo generado por  $\{\gamma_a : a \in P_S\}$  dentro de  $Sim_{P_S}$ .
- 2  $G_1(S)$  el grupo cuya presentación es  $(P_S : a^2 \text{ para todo } a \in P_S, aba = c \text{ donde } \{a, b, c\} \in L_S, ab = ba \text{ para } a, b \in P_S \text{ puntos no colineales})$ <sup>1</sup>.

**Teorema 3.2.3.** Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal conexo, entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

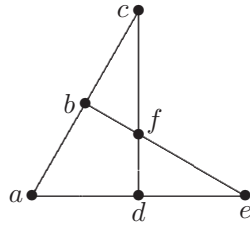
- 1  $S$  es un espacio de Fischer.
- 2  $G_0(S) \leq Aut(S)$ , el grupo de automorfismos de  $S$ .
- 3 Existe un grupo  $G$  tal que  $S \prec G$ .

<sup>1</sup>La definición de *presentación* puede encontrarse en el Capítulo 1, cuarta parte.

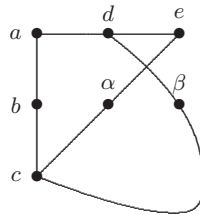
*Demostración.* Por la proposición 3.1.4, tenemos que 1 implica 2. Para demostrar que 2 implica 3, definamos  $i : P_S \rightarrow G_0$  de la forma natural (es decir,  $i(a) = \gamma_a$ ), probemos que  $i$  es una inmersión de  $S$  en  $G_0(S)$ . Dado que  $S$  es conexo,  $\gamma_a \neq Id_{P_S}$ , entonces, si  $\gamma_a(b) = c$  para  $b \neq c$ , entonces  $a$  queda únicamente determinado (está forzado a ser el tercer punto de la línea que pasa por  $b$  y  $c$ ), por lo tanto,  $i$  es inyectiva. Los incisos I) y IV) son directos de las definiciones de  $\gamma_a$  y  $G_0$ , respectivamente, y de la misma forma, los incisos II y III) se deducen fácilmente del lema 3.1.3.

Falta demostrar que 3 implica 1. Sea  $i : P_S \rightarrow G$  la inmersión de  $S$  en  $G$ . Tomemos  $l = \{a, b, c\}$  y  $l' = \{a, d, e\}$  dos líneas de  $S$  que se intersecten, si son iguales no resta algo por demostrar, si no lo son, entonces se intersectarán en un único punto. Entonces tenemos dos casos.

**Caso 1.** Si el punto  $c \in l$  no es colineal con algún punto de  $l'$ , sin pérdida de generalidad, con  $e$ , entonces  $i(e)i(c)i(e) = i(c)$  y, además,  $i(a)i(c)i(a) = i(b)$  dado que  $\{a, b, c\}$  es línea. Así, tenemos que  $i(d)i(c)i(d) = i(e)i(a)i(e)i(c)i(e)i(a)i(e) = i(e)i(a)i(c)i(a)i(e) = i(e)i(b)i(e)$ , entonces, si  $i(d)i(c)i(d) = i(e)i(b)i(e) = i(c)$  tendríamos que  $\{b, c, e\}$  es línea, pero  $l \neq l'$ , por lo tanto,  $i(d)i(c)i(d) \neq i(c)$ , y así,  $c$  y  $d$  son colineales y, además, si  $f$  es el tercer punto de la línea que pasa por  $c$  y  $d$ , también  $\{b, f, e\}$  es línea. Ahora, observamos que  $i(d)i(b)i(d) = i(a)i(e)i(a)i(b)i(a)i(e)i(a) = i(a)i(e)i(c)i(e)i(a) = i(a)i(c)i(a) = i(b)$ , entonces  $b$  y  $d$  no son colineales y, de la misma forma se demuestra que  $a$  y  $f$  tampoco lo son. Con esto concluimos que  $l$  y  $l'$  generan un plano dual afín.

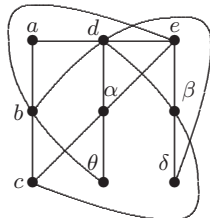


**Caso 2.** Si el punto  $c \in l$  es colineal con los tres puntos de  $l'$ , sean  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $\{c, \alpha, e\}$  y  $\{c, \beta, d\}$  son líneas.

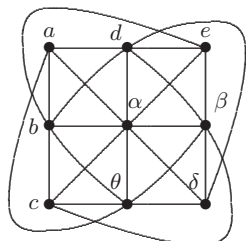


Observemos que  $i(\beta)i(e)i(\beta) = i(d)i(c)i(d)i(e)i(d)i(c)i(d) = i(d)i(c)i(a)i(c)i(d) = i(d)i(b)i(d)$ , entonces, si  $i(\beta)i(e)i(\beta) = i(d)i(b)i(d) = i(e)$  ten-

dríamos que  $\{b, d, e\}$  es línea, pero por hipótesis,  $l \neq l'$ , y por un razonamiento análogo,  $i(d)i(b)i(d) \neq i(d)$ , así que  $\beta$  es colineal con  $e$ ,  $b$  es colineal con  $d$  y, además, las líneas que forman estar parejas de puntos son concurrentes; sea  $\delta$  tal que  $\{e, \beta, \delta\}$  y  $\{b, d, \delta\}$  son líneas. Mediante un razonamiento análogo tenemos que  $d$  es colineal con  $\alpha$ ,  $b$  es colineal con  $e$  y las líneas que forman son concurrentes; sea  $\theta$  tal que  $\{d, \alpha, \theta\}$  y  $\{e, b, \theta\}$  son líneas.



Ahora, observemos que tenemos que  $i(\alpha)i(b)i(\alpha) = i(c)i(e)i(c)i(b)i(c)i(e)i(c) = i(c)i(e)i(a)i(e)i(c) = i(c)i(d)i(c) = i(\beta)$ , entonces,  $\{b, \alpha, \beta\}$  es línea. También veamos que  $i(a)i(\alpha)i(a) = i(c)i(b)i(c)i(\alpha) = i(c)i(b)i(c) = i(c)i(b)i(e)i(b)i(c) = i(c)i(\theta)i(c) = i(e)i(\alpha)i(e)i(\theta)i(e)i(\alpha)i(e) = i(e)i(\alpha)i(b)i(\alpha)i(e) = i(e)i(\beta)i(e) = i(\delta)$ , por lo tanto  $\{c, \theta, \delta\}$  y  $\{a, \alpha, \delta\}$  son líneas. Por último, tenemos que  $i(a)i(\theta)i(a) = i(\alpha)i(\delta)i(\alpha)i(\theta)i(\alpha)i(\delta)i(\alpha) = i(\alpha)i(\delta)i(d)i(\delta)i(\alpha) = i(\alpha)i(b)i(\alpha) = i(\beta)$ , con esto  $\{a, \theta, \beta\}$  es línea, y así,  $l$  y  $l'$  generan un plano afín.



■

**Corolario 3.2.4.** Sea  $F$  un espacio de Fischer y  $F'$  un subespacio de  $F$ , entonces  $F'$  también es un espacio de Fischer.

*Demostración.* Dado que  $F$  es un espacio de Fischer, existe un grupo  $G$  y una inmersión  $i$  de  $F$  en  $G$ , entonces, la función  $i$  restringida a  $P_{F'}$  cumple lo necesario, por ser  $F'$  subespacio, al restringir el codominio a  $\langle i(a) : a \in P_{F'} \rangle$ . ■

**Proposición 3.2.5.** Sean  $F$  un espacio de Fischer y  $G$  un grupo tal que  $F$  está inmerso en  $G$ . Sea  $i$  una inmersión de  $F$  en  $G$  entonces.

1  $G$  actúa, por conjugación, en la imagen de  $P_F$  bajo  $i$

2 Sea  $*$  la acción de  $G$  en  $P_F$  que se da por el inciso anterior y sea  $\mu_a : P_F \rightarrow P_F$  definida por  $\mu_a(b) = i(a) * b = i^{-1}(i(a)i(b)i(a))$ . Entonces  $\mu_a = \gamma_a$ .

*Demostración.* Sea  $T = \{i(a) : a \in P_F\}$  la imagen de  $P_F$  bajo  $i$ , entonces, por los incisos I, II y III de la definición de inmersión,  $T$  es cerrado bajo la conjugación por elementos del mismo  $T$  y, dado que  $\langle g : g \in T \rangle$ , entonces también es cerrado bajo la conjugación por elementos de  $G$ . Con esto, la veracidad del inciso 1.

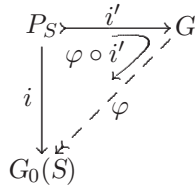
Para el inciso 2, sean  $a, b \in P_F$ , entonces hay dos posibilidades. Si  $a$  no es colineal con  $b$ , entonces  $i(a)$  e  $i(b)$  conmutan, por lo tanto,  $\mu_a(b) = i^{-1}(i(a)i(b)i(a)) = i^{-1}(i(b)) = b = \gamma_a(b)$ . Si  $a$  y  $b$  son colineales, entonces  $i(a)i(b)i(a) = i(c)$  donde  $c$  es el tercer punto de la línea que pasa por  $a$  y  $b$ , y así,  $\mu_a(b) = i^{-1}(i(a)i(b)i(a)) = i^{-1}(i(c)) = c = \gamma_a(b)$ , que era lo que queríamos demostrar. ■

Además de ayudarnos a caracterizar a los espacios de Fischer en términos de grupos, los grupos  $G_0(F)$  y  $G_1(F)$  poseen, cada uno, la siguiente propiedad que los caracteriza.

**Proposición 3.2.6.** *Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal conexo.*

1  $S$  es un espacio de Fischer si, y sólo si,  $G_0(S) < \text{Aut}(S)$ . En este caso,  $G_0(S)$  tiene la siguiente propiedad universal.

Si  $S$  está contenido en un grupo  $G$ , entonces existe una función suprayectiva  $\varphi : G \rightarrow G_0(S)$  cuyo núcleo es igual al centro de  $G$  y que, además, hace conmutar el siguiente diagrama



donde  $i$  es la inmersión natural de  $S$  en  $G_0(S)$  (es decir,  $i(a) = \gamma_a$ ) e  $i'$  es la inmersión de  $S$  en  $G$ .

2  $S$  es un espacio de Fischer si, y sólo si, la función natural  $\rho : P(S) \rightarrow G_1(S)$  (es decir,  $\rho(a) = [a]$ , la clase de  $a$ ) es inyectiva. En este caso,  $G_1(S)$  tiene la siguiente propiedad universal.

Si  $S$  está contenido en un grupo  $G$ , entonces existe una función suprayectiva  $\psi : G \rightarrow G_0(S)$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 P_S & \xrightarrow{\rho} & G_1(S) \\
 \downarrow i' & \searrow \psi \circ \rho & \downarrow \psi \\
 & & G
 \end{array}$$

donde  $i'$  es la inmersión de  $S$  en  $G$ .

*Demostración.* Haremos la prueba en dos partes.

- 1 Por el teorema 3.2.3 tenemos la primera parte. Para la segunda parte tenemos que  $P_S$  es un  $G$ -conjunto como en la proposición anterior, y así, la representación por permutaciones (morfismo)  $\varphi' : G \rightarrow \text{Sim}_{P_S}$ , que esta acción define, manda a los elementos de la forma  $i(a)$  (con  $a \in P_S$ ) en  $\gamma_a$ , además, su núcleo es el centro  $Z(G)$  de  $G$ , ya que  $G$  actúa en la imagen de  $P_F$  bajo  $i$  por conjugación y, dado que  $\langle i(a) : a \in P_S \rangle = G$ , la imagen de  $G$  bajo  $\varphi'$  es  $G_0$ , por lo tanto, tenemos un morfismo suprayectivo  $\varphi : G \rightarrow G_0(S)$  tal que  $\varphi(i(a)) = \gamma_a$  para todo  $a \in P_S$ .
- 2 Si  $\rho$  es inyectiva, entonces es una inmersión de  $S$  en  $G_1(S)$  y, por lo tanto,  $S$  es un espacio de Fischer. Ahora, si  $F$  es un espacio de Fischer, por el teorema 3.2.3 existe un grupo  $G$  y una inmersión  $i$  de  $F$  en  $G$ , entonces, como  $i$  respeta las relaciones dadas en la definición de  $G_1(S)$ , existe un morfismo  $\psi : G_1(S) \rightarrow G$  tal que  $\psi(\rho(a)) = i(a)$  y, dado que  $i$  es inyectiva, tenemos que también  $\rho$  es inyectiva. La suprayectividad de  $\psi$  se da porque  $\langle i(a) : a \in P_S \rangle = G$ .

■

**Corolario 3.2.7.** *Sea  $F$  un espacio de Fischer y  $G$  un grupo tal que  $F$  está inmerso en  $G$ , entonces,  $G_0(F)$  es cociente de  $G$  y este, a su vez, es cociente de  $G_1$ , más precisamente, para  $G_0$  tenemos que  $G_0(F) \cong G/Z(G)$ .*

*Demostración.* El resultado es inmediato por la proposición anterior y el primer teorema de isomorfismo. ■

**Corolario 3.2.8.** *Sea  $F$  un espacio de Fischer, entonces,  $Z(G_0(F)) = \{1\}$ .*

*Demostración.* Como vimos en la demostración del teorema 3.2.3,  $F$  está contenido en  $G_0(F)$ , entonces, aplicando la proposición 3.2.6, tenemos que  $\varphi = \text{Id}_{G_0(F)}$  hace conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 P_F & \xrightarrow{i} & G_0(F) \\
 \downarrow i & \searrow \varphi \circ i & \downarrow \varphi \\
 & & G_0(F)
 \end{array}$$

Y así,  $Z(G_0(F)) = \ker(\text{Id}_{G_0(F)}) = \{1\}$ . ■

Es claro que no todo grupo tiene a un espacio de Fischer inmerso, para que esto ocurra se deben cumplir varios requisitos como que el grupo esté generado por elementos de orden dos, que la acción por conjugación del grupo en sí mismo de comporte de forma especial, etcetera. Para saber cuales grupos sí contienen a un espacio de Fischer tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.2.9.** Sea  $G$  un grupo. Decimos que  $T \subset G$  es un *conjunto de 3-transposiciones* si

- i) para todo  $a \in T$ , el orden  $O(a) = 2$ .
- ii) para cualesquiera  $a, b \in T$ , el orden del producto  $O(ab) = 1, 2$  ó  $3$ .
- iii) el conjunto  $T^G = \{gag^{-1} : g \in G, a \in T\} = T$ , es decir,  $T$  es cerrado bajo conjugación por elementos de  $G$ .
- iv)  $T$  genera a  $G$ .

En este caso decimos que  $G$  es un *grupo de 3-transposiciones*.

**Ejemplos 3.2.10.** Algunos grupos de 3-transposiciones.

- 1 Sea  $Sim_n$  el grupo simétrico sobre un conjunto de  $n$  elementos y sea  $T = \{(i j) : 1 \leq i < j \leq n\} \subset Sim_n$  el conjunto de las transposiciones, entonces,  $T$  es un conjunto de 3-transposiciones.
- 2 Sea  $MP_n^{sign} = \{M = (m_{i,j})\}$  el grupo de matrices de permutación con signo de tamaño  $n$  y sea  $MT_n^{sign}$  el conjunto de “transposiciones con signo”, es decir, matrices de permutación con signo cuya distribución de las entradas distintas de cero es igual a la de una matriz de permutación asociada a una transposición. Ahora, sea  $MP_n^{2sign} \subset MP_n^{sign}$  el conjunto de matrices de permutación con signo tales que tienen exactamente una cantidad par de entradas iguales a  $-1$  y sea  $MT_n^{2sign}$  el subconjunto de  $MT_n^{sign}$  de matrices tales que todas las entradas dentro de la diagonal valen  $1$  y las que están fuera valen ambas  $1$  o ambas  $-1$ . Entonces  $MP_n^{2sign}$  es un grupo de 3-transposiciones y  $MT_n^{2sign}$  es su conjunto de 3-transposiciones.

*Demostración.* Es inmediato que  $T$  es un conjunto de 3-transposiciones dentro de  $Sim_n$ .

Para la segunda parte, primero es necesario ver que  $MP_n^{2sign}$  es un subgrupo de  $MP_n^{sign}$ . Sean  $M, N \in MP_n^{2sign}$  y sean  $M'$  y  $N'$  las matrices de permutación resultantes de quitarles los signos a las entradas de  $M$  y  $N$ . Sean  $n_M, n_N$  y  $n_P$  el número de signos negativos en las matrices  $M, N$  y  $MN$ , respectivamente. Entonces  $\det(M'N')(-1)^{n_P} = \det(MN) = \det(M)\det(N) =$

$\det(M')\det(N')(-1^{n_M+n_N})$  y, dado que  $n_M$  y  $n_N$  son pares, tenemos que  $\det(M'N')(-1^{n_P}) = \det(M'N')$ , por lo tanto  $n_P$  es par.

Resta verificar que  $MT_n^{2sign}$  es un conjunto de 3-transposiciones. En la proposición 1.3.8 dimos un isomorfismo entre  $MP_{sign}$  y  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes Sim_n$ , donde a cada matriz de  $MT_n^{2sign}$  le corresponde una pareja de la forma

$$((1, \dots, \pm 1, \dots, 1, \dots, \pm 1, \dots, 1), (i \ j)),$$

tal que las entradas distintas de 1 del elemento de  $\mathbb{Z}_2^n$  son, precisamente, las correspondientes a  $i$  y  $j$ . De aquí es claro que  $MT_n^{2sign}$  es un conjunto de 3-transposiciones. ■

**Proposición 3.2.11.** *Sea  $F$  un espacio de Fischer y  $G$  un grupo tal que  $F$  está inmerso en  $G$ , entonces  $G$  es un grupo de 3-transposiciones.*

*Demostración.* Sea  $i$  la inmersión de  $F$  en  $G$ , es claro que  $\{i(a) : a \in F\}$  es un conjunto de 3 transposiciones de  $G$ . ■

**Proposición 3.2.12.** *Sea  $G$  un grupo de 3-transposiciones, entonces existe un espacio de Fischer  $F$  inmerso en  $G$ .*

*Demostración.* Sea  $T$  un conjunto de 3 transposiciones de  $G$  y sea  $L = \{a, b, c\} : a, b, c \in T, aba = c$ . Sea  $i$  la inclusión de  $T$  en  $G$ . Entonces  $i$  es una inmersión del espacio  $F = (T, L)$  en  $G$ . ■

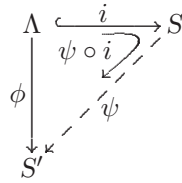
### 3.3. Diagramas

Los espacios de Fischer, además de poseer una estructura algebraica, algunos también tienen algo similar a una base, pero en una versión más débil a la que conocemos para espacios vectoriales o grupos libres; ésta es, más bien, parecido a lo que tenemos en un grupo cuando lo damos mediante una presentación, en el sentido de que no cualquier función que sale de esta “base” es posible extenderla.

Dada una categoría  $\mathcal{C}$  tal que, sus elementos son espacios parcialmente lineales (no necesariamente todos) y sus morfismos los morfismos de espacios parcialmente lineales,<sup>2</sup> tenemos la siguiente definición.

**Definición 3.3.1.** Sea  $S$  un elemento de la categoría  $\mathcal{C}$ . Un *diagrama* es una subgráfica  $\Lambda \subset \Gamma(S)$  que genera a  $S$  y es tal que, si  $S'$  es, también, un espacio parcialmente lineal en  $\mathcal{C}$ , y  $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma(S')$  es un morfismo de gráficas, entonces existe un morfismo  $\psi : S \rightarrow S'$  que hace conmutar el diagrama.

<sup>2</sup>La definición de categoría puede encontrarse en el Capítulo 1, sexta parte, así como también, puede encontrar la definición de morfismo de espacios parcialmente lineales en el Capítulo 2, primera parte



Donde  $i$  es la inclusión de  $\Lambda$  en  $S$ .

Notemos que, en la definición, estamos tratando a un espacio parcialmente lineal  $S$  como su gráfica de colinealidad  $\Gamma(S)$ . Esto es posible dado que la estructura de la gráfica de colinealidad de un espacio  $S$  viene dada por la estructura de  $S$ . Lo hacemos con el fin de no abrumar la notación.

Los ejemplos que nos interesan son, claramente, cuando  $S$  es un espacio de Fischer, pero para poder dar algunos es necesario trabajar más, así que dedicaremos los capítulos posteriores para esto. Como ya vimos, para poder hablar de diagramas es necesario hablar de categorías, especialmente en lo que resta de la tesis trabajaremos con las siguientes.

**Definición 3.3.2.** Decimos que  $\mathcal{FI}$  es la categoría completa de espacios de Fischer, donde los objetos son todos los espacios de Fischer y los morfismos son los morfismos de espacios parcialmente lineales. También decimos que  $\mathcal{SP}$  es la subcategoría de  $\mathcal{FI}$  que consta de los espacios simplécticos.





## Capítulo 4

# Diagramas en $\mathcal{FI}$

Los primeros ejemplos de diagramas para un espacio parcialmente lineal los encontramos cuando estos espacios pertenecen a la categoría (completa) de espacios de Fischer. No todos los espacios de Fischer tendrán diagrama en esta categoría; los que sí, los construiremos mediante los grupos de Coxeter de los diagramas de Dynkin simplemente enlazados, aprovechando la relación que existe entre los grupos de 3-transposiciones y los espacios de Fischer, sólo nos quedará demostrar que estos grupos son de 3-transposiciones.

### 4.1. Gráficas que no son diagramas

**Definición 4.1.1.** Sea  $F$  un espacio de Fischer. Decimos que  $F$  es un espacio *simpléctico* si todos sus planos son duales afines.

**Lema 4.1.2.** Sean  $F$  y  $F'$  espacios de Fischer y sea  $\varphi : F \rightarrow F'$  un morfismo suprayectivo, entonces  $F$  es un espacio simpléctico si, y sólo si,  $F'$  es un espacio simpléctico.

*Demostración.* Inmediato del corolario 3.1.13. ■

**Lema 4.1.3.** Sea  $\Lambda$  una gráfica, entonces existe un espacio simpléctico  $F$  y un morfismo de gráficas  $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma(F)$ .

*Demostración.* Sean  $V = \mathbb{F}_2\Lambda$  y  $f$  la forma bilineal asociada a este espacio vectorial. Sea  $q$  la forma cuadrática definida como 1 en los puntos de  $\Lambda$  y extendida mediante la fórmula 1.2. Sea  $O(q)$  el espacio cuyos puntos son los elementos del conjunto  $\{v \in V : q(v) = 1, v \notin \text{rad}(f)\}$  y definamos las líneas como los conjuntos  $\{u, v, w\}$  donde  $u + v + w = 0$ . Si dos puntos  $v$  y  $w$  son tales que  $q(v) = q(w) = 1$ , entonces, para que sean colineales en  $O(q)$  es necesario y suficiente que  $f(v, w) = 1$ , dado que  $q(v + w) = q(v) + q(w) + f(v, w) = f(v, w)$ .

Sean  $l = \{u, v, w\}$  y  $l' = \{u, v', w'\}$  dos líneas en  $O(q)$  distintas y concurrentes.

**Caso 1.** Si  $v$  es colineal con  $v'$ , sea  $\alpha$  tal que  $\{v, v', \alpha\}$  es línea, entonces  $\alpha = v + v' = v + v' + u + u = w + w'$ , y así,  $\{w, w', \alpha\}$  también es línea, y ahora, como  $f(v, w') = f(v, v' + u) = f(v, v') + f(v, u) = 1 + 1 = 0$ , tenemos que  $v$  no es colineal con  $w'$  y, análogamente,  $v'$  no es colineal con  $w$ , por lo tanto,  $\langle l \cup l' \rangle$  es un plano dual afín.

**Caso 2.** Si  $v$  no es colineal con  $v'$ ,  $f(v, w') = f(v, v' + u) = f(v, v') + f(v, u) = 1 + 0 = 1$ , entonces  $v$  es colineal con  $w'$  y, por el caso anterior,  $\langle l \cup l' \rangle$  es un plano dual afín.

Entonces,  $O(q)$  es un espacio simpléctico y la inclusión de  $\Lambda$  en  $\Gamma(O(q))$  es un morfismo de gráficas. ■

**Proposición 4.1.4.** *Sea  $\mathcal{C}$  una subcategoría de  $\mathcal{FI}$  que, a su vez, contiene a la categoría  $\mathcal{SP}$ , entonces los únicos espacios que pueden tener diagrama en  $\mathcal{C}$  son los espacios simplécticos.*

*Demostración.* Sea  $\Lambda$  un diagrama para un espacio  $F$ , entonces por el lema anterior existe un espacio simpléctico  $F'$  y un morfismo  $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma(F')$ , entonces, por ser  $\Lambda$  un diagrama, existe un morfismo  $\psi : F \rightarrow F'$  que extiende a  $\phi$ , y así, por el lema 4.1.2,  $F$  puede contener planos afines. ■

**Proposición 4.1.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una subcategoría de  $\mathcal{FI}$  que, a su vez, contiene a la categoría  $\mathcal{SP}$ , y sea  $\Lambda$  una gráfica, entonces, si  $F$  es un espacio en  $\mathcal{C}$ ,  $\Lambda$  es una subgráfica de  $\Gamma(F)$  y el subespacio que genera  $\Lambda$  contiene un plano afín, entonces  $\Lambda$  no es un diagrama en  $\mathcal{C}$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe un espacio  $F'$  en la categoría  $\mathcal{C}$  tal que  $\Lambda$  es un diagrama para  $F'$ , entonces existe un morfismo suprayectivo  $\psi : F' \rightarrow \langle \Lambda \rangle < F$ ; así que, por el lema 4.1.2,  $F'$  contiene un plano afín, lo que contradice al resultado anterior. ■

A continuación trabajaremos con los espacios parcialmente lineales que definimos en la proposición 2.2.4. Dada una forma bilineal simétrica  $f$  en  $\mathcal{V}$ , llamaremos a la pareja  $(P, L)$  el  $\mathbb{F}_3$ -espacio proyectivo asociado a  $f$ .

**Proposición 4.1.6.** *Sea  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_3$  y  $f$  una forma bilineal simétrica en  $\mathcal{V}$ , entonces, el  $\mathbb{F}_3$ -espacio proyectivo  $S$ , asociado a  $f$ , es un espacio de Fischer.*

*Demostración.* Sea  $a \in S$ , demostraremos que  $\gamma_a$  es un automorfismo de  $F$ . Sean  $b$  y  $c$  son puntos de  $S$  y sean  $u \in b$ ,  $v \in c$ . Si  $f(u, v) = 0$ , entonces  $b$  y  $c$  no son colineales y, si  $f(u, v) \neq 0$ , entonces  $b$  y  $c$  definen una línea, como se demostró en la proposición 2.2.4. Así tenemos que, dado un punto  $b \in S$ ,  $u \in b$  y  $p \in a$ , la función  $\gamma_a$  se escribe como  $\gamma_a(b) = [u + f(u, p)p]$ .

Sea  $\{b, c, d\}$  una línea de  $S$  y sean  $u \in b$ ,  $v \in c$ ,  $w \in d$  y  $p \in a$ . Entonces  $\{\gamma_a(b), \gamma_a(c), \gamma_a(d)\} = \{[u + f(u, p)p], [v + f(v, p)p], [w + f(w, p)p]\}$ , y para ver que esto es una línea seguimos las siguientes notamos que

$$\begin{aligned}
& (u + f(u, p)) + f((u + f(u, p)p), (v + f(v, p)p))(v + f(v, p)p) = \\
& \quad u + f(u, p)p + (f(u, v) + f(u, p)f(v, p) + f(v, p)f(u, p) + \\
& \quad \quad f(u, p)f(v, p)f(p, p))(v + f(v, p)p) = \\
& \quad u + f(u, v)v + f(u, p)p + f(u, v)f(v, p)p = \\
& \quad (u + f(u, v)v) + (f(u, p) + f(f(u, v)v, p))p = \\
& \quad (u + f(u, v)v) + f(u + f(u, v)v, p)p = w + f(w, p)p
\end{aligned}$$

■

De esta demostración, más que las cuentas, es necesario recordar que en un  $\mathbb{F}_3$ -espacio proyectivo, dos puntos  $a$  y  $b$  son colineales si, y sólo si,  $f(a, b) \neq 0$ .

**Lema 4.1.7.** *Sea  $\Lambda$  una gráfica, entonces existe un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  sobre  $\mathbb{F}_3$  y una forma bilineal simétrica  $f$  en  $\mathcal{V}$  tal que  $\Lambda \subset \Gamma(F)$ , donde  $F$  es el  $\mathbb{F}_3$ -espacio proyectivo asociado a  $f$ .*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{V} = \mathbb{F}_3(\Lambda)$  y  $f$  la forma bilineal definida en la base de puntos de  $\Lambda$  como

$$f(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = b \\ 1 & \text{si } a \text{ y } b \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

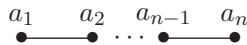
Así tenemos que todos los puntos de  $\Lambda$  son puntos del espacio, además, los puntos adyacentes son colineales en  $F$  y los no adyacentes no son colineales, y así,  $\Lambda$  es subgráfica de  $\Gamma(F)$ . ■

Sea  $\Lambda$  una gráfica y  $F$  el  $\mathbb{F}_3$ -espacio proyectivo construido en el lema pasado, denotaremos por  $F_\Lambda$  al subespacio de  $F$  generado por los puntos de  $\Lambda$ .

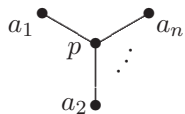
Ahora, con lo que tenemos de teoría, podremos demostrar que ciertas gráficas no son diagramas en  $\mathcal{FI}$  y, ya habiendo eliminado dichas posibilidades, nos restarán pocos casos por analizar.

**Lema 4.1.8.** *Sea  $\Lambda$  una gráfica.*

- *Si la gráfica mostrada en la figura es subgráfica de  $\Gamma(F_\Lambda)$ , entonces  $(a_1 + \dots + a_n) \in F_\Lambda$ .*



- *Si la gráfica mostrada en la figura es subgráfica de  $\Gamma(F_\Lambda)$ , entonces  $(p + a_1 + \dots + a_n) \in F_\Lambda$  y  $(a_1 + \dots + a_n) \in F_\Lambda$  si, y sólo si,  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .*

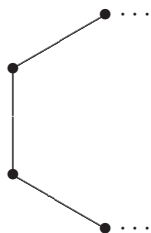


*Demostración.* Para el primer caso,  $f((a_1 + \dots + a_n), (a_1 + \dots + a_n)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(a_i, a_j)$  y, como  $f(a_i, a_j) = 0$  cuando  $i \neq j, j-1, j+1$ , entonces  $f((a_1 + \dots + a_n), (a_1 + \dots + a_n)) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a_i, a_{i+1}) + \sum_{i=1}^n f(a_i, a_i) = 2(n-1) + n = 1$ .

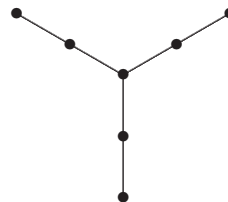
Para el segundo caso,  $f((p + a_1 + \dots + a_n), (p + a_1 + \dots + a_n)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(a_i, a_j) + 2 \sum_{i=1}^n f(p, a_i) + f(p, p)$  y, como  $f(a_i, a_j) = 0$  cuando  $i \neq j$ , entonces  $f((p + a_1 + \dots + a_n), (p + a_1 + \dots + a_n)) = \sum_{i=1}^n (f(a_i, a_i) + 2f(p, a_i)) + f(p, p) = 1$ . Ahora, para la otra parte,  $f((a_1 + \dots + a_n), (a_1 + \dots + a_n)) = \sum_{i=1}^n f(a_i, a_i) = n$ , por lo tanto  $(a_1 + \dots + a_n) \in F_\Lambda$  si, y sólo si,  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . ■

**Proposición 4.1.9.** *Sea  $\Lambda$  una gráfica y sea  $F$  el  $\mathbb{F}_3$ -espacio proyectivo construido en el lema 4.1.7 y  $f$  la forma bilineal dada en la demostración. Si  $\Lambda$  es una de las siguientes gráficas, entonces  $F_\Lambda$  contiene un plano afín.*

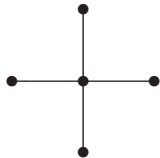
1 Ciclos.



2 “Y” de siete puntos.



3 Cruz de cinco puntos.



4 Gráfica con  $n$  puntos con dos vértices de orden tres, como se muestra en el dibujo.



5 Gráfica con ocho puntos como se muestra en el dibujo.

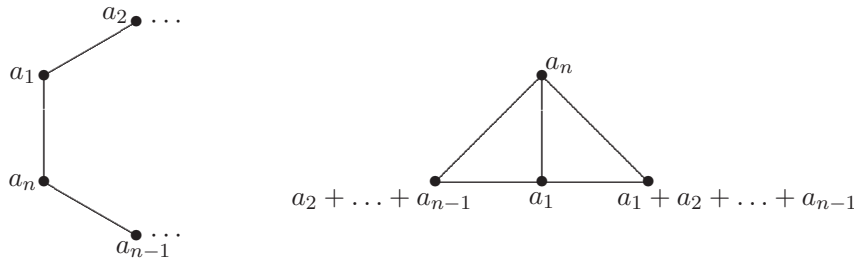


6 Gráfica con nueve puntos como se muestra en el dibujo.



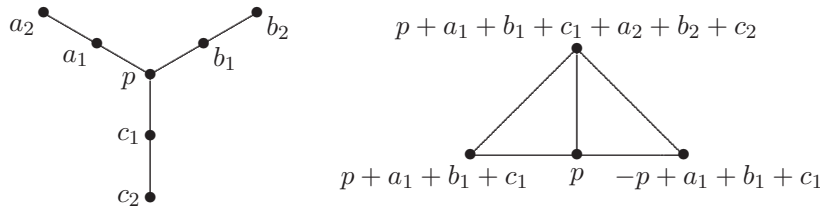
*Demostración.* La prueba la haremos por casos.

- Si  $\Lambda$  es un ciclo, numeramos los vértices como se muestra en la figura de la izquierda.



Por la definición de  $f$  tenemos que  $f(a_1, a_2) = 1$  y  $f(a_1, a_i) = 0$  para  $2 < i < n$ , entonces, por bilinealidad,  $f(a_1, a_2 + \dots + a_{n-1}) = 1$ , lo que nos dice que estos dos puntos son colineales y, además, por la definición de las líneas del 3-espacio proyectivo, el tercer punto de la línea que definen es  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Ahora, como  $f(a_1, a_n) = f(a_{n-1}, a_n) = 1$  y  $f(a_i, a_n) = 0$  para  $1 < i < n-1$ , tenemos que  $f(a_2 + \dots + a_{n-1}, a_n) = 1$  y  $f(a_1, a_2 + \dots + a_{n-1}, a_n) = -1$ , por bilinealidad; entonces  $a_n$  es colineal con todos los puntos de una línea, y así,  $F_\Lambda$  contiene un plano afín.

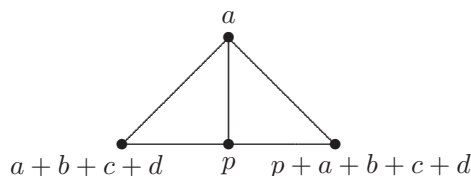
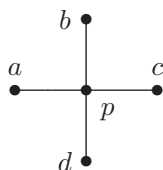
- Si  $\Lambda$  es una “Y” de siete puntos, numeramos los vértices como se muestra en la figura de la izquierda.



Por la definición de  $f$  tenemos que  $f(p, a_1) = f(p, b_1) = f(p, c_1) = f(p, p) = 1$  y, por bilinealidad  $f(p, p + a_1 + b_1 + c_1) = 1$ , así que estos dos puntos son colineales y, además, el tercer punto de la línea que definen es  $-p + a_1 + b_1 + c_1$ . Ahora, como  $f(p, a_2) = f(p, b_2) = f(p, c_2) = 0$ , el punto  $p$  es colineal con  $p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2$ , también podemos ver que  $f(a_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) = 0$  dado que  $f(a_1, a_1) = f(a_1, p) = f(a_1, a_2) = 1$  y vale cero para los demás puntos, análogamente  $f(b_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) =$

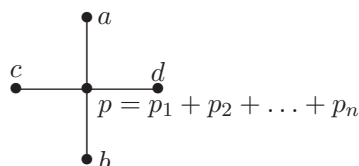
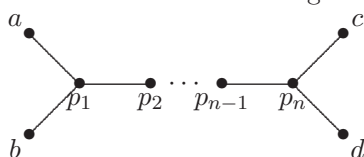
0 y  $f(c_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) = 0$ , y así tenemos que  $f(p + a_1 + b_1 + c_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) = f(p, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) + f(a_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) + f(b_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) + f(c_1, p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$ , por lo tanto, los puntos  $p + a_1 + b_1 + c_1$  y  $p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2$  son colineales. Mediante un procedimiento análogo podemos demostrar que  $-p + a_1 + b_1 + c_1$  y  $p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2$  también son colineales. Entonces, como el punto  $p + a_1 + b_1 + c_1 + a_2 + b_2 + c_2$  es colineal con todos los puntos de una línea,  $F_\Lambda$  contiene un plano afín.

- Si  $\Lambda$  es una cruz de cinco puntos, numeramos los vértices como se muestra en la figura de la izquierda.



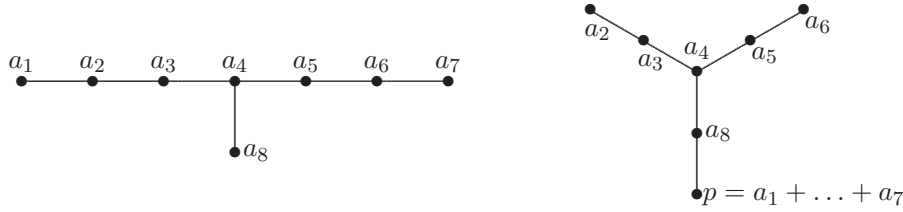
Por la definición de  $f$  tenemos que  $f(p, a) = f(p, b) = f(p, c) = f(p, d) = 1$ , así que, por bilinealidad,  $f(p, a + b + c + d) = 1$ , lo que nos dice que estos dos puntos son colineales y, además, el tercer punto de la línea que definen es  $p + a + b + c + d$ . Ahora, inicialmente tenemos que  $f(p, a) = f(a, a) = 1$  y que  $f(a, b) = f(a, c) = f(a, d) = 0$ , por lo tanto  $f(a, a + b + c + d) = 1$  y  $f(p + a + b + c + d) = -1$ , así que  $a$  es colineal a todos los puntos de una línea y, por lo tanto,  $F_\Lambda$  contiene un plano afín.

- Si  $\Lambda$  es una gráfica como se muestra en la figura de la izquierda, la numeramos de la siguiente manera.



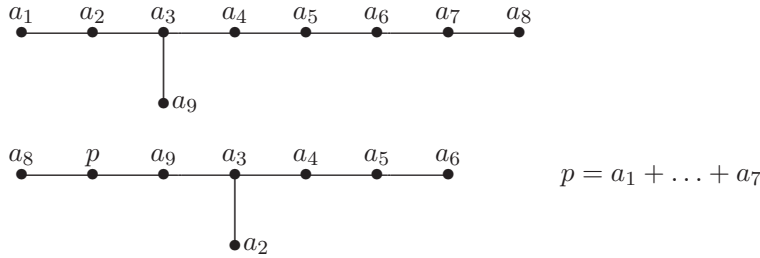
Reduciremos este caso al caso anterior. Tenemos que  $f(a, p_1) = 1$  y  $f(a, p_i) = 0$  para  $1 < i \leq n$ , entonces por bilinealidad  $f(a, p_1 + \dots + p_n) = 1$ , por lo tanto  $p_1 + \dots + p_n$  es colineal con  $a$  y, análogamente también lo es con  $b, c$  y  $d$ .

- Si  $\Lambda$  es una gráfica como se muestra en la figura de la izquierda, la numeramos de la siguiente manera.



Reduciremos este caso al segundo caso. Tenemos que  $f(a_8, a_4) = 1$  y  $f(a_8, a_i) = 0$  para  $i \neq 4, 8$ , entonces por bilinealidad  $f(a_8, a_1 + \dots + a_7) = 1$ . Ahora, si  $1 < i < 8$  entonces  $f(a_i, a_j) = 1$  para exactamente tres valores de  $j$  entre 1 y 7, por lo tanto,  $f(a_i, a_1 + \dots + a_7) = 0$ .

- Si  $\Lambda$  es una gráfica como se muestra en la figura de arriba, la numeramos de la siguiente manera.



Reduciremos este caso al caso anterior. Tenemos que  $f(a_9, a_3) = 1$  y  $f(a_9, a_i) = 0$  para  $i \neq 3, 9$ , entonces por bilinealidad  $f(a_9, a_1 + \dots + a_7) = 1$  y también, como  $f(a_8, a_7) = 1$  y  $f(a_8, a_i) = 0$  para  $i \neq 8, 7$ , entonces por bilinealidad  $f(a_8, a_1 + \dots + a_7) = 1$ , resta demostrar que  $f(a_i, a_1 + \dots + a_7) = 0$  para  $1 \leq i \leq 7$ , lo que es cierto dado que  $f(a_i, a_j) = 1$  para exactamente tres valores de  $j$  entre 1 y 7.

■

**Corolario 4.1.10.** *Sea  $\mathcal{C}$  una subcategoría de  $\mathcal{FI}$  que, a su vez, contiene a la categoría  $\mathcal{SP}$ , a todos los  $\mathbb{F}_3$ -espacios proyectivos y a sus respectivos subespacios. Si una gráfica  $\Lambda$  contiene, como subgráfica, a una de las seis gráficas descritas en la proposición anterior, entonces  $\Lambda$  no es una gráfica en  $\mathcal{C}$ .*

*Demostración.* Inmediato de la proposición anterior y la proposición 4.1.5.

■

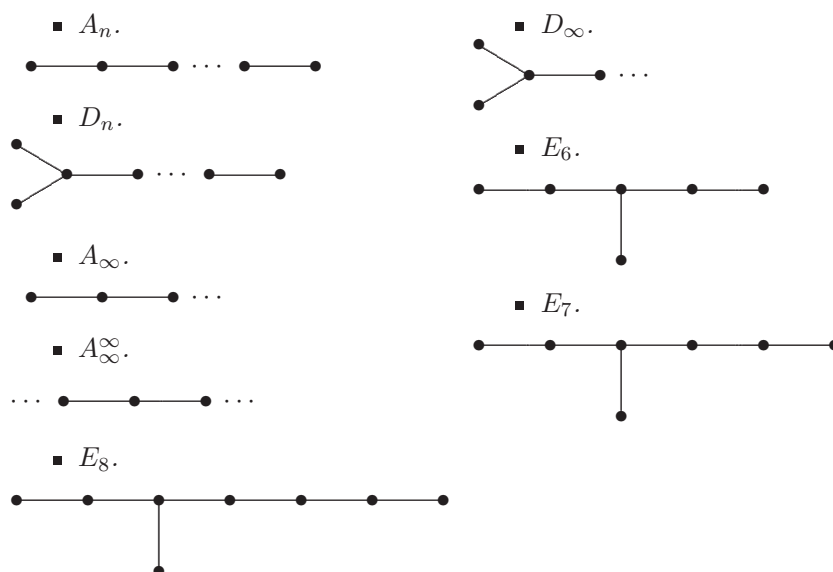
## 4.2. Diagramas de Dynkin como diagramas en $\mathcal{FI}$

En la sección anterior dimos grandes limitantes para que un espacio pueda tener diagrama y, también, para que una gráfica  $\Lambda$  pueda ser diagrama para algún espacio. En esta sección demostraremos que, para las gráficas



restantes (que son los diagramas de Dynkin simplemente enlazados) existen espacios para los cuales éstas son diagramas.

**Lema 4.2.1.** *Sea  $\Lambda$  una gráfica. Si  $\Lambda$  no contiene, como subgráfica, a alguna de las gráficas descritas en el lema 4.1.9, entonces  $\Lambda$  es una de las siguientes gráficas:*



*Demostración.*  $\Lambda$  es un árbol, dado que no tiene ciclos, además, como las gráficas de los tipos 3 y 4 no son subgráficas, entonces sólo puede tener vértices de orden menor o igual a 3 y, más aún, sólo puede tener un vértice de orden 3.

Si  $\Lambda$  no tiene vértices de orden 3, entonces es una gráfica del tipo  $A_n$ ,  $A_\infty$  o  $A_\infty^\infty$ .

Si  $\Lambda$  tiene un vértice de orden 3, como la gráfica del tipo 2 no es subgráfica, dicho vértice es adyacente a, al menos, un vértice de orden 1. Cuando es adyacente a, exactamente, un vértice de orden 1, tenemos que  $\Lambda$  es del tipo  $E_6$ ,  $E_7$  o  $E_8$ . Cuando es adyacente a más de un vértice de orden 1,  $\Lambda$  es del tipo  $D_n$  o  $D_\infty$ . ■

Con este resultado tenemos que las únicas gráficas que pueden ser diagramas son las gráficas  $A_n$ ,  $D_n$ ,  $A_\infty$ ,  $A_\infty^\infty$ ,  $D_\infty$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  y  $E_8$ , que son, precisamente, los *diagramas de Dynkin simplemente enlazados*. Con el siguiente resultado estaremos a un paso de demostrar que estas gráficas son, efectivamente, diagramas en  $\mathcal{FI}$ .

**Lema 4.2.2.** *Sean  $\Lambda$  una gráfica y  $G$  el grupo de Coxeter asociado a  $\Lambda$ , sea  $T = \Lambda^G$  la clase de conjugación de  $\Lambda$  en  $G$ . Si  $T$  es un conjunto de 3-transposiciones, entonces  $\Lambda$  es un diagrama para el espacio  $F$  que se deriva de  $T$ .*

*Demostración.* Sea  $F'$  un espacio de Fischer y  $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma(F')$  un morfismo de gráficas. Sea  $i' : F' \rightarrow G_0(F')$  la inmersión natural (es decir,  $\gamma(a) = \gamma_a$ ). Demostraremos que  $i' \circ \phi$  respeta las relaciones entre los puntos de  $\Lambda$  en  $G$ . Sean  $a, b \in \Lambda$ , primeramente tenemos que  $(i' \circ \phi(a))^2 = (\gamma_{\phi(a)})^2 = 1$ . Si  $a$  y  $b$  son adyacentes, entonces  $\phi(a)$  es colineal con  $\phi(b)$  en  $F'$ , sea  $c$  tal que  $\{\phi(a), \phi(b), c\}$  es una línea de  $F'$ , entonces  $i'(c) = \gamma_c = \gamma_{\phi(a)}\gamma_{\phi(b)}\gamma_{\phi(a)} = \gamma_{\phi(b)}\gamma_{\phi(a)}\gamma_{\phi(b)}$ , por lo tanto  $(\gamma_{\phi(a)}\gamma_{\phi(b)})^3 = 1$ . Si  $a$  y  $b$  no son adyacentes, entonces  $\phi(a)$  no es colineal con  $\phi(b)$  en  $F'$ , entonces  $i'(\phi(a))i'(\phi(b)) = \gamma_{\phi(a)}\gamma_{\phi(b)} = \gamma_{\phi(b)}\gamma_{\phi(a)} = i'(\phi(b))i'(\phi(a))$ , por lo tanto  $(i'(\phi(a))i'(\phi(b)))^2 = 1$ .

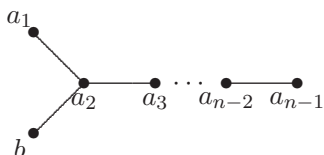
Ya demostrado que  $i' \circ \phi$  respeta las relaciones entre los puntos de  $\Lambda$  en  $G$ , tenemos un morfismo  $\psi : G \rightarrow G_0(F')$  que extiende a  $i' \circ \phi$ . Demostraremos que para todo  $a \in T$ ,  $\psi(a) \in i'(F')$  y, además,  $\psi$  restringido a  $T$  nos induce un morfismo  $\varphi : T \rightarrow F'$  entre espacios parcialmente lineales. Sea  $a \in T$ , entonces  $a = gpg^{-1}$  con  $p \in \Lambda$  y  $g \in G$ , así  $\psi(a) = \psi(gpg^{-1}) = \psi(g)\psi(p)\psi(g^{-1}) = \psi(g)i'(\phi(p))\psi(g)^{-1}$  y, como  $i'$  es una inmersión,  $\psi(g)i'(\phi(p))\psi(g)^{-1} = \psi(a) \in i'(F')$ . Ahora sea  $\{a, b, c\}$  una línea de  $T$ , es decir  $aba = c$ , entonces  $\psi(c) = \psi(aba) = \psi(a)\psi(b)\psi(a)$  y, como  $\psi(a), \psi(b), \psi(c) \in i'(F')$  y como  $i'$  es inmersión, la preimagen de estos puntos forman una línea en  $F'$ . Así que si definimos  $\varphi(a) = i^{-1}(\psi(a))$  tenemos que  $\varphi$  es un morfismo.

Por último, queda demostrar que  $\Lambda$  genera a  $T$  como espacio parcialmente lineal. Sea  $a \in T$ , entonces  $a = gpg^{-1}$  con  $p \in \Lambda$  y  $g \in G$ , además, como  $\Lambda$  genera a  $G$ ,  $g = x_1 \dots x_n$  con  $x_i \in \Lambda$ , así que  $a = x_1 \dots x_n p x_n \dots x_1$ , así que tenemos las sucesiones  $\beta_1 = p, \beta_2 = x_n, \dots, \beta_{n+1} = x_1$  y  $\alpha_1 = p, \alpha_2 = x_n p x_n, \dots, \alpha_{n+1} = a$ , como en el teorema 3.1.11, así que  $T = \langle \Lambda \rangle$ . ■

**Teorema 4.2.3.** *Los grupos de Coxeter de los diagramas de Dynkin simplemente enlazados ( $A_n, D_n, A_\infty, A_\infty^\infty, D_\infty, E_6, E_7$  y  $E_8$ ) son grupos de 3-transposiciones.*

*Demostración.* La prueba la haremos para cada caso.

- 1 Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces, por el ejemplo 1.4.10, el grupo de Coxeter de  $A_n$  es  $Sim_{n+1}$  que, por el ejemplo 3.2.10, es un grupo de 3-transposiciones.
- 2 Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Demostraremos que  $MP_n^{2sign}$  es isomorfo al grupo de Coxeter asociado a  $D_n$ . Asignamos a los puntos de  $D_n$  la siguiente numeración



Sea  $G_n = \text{grp}(\{a_1 \dots a_{n-1}, b\} : a_i^2 = (a_i a_{i+1})^3 = (a_i a_j)^2 = 1, \text{ para } |i-j| > 1, b^2 = (ba_2)^3 = (ba_i)^2 = 1, \text{ para } i \neq 2)$ . Sea  $f : \{a_1, \dots, a_{n-1}, b\} \rightarrow$

$MP_n^{2sign}$  definida por  $f(a_i) = M_{\tau_i}$ , donde  $\tau_i = (i, i + 1)$  y  $f(b) = M_b$  donde

$$M_b = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para ver que  $f$  respeta las relaciones resta ver que  $O(M_b M_{\tau_i}) = 2$  para  $i \neq 2$  y  $O(M_b M_{\tau_2}) = 3$ . Para  $i \geq 3$ ,  $M_b M_{\tau_i}$  se escribe como suma directa de matrices de orden 2. Para  $i = 1$ ,  $M_b M_{\tau_i}$  es una matriz diagonal, donde las primeras dos entradas de la diagonal tienen valor  $-1$  y, el resto, tienen valor 1. Para  $i = 2$ ,

$$M_b M_{\tau_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la cual tiene orden 3. Entonces tenemos un morfismo  $\tilde{f} : G_n \rightarrow MP_n^{2sign}$ . Para demostrar que  $\{M_{\tau_i} : 1 \leq i < n\} \cup \{M_b\}$  genera a  $MP_n^{2sign}$ , consideramos a estas matrices como elementos de  $\mathbb{Z}_2^n \rtimes Sim_n$ , así, es fácil ver que todos los elementos de  $MT_n^{2sign}$  son producto de las parejas  $((-1, -1, 1, \dots), (1 \ 2))$  y  $((1, 1, \dots), (i \ i + 1))$ , y tenemos que  $MT_n^{2sign}$  es el conjunto de 3-transposiciones de  $MP_n^{2sign}$ . Entonces, por el teorema 1.4.6 tenemos que  $\tilde{f}$  es suprayectiva. Resta ver que  $|G_n| \leq n!2^{n-1}$ , para esto, procedemos por inducción de forma análoga a como lo hicimos en el ejemplo 1.4.10.

- 3 Para ver que el grupo de Coxeter  $G$ , asociado a  $A_\infty$ , es un grupo de 3-transposiciones, demostraremos que  $G \cong Sfin_{\mathbb{N}} \leq Sim_{\mathbb{N}}$  donde  $Sfin_{\mathbb{N}}$  es el subgrupo de  $Sim_{\mathbb{N}}$  que deja fijos a todos los elementos de  $\mathbb{N}$ , salvo una cantidad finita; y que  $\{(i \ i + 1) : i \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto de 3-transposiciones para  $Sfin_{\mathbb{N}}$ .

Sea  $G = grp(\{\tau_i : i \in \mathbb{N}\} : \tau_i^2 = (\tau_i \tau_{i+1})^3 = (\tau_i \tau_j)^2 = 1$ , para  $|i - j| > 1$ ) y, dado  $n \in \mathbb{N}$ , sea  $G_n = grp(\{\tau_1, \dots, \tau_n\} : \tau_i^2 = (\tau_i \tau_{i+1})^3 = (\tau_i \tau_j)^2 = 1$ , para  $|i - j| > 1$ ). Para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $G_n \subset G_{n+1}$  y  $G_n \cong Sim_n$ , entonces  $G \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim_n = Sfin_{\mathbb{N}}$ .

Ahora es suficiente notar que  $\{(i \ i + 1) : i \in \mathbb{N}\}$  es un conjunto de 3-transposiciones, lo cual es obvio.

4 Para ver que el grupo de Coxeter  $G$ , asociado a  $A_\infty^\infty$ , es un grupo de 3-transposiciones, es suficiente notar que  $G \cong Sfin_{\mathbb{Z}} \leq Sim_{\mathbb{Z}}$ , donde  $Sfin_{\mathbb{Z}}$  es el subgrupo de  $Sim_{\mathbb{Z}}$  que deja fijos a todos los elementos de  $\mathbb{Z}$ , salvo una cantidad finita; y que  $\{(i \ i + 1) : i \in \mathbb{Z}\}$  es un conjunto de 3-transposiciones para  $Sfin_{\mathbb{Z}}$ . Sea  $G = grp(\{\tau_i : i \in \mathbb{Z}\} : \tau_i^2 = (\tau_i \tau_{i+1})^3 = (\tau_i \tau_j)^2 = 1, \text{ para } |i - j| > 1)$  y tomemos  $G_n = grp(\{\tau_{-n}, \tau_{-n+1}, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n\} : \tau_i^2 = (\tau_i \tau_{i+1})^3 = (\tau_i \tau_j)^2 = 1, \text{ para } |i - j| > 1)$ . El resto de la demostración es análoga a la anterior.

5 Para ver que el grupo de Coxeter  $G$ , asociado a  $D_\infty$ , es un grupo de 3-transposiciones, es suficiente notar que  $G \cong Sfin_{\mathbb{N}}^{sign}$ , el grupo de matrices infinitas de la forma

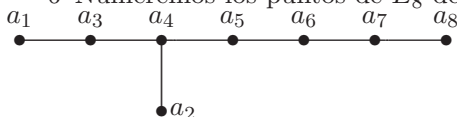
$$M_\tau^\infty = \begin{matrix} & 1 & 2 & \cdots & i & \cdots \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \tau(i) \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots \\ & & & \vdots & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

donde  $\tau \in Sfin_{\mathbb{N}}$ ; y que  $\{M_{\tau_i}^\infty : \tau_i = (i \ i + 1), i \in \mathbb{N}\} \cup \{M_b^\infty\}$  es un conjunto de 3-transposiciones, donde

$$M_b^\infty = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \end{pmatrix},$$

Para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos que  $Sim_n^{sign}$  es isomorfo a un subgrupo  $Sim_n^{sign\infty} < Sfin_{\mathbb{N}}^{sign}$  y, además  $Sfin_{\mathbb{N}}^{sign} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim_n^{sign\infty}$ . El resto de la demostración es análoga al inciso 3.

6 Numeremos los puntos de  $E_8$  de la siguiente manera.



Para ver que el grupo de Coxeter  $G$ , asociado a  $E_8$ , es un grupo de 3 transposiciones, estudiaremos primero el siguiente sistema de raíces. Sea  $\{e_1, e_2, \dots, e_8\}$  la base canónica de  $\mathbb{R}^8$  y sea  $(\ , \ )$  el producto interno usual. Sea  $L' = \{\sum_{i=1}^8 c_i e_i : c_i \in \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^8 c_i \text{ es par}\}$  y sea  $L = L' + \mathbb{Z} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i$ . Definamos a  $\Sigma = \{v \in L : |v|^2 = 2\}$ . Sea  $v \in \Sigma$ ,

$v = (\sum_{i=1}^8 c_i e_i) + k(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 e_i) = \sum_{i=1}^8 a_i$  con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $a_i = c_i + \frac{k}{2} = \frac{b_i}{2}$ , y con esto  $|v|^2 = \sum_{i=1}^8 \frac{b_i^2}{4}$ . Entonces, si  $|v| = 2$ ,  $\sum_{i=1}^8 b_i^2 = 8$ , así que,  $b_i \leq 2$  y, si  $|b_{j_1}| = 2$  para algún  $1 \leq j_1 \leq 8$ , entonces también  $|b_{j_2}| = 2$  para algún otro  $1 \leq j_2 \leq 8$  distinto; esto dado que  $\sum_{i=1}^8 c_i$  es par. Ahora, si  $|b_j| = 1$  para algún  $1 \leq j \leq 8$ , entonces  $|b_i| = 1$  para todo  $1 \leq i \leq 8$ . Con esto tenemos que  $v$  se escribe como  $\pm e_i \pm e_j$  con  $i \neq j$ , o bien, como  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ , donde hay, exactamente, una cantidad par de símbolos positivos.

Verifiquemos que  $\Sigma$  es, efectivamente, un sistema de raíces. Sean  $u, v \in \Sigma$ , por la ecuación 1.3,  $r_v(u) = u - 2\frac{(u,v)}{(v,v)}v = u - (u,v)v$ . Si  $(u,v) = 1$  entonces  $r_v(u) = -r_u(v)$ , entonces a partir de la siguiente tabla cubrimos todos los posibles casos para ver que  $r_v(u) \in \Sigma$ .

| $u$                                | $v$  | $(u,v)$ | $r_v(u)$                            |
|------------------------------------|--|---------|-------------------------------------|
| $\pm e_{i_0} \pm e_{j_0}$          | $\pm e_{i_0} \pm e_{j_0}$  | 2       | $-(\pm e_{i_0} \pm e_{j_0})$        |
| $\pm e_{i_0} \pm e_{j_0}$          | $\pm e_{i_0} \pm e_{j_1}$  | 1       | $\pm e_{j_0} \mp e_{j_1}$           |
| $\pm e_{i_0} \pm e_{j_0}$          | $\pm e_{i_1} \pm e_{j_1}$  | 0       | $\pm e_{i_0} \pm e_{j_0}$           |
| $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ | $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$                                 | 2       | $-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ |
| $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ | $\frac{1}{2} ((\sum_{h=1}^6 \pm e_{i_h}) \mp e_{i_7} \mp e_{i_8})$ | 1       | $\pm e_{i_7} \pm e_{i_8}$           |
| $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$ | $\sum_{h=1}^4 \pm e_{i_h} + \sum_{h=5}^8 \mp e_{i_h}$              | 0       | $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \pm e_i$  |

Ahora, sea  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8\}$  donde

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 - e_4 - e_5 - e_6 - e_7 + e_8)$$

$$\alpha_2 = e_1 + e_2$$

$$\alpha_i = e_{i-1} - e_{i-2} \quad (\text{para } 3 \leq i \leq 8)$$

$\Pi$ , definido de esta manera, es un sistema simple asociado a  $\Sigma$ , dado que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2,$$

lo que nos dice que los elementos de  $\Pi$  son linealmente independientes. Ahora, sea  $u \in \Sigma$ , a partir de la siguiente tabla, podremos ver que  $u$  se puede escribir como  $u = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ , donde los escalares  $a_\alpha \in \mathbb{F}$  son todos positivos o todos negativos.

| $u$  | expresión                                    |
|--|--|
| $e_j - e_i \ (8 > j > i \leq 1)$   | $\alpha_{i+2} + \dots + \alpha_{j+1}$        |
| $e_j + e_1 \ (8 > j > 1)$  | $\alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{j+1}$ |
| $e_1 + e_8$  | $2\alpha_1 + e_2 + \dots + e_7$              |
| $e_8 - e_7$  | $2\alpha_1 + \alpha_3 + e_3 + \dots + e_6$   |
| $\frac{1}{2} \left( \sum_{h=1}^{2k} e_{i_h} - \sum_{h=2k}^6 e_{i_h} \right) + e_1 + e_8$     | $\alpha_1 + \sum_{h=1}^{2k} e_{i_h}$         |
| $\frac{1}{2} \left( \sum_{h=1}^{2k+1} e_{i_h} - \sum_{h=2k+1}^6 e_{i_h} \right) - e_1 + e_8$ | $\alpha_1 - e_1 + \sum_{h=1}^{2k+1} e_{i_h}$ |

Con esto, sea  $\mathcal{W}(\Sigma)$  el grupo de Weyl asociado a  $\Sigma$ , y sea  $R = \{r_\alpha : \alpha \in \Pi\}$ , entonces por el teorema 1.5.9,  $(\mathcal{W}(\Sigma), R)$  es un sistema de Coxeter. Por último demostraremos que los elementos de  $R$  cumplen las relaciones que hay entre los puntos  $\{a_1, a_2, \dots, a_8\}$  y que el conjunto  $R^{\mathcal{W}(\Sigma)}$  es un conjunto de 3-transposiciones.

Observemos que, si  $(\alpha_i, \alpha_j) = -1$ , entonces  $r_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j + \alpha_i = r_{\alpha_j}(\alpha_i)$ , así que, por la proposición 1.5.4,  $r_{\alpha_i}r_{\alpha_j}r_{\alpha_i} = r_{\alpha_j}r_{\alpha_i}r_{\alpha_j}$ , por lo tanto  $O(r_{\alpha_i}r_{\alpha_j}) = 3$ . También, si  $(\alpha_i, \alpha_j) = 0$ , entonces  $r_{\alpha_i}(\alpha_j) = \alpha_j$ , y así,  $r_{\alpha_i}r_{\alpha_j}r_{\alpha_i} = r_{\alpha_j}$ , por lo tanto  $O(r_{\alpha_i}r_{\alpha_j}) = 2$ . Con esto sólo nos queda ver la siguiente tabla del producto interno entre los elementos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ .

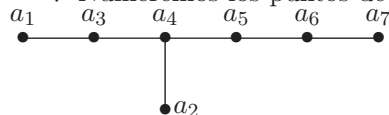
| $(,)$      | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ | $\alpha_4$ | $\alpha_5$ | $\alpha_6$ | $\alpha_7$ | $\alpha_8$ |
|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\alpha_1$ | 2          | 0          | -1         | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| $\alpha_2$ | 0          | 2          | 0          | -1         | 0          | 0          | 0          | 0          |
| $\alpha_3$ | -1         | 0          | 2          | -1         | 0          | 0          | 0          | 0          |
| $\alpha_4$ | 0          | -1         | -1         | 2          | -1         | 0          | 0          | 0          |
| $\alpha_5$ | 0          | 0          | 0          | -1         | 2          | -1         | 0          | 0          |
| $\alpha_6$ | 0          | 0          | 0          | 0          | -1         | 2          | -1         | 0          |
| $\alpha_7$ | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1         | 2          | -1         |
| $\alpha_8$ | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | -1         | 2          |

Ahora, para ver que  $R^{\mathcal{W}(\Sigma)}$  es un conjunto de 3-transposiciones, sean  $a, b \in R^{\mathcal{W}(\Sigma)}$ , donde  $a = gr_{\alpha_i}g^{-1}$ ,  $b = hr_{\alpha_j}h^{-1}$ , y sea  $\mathcal{U}$  el complemento ortogonal de  $\langle g(\alpha_i), h(\alpha_j) \rangle$ . Tenemos que  $O(a) = 2$ , dado que  $O(r_{\alpha_i}) = 2$ . Es fácil verificar que  $a = r_{g(\alpha_i)}$  (así como también  $b = r_{h(\alpha_j)}$ ), dado que  $\mathcal{W}(\Sigma) = \langle r_v : v \in \Sigma \rangle$ , así que  $\mathcal{U}$  queda invariante bajo el producto  $ab$ , resta analizar cómo se comporta dicho producto en  $\langle g(\alpha_i), h(\alpha_j) \rangle$ . Como  $\Sigma$  es un sistema de raíces, también por inducción tenemos que  $g(\alpha_i), h(\alpha_j) \in \Sigma$ , por lo que tenemos que  $(g(\alpha_i), h(\alpha_j)) = 0, \pm 1$  ó  $\pm 2$ . Si  $(g(\alpha_i), h(\alpha_j)) = 0$ , entonces  $ab(g(\alpha_i)) = -g(\alpha_i)$  y  $ab(h(\alpha_j)) = -h(\alpha_j)$ , por lo tanto  $O(ab) = 2$ . Si  $(g(\alpha_i), h(\alpha_j)) = 1$ , escribamos  $u = g(\alpha_i)$  y  $v = h(\alpha_j)$ , entonces tenemos que  $r_u r_v(v) = u - v$  y  $r_u r_v(u) = -v$ , aplicando una vez más la función  $r_u r_v(u - v) = r_u r_v(u) - r_u r_v(v) =$

$-v - (u - v) = -u$  y  $r_u r_v(-v) = v - u$  y, aplicando una tercera vez  $r_u r_v(-u) = v$  y  $r_u r_v(v - u) = r_u r_v(v) - r_u r_v(u) = u - v + v = u$ , así que  $r_u r_v = r_{g(\alpha_i)} r_{h(\alpha_j)} = ab$  tiene orden 3. Si  $(g(\alpha_i), h(\alpha_j)) = (u, v) = -1$ , entonces  $r_u r_v(v) = -u - v$  y  $r_u r_v(u) = v$ , aplicando una vez más la función  $r_u r_v(-u - v) = -r_u r_v(u + v) = -r_u(u + v - v) = -r_u(u) = u$  y  $r_u r_v(v) = -v - u$  y, aplicando una tercera vez  $r_u r_v(u) = v$  y  $r_u r_v(-v - u) = -r_u r_v(v) - r_u r_v(u) = u + v - v = u$ , así que  $r_u r_v = r_{g(\alpha_i)} r_{h(\alpha_j)} = ab$  tiene orden 3. Por último, si  $(g(\alpha_i), h(\alpha_j)) = \pm 2$ ,  $g(\alpha_i) = \pm h(\alpha_j)$ , así que  $r_{g(\alpha_i)} = r_{h(\alpha_j)}$ , por lo que  $O(r_{g(\alpha_i)} r_{h(\alpha_j)}) = 1$ .

Resta verificar que  $R^{\mathcal{W}(\Sigma)}$  es cerrado bajo la conjugación por elementos de  $\mathcal{W}(\Sigma)$ , lo cual es claro; y también que  $\mathcal{W}(\Sigma) = \langle R^{\mathcal{W}(\Sigma)} \rangle$ , lo que se tiene dado que  $R \subset R^{\mathcal{W}(\Sigma)}$  y  $\mathcal{W}(\Sigma) = \langle R \rangle$ .

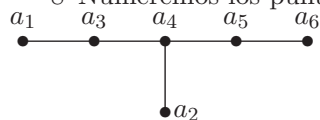
7 Numeremos los puntos de  $E_7$  de la siguiente manera.



Para ver que el grupo de Coxeter  $G$ , asociado a  $E_7$ , es un grupo de 3 transposiciones, estudiaremos primero el siguiente sistema de raíces. Sea  $\Sigma$  el sistema de raíces y  $\Pi$  el sistema simple asociado a  $\Sigma$ , definidos en el inciso anterior; sea  $\mathcal{V}' = \langle \alpha_1 \dots \alpha_7 \rangle$  y sea  $\Sigma' = \Sigma \cap \mathcal{V}'$ . Tenemos que  $r_u(v)$  es una combinación lineal de  $u$  y  $v$ , por lo tanto, si  $u, v \in \Sigma'$ ,  $r_u(v) \in \Sigma'$ , así que  $\Sigma'$  es, por sí mismo, un sistema de raíces. También tenemos que  $\Pi'$  es un sistema simple dado que  $\Pi$  lo es, es decir, como todo  $v \in \Sigma$  se puede escribir como  $u = \sum_{\alpha \in \Pi} a_\alpha \alpha$ , donde los escalares  $a_\alpha \in \mathbb{F}$  son todos positivos o todos negativos, entonces todo  $v \in \Sigma$  se puede escribir como  $u = \sum_{\alpha \in \Pi'} a_\alpha \alpha$ , de la misma forma.

Entonces, sea  $R' = \{r_\alpha : \alpha \in \Pi'\}$  y, por el teorema 1.5.9,  $(\mathcal{W}(\Sigma'), R')$  es un sistema de Coxeter. Por último, gracias a lo demostrado en el inciso anterior, tenemos que los elementos de  $R'$  cumplen las relaciones que hay entre los puntos  $\{a_1 \dots a_7\}$  y, además, que  $R^{\mathcal{W}(\Sigma')}$  es un conjunto de 3-transposiciones.

8 Numeremos los puntos de  $E_6$  de la siguiente manera.



Para ver que el grupo de Coxeter  $G$ , asociado a  $E_6$ , es un grupo de 3 transposiciones, se estudia el siguiente sistema de raíces. Sea  $\Sigma$  el sistema de raíces y  $\Pi$  el sistema simple asociado a  $\Sigma$ , definidos en el inciso 6; sea  $\mathcal{V}'' = \langle \alpha_1 \dots \alpha_6 \rangle$  y sea  $\Sigma'' = \Sigma \cap \mathcal{V}''$ . El resto de la demostración es análoga al inciso anterior.

■

## Capítulo 5

# Diagramas en $\mathcal{SP}$

Empecemos con una pregunta interesante: ¿Es el hecho de que un espacio tenga o no un diagrama, realmente, dependiente de la categoría donde lo ubicamos? Después de haber estudiado el caso general, en este capítulo trataremos con los espacios simplécticos (aquellos cuyos planos son duales afines) y daremos una respuesta afirmativa a esta pregunta. De hecho, en la categoría de espacios simplécticos, todos los espacios tienen un diagrama. Para demostrar este hecho clasificaremos a los espacios simplécticos, utilizando un teorema de Hall cuya demostración (la dada por Hall) está fuera del alcance de esta tesis.

### 5.1. Representaciones lineales

**Definición 5.1.1.** Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal y  $\mathcal{V}$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_2$ . Decimos que una función  $\chi : S \rightarrow \mathcal{V}$  es una *representación lineal* (o simplemente *representación*) si para toda línea  $\{a, b, c\}$  de  $S$ , tenemos que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) = 0$ . Una representación es *completa* si el conjunto  $\chi(\mathcal{V}) = \{\chi(a) : a \in S\}$  genera a  $\mathcal{V}$ , y es *simpléctica* si existe una forma bilineal simpléctica  $f$  sobre  $\mathcal{V}$  tal que  $f(\chi(a), \chi(b)) = 1$  si, y sólo si,  $a$  y  $b$  son colineales. Como lo hemos hecho anteriormente, denotaremos a  $f(u, v)$  como  $(u, v)$ .

Decimos que una representación  $\chi : S \rightarrow \mathcal{V}$  es *universal* si, para cualquier representación  $\chi' : S \rightarrow \mathcal{V}'$ , existe una única transformación lineal  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{\chi} & \mathcal{V} \\
 \chi' \downarrow & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \circlearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} & \swarrow T \\
 \mathcal{V}' & & 
 \end{array}$$

Decimos que dos representaciones  $\chi : S \rightarrow \mathcal{V}$  y  $\chi' : S \rightarrow \mathcal{V}'$  son



equivalentes si  $T$ , en el diagrama anterior, es un isomorfismo.

**Proposición 5.1.2.** *Sea  $S$  es un espacio parcialmente lineal. Si  $\chi : S \rightarrow \mathcal{V}$  y  $\chi' : S \rightarrow \mathcal{V}'$  son, ambas, representaciones universales, entonces son equivalentes.*

*Demostración.* Por ser  $\chi$  universal, entonces existe una única  $T$  tal que  $T \circ \chi = \chi'$ . De la misma forma, existe una única  $T'$  tal que  $T' \circ \chi = \chi$ . Así que  $T' \circ T \circ \chi = \chi$ , entonces, por la unicidad de  $T$  y  $T'$ ,  $T' \circ T = id_{\mathcal{V}}$ . Análogamente tenemos que  $T' \circ T = id_{\mathcal{V}'}$ , por lo tanto  $T$  es un isomorfismo. ■

Por la proposición anterior, todas las representaciones universales son, esencialmente, la misma. Es por esto que nos referiremos a las representaciones universales como si fueran una sola.

**Definición 5.1.3.** Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal. Decimos que  $S$  es un espacio *2-reducido* si, para cualesquiera dos puntos no colineales, existe un punto colineal con alguno de ellos dos, pero no al otro. Decimos que  $S$  es un espacio *3-reducido* si, para cualesquiera dos puntos colineales, existe un punto colineal con alguno de ellos dos, pero no al otro. Un espacio es *reducido* si es 2-reducido y 3-reducido.

**Lema 5.1.4.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico y sean  $a, b \in F$ . Si existe  $c \in F$  colineal con  $a$  y no con  $b$ , entonces también existe  $c' \in F$  colineal con  $b$  y no con  $a$ .*

*Demostración.* Como  $c$  y  $a$  no son colineales, existe  $d \in F$  colineal con ambos ( $a$  y  $c$ ). Sea  $d'$  tal que  $\{c, d, d'\}$  es línea, entonces  $a$  es colineal con  $d$  y  $d'$  y, como  $b$  es colineal con  $c$  tenemos que  $b$  no es colineal con uno de los dos entre  $d$  y  $d'$ ; sea  $c'$  dicho punto. ■

**Lema 5.1.5.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico, conexo, entonces existe  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial y  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  representación universal simpléctica. Si además  $F$  es reducido, dicha representación es inyectiva.*

*Demostración.* Sea  $\Lambda = \Gamma(F)$  y consideremos a  $\mathbb{F}_2(\Lambda)$  y a  $f = (\cdot, \cdot)$ , su forma bilineal asociada<sup>1</sup>. Sea  $q$  la forma cuadrática que vale 1 en todos los puntos de la base, y extendida mediante la fórmula 1.2. Sea  $L = \{a + b + c \in \mathbb{F}_2(\Lambda) : \{a, b, c\} \text{ es línea de } F\}$ . Sea  $\chi = i \circ p$ , donde  $i$  es la inclusión de  $F$  en  $\mathbb{F}_2(\Lambda)$  y  $p$ , la proyección natural de  $\mathbb{F}_2(\Lambda)$  en  $\mathbb{F}_2(\Lambda)/L$ , entonces  $\chi$  es una representación de  $F$  en  $\mathbb{F}_2(\Lambda)/L$ .

Ahora, notemos que  $L \subset \text{rad}(f)$ . Para esto, sea  $d \in F$  y sea  $i(a) + i(b) + i(c) = l \in L$ , entonces  $(i(d), l) = (i(d), i(a)) + (i(d), i(b)) + (i(d), i(c))$ ; si  $d$  es colineal con algún punto de  $\{a, b, c\}$ , entonces lo es con exactamente dos, por lo tanto  $(i(d), l) = 0$ , si no es colineal con ningún punto, entonces

<sup>1</sup>Ver capítulo 1, primera parte

es más fácil ver  $(i(d), l) = 0$ . Ahora notemos que  $L \subset \text{rad}(q)$ , dado que  $q(a+b+c) = q(a+b) + q(c) + (a, c) + (b, c) = q(a) + q(b) + q(c) + (a, b) = 0$ . Entonces, por la proposición 1.2.6, tenemos una forma bilineal  $\tilde{f} = \langle, \rangle$  sobre  $\mathbb{F}_2(\Lambda)/L$  tal que  $f = \tilde{f} \circ p$ , entonces, para  $a, b \in F$  tenemos que  $(i(a), i(b)) = \langle \chi(a), \chi(b) \rangle$ , así que  $\langle \chi(a), \chi(b) \rangle = 1$  si, y sólo si,  $a$  y  $b$  son colineales; y también, tenemos que  $q$  induce una forma cuadrática  $\tilde{q}$  tal que  $q(a) = \tilde{q} \circ p$ .

Sea  $\chi' : F \rightarrow \mathcal{V}'$  una representación, entonces tenemos una transformación lineal  $T : \mathbb{F}_2(\Lambda) \rightarrow \mathcal{V}'$  definida en la base por  $T(a) = \chi'(a)$  y extendida por linealidad. Por lo tanto, como  $L \subset \text{Ker}(T)$ , tenemos  $T' : \mathbb{F}_2(\Lambda)/L \rightarrow \mathcal{V}'$  tal que  $T' \circ \chi = \chi'$ , por lo tanto,  $\chi$  es representación universal.

Ahora supongamos que  $F$  es reducido. Para ver que  $\chi$  es inyectiva, sean  $a, b \in F$ ; entonces existe  $c \in F$  colineal con  $a$  y no con  $b$ , así que  $(i(a), i(c)) = 1$  y  $(i(b), i(c)) = 0$  y, por lo anterior,  $\langle \chi(a), \chi(c) \rangle = 1$  y  $\langle \chi(b), \chi(c) \rangle = 0$ , por lo tanto  $\chi(a) \neq \chi(b)$ . ■

A continuación comenzaremos un estudio de los espacios simplécticos desde un punto de vista más geométrico, para terminar relacionándoles una estructura de espacio vectorial; todo esto con el fin de encontrar representaciones simplécticas inyectivas para todos los espacios simplécticos y, además, para ayudarlos más adelante en la clasificación de estos espacios y a encontrar sus diagramas.

**Definición 5.1.6.** Sea  $F$  un espacio simpléctico. Para cada  $a \in F$ , sea  $a^\perp = \{c \in F : c \text{ no es colineal con } a\}$  y definimos la relación de equivalencia  $a \sim b$  si, y sólo si,  $a^\perp = b^\perp$ . Sea  $F^* = F / \sim$  donde  $\{[a], [b], [c]\}$  es línea si, y sólo si, existen  $a' \in [a], b' \in [b], c' \in [c]$  tales que  $\{a', b', c'\}$  es línea. Llamamos a  $F^*$  el *espacio reducido asociado a  $F$* .

**Proposición 5.1.7.**  $F^*$ , con la estructura definida anteriormente, es un *espacio parcialmente lineal simpléctico reducido*.

*Demostración.* Es fácil observar que dos puntos  $a$  y  $b$  son colineales en  $F$  si, y sólo si,  $[a]$  y  $[b]$  son colineales en  $F^*$ . Ahora, sea  $\{[a], [b], [c]\}$  una línea, sin pérdida de generalidad  $\{a, b, c\}$  es línea. Sean  $a' \in [a], b' \in [b]$ , y sea  $c'$  el tercer punto de la línea definida por  $a'$  y  $b'$ ; como  $\{[a'], [b'], [c']\} = \{[a], [b], [c]\}$  es línea, hay que demostrar que  $[c] = [c']$ . Tomemos un punto  $d$  colineal con  $c$ , entonces  $d$  es colineal exactamente otro punto de la línea  $\{a, b, c\}$ ; si es colineal con  $a$  y no con  $b$  tenemos que  $d$  es colineal con  $a'$  y no con  $b'$ , entonces  $d$  es colineal con  $c'$ ; análogamente en el otro caso. Por lo tanto  $c'^\perp \subset c^\perp$ , la contención opuesta se demuestra de la misma forma. Con esto tenemos que la intersección de dos líneas de  $F^*$  es, a lo más, un punto, y así,  $F^*$  es un espacio parcialmente lineal.

Para ver que  $F^*$  es un espacio simpléctico, tomemos  $\{[a], [b], [c]\}, \{[a], [d], [e]\}$  dos líneas concurrentes distintas, sin pérdida de generalidad,  $\{a, b, c\}$  y  $\{a, d, e\}$  son líneas y, en el plano dual afín que definen,  $\{b, f, e\}$  y  $\{c, f, b\}$  son líneas,

así que  $\{[b], [f], [e]\}$  y  $\{[c], [f], [b]\}$  son líneas, por lo tanto la primer pareja de líneas que tomamos generan un plano dual afín en  $F^*$ .

Por último, sean  $a, b \in F$ . Si para todo  $[c] \in F^*$  tenemos que  $[c]$  es colineal con  $[a]$  si, y sólo si, es colineal con  $[b]$ , entonces, para todo  $c \in F$ ,  $c$  es colineal con  $a$  si, y sólo si, es colineal con  $b$ , lo que implica que  $[a] = [b]$ . Por lo tanto,  $F^*$  es reducido. ■

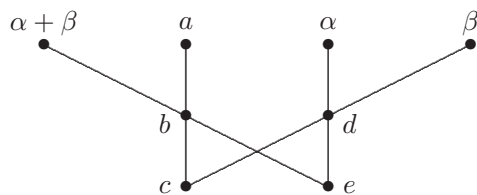
En lo que resta del capítulo estaremos trabajando con las funciones  $\gamma$  (definición 3.1.1). Recordemos que si  $a$  y  $b$  son dos puntos colineales, entonces  $\gamma_a(b) = \gamma_b(a) = c$ , donde  $c$  es el tercer punto de la línea definida por  $a$  y  $b$ ; y si  $a$  y  $b$  no son colineales, entonces  $\gamma_a(b) = b$  y  $\gamma_b(a) = a$ .

**Lema 5.1.8.** *Sean  $F$  un espacio simpléctico y  $a, b \in F$  tales que  $a^\perp = b^\perp$ . Sea  $c$  un punto colineal con ambos, entonces  $(\gamma_c(a))^\perp = (\gamma_c(b))^\perp$ .*

*Demostración.* Sea  $d$  el sexto punto del plano generado por  $\{c, a, \gamma_c(a)\}$  y  $\{c, b, \gamma_c(b)\}$ . Sea  $e$  colineal con  $\gamma_c(a)$ . Si  $e$  es colineal con  $a$  entonces lo es con  $b$ , por lo que no es colineal con  $d$  y sí lo es con  $\gamma_c(b)$ . Si  $e$  no es colineal con  $a$ , entonces tampoco lo es con  $b$  y sí lo es con  $c$ , por lo tanto  $e$  es colineal con  $\gamma_c(b)$ . ■

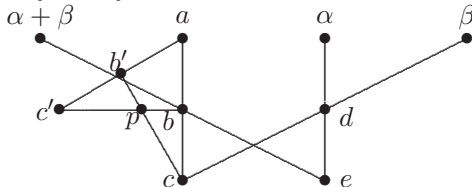
**Proposición 5.1.9.** *Sean  $F$  un espacio simpléctico,  $a \in F$ . Sean  $b, c \in F$  tales que  $\{a, b, c\}$  es línea y para cada  $\alpha, \beta \in [a]$  definamos la operación  $\alpha + \beta = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta(c)$ . Entonces  $\alpha + \beta$  es independiente de la elección de los puntos  $b$  y  $c$ , y  $[a]$  es un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial con la suma así definida, donde  $a$  es el cero de dicho espacio.*

*Demostración.* Primero observamos que  $\alpha + \beta$ , fijando un orden para  $b$  y  $c$ , no es colineal con  $a$ ; para esto, llamemos  $d = \gamma_\beta(c)$  y  $e = \gamma_\alpha \gamma_\beta(c)$ , entonces  $d$  es colineal con  $\alpha$  y con  $a$ , por ser colineal con  $\beta$ ;  $d$  y  $b$  no son colineales, pero  $b$  sí es colineal con  $\alpha$ , así que también es colineal con  $e$ ;  $a$  es colineal con  $e$ , dado que  $e$  es colineal con  $\alpha$ , entonces  $\alpha + \beta$  y  $a$  no son colineales. Entonces los puntos involucrados se ven como en el dibujo siguiente, donde cada nivel será una clase de equivalencia distinta (falta demostrar que  $[\alpha + \beta] = [a]$ ).



Así con esto,  $\alpha + \beta = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta(c) = \gamma_a(\gamma_b(\gamma_a \gamma_\alpha) \gamma_\alpha(\gamma_a \gamma_\alpha) \gamma_\beta(\gamma_a \gamma_\alpha)(c)) = \gamma_{\gamma_a(b)} \gamma_{\gamma_a(\alpha)} \gamma_{\gamma_a(\beta)} \gamma_a(c) = \gamma_c \gamma_\alpha \gamma_\beta(b)$ . Por lo tanto,  $\alpha + \beta$  está bien definido (es decir, que no importa del orden en el que utilicemos  $a$  y  $c$ ). Ahora, podemos ver que  $\alpha + \beta = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta(c) = \gamma_b(\gamma_\beta \gamma_\beta) \gamma_\alpha \gamma_\beta(c) = \gamma_b \gamma_\beta \gamma_{\gamma_\beta(\alpha)}(c) = \gamma_b \gamma_\beta \gamma_\alpha(c) = \beta + \alpha$ . Para verificar que  $\alpha + \beta$  no depende de la elección de  $b$  y

$c$ , sean  $b'$  y  $c'$  tal que  $\{a, b', c'\}$  es línea y, sin pérdida de generalidad,  $\{b', p, c\}$  y  $\{b, p, y'\}$  son las otras líneas del plano generado por  $\{a, b, c\}$  y  $\{a, b', c'\}$ .



Tenemos que  $e$  es colineal con  $a$  (dado que  $a^\perp = \alpha^\perp$ ), por lo tanto es colineal con  $b'$ , o bien, con  $c'$ , pero tenemos que  $b'$  es colineal con  $\alpha$ , con  $\beta$  y con  $c$ , entonces no es colineal con  $d$  y sí lo es con  $e$ . Ahora, como  $b$  y  $b'$  no son colineales, entonces  $\alpha + \beta$  es colineal con  $b'$ , y así también con  $c'$ , y no con  $p$ . Utilizando esto,  $\alpha + \beta = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\beta(c) = \gamma_p(\gamma_b(\gamma_p \gamma_p) \gamma_\alpha(\gamma_p \gamma_p) \gamma_\beta(\gamma_p \gamma_p)(c)) = \gamma_{\gamma_p(b)} \gamma_{\gamma_p(\alpha)} \gamma_{\gamma_p(\beta)} \gamma_p(c) = \gamma_{c'} \gamma_\alpha \gamma_\beta(b')$ , además, tanto  $b'$  como  $c'$  son colineales con  $\alpha + \beta$ .

Ahora, para probar que  $\alpha + \beta \in [a]$  hay que verificar que  $(\alpha + \beta)^\perp = a^\perp$ . Sea  $p \in F$  no colineal con  $a$ , entonces existe un punto  $b' \in F$  colineal con  $a$  y con  $p$ , lo que nos forma el plano dual afín analizado anteriormente. Así que  $p$  no es colineal con  $\alpha + \beta$ . Por otro lado, tenemos que si  $b'$  es colineal con  $a$ , entonces también lo es con  $\alpha + \beta$ , así que los puntos no colineales con  $\alpha + \beta$  tampoco son colineales con  $a$ , por lo tanto  $(\alpha + \beta)^\perp = a^\perp$ .

Para terminar de demostrar que  $[a]$  es un grupo con esta operación, resta verificar la operación es asociativa y que  $a$  es neutro. Sean  $\alpha, \beta, \delta \in [a]$ , como  $\alpha, \beta$  y  $\delta$  no son colineales entre sí,  $\gamma_\alpha, \gamma_\beta$  y  $\gamma_\delta$  conmutan, entonces  $(\alpha + \beta) + \delta = \delta + (\beta + \alpha) = \gamma_b \gamma_\delta \gamma_{\beta + \alpha}(c) = \gamma_b \gamma_\delta \gamma_c(\beta + \alpha) = \gamma_b \gamma_\delta \gamma_c(\gamma_c \gamma_\beta \gamma_\alpha(b)) = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c(\gamma_c \gamma_\beta \gamma_\delta(b)) = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_c(\beta + \delta) = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_{\beta + \delta}(c) = \alpha + (\beta + \delta)$ . Ahora, sean  $b, c \in F$  tal que  $\{a, b, c\}$  es línea y  $\alpha \in [a]$ , entonces  $\alpha + a = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_a(c) = \gamma_b \gamma_\alpha(b) = \alpha$ . Por último tenemos que  $\alpha + \alpha = \gamma_b \gamma_\alpha \gamma_\alpha(c) = \gamma_b(c) = a$ , lo que nos dice que  $[a]$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{F}_2$ . ■

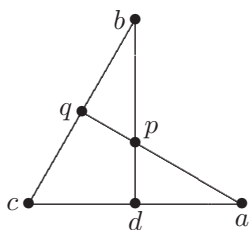
**Proposición 5.1.10.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico. Sean  $a, b \in F$  y consideremos  $[a], [b] \in F^*$ . Entonces  $[a] \cong [b]$  como espacios vectoriales, donde el isomorfismo es  $\gamma_c$  en el caso de que  $\{a, b, c\}$  sea una línea, y  $\gamma_c \gamma_p$  si  $a$  y  $b$  no son colineales,  $\{a, b, c, p\}$  generan un plano y tanto  $c$  como  $p$  son colineales a ambos,  $a$  y  $b$ , pero no son colineales entre sí; además, en este caso, el isomorfismo es independiente de la elección de  $c$  y  $p$ .*

*Demostración.* La prueba la dividiremos en dos casos.

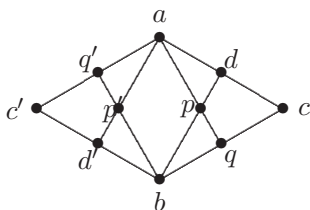
**Caso 1.** Si  $a$  y  $b$  son colineales, sea  $c \in F$  tal que  $\{a, b, c\}$  es línea, entonces restringimos la función  $\gamma_c$  a  $[a]$ . Por el lema 5.1.8 tenemos que, para  $\alpha \in [a]$ ,  $\gamma_c \alpha \in [b]$ . Como  $\gamma_c$  es una involución, resta demostrar que es lineal. Sean  $\alpha, \beta \in [a]$  y  $d, e \in F$  tales que  $\{a, d, e\}$  es línea; entonces  $\gamma_c(\alpha + \beta) = \gamma_c(\gamma_d \gamma_\alpha \gamma_\beta(e)) = \gamma_c \gamma_d(\gamma_c \gamma_c) \gamma_\alpha(\gamma_c \gamma_c) \gamma_\beta(\gamma_c \gamma_c)(e) = \gamma_{\gamma_c(d)} \gamma_{\gamma_c(\alpha)} \gamma_{\gamma_c(\beta)}(\gamma_c(e)) = \gamma_c(\alpha) + \gamma_c(\beta)$ .

**Caso 2.** Si  $a$  y  $b$  no son colineales, existe un punto  $c$  colineal con ambos; sea  $p$  el punto no colineal con  $c$  que está en el plano generado por  $a$ ,  $b$  y  $c$ . De la misma forma tenemos que, para  $\alpha \in [a]$ ,  $\gamma_c \gamma_d \alpha \in [b]$  y, como  $\gamma_c \gamma_p = \gamma_p \gamma_c$ , tenemos que  $\gamma_c \gamma_p$  es una involución, así que resta demostrar que es lineal. Sean  $\alpha, \beta \in [a]$  y  $x, y \in F$  tales que  $\{a, x, y\}$  es línea; entonces  $\gamma_c \gamma_p(\alpha + \beta) = \gamma_c \gamma_p(\gamma_d \gamma_a \gamma_\beta(e)) = \gamma_c \gamma_p \gamma_d(\gamma_p \gamma_c \gamma_c \gamma_p) \gamma_\alpha(\gamma_p \gamma_c \gamma_c \gamma_p) \gamma_\beta(\gamma_p \gamma_c \gamma_c \gamma_p)(e) = \gamma_c \gamma_p(d) \gamma_c \gamma_p(\alpha) \gamma_c \gamma_p(\beta) (\gamma_c \gamma_d(e)) = \gamma_c \gamma_p(\alpha) + \gamma_c(\beta)$ .

Ahora demostraremos que dicha función no depende de la elección de  $p$  y  $c$ . Nombremos a los puntos del plano generado por  $a$ ,  $b$  y  $c$  como en la siguiente figura.



Entonces  $\gamma_c \gamma_p(\alpha) = \gamma_a \gamma_c \gamma_a \gamma_a \gamma_p \gamma_a(\alpha) = \gamma_{\gamma_a(c)} \gamma_{\gamma_a(p)}(\alpha) = \gamma_d \gamma_q(\alpha)$ . Ahora, si  $c'$  es un punto fuera de dicho plano colineal con ambos,  $a$  y  $b$ , sea  $p'$  el punto del plano generado por  $a$ ,  $b$  y  $c'$  que no es colineal con  $c'$ . Nombremos a los puntos como se muestra en la figura siguiente.



Como  $c'$  es colineal con  $b$ , entonces también lo es con  $c$  o con  $q$ . Sin pérdida de generalidad  $\{c', q, e\}$  es línea de  $F$  y, dado que  $\{c', b, c\}$  generan un plano dual afín, entonces  $\{d', e, c\}$  también es línea. Consideremos el plano generado por  $\{a, c', q\}$ ; tenemos que  $\{c', q', a\}$ ,  $\{a, p, c\}$  y  $\{c', q, e\}$  son líneas del plano, por lo tanto, la que falta es  $\{q', p, e\}$ , y así  $\gamma_p \gamma_c(\alpha) = \gamma_e \gamma_p \gamma_e \gamma_e \gamma_c \gamma_e(\alpha) = \gamma_{\gamma_e(p)} \gamma_{\gamma_e(c)}(\alpha) = \gamma_{q'} \gamma_{d'}(\alpha)$ . ■

A continuación enunciaremos el teorema 1 de [12].

**Teorema 5.1.11.** (Hall) Sea  $F$  un espacio simpléctico y  $F^*$  su espacio reducido asociado. Sea  $\pi : F \rightarrow F^*$  la proyección natural, es decir  $\pi(a) = [a]$ , entonces existe  $\varsigma : F^* \rightarrow F$  tal que  $\varsigma \circ \pi = Id_F$ .

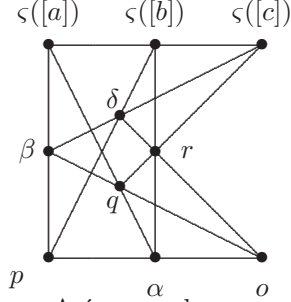
**Definición 5.1.12.** Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal y sea  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial. El *espacio producto*  $S \times \mathcal{V}$  es el espacio, cuyos puntos son los elementos del producto cartesiano  $S \times \mathcal{V}$ , y cuyas líneas son los conjuntos de la forma  $\{(a, v), (b, u), (c, v + u)\}$  donde  $\{a, b, c\}$  es línea de  $S$  y  $v, u \in \mathcal{V}$ .

**Corolario 5.1.13.** Sea  $F$  un espacio simpléctico y  $F^*$  su espacio reducido asociado. Entonces existe  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial tal que  $F \cong F^* \times \mathcal{V}$ .

*Demostración.* Sea  $o \in F$ . Para cada  $a \in F$  sea  $T_a : [a] \rightarrow [o]$  el isomorfismo de definido en 5.1.10. Consideremos a  $\pi$  la proyección natural de  $F$  en  $F^*$  y  $\varsigma$  su inversa izquierda. Sea  $\varphi : F \rightarrow F^* \times [o]$  definida por  $\varphi(a) = ([a], T_{\varsigma([a])}(a))$ . Tomemos  $l = \{a, b, c\}$  una línea de  $F$ , para ver que  $\varphi$  es un morfismo de espacios parcialmente lineales es suficiente demostrar que  $T_{\varsigma([a])}(a) + T_{\varsigma([b])}(b) = T_{\varsigma([c])}(c)$ . Lo dividiremos en dos casos.

**Caso 1.** Si  $o$  es colineal con algún punto de  $l$ , entonces lo es con exactamente dos, sin pérdida de generalidad lo es con  $a$  y  $b$  y, como también  $l' = \{\varsigma([a]), \varsigma([b]), \varsigma([c])\}$  es línea, tenemos que  $o$  es colineal con  $\varsigma([a])$  y  $\varsigma([b])$  y no lo es con  $\varsigma([c])$ . Sean  $d, e \in F$  tales que  $\{\varsigma([a]), o, d\}$  y  $\{\varsigma([a]), o, e\}$  son líneas; entonces  $T_{\varsigma([a])} = \gamma_d$ ,  $T_{\varsigma([b])} = \gamma_e$  y  $T_{\varsigma([c])} = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_e$ . Así que  $T_{\varsigma([a])}(a) + T_{\varsigma([b])}(b) = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_{\gamma_d(a)}\gamma_{\gamma_e(b)}(d)$  y, como  $\gamma_{\gamma_e(b)} \in [o]$  y  $d$  es colineal con  $o$ , tenemos que  $\gamma_{\varsigma([a])}\gamma_{\gamma_d(a)}\gamma_{\gamma_e(b)}(d) = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_d\gamma_a\gamma_d\gamma_d\gamma_e(b) = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_d\gamma_a\gamma_e(b) = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_d\gamma_e\gamma_a(b) = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_d\gamma_e(c)$ . Ahora, dado que  $\gamma_e(c) \in [d]$ , entonces tenemos  $\gamma_{\varsigma([a])}\gamma_d\gamma_e(c) = \gamma_{\varsigma([a])}\gamma_e(c) = T_{\varsigma([c])}(c)$ .

**Caso 2.** Si  $o$  no es colineal con ningún punto de  $l$ , entonces tampoco lo es cono ningún punto de  $l'$ . Sea  $p \in F$  un punto colineal con  $\varsigma([a])$  y con  $o$  y, sin pérdida de generalidad supongamos que también es colineal con  $\varsigma([b])$ . Sean  $\alpha, \beta \in F$  tales que  $l_1 = \{o, p, \alpha\}$  y  $l_2 = \{\varsigma([a]), p, \beta\}$  son líneas de  $F$ . Sea  $q$  el sexto punto del plano generado por  $l_1 \cup l_2$ ; así que  $q$  es colineal con  $\varsigma([a])$ . Ahora, como  $\varsigma([b])$  es colineal con  $\varsigma([a])$  y con  $p$ , entonces no es colineal con  $\beta$ , por lo que no es colineal con ningún punto de la línea  $\{o, q, \beta\}$ , en particular no lo es con  $q$ , así que  $q$  es colineal con  $\varsigma([c])$  y, además,  $\beta$  también es colineal con  $\varsigma([c])$ . Sean  $\delta, r \in F$  tales que  $l_3 = \{\beta, \delta, \varsigma([c])\}$  y  $l_4 = \{q, r, \varsigma([c])\}$  son líneas de  $F$ . Entonces, dado que  $l'$  y  $l_2$  generan un plano afín,  $l_5 = \{p, \delta, \varsigma([b])\}$  es línea y, por el mismo argumento para  $l_5$  y  $l_1$ , los conjuntos  $\{\delta, r, o\}$  y  $\{\alpha, r, \varsigma([a])\}$  son líneas. Por último, el dibujo se ve de esta forma.



Así que podemos escribir  $T_{\varsigma([a])} = \gamma_p \gamma_q$ ,  $T_{\varsigma([b])} = \gamma_\alpha \gamma_\delta$  y  $T_{\varsigma([c])} = \gamma_q \gamma_\delta$ . Entonces  $T_{\varsigma([a])}(a) + T_{\varsigma([b])}(b) = \gamma_p \gamma_{\gamma_p \gamma_q(a)} \gamma_{\gamma_\alpha \gamma_\delta(b)}(\alpha) = \gamma_p \gamma_{\gamma_p \gamma_q(a)} \gamma_\alpha \gamma_\delta \gamma_b \gamma_\alpha(\alpha) = \gamma_p \gamma_{\gamma_p \gamma_q(a)} \gamma_\alpha \gamma_\delta \gamma_b(\alpha)$ , dado que  $\alpha$  y  $\delta$  no son colineales. Ahora, como  $\alpha$  es colineal con  $\varsigma([b])$ , entonces también es colineal con  $b$ , al igual que  $\delta$  por un razonamiento análogo; por lo que  $\gamma_p \gamma_{\gamma_p \gamma_q(a)} \gamma_\alpha \gamma_\delta \gamma_b(\alpha) = \gamma_p \gamma_{\gamma_p \gamma_q(a)} \gamma_\alpha \gamma_\delta \gamma_\alpha(b) = \gamma_p \gamma_{\gamma_p \gamma_q(a)} \gamma_\delta(b) = \gamma_p \gamma_p \gamma_q \gamma_a \gamma_q \gamma_p \gamma_\delta(b) = \gamma_q \gamma_a \gamma_q \gamma_p \gamma_\delta(b)$  y, como  $\gamma_\delta(b) \in [p]$  tenemos que  $\gamma_q \gamma_a \gamma_q \gamma_p \gamma_\delta(b) = \gamma_q \gamma_a \gamma_q \gamma_\delta(b) = \gamma_q \gamma_a \gamma_\delta \gamma_q(b) = \gamma_q \gamma_a \gamma_\delta(b) = \gamma_q \gamma_\delta \gamma_a(b) = \gamma_q \gamma_\delta(c) = T_{\varsigma([c])}(c)$ . ■

Usando el resultado anterior demostraremos la siguiente proposición, con la cual podremos justificar el nombre que les damos a los espacios simplécticos.

**Proposición 5.1.14.** *Sea  $S$  un espacio parcialmente lineal, entonces  $S$  es simpléctico si, y sólo si, existe un espacio vectorial  $\mathcal{V}$  sobre  $\mathbb{F}_2$  y una representación  $\chi : S \rightarrow \mathcal{V}$  simpléctica inyectiva.*

*Demostración.* Sea  $\chi : S \rightarrow \mathcal{V}$  una representación simpléctica inyectiva y sea  $f$  la forma bilineal simpléctica sobre  $\mathcal{V}$ . Sean  $l = \{a, b, c\}$  y  $l' = \{a', b', c'\}$  dos líneas concurrentes de  $F$ . Entonces tenemos que  $0 = f(\chi(c), 0) = f(\chi(c), \chi(a) + \chi(b') + \chi(c')) = 1 + f(\chi(c), \chi(b')) + f(\chi(c), \chi(c'))$ , así que  $f(\chi(c), \chi(b')) = 1$ , o bien,  $f(\chi(c), \chi(c')) = 1$ ; sin pérdida de generalidad  $f(\chi(c), \chi(b')) = 1$  y  $f(\chi(c), \chi(c')) = 0$ . Ahora,  $0 = f(0, \chi(c')) = f(\chi(a) + \chi(b) + \chi(c), \chi(c')) = 1 + f(\chi(b), \chi(c')) + 0$ , entonces  $f(\chi(b), \chi(c')) = 1$ , es decir,  $b$  y  $c'$  son colineales, y con un procedimiento análogo llegamos a que  $b$  y  $b'$  no lo son. Sea  $d$  el tercer punto de la línea que definen  $c$  y  $b'$ , y sea  $d'$  el respectivo para  $c'$  y  $b$ , pero como  $0 = \chi(a) + \chi(a) = \chi(b) + \chi(c) + \chi(b') + \chi(c')$ , entonces  $\chi(d) = \chi(b) + \chi(c) = \chi(b') + \chi(c') = \chi(d')$  y, dado que  $\chi$  es inyectiva,  $d = d'$ . Por lo tanto  $l$  y  $l'$  generan un plano dual afín.

Ahora supongamos que  $S$  es un espacio simpléctico. Entonces por el corolario anterior,  $S \cong S^* \times \mathcal{V}'$ , donde  $S^*$  es el espacio reducido asociado a  $S$  y  $\mathcal{V}'$  un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial. Tenemos que, por el lema 5.1.5, existe  $\mathcal{U}$  un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial y  $\chi' : S^* \rightarrow \mathcal{U}$  una representación simpléctica inyectiva, donde  $f'$  es la forma bilineal simpléctica definida sobre  $\mathcal{U}$ . Sea  $\chi : S^* \times \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{U} \times \mathcal{V}'$  definida por  $\chi((a, v)) = (\chi'(a), v)$ , y definamos la

forma bilineal  $f$  en  $U \times \mathcal{V}'$  como  $f((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = f'(u_1, u_2)$ . Ahora es fácil ver que  $\chi$  es una representación simpléctica inyectiva. ■

**Corolario 5.1.15.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico conexo. Entonces existe  $\mathcal{V}$  un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial y  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  representación universal simpléctica inyectiva.*

*Demostración.* Por la proposición anterior existe una representación simpléctica inyectiva  $\chi' : F \rightarrow \mathcal{V}'$  y, por el lema 5.1.5, también existe una representación universal  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$ , entonces por definición existe  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  tal que  $\chi' = T \circ \chi$ , así que, como  $\chi'$  es inyectiva también lo es  $\chi$ . ■

En algunos de los resultados que aparecen en lo que resta del capítulo, usaremos una construcción dada en el lema 4.1.3, de un espacio de Fischer simpléctico. Al espacio que en ese lema denotamos por  $O(q)$  lo llamamos el *espacio cuadrático* definido por  $q$ .

**Lema 5.1.16.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico y sea  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  una representación inyectiva de  $F$  en un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial  $\mathcal{V}$ . Si existe una subgráfica  $\Lambda \subset \Gamma(F)$  tal que*

- 1  $\Lambda$  genera a  $F$  como espacio parcialmente lineal.
- 2  $\chi(\Lambda)$  es base para  $\mathcal{V}$ .

*entonces  $\chi$  es la representación universal de  $F$ .*

*Demostración.* Por el corolario 5.1.15 existe una representación  $\chi' : F \rightarrow \mathcal{V}'$  universal (inyectiva). Entonces existe una única transformación lineal  $T : \mathcal{V}' \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $T(\chi'(a)) = \chi(a)$  para cada  $a \in F$ , en particular para cada  $a \in \Lambda$ . Así que, como  $\chi(\Lambda)$  es base para  $\mathcal{V}$ , los vectores  $v \in \chi'(\Lambda)$  son, también, linealmente independientes en  $\mathcal{V}'$ . Para ver que  $\chi'(\Lambda)$  genera a  $\mathcal{V}'$  es fácil primero observar que toda representación universal es completa, es por esto que  $\chi'(F)$  genera a  $\mathcal{V}'$ . Ahora, dado que  $\Lambda$  genera a  $F$  como espacio parcialmente lineal, por la definición de representación y por el teorema 3.1.11, tenemos que todo  $a \in F$  se escribe como  $a = a_1 + \dots + a_n$ , con  $a_i \in \Lambda$ . Entonces  $\chi'(F)$  también es una base de  $\mathcal{V}'$  y, por lo tanto, ambas representaciones son equivalentes. ■

**Corolario 5.1.17.** *Sea  $C(\Lambda)$  el subespacio generado por  $\Lambda$  dentro de  $O(q)$ . Entonces la inclusión  $i : C(\Lambda) \rightarrow \mathbb{F}_2\Lambda$  es la representación universal de  $C(\Lambda)$ .*

*Demostración.* Inmediato del lema anterior. ■

**Teorema 5.1.18.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico y sea  $\Lambda$  una subgráfica de  $\Gamma(F)$  que genera a  $F$  como espacio parcialmente lineal. Entonces  $\Lambda$  es un diagrama para  $F$  en la categoría  $\mathcal{SP}$  si, y sólo si, existe una representación  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $\chi(\Lambda)$  es base de  $\mathcal{V}$ .*



*Demostración.* Supongamos que  $\Lambda$  es un diagrama para  $F$  en  $\mathcal{SP}$ . Sea  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal y sea  $i : C(\Lambda) \rightarrow \mathbb{F}_2\Lambda$  la inclusión (que por el corolario pasado es la representación universal de  $C(\Lambda)$ ). Por ser  $\Lambda$  diagrama para  $F$  existe un morfismo  $\varphi : F \rightarrow C(\Lambda)$  tal que  $\varphi(a) = a$ , para toda  $a \in \Lambda$ . Notemos que la composición  $i \circ \varphi$  es una representación de  $F$  en  $\mathbb{F}_2\Lambda$ , así que, por ser  $\chi$  la representación universal de  $F$ , existe  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{F}_2\Lambda$  tal que  $T(\chi(a)) = (a)$ , para toda  $a \in \Lambda$ . Ahora, como  $\chi(\Lambda)$  genera a  $\mathcal{V}$ , y  $\Lambda$  es base para  $\mathbb{F}_2\Lambda$ , entonces  $\chi(\Lambda)$  es base para  $\mathcal{V}$ .

Ahora, supongamos que existe una representación  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $\chi(\Lambda)$  es base de  $\mathcal{V}$ . Por el lema 5.1.16,  $\chi$  es la representación universal de  $F$ . Sea  $\phi : \Lambda \rightarrow \Gamma(F')$  un morfismo de gráficas, con  $F'$  un espacio simpléctico. Sea  $\chi' : F' \rightarrow \mathcal{V}'$  la representación universal de  $F'$ , entonces, como  $\chi(\Lambda)$  es una base de  $\mathcal{V}$  y  $\chi$  es inyectiva, entonces  $\chi' \circ \phi$  nos define una transformación lineal  $T : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$  tal que  $T(\chi(a)) = \chi'(\phi(a))$ , para toda  $a \in \Lambda$ . Sean  $f$  y  $f'$  las formas bilineales simplécticas definidas en  $\mathcal{V}$  y  $\mathcal{V}'$ , respectivamente; entonces  $f(\chi(a), \chi(b)) = f'(T(\chi(a)), T(\chi(b)))$  (dado que  $a$  y  $b$  son colineales en  $F$  y  $F'$  si, y sólo si, son adyacentes en  $\Lambda$ ), lo que implica que,  $f(u, v) = f'(T(u), T(v))$ .

Observemos que, si  $T(\chi(F)) \subset \chi'(F')$ , entonces tendríamos un morfismo  $\varphi : F \rightarrow F'$  que extiende a  $\phi$  (precisamente  $\varphi = \chi'^{-1} \circ T \circ \chi$ ). Sea  $a \in F$ , entonces, como  $\Lambda$  genera a  $F$ , por la definición de representación y por el teorema 3.1.11,  $\chi(a) = \chi(a_1) + \dots + \chi(a_n)$ , con  $a_i \in \Lambda$  y, además  $f(\chi(a_1) + \dots + \chi(a_i), \chi(a_{i+1})) = 1$ , para toda  $1 \leq i < n$ . Procederemos por inducción sobre  $n$ ; así que, por hipótesis de inducción,  $\chi(a_1) + \dots + \chi(a_{n-1}) \in \chi'(F')$ , y como  $f(\chi(a_1) + \dots + \chi(a_{n-1}), \chi(a_n)) = 1$ , entonces  $f'(T(\chi(a_1) + \dots + \chi(a_{n-1})), T(\chi(a_n))) = 1$ , por lo que  $T(\chi(a_1) + \dots + \chi(a_{n-1})) + T(\chi(a_n)) = T(\chi(a_1) + \dots + \chi(a_{n-1}) + \chi(a_n)) \in \chi'(F')$ . ■

## 5.2. Clasificación de espacios simplécticos

Antes de demostrar la existencia de diagramas para todos los espacios de la categoría de espacios simplécticos, daremos primero una clasificación de estos. En esta sección, el resultado importante es que, dado un espacio simpléctico, la cantidad de puntos colineales a dos puntos que no son colineales entre sí, es constante. Usando este resultado tenemos la clasificación que usaremos posteriormente: los espacios de tipo Desargues (cuando dicho número es igual a 4) y los espacios de tipo Reye (cuando es mayor que 4).

**Definición 5.2.1.** Sea  $F$  un espacio simpléctico conexo reducido y sean  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal simpléctica y  $f = \langle, \rangle$  la forma bilineal definida sobre  $\mathcal{V}$ . Decimos que un conjunto  $C \subset F$  es un *coclíque* si  $\langle \chi(a), \chi(b) \rangle = 0$  para todos  $a, b \in C$ . Si  $C$  es un coclíque, llamaremos *polo* del coclíque a un punto  $p \in F$  tal que  $\langle \chi(a), \chi(p) \rangle = 1$  para todos  $a \in C$ .

En los siguientes resultados, desde la proposición 5.2.2 hasta la proposición 5.2.8, seguiremos con las mismas hipótesis de la definición anterior;  $F$  será un espacio simpléctico conexo reducido,  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal simpléctica y  $f = \langle, \rangle$  la forma bilineal definida sobre  $\mathcal{V}$ .

**Proposición 5.2.2.** *Sea  $C = \{a, b, c\} \subset F$  un coclique de tres puntos y  $p$  un polo de  $C$ . Entonces existe  $d \in F$  tal que  $\chi(d) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $\langle \chi(a), \chi(p) \rangle = 1$ , entonces  $a$  y  $p$  son colineales, sea  $d_1$  el tercer punto de la línea definida por  $a$  y  $p$ . Ahora,  $\langle \chi(a) + \chi(p), \chi(b) \rangle = 1$  y, como  $\chi(a) + \chi(p) = \chi(d_1)$ , entonces  $d_1$  y  $b$  son colineales, sea  $d_2$  el tercer punto de la línea definida por  $d_1$  y  $b$ . Procediendo de la misma forma,  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(p), \chi(c) \rangle = 1$  y, como  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(p) = \chi(d_2)$ , tenemos que  $d_2$  y  $c$  son colineales, sea  $d_3$  el tercer punto de la línea definida por  $d_2$  y  $c$ . Por último,  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c) + \chi(p), \chi(p) \rangle = 1$  y, como  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) + \chi(p) = \chi(d_3)$ , tenemos que  $d_3$  y  $p$  son colineales, sea  $d$  el tercer punto de la línea definida por  $d_3$  y  $p$ , entonces  $\chi(d) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c) + \chi(p) + \chi(p) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$ . ■

**Lema 5.2.3.** *Sea  $l = \{a, b, c\}$  una línea de  $F$  y sea  $l^\perp = \{d \in F : \langle \chi(a), \chi(d) \rangle = \langle \chi(b), \chi(d) \rangle = \langle \chi(c), \chi(d) \rangle = 0\}$ . Si existe  $e_0 \in F$  tal que  $\langle \chi(a), \chi(e_0) \rangle = 1$ , entonces existe  $e_1 \in F$  tal que  $\langle \chi(a), \chi(e_1) \rangle = 0$  y, para todo  $d \in l^\perp$ ,  $\langle \chi(e_0), \chi(d) \rangle = \langle \chi(e_1), \chi(d) \rangle$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $e_0$  es colineal con  $a$ , entonces es colineal con  $b$  o con  $c$ , sin pérdida de generalidad lo es con  $b$ . Sea  $e_1$  el tercer punto de la línea definida por  $e_0$  y  $b$ . Entonces, como  $a$  es colineal con  $e_0$  y con  $b$ , entonces  $\langle \chi(a), \chi(e_1) \rangle = 0$ . Ahora, sea  $d \in l^\perp$ , si  $d$  no es colineal con  $b$ , entonces  $d$  es colineal con  $e_0$  si, y sólo si, lo es con  $e_1$ . ■

**Lema 5.2.4.** *Sea  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un coclique y sean  $l$  y  $l'$  dos líneas de  $F$  tales que  $a_1 \in l$  y  $a_i \in l^\perp$ , para todo  $1 < i \leq n$  y, además,  $a_2 \in l'$  y  $a_i \in l'^\perp$  para todo  $2 < i \leq n$ . Entonces existe  $l''$  tal que  $a_2 \in l''$  y  $a_i \in l''^\perp$  para todo  $i \neq 2$ .*

*Demostración.* Si  $a_1 \in l'^\perp$ , entonces sea  $l'' = l'$ . En caso contrario  $a_1$  es colineal con algún punto  $b \in l''$ . Así que, por el lema anterior, existe un punto  $e \in F$  tal que  $\langle \chi(a_1), \chi(e) \rangle = 0$  y, para todo  $d \in l^\perp$ ,  $\langle \chi(b), \chi(d) \rangle = \langle \chi(e), \chi(d) \rangle$ , entonces, como  $a_2 \in l^\perp$  tenemos que  $\langle \chi(b), \chi(a_2) \rangle = \langle \chi(e), \chi(a_2) \rangle = 1$ ; tomemos  $l''$  la línea definida por  $a_2$  y  $e$ .  $a_i$ , para  $i \neq 2$  no es colineal con  $a_2$  ni con  $e$ , así que  $a_i \in l''^\perp$ , para  $i \neq 2$ . ■

**Corolario 5.2.5.** *Si  $a, b \in F$  son dos puntos no colineales, entonces existen dos líneas  $l$  y  $l'$  de  $F$  tales que  $a \in l$ ,  $b \in l^\perp$  y  $b \in l'$ ,  $a \in l'^\perp$ .*

*Demostración.* Inmediato del lema anterior, dado que  $F$  es reducido. También se puede deducir fácilmente del lema 5.1.4. ■

**Lema 5.2.6.** *Sea  $C = \{a, b, c\} \subset F$  un coclique tal que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(f)$ . Entonces existe una línea  $l$  de  $F$  tal que alguno de los puntos pertenece a  $l$  y los otros dos a  $l^\perp$ .*

*Demostración.* Dado que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(f)$ , tenemos que existe  $p \in F$  tal que  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c), \chi(p) \rangle = 1$  (dado que  $F$  genera a  $\mathcal{V}$ ), entonces hay dos casos, que  $p$  sea colineal con exactamente uno de los puntos  $a$ ,  $b$  o  $c$ , o bien, que sea colineal con los tres. Para el primer caso, sin pérdida de generalidad  $\langle \chi(a), \chi(p) \rangle = 1$  y  $\langle \chi(b), \chi(p) \rangle = \langle \chi(c), \chi(p) \rangle = 0$ , entonces tomemos  $l$  como la línea definida por  $p$  y  $a$ . Para el segundo caso, tenemos que  $p$  es un polo del coclique  $C$ , así que por la proposición 5.2.2, existe  $d \in F$  tal que  $\chi(d) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$ . Entonces, como  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c), \chi(a) \rangle = 0$ , tenemos que  $a$  y  $d$  no son colineales, y así, por el corolario anterior, existe una línea  $l'$  tal que  $d \in l'$  y  $a \in l'^\perp$ ; tomemos  $e \in l'$  distinto de  $d$ , entonces  $\langle \chi(a), \chi(e) \rangle = 0$  y  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c), \chi(e) \rangle = 1$ , entonces  $e$  es colineal con  $b$  y no con  $c$ , o bien, con  $c$  no con  $b$ , sin pérdida de generalidad es colineal con  $b$ , tomemos  $l$  la línea definida por  $e$  y  $b$ . ■

**Proposición 5.2.7.** *Sea  $C = \{a_1, a_2, a_3\} \subset F$  un coclique tal que  $\chi(a_1) + \chi(a_2) + \chi(a_3) \notin \text{rad}(f)$ . Entonces existen  $l_1, l_2, l_3$  líneas de  $F$  tales que  $a_i \in l_i$  y  $a_i \in l_j^\perp$  para  $j \neq i$ .*

*Demostración.* Por la proposición anterior, existe una línea  $l_1$  de  $F$  tal que  $a_i \in l_1$  y  $a_j \in l_1^\perp$  para  $j \neq i$ , sin pérdida de generalidad,  $i = 1$ . Ahora, por el corolario 5.2.5 existe una línea  $l$  tal que  $a_2 \in l$  y  $a_3 \in l^\perp$ , así que tenemos las hipótesis del lema 5.2.4, por lo tanto existe  $l_2$  tal que  $a_2 \in l_2$  y  $a_i \in l_2^\perp$  para  $i \neq 2$ . Análogamente existe  $l_3$  tal que  $a_3 \in l_3$  y  $a_i \in l_3^\perp$  para  $i \neq 3$ . ■

**Proposición 5.2.8.** *Sea  $a \in F$  y  $\Delta_a$  el conjunto de puntos, distintos de  $a$  que no son colineales con  $a$ . Entonces  $\Delta_a$  es un subespacio conexo de  $F$ .*

*Demostración.* Es claro que el conjunto  $\Delta_a$  forma un subespacio dado que, si tomamos dos puntos colineales, el tercer punto de la línea que definen no puede ser colineal con  $a$ . Resta demostrar que es conexo. Sean  $b, c \in \Delta_a$  dos puntos distintos no colineales y sea  $p \in F$  un punto colineal con ambos. Si  $p \in \Delta_a$  no resta más que hacer. Si  $p \notin \Delta_a$ , tenemos  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c), \chi(p) \rangle = 1$ , por lo que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(f)$ , entonces, por la proposición anterior existe una línea  $l$  tal que  $a \in l$  y  $b, c \in l^\perp$ . Así que, como  $p$  es colineal con  $a$ , por el lema 5.2.3 tenemos un punto  $e \in F$  tal que  $\langle \chi(e), \chi(a) \rangle = 0$  (es decir,  $e \in \Delta_a$ ) y  $\langle \chi(e), \chi(d) \rangle = \langle \chi(p), \chi(d) \rangle$  para todo  $d \in l^\perp$ . Por lo tanto, como  $b, c \in l^\perp$  y ambos son colineales con  $p$ , entonces también son colineales con  $e$ . ■

**Corolario 5.2.9.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico. Entonces el número de puntos colineales a dos puntos no colineales entre sí es constante, es decir, es el mismo para cualquier pareja de puntos no colineales.*

*Demostración.* Si  $F$  es reducido, tomemos  $(a, b)$  y  $(a, c)$  dos parejas de puntos no colineales donde  $b$  y  $c$  sí lo son y sea  $p$  un punto colineal con  $a$  y  $b$ . Sea  $d$  el tercer punto de la línea definida por  $b$  y  $c$ , entonces  $\gamma_d(p)$  es colineal con  $\gamma_d(a) = a$  y con  $\gamma_d(b) = c$ . Ahora, si  $b$  y  $c$  no son colineales, por el resultado anterior existe un punto  $d$  colineal a ambos y que no es colineal con  $a$ .

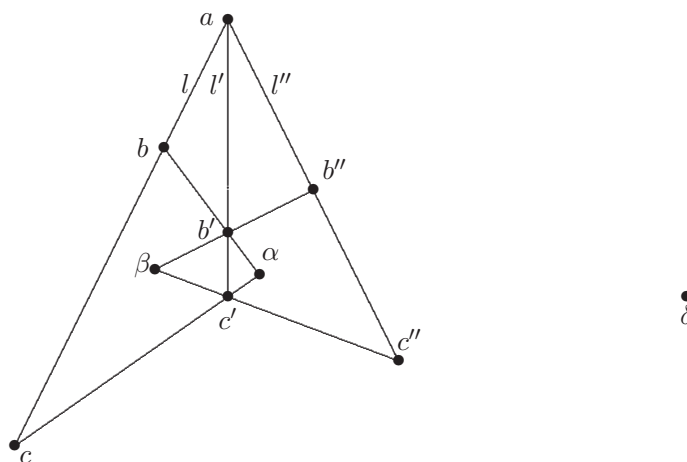
Si  $F$  no es reducido, por el corolario 5.1.13 tenemos que  $F \cong F^* \times \mathcal{V}$ . Entonces, como  $F^*$  es reducido, por el caso anterior cumple con el teorema, así que  $F$  también. ■

**Definición 5.2.10.** Sea  $F$  un espacio simpléctico. Decimos que  $F$  tiene la *propiedad de Desargues* si, para cualesquiera dos puntos no colineales, el número de puntos colineales a ambos es exactamente cuatro. Decimos que  $F$  tiene la *propiedad de Reye* si, para cualesquiera dos puntos no colineales, el número de puntos colineales a ambos es mayor que cuatro.

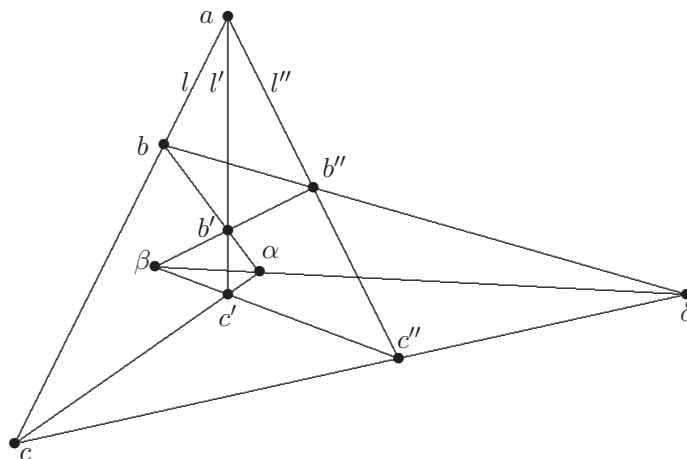
### 5.3. Existencia de diagramas

En esta sección daremos el principal resultado de todo el capítulo: todos los espacios, en la categoría de espacios simplécticos, tienen diagrama, para esto, utilizaremos la clasificación que dimos en la sección anterior. Dividiremos la sección en dos partes, primero daremos otra forma de construir a los espacios de tipo Desargues, después daremos condiciones para que una subgráfica de la gráfica de colinealidad de un espacio reducido de tipo Reye. Por último, usando el corolario 5.1.13, llegaremos a la existencia de diagramas para todo espacio en  $\mathcal{SP}$ .

**Lema 5.3.1.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico con la propiedad de Desargues. Sean  $l = \{a, b, c\}$ ,  $l' = \{a, b', c'\}$ ,  $l'' = \{a, b'', c''\}$  tres líneas, de  $F$ , con un punto  $a$  en común, y sean  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\delta$  los puntos no colineales con  $a$  es los planos generados por las parejas  $(l, l')$ ,  $(l', l'')$  y  $(l, l'')$  respectivamente y, sin pérdida de generalidad,  $\{b, b', \alpha\}$ ,  $\{c, c', \alpha\}$ ,  $\{b', b'', \beta\}$  y  $\{c', c'', \beta\}$  son líneas. Entonces también  $\{\alpha, \beta, \delta\}$ ,  $\{b, b'', \delta\}$  y  $\{c, c'', \delta\}$  son líneas.*



*Demostración.* Tenemos que  $a$  y  $\alpha$  son puntos no colineales, entonces, dado que  $F$  tiene la propiedad de Desargues, el punto  $b''$  no puede ser colineal con  $\alpha$  (dado que ya existen cuatro puntos colineales a ambos,  $a$  y  $\alpha$ ), por el mismo razonamiento tampoco lo es a  $c''$ , y así, como  $\alpha$  es colineal con  $b'$ , también lo es con  $\beta$ , y por el mismo razonamiento,  $c$  es colineal con  $c''$ . Sea  $\delta'$  el sexto punto del plano generado por las líneas  $\{c', c'', \beta\}$  y  $\{c, c', \alpha\}$ , entonces  $\{\alpha, \beta, \delta'\}$  y  $\{c, c'', \delta'\}$  son líneas, por lo tanto,  $\delta'$  pertenece al plano generado por  $l$  y  $l''$ , y así  $\delta' = \delta$  y  $\{b, b'', \delta\}$  es, también, una línea.



**Definición 5.3.2.** Sea  $\Omega$  un conjunto. El espacio de 2-conjuntos en  $\Omega$  es el espacio parcialmente lineal  $\mathcal{T}(\Omega)$ , cuyos puntos son las parejas  $\{\alpha, \beta\} \subset \Omega$ , donde  $\alpha \neq \beta$ ; y las líneas son los conjuntos de la forma  $\{\{\alpha, \beta\}\{\alpha, \delta\}\{\beta, \delta\}\}$ .

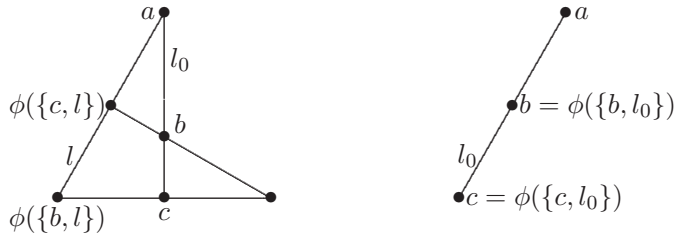
**Teorema 5.3.3.** Sea  $F$  un espacio simpléctico conexo con la propiedad de Desargues, entonces existe un conjunto  $\Omega$  tal que  $\mathcal{T}(\Omega)$  es isomorfo a  $F$ .

*Demostración.* Sea  $a \in F$  y  $l_0 = \{a, b, c\}$  una línea fija de  $S$ . Sea  $\Omega'$  el conjunto de todas las líneas que pasan por  $a$  y sea  $\Omega = \Omega' \cup \{b, c\}$ . Notemos que, en  $\mathcal{T}(\Omega)$ , sólo hay los siguientes tres tipos de puntos:

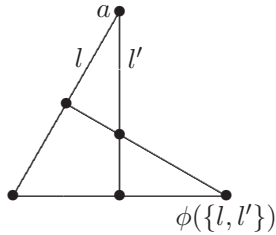
- 1  $\{b, c\}$ .
- 2  $\{x, l\}$  con  $x = b, c$  y  $l \in \Omega'$ .
- 3  $\{l, l'\}$  con  $l, l' \in \Omega'$  y  $l \neq l'$ .

Entonces, usando esto, definiremos  $\phi : \mathcal{T}(\Omega) \rightarrow F$  como de la siguiente forma:

- 1  $\phi(\{b, c\}) = a$ .
- 2  $\phi(x, l_0) = x$  y, para  $l \neq l_0$ ,  $\phi(\{x, l\}) = y$ , donde  $y$  es el único punto de  $l$  que no es colineal con  $x$ . Es decir,  $\phi$  se define en este tipo de puntos como se muestra en las siguientes figuras.



- 3  $\phi(l, l') = y$ , donde  $y$  es el único punto, distinto de  $a$ , en el plano generado por  $l$  y  $l'$  tal que no es colineal con  $a$ . Es decir,  $\phi$  se define en este tipo de puntos como se muestra en la siguiente figura.



Ahora probaremos que  $\phi$ , definida de esta manera, es inyectiva. Sea  $\mathcal{T}_i =$  el conjunto de puntos del tipo  $i$  (con respecto a la numeración dada anteriormente) y sean  $S_1 = \{a\}$ ,  $S_2 = \{y \in S : y \text{ es colineal con } a\}$  y  $S_3 = \{y \in S : y \text{ no es colineal con } a\}$ ; entonces tenemos que  $\phi(\mathcal{T}_i) \subset S_i$ , así que es necesario probar que las  $\phi$  restringido a cada  $\mathcal{T}_i$  es una biyección. Para  $i = 1$  es claro.

Sea  $y \in S_2$ , así que existe una línea  $l \in \Omega'$  tal que  $y \in l$ , tomemos el punto  $x \in \{a, b\}$  tal que no es colineal con  $y$ , entonces  $\phi(x, l) = y$ . Ahora, sean  $\{x, l\}, \{x', l'\} \in \mathcal{T}_2$  tal que  $\phi(\{x, l\}) = \phi(\{x', l'\}) = y$ , entonces  $y \in l$  y  $y \in l'$ , por lo tanto  $l = l'$ , y con esto también tenemos que  $x = x'$ .

Sea  $y \in S_3$ . Dado que  $S$  es conexo, existe  $z \in S$  colineal con  $y$  y con  $a$ . Sean  $l$  y  $l'$  las dos líneas en el plano generado por  $\{a, y, z\}$  que contienen a  $a$ , entonces,  $\phi(\{l, l'\}) = y$ . Ahora, sean  $\{l_1, l'_1\}, \{l_2, l'_2\} \in \mathcal{T}_3$  tales que  $\phi(\{l_1, l'_1\}) = \phi(\{l_2, l'_2\}) = y$ . Tenemos que  $a$  y  $y$  no son colineales, entonces, por la propiedad de Desargues, existen exactamente cuatro puntos colineales con ambos, por lo tanto los planos  $\langle l_1 \cup l'_1 \rangle$  y  $\langle l_2 \cup l'_2 \rangle$  son iguales y, dado que  $a$  pertenece a las cuatro líneas podemos deducir que  $\{l_1, l'_1\} = \{l_2, l'_2\}$ .

Por último, resta demostrar que  $\phi$  manda líneas en líneas. Notemos que hay tres tipos de líneas en  $\mathcal{T}(\Omega)$ :

- 1  $\{\{l, l'\}, \{l', l''\}, \{l, l''\}\}$ , con  $l, l', l'' \in \Omega$ .
- 2  $\{\{x, l\}, \{x, l'\}, \{l, l'\}\}$ , con  $x \in \{a, b\}$  y  $l, l' \in \Omega$ .
- 3  $\{b, c\}, \{b, l\}, \{c, l\}\}$ , con  $l \in \Omega$ .

Por la definición de  $\phi$  y, usando el lema 5.3.1, la imagen de las líneas del primero y segundo tipo son líneas. La imagen de una línea del tercer tipo es, precisamente,  $l$ . ■

Ahora que ya sabemos cómo podemos pensar a los espacios con la propiedad de Desargues, seguiremos estudiando los espacios reducidos para poder estudiar a los espacios con la propiedad de Reye desde un punto de vista más sencillo.

En los siguientes cuatro resultados, desde el teorema 5.3.4 hasta el lema 5.3.8,  $F$  será un espacio simpléctico conexo reducido,  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal simpléctica y  $f = \langle, \rangle$  la forma bilineal definida sobre  $\mathcal{V}$ .

**Teorema 5.3.4.** *Sean  $a, b \in F$  dos puntos no colineales y sea  $F_{a,b} = \{c \in F : c \neq a, b, \langle \chi(a), \chi(c) \rangle = \langle \chi(b), \chi(c) \rangle = 0, \chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(f)\}$ . Entonces  $F_{a,b}$  es un subespacio conexo.*

*Demostración.* Si  $c_1, c_2 \in F_{a,b}$  son dos puntos colineales, sea  $c_3$  el tercer punto de la línea que definen. Entonces  $c_3$  no es colineal con  $a$  ni con  $b$ , además,  $\langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c_3), \chi(c_1) \rangle = 1$ , por lo tanto  $c_3 \in F_{a,b}$ .

Ahora, sean  $c, d \in F_{a,b}$  dos puntos distintos no colineales. Dado que  $\{a, b, c\}$  es un coclique tal que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(f)$  entonces, por la proposición 5.2.7 existe una línea tal que  $c \in l$  y  $a, b \in l^\perp$ . Si  $d \notin l^\perp$ , entonces existe un punto en  $l$  colineal con  $c$  y con  $d$ . Si  $d \in l^\perp$ , consideremos el coclique  $\{a, b, d\}$ ; de la misma forma existe una línea  $l'$  tal que  $b \in l'$  y  $a, d \in l'^\perp$ . Entonces  $\{a, b, c, d\}$  es un coclique y las líneas  $l$  y  $l'$  cumplen

las hipótesis del lema 5.2.4, así que tenemos una línea  $l''$  tal que  $b \in l''$  y  $a, c, d \in l''^\perp$ . Ahora, como  $\Delta_a$  es conexo (por la proposición 5.2.8), existe un punto  $e$  colineal con  $c$  y  $d$ , y no colineal con  $a$ , entonces, si  $e$  no es colineal con  $b$ , tenemos la veracidad del resultado. Si  $e$  es colineal con  $b$ , por el lema 5.2.3 existe un punto  $e'$  no colineal con  $b$  y, además,  $e'$  colineal con  $c$  y  $d$ , y no colineal con  $a$ , dado que  $e$  cumple estas relaciones de colinealidad. ■

**Proposición 5.3.5.** Sean  $\{a, b, c\}, \{a, b, d\} \subset F$  dos cocliques tales que  $\chi(p_0) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$  para  $p_0 \in F$  y  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(d) \notin \text{rad}(\tilde{f})$ . Entonces  $\chi(p_1) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(d)$ , para  $p_1 \in F$ .

*Demostración.* Dado que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \in F$ , por ser  $F$  conexo, tenemos que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(\tilde{f})$ , entonces  $c, d \in F_{a,b}$ , entonces, por el resultado anterior, existe un punto  $e \in F_{a,b}$  colineal con  $c$  y  $d$  (si  $c$  y  $d$  son colineales,  $e$  es el tercer punto de la línea que definen), sean  $e_1$  y  $e_2$  los terceros puntos de las líneas definidas por las parejas  $(e, c)$  y  $(e, d)$ , respectivamente. Ahora, como  $\langle \chi(p), \chi(e_1) \rangle = \langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(c), \chi(e) + \chi(c) \rangle = 1$  tenemos que existe  $p_0 \in F$  (el tercer punto de la línea definida por  $p_1$  y  $e$ ) tal que  $\chi(p_0) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(e)$  y, análogamente,  $\langle \chi(p_0), \chi(e_2) \rangle = \langle \chi(a) + \chi(b) + \chi(e), \chi(e) + \chi(d) \rangle = 1$  tenemos que existe  $p_1 \in F$  (el tercer punto de la línea definida por  $p_2$  y  $e$ ) tal que  $\chi(p_1) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(d)$ . ■

**Lema 5.3.6.** Sea  $v \in \mathcal{V}$  distinto de cero. Entonces existe un coclique  $C \subset F$  tal que  $v = \sum_{a \in C} \chi(a)$ . Si, además,  $v \in O(\tilde{q})$ , entonces existe dicho coclique con una cantidad impar de puntos.

*Demostración.* Dado que la imagen de los puntos de  $F$  bajo  $\chi$  genera a  $\mathcal{V}$ , entonces podemos escribir  $v = \sum_{a \in C} \chi(a)$ , para algún conjunto  $C \subset F$ . Si existen  $a_0, a_1 \in C$  tales que  $\langle \chi(a_0), \chi(a_1) \rangle = 1$ , sea  $C' = (C \setminus \{a_0, a_1\}) \cup \{a_2\}$ , donde  $a_2$  es el tercer punto de la línea que definen, y así,  $v = \sum_{a' \in C'} \chi(a')$ . Por lo tanto, si tomamos  $C \subset F$  de tamaño mínimo, tenemos que  $C$  es un coclique. Ahora, si  $v \in O(\tilde{q})$ , entonces  $\tilde{q}(v) = 1$ ; sea  $C = \{a_1, \dots, a_n\}$ , por lo tanto  $1 = \tilde{q}(\sum_{a \in C} \chi(a)) = (\sum_{a \in C} \tilde{q}(\chi(a))) + (\sum_{i < j} \langle \chi(a_i), \chi(a_j) \rangle) = \sum_{a \in C} \tilde{q}(\chi(a)) \equiv n \pmod{2}$ , y así,  $n$  es impar. ■

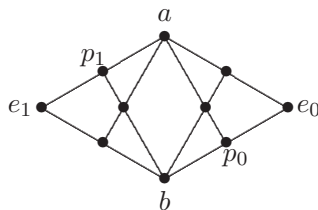
**Lema 5.3.7.** Sean  $0 < m < n$  y  $C \subset F$  un coclique tal que  $|C| = n > 3$ , entonces para cualquier  $0 < m < n$ , existe un coclique  $C' \subset C$  de  $m$  puntos tal que  $\sum_{a' \in C'} \chi(a') \notin \text{rad}(\tilde{f})$ .

*Demostración.* Sea  $\{a_1, \dots, a_{m+1}\} \subset C$ . Sea  $u = \chi(a_1) + \dots + \chi(a_m)$  y  $v = \chi(a_1) + \dots + \chi(a_{m-1}) + \chi(a_{m+1})$ ; si  $u, v \in \text{rad}(\tilde{f})$ , entonces también  $u + v = \chi(a_m) + \chi(a_{m+1}) \in \text{rad}(\tilde{f})$ , lo que implica que para todo  $b \in F$ ,  $\langle \chi(b), \chi(a_m) + \chi(a_{m+1}) \rangle = 0$ , es decir,  $\langle \chi(b), \chi(a_m) \rangle = \langle \chi(b), \chi(a_{m+1}) \rangle$ , que contradice la hipótesis de que  $F$  es reducido. ■



**Lema 5.3.8.** *Supongamos  $F$  tiene la propiedad de Reye y sean  $a, b \in F$  dos puntos no colineales, entonces existen otros dos puntos  $c, d \in F$  tal que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) = \chi(d)$  y, además, el conjunto  $\{a, b, c\}$  es un coclique.*

*Demostración.* Sea  $e_0$  un punto colineal a ambos,  $a$  y  $b$ . Como  $F$  posee la propiedad de Reye, entonces existe un punto  $e_1$  fuera del plano generado por  $\{e_0, a, b\}$ . Nombremos a los puntos como se muestra en el dibujo.



Si  $e_0$  es colineal con  $e_1$ , entonces  $e_0$  no es colineal con  $p_1$  y, como  $p_1$  es colineal con  $b$ , entonces  $p_0$  y  $p_1$  son colineales. Sea  $c$  el tercer punto de la línea definida por  $e_0$  y  $e_1$ , y  $d$  el tercer punto de la línea definida por  $p_0$  y  $p_1$ , entonces  $\chi(d) = \chi(p_0) + \chi(p_1) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(e_0) + \chi(e_1) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$ .

Si  $e_0$  no es colineal con  $e_1$  entonces  $e_0$  y  $p_1$  son colineales, de la misma forma,  $e_1$  y  $p_0$  también lo son. Sea  $c$  el tercer punto de la línea definida por  $e_0$  y  $p_1$ , y  $d$  el respectivo para la línea definida por  $e_1$  y  $p_0$ , entonces  $\chi(d) = \chi(e_1) + \chi(p_0) = \chi(a) + \chi(p_1) + \chi(e_0) + \chi(b) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$ .

Podemos notar que, en cualquiera de los dos casos, el punto  $c$  no puede ser colineal con  $a$  ni con  $b$ , así que el conjunto  $\{a, b, c\}$  es un coclique. ■

**Teorema 5.3.9.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico, conexo, reducido y con la propiedad de Reye, sea  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal simpléctica y sean  $f = (\cdot, \cdot)$  y  $q$  las formas bilineal y cuadrática inducidas por  $F$  en  $\mathcal{V}$ , respectivamente. Entonces  $F \cong O(q)$ , el espacio cuadrático definido por  $q$ .*

*Demostración.* Es claro que  $\chi(F) \cap \text{rad}(f) = \emptyset$ , dado que  $F$  no tiene puntos aislados, además,  $q(a) = 1$  para todo  $a \in F$ , por la definición de  $q$ . Entonces  $\chi(F) \subset O(q)$ .

Queda demostrar la contención en sentido contrario. Sea  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) = v \in O(q)$ , con  $\{a, b, c\} \subset F$  un coclique. Por el lema anterior aplicado a la pareja  $\{a, b\}$  existen  $d, e \in F$  tales que  $\chi(e) = \chi(a) + \chi(b) + \chi(d)$  y  $\{a, b, d\}$  es un coclique. Además, dado que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \in O(q)$ , entonces  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) \notin \text{rad}(f)$ , así que, por la proposición 5.3.5, existe  $e' \in F$  tal que  $\chi(a) + \chi(b) + \chi(c) = \chi(e')$ .

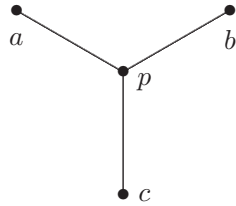
Ahora sea  $v \in O(q)$  un punto cualquiera. Por el lema 5.3.6, tenemos un coclique  $C \subset F$ , con una cantidad impar de puntos, tal que  $v = \sum_{a \in C} \chi(a)$ .

A partir de aquí procederemos por inducción sobre  $n$ . Por el lema 5.3.7, para  $m = n - 2$  existe un coclique  $C' \subset C$  de tamaño  $m$  tal que  $\sum_{a \in C'} \chi(a) = u \notin \text{rad}(f)$ , sin pérdida de generalidad  $C' = \{a_1, \dots, a_{n-2}\}$ , además  $a$  está en  $O(q)$ , dado que  $m$  es impar. Entonces, por hipótesis de inducción, existe  $e \in F$  tal que  $\chi(e) = u$  y, también,  $\{e, a_{n-1}, a_n\}$  es un coclique de  $F$ , así que, por el primer caso, existe  $e' \in F$  tal que  $\chi(e') = \chi(e) + \chi(a_{n-1}) + \chi(a_n) = v$ . Por lo tanto  $O(q) \subset \chi(F)$ .

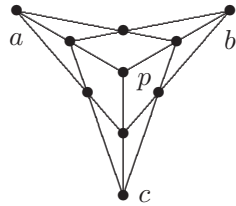
Falta observar que  $\chi$  es morfismo de espacios parcialmente lineales, lo cual es inmediato. Y así, dado que  $O(q)$  es un espacio simpléctico,  $\chi$  es un isomorfismo de  $F$  en su imagen ■

A partir del teorema anterior y el siguiente lema, estaremos muy cerca de probar la existencia de diagramas para espacios simplécticos reducidos con la propiedad de Reye.

**Lema 5.3.10.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico conexo reducido. Entonces  $F$  tiene la propiedad de Reye si, y sólo si,  $D_4$  es una subgráfica de  $\Gamma(F)$ .*



*Demostración.* Supongamos que  $D_4$  es una subgráfica de  $\Gamma(F)$ . Entonces  $F$  contiene a las nueve líneas que se muestran en la figura



Donde podemos ver que  $a$  y  $b$  tienen más de cuatro puntos colineales a ambos.

Ahora supongamos que  $F$  tiene la propiedad de Reye y sean  $a, b \in F$  dos puntos no colineales. Tomemos  $c$  un punto colineal a ambos y consideremos a  $P$  el plano generado por  $\{a, b, c\}$ . Dado que  $F$  tiene la propiedad de Reye, entonces existe un punto  $p$  fuera de  $P$  colineal a ambos,  $a$  y  $b$ . Sea  $l$  una línea en el plano  $P$  tal que  $a \in l$ . Dado que  $p$  es colineal con  $a$ , tenemos que también lo es con otro punto  $d \in l$ ; sea  $e$  el tercer punto de la línea definida por  $d$  y  $p$ . El punto  $e$  no es colineal con  $a$ , ni con  $b$ , dado que estos últimos son colineales, ambos, con  $d$  y  $p$ . Entonces el conjunto  $\{a, b, p, e\}$  definen un  $D_4$  en  $\Gamma(F)$ . ■

**Teorema 5.3.11.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico, conexo y reducido con la propiedad de Reye y sea  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal. Si existe  $\Lambda$  subgráfica de  $\Gamma(F)$  tal que*

1  $D_4$  es subgráfica de  $\Lambda$ .

2  $\Lambda$  es conexa.

3  $\chi(\Lambda)$  es base de  $\mathcal{V}$ .

entonces  $\Lambda$  es un diagrama para  $F$  en  $\mathcal{V}$ .

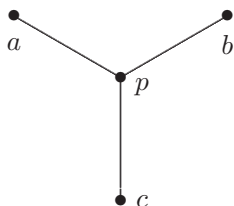
*Demostración.* Sean  $f$  y  $q$  las formas bilineal y cuadrática definidas por  $F$  en  $\mathcal{V}$ , respectivamente, y consideremos a  $C(\Lambda)$ , el espacio generado por  $\Lambda$  en  $O(q)$ , el cual tiene la propiedad de Reye, dado que  $D_4$  es subgráfica de  $\Lambda$ . Notemos que  $\mathcal{V} = \mathbb{F}_2\Lambda$ , dado que  $\Lambda$  es una base de  $\mathcal{V}$ , lo que nos dice que la inclusión de  $C(\Lambda)$  en  $\mathcal{V}$  es su representación universal y, más aún, dado que  $\Lambda$  genera a  $C(\Lambda)$  como espacio parcialmente lineal, entonces  $C(\Lambda)$  define las mismas formas bilineal y cuadrática,  $f$  y  $q$ , sobre  $\mathcal{V}$ .

Sean  $u, v \in C(\Lambda)$  y  $a, b \in F$  tales que  $\chi(a) = u$  y  $\chi(b) = v$ . Por ser  $F$  conexo, existen  $a_1, \dots, a_n \in F$  tales que  $a_1 = a$ ,  $a_n = b$  y  $a_i, a_{i+1}$  son colineales para toda  $1 \leq i \leq n$ , lo que se traduce en  $f(\chi(a_i), \chi(a_{i+1})) = 1$  y, dado que dos puntos en  $O(q)$  son colineales si, y sólo si, la forma bilineal en ellos vale 1, entonces tenemos que,  $\chi(a_1) = u, \dots, \chi(a_n) = v \in C(\Lambda)$  es el respectivo camino para  $u$  y  $v$ , por lo tanto,  $C(\Lambda)$  es conexo. Ahora, como  $F$  es reducido, existe  $c \in F$  colineal a  $a$  y no a  $b$ , es decir  $f(\chi(a) + \chi(b), \chi(c)) = 1$ . Dado que  $\Lambda$  es base de  $\mathcal{V}$ , entonces podemos escribir a  $\chi(c)$  como  $c = v_1 + \dots + v_k$ , con  $v_i \in \Lambda$ ; por lo tanto, existe  $i_0$  tal que  $f(\chi(a) + \chi(b), \chi(v_{i_0})) = 1$ , es decir  $v_{i_0}$  es colineal a  $u$ , o bien, es colineal a  $v$ , por lo tanto  $C(\Lambda)$  es reducido.

Por último, notemos que, tanto  $C(\Lambda)$  como  $F$  satisfacen las hipótesis del teorema 5.3.9, con la misma forma cuadrática, por lo tanto  $C(\Lambda) \cong F$ , es decir,  $\Lambda$  genera a  $F$ , que era la única hipótesis faltante del teorema 5.1.18. ■

**Lema 5.3.12.** *Sea  $F$  un espacio simpléctico conexo reducido con la propiedad de Reye y sea  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  su representación universal. Consideremos a  $D_4$  como subgráfica de  $\Gamma(F)$ . Entonces existe  $\Lambda$  subgráfica conexa de  $\Gamma(F)$  maximal tal que  $\chi(\Lambda)$  es un conjunto de vectores linealmente independientes y  $D_4$  como subgráfica de  $\Lambda$ .*

*Demostración.* Nombremos a los puntos de  $D_4$  como se muestra en la figura.



Sean  $f$  y  $q$  las formas bilineal y cuadrática definidas por  $F$  en  $\mathcal{V}$ , respectivamente. Inicialmente es necesario probar que  $\chi(D_4)$  consta de vectores linealmente independientes. Es claro que  $\chi(a) \neq \chi(b) + \chi(p)$  y  $\chi(a) \neq \chi(b) + \chi(c) + \chi(p)$ , dado que  $f(\chi(a), \chi(a)) = 0$ . También es claro que  $\chi(a) \neq \chi(b) + \chi(c)$ , dado que  $q(\chi(a)) = 1$  y  $q(\chi(b) + \chi(c)) = f(\chi(b), \chi(c)) + q(\chi(b)) + q(\chi(c)) = 0$ , de la misma forma para  $b, c$  y  $p$ . Entonces  $\chi(a)$  no es combinación lineal de los demás puntos de  $D_4$  y, análogamente, tampoco  $\chi(b)$  ni  $\chi(c)$  lo son. Para ver que  $\chi(p)$  tampoco es combinación lineal del resto de los puntos de  $D_4$ , veamos que  $\chi(p) \neq \chi(a) + \chi(b) + \chi(c)$ , dado que  $f(\chi(p), \chi(p)) = 0$ .

Con esto, existencia de  $\Lambda$  maximal es inmediato del lema de Zorn. ■

**Teorema 5.3.13.** *En la categoría  $\mathcal{SP}$ , todos los espacios tienen diagrama.*

*Demostración.* Sea  $F$  un espacio simpléctico, sin pérdida de generalidad, conexo. La prueba la dividiremos en tres casos.

**Caso 1.** Supongamos que  $F$  es reducido y tiene la propiedad de Reye. Sea  $\chi : F \rightarrow \mathcal{V}$  la representación universal de  $F$  y consideremos a  $D_4$  como subgráfica de  $\Gamma(F)$ . Sea  $\Lambda$  la subgráfica conexa de  $\Gamma(F)$ , maximal, tal que  $\chi(\Lambda)$  es un conjunto de vectores linealmente independientes y  $D_4$  como subgráfica de  $\Lambda$ . Entonces  $\Lambda$  es conexa y contiene a  $D_4$  como subgráfica, así que, para poder aplicar el teorema 5.3.11 únicamente falta verificar que  $\chi(\Lambda)$  genera a  $\mathcal{V}$ . Lo que sabemos es que  $\chi(F)$  genera a  $\mathcal{V}$ , entonces demostraremos que  $\chi(F)$  está contenido en el subespacio  $\mathcal{V}'$  generado por  $\chi(\Lambda)$ . Sea  $a \in F$ , si  $a$  es colineal con algún punto  $b \in \Lambda$ , entonces  $\chi(\{a\} \cup \Lambda)$  ya no es un conjunto de vectores linealmente independientes, por la maximalidad de  $\Lambda$ , y como  $\chi(\Lambda)$  sí lo es, entonces  $\chi(a) = \chi(a_1) + \dots + \chi(a_n)$ , con  $a_i \in \Lambda$ , así que  $\chi(a)$  está en  $\mathcal{V}'$ . Si  $a$  no es colineal con ningún punto de  $\Lambda$ , sea  $b \in \Lambda$  sea  $c \in F$  un punto colineal a ambos; por ser  $c$  colineal con  $b$ , entonces  $\chi(c) \in \mathcal{V}'$ . Sea  $d$  el tercer punto de la línea definida por  $a$  y  $c$ , así que  $b$  es colineal con  $d$ , dado que lo es con  $c$  y no con  $a$  y, por el argumento anterior,  $\chi(d) \in \mathcal{V}'$ , por lo tanto  $\chi(c) + \chi(d) = \chi(a) \in \mathcal{V}'$ .

**Caso 2.** Supongamos que  $F$  es reducido y tiene la propiedad de Desargues. Sea  $\Omega$  un conjunto tal que  $\mathcal{T}(\Omega) \cong F$  y sea  $\mathcal{V} = \mathbb{F}_2\Omega$ . Sea  $\mathcal{U} = \{u \in \mathcal{V} : u = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \alpha_i \in \Omega, n \text{ es par}\}$  y sea  $\chi : \mathcal{T}(\Omega) \rightarrow \mathcal{U}$  definida por  $\chi(\{\alpha, \beta\}) = \alpha + \beta$ ; entonces  $\chi$  es una representación de  $\mathcal{T}(\Omega)$  en  $\mathcal{U}$ .

Para construir un diagrama para  $\mathcal{T}(\Omega)$  tomemos un punto fijo  $\alpha_0 \in \Omega$  y sea  $\Lambda$  la subgráfica de  $\Gamma(\mathcal{T}(\Omega))$  definida por el conjunto  $\{\{\alpha_0, \beta\} : \alpha_0 \neq \beta \in \Omega\}$ . Es claro que  $\Lambda$  genera a  $\mathcal{T}(\Omega)$ , ya que, dado un punto  $\{\alpha, \beta\} \in \mathcal{T}(\Omega)$ , si ambos puntos,  $\alpha$  y  $\beta$  son distintos de  $\alpha_0$ , entonces  $\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha_0, \beta\}, \{\alpha_0, \alpha\}\}$  es línea de  $\mathcal{T}(\Omega)$ , es decir,  $\chi(\{\alpha_0, \beta\}) + \chi(\{\alpha_0, \alpha\}) = \alpha_0 + \beta + \alpha_0 + \alpha = \alpha + \beta = \chi(\{\alpha, \beta\})$ . Mediante esta última fórmula también tenemos que  $\chi(\Lambda)$  genera a  $\mathcal{U}$  como espacio vectorial. Ahora, sea  $\{\{\alpha_0, \beta\} : \alpha_0 \neq \beta \in X \subset \Omega\}$  tal que  $\sum_{\beta \in X} \chi(\{\alpha_0, \beta\}) = 0$ , así que, por la definición de  $\chi$ ,  $0 = \sum_{\beta \in X} \chi(\{\alpha_0, \beta\}) = |X|\alpha_0 + \sum_{\beta \in X} \lambda_\beta \beta$ , entonces, como  $X$  sí es un

conjunto linealmente independiente, para cada  $\beta \in X$  tenemos que  $\lambda_\beta = 0$ . Con esto,  $\chi(\Lambda)$  es un conjunto de vectores linealmente independientes, por lo tanto es una base de  $\mathcal{U}$ . Así tenemos todas las hipótesis para aplicar el teorema 5.1.18.

**Caso general.** Sea  $F$  un espacio simpléctico conexo. Por el corolario 5.1.13,  $F \cong F^* \times \mathcal{V}$ , donde  $F^*$  es el espacio reducido asociado a  $F$  y  $\mathcal{V}$  es un  $\mathbb{F}_2$ -espacio vectorial. Sea  $\Lambda'$  diagrama para  $F^*$  y sea  $\chi' : F^* \rightarrow \mathcal{U}$  la representación universal de  $F^*$ . En la demostración de la proposición 5.1.14 vimos que  $\chi((a, v)) = (\chi'(a), v)$  es una representación de  $F$  en  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ . Sean  $f$  y  $f'$  las formas bilineales definidas por  $F^*$  y  $F^* \times \mathcal{V}$  sobre  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ , respectivamente. Sean  $\mathcal{B} = \{\beta_i\}_{i \in I}$  una base para  $\mathcal{U}$ ,  $a_0$  un punto fijo de  $\Lambda'$  y  $\Lambda = (\Lambda' \times 0) \cup (a_0 \times \mathcal{B})$ . Tenemos que  $\Lambda' \times 0$  definen una subgráfica conexa en  $\Gamma(F)$ , al igual que  $a_0 \times \mathcal{B}$ , además, dado que existe  $a_1 \in \Lambda'$  colineal con  $a_0$ , entonces  $(a_1, 0)$  es colineal con todo  $(a_0, \beta)$ , con  $\beta \in \mathcal{B}$ . Por lo tanto  $\Lambda$  define una subgráfica conexa en  $\Gamma(F)$ . Sea  $(a, v) \in F^* \times \mathcal{V}$ ; por ser  $\Lambda'$  un diagrama para  $F^*$  existen  $b_1, \dots, b_n \in \Lambda$  tales que  $\chi'(a) = \chi'(b_1) + \dots + \chi'(b_n)$  y  $f'(\chi'(b_1) + \dots + \chi'(b_i), \chi'(b_{i+1})) = 1$  para toda  $1 \leq i < n$ . Sean  $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathcal{B}$  tales que  $\beta_1 + \dots + \beta_k = v$ , entonces definamos  $c_i = (b_i, 0)$ , para  $1 \leq i \leq n$  y  $c_i = (a_0, \beta_i)$  para  $n < i \leq n+k$ ; si  $k$  es impar definamos  $c_{n+k+1} = (a_0, 0)$ . Sea  $m = n+k$  si  $k$  es par y  $m = n+k+1$  si es impar. Entonces  $\chi((a, v)) = \sum_{i=1}^m \chi(c_i)$  y, además  $f(c_1 + \dots + c_i, c_{i+1}) = 1$ , para todo  $1 \leq i < m$ . Por lo tanto  $\Lambda$  genera a  $F^* \times \mathcal{V}$  y es fácil ver que  $\chi(\Lambda)$  es base de  $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ , así que, por el teorema 5.1.18,  $\Lambda$  es diagrama para  $F^* \times \mathcal{V}$ . ■

# Bibliografía

- [1] Aschbacher, Michael. *3-Transpositions Groups*. Cambridge University Press 1997.
- [2] Aschbacher, Michael. *Finite Group Theory*. Cambridge University Press 1997.
- [3] Fischer, Bernd. *Finite groups generated by three-transpositions*. Invent. Math. 13: 232-246 1971.
- [4] Humphreys, James. *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge University Press 1990.
- [5] Rotman, Joseph. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall 2002.
- [6] Suzuki, Michio. *Group Theory I*. Springer-Verlag 1982.
- [7] Mac Lane, Saunders. *Categories for the Working mathematician*. Springer-Verlag 1971.
- [8] Diestel, Reinhard. *Graph Theory*. Springer-Verlag 2005.
- [9] Cárdenas, Humberto; Lluís, Emilio; Raggi-Cárdeas, Gerardo; San Agustín, Rodolfo. *Diagrams in the category of Fischer spaces*. Manuscrito 2003.
- [10] Cárdenas, Humberto; Lluís, Emilio; Raggi-Cárdeas, Gerardo; San Agustín, Rodolfo. *Partial linear spaces with dual affine planes*. Communications in Algebra 30(2): 610-617 2002.
- [11] Cárdenas, Humberto; Lluís, Emilio; Raggi-Cárdeas, Gerardo; San Agustín, Rodolfo. *Diagrams in Categories of Partial Linear Spaces of Order Two*. Communications in Algebra 38: 2271-2281 2010.
- [12] Hall, Jonathan. *Some three-transposition groups with normal 2-subgroups*. Proc. London Mathematical Society. 58: 112-136 1989.