



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE  
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas  
"Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez"*

**Acoplamiento de Yukawa en Teoría de Redes**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PRESENTA

**MARCO ANTONIO BEDOLLA HERNÁNDEZ**

ASESOR

**DR. EDUARDO SALVADOR TUTUTI HERNÁNDEZ**

**MORELIA, MICH., MARZO 2011.**



# Acoplamiento de Yukawa en Teoría de Redes

Marco Antonio Bedolla Hernández

Marzo de 2011

# Agradecimientos

Antes que nada, quiero agradecer a mis padres, por el apoyo y cariño que me han brindado siempre, por la confianza que han depositado en mi, los cuales han resultado imprescindibles para poder llevar con éxito esta tarea.

A mi familia por el apoyo, paciencia y comprensión dados. A mi tía Gracia por ver que nunca me faltara nada.

A mi profesor guía, Dr. Eduardo Tututi, por sus sugerencias y apoyo constante durante este trabajo, además que ha sido una fuente importante de conocimientos y trabajo académico, ha servido como una excelente guía no solo para la realización de esta tesis, sino también para mi formación académica.

A los Drs. Rafael G. Campos, Jorge Isidro Aranda, Fernando Ramírez y Alberto Mendoza, por su disposición para revisar esta tesis y hacer los comentarios oportunos.

A mis compañeros y amigos: Topo, Pancho, Alan, Irma, Rafa, Yahír, Dante, Abraham, Saúl y aquellos que han sido injustamente omitidos, con quienes comparto muchos buenos momentos y que me han brindado su amistad de manera desinteresada.

A la facultad de Cs. Físico-Matemáticas de la UMSNH y a todo su cuerpo académico y administrativo por haber sido de gran importancia para mi formación, así como las facilidades que me dieron para realizar este trabajo y por la hospitalidad que me han brindado.

Al **CONACYT** por el apoyo brindado a través de los proyectos **No. 101808** y **No. 106278**. Así como el proyecto **CIC-UMSNH 9.25**.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>4</b>
1.1. ¿Por qué <i>Lattice</i> ?	4
1.1.1. Teoría de Perturbaciones en la red	5
1.2. Partículas y campos	6
1.2.1. Perspectiva histórica	6
1.2.2. Interacciones fuertes	7
1.2.3. Interacción débil	9
1.2.4. Modelo Estándar	10
<b>2. Teoría de Campos</b>	<b>13</b>
2.1. Cuantización mediante integrales de trayectoria	13
2.1.1. Discretización de las Integrales de Camino	16
2.2. Cuantización de Campos	18
2.2.1. Expansión perturbativa de las funciones de Green	20
<b>3. Campos en la Red</b>	<b>22</b>
3.1. Discretización del Campo Escalar	22
3.1.1. Interpretación de Partícula	27
3.2. Fermiones en la red y problema de doblamiento fermiónico	28
3.2.1. Problema del Doblamiento Fermiónico	31
3.2.2. Método Fermiónico de Wilson	36
<b>4. Función de Green de tres puntos</b>	<b>39</b>
4.1. Lagrangiana con acoplamiento del tipo Yukawa	39
<b>5. Conclusiones y consideraciones finales</b>	<b>54</b>
<b>Apéndice</b>	<b>56</b>

A. Transformada de Fourier en la Red	57
B. Cálculo funcional: diferenciación	59
C. Estados fermiónicos Coherentes	62

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo de tesis se realizará una introducción a la *Lattice Field Theory* (Teoría de Campos en la Red) y se hará una pequeña aplicación de esta teoría en un acoplamiento pseudo-escalar del tipo Yukawa. El trabajo se divide en cuatro capítulos. En el primero daremos los motivos de porque usar *Lattice* y para que nos es útil la teoría de perturbaciones en la red, además de un pequeño resumen de los antecedentes de la Teoría de Campos hasta llegar al *Modelo Estandar*. En el segundo capítulo se dará una breve descripción de lo que son las integrales de camino en la Mecánica Cuántica, y usaremos su facilidad para usar teoría de perturbaciones para un potencial arbitrario con este método, así como la obtención de la función de Green de  $n$ -puntos. En el tercer capítulo comenzaremos discretizando el campo escalar y estudiar ligeramente sus propiedades, posteriormente comenzaremos a discretizar el campo de Dirac de una manera aparentemente natural para encontrarnos con el problema del doblamiento fermiónico, proponiendo el método de fermiones de Wilson como una posible solución. En el cuarto capítulo usaremos las herramientas de los capítulos 2 y 3 para poder determinar la función de Green de tres puntos a tercer orden en un acoplamiento del tipo Yukawa para poder determinar así la intensidad del acoplamiento de Yukawa tanto a altas como a bajas energías.

### 1.1. ¿Por qué *Lattice*?

Porque es un tema interesante de actualidad en la física de partículas relacionada con el estudio y empleo de técnicas no perturbativas para cálcu-

los de propiedades físicas de partículas elementales que permite avanzar en la comprensión de procesos físicos de diferentes escenarios, donde el régimen perturbativo no funciona [1]. Por ejemplo, el cálculo del diagrama de Feynman de interacción quark-quark en Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés) a energías y momentos pequeños menores o del orden de 1 GeV debe ser tratado no perturbativamente., debido a que el correspondiente acoplamiento es suficientemente grande como para llevar a cabo cálculos perturbativos.

En una teoría de campos en la red, los campos cuánticos son estudiados y calculados usando una versión discretizada del espacio-tiempo. El espaciado de la red es  $a$ , la distancia entre los primeros vecinos, la cual induce un corte en el momento del orden  $1/a^1$ .

Una red en el espacio-tiempo puede ser vista como una regularización que es no perturbativa, esto quiere decir que no está ligada a ningún método de aproximación, además de que permite realizar cálculos a partir de primeros principios con varios métodos numéricos y analíticos sin la necesidad de introducir modelos o parámetros adicionales, y sin necesidad de aproximaciones como en teoría de perturbaciones.

En la discretización del espacio-tiempo continuo uno tiene que dar por válida la invariancia de Lorentz (y en general la invariancia de Poincaré), pero las simetrías internas pueden no preservarse. En particular, la invariancia de norma puede preservarse como una simetría de la red para cualquier valor finito de la separación de ésta, y esto hace posible definir QCD —y dar una explicación cualitativa a el aún no resuelto problema de confinamiento de quarks— así como las teorías de simetría chiral y la teoría electrodébil.

### 1.1.1. Teoría de Perturbaciones en la red

Anteriormente mencionamos que la “Teoría de Redes” (*Lattice Theory*) es útil para trabajar en un régimen no perturbativo, por lo que incluir la palabra perturbación en el contexto de Lattice puede parecer parecer algo “contradictorio”, pero no es el caso debido a que hay muchas aplicaciones donde los cálculos perturbativos en la red son útiles y en otros es necesario. Entre ellos podemos mencionar el cálculo de los factores de forma, de los elementos de matriz de los operadores y la renormalización de los parámetros

---

<sup>1</sup>En esta tesis estaremos utilizando unidades naturales en donde  $\hbar = c = 1$ , a menos que se indiquen a estos de manera explícita

desnudos del Lagrangiano, como los acoplamientos y las masas. La teoría de perturbación en la red también nos ayuda a estudiar las anomalías y el estudio general de aproximación al límite continuo, incluyendo la recuperación de las simetrías rotas por la regularización de la red en el límite  $a \rightarrow \infty$ , así como las violaciones en el escalado, es decir, las correcciones en el límite continuo.

## 1.2. Partículas y campos

### 1.2.1. Perspectiva histórica

La teoría cuántica de campos ha surgido como la teoría física más exitosa que describe el mundo subatómico con predicciones correctas hasta un orden de  $10^{-8}$  [2]. Además que describe las interacciones de tres de las cuatro fuerzas fundamentales en el universo. El éxito de esta teoría se ha personificado en el llamado Modelo Estándar de las partículas elementales que, ha sido corroborado experimentalmente<sup>2</sup>.

Podemos decir que esta teoría nació en 1927, cuando Paul Dirac escribió el primer artículo que combinaba mecánica cuántica con la teoría clásica de la radiación. Pero su entusiasmo no se detendría ahí sino que, un año después postuló la exitosa teoría del electrón<sup>3</sup>, que acoplaba teoría de radiación con la teoría relativista del electrón, creando así la Electrodinámica Cuántica (QED). Su teoría era bastante elegante y poderosa que, cuando aparecieron dificultades conceptuales, él no dudó en postular conceptos aparentemente absurdos, tales como “hoyos un mar de energía negativa. Como él declaró bastantes veces, a veces es mejor tener belleza en tus ecuaciones que haberlas ajustado con los experimentos.

Pero aún así, no importa que tengamos la teoría más bella del universo, si no concuerda con el experimento es físicamente una teoría inútil. La teoría de Dirac no corrió esa suerte, sino que rápidamente reprodujo una serie de resultados experimentales: el espín y el momento magnético del electrón, así como las correcciones relativistas correctas en el espectro del átomo de hidrógeno. Pero su mayor eficacia dentro del estudio de la materia surgió en 1932 con el descubrimiento experimental de la antimateria, interpretada por Dirac como los valores negativos de energía que obtenía en su teoría y que tenía las mismas propiedades de la materia, sólo que con carga opuesta.

---

<sup>2</sup>Gran parte de esta breve reseña histórica a sido tomada de [3]

<sup>3</sup>Descubierto en 1987 por J.J. Thomson

El éxito prematuro de la teoría se debía a que sólo representaba correcciones de la física clásica al orden más bajo, dicho éxito se vería opacado cuando se estudiaron correcciones a orden mayor y se observó que estaban plagados por integrales divergentes. Esto sólo mostró nuestra ignorancia concerniente a la estructura a pequeña escala del espacio tiempo. QED contenía divergencias conforme  $x \rightarrow 0$  o cuando  $k \rightarrow \infty$ , estas divergencias surgieron ya que las distancias infinitamente pequeñas y energías infinitamente grandes van más allá del regimen de aplicación de QED.

Durante varias décadas, muchos de los mejores físicos del mundo literalmente aniquilaron esas divergencias tratándolas como cantidades pequeñas. Esto condujo claramente a lo que conocemos como teoría de renormalización, debido a que esas integrales divergentes son absorbidas en un reescalamiento infinito de las constantes de acoplamiento y las masas en la teoría. Finalmente, en 1949, Tomonaga, Schwinger y Feynman demostraron cómo extraer información física útil de QED, por lo que recibieron el premio Nobel en 1956.

Aunque la teoría renormalizada de QED tuvo gran éxito en los 50's, su intento de generalización para describir las otras fuerzas fue bastante decepcionante. Sin mayores modificaciones, la teoría cuántica de campos parecía incapaz de describir todas las fuerzas fundamentales en la naturaleza. Esto debido a que cada teoría tiene una constante de acoplamiento diferente:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\text{em}} &\approx \frac{1}{137.0359895}, \\
 \alpha_{\text{fuerte}} &\approx 14, \\
 g_{\text{debil}} &\approx 1.16639 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}, \\
 G_{\text{Newton}} &\approx 6.67259 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

### 1.2.2. Interacciones fuertes

En contraste con QED, las partículas que interactúan fuertemente, los “hadrones” tienen una constante de acoplamiento grande, provocando que la teoría de perturbaciones sea relativamente inútil en la predicción de cantidades físicas de las partículas que interactúan fuertemente. Desafortunadamente, los métodos no perturbativos fueron notoriamente primitivos e informales. Como consecuencia, el progreso en las interacciones fuertes fue dolorosamente lento.

En 1940, el primer avance en las interacciones fuertes fue la idea de que la fuerza que mantenía al núcleo unido podía ser mediada por el intercambio

de mesones  $\pi$

$$\begin{aligned}\pi^- + p &\leftrightarrow n, \\ \pi^+ + n &\leftrightarrow p.\end{aligned}\tag{1.2}$$

La existencia de los mesones fue propuesta en 1935 por el físico japonés Hideki Yukawa<sup>4</sup>. Yukawa creía que deberían existir partículas más pesadas que el electrón que debían ser responsables de la interacción fuerte. Rápidamente se identificó al mesón  $\pi$  como el portador de la fuerza nuclear que mantenía al núcleo unido. A pesar de que la teoría de Yukawa era renormalizable, la teoría de perturbaciones era poco fiable cuando se aplicaba la teoría de Yukawa. Los efectos no perturbativos que eran excesivamente difíciles de calcular resultaron dominantes.

La situación experimental se tornó cada vez más confusa cuando comenzaron a aparecer más y más resonancias en los experimento en aceleradores de partículas. Esto indicó que la constante de acoplamiento de alguna teoría desconocida subyacente era grande, mas allá de la teoría de perturbaciones usual.

Como la teoría cuántica de campos era poco fiable debido a todas las dificultades que presentaba, los físicos se concentraron en el modelo de quarks. Desarrollada por Gell-Mann, Ne'eman y Zweig, basada en un trabajo anterior de Sakata y sus colaboradores, trataron de explicar el espectro de hadrones con el grupo de simetría  $SU(3)$ . Con las combinaciones de tres quarks: up, down y strange pudieron explicar todos los hadrones descubiertos hasta esa fecha. Juntos, esos quarks forman una representación de un grupo de Lie  $SU(3)$

$$q_i = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix}.\tag{1.3}$$

El modelo de quarks predijo con relativa facilidad las masas y propiedades de partículas que aún no eran descubiertas. Un esquema simple de las interacciones fuertes estaba comenzando a surgir: tres quarks eran necesarios para producir un baryon, como un protón o neutrón (o a resonancias más altas como  $\Lambda, \Xi, \Omega, etc.$ ), mientras que se necesita un par quark-antiquark para

---

<sup>4</sup>En 1949 fue galardonado con el premio nobel de física por predecir la existencia del mesón.

crear un meson, como el mesón  $\pi$  o el mesón  $K$ :

$$\text{Hadrones} = \begin{cases} \text{Bariones} = q_i q_j q_k, \\ \text{Mesones} = \bar{q}_i q_j \end{cases} . \quad (1.4)$$

Irónicamente, el mayor problema para el modelo de quarks es que era demasiado exitoso. La teoría era capaz de predecir mas allá del rango de su aplicabilidad. Los quarks no fueron descubiertos en ningún experimento de dispersión hasta años recientes, actualmente la teoría de los quarks se estudia con una teoría cuántica de campos (QCD) mejor comprendida.

### 1.2.3. Interacción débil

Históricamente, las interacciones débiles fueron las primeras en ser observadas experimentalmente cuando partículas interactuantes fuertemente decaían en partículas más pequeñas debido a una fuerza más débil, tal como el decaimiento de un neutrón en un protón, un electrón y un antineutrino<sup>5</sup>

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e.$$

Esas partículas ligeras, como el electrón y su neutrino, el muón  $\mu$ , etc, son llamados en forma genérica leptones

$$\text{Leptones} = \{e^\pm, \nu, \mu^\pm, \text{ etc.}\} \quad (1.5)$$

Fermi postuló en 1930 la forma de la acción que podría dar una descripción adecuada del comportamiento de las interacciones débiles. Sin embargo, las correcciones cuánticas en orden más bajo en teoría de perturbaciones contenían términos divergentes. La teoría resultó no renormalizable porque la constante de acoplamiento es de dimensión negativa. Adicionalmente se mostró que la teoría ingenua violaba unitariedad a energías suficientemente grandes.

El estudio de las interacciones débiles se profundizó en 1956 cuando Lee y Yang pusieron en tela de juicio la conservación de paridad, considerado uno de los principios fundamentales en la física. Adicionalmente de que en en las siguientes décadas se descubrieron otros leptones que interactúan de forma débil como el neutrino del muon y el lepton tau  $\tau$ .

---

<sup>5</sup>El neutrino fue propuesto en 1930 por Wolfgang Pauli para compensar la aparente pérdida de energía y momento lineal en la desintegración  $\beta$  de los neutrones

Hubo otras propuestas que fueron mas allá de la de Fermi, que postularon la existencia de un mesón vectorial masivo o bosón  $W$  que media las fuerzas débiles. Motivados por el éxito de la teoría de Yukawa, los físicos postularon que un mesón vectorial masivo de espín uno debería ser el portador de la fuerza débil. Sin embargo, esta teoría tampoco era renormalizable.

#### 1.2.4. Modelo Estándar

A mediados del siglo pasado había una gran cantidad de datos experimentales para la interacción fuerte y débil que requerían una explicación teórica. En 1971, mientras Gerald 't Hooft estudiaba la teoría de Yang y Mills, que consistía en una generalización de la teoría de Maxwell de la luz, se dio cuenta que aún cuando su grupo de simetría se “rompía espontáneamente”, este resultaba renormalizable. Con este descubrimiento es ahora posible describir una teoría renormalizable de las interacciones débiles, donde los bosones  $W$  son representados como bosones de norma.

Con esto resultó la teoría de las interacciones débiles de Weinberg y Salam, que es una teoría de norma basada en el grupo de simetría  $SU(2) \times U(1)$ . Esta tiene el valor que puede hacer muchas predicciones de la teoría y tomando en cuenta que el experimento es quien juzga a la teoría; éstas se encuentran en coincidencia con la misma.

La teoría de Weinberg-Salam acomoda a los tres leptones de manera simple. Postula que los leptones (izquierdos) deben ser acomodados de acuerdo a dobletes del grupo  $SU(2)$  en tres generaciones separadas.

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Las interacciones entre esos tres leptones es llevada a cabo por los bosones vectoriales intermedios:

$$W_\mu^\pm, \quad \text{y} \quad Z_\mu. \quad (1.7)$$

Quedan dos problemas que deben ser resueltos. Uno de ellos es encontrar experimentalmente al bosón de Higgs, que es el responsable del rompimiento espontáneo de la simetría, y el otro es justificar la masa de los neutrinos.

El progreso en el estudio de las interacciones fuertes también fue bastante rápido. La renormalización hizo posible escribir la Cromodinámica Cuántica (QCD) como una teoría cuántica de campos, al postular una simetría de “color”  $SU(3)$ : la teoría de Yang-Mills. Esta teoría explica la existencia de

un gluón que es capaz de mantener a los quarks juntos. Los quarks tienen dos tipos de índices, un índice  $a = u, d, s, c, t, b$  etiqueta la simetría de sabor, mientras que los otros índices son la simetría del color. Los quarks en QCD se representan por:

$$\begin{pmatrix} u^1 & u^2 & u^3 \\ d^1 & d^2 & d^3 \\ s^1 & s^2 & s^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \\ t^1 & t^2 & t^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

donde los índices 1, 2 y 3 etiquetan la simetría del color. QCD da una explicación plausible de la ausencia experimental de los quarks. Es posible determinar que la constante de acoplamiento de color efectiva se vuelve grande a energías pequeñas, y por lo tanto los quarks se mantienen permanente confinados dentro de los hadrones. Si QCD es correcta, entonces los gluones pueden condensarse en una sustancia plasmicaa que mantiene a los quarks juntos, creando objetos tipos resortes con los quarks en los extremos. Si uno tratara de separar a los quarks, los gluones condensados se opondrían a ser separados. Si se aplica una fuerza suficientemente intensa, entonces el resorte se rompe y otro par de quark-antiquark se forma, esto es la explicación de que un solo quark no puede estar aislado.

Por el otro lado, la constante de acoplamiento del color se vuelve pequeña a grandes energías. Esto es llamado “libertad asintótica”. Esto explica el hecho de que a altas energías el comportamiento de los quarks sea descrito por la teoría libre. Esto se debe a que la intensidad del acoplamiento disminuye con el incremento de la energía.

En poco tiempo, el modelo electro-débil y QCD fueron conjuntados para convertirse en el Modelo Estándar con grupo de simetría de norma  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ . Técnicamente, la teoría cuántica de campos proporciona el marco matemático para el modelo estándar. El modelo estándar describe cada tipo de partícula en términos de un campo cuantizado.

Para facilitar la descripción, el modelo estándar se puede dividir en tres partes: las partículas de materia, las partículas mediadoras de las fuerzas, y el bosón de Higgs. El espectro del modelo estándar para fermiones izquierdos se lista esquemáticamente aquí, consistiendo de un neutrino  $\nu$ , el electrón  $e$ , los quarks *up* y *down*, que vienen en tres colores, etiquetados por el índice  $i$ .

Este patrón se repite para las otras dos generaciones

$$\begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^i \\ d^i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c^i \\ s^i \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^i \\ b^i \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Las fuerzas entre los leptones y los quarks son mediadas por los mesones vectoriales masivos para las interacciones débiles, los fotones sin masa para la interacción electromagnética y los gluones sin masa para las interacciones fuertes

$$\begin{cases} \text{Mesones vectoriales masivos : } W^\pm, Z. \\ \text{Fotones sin masa : } \gamma. \\ \text{Gluones sin masa : } A_\mu^a. \end{cases} \quad (1.10)$$

El éxito del modelo estándar consiste en que prácticamente ya se han encontrado todas las partículas predichas por él, con excepción del bosón de Higgs. Este bosón se encarga de explicar la masa de las otras partículas. Dado que se requiere una gran cantidad de energía para evidenciar su existencia se espera que entre los años 2011-2012 el Gran Colisionador de Hadrones (LHC) del CERN muestre la evidencia experimental del bosón de Higgs.

Una posible debilidad del modelo estándar recae en que la teoría contiene al menos 19 parámetros arbitrarios, que está bastante lejano del sueño original de los físicos: una sola teoría unificada con al menos una constante de acoplamiento indeterminada.

# Capítulo 2

## Teoría de Campos

En este capítulo daremos una breve introducción a las integrales de camino en la mecánica cuántica. También explicaremos como calcular las funciones de Green en el caso general para potenciales arbitrarios y posteriormente determinar dichas funciones mediante un desarrollo en serie de potencias para potenciales pequeños, mejor conocido como expansión perturbativa.

### 2.1. Cuantización mediante integrales de trayectoria

Para cuantizar una teoría de campos podemos recurrir a la llamada cuantización canónica cambiando las variables dinámicas por sus respectivos operadores desarrollados en la base de operadores de creación y aniquilación y estableciendo relaciones de conmutación o anticonmutación entre ellas [4]. Pero el que quizás sea el método de cuantización más poderoso es el de las integrales de camino [3]. Desarrollado por Feynman, el método de integrales de camino tiene muchas ventajas sobre otras técnicas, una de ellas es que se puede usar para calcular de manera perturbativa como no perturbativa.

Sin pretender formular con rigor las integrales de camino, pero si justificar las fórmulas utilizadas en la Teoría Cuántica de Campos para el funcional generatriz, comenzaremos la discusión del formalismo de integrales de camino en Mecánica Cuántica con dos postulados básicos:

Postulado 1: La probabilidad  $P(a, b)$  de que una partícula sufra una transición de un punto  $a$  a uno punto  $b$  es el cuadrado del valor absoluto de un

número complejo, la amplitud de transición  $K(a, b)$ :

$$P(b, a) = |K(a, b)|^2. \quad (2.1)$$

Postulado 2: La amplitud de transición  $K(a, b)$  está dada por la suma de un factor de fase  $e^{iS/\hbar}$ , donde  $S$  es la acción, tomada sobre todos los caminos posibles de  $a$  a  $b$ :

$$K(a, b) = \sum_{\text{Todos los caminos}} k e^{iS/\hbar}, \quad (2.2)$$

la constante  $k$  puede ser determinada por:

$$K(a, b) = \sum_{\text{Todos los caminos}} K(c, b)K(b, a) \quad (2.3)$$

donde sumamos sobre todas las trayectorias intermedias que conectan a  $b$  con  $a$  y  $c$ . Cabe mencionar que el paso a la Mecánica Clásica se hace de la manera usual: tomando el límite  $\hbar \rightarrow 0$ . Para valores grandes de  $S$ , el exponencial  $iS/\hbar$  tiene fluctuaciones de amplitud grande, que se cancelan y se hacen cero.

$$\delta S \gg \hbar \Rightarrow \sum_{\text{Todos los caminos}} e^{iS/\hbar} \sim 0. \quad (2.4)$$

En el límite clásico, las trayectorias que contribuyen principalmente a la suma son aquellos donde  $\delta S/\hbar$  es pequeño. Sin embargo, la trayectoria para el cual  $\delta S$  es mínima corresponde a la trayectoria clásica:

$$\delta S = 0 \rightarrow \text{Mecánica Clásica.} \quad (2.5)$$

Para calcular la integral de camino, primero dividimos la trayectoria con  $N$  puntos discretizando de esta forma al espacio-tiempo. Entonces la suma sobre todos los caminos puede transformarse en una integral funcional, en el límite en que  $N \rightarrow \infty$  y el espacio tiempo entre las trayectorias se hace cada vez más pequeño:

$$\sum_{\text{Todos los caminos}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^3 \prod_{n=1}^N \delta q_n^i \rightarrow \int Dq \quad (2.6)$$

Una definición formal para  $\int Dq$  está dada por

$$\int Dq = \prod_{t_2 < t < t_1} \int dq(t), \quad (2.7)$$

es decir, para cada  $t \in (t_2, t_1)$  integramos sobre el dominio de  $q$ . En este lenguaje funcional, la amplitud de transición se convierte en

$$K(a, b) = k \int_a^b Dq e^{iS/\hbar}, \quad (2.8)$$

y así  $K$  puede ser determinado como

$$K(c, a) = \int K(c, b)K(b, a)Dq_b \quad (2.9)$$

donde integramos sobre todos los puntos intermedios  $q_b$  que enlazan a los puntos  $a$  y  $c$ .

Consideremos un sistema con un grado de libertad descrito por la función de Lagrange  $L = L(q, \dot{q})$ , o la función Hamiltoniana correspondiente  $H = H(p, q)$ [5],

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q), \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (2.10)$$

donde  $p$  y  $q$  están relacionadas por  $p = \partial L / \partial \dot{q} = m\dot{q}$ . En mecánica cuántica  $p$  y  $q$  se convierten en operadores  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$  con  $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$  (indicaremos operadores en el espacio de Hilbert por un gorrito  $\hat{\cdot}$ ). La evolución en el tiempo está descrita por el operador de evolución [6]

$$\hat{U}(t_1, t_2) = e^{-i\hat{H}(t_1-t_2)/\hbar} \quad (2.11)$$

donde  $\hat{H}$  es el operador Hamiltoniano,  $\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{q})$ . En el formalismo de integrales de camino trabajaremos con números complejos independientes del tiempo en lugar de trabajar con operadores  $\hat{p}$  y  $\hat{q}$ . En la base coordenada el estado de posición  $|q\rangle$  está caracterizada por la ecuación de valores propios:

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \quad (2.12)$$

donde  $\hat{q}$  es el operador de posición. De la ortonormalidad, se tiene

$$\langle q'|q\rangle = \delta(q' - q), \quad \int dq |q\rangle \langle q| = 1. \quad (2.13)$$

Podemos representar los elementos de matriz de  $\hat{U}(t_1, t_2)$  mediante una integral de camino

$$\langle q_1 | \hat{U}(t_1, t_2) | q_2 \rangle = \int Dq e^{iS(q)/\hbar}, \quad (2.14)$$

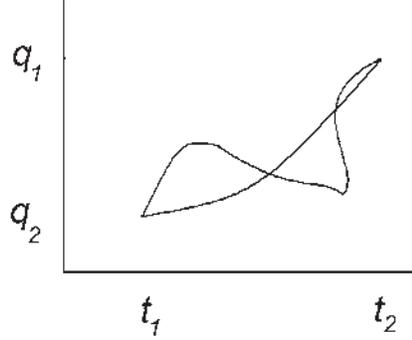


Figura 2.1: Dos funciones  $q(t)$  que contribuyen a la integral de camino

donde  $S$  es la acción clásica del sistema:

$$S(q) = \int_{t_2}^{t_1} dt L(q(t), \dot{q}(t)), \quad (2.15)$$

y  $\int Dq$  simboliza una integración sobre todas las funciones  $q(t)$  tales que

$$q(t_1) = q_1, \quad q(t_2) = q_2, \quad (2.16)$$

como se ilustra en la Fig. 2.1. En lo subsecuente usaremos unidades en donde  $\hbar = 1$ .

### 2.1.1. Discretización de las Integrales de Camino

Para definir la integral de camino propiamente, discretizamos el tiempo en intervalos de longitud  $a$ , escribiendo  $t = na$ ,  $q(t) = q_n$ , con  $n$  entero. Para funciones suaves  $q(t)$  la derivada temporal  $\dot{q}(t)$  puede aproximarse por  $\dot{q}(t) = (q_{n+1} - q_n)/a$ , tal que la función discreta de Lagrange puede escribirse como <sup>1</sup>

$$L(t) = \frac{m}{2a^2}(q_{n+1} - q_n)^2 - \frac{1}{2}V(q_{n+1}) - \frac{1}{2}V(q_n), \quad (2.17)$$

<sup>1</sup>Para una notación más simple denotaremos las formas discretas de  $L, S, \dots$ , por los mismos símbolos de sus contrapartes continuas

donde hemos dividido el termino de potencial igualmente en  $q_n$  y  $q_{n+1}$ . Definimos un operador de evolución discreto  $\hat{T}$  por sus elementos de matriz como:

$$\langle q_1 | \hat{T} | q_2 \rangle = c e^{ia \left[ \frac{m}{2a^2} (q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2} V(q_1) - \frac{1}{2} V(q_2) \right]} \quad (2.18)$$

donde  $c$  es una constante que especificaremos adelante. Notemos que el exponencial es similar a la función de Lagrange. El operador  $\hat{T}$  es llamado el operador de transferencia, sus elementos de matriz conforman la matriz de transferencia. En términos de esta matriz vamos a dar una definición precisa de la integral de camino discreta:

$$\begin{aligned} \langle q' | \hat{U}(t', t'') | q'' \rangle &= \int dq_1 \cdots dq_n \langle q' | \hat{T} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | \hat{T} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_1 | \hat{T} | q'' \rangle \\ &= c \int \left( \prod cdq \right) e^{\left[ \frac{im}{2a} (q' - q_{N-1})^2 - \frac{ia}{2} V(q') - iaV(q_{N-1}) + \frac{im}{2a} (q_{N-1} - q_{N-2})^2 - iaV(q_{N-2}) + \cdots \right.} \\ &\quad \left. \times e^{\cdots + \frac{im}{2a} (q_1 - q'')^2 - \frac{ia}{2} V(q'')} \right] \\ &= \int Dq e^{iS}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

aquí la acción discreta está definida por

$$S = a \sum_{n=0}^{N-1} L(na), \quad (2.20)$$

donde  $q_N \equiv q'$  y  $q_0 \equiv q''$ . En el límite  $N \rightarrow \infty$  esto se convierte en la acción continua, cuando sustituimos funciones suaves  $q(t)$ . Como los  $q_n$  son integrados sobre cada “rebanada de tiempo”  $n$ , dicha suavidad por lo general, no está presente en el integrando de la integral de camino (trayectorias típicas  $q_n$  se verán con derivadas discontinuas) y un límite continuo es formal en este escenario.

Ahora mostraremos que, con una elección conveniente de la constante  $c$ , el operador de transferencia puede escribirse en la forma

$$\hat{T} = e^{-iaV(\hat{q})/2} e^{-ia\hat{p}^2/2m} e^{-iaV(\hat{q})/2}. \quad (2.21)$$

Tomando elementos de matriz entre  $\langle q_1 |$  y  $|q_2 \rangle$  vemos que está fórmula es correcta si

$$\langle q_1 | e^{-ia\hat{p}^2/2m} | q_2 \rangle = c e^{im(q_1 - q_2)^2/2a} \quad (2.22)$$

Insertando valores propios  $|p\rangle$  del operador momento  $\hat{p}$  usando

$$\langle q|p\rangle = e^{ipq}, \quad \int \frac{dp}{2\pi} |p\rangle\langle p| = 1 \quad (2.23)$$

Encontramos que (2.22) es cierto probando si elegimos

$$c = \sqrt{\frac{m}{2\pi ia}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi a}} e^{-i\pi/4} \quad (2.24)$$

El operador de transferencia  $\hat{T}$  dado en la Ec. (2.21) es el producto de tres operadores unitarios, entonces podemos escribir

$$\hat{T} = e^{-ia\hat{H}} \quad (2.25)$$

Esta ecuación define un operador Hamiltoniano Hermítico  $\hat{H}$  módulo  $2\pi/a$ . Para elementos de matriz entre valores propios con energía  $E \ll 2\pi/a$ , la expansión

$$\hat{T} = 1 - ia\hat{H} + o(a^2) \quad (2.26)$$

lleva a la identificación

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}) + O(a^2), \quad (2.27)$$

en donde reconocemos el operador Hamiltoniano usual. Se debe mantener en mente que, como una ecuación de operadores, la expansión (2.26) es formal porque  $\hat{p}^2$  es un operador que no está obligado a que sus elementos de matriz converjan.

## 2.2. Cuantización de Campos

Como ya hemos mencionado, en este trabajo de tesis sólo recurriremos a las expresiones de las integrales de camino sin hacer una justificación matemática rigurosa de las mismas.

También, como ya vimos en la sección anterior, la amplitud de transición de una partícula en mecánica cuántica que viaja de un punto  $a$  a uno  $b$  está dado por la Ec. (2.8). La generalización de esta ecuación, para un sistema

con un grado de libertad a un sistema con un número infinito de grados de libertad (un campo) es directa, con las identificaciones adecuadas [4]:

$$\begin{aligned}
q &\rightarrow \phi \\
q &\rightarrow \partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \\
L &\rightarrow \mathcal{L} \equiv \text{Densidad lagrangiana}
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

Notemos que para este ejemplo, estamos empleando implícitamente un campo escalar real. Entonces la amplitud de transición de que una partícula sea creada en el punto remoto a partir del vacío y esta misma sea aniquilada y absorbida al vacío, en presencia de una fuente externa está determinado por la funcional generatriz

$$Z[j] = N \int D\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}(\phi)]} \propto \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle, \tag{2.29}$$

donde:

$$\begin{aligned}
D\phi &\equiv \prod_x d\phi(x), \\
N^{-1} &\equiv \int D\phi e^{i \int d^4x L(x)}.
\end{aligned}
\tag{2.30}$$

En lo subsecuente omitiremos  $t$  en el estado de vacío  $|0, t\rangle$ .

Para realizar la integración para el campo de Klein-Gordon, primero hacemos un cambio de variables:

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \phi_{cl}, \tag{2.31}$$

donde  $\phi_{cl}$  satisface la ecuación de Klein-Gordon con una fuente [12]. El propagador está definido por:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)_x \Delta_F(x - y) = -\delta^4(x - y). \tag{2.32}$$

Notemos que ésta es precisamente la función de Green del sistema.

La solución clásica está dada por:

$$\phi_{cl} = - \int \Delta_F(x - y) j(y) d^4y, \tag{2.33}$$

que satisfice:

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi_{cl} = j(x). \quad (2.34)$$

Ahora podemos realizar la integral mediante una integración Gaussiana [7]:

$$Z(j) = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j(x) \Delta_F(x-y) j(y)}, \quad (2.35)$$

donde:

$$N^{-1} = [\det(\partial_\mu^2 + m^2)]^{1/2} = \int D\phi e^{i \int d^4x L(\phi)}, \quad (2.36)$$

usando el hecho que

$$\frac{\partial}{\partial j(x)} j(y) = \delta^4(x-y) \quad (2.37)$$

encontramos que la función de transición está dada por:

$$-i\Delta_F(x-y) = \left. \frac{\partial}{\partial j(x)} \frac{\partial}{\partial j(y)} Z(j) \right|_{j=0}. \quad (2.38)$$

El promedio de varios campos tomados en puntos  $x_i$  ó función de Green de  $n$ -puntos viene dado por

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \left. \frac{\delta^n Z(j)}{\delta j(x_1) j(x_2) \cdots \delta j(x_n)} \right|_{j=0} \\ &= i^n \langle 0 | T \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.39)$$

### 2.2.1. Expansión perturbativa de las funciones de Green

Consideremos un campo en interacción con un Hamiltoniano independiente del tiempo. Toda la información física es llevada por la función de  $n$ -puntos

$$\Delta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\langle 0 | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}[\phi(\mathbf{x}, t)]} \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \phi(x_n) | 0 \rangle}{\langle 0 | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}[\phi(\mathbf{x}, t)]} | 0 \rangle} \quad (2.40)$$

donde  $\phi(\mathbf{x}, t)$  es el campo libre (en el esquema de interacción) y  $|0\rangle$  es el vacío asociado a él. En general es bastante complicado evaluar expresiones como (2.40). Pero si el término de interacción es muy pequeño, es muy recomendable hacer una expansión en series de potencias del término del potencial y

escribir.

$$e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}[\phi(\mathbf{x}, t)]} = 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}[\phi(\mathbf{x}, t)] + \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 T(\hat{V}[\phi(\mathbf{x}_1, t_1)] \hat{V}[\phi(\mathbf{x}_2, t_2)]) + \dots (2.41)$$

Por el teorema de Wick [3] podemos reducir esta expresión como una suma de productos de funciones de Green de partícula libre  $\Delta_0(x - x')$  con todas sus posibles contracciones. Éstas las podemos describir en términos del funcional que genera todas las funciones de Green de partícula libre

$$Z[j] = \langle 0 | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}[\phi(x)] + \int d^4x \phi(x) j(x)} | 0 \rangle. \quad (2.42)$$

Los campos y el estado base en  $Z[j]$  son aquellos de la teoría libre.

La funcional generatriz puede ser expresada en una forma que es útil para el desarrollo perturbativo de las funciones de Green de  $n$ -puntos haciendo su derivada funcional (B.2) con respecto a  $j$  y comparando los resultados.

$$\Delta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left[ \frac{1}{Z[j]} \frac{\delta}{i\delta j(x_1)} \cdots \frac{\delta}{i\delta j(x_n)} Z[j] \right]_{j=0}. \quad (2.43)$$

Por lo que de ahora en adelante nos podemos referir a  $Z[j]$  como el funcional generatriz. Esto será una ventaja para estudiar nuestra contribución perturbativa en el capítulo 4. Sólo notemos que la diferenciación  $\delta/\delta j(x)$  produce un campo  $\phi(x)$  por lo que podemos reescribir la interacción  $V[\phi(x)]$  como  $V[-i\delta/\delta j(x)]$ . Entonces no hay más un campo vectorial y puede ser removido del valor de expectación del vacío por lo que  $Z[j]$  se convierte

$$Z[j] = e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{V}[-i\delta/\delta j(x)]} Z_0[j]. \quad (2.44)$$

# Capítulo 3

## Campos en la Red

En este capítulo vamos a estudiar los campos escalares y fermiónicos libres. El primero servirá como un primer ejemplo para la discretización de un campo, mientras que el segundo nos ayudará a comprender porqué la discretización no debe tomarse en la primera forma que podría parecer de forma natural, produciendo así el problema de doblamiento fermiónico [8]. Se analiza el método de fermiones de Wilson como una posible solución a dicho problema.

### 3.1. Discretización del Campo Escalar

Para el campo escalar, como es usual en teoría de campos, las variables dinámicas las generalizamos como [11]

$$q(t) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

La representación coordenada queda formalmente caracterizada por

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x})|\varphi\rangle = \varphi(\mathbf{x})|\varphi\rangle, \quad (3.2)$$

$$|\varphi\rangle = \prod_{\mathbf{x}} |\varphi_{\mathbf{x}}\rangle, \quad (3.3)$$

$$\langle\varphi'|\varphi\rangle = \prod_{\mathbf{x}} \delta(\varphi'(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x})), \quad (3.4)$$

$$\prod_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi(\mathbf{x}) |\varphi\rangle \langle\varphi| = 1. \quad (3.5)$$

El operador de evolución viene dado por

$$\langle \varphi_1 | \hat{U}(t_{1,2}) | \varphi_2 \rangle = \int D\varphi e^{S(\varphi)}, \quad (3.6)$$

donde la integral es sobre todas las funciones  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  con  $\varphi(\mathbf{x}, t_{1,2}) = \varphi_{1,2}(\mathbf{x})$ . La teoría se especifica por la elección de la acción  $S$ . Para el campo escalar libre tenemos

$$S(\varphi) = - \int_{t_2}^{t_1} dx_4 \int dx^3 \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2(x) \right], \quad (3.7)$$

donde  $x = (\mathbf{x}, x_4)$  y  $x_4 = t$ . Notemos que en el formalismo del tiempo imaginario [1] la simetría entre el espacio y tiempo está implícita en que el tensor métrico el cuál es igual a la delta de Kronecker  $\delta_{\mu\nu}$ . Consecuentemente, no distinguiremos entre índices covariantes y contravariantes  $\mu, \nu, \dots$

La función de partición está dada por (2.44)

$$Z = \int D\varphi e^{S(\varphi)}, \quad (3.8)$$

donde integramos sobre todas las funciones periódicas de periodo  $\beta$  en la dirección temporal,  $\varphi(\mathbf{x}, t + \beta) = \varphi(\mathbf{x}, t)$ .

La integral de camino  $Z$  se define de manera precisa mediante la regularización de la red. Esto se hace con una generalización del ejemplo del sistema con un grado de libertad en mecánica cuántica. Sea  $x_\mu$  la coordenada de un nodo en una red hipercúbica de cuatro dimensiones.

$$x_\mu = m_\mu a, \quad m_\mu = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.9)$$

siendo  $a$  la separación de la red. El tamaño de la caja hipercúbica es  $L = Na$  y su tetra-volumen es  $L^4$ . La notación

$$\sum_x \equiv a^4 \sum_{m_1=0}^{N-1} \cdots \sum_{m_4=0}^{N-1} \equiv a^4 \sum_m \quad (3.10)$$

será usada de ahora en adelante. Para funciones suaves  $f(x)$  tenemos el límite continuo

$$\sum_x f(x) \rightarrow \int_0^L d^4 x f(x), \quad N \rightarrow \infty, \quad a = L/N \rightarrow 0, \quad L \text{ fijo.} \quad (3.11)$$

Hemos elegido el punto  $x = 0$  tal que coincide con una esquina de la caja. Si lo queremos en medio de la caja podemos elegir  $m_\mu = -N/2 + 1, -N/2 + 2, \dots, N/2$ . Más adelante elegiremos dicho etiquetamiento para los modos de Fourier y tomaremos a  $N$  par.

El campo escalar en la red está asignado por las posiciones  $x$ , escribimos  $\varphi_x$ .

Las derivadas pueden ser sustituidas por diferencias finitas. Vamos a usar la notación

$$\partial_\mu \varphi_x = \frac{1}{a}(\varphi_{x+a\hat{\mu}} - \varphi_x), \quad (3.12)$$

$$\partial'_\mu \varphi_x = \frac{1}{a}(\varphi_x - \varphi_{x-a\hat{\mu}}), \quad (3.13)$$

donde  $\hat{\mu}$  es un vector unitario en la dirección  $\mu$ . Para funciones suaves  $f(x)$ ,

$$\partial_\mu f(x), \quad \partial'_\mu f(x) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad \text{en el límite en que } a \rightarrow 0, \quad (3.14)$$

Es conveniente usar condiciones periódicas de frontera y tomar una red infinita. Las condiciones de frontera quedan especificadas por

$$\varphi_{x+Na\hat{\mu}} = \varphi_x. \quad (3.15)$$

Así, por ejemplo,

$$\partial_4 \varphi_{\mathbf{x},(N-1)a} = \frac{1}{a}(\varphi_{\mathbf{x},0} - \varphi_{\mathbf{x},(N-1)a}). \quad (3.16)$$

Con estas condiciones de frontera, los operadores derivada  $\partial_\mu$  y  $\partial'_\mu$  están relacionados por una suma parcial (análogo a la integración por partes)

$$\sum_x \varphi_{1x} \varphi_{2x} = - \sum_x \partial'_\mu \varphi_{1x} \varphi_{2x}. \quad (3.17)$$

En notación matricial

$$\partial_\mu \varphi_x = (\partial_\mu)_{xy} \varphi_y, \quad (3.18)$$

$\partial'_\mu$  es menos la transpuesta de  $\partial_\mu$ :  $\partial'_\mu = -\partial_\mu^T$

$$(\partial_\mu)_{xy} = \frac{1}{a}(\delta_{x+a\hat{\mu},y} - \delta_{x,y}), \quad (3.19)$$

$$(\partial'_\mu)_{xy} = \frac{1}{a}(\delta_{x,y} - \delta_{x+a\hat{\mu},y}) = -(\partial_\mu)_{yx} = -(\partial_\mu^T)_{xy}. \quad (3.20)$$

Después de estos previos, la integral de camino ahora será definida por

$$Z = \int D\varphi e^{S(\varphi)}, \quad (3.21)$$

$$\int D\varphi = \prod_x \left( c \int_{-\infty}^{\infty} \right) d\varphi_x, \quad \prod_x = \prod_n, \quad (3.22)$$

$$S(\varphi) = - \sum_x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_x \partial_\mu \partial_x + \frac{\mu^2}{2} \varphi_x^2 \right), \quad (3.23)$$

$$c = a/\sqrt{2\pi}. \quad (3.24)$$

Notemos que  $c\varphi$  es adimensional. La dimensión de  $\varphi$  se sigue del requisito de que la acción  $S$  es adimensional. En dimensiones  $d$  espacio-temporales

$$[\varphi] = a^{-(d-2)/2}, \quad c = a^{(d-2)/2}. \quad (3.25)$$

El factor  $1/\sqrt{2\pi}$  es una convención no esencial, pero conveniente.

La acción en la red fue elegida tal que para funciones suaves  $f(x)$ ,  $S(f) \rightarrow S_{\text{cont}}(f)$  en el límite continuo *clásico*  $a \rightarrow 0$ . Sin embargo, es útil tener en cuenta que configuraciones de campo típicas  $\varphi_x$  que contribuyen a la integral de camino no son suaves en toda la escala de red.

Ya estamos listos para realizar la integral de camino para el campo escalar libre, el cual lo reescribimos como

$$S = - \sum_x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_x \partial_\mu \partial_x + \frac{\mu^2}{2} \varphi_x^2 \right) \quad (3.26)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{xy} S_{xy} \varphi_x \varphi_y, \quad (3.27)$$

donde

$$S_{xy} = - \sum_z \left[ \sum_\mu (\bar{\delta}_{z+a\hat{\mu},x} - \bar{\delta}_{z,x}) (\bar{\delta}_{z+a\hat{\mu},y} - \bar{\delta}_{z,y}) + m^2 \bar{\delta}_{z,x} \bar{\delta}_{z,y} \right] \quad (3.28)$$

y  $\delta_{x,x'}$  es la delta de Kronecker [7]. Es útil introducir una fuente externa  $j_x$ , que puede ser elegida como queramos. La función de partición con una fuente externa está definida como:

$$Z[j] = \int D\varphi e^{S + \sum_x j_x \varphi_x}. \quad (3.29)$$

De forma similar al caso continuo discutido en la sección 2.2, la transformación de variables

$$\varphi_x \rightarrow \varphi_x + \sum_y G_{xy} j_y, \quad (3.30)$$

con  $G_{xy}$  el propagador libre que es menos la inversa de  $S_{xy}$

$$S_{xy} G_{yz} = -\bar{\delta}_{x,z}, \quad (3.31)$$

lleva a  $Z[j]$  en la forma

$$Z[j] = Z[0] e^{\frac{1}{2} G_{xy} j_x j_y} \quad (3.32)$$

La integral  $Z[0]$  es solo una una integral múltiple Gaussiana:

$$Z[j] = \int D\varphi e^{-\frac{1}{2} G_{xy}^{-1} \varphi_x \varphi_y} = \frac{1}{\sqrt{\det G^{-1}}} = e^{\frac{1}{2} \ln \det G}. \quad (3.33)$$

El propagador  $G$  puede ser fácilmente encontrado en el “espacio de momentos”. Primero, determinamos la transformada de Fourier en la red (Apéndice A) de  $S_{xy}$ , usando unidades de red  $a = 1$ .

$$S_{p,-q} \equiv \sum_{xy} e^{-ipx+iqy} S_{xy} \quad (3.34)$$

$$= - \sum_z \left[ \sum_{\mu} (e^{ip\mu} - 1)(e^{iq\mu} - 1) + m^2 \right] e^{-ipz+iqz} \\ = S_p \bar{\delta}_{p,q}, \quad (3.35)$$

$$-S_p = m^2 + \sum_{\mu} (2 - 2 \cos p_{\mu}) \quad (3.36)$$

$$= m^2 + \sum_{\mu} 4 \sin^4 \left( \frac{p_{\mu}}{2} \right). \quad (3.37)$$

Como  $S_{p,-q}$  es diagonal en el espacio de los momentos, su inversa está dada por:

$$G_{p,-q} = G_p \bar{\delta}_{p,q}, \quad G_p = \frac{1}{m^2 + \sum_{\mu} (2 - 2 \cos p_{\mu})}. \quad (3.38)$$

Ahora podemos restaurar el parámetro de red usando análisis dimensional, sabiendo que  $[a]=[L]=[E]^{-1}$ ,  $p \rightarrow ap$ ,  $m \rightarrow am$  y  $G_p \rightarrow a^2 G(p)$ . Esto da

$$G(p) = \frac{1}{m^2 + a^{-2} \sum_{\mu} (2 - 2 \cos(ap_{\mu}))}, \quad (3.39)$$

en el límite continuo  $a \rightarrow 0$

$$G(p) = \frac{1}{m^2 + p^2 + O(a^2)}, \quad (3.40)$$

que es la expresión covariante usual para el propagador del campo escalar. Cabe mencionar que las correcciones a la forma continua son de hecho muy pequeñas para  $ap_\mu < 1/2$ .

### 3.1.1. Interpretación de Partícula

El campo escalar libre es solo una colección de osciladores armónicos, que están acoplados por el término gradiente  $\partial_j \varphi \partial_j \varphi$  en la acción o Hamiltoniano de la teoría  $\varphi^4$  [8]

$$\hat{H} = \sum_x (1/2 \hat{\pi}_x^2 + 1/2 \partial_j \hat{\varphi}_x \partial_j \hat{\varphi}_x + 1/2 \mu^2 \hat{\varphi}_x^2 + 1/4 \lambda \hat{\varphi}_x^4) + O(a^2), \quad (3.41)$$

donde  $\hat{\pi}_x$  es el operador canónico conjugado de  $\hat{\varphi}_x$ , con la propiedad

$$[\hat{\varphi}_x, \hat{\pi}_y] = ia^{-3} \delta_{x,y}. \quad (3.42)$$

Podemos diagonalizar el operador de transferencia explícitamente haciendo pasos similares para el oscilador armónico [8]. Entonces uno encuentra operadores de creación y aniquilación  $\hat{a}_p^\dagger$  y  $\hat{a}_p$ , que están etiquetados por el índice de Fourier  $\vec{p}$ .

$$\hat{a}_p = \sqrt{\frac{1}{2 \sinh \omega_p}} [\sinh(\omega_p) \hat{\varphi}_p + i \hat{\pi}_p^\dagger], \quad (3.43)$$

$$\hat{a}_p^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2 \sinh \omega_p}} [\sinh(\omega_p) \hat{\varphi}_p^\dagger - i \hat{\pi}_p]. \quad (3.44)$$

El estado base  $|0\rangle$  tiene la propiedad  $\hat{a}_p |0\rangle = 0$  con energía  $E_0 = \sum_p \omega_p/2$ . Las excitaciones elementales  $|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}_p^\dagger |0\rangle$  son interpretadas como partículas con momento  $\mathbf{p}$  y energía  $\omega_p$ . Esta interpretación se deduce por el hecho de que esos estados son valores propios de los operadores de traslación en el espacio-tiempo, esto es,  $\exp(\hat{H}t)$  (valor propio  $\exp[(\omega_p + E_0)t]$ ), y el operador de traslación espacial  $\hat{U}_x$  (valor propio  $\exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})$ ).

En el límite continuo recuperamos la relación energía-momento relativista  $\omega(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . La masa (energía en reposo) de las partículas es evidentemente  $m$ . Las partículas tienen espín cero porque corresponden a un campo escalar bajo rotaciones (no hay números cuánticos para caracterizar su estado). Son bosones porque los estados son simétricos bajo el intercambio de etiquetas:  $|\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle \equiv \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger |0\rangle = \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{p}_1}^\dagger |0\rangle = |\mathbf{p}_2\mathbf{p}_1\rangle$ . El estado base es usualmente llamado “el vacío”.

Para campos interactuantes los operadores de creación y aniquilación no conmutan con el Hamiltoniano se dice que crean partículas “desnudas”. Los estados de partículas “vestidas” son valores propios del Hamiltoniano, pero solo los estados de una partícula tienen la simple relación de energía-momento libre  $\omega(\vec{p}) = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ . Estados de partículas múltiples tienen, en general, energía de interacción, a menos que las partículas (es decir, sus paquetes de onda) estén muy separadas entre sí.

Las propiedades de partícula pueden ser deducidas de las funciones de correlación, por ejemplo, para estudiar su comportamiento a diferencias de tiempo grandes, en los cuales los estados con la energía de excitación más baja (es decir, las partículas)  $\omega_{\vec{p}}$  dominan. Alternativamente, uno puede diagonalizar el operador de transferencia por métodos variacionales. Esos métodos son muy generales y son también aplicados a teorías de confinamiento como QCD. Los número cuánticos de las partículas excitadas coinciden con los campos elegidos en las funciones de correlación.

## 3.2. Fermiones en la red y problema de doblamiento fermiónico

Ahora introduciremos la integral de camino para campos de fermiónicos y discutiremos el problema de doblamiento de especies (el hecho de que una discretización ingenua del campo de Dirac lleva a una mayor excitación de partículas que las esperadas y deseadas) y describimos los fermiones de Wilson como una solución a dicho problema.

En el espacio-tiempo continuo de Minkowski la acción para el fermión libre puede escribirse como [9]

$$S = - \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - \partial_\mu \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x)) + m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right], \quad (3.45)$$

o, exhibiendo los índices de Dirac  $\alpha, \beta, \dots$  (suprimimos la etiqueta  $x$  por

brevidad)

$$S = - \int d^4x [(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \frac{1}{2} (\bar{\psi}_\alpha \partial_\mu \psi_\beta - \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta) + m \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta]. \quad (3.46)$$

Los  $\bar{\psi}$  y  $\psi$  son objetos que anticonmutan, también llamados variables de Grassman (Apéndice C), por ejemplo  $\bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(y) = -\psi_\beta(y) \bar{\psi}_\alpha(x)$ . El integrando en (3.45) es Hermítico, tratando a  $\psi$  y  $\psi^+$ ,

$$\psi^+ = \bar{\psi} \beta, \quad \beta = i\gamma^0 \quad (3.47)$$

como Hermíticos conjugados, por ejemplo  $(\psi_\alpha(x) \psi_\beta(y)^+)^{\dagger} = \psi_\beta(x)^+ \psi_\alpha(x)$ . Notemos, sin embargo, que  $\psi$  y  $\psi^+$  son variables independientes (que es la razón por la cual usamos superíndice + en lugar de †). Las matrices de Dirac tienen las siguientes propiedades:

$$\gamma^0 = -\gamma_0, \quad \gamma_0 = -\gamma_0^\dagger, \quad \gamma_0^2 = -1, \quad (3.48)$$

$$\gamma^k = \gamma_k = \gamma_k^\dagger, \quad \gamma_k^2 = 1, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.49)$$

implicando que  $\beta = \beta^\dagger = 1$ <sup>1</sup> Cambiando las derivadas por diferencias discretas

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow \frac{1}{a_\mu} [\psi(x + a_\mu \hat{\mu}) - \psi(x)], \quad (3.50)$$

obtenemos de (3.45) una versión en lattice

$$S = - \sum_{x,\mu} \frac{1}{2a_\mu} [\bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x + a_\mu \hat{\mu}) - \bar{\psi}(x + a_\mu \hat{\mu}) \gamma^\mu \psi(x)] m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x). \quad (3.51)$$

Recordemos que  $a_\mu$  es el espaciado de la red en la dirección  $\mu$ . Ocasionalmente solo necesitaremos la separación en la dirección temporal  $a_0$ , al ser diferente de la separación espacial de la red  $a_k = a, k = 1, 2, 3$ .

La integral de camino para fermiones libres con fuentes anticonmutantes externas  $\eta$  y  $\bar{\eta}$  es definida tentativamente por

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \int D\bar{\psi} D\psi e^{i[S + \sum_x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)]}, \quad (3.52)$$

---

<sup>1</sup>Usualmente denotaremos por 1 a la matriz unidad  $\mathbb{I}$

donde

$$D\bar{\psi}D\psi = \prod_{x,\alpha} d\bar{\psi}_{x\alpha} d\psi_{x\alpha} = \prod_{x\alpha} d\psi_{x\alpha}^+ d\psi_{x\alpha}. \quad (3.53)$$

Ahora reescribamos la acción en términos de  $\psi_x$  y  $\bar{\psi}_x$  adimensionales,

$$\psi_x = a^{3/2}\psi(x), \quad \bar{\psi}_x = a^{3/2}\bar{\psi}(x), \quad (3.54)$$

y similarmente los símbolos  $d\psi_{x\alpha}^+$  y  $d\psi_{x\alpha}$  son adimensionales. La última igualdad en (3.53) se sigue de la regla  $d(T\psi) = (\det T)^{-1}d\psi$  y  $\det \beta = 1$ . Los  $d\psi_{x\alpha}$  y  $d\psi_{x\alpha}^+$  son generadores independientes del álgebra de Grassmann. Recordemos la definición de integración fermiónica

$$\int db = 0, \quad \int dbb = 1, \quad (3.55)$$

donde  $b$  es ya sea  $d\psi_{x\alpha}$  ó  $d\psi_{x\alpha}^+$ . Antes de hacer la transición al tiempo imaginario necesitamos hacer una dependencia explícita de  $a_0$ . Sean  $n_\mu$  los enteros especificando la posición en la red  $x, x^0 = n_0 a_t, x = na$ , y sean  $\psi_n \equiv \psi_x$  y  $\bar{\psi}_n \equiv \bar{\psi}_x$ . Recordemos además que  $\Sigma_x = a_0 a^3 \Sigma_n$  en nuestra notación, la acción en la red se lee más explícitamente

$$S = - \sum_n \left[ \frac{1}{2} (\bar{\psi}_n \gamma^0 \psi_{n+\hat{0}} - \bar{\psi}_{n+\hat{0}} \gamma^0 \psi_n) + \sum_{k=1}^3 \frac{a_0}{2a} (\bar{\psi}_n \gamma^k \psi_{n+\hat{k}} - \bar{\psi}_{n+\hat{k}} \gamma^k \psi_n) + (a_0 m) \bar{\psi}_n \psi_n \right]. \quad (3.56)$$

Además

$$\sum_x (\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \equiv \frac{a_0}{a} \sum_n (\bar{\eta}_{\alpha n} \psi_{\alpha n} + \bar{\psi}_{\alpha n} \eta_{\alpha n}), \quad (3.57)$$

con  $\eta_{\alpha n}$  y  $\bar{\eta}_{\alpha n}$  adimensionales. De las reglas de integración fermiónica se sigue que la integral de camino para un volumen espacio-tiempo finito es un polinomio en  $a_0 m$  y  $a_0/a$ . Por lo tanto, una continuación analítica al tiempo imaginario no genera problema alguno:

$$a_0 = |a_0| \exp(-i\varphi), \quad \varphi : 0 \rightarrow \pi/2, \quad a_0 \rightarrow -ia_4, \quad (3.58)$$

con  $a_4 = |a_0|$ . Esto transforma la integral de camino en su versión Euclideana ( $iS_I \rightarrow S_E$ , ignorando el subíndice  $E$ ),

$$Z = \int D\bar{\psi} D\psi e^{S + \Sigma_n(\bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)}, \quad (3.59)$$

$$S = - \sum_n \left[ \sum_\mu \frac{a_4}{2a_\mu} (\bar{\psi}_n \gamma_\mu \psi_{n+\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}} \gamma_\mu \psi_n) + a_4 m \bar{\psi}_n \psi_n \right].$$

donde  $\mu$  va de 1 a 4 (con  $n_4 \equiv n_0, \hat{4} \equiv \hat{0}$ ), y

$$\gamma_4 = i\gamma^0 = \beta. \quad (3.60)$$

### 3.2.1. Problema del Doblamiento Fermiónico

Vamos a ver que el modelo descrito por la acción en (3.59) lleva a  $2^4 = 16$  partículas de Dirac (fermiones con dos estados de spin y carga) en lugar de uno. Este es el fenómeno de doblamiento de especies. En ésta sección obtendremos, por inspección, al propagador del fermión y el espectro de excitación de energía a estos modos espurios.

Usando una notación matricial, escribimos

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = \int D\bar{\psi} D\psi e^{-\bar{\psi} A \psi + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta}, \quad (3.61)$$

donde (en unidades de red,  $a = a_4 = 1$ )

$$A_{xy} = \sum_{z\mu} \gamma_\mu \frac{1}{2} (\bar{\delta}_{x,z} \bar{\delta}_{y,z+\hat{\mu}} - \bar{\delta}_{x,z+\hat{\mu}} \bar{\delta}_{y,z}) + m \sum_z \bar{\delta}_{x,z} \bar{\delta}_{y,z}, \quad (3.62)$$

la integral de camino se integra fácilmente (Apéndice C). El resultado es

$$Z(\eta, \bar{\eta}) = \det A = e^{\bar{\eta} A^{-1} \eta}. \quad (3.63)$$

Aquí  $A_{xy}^{-1} \equiv S_{xy}$  es el propagador fermiónico el cual puede ser evaluado en el espacio de momentos. Asumiendo una red sin frontera pero con condiciones periódicas,

$$A(k, -l) = \sum_{xy} e^{-ikx+ily} A_{xy} = S(k)^{-1} \bar{\delta}(k-l), \quad (3.64)$$

$$S(k)^{-1} = \sum_\mu i\gamma_\mu \sin k_\mu + m, \quad (3.65)$$

$$S(k) = \frac{m - i\gamma_\mu s_\mu}{m^2 + s^2}, \quad s_\mu = \sin k_\mu. \quad (3.66)$$

Volviendo a las unidades originales el propagador se transforma en

$$S(k) = \frac{m - i\Sigma_\mu \sin(ak_\mu)/a}{m^2 + \Sigma_\mu \gamma_\mu \sin^2(ak_\mu)/a^2}, \quad (3.67)$$

para el cual el límite  $a \rightarrow 0$  da el resultado continuo

$$S(k) = \frac{m - i\gamma k}{m^2 + k^2} + O(a^2). \quad (3.68)$$

El propagador tiene un polo en  $k_4 = i\omega = i\sqrt{k^2 + m^2}$  correspondiente a una partícula de Dirac. El polo está cerca de los senos de las funciones seno en el origen  $ak_\mu = 0$ . Sin embargo, hay 15 regiones más en el toro 4-dimensional  $-\pi < ak_\mu \leq \pi$  donde la función seno se anula, 16 en total

$$S(k) = \frac{m - i\gamma_\mu(A)p_\mu}{m^2 + p^2} + O(a), \quad k = k_A + p \quad (3.69)$$

donde  $k_A$  es uno de los 16 tetravectores

$$k_A = \frac{\pi A}{a}, \quad \text{módulo } 2\pi, \quad (3.70)$$

con

$$\begin{aligned} \pi_0 &= (0, 0, 0, 0), & \pi_{1234} &= (\pi, \pi, \pi, \pi), \\ \pi_1 &= (\pi, 0, 0, 0), & \pi_2 &= (0, \pi, 0, 0), \dots, & \pi_4 &= (0, 0, 0, \pi), \dots, \\ \pi_{12} &= (\pi, \pi, 0, 0), \dots, & \pi_{34} &= (0, 0, \pi, \pi), \\ \pi_{123} &= (\pi, \pi, \pi, 0), \dots, & \pi_{234} &= (0, \pi, \pi, \pi), \end{aligned} \quad (3.71)$$

y

$$\gamma_\mu^{(A)} = \gamma_\mu \cos \pi_{A\mu} = \pm \gamma_\mu. \quad (3.72)$$

Como  $\gamma_\mu^{(A)}$  difiere solo por un signo del  $\gamma_\mu$  original, ambos son equivalentes por una transformación unitaria. Esta transformación es fácil de construir mediante productos de  $\gamma_\rho \gamma_5$ , donde  $\gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$  es la matriz Hermítica y unitaria que anticonmuta con  $\gamma_\mu$ :  $\gamma_\mu \gamma_5 = -\gamma_5 \gamma_\mu$ . Sea

$$\{S_A\} = \{\mathbb{I}, S_\rho, S_\rho S_\sigma, S_\rho S_\sigma S_\tau, S_1 S_2 S_3 S_4\}, \quad S_\rho = i\gamma_\rho \gamma_5, \quad (3.73)$$

donde  $\rho \neq \sigma, \tau$  y  $A \leftrightarrow \pi_A \leftrightarrow S_A$ , por ejemplo  $\pi_{23} \leftrightarrow S_{23} = S_2 S_3$ . Entonces

$$\gamma_\mu^{(A)} = S_A^\dagger \gamma_\mu S_A, \quad (3.74)$$

y tenemos

$$S(k_A + p) = S_A^\dagger \frac{m - i\gamma_\mu p_\mu}{m^2 + p^2} S_A + O(a^2). \quad (3.75)$$

Las transformaciones  $S_A$  son útiles para una interpretación detallada de los ceros de la función seno cerca de  $k_A \neq 0$  en términos de partículas. Aquí vamos a justificar la interpretación de las 15 “partículas” adicionales derivando el espectro de excitaciones de energía del estado base del sistema.

El espectro de excitación de energía se obtiene convenientemente de la dependencia temporal del propagador, análogamente al caso bosónico:

$$S(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk_4}{2\pi} e^{ik_4 t} \frac{m - i\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{s} - i\gamma_4 \sin k_4}{m^2 + s^2 + \sin^2 k_4}, \quad (3.76)$$

donde hemos vuelto a las unidades de red y usamos la notación  $s_\mu = \sin k_\mu$ .

La integral sobre  $k_4$  se puede resolver haciendo un cambio de variable.

$$z = e^{ik_4}, \quad (3.77)$$

con la cual  $s_4^2 = 1 - (z^2 + z^{-2} + 2)/4$  y

$$S(\mathbf{x}, t) = -4 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{dz}{2\pi i} z^t \frac{z(m - i\boldsymbol{\gamma}\mathbf{s}) - \gamma_4(z^2 - 1)/2}{z^4 - 2fz^2 + 1}, \quad (3.78)$$

$$f = 1 + 2(m^2 + \mathbf{s}^2).$$

La integral en  $z$  es sobre el círculo unidad en el plano complejo, como se muestra en la figura 3.1. El denominador del integrando tiene cuatro ceros, en  $\pm z_+$  y  $\pm z_-$ , donde  $z_\pm$  son dados por

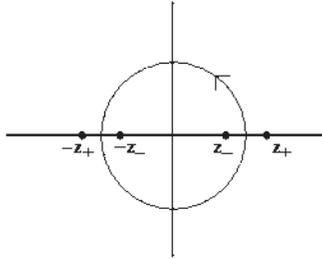


Figura 3.1: Integración de contorno en el plano complejo

$$(z_{\pm})^2 = f \pm \sqrt{f^2 - 1}, \quad z_{\pm} = e^{\pm\omega}, \quad (3.79)$$

$$\cosh(2\omega) = f, \quad \sinh \omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{s}^2}. \quad (3.80)$$

Para  $t > 0$  ( $t = \text{entero}$ ) los dos polos contribuyen en  $z = \pm z_{\pm}$  contribuyen, dando

$$S(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t}}{\sinh(2\omega)} (m - i\gamma\mathbf{s} + \gamma_4 \sinh \omega) \\ + (-1)^t \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t}}{\sinh(2\omega)} (m - i\gamma\mathbf{s} + \gamma_4 \sinh \omega). \quad (3.81)$$

Antes de interpretar este resultado queremos resumir en términos de la variable  $k_4$ , para un uso posterior. En términos de  $k_4$  los ceros del denominador  $m^2 + \mathbf{s}^2 + \sin^4 k_4$  en  $z = z_{\pm}$  son en  $k_4 = \mp i\omega$ , y para  $z = -z_{\pm}$  en  $k_4 = \mp i\omega + \pi \pmod{2\pi}$ . Los polos  $k_4 = -i\omega, -i\omega + \pi$  son relevantes para  $t < 0$ . Los residuos de los otros polos están dados por

$$e^{ik_4 t} (m - i\gamma \cdot \mathbf{s} - i\gamma_4 s_4) = \begin{cases} e^{-\omega t} (m - i\gamma \cdot \mathbf{s} + \gamma_4 \sinh \omega), & k_4 = i\omega, \\ (-1)^t e^{-\omega t} (m - i\gamma \cdot \mathbf{s} - \gamma_4 \sinh \omega), & k_4 = i\omega + \pi, \\ e^{\omega t} (m - i\gamma \cdot \mathbf{s} - \gamma_4 \sinh \omega), & k_4 = -i\omega, \\ (-1)^t e^{\omega t} (m - i\gamma \cdot \mathbf{s} + \gamma_4 \sinh \omega), & k_4 = -i\omega + \pi \end{cases} \quad (3.82)$$

Vemos que no podemos realizar ciegamente el inverso de la rotación de Wick en la red  $k_4 \rightarrow ik^0$  y buscar polos de partículas en  $k^0 = \pm\omega$ . Tenemos que hacer  $k_4 \rightarrow ik^0 + \varphi, \varphi \in [0, 2\pi)$ : entonces  $k^0 \pm \omega$  corresponde a  $e^{\mp\omega t} e^{i\varphi t}, t > 0$  ó  $t < 0$ . En este caso tenemos polos en  $\varphi = 0$  y  $\varphi = \pi$ . Recordemos que el denominador para el campo bosónico  $m^2 + 2\Sigma_{\mu}(1 - \cos k_{\mu})$  da un solo polo para  $\varphi = 0$ .

Ahora vamos a interpretar el resultado (3.81). De la dependencia temporal del propagador identificamos el espectro de energía  $\omega(\mathbf{k})$ . Como hay dos polos que contribuyen para  $t > 0$ , debe haber dos partículas fermiónicas para cada  $\mathbf{k}$ . Uno de ellos (el polo en  $z = z_{-}$ ) tiene el factor usual  $e^{-\omega t}$ . El otro (en  $-z_{-}$ ) tiene en adición el factor rápidamente oscilante  $(-1)^t$ . Aparentemente, para obtener un comportamiento suave a tiempos grandes (en unidades de lattice) tenemos que tomar dos unidades de red como nuestro paso en el tiempo. Esto está en concordancia con la interpretación del operador de transferencia de la integral de camino, en la cual *dos* rebanadas de tiempo son identificadas con el espacio fermiónico de Hilbert, en los cuales *dos* operadores independientes

de campos  $\hat{\Psi}_{1,2}$  de Dirac actúan, correspondientes a dos polos de partículas. Una excepción es el método de Wilson que no tiene doblamiento fermiónico.

Entonces hay un doblamiento fermiónico de especies debido a la discretización del tiempo. Además hay una mayor proliferación de partículas debido a la discretización del espacio. En la figura (3.2) comparamos el espectro de excitación fermiónico y bosónico,

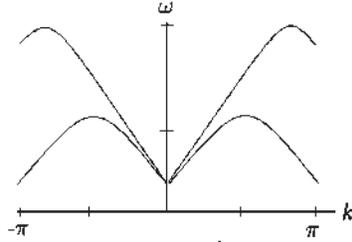


Figura 3.2: Espectro de excitación de energía para bosones (curva superior) y fermiones (curva inferior) en la red, en unidades de red ( $m = 0.2$ )

$$\cosh \omega = 1 + \frac{1}{2} \left[ m^2 + 2 \sum_{j=1}^3 (1 - \cos k_j) \right], \quad \text{bosón}; \quad (3.83)$$

$$\sinh \omega = \sqrt{m^2 + \sum_{j=1}^3 \sin^2 k_j}, \quad \text{fermión}. \quad (3.84)$$

Definimos un estado de partícula corresponde con un mínimo local de la superficie de energía  $\omega(\mathbf{k})$ . Los mínimos son en  $k = k_A, k_A = 0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_{12}, \pi_{23}, \pi_{31}, \pi_{123}$ , con energía en reposo dada por  $\omega_A \equiv \omega(k_A), \sinh \omega_A = m$ . Para  $m \rightarrow 0$  (en unidades de red) el espectro es relativista cerca de  $k = k_A$ .

$$\omega \rightarrow \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \quad m \rightarrow 0, \quad \mathbf{p} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_A \rightarrow 0, \quad (3.85)$$

y  $\mathbf{p}$  puede ser interpretado como el momento de la partícula. Del doblamiento espacial y temporal contamos  $2^4 = 16$  partículas.

Aparentemente, en una primera aproximación se pueden ignorar las partículas  $k_A \neq 0$ . Sin embargo, en una teoría con interacciones esto no es posible, debido a que  $k_\mu$  se conserva sólo módulo  $2\pi$ . Por ejemplo, dos partículas

$k_A = 0$  pueden colisionar y producir dos partículas  $k_A = \pi_1 = (\pi, 0, 0, 0)$  :  $p_1 + p_2 = p_3 + \pi_1 + p_4 + \pi_1 = p_3 + p_4 \pmod{2\pi}$ , lo cual resulta inaceptable. Es necesario la teoría, o bien, “parcharla” para evitar estos modos indeseables. Una posibilidad se muestra en la siguiente sección

### 3.2.2. Método Fermiónico de Wilson

El método fermiónico de Wilson puede ser visto como la adición de un término de masa dependiente del momento a la acción fermiónica. Con el fin de evitar el problema del doblamiento fermiónico. Esta adición incrementa la masa de los indeseados dobles a valores del orden de corte, así se desacoplan en el continuo. Para fermiones libres reemplazamos el término de masa en la acción como sigue

$$\begin{aligned}
m \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x &\rightarrow m \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x + \frac{ar}{2} \sum_{a\mu} \partial_\mu \bar{\psi}_x \partial_\mu \psi_x & (3.86) \\
&= m \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x + \frac{ar}{2} \sum_{x\mu} \frac{1}{a^2} (\bar{\psi}_{x+a\bar{\mu}} - \bar{\psi}_x) (\psi_{x+a\bar{\mu}} - \psi_x) \\
&= \left( m + \frac{4r}{a} \right) \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x - \frac{r}{a} \sum_{x\mu} (\bar{\psi}_{x+a\bar{\mu}} \psi_x + \bar{\psi}_x \psi_{x+a\bar{\mu}}), \\
&0 \leq r \leq 1
\end{aligned}$$

donde  $r$  es el llamado parámetro de Wilson y tiene el efecto de reemplazar el término de masa “ $m$ ” en el propagador de los momentos por

$$m + r \sum_{\mu} (1 - \cos k_{\mu}) \equiv \mathcal{M}(k), \quad (3.87)$$

en unidades de red. Entonces el propagador está dado por

$$S(k) = \frac{\mathcal{M}(k) - i\gamma_{\mu} \sin k_{\mu}}{\mathcal{M}^2(k) + \sum_{\mu} \sin^2 k_{\mu}}. \quad (3.88)$$

Para  $k = k_A + p$  y  $p$  pequeño en unidades de red esto toma la forma

$$S(p) = \frac{m_A - i\gamma_{\mu}^{(A)} p_{\mu}}{m_A^2 + p^2}, \quad (3.89)$$

$$m_A = m + 2n_{Ar}, \quad n_A = 0, 1, \dots, 4, \quad (3.90)$$

donde  $n_A$  es el número de  $\pi$ 's en  $k_A$ .

Por tanto, los parámetros de masa del doble fermiónico ( $n_A > 0$ ) son del orden de uno en unidades de red cuando  $r \neq 0$ . Los parámetros de masa  $m_A$  pueden ser identificados con la masa de los fermiones si son pequeños en unidades de red, por ejemplo,  $r$  y  $m$  pequeños. Para  $r$  y momento  $\vec{\mathbf{p}}$  generales las energías del fermión difieren  $\sqrt{m_A^2 + \mathbf{p}^2}$  y es interesante ver a que corresponden. También buscamos los polos del propagador como una función de  $k_4$  e identificamos la energía  $\omega$  con  $k_4 = i\omega$  ó  $k_4 = i\omega + \pi$  como ya hemos explicado en (3.81). Por simplicidad usaremos la notación

$$s_\mu = \sin k_\mu, \quad c_\mu = \cos k_\mu, \quad s^2 = s_\mu s_\mu. \quad (3.91)$$

Separando la dependencia de  $k_4$ , el denominador del propagador puede escribirse como:

$$\mathcal{M}^2 + s^2 = 1 + s^2 + \Sigma^2 - 2r\Sigma c_4 - (1 - r^2)c_4^2, \quad (3.92)$$

$$\Sigma = m + r + r \sum_{j=1}^3 (1 - c_j), \quad (3.93)$$

cuyo denominador se anula para

$$\cosh \omega^\pm = \frac{\sqrt{\Sigma^2 + (1 - r^2)(1 + s^2)} \pm r\Sigma}{1 - r^2}. \quad (3.94)$$

Aquí el signo  $+$  corresponde a  $k_4 = i\omega + \pi$  y el signo  $-$  a  $k_4 = i\omega$ . Las energías en reposo de las partículas en  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_A$  se obtiene con  $\mathbf{s} = 0$  y

$$\Sigma = m + r + 2nr, \quad n = 0, 1, 2, 3 \quad \text{para} \quad k_A = 0, \pi_j, \pi_{jk}, \pi_{123}. \quad (3.95)$$

Para  $m = 0$  las partículas tienen energía en reposo  $\omega_n$  dada por

$$\cosh \omega_n^\pm = \frac{\sqrt{r^2(1 + 2n)^2 + 1 - r^2} \pm r^2(1 + 2n)}{1 - r^2} \quad (3.96)$$

Por lo tanto, solo los fermiones buscados ( $n = 0$ , signo  $-$ ) tienen energía en reposo cero y los dobles fermiónicos tienen energías en reposo del orden de 1 en unidades de red. Cuando  $r \rightarrow 1$  las energías en reposo de los dobles temporales (para los cuales el signo  $+$  aplica) se hacen infinitas,  $\omega^+ \rightarrow \infty$ . Las energías en reposo de los dobles no-temporales se hacen  $\omega^- = \ln(1 + 2n)$  en  $r = 1$ . De hecho, conforme  $r$  incrementa de 0 a 1 los dobles desaparecen

antes de alcanzar  $r = 1$  en el sentido de que el mínimo local de la superficie de energía en  $k_A \neq 0$  desaparece.

La elección de Wilson es  $r = 1$ . Puede verse directamente de (3.82) que en este caso no hay doblamiento de especies debido a que el inverso del propagador es lineal en  $\cos k_4$ . Recuperando el espaciado de la red  $a$ , la energía de la partícula puede encontrarse con errores de orden  $a$ , comparado con  $O(a^2)$  para la discretización ingenua de fermiones o bosones,

$$\omega = \omega_0^- = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} + O(a). \quad (3.97)$$

El significado especial de  $r = 1$  puede ser visto de otra forma en la acción completa, que tiene la forma

$$S = \sum_{x\mu} \left( \bar{\psi}_x \frac{r - \gamma_\mu}{2} \psi_{x+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{x+\hat{\mu}} \frac{r + \gamma_\mu}{2} \psi_x \right) - M \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x, \\ M = m + 4r. \quad (3.98)$$

Las combinaciones

$$P_\mu^\pm = \frac{r \pm \gamma_\mu}{2}, \quad (3.99)$$

se convierten en proyectores para  $r = 1$ ,

$$(P_\mu^\pm)^2 = P_\mu^\pm, \quad P_\mu^+ P_\mu^- = 0, \quad P_\mu^+ + P_\mu^- = 1. \quad (3.100)$$

# Capítulo 4

## Función de Green de tres puntos

En este capítulo usaremos las herramientas matemáticas del capítulo 2 al campos escalar (3.1) y de fermi (3.2) acoplados con una interacción pseudo-escalar de Yukawa<sup>1</sup>[10]. Con la expansión perturbativa calcularemos la función de Green de tres puntos hasta tercer orden. Cabe mencionar que los resultados de este capítulo son originales y es la principal contribución de este trabajo de tesis.

### 4.1. Lagrangiana con acoplamiento del tipo Yukawa

Si consideramos la Lagrangiana como la suma de las lagrangianas libres para los campos escalar y fermiónico más la lagrangiana de interacción:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1(\phi) + \mathcal{L}_2(\bar{\psi}, \psi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\bar{\psi}, \psi, \phi) \quad (4.1)$$

con

$$\mathcal{L}_1(\phi) = -\left(\frac{1}{2}\partial_\mu\psi_x\partial_\mu\psi_x + \frac{1}{2}m^2\psi^2\right) \quad (4.2)$$

$$\mathcal{L}_2(\bar{\psi}, \psi) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}_x\gamma^\mu\psi_{x+a\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{x+a\hat{\mu}}\gamma^\mu\psi_x] - \mu\bar{\psi}_x\psi_x - \frac{1}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_x\partial_\mu\psi_x \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}}(j, \eta, \bar{\eta}) = g\bar{\psi}_x\gamma^5\psi_x\phi_x \quad (4.4)$$

---

<sup>1</sup>Interacción con partícula mediadora masiva

Siendo  $\mathcal{L}_{\text{int}}(j, \eta, \bar{\eta})$  el acoplamiento pseudo-escalar de Yukawa. Generalizando la función de partición (2.44) incluyendo los términos del campo fermiónico de (3.2) y la interacción pseudo-escalar de Yukawa podemos escribirla como

$$Z[j, \eta, \bar{\eta}] = e^{i \int \mathcal{L}_{\text{int}}(\frac{\delta}{\delta \eta_z}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_z}, \frac{\delta}{\delta j_z})} Z_0[j, \eta, \bar{\eta}], \quad (4.5)$$

tomando la versión discreta en el formalismo del tiempo imaginario

$$Z[j, \eta, \bar{\eta}] = e^{-\sum \mathcal{L}_{\text{int}}(\frac{\delta}{\delta \eta_z}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_z}, \frac{\delta}{\delta j_z})} Z_0[j, \eta, \bar{\eta}], \quad (4.6)$$

donde  $Z_0[j, \eta, \bar{\eta}]$  es el producto de las funciones de partición independientes del campo escalar y fermiónico vistas en el capítulo 3.

$$Z_0[j, \eta, \bar{\eta}] = N e^{\frac{1}{2} \ln \det G} \det S^{-1} e^{\frac{1}{2} G_{xy} j_x j_y} e^{\bar{\eta}_x^c S_{x'y'}^{cd} \eta_{y'}^d}. \quad (4.7)$$

Expandemos el operador que contiene el Lagrangiano de interacción hasta términos de tercer orden<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} e^{-g \sum \frac{\delta}{\delta \eta_z^b} \gamma_5^{ba} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_z^a} \frac{\delta}{\delta j_z}} &= \left[ 1 - g \sum_z \frac{\delta}{\delta \eta_z^b} \gamma_5^{ba} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_z^a} \frac{\delta}{\delta j_z} \right. \\ &+ \frac{g^2}{2!} \sum_{z, z'} \left( \frac{\delta}{\delta \eta_{z'}^{b'}} \gamma_5^{b'a'} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{z'}^{a'}} \frac{\delta}{\delta j_z} \right) \left( \frac{\delta}{\delta \eta_z^b} \gamma_5^{ba} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_z^a} \frac{\delta}{\delta j_z} \right) \\ &- \frac{g^3}{3!} \sum_{z, z', z''} \left( \frac{\delta}{\delta \eta_{z''}^{b''}} \gamma_5^{b''a''} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{z''}^{a''}} \frac{\delta}{\delta j_z} \right) \left( \frac{\delta}{\delta \eta_{z'}^{b'}} \gamma_5^{b'a'} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_{z'}^{a'}} \frac{\delta}{\delta j_z} \right) \times \\ &\left. \times \left( \frac{\delta}{\delta \eta_z^b} \gamma_5^{ba} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}_z^a} \frac{\delta}{\delta j_z} \right) + O(g^4) \right]. \quad (4.8) \end{aligned}$$

Escribimos la función de partición (4.6) como:

$$Z[j, \eta, \bar{\eta}] = Z_0[j, \eta, \bar{\eta}] + Z_1[j, \eta, \bar{\eta}] + Z_2[j, \eta, \bar{\eta}] + Z_3[j, \eta, \bar{\eta}] + \bar{Z} \quad (4.9)$$

siendo  $Z_1, Z_2, Z_3$  y  $\bar{Z}$  son las contribuciones a primer, segundo, tercer orden y el resto de la suma, respectivamente, éstas se obtienen después de realizar

<sup>2</sup>La operación  $\delta/\delta \eta_z$  se aplica por la izquierda.

las respectivas derivadas funcionales. Las funciones que obtenemos son

$$Z_1[j, \eta, \bar{\eta}] = g\gamma_5^{ab}G_{zxjx}[(S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d)(\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb}) - S_{zz}^{ab}]Z_0, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} Z_2[j, \eta, \bar{\eta}] &= \frac{g^2}{2!}\gamma_5^{a'b'}\gamma_5^{ab}[[G_{zz'} + (G_{zxjx})(G_{z'xjx})][S_{z'z}^{a'b}(S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{zz'}^{ab'}) \\ &\quad - (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} - S_{zz}^{ab})(S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{z'z'}^{a'b'}) - S_{zz'}^{ab'}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d]Z_0, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} Z_3[j, \eta, \bar{\eta}] &= \frac{g^3}{3!}\gamma_5^{a''b''}\gamma_5^{a'b'}\gamma_5^{ab}[G_{zz''}G_{z'xjx} + G_{z'z''}G_{zxjx} + (G_{zz'} + (G_{zxjx})(G_{z'xjx}))G_{z''xjx}] \times \\ &\quad \times \left\{ \{S_{z'z}^{a'b}(S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d S_{z''z'}^{a''b'}) - (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d S_{z''z}^{a''b})(S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} + S_{z'z'}^{a'b'}) - \right. \\ &\quad - (S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d S_{z''z'}^{a''b'}) (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} - S_{zz}^{ab}) - S_{zz'}^{ab'} S_{z''z}^{a''b} S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d \\ &\quad - [S_{z'z}^{a'b}(S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{zz'}^{ab'}) - (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} - S_{zz}^{ab}) \times \\ &\quad \times (S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{z'z'}^{a'b'}) - S_{zz'}^{ab'}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d] S_{z''y'}^{a''d}\eta_{y'}^d \bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z''}^{cb''} - \\ &\quad - \{S_{z'z}^{a'b} S_{zz''}^{a''b} S_{z''z'}^{a''b'} - (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d S_{z''z}^{a''b})(S_{z'z''}^{a'b''}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'}) + \\ &\quad + (S_{zz''}^{a''b} S_{z''z}^{a''b})(S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} + S_{z'z'}^{a'b'}) \\ &\quad - (S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d S_{z''z'}^{a''b'}) (S_{zz''}^{a''b}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb}) + (S_{z'z''}^{a'b''} S_{z''z'}^{a''b'}) (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} - S_{zz}^{ab}) - \\ &\quad - S_{zz'}^{ab'} S_{z''z}^{a''b} S_{z''z'}^{a''b''} - [S_{z'z}^{a'b}(S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{zz'}^{ab'}) - (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} - S_{zz}^{ab}) \times \\ &\quad \times (S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{z'z'}^{a'b'}) - S_{zz'}^{ab'}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d] S_{z''z''}^{a''b''} + \\ &\quad + [S_{z'z}^{a'b}(S_{zz''}^{a''b}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'}) - (S_{zy'}^{ad}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} - S_{zz}^{ab}) \times \\ &\quad \times (S_{z'z''}^{a'b''}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'}) + (S_{zz''}^{a''b}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb})(S_{z'y'}^{a'd}\eta_{y'}^d\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z'}^{cb'} - S_{z'z'}^{a'b'}) - S_{zz'}^{ab'}\bar{\eta}_{x'}^c S_{x'z}^{cb} S_{z'z''}^{a''b''}] \times \\ &\quad \left. \times S_{z''y'}^{a''d}\eta_{y'}^d \right\} Z_0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Calculamos la función de Green de tres puntos para cada una de las contribuciones con una generalización de (2.43) que incluye las fuentes anticonmutantes

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = \left[ \frac{1}{Z[j, \eta, \bar{\eta}]} \frac{\delta}{\delta\eta_{x_3}^a} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_{x_2}^b} \frac{\delta}{\delta j_{x_1}} Z[j, \eta, \bar{\eta}] \right]_{j=\eta=\bar{\eta}=0}. \quad (4.13)$$

Obteniendo así la parte conectada de la contribución de tres puntos

$$\Gamma^{(0)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (4.14)$$

$$\Gamma^{(1)}(x_1, x_2, x_3) = g\gamma_5^{ab}G_{zx_1} S_{x_2z}^{a'b} S_{zx_3}^{ab'} \quad (4.15)$$

$$\Gamma^{(2)}(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (4.16)$$

$$\Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \frac{2g^3}{3!}\gamma_5^{ba}\gamma_5^{b'a'}\gamma_5^{b''a''} G_{z''x_1} G_{zz'} S_{z'z}^{a'b} S_{zx_3}^{ab'''} S_{z''z}^{a''b} S_{x_2z'}^{a''b'}. \quad (4.17)$$

Con sus respectivos diagramas de Feynman [4] mostrados en la Fig. 4.1.  $\Gamma^{(1)}$  en (4.15) corresponde al diagrama (a) en la figura mencionada, mientras que la Ec. (4.17) se representa por el diagrama (b).

La transformada de Fourier (Apéndice A) para cada función de tres puntos

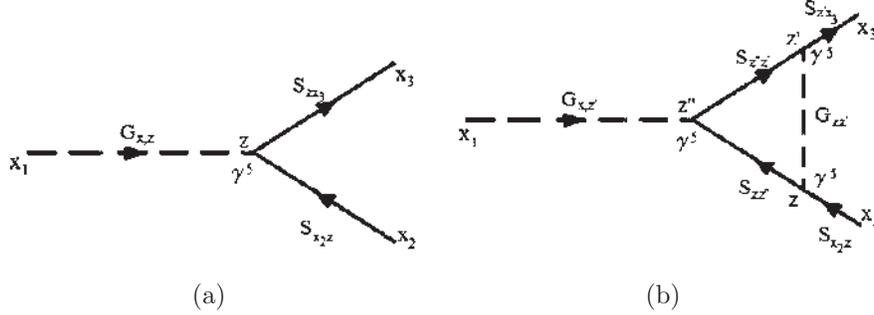


Figura 4.1: Diagramas de Feynman en el espacio de las coordenadas para la función de tres puntos. (a) Primer orden (nivel árbol). (b) Tercer orden (a nivel de un rizo)

$$\Gamma^{(1)}(p, q) = g\gamma_5^{ab}G(q)S(p)^{a'b}S(p+q)^{ab'} \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)}(p, q) = & \frac{2g^3}{3!}\gamma_5^{ba}\gamma_5^{b'a'}\gamma_5^{b''a''}G(q)\sum_{p'}G(p-p')S(p)^{a''b'}\times \\ & \times S(q+p')^{a''b}S(p')^{a'b''}S(p+q)^{ab''} \end{aligned} \quad (4.19)$$

y sus diagramas de Feynman respectivos:

Analicemos las ecuaciones (4.18) y (4.19). Estamos sumando sobre  $p'$  que va hasta cierto número  $N$ , el tamaño de la red es  $N + 1$ . Por lo que aparece un pequeño problema: ¿Qué pasa cuando la cantidad  $p - p'$  es menor que cero y  $p + p'$  es mayor que  $N$ ? Simplemente el valor del momento sale fuera de los límites de la red, este fenómeno da origen al fenómeno de aliasing [13] y su origen está ligado al hecho de realizar transformadas de Fourier sobre un producto de dos o más funciones (convolución), obligando así a que la región donde es válida la transformada sea menor que el espacio total. Nosotros evitamos este problema al considerar una red periódica sin fronteras.

Para realizar la suma sobre la ecuación (4.19) notemos que  $p'$  es el momento tetra-dimensional, pero solo sumaremos sobre los tres índices ( $p'_1, p'_2,$  y  $p'_3$ ), y usaremos la relación de energía relativista  $p_4 = -\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$ . Dicha

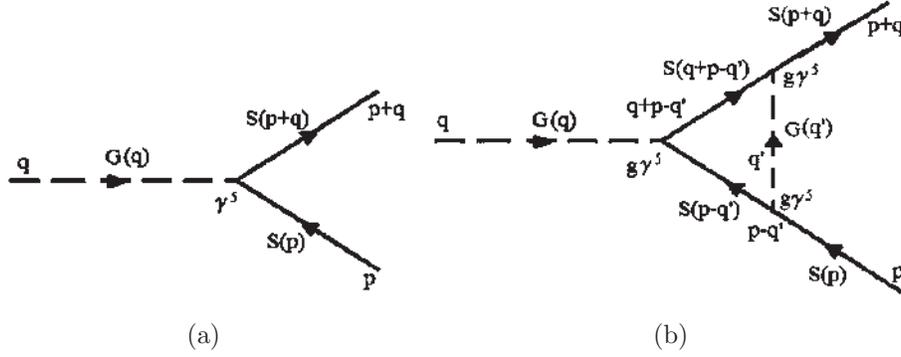


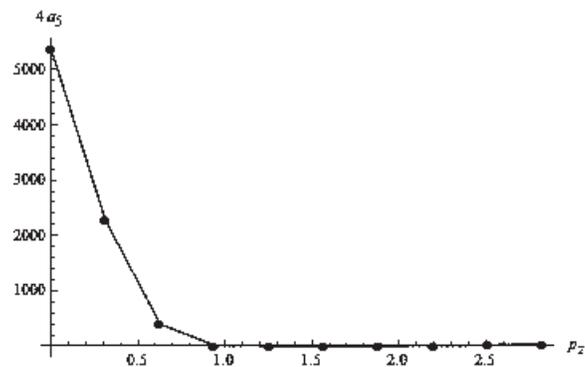
Figura 4.2: Diagramas de Feynman en el espacio de los momentos para la función de tres puntos. (a) Primer orden. (b) Tercer orden

suma sobre  $p'$  es la contribución de los momentos internos de la figura 4.2(b). Para realizar la suma variaremos los momentos incidentes  $p$  y  $q$  considerando que van en una sola dirección en el mismo eje (variaremos  $p_1$  y mantendremos fijo  $q_1$  mientras que  $p_2 = p_3 = q_2 = q_3 = 0$ ) y en la suma sobre los momentos internos no se discriminará dirección alguna. Tomemos en cuenta que el propagador (4.19) puede escribirse como una combinación lineal de 16 matrices de  $4 \times 4$ :

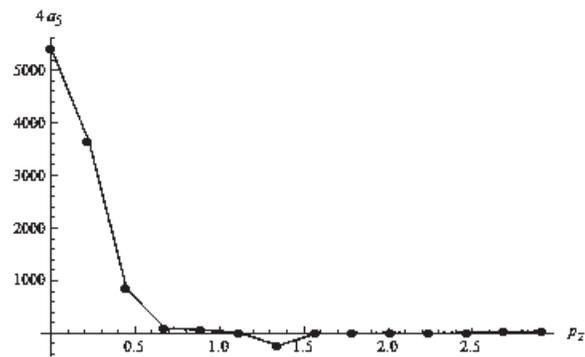
$$\Gamma^{(3)} = \sum_{n=1}^{16} a_n \Gamma_n \quad (4.20)$$

donde  $\Gamma_n$  es cualquier de las matrices:  $\mathbb{I}, \gamma_i, \gamma_4 \gamma_5, \gamma_5 \gamma_i, \gamma_4 \gamma_5, \sigma_{\mu\nu}, i = 1, 2, 3, \mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ , donde cada constante en la combinación lineal representa cierta magnitud [12]. Para nuestro caso graficaremos la magnitud de interacción  $|a_n|$  con respecto al momento del fermión incidente, para un valor fijo del momento de boson incidente. Primero veamos el comportamiento de la magnitud de interacción tomando una red que va de 0 a  $2\pi$  en la cual se ha generado una red con 13 nodos a lo largo de cada dirección. Con el fin de entender el comportamiento de los coeficientes hemos hecho los cálculos variando el número de nodos. En particular nos hemos concentrado en la amplitud del coeficiente  $a_5$  ( $a_5 \bar{\Psi} \gamma_0 \gamma_5$ ). Esto es debido a que los otros coeficientes han resultado ser muy pequeños comparados con el de  $a_5$ .

Podemos ver que la interacción disminuye de manera considerable cuando aumentamos la energía, este efecto se realiza mediante incrementos al momento del bosón. Puede considerarse que para momentos mayores o iguales

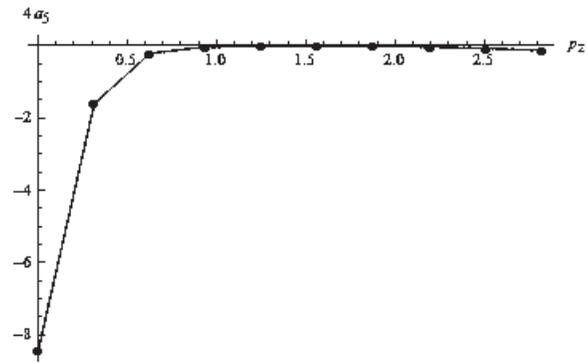


(a) Red de diez puntos

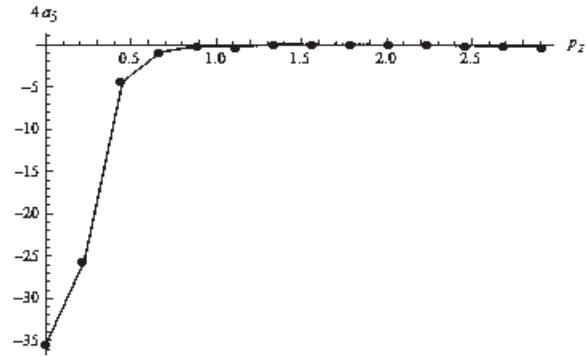


(b) Red de catorce puntos

Figura 4.3: Amplitud de interacción con distintos puntos en la red para el momento del bosón  $q=0$ .



(a) Red de diez puntos



(b) Red de catorce puntos

Figura 4.4: Amplitud de interacción con distintos puntos en la red para el momento del bosón  $q=1$ .

a uno la magnitud no nos ofrece información útil a menos que se considere un análisis estadístico que requiera una mayor cantidad de puntos en la red, para así poder calcular el comportamiento en zonas cercanas a cero, con la desventaja de que se requiere un enorme poder de cómputo.

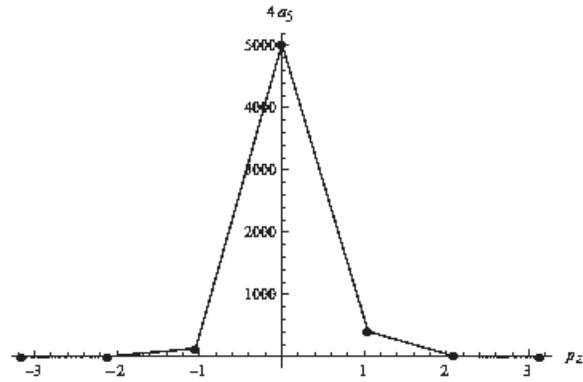
En las figuras 4.5-4.6, en lugar de mostrar el comportamiento de 0 a  $2\pi$ , mostramos el comportamiento de  $-\pi$  a  $\pi$ .<sup>3</sup>

Es evidente que la interacción es máxima cuando el momento de cada partícula incidente es cero, esto nos indica un posible efecto confinamiento a bajas energías, tal como sucede con la interacción fuerte [4]. Una vez más, vemos que la interacción va disminuyendo conforme las energías van aumentando, como se puede ver en las gráficas (4.6). En las gráficas de una red de 7 puntos no se nota mucha información, pero en las redes de once y quince puntos se alcanza a apreciar cierta una simetría en los valores de la amplitud, lo cual es bastante razonable ya que nos indica una simetría de paridad en la interacción.

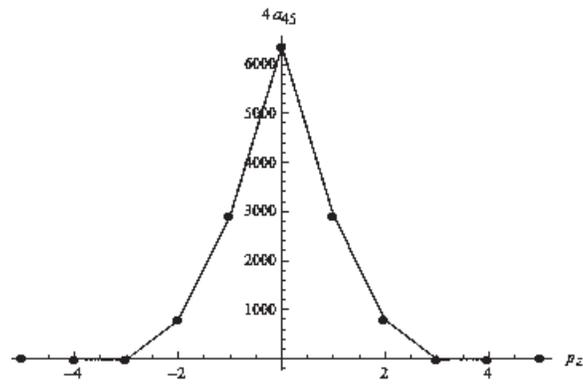
En las figuras (4.7) mostramos el comportamiento de la “constante” de acoplamiento. Es fácil ver que a bajas energías la interacción da origen a un confinamiento que está ligado con una fuerte interacción, mientras que a altas energías tenemos un valor pequeño en la interacción. Por lo visto en las Figs. (4.8), notamos que cuando incrementamos el momento del bosón por la cantidad de 1 (en unidades de red) el valor de la interacción disminuye drásticamente. Por lo que no esperamos recibir mucha información para momentos aún mayores para el bosón. En las figuras 4.9-4.10 mostramos los resultados en el intervalo simétrico  $(-\pi, \pi)$ . Una vez más, podemos ver que el acoplamiento es más grande (en magnitud) a bajas energías. Notemos también que debido a que el acoplamiento es negativo la interacción que tenemos es de atracción. Un problema que aparece cuando graficamos para quince puntos aparecen muchas fluctuaciones que se desconoce si tienen algún sentido físico o si se presentan para una red de mayor volumen, aunado a un posible error numérico en el cálculo. En las figuras (4.11) mostramos la periodicidad de la función de Green para una red de diez puntos con un momento del bosón  $q = 0$ . Una última cosa que notamos es que cuando aumentamos la energía de la partícula incidente tanto la magnitud de la interacción como la del acoplamiento se hacen más pequeños.

---

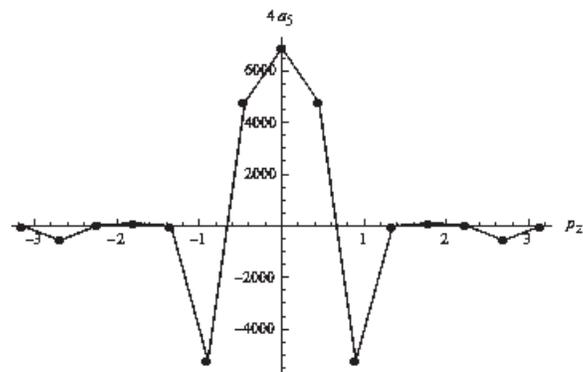
<sup>3</sup>Las líneas punteadas representan valores positivos de  $q$ .



(a) Red de siete puntos

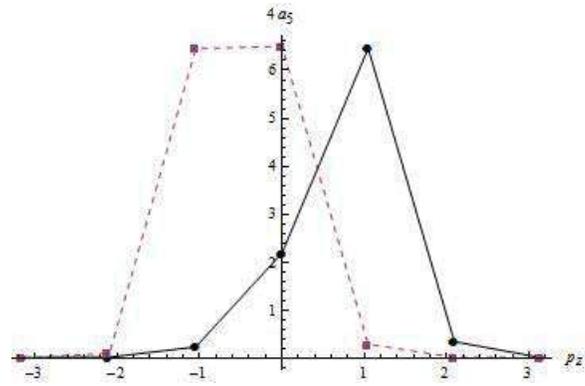


(b) Red de once puntos

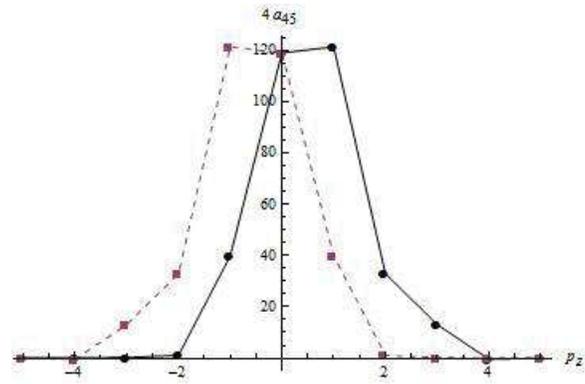


(c) Red de quince puntos

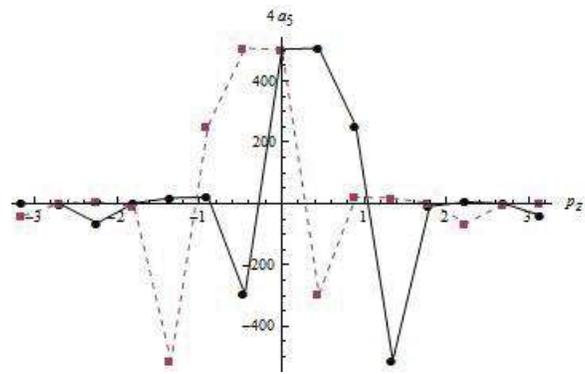
Figura 4.5: Amplitud de interacción con distintos puntos en la red para el momento del bosón  $q=0$



(a) Red de siete puntos

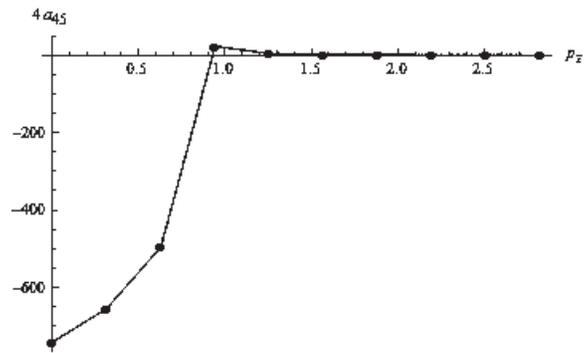


(b) Red de once puntos

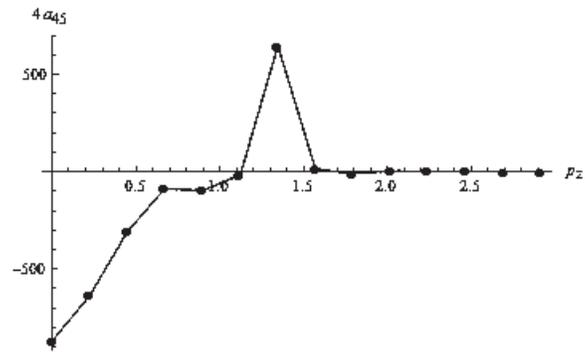


(c) Red de quince puntos

Figura 4.6: Amplitud de interacción con distintos puntos en la red para el momento del bosón  $q=1,-1$ .

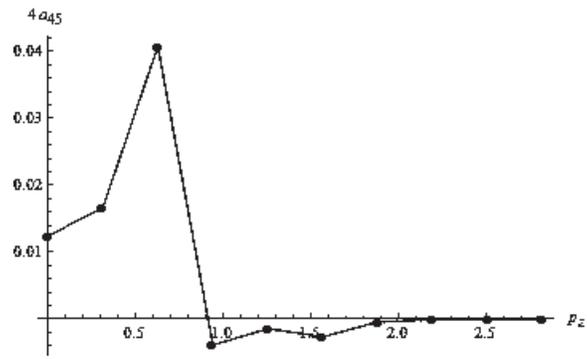


(a) Red de diez puntos

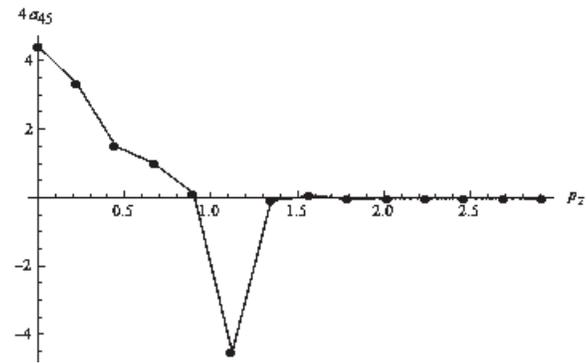


(b) Red de catorce puntos

Figura 4.7: Amplitud de interacción con distintos puntos en la red para el momento del bosón  $q=0$ .

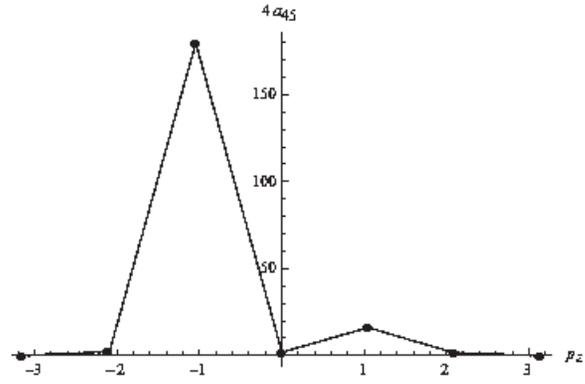


(a) Red de diez puntos

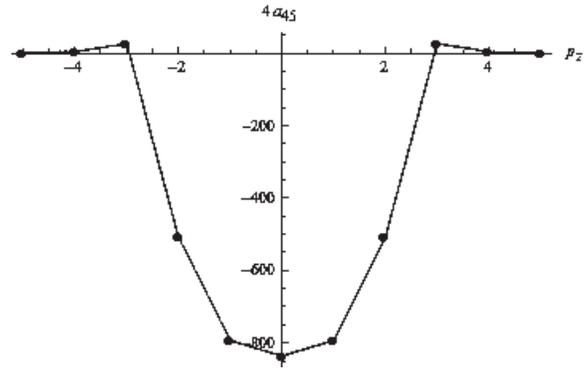


(b) Red de catorce puntos

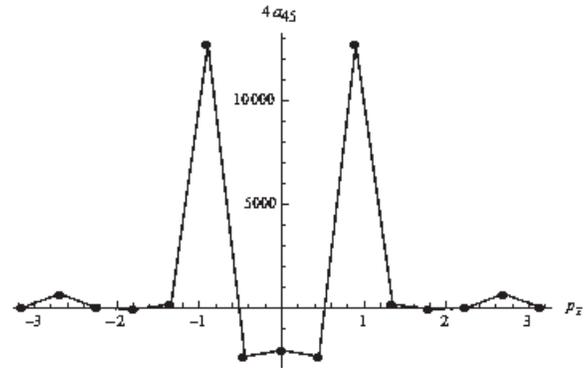
Figura 4.8: Amplitud de interacción con distintos puntos en la red para el momento del bosón  $q=1$ .



(a) Red de siete puntos

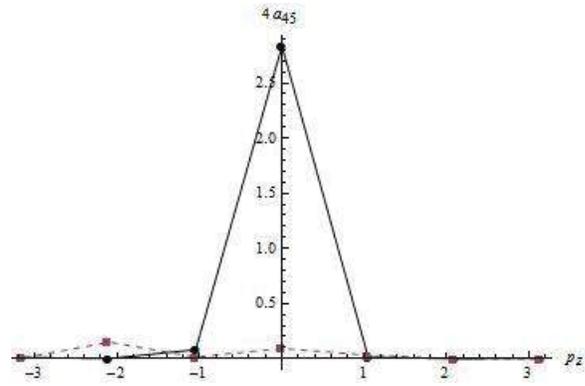


(b) Red de once puntos

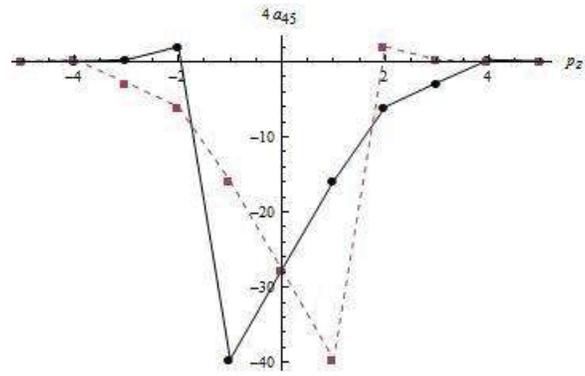


(c) Red de quince puntos

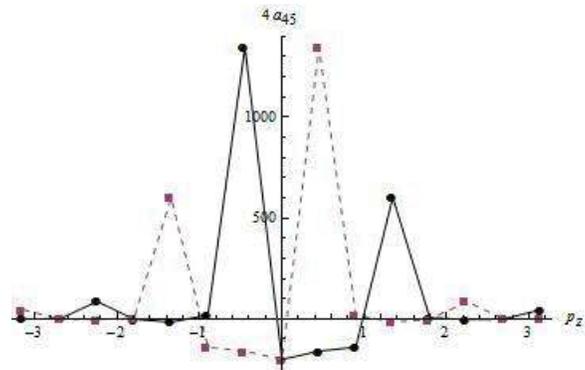
Figura 4.9: Acoplamiento para el momento del bosón  $q=0$



(a) Red de siete puntos

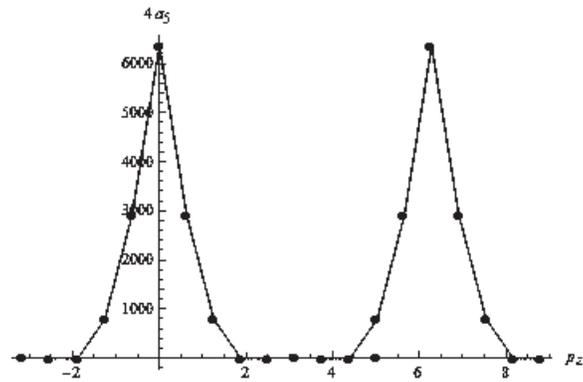


(b) Red de once puntos

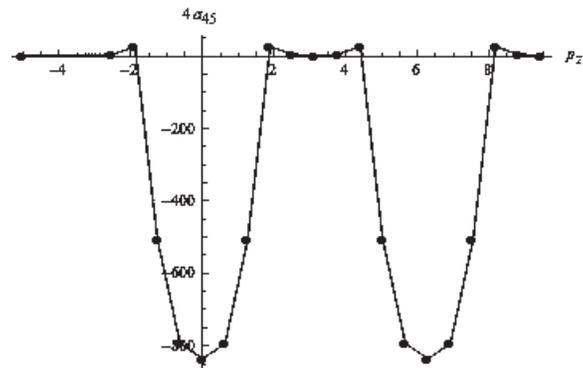


(c) Red de once puntos

Figura 4.10: Acoplamiento para el momento del bosón  $q=1,-1$



(a)



(b)

Figura 4.11: Periodicidad de la función de Green para el momento del bosón  $q = 0$ .

# Capítulo 5

## Conclusiones y consideraciones finales

La *Teoría de Campos en la red* es una técnica propuesta para hacer estudios no perturbativos en teoría de campos, principalmente para cálculos en QCD. El estudio de esta teoría ha mostrado que es necesario tener una discretización cuidadosa en los campos para evitar el problema del doblamiento fermiónico. Un estudio perturbativo de los propagadores fermiónicos es requerido en *Lattice* para verificar que ésta teoría sea consistente. En esta tesis hemos estudiado numéricamente la intensidad del acoplamiento tipo Yukawa, esto es, un acoplamiento de la forma  $\phi\bar{\psi}\gamma^5\psi$  recurriendo a las herramientas que provee la teoría de redes. El acoplamiento puede ser interpretado como un remedio de la interacción entre nucleones, representados por el campo espinorial  $\psi$ , mediados por los piones (el campo  $\phi$ ). Sabemos que los piones son partículas pseudo-escalares y por eso la interacción empleada es mediante la matriz  $\gamma_5$  que da origen a la cantidad pseudo-escalar  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ .

Nuestro estudio es aún incipiente en el sentido de que hace falta llevar a cabo cálculo numéricos en una red con un número más grande de nodos. Sin embargo, nuestros resultados permiten ver cierto comportamiento que, seguramente, se mantendrá cuando se aumente el número de nodos. La característica de nuestros resultados indican que el término dominante corresponde a  $a_5$  (Ecuación (4.20)). En las figuras 4.4-4.10 se muestra el comportamiento de este coeficiente para diferente número de nodos y diferentes momentos. Podemos apreciar de estas figuras que la intensidad del coeficiente se hace más intensa para valores pequeños, pero de los momentos que intervienen en el acoplamiento se indica que la interacción es más fuerte para bajas energías

y ésta se hace muy débil para momentos diferentes de cero.

Una propiedad interesante que debe ser estudiada y que se dejó de lado en esta tesis es el fenómeno de aliasing[13]. Este fenómeno se presenta en situaciones en las que es necesario realizar transformada de Fourier de 3 puntos espacio-temporales que son independientes, como en el caso de las funciones de Green de tres puntos.

Finalmente, queremos mencionar que hasta ahora *Lattice* solo ofrece resultados cualitativos y su aplicación está más centrada en el estudio de QCD, por lo que este trabajo solo sirve como “calentamiento” para llevar a cabo estudio más profundos a *Lattice*. Sin embargo, aún así hemos visto que en una interacción pseudo-escalar en una red relativamente pequeña se tienen resultados físicos razonables.

# Apéndice

# Apéndice A

## Transformada de Fourier en la Red

Recordaremos algunas fórmulas frecuentemente usadas en las transformadas de Fourier discretas. Las ondas planas usuales en un volumen finito con condiciones periódicas de frontera están dadas por:

$$e^{ipx}, \quad P_{m\mu} = n_\mu \frac{2\pi}{L}, \quad (\text{A.1})$$

donde  $n_\mu$  es entero. Queremos usar esas funciones para transformada de Fourier de las variables. En la red los  $x_\mu$  están restringidos a  $x_\mu = m_\mu a$ ,  $m_\mu = 0, \dots, N-1$ ,  $L = Na$ . No debe haber mas  $p_\mu$  que  $x_\mu$ ; tomamos

$$n_\mu = -N/2 + 1, -N/2 + 2, \dots, N/2.. \quad (\text{A.2})$$

En efecto, la longitud de onda más corta y el vector de onda más grande están dados por

$$\lambda_{\min} = 2a, \quad p_{\max} = \frac{\pi}{a} = \frac{N}{2} \frac{2\pi}{L}. \quad (\text{A.3})$$

Además de esos argumentos intuitivos, la razón para (A.2) es el hecho de que

$$U_{mn} \equiv N^{-d/2} e^{i2\pi mn/N} \equiv N^{-d/2} (e^{ipx})_{mn} \quad (\text{A.4})$$

es una matriz unitaria,

$$U_{mn} U_{m'n'}^* = \delta_{n,n'} \quad (\text{A.5})$$

Veamos esto para el caso en una dimensión.

$$U_{mn}U_{mn'}^* = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} r^m = \frac{1}{N} \frac{1-r^N}{1-r} = \bar{\delta}_{n,n'}, \quad (\text{A.6})$$

$$r \equiv e^{i2\pi(n-n')/N}, \quad (\text{A.7})$$

donde

$$\bar{\delta}_{n,n'} \equiv 0, \quad n \neq n' \pmod{N} \quad (\text{A.8})$$

$$= 1, \quad n = n' \pmod{N}. \quad (\text{A.9})$$

usaremos esto en la forma

$$\sum_x e^{-i(p-p')x} = \bar{\delta}_{p,p'} \equiv \prod_{\mu} (N|a_{\mu}| \bar{\delta}_{m_{\mu},m'_{\mu}}), \quad (\text{A.10})$$

$$\sum_p e^{-ip(x-x')} = \bar{\delta}_{x,x'} \equiv \prod_{\mu} (|a_{\mu}|^{-1} \bar{\delta}_{n_{\mu},n'_{\mu}}), \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_x = \prod_{\mu} (|a_{\mu}| \sum_{m_{\mu}}), \quad (\text{A.12})$$

$$\sum_p = \prod_{\mu} \left( \frac{1}{N|a_{\mu}|} \sum_{n_{\mu}} \right), \quad (\text{A.13})$$

donde  $|a_{\mu}|$  es la constante de la red en la dirección  $\mu$ . Con esta notación podemos escribir las transformada de Fourier de las variables (del espacio de las posiciones al espacio de los momentos) y su inversa como

$$\bar{\varphi}_p = \sum_x e^{-ipx} \varphi_x, \quad (\text{A.14})$$

$$\varphi_x = \sum_p e^{ipx} \bar{\varphi}_p. \quad (\text{A.15})$$

Para funciones suaves  $f(p)$  tenemos, en el límite de volumen infinito  $L = Na \rightarrow \infty$ ,

$$\sum_p f(p) = \frac{(\Delta p)^4}{(2\pi)^4} \sum_n f\left(\frac{2\pi n}{Na}\right) \quad (\text{A.16})$$

$$\rightarrow \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} f(p), \quad N \rightarrow \infty, \quad \text{afijo} \quad (\text{A.17})$$

donde  $\Delta p = 2\pi/Na$ .

# Apéndice B

## Cálculo funcional: diferenciación

Cantidades como el propagador

$$\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle = \int Dq \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right] \quad (\text{B.1})$$

son integrales funcionales: la integración se toma sobre todas las funciones  $q(t)$  que inicia en un punto fijo ( $q(t_i)$ ) y termina en otro punto fijo ( $q(t_f)$ ). Como el lado izquierdo es un número, entonces la integral asociada con cada función  $q(t)$  también es un número. Esta integral es *un funcional*, y claramente depende del valor de la función  $q(t)$  en todos los puntos. Esto puede resumirse como

$$\text{funcional} : \text{funcion} \rightarrow \text{numero}. \quad (\text{B.2})$$

Una función, por ejemplo  $f(t) = t^3 + t^2 - 3t$ , tiene un valor (número) para cada valor de  $t$ , que también es un número. Esto es

$$\text{función} : \text{número} \rightarrow \text{número}. \quad (\text{B.3})$$

En lenguaje matemático, los números pertenecen al espacio de los reales  $\mathbb{R}$ , entonces la función  $f$  define un mapeo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{B.4})$$

Pero las funciones no son siempre números, de hecho, una función también puede ser una cantidad vectorial, como el campo eléctrico  $E$ , que pertenece

a  $\mathbb{R}^3$ , y asocia este campo eléctrico con cada punto del espacio en tres dimensiones, por lo que es un mapeo de  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Por otro lado, la función del potencial escalar  $\phi(x)$  define un mapeo  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . En general, tenemos la definición

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (\text{B.5})$$

En física generalmente trabajamos con funciones que son infinitamente diferenciables, que denotamos como  $C^\infty(M)$ , donde  $M$  denota el espacio donde la función está definida. Así un funcional B.2 queda en la forma

$$\text{funcional} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}. \quad (\text{B.6})$$

Debe mencionarse que un funcional no es una función de funciones. Es común denotar un funcional  $F$  de una función  $f$  usando paréntesis cuadrados  $F[f]$ .

Ahora definimos una diferenciación funcional. Con analogía con la diferenciación ordinaria, la derivada de un funcional  $F[f]$  con respecto a la función  $f(y)$  está definida por

$$\frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[f(x)]}{\epsilon}. \quad (\text{B.7})$$

Veamos un ejemplo. Consideremos el funcional

$$F[f(x)] = \int f(x) dx. \quad (\text{B.8})$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\delta F[f(x)]}{\delta f(y)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left\{ \int [f(x) + \epsilon \delta(x - y)] dx - \int f(x) dx \right\} \\ &= \int \delta(x - y) dx \\ &= 1. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Como otro ejemplo, consideremos el funcional

$$F_x[f(y)] = \int G(x, y) f(y) dy. \quad (\text{B.10})$$

Donde  $x$  en el lado izquierdo es considerado como un parámetro. Diferenciamos

$$\begin{aligned}\frac{\delta F_x[f(y)]}{\delta f(z)} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left( \int \{G(x, y)[f(x) + \epsilon \delta(y - z)] dy \right. \\ &\quad \left. - \int G(x, y) f(y) dy \right) \\ &= \int G(x, y) \delta(y - z) dy \\ &= G(x, z).\end{aligned}\tag{B.11}$$

# Apéndice C

## Estados fermiónicos Coherentes

Vamos a derivar la representación en campos para los operadores fermiónicos. En el caso de Bose, la representación en campos fue sólo la representación coordenada que es también muy usada en mecánica cuántica. Para operadores de Fermi el análogo conduce a las llamadas variables de Grassmann. Esto significa que el operador de campo de Fermi  $\hat{\psi}(x)$  será representado por números  $\psi(x)$ , que tienen que ser anticonmutantes. Como esto puede ser no muy familiar, primero vamos a describir como trabaja esto.

Consideremos los operadores cuánticos de Fermi que satisfacen las relaciones de conmutación

$$\{\hat{a}_k, \hat{a}_l\} = 0, \quad \{\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_l^\dagger\} = 0, \quad \{\hat{a}_k, \hat{a}_l^\dagger\} = \delta_{kl} \quad (\text{C.1})$$

donde  $\{A, B\} = AB + BA$ . Más adelante vamos a considerar un número finito  $n$  de esos operadores,  $k = 1, 2, \dots, n$  (en el límite continuo de una red fermiónica en teoría de campos  $n \rightarrow \infty$ ). Varias veces es conveniente usar los  $2n$  operadores de Hamilton equivalentes

$$\hat{a}_k^1 = (\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger)/\sqrt{2}, \quad \hat{a}_k^2 = (\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger)/i\sqrt{2}, \quad (\text{C.2})$$

con las relaciones de conmutación

$$\{\hat{a}_k^p, \hat{a}_l^q\} = \delta_{pq}\delta_{kl}, \quad p, q = 1, 2 \quad (\text{C.3})$$

Los operadores no hermíticos son usados más a menudo.

Es ideal dar un vistazo a la representación en el espacio de Hilbert. Para  $n = 1$  tenemos el "estado no-cuántico"  $|0\rangle$  que por definición es el vector propio de  $\hat{a}$  con valor propio 0,  $\hat{a}|0\rangle = 0$ , y el estado uno-cuántico  $|1\rangle$  obtenido de  $|0\rangle$

por la aplicación de  $\hat{a}^\dagger$ ,  $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$ . Aplicaciones posteriores de  $\hat{a}^\dagger$  en  $|0\rangle$  da cero, como  $(\hat{a}^\dagger)^2 = 0$  por C.1 (nota que  $|1\rangle$  es el estado "no-cuántico" para  $\hat{a}^\dagger$ ). Entonces un par de operadores de Fermi ( $\hat{a}, \hat{a}^\dagger$ ) pueden ser representados en un simple espacio de Hilbert de dos dimensiones,

$$|0\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{a}^\dagger \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

Para  $n > 1$  podemos tomar el producto tensorial de esa representación. Una base en el espacio de Hilbert es provista por

$$|k_1 \cdots k_p\rangle = \hat{a}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{k_p}^\dagger |0\rangle, \quad p = 1, \dots, n, \quad (\text{C.5})$$

con las propiedades

$$\sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \sum_{k_1 \cdots k_p} |k_1 \cdots k_p\rangle \langle k_1 \cdots k_p| = 1, \quad (\text{C.6})$$

$$\langle k_1 \cdots k_p | l_1 \cdots l_q \rangle = \delta_{pq} \delta_{l_1 \cdots l_q}^{k_1 \cdots k_p}, \quad (\text{C.7})$$

donde

$$\delta_{l_1 \cdots l_q}^{k_1 \cdots k_p} = \sum_{\text{perm}\pi} (-1)^\pi \delta_{\pi l_1}^{k_1} \cdots \delta_{\pi l_p}^{k_p}. \quad (\text{C.8})$$

Un estado arbitrario  $|\psi\rangle$  puede escribirse como

$$|\psi\rangle = \psi(\hat{a}^\dagger)|0\rangle, \quad (\text{C.9})$$

$$\psi(\hat{a}^\dagger) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \psi_{k_1 \cdots k_p} \hat{a}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{k_p}^\dagger, \quad (\text{C.10})$$

donde  $\psi_{k_1, \dots, k_p}$  es totalmente antisimétrico en  $k_1, \dots, k_p$  y sumamos sobre índices repetidos a menos que se indique lo contrario. Un operador arbitrario  $\hat{A}$  pues escribirse como

$$\hat{A} = \sum_{pq} \frac{1}{p!q!} A_{k_1 \cdots k_p, l_1, \dots, l_q} \hat{a}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{k_p}^\dagger \hat{a}_{l_q} \cdots \hat{a}_{l_1}, \quad (\text{C.11})$$

donde todos los operadores de creación están acomodados a la izquierda de todos los operadores de aniquilación. Esto es llamado ordenamiento normal de  $\hat{A}$ . Un ejemplo familiar es el operador de número

$$\hat{N} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \quad (\text{C.12})$$

que tiene vectores propios  $|k_1, \dots, k_p\rangle$  con valor propio  $p$ . Notemos que  $A_{k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q}$  es en general no igual a  $\langle k_1, \dots, k_p | \hat{A} | l_1, \dots, l_q \rangle$ . Notemos también que los coeficientes  $A_{k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q}$  son elementos de álgebra de Grassmann, por ejemplo  $\hat{A} = c^+ \hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger c_k$ , donde  $c$  y  $c^+$  anticonmutan.

Supongamos ahora que hay estados propios  $|a\rangle$  de  $\hat{a}_k$  con valor propio  $a_k$ . Entonces se sigue que necesariamente los  $a'_k$ s anticonmutan

$$a_k a_l = -a_l a_k \quad (\text{C.13})$$

Para ver esto, asumimos

$$\hat{a}_k a_l = \epsilon a_l \hat{a}_k \quad (\text{C.14})$$

con  $\epsilon$  algún número  $\neq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} \hat{a}_k \hat{a}_l |a\rangle &= \hat{a}_k a_l |a\rangle = \epsilon a_l \hat{a}_k |a\rangle = \epsilon a_l a_k |a\rangle \\ &= -\hat{a}_l \hat{a}_k |a\rangle = -\epsilon a_k a_l |a\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Por lo tanto C.13 tiene lugar. Los  $a_k$  no pueden ser números ordinarios. Asumiendo  $a_k |a\rangle = +|a\rangle a_k$  se lleva a

$$\begin{aligned} \hat{a}_k a_l |a\rangle &= \hat{a}_k |a\rangle a_l = a_k |a\rangle a_l = a_k a_l |a\rangle \\ &= \epsilon a_l \hat{a}_k |a\rangle = \epsilon a_l a_k |a\rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

se sigue que

$$\epsilon = -1. \quad (\text{C.17})$$

Entonces los “números”  $a_k$  tienen que anticonmutar con los operadores fermiónicos.

También introducimos los  $a_k^\dagger$  anticonmutantes conjugados independientes, asumimos que anticonmutan con los  $a_k$  y los operadores de Fermi, e imponemos las reglas usuales de conjugación Hermítica,

$$\hat{a}_k^\dagger \dagger \rightarrow \hat{a}_k^\dagger, \quad a_k^\dagger \dagger \rightarrow a_k^\dagger, \quad |a\rangle \dagger \rightarrow \langle a|, \quad \langle a | \hat{a}_k^\dagger = \langle a | a_k^\dagger, \quad (\text{C.18})$$

$$a_k a_l \rightarrow a_l^+ a_k^+, \quad \{a_k^+, a_l^+\} = 0. \quad (\text{C.19})$$

La anticonmutatividad de  $a_k^\dagger$  van en la misma forma que la de  $a_k$ .

Los  $\hat{a}_k$  y  $\hat{a}_k^\dagger$  junto con el elemento unidad 1 generan un álgebra de Grassmann. Un elemento arbitrario de está álgebra tiene la forma

$$\begin{aligned} f(a^+, a) &= f_{0,0} + f_{k,0} a_k^+ + f_{0,l} a_l + \frac{1}{2!} f_{k_1 k_2, 0} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \\ &\quad + f_{k,l} a_k^+ a_l + \dots + f_{1\dots n, 1\dots n} a_1^+ \dots a_n^+ a_n \dots a_1, \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Hemos extendido el espacio de Hilbert en un espacio vectorial sobre los elementos de un álgebra de Grassmann.  $\hat{a}_k$  y  $\hat{a}_k^\dagger$  son llamadas las variables de Grassmann y  $f(a^+, a)$  es llamada una función de las variables de Grassmann. Esta nomenclatura podría ser algo engañosa —los generadores  $a_k$  y  $a_k^+$  son objetos fijos y solamente sus índices "k" y "+" son los que varían. Sin embargo, también usaremos otros generadores  $b_k, b_k^+, c_k, \dots$ , y entonces, efectivamente, podemos pintar los elementos de un álgebra de Grassmann con un número infinito de generadores. Es simple construir una representación matricial para esos generadores, pero esto no parece ser útil porque las reglas anteriores son suficientes para nuestros resultados.

Ahora vamos a expresar  $|a\rangle$  en términos de la base vectorial (C.5). El estado  $|a\rangle$  está dado por

$$|a\rangle = e^{-a_k \hat{a}_k^\dagger} |0\rangle. \quad (\text{C.21})$$

Ciertamente, como  $(a_k)^2 = 0$

$$e^{-a_k \hat{a}_k^\dagger} = \prod_k e^{-a_k \hat{a}_k^\dagger} = \prod_k (1 - a_k \hat{a}_k^\dagger), \quad (\text{C.22})$$

y usando  $\hat{a}_k(1 - a_k \hat{a}_k^\dagger)|0\rangle = a_k \hat{a}_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle = a_k |0\rangle$  (no suma sobre  $k$ ) da

$$\begin{aligned} \hat{a}_k |a\rangle &= \left[ \prod_{l \neq k} (1 - a_l \hat{a}_l^\dagger) \right] \hat{a}_k (1 - a_k \hat{a}_k^\dagger) |0\rangle = \left[ \prod_{l \neq k} (1 - a_l \hat{a}_l^\dagger) \right] a_k |0\rangle \\ &= a_k |a\rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Nota que  $a_k$  conmuta con objetos de fermiones pares, ejemplo,  $[a_k, a_l \hat{a}_m^\dagger] = 0$ . Dos estados  $|a\rangle$  y  $|b\rangle$  tienen el producto interno

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle &= \langle 0|(1 - \hat{a}_1 a_1^+) \cdots (1 - \hat{a}_n a_n^+) (1 - b_n \hat{a}_n^\dagger) \cdots (1 - b_1 \hat{a}_1^\dagger) \\ &= \prod_k (1 + a_k^+ b_k) \\ &= e^{a^+ b}, \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

donde

$$a^+ b \equiv a_k^+ b_k \quad (\text{C.25})$$

Gustaríamos una relación de completitud de la forma

$$\hat{1} = \int da^+ da \frac{|a\rangle \langle a|}{\langle a|a\rangle}. \quad (\text{C.26})$$

Para  $n = 1$  esta relación se lee

$$\begin{aligned}
\hat{1} &= |0\rangle\langle 0| + \hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{a} \\
&= \int da^+ da (1 - a^+ a)(1 - a\hat{a}^\dagger)|0\rangle\langle 0|(1 - \hat{a}a^+) \\
&= \int da^+ da [(1 - a^+ a)|0\rangle\langle 0| - a\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 0| \\
&\quad + a^+|0\rangle\langle 0|\hat{a} + aa^+\hat{a}^\dagger|0\rangle\langle 0|\hat{a}], \tag{C.27}
\end{aligned}$$

que se satisface si definimos la integral de Berezin:

$$\int da = 0, \quad \int da^+ = 0, \quad \int daa = 1, \quad \int da^+a^+ = 1, \tag{C.28}$$

donde  $da$  y  $da^+$  son tomados anticonmutantes. Para una  $n$  general definimos

$$da = da_1 \cdots da_n, \quad da^+ = da_n^+ \cdots da_1^+, \tag{C.29}$$

$$\int da_k = 0, \quad \int da_k a_k = 1, \quad \int da_k^+ = 0, \quad \int da_k^+ a_k^+ = 1 \tag{C.30}$$

(no suma sobre  $k$ ;  $da$ 's y  $da^+$ 's anticonmutantes). El símbolo de integral simboliza la integración Grassmanniana, que tiene algunas similitudes a la integración ordinaria (y diferenciación (C.42)). Un chequeo engorroso del signo menos puede ser evitado combinando cada  $da_k$  con  $da_k^+$  en pares conmutantes, como en la notación

$$da^+ da \equiv \prod_{k=1}^n da_k^+ da_k \tag{C.31}$$

que usaremos en adelante. Apareamiento similar será hecho más adelante. Checamos la relación de completez (C.26) para un  $n$  general para verificar que da la respuesta correcta para un producto interno arbitrario  $\langle \psi | \phi \rangle$ . Multiplicando (C.9) por (C.26) obtenemos

$$|\psi\rangle = \int da^+ da e^{-a^+ a} \psi(a^+) |a\rangle, \tag{C.32}$$

$$\psi(a^+) = \langle a | \psi \rangle = \sum_p \frac{1}{p!} \psi_{k_1 \cdots k_p} a_{k_1}^+ \cdots a_{k_p}^+. \tag{C.33}$$

El producto interno toma la forma

$$\begin{aligned}
\langle \psi | \phi \rangle &= \int da^+ dae^{-a^+ a} \psi(a^+)^\dagger \phi(a^+) \\
&= \sum_{pq} \frac{1}{p!q!} \psi_{k_1 \dots k_p}^* \dots \psi_{k_p \dots k_p}^* \phi_{l_1} \dots \phi_{l_q} \\
&\quad \times \int da^+ dae^{-a^+ a} a_{k_p} \dots a_{k_1} a_{l_1}^+ \dots a_{l_q}^+. \tag{C.34}
\end{aligned}$$

Por (C.28) la integral es no cero solo si  $p = q$  y  $(k_1, \dots, k_p) = (l_1, \dots, l_q)$  sobre una permutación

$$\begin{aligned}
\int da^+ dae^{-a^+ a} a_{k_p} \dots a_{k_1} a_{k_1}^+ \dots a_{k_p}^+ &= \prod_{l \neq k_1, \dots, k_p} \int da_l^+ da_l e^{-a_l^+ a_l} \\
&\quad \times \prod_{m=k_1, \dots, k_p} \int da_m^+ da_m a_m a_m^+ \\
&= 1, \tag{C.35}
\end{aligned}$$

y

$$\int da^+ dae^{-a^+ a} a_{k_p} \dots a_{k_1} a_{l_1}^+ \dots a_{l_q}^+ = \delta_{pq} \delta_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}, \tag{C.36}$$

Por lo tanto, (C.34) da

$$\langle \psi | \phi \rangle = \sum_p \frac{1}{p!} \psi_{k_1 \dots k_p}^* \phi_{k_1 \dots k_p} \tag{C.37}$$

que es la respuesta correcta. Por lo tanto, (C.26) es correcto para un  $n$  general. La conexión entre integración y diferenciación Grassmanniana puede ser vista como sigue. Diferenciación derecha e izquierda puede ser definida por mirar los términos lineales en una traslación sobre un fermión  $b_k$ ,

$$f(a + b) = f(a) + b_k f_k^L(a) + \frac{1}{2} b_k b_l f_{kl}^L(a) + \dots \tag{C.38}$$

$$= f(a) + f_k^R(a) b_k + \frac{1}{2} f_{kl}^R b_k b_l + \dots, \tag{C.39}$$

que sugiere

$$\frac{\partial}{\partial a_k} f(a) := f_k^L(a), \tag{C.40}$$

$$f(a) \frac{\partial^R}{\partial a_k} := f_k^R(a) \tag{C.41}$$

(la extensión a funciones de  $a$  y  $a^+$  es obvia). Se sigue que la integración es diferenciación por la izquierda:

$$\int da_k f(a) = \frac{\partial}{\partial a_k} f(a) \quad (\text{C.42})$$

Ahora vamos a derivar más propiedades importantes de la integración Grassmanniana. Sea  $f(a, a^+)$  un elemento arbitrario del álgebra de Grassmann de la forma C.20. Entonces

$$\int da^+ da f(a^+, a) = f_{1\dots n, 1\dots n}. \quad (\text{C.43})$$

Se sigue que la integración es invariante bajo traslaciones,

$$\int da^+ da f(a^+ + b^+, a + b) = \int da^+ da f(a^+, a) \quad (\text{C.44})$$

Además, para una matriz arbitraria  $M$ ,

$$\begin{aligned} \int da^+ da e^{-a^+ M a} &= \int da^+ da \frac{(-1)^n}{n!} (a^+ M a)^n \\ &= \int da^+ da \frac{1}{n!} M_{k_1 l_1} \cdots M_{k_n l_n} a_{l_1} a_{k_1}^+ \cdots a_{l_n} a_{k_n}^+ \\ &= \frac{1}{n!} M_{k_1 l_1} \cdots M_{k_n l_n} \delta_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_n}. \end{aligned} \quad (\text{C.45})$$

Usando la identidad

$$\epsilon_{k_1 \dots k_n} \epsilon_{l_1 \dots l_n} = \delta_{l_1 \dots l_n}^{k_1 \dots k_n}, \quad (\text{C.46})$$

donde  $\epsilon_{k_1 \dots, k_n}$  es el tensor  $n$ -dimensional  $\epsilon$  (con  $\epsilon_{1\dots n} = +1$ ) obtenemos la fórmula

$$\int da^+ da e^{-a^+ M a} = \det M \quad (\text{C.47})$$

como

$$\det M = M_{1l_1} \cdots M_{nl_n} \epsilon_{l_1 \dots l_n} \quad (\text{C.48})$$

La fórmula más general

$$\int da^+ da e^{-a^+ M a + a^+ b + b^+ a} = \det M e^{b^+ M^{-1} b} \quad (\text{C.49})$$

sigue de la invariancia traslacional (C.44) por hacer la traslación  $a^+ \rightarrow a^+ + b^+ M^{-1}$ ,  $a \rightarrow a + M^{-1}a$ . Nota que (C.49) permanece bien definida si  $\det M \rightarrow 0$ .

Podemos interpretar (C.44) como una invariancia de traslación de la medida fermiónica,

$$da^+ = d(a^+ + b^+), \quad da = d(a + b). \quad (\text{C.50})$$

Una transformación multiplicativa lineal de variables

$$a_k \rightarrow T_{kl}a_l, \quad a_k^+ \rightarrow a_l^+ S_{lk} \quad (\text{C.51})$$

tiene el efecto

$$d(a^+ S) = (\det S)^{-1} da^+, \quad d(Ta) = (\det T)^{-1} da, \quad (\text{C.52})$$

es decir

$$\int da^+ da f(a^+ S, Ta) = \det(ST) \int da^+ da f(a^+, a). \quad (\text{C.53})$$

Esto sigue fácilmente de (C.43) y (C.48). De acuerdo a (C.52), la medida fermiónica se transforma inversamente a la medida bosónica  $dx : d(Tx) = \det T dx$ .

Notamos que al pasar a la fórmula

$$\int da e^{\frac{1}{2} a^T M a} = \pm \sqrt{\det M} \quad (\text{C.54})$$

donde  $T$  denota una transposición y  $M$  es una matriz antisimétrica (en este caso solo la parte antisimétrica de  $M$  contribuye). Esta fórmula sigue de (C.47) haciendo una transformación de variables

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_k^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ c_k \end{pmatrix} \quad (\text{C.55})$$

que conduce a

$$\det M = (-1)^{n/2} \int db e^{\frac{1}{2} a^T M a} \int dc e^{\frac{1}{2} b^T M b}, \quad (\text{C.56})$$

donde asumimos a  $n$  par (en otro caso  $\det M = 0$ ). Como es obvio del lado izquierdo de (C.54), la raíz cuadrada del determinante de una matriz antisimétrica es multilineal en sus elementos de matriz. Es llamado un Pfaffiano.

Estados  $|\psi\rangle$  son representados por funciones de ondas de Grassmann  $\psi(a^+)$  que dependen solo de los  $a_k^+$  (C.33). La representación de operadores  $\hat{A}$  depende en general también de  $a_k$ :

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle =: A(a^+, a). \quad (\text{C.57})$$

En el ordenamiento normal de (C.11),  $A(a^+, a)$  es obtenido de  $\hat{A}$  por reemplazar todos los operadores por su representativo de Grassmann, manteniendo el mismo orden, y multiplicando por  $ea^+a$

$$A(a^+, a) = e^{a^+a} \sum_{pq} \frac{1}{p!q!} A_{k_1 \dots k_p, l_1 \dots l_q} a_{k_1}^+ \dots a_{k_p}^+ a_{l_q} \dots a_{l_1}. \quad (\text{C.58})$$

$ea^+a$  viene del factor de normalización  $\langle a|a\rangle$ .

Ahora es simple derivar las siguientes reglas

$$\begin{aligned} A\psi(a^+) &:= \langle a|\hat{A}|\psi\rangle \\ &= \int db^+ db e^{-b^+b} A(a^+, b)\psi(b^+), \end{aligned} \quad (\text{C.59})$$

$$\begin{aligned} AB(a^+, a) &:= \langle a|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle \\ &= \int db^+ db e^{-b^+b} A(a^+, b)B(b^+, a), \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A(\hat{a}^+, \hat{a}), \quad \hat{B} = B(\hat{a}^+), \quad \hat{C} = C(\hat{a}) \\ \Rightarrow BAC(a^+, a) &= B(a^+)A(a^+, a)C(a). \end{aligned} \quad (\text{C.61})$$

Una identidad útil es

$$\hat{A} = \exp[\hat{a}_k^\dagger M_{kl} \hat{a}_l] \Rightarrow A(a^+, a) \exp[a_k^+ (e^M)_{kl} a_l]. \quad (\text{C.62})$$

La identidad puede ser derivada con los bien conocidos trucos de integración/diferenciación. Sea  $F(t)$  dado por:

$$F(t) = \langle a|e^{t\hat{a}^\dagger M \hat{a}}|a\rangle. \quad (\text{C.63})$$

Para calcular  $F(1) = A(a^+, a)$  diferenciamos con respecto a  $t$  y subsecuente-mente integramos, con la condición inicial  $F(0) = \exp(a^+, a)$ .

Diferenciación da

$$F'(t) = \langle a|\hat{a}^\dagger M \hat{a} e^{t\hat{a}^\dagger M \hat{a}}|a\rangle = a_k^+ M_{kl} \langle a|\hat{a}_l e^{t\hat{a}^\dagger M \hat{a}}|a\rangle. \quad (\text{C.64})$$

El  $\hat{a}_l$  necesita ser jalado a través de la exponencial para que podamos usar  $\hat{a}_l|0\rangle = a_l|0\rangle$ . Para esto usamos un truco de diferenciación similar:

$$\begin{aligned}
\hat{G}_l(t) &\equiv e^{-t\hat{a}^\dagger M\hat{a}}\hat{a}_l e^{t\hat{a}^\dagger M\hat{a}}, \\
\hat{G}'_l &= e^{-t\hat{a}^\dagger M\hat{a}}[\hat{a}_l, \hat{a}^\dagger M\hat{a}]e^{-t\hat{a}^\dagger M\hat{a}} = M_{lm}\hat{G}'_m(t), \quad \hat{G}(0) = \hat{a}_l, \\
\hat{G}_l(t) &= (e^{tM})_{lm}\hat{a}_m, \\
\hat{a}_l e^{t\hat{a}^\dagger M\hat{a}} &= e^{t\hat{a}^\dagger M\hat{a}}(e^{tM})_{lm}\hat{a}_m.
\end{aligned} \tag{C.65}$$

La ecuación diferencial para  $F(t)$  ahora se lee

$$F'(t) = a_k^+ M_{kl} \langle a | e^{t\hat{a}^\dagger M\hat{a}} | a \rangle (e^{tM})_{lm} a_m = (a^+ e^{tM} a)' F(t), \tag{C.66}$$

con la solución

$$F(t) = \exp(a^+ e^{tM} a), \quad A(a^+, a) = F(1) = \exp(a^+ e^M a). \tag{C.67}$$

Enseguida vamos a derivar una fórmula importante para la traza de un operador fermiónico. Es usualmente suficiente considerar solo operadores par, es decir, operadores que contienen solo términos con un número par de operadores fermiónicos o variables fermiónicas. Como  $\hat{A}$  y también su representativo  $A(a^+, a)$  conmutan con números anticonmutantes arbitrarios, por ejemplo  $A(a^+, b)c_k = +c_k A(a^+, b)$ . La fórmula lee

$$\text{Tr}\hat{A} = \int da^+ dae^{-a^+ a} A(a^+, -a). \tag{C.68}$$

Para  $\hat{A}$  par. Esta fórmula para la traza puede ser derivada como sigue

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\hat{A} &= \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \sum_{k_1 \dots k_p} \langle k_1 \dots k_p | \hat{A} | k_1 \dots k_p \rangle \\
&= \int (da^+ da)(db^+ db) e^{-a^+ a - b^+ b} \\
&\quad \sum_p \frac{1}{p!} \sum_{k_1 \dots k_p} \langle k_1 \dots k_p | a \rangle \langle a | \hat{A} | b \rangle \langle b | k_1 \dots k_p \rangle \\
&= \int (da^+ da)(db^+ db) e^{-a^+ a - b^+ b} \sum_p \frac{1}{p!} a_{k_p} \dots a_{k_1} A(a^+, b) b_{k_1}^+ \dots b_{k_p}^+ \\
&= \int (da^+ da)(db^+ db) e^{-a^+ a - b^+ b} \sum_p \frac{1}{p!} a_{k_p} \dots a_{k_1} b_{k_1}^+ \dots b_{k_p}^+ A(a^+, b) \\
&= \int (da^+ da)(db^+ db) e^{-a^+ a - b^+ b} e^{a_k b_k} A(a^+, b) \\
&= (-1)^n (da^+ db) e^{a^+ b} A(a^+, b) \\
&= \int (da^+ db) e^{-a^+ b} A(a^+, -b) \tag{C.69}
\end{aligned}$$

que es el resultado deseado. Integramos sobre  $a$  y  $b^+$  usando  $(da^+ da) \times (db^+ db) = (-1)^n (da^+ db)(db^+ da)$  y C.49. En la última línea hicimos la sustitución  $b \rightarrow -b$  usando (C.52).

# Bibliografía

- [1] Stefano Capitani (DESY, Zeuthen & NIC, Zeuthen), *Lattice Perturbation Theory*, DESY-02-185, Nov 2002. 217pp, Published in Phys.Rept.382:113-302,2003. arXiv:hep-lat/0211036v2.
- [2] J. Phys. G: Nuclear and Particles, 37, 1 (2010).
- [3] Michio Kaku, *Quantum Field Theory: A Modern Introduction*, Oxford University Press, 1993, New York Oxford, USA.
- [4] Lewis H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, 1985, Cambridge, UK.
- [5] Goldstein H., Poole Charles, Safko John *Classical Mechanics*, Addison Wesley, (19–), New York, USA.
- [6] Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F., *Quantum Mechanics, vol 1*
- [7] George Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Third Edition, ACADEMIC PRESS, INC., 1985, San Diego California, USA.
- [8] Jan Smit, *Introduction to Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 2002, Cambridge, UK.
- [9] Kleinert Hagen Kleinert, *Particles And Quantum Fields*, Freie Universität Berlin, 1996, Berlin, DE.
- [10] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (1995), Addison-Wesley Publishing Company,
- [11] Brian Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings* , Cambridge Massachusetts, 1991

- [12] Greiner W., *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer (2000)
- [13] R.G. Campos and E.S. Tútuti, *Aliasing modes in the lattice Schwinger model*, Phys. Lett. A361, (2007) 1-5. doi:10.1016/j.physleta.2006.09.019, arXiv:hep-lat/0603009v3