



**UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO**

**Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas**  
*“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”*

**Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff  
para estrellas compactas, representación  
paramétrica e influencia de la constante  
cosmológica**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**LIC. EN CIENCIAS FÍSICO  
MATEMÁTICAS**

PRESENTA

**JOSÉ JUAN GONZÁLEZ AVILÉS**

ASESOR

**DR. ALFREDO RAYA MONTAÑO**

MORELIA, MICH., AGOSTO DE 2011.

# Agradecimientos

La elaboración de esta tesis, si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación, no hubiese sido posible su finalización sin la cooperación desinteresada de todas y cada una de las personas que han sido un soporte muy fuerte en momentos de angustia y desesperación. Por ello, es para mí un verdadero placer utilizar este espacio para ser justo y consecuente con ellas, expresándoles mis agradecimientos.

Debo agradecer de manera especial y sincera al Dr. Alfredo Raya Montaña. Su apoyo y confianza en mi trabajo y su capacidad para guiar mis ideas ha sido un aporte invaluable, no solamente en el desarrollo de esta tesis, sino también en mi formación académica. Le agradezco también el haberme facilitado siempre los medios suficientes para llevar a cabo todas las actividades propuestas durante el desarrollo de esta tesis.

Le agradezco también a los Drs. Joaquín Estevez Delgado, Alberto Mendoza Suárez, Isidro Aranda Sánchez, Fernando Iguazú Ramírez Zavaleta, y a la Dra. Mary Carmen Peña Gomar, por su disposición para revisar esta tesis, haciendo observaciones y correcciones de manera oportuna.

También agradezco de manera especial a los Drs. Carlos Calcaneo-Roldan, Francisco Siddhartha Guzmán Murillo y Francisco Astorga, por sus atinadas observaciones para la culminación de esta tesis.

Quiero agradecer hoy y siempre a mi familia que siempre ha procurado de mi bienestar, y es claro que si no fuese por el esfuerzo realizado por ellos, mis estudios no hubiesen sido posibles.

A mis padres José, María Rosa, por su ejemplo de honestidad y dedicación. A mis hermanos Mauricio y Rosa Leticia, por el ejemplo que me han dado de ser profesionistas. También agradezco a mi primo Gilberto, por la amistad que me ha brindado. En general agradezco a todos mis familiares cercanos, que no menciono aquí.

A mi novia Ana Isabel, por ser la persona que ha compartido su tiempo a mi lado, motivándome para poder seguir adelante en cualquier problema que atraviere.

A mis compañeros y amigos, Juan Salvador, Khépani, Saúl, Valentin, Geovani, Raúl Alejandro, Luis Fernando, Manuel, Carlos, Rafael, y a todos con los que alguna vez compartí algún curso en la facultad. Gracias por brindarme su amistad durante estos años.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la UMSNH por haber contribuido a mi formación y por las facilidades y atenciones prestadas para la elaboración de este trabajo. Agradezco también de manera especial a todos los profesores que me transmitieron sus valiosos conocimientos durante mi estadia en la facultad.

Finalmente agradezco a todos aquellos que me han brindado su amistad y a quienes han ayudado directa o indirectamente a que esta tesis pudiera realizarse, y a quienes no menciono no por falta de memoria sino por que este espacio es limitado.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Astrofísica de las Estrellas Compactas</b>	<b>4</b>
2.1. Estrellas Compactas . . . . .	4
2.1.1. Enanas Blancas . . . . .	6
2.1.2. Estrellas de Neutrones . . . . .	9
2.2. Constante Cosmológica . . . . .	13
<b>3. Las Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)</b>	<b>20</b>
3.1. Solución de las Ecuaciones de TOV con Densidad Constante .	21
3.2. El límite superior de la masa de las estrellas . . . . .	23
3.3. El radio de Schwarzschild . . . . .	25
3.4. El límite Newtoniano . . . . .	25
3.5. Solución de las Ecuaciones TOV con una Constante Cosmológica	30
3.6. Derivación alternativa de la Presión con Constante Cosmológica	35
3.7. El límite superior para la masa . . . . .	39
<b>4. Soluciones Numéricas para Estrellas Enanas Blancas</b>	<b>42</b>
4.1. Estructura de las Ecuaciones Adimensionales . . . . .	42
4.2. Integración Numérica . . . . .	44
4.3. Condiciones Iniciales . . . . .	45
4.3.1. El Caso Relativista . . . . .	45
4.3.2. El Caso no Relativista . . . . .	45
4.4. Resultados de la Integración Numérica . . . . .	46
<b>5. Soluciones Numéricas para Estrellas de Neutrones</b>	<b>51</b>
5.1. Estructura Adimensional de las Ecuaciones . . . . .	52
5.2. Condiciones Iniciales . . . . .	52

5.2.1. El Caso no Relativista . . . . .	52
5.2.2. El Caso Relativista . . . . .	53
5.3. Resultados Numéricos para Estrellas de Neutrones . . . . .	53
<b>6. La Ecuación de Estado para la Relatividad Arbitraria</b>	<b>56</b>
6.1. Enanas Blancas . . . . .	56
6.1.1. El Modelo del Gas de Fermi para Electrones . . . . .	56
6.1.2. Modelo Politrópico . . . . .	59
6.2. Estrellas de Neutrones . . . . .	60
6.3. Masa Máxima . . . . .	69
6.4. Estrellas de Neutrones con Constante Cosmológica . . . . .	70
<b>7. Soluciones Paramétricas de las Ecuaciones de TOV</b>	<b>74</b>
7.1. Soluciones Paramétricas para las Estrellas de Neutrones con Constante Cosmológica . . . . .	74
<b>8. Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>82</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>84</b>
Derivación de las Ecuaciones de TOV . . . . .	84
<b>Apéndice B</b>	<b>88</b>
Símbolos y definiciones . . . . .	88
<b>Apéndice C</b>	<b>89</b>
Programas hechos en Mathematica . . . . .	89

# Capítulo 1

## Introducción

Una estrella se modela como una esfera de plasma, que mantiene su forma gracias a un equilibrio de fuerzas, denominado equilibrio hidrostático. El equilibrio se produce esencialmente entre la fuerza de gravedad, que empuja la materia hacia el centro de la estrella, y la presión que empuja el plasma hacia fuera producto de reacciones nucleares que ocurren al interior, que tal como sucede en un gas, tiende a expandirlo. Las estrellas se pueden clasificar mediante el diagrama de Hertzsprung-Russell (diagrama H-R), el cual es un gráfico de dispersión de las estrellas que muestra la relación entre las magnitudes de las estrellas o luminosidad en comparación con los tipos espectrales o clasificaciones y las temperaturas efectivas. Las estrellas tienen diferentes tamaños, el más pequeño ni siquiera merece el nombre, puesto que la presión y la temperatura en su interior no son suficientes para iniciar la fusión. Otras estrellas son enormes y agotan su energía rápidamente. Como las reacciones de fusión termonuclear ocurren en el núcleo de una estrella, la presión térmica disminuye. Finalmente, un punto crítico se alcanza cuando la fuerza de gravedad ya no está equilibrada por la presión térmica, entonces la estrella empieza a colapsar. Si la estrella es un par de veces más masiva que el Sol, el colapso finalmente se detiene debido a la presión de degeneración de los electrones, y se forma lo que se conoce como una enana blanca. Si la estrella es más masiva, alrededor de diez masas solares, el colapso continúa hasta que el núcleo atómico comienza a superponerse y el núcleo se estabiliza como una estrella de neutrones densa. La energía gravitacional liberada cuando el núcleo colapsa en una estrella de neutrones produce una explosión gigante, es decir una supernova, que expulsa las capas externas de la estrella.

Para las estrellas progenitoras extremadamente masivas, se supone que el colapso conduce a la formación de un agujero negro.

Las enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros son objetos extremadamente densos, llamados objetos compactos, los cuales se quedan en los escombros cuando las estrellas normales mueren.

La importancia en el estudio de las estrellas compactas, se debe a que estas estrellas presentan características extremas, tales como densidades altas y temperaturas bajas. Además, su estudio nos permite analizar el comportamiento de los componentes microscópicos de estas estrellas, considerándolos como un gas de fermiones [1]. El estudio desde el punto de vista microscópico nos permite entender el carácter cuántico que presentan las estrellas compactas, es decir, aunque sean objetos macroscópicos, tienen un carácter cuántico que se ve reflejado en que su presión se debe principalmente a la presión de degeneración de los fermiones. Se ha estudiado que los núcleos de las estrellas de neutrones pueden ser estrellas de quarks, las cuales presentan características que nos permiten estudiarlas desde el punto de vista de la cromodinámica cuántica. Por todo lo anterior, nos damos cuenta que el estudio de las estrellas compactas tiene un carácter multidisciplinario.

El campo de estudio de las estrellas compactas es multidisciplinario, ya que están interesados en su estudio los astrofísicos, astrónomos, cosmólogos, y actualmente también los físicos de partículas. Es importante remarcar que la mezcla de ideas de toda la comunidad científica que se dedica al estudio de las estrellas compactas, han dado excelentes resultados para el entendimiento actual de tales objetos.

Las estrellas compactas se estudian mediante las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV), provenientes de la Relatividad General y que nos permiten calcular la presión como función del radio de un objeto isotrópico con simetría esférica, que está en equilibrio gravitacional.

En este trabajo, resolvemos las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para estrellas compactas (enanas blancas y estrellas de neutrones). Estos objetos poseen una masa máxima que depende de su radio, porque para un cierto valor nos indicará que la estrella colapsará, como en el caso de la estrella de neutrones que colapsará en un agujero negro o una estrella de

quarks. Incluimos en nuestro análisis la influencia de la constante cosmológica  $\Lambda$  en el radio y la masa de estos objetos [4]. De acuerdo a las observaciones sobre el valor de  $\Lambda$ , esta no tiene un efecto en estrellas compactas.

La contribución original en este trabajo consiste en que logramos una parametrización “fenomenológica” de la forma  $p(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c$  de las soluciones de la ecuación de TOV para una ecuación de estado (EDE)  $\epsilon = A_{NR}p^{\gamma_1} + A_{RP}p^{\gamma_2}$ , donde  $\gamma_1 = 3/5$  y  $\gamma_2 = 1$ . Esta parametrización permite calcular radios de manera analítica y masas de manera semianalítica para las estrellas de neutrones con la presencia de la constante cosmológica.

La tesis está organizada de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se estudian las características de las estrellas compactas, específicamente a las enanas blancas y las estrellas de neutrones. Así como también se analiza la constante cosmológica.

En el capítulo 3 se estudian las soluciones analíticas de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para el caso de estrellas con densidad de materia constante.

En el capítulo 4 se estudian las soluciones numéricas de las ecuaciones del equilibrio hidrostático para las masas y los radios de las enanas blancas, tanto para el caso relativista y no relativista.

En el capítulo 5 se encontrarán numéricamente las masas y los radios para las estrellas de neutrones.

En el capítulo 6 se encontrará una ecuación de estado para un gas de electrones y neutrones para enanas blancas y estrellas de neutrones respectivamente. Dicha ecuación de estado será útil para los casos relativista y no relativista.

En el capítulo 7 escribiremos de manera paramétricas las soluciones de las ecuaciones de TOV, usando una función para la presión  $p(r)$  de la forma  $p(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c$ .

Las conclusiones se presentan en el capítulo 8.

# Capítulo 2

## Astrofísica de las Estrellas Compactas

### 2.1. Estrellas Compactas

La literatura sobre la evolución y clasificación de las estrellas, tanto pedagógica [1],[2] como especializada, es vasta. Nosotros hemos elegido seguir el trabajo [4] y las referencias que ahí se señalan.

La teoría sobre formación estelar establece que las estrellas se forman a partir de nubes de gas en el espacio donde la densidad de materia es ligeramente más alta que en sus alrededores. La atracción gravitacional en estas formaciones de nubes desiguales causan que la materia se junte en esferas. Si estas esferas consisten en una cantidad suficientemente grande de materia, esto hace posible que la atracción gravitacional libere energía suficiente, de forma que la temperatura se incremente y, de esa manera, comience el proceso de fusión en sus núcleos. La fusión del hidrógeno en helio en la cadena protón-protón conduce a que la energía sea liberada. Después la concentración de helio se vuelve tan grande que interfiere con esta cadena, la fusión cesa, y la estrella pierde en su exterior la presión causada por la radiación de la fusión. La estrella empieza a colapsar, la energía gravitacional se libera, y su tamaño aumenta. La estrella ahora es una gigante roja. Este proceso de formación se ilustra en la Figura 2.1.

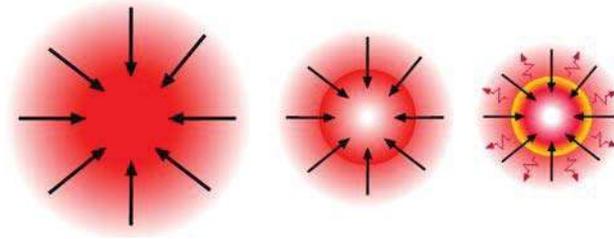


Figura 2.1: En un primer momento, la nube colapsa y la radiación escapa libre. En la segunda etapa se forma un núcleo más denso y opaco a la radiación, lo cual hace que se caliente. Finalmente, la caída de material sobre ese núcleo calienta su superficie, por lo que la protoestrella empieza a emitir radiación [10].

La combustión del hidrógeno es seguida por la fusión de núcleos más pesados, es decir, el proceso triple-alfa donde el oxígeno se produce.

Para las estrellas con la masa más pequeña, la inestabilidad producida por el proceso triple-alfa enfriará las capas externas de la estrella, y se producirá la energía cinética suficiente para ser expulsadas como nebulosas planetarias. El remanente es una enana blanca (ver Figura 2.2), que es un núcleo denso principalmente a base de electrones, protones y neutrones. Los neutrones y los protones están ligados principalmente en los núcleos de carbono, nitrógeno y oxígeno, formando una estructura de red con una nube de electrones alrededor del núcleo. Veamos algunas características de estos objetos.



Figura 2.2: La nebulosa planetaria NGC 2440 contiene una de las enanas blancas conocidas más calientes. La enana blanca se ve como un punto brillante cerca del centro de la fotografía. Eventualmente, nuestro Sol se convertirá en una enana blanca, en aproximadamente 5 mil millones de años. Adaptada de [11].

### 2.1.1. Enanas Blancas

La masa de una enana blanca es aproximadamente  $0,5 - 0,6M_{\odot}$ <sup>1</sup> y su radio es de sólo  $0,001R_{\odot}$ , sólo un poco menos que el radio de la tierra, el cual provoca que la densidad sea muy grande ( $\rho \sim 10^{10}kg/m^3$ ), un factor  $10^8$  menos que la densidad de materia nuclear. El tamaño pequeño y la densidad grande son características distinguibles de las estrellas compactas en comparación con las estrellas normales.

La presión soportada por la estrella no viene de ningún proceso de fusión en su centro, sino que proviene de la naturaleza cuántica de los fermiones, y es llamada presión de degeneración. Esta presión se debe a que el principio

---

<sup>1</sup>La notación y convenciones usadas en esta tesis se muestran en el Apéndice B.

de Exclusión de Pauli establece que no puede haber dos fermiones con todos sus números cuánticos idénticos (*i.e.*, dos fermiones pueden tener la misma energía sólo cuando tienen espín, color u otro número cuántico intrínseco opuesto). Esto provoca que los electrones tengan una cierta cantidad de energía cinética, dando lugar a una presión, la cual equilibra la atracción gravitacional. Esta es otra característica de las estrellas compactas: Las enanas blancas se estabilizan contra el colapso gravitacional por la presión de degeneración de sus electrones. Dicha presión está dada por [12]

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_{tot}}{V} = \frac{2}{3} \frac{\hbar^2 k_F^5}{10\pi^2 m_e} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m_e} \rho^{5/3}, \quad (2.1)$$

donde  $k_F$  es el momento de Fermi del electrón y  $m_e$  su masa. Si asumimos una densidad constante, el radio  $R$  del tal objeto puede ser calculado si escribimos la energía total en términos del radio, el número de nucleones (protones y neutrones)  $N$ , el número de electrones por nucleón  $q$ , y la masa del electrón  $m_e$ , *i.e.*, si el volumen de una esfera está dado por

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (2.2)$$

entonces la energía puede escribirse como

$$E = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 Nq)^{5/3}}{10\pi^2 m_e} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right)^{-2/3} = \frac{2\hbar^2}{15\pi m_e R^2} \left( \frac{9}{4} \pi Nq \right)^{5/3}. \quad (2.3)$$

Imaginamos que la esfera está constituida por capas. Cuando se ha alcanzado la masa  $m$ , y radio  $r$ , el trabajo necesario para llevar al próximo incremento  $dm$  es:

$$dW = - \left( \frac{Gm}{r} \right) dm,$$

que si lo escribimos en términos de la densidad de masa  $\rho$ ,  $m = 4\pi r^3 \rho/3$ , y  $dm = 4\pi r^2 dr \rho$ , donde  $dr$  es el incremento en el radio, tenemos que:

$$dW = -G \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \frac{dr}{r} = -\frac{16\pi^2}{3} \rho^2 G r^4 dr, \quad (2.4)$$

y la energía gravitacional total de una esfera de radio  $R$  es entonces

$$E_{grav} = -\frac{16\pi^2}{3} \rho^2 G \int_0^R r^4 dr = -\frac{16\pi^2 \rho^2 R^5}{15} G. \quad (2.5)$$

Pero  $\rho = (NM)/(4\pi R^3/3)$ . Entonces

$$E_{grav} = -\frac{16\pi^2 R^3}{15} G \frac{9N^2 M^2}{16\pi^2 R^6} = -\frac{3}{5} G \frac{N^2 M^2}{R}. \quad (2.6)$$

Si queremos encontrar el radio para el cual la energía total es positiva y para el cual la energía es mínima, hacemos lo siguiente:

Consideramos la energía total de la forma  $E_{tot} = A/R^2 - B/R$ , donde  $A = (2\hbar^2/15\pi m)(9\pi Nq/4)^{5/3}$  y  $B = 3GN^2 M^2/5$ . Entonces, diferenciando  $E_{tot}$  respecto a  $R$ , tenemos que

$$\frac{dE_{tot}}{dR} = -\frac{2A}{R^3} + \frac{B}{R^2} = 0 \Rightarrow 2A = BR. \quad (2.7)$$

Así que el valor de  $R$  en términos de  $A$  y  $B$  es

$$R = \frac{2A}{B} = \frac{4\hbar}{15\pi m_e} \left( \frac{9}{4}\pi Nq \right)^{5/3} \frac{5}{3GN^2 M^2}. \quad (2.8)$$

Reescribiendo, obtenemos

$$R = \left[ \left( \frac{4}{9\pi} \right) \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{5/3} \right] \left( \frac{N^{5/3}}{N^2} \right) \frac{\hbar^2}{Gm_e M^2} q^{5/3} = \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{Gm_e M^2} \frac{q^{5/3}}{N^{1/3}} \quad (2.9)$$

Si sustituimos los valores de las constantes

$$\begin{aligned} R &= \left( \frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} N^{-1/3} \frac{(1,055 \times 10^{-34} J \cdot s)^2 (1/2)^{5/3}}{(6,673 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2)(9,109 \times 10^{-31} kg)(1,674 \times 10^{-27} kg)^2} \\ &= (7,58 \times 10^{25} m) N^{-1/3} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dado un valor de  $N$  podemos encontrar el valor numérico de  $R$ . Por ejemplo, la masa del sol es  $1,989 \times 10^{30}$  kg, entonces  $N = (1,989 \times 10^{30})/(1,674 \times 10^{-27}) = 1,188 \times 10^{57}$ ;  $N^{-1/3} = 9,44 \times 10^{-20}$ . Finalmente tenemos que

$$R = (7,58 \times 10^{25}) (9,44 \times 10^{-20}) m = 7,16 \times 10^6 m, \quad (2.11)$$

el cual es un poco más grande que el radio de la Tierra.

También podemos calcular la energía de Fermi de la siguiente manera:

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left( 3\pi^2 \frac{Nq}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \left( \frac{9\pi}{4} Nq \right)^{2/3}. \quad (2.12)$$

Si sustituimos los valores numéricos en la ecuación anterior, llegamos a que

$$\begin{aligned} E_F &= \frac{(1,055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{2 (9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}) (7,16 \times 10^6 \text{ m})^2} \left[ \frac{9\pi}{4} (1,188 \times 10^{57}) \frac{1}{2} \right]^{2/3} \\ &= 3,102 \times 10^{-14} \text{ J}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

o en electron volts:

$$E_F = \frac{3,102 \times 10^{-14}}{1,602 \times 10^{-19}} \text{ eV} = 1,94 \times 10^5 \text{ eV}. \quad (2.14)$$

Sabemos que la energía en reposo de los electrones es  $E_{rep} = mc^2 = 5,11 \times 10^5 \text{ eV}$ . Entonces la energía de Fermi (energía de los electrones más energéticos) es comparable con la energía en reposo, por lo que los electrones en una enana blanca son cercanamente relativistas. Lo anterior es para el caso donde se considera solamente a la Relatividad Especial (RE), pero cuando consideramos las correcciones provenientes de la Relatividad General (RG), las enanas blancas son no relativistas, como lo veremos en el capítulo 4. Veamos ahora lo que sucede con estrellas más masivas.

### 2.1.2. Estrellas de Neutrones

Las enanas blancas más masivas, comenzarán a contraerse de nuevo, calentando así su núcleo lo suficiente para fusionar núcleos más pesados. La estrella sigue las fusiones en capas como de cebolla, con procesos de fusión distintos en cada capa, hasta que el núcleo este formado de hierro. La fusión demandará de energía, no liberará, por lo tanto la fusión se detiene.

La estrella colapsa y explota en una explosión de supernova ya que no hay ninguna presión de la fusión para equilibrar la gravedad. La masa restante es ahora una estrella de neutrones (ver Figura 2.3).

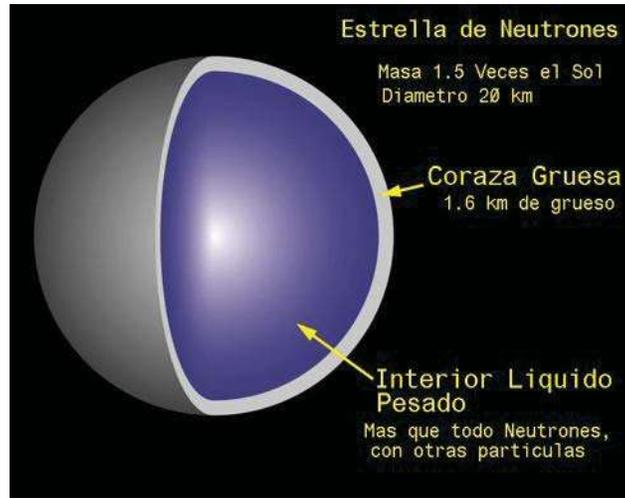


Figura 2.3: Estructura de una estrella de neutrones. Adaptada de [13].

Una estrella de neutrones es un remanente estelar dejado por una estrella supergigante después de agotar el combustible nuclear en su núcleo y explotar como una supernova tipo II, tipo Ib o tipo Ic. Las estrellas de neutrones tiene una masa de  $1,35 - 2,1M_{\odot}$  y un radio de sólo  $10-20 \text{ km}$ , causando que su densidad sea del orden de la densidad de materia nuclear ( $\rho \sim 10^{18} \text{ kg/m}^3$ ), y el radio decrece cuando la masa crece. Las estrellas de neutrones son aún más pequeñas, y tienen una densidad mayor que las enanas blancas. La presión soportada por las estrellas de neutrones es del mismo origen que la de las enanas blancas, es decir, la presión cuántica (Principio de Exclusión de Pauli), sólo que para las estrellas de neutrones, los fermiones que proveen esta presión son neutrones (y una pequeña cantidad de protones) en lugar de electrones. Como aproximación, la materia en estrellas compactas se puede considerar como completamente degenerada. La presión en estas estrellas es principalmente de degeneración, ya que la temperatura es baja comparada con la requerida para tener una energía térmica del orden de la energía de Fermi.

La temperatura en las estrellas compactas no es en realidad cero, pero es una buena aproximación, porque la energía del nivel más alto de energía ocupado por los fermiones es de una magnitud mucho mayor que la energía causada por la temperatura. Así, los fermiones están aproximadamente en el estado

base del sistema de muchas partículas, por lo tanto, la temperatura es de aproximadamente  $T = 0$ , lo que causa que la Ecuación de Estado (EDE) sea precisamente de la forma

$$\rho = f(p), \quad (2.15)$$

en donde  $\rho$  es la densidad materia y  $f(p)$  es una función arbitraria de la presión  $p$ .

Podemos extender la teoría de un gas de electrones libres al dominio relativista reemplazando la energía cinética clásica,  $E = p^2/2m$ , por la fórmula relativista,  $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2$ .

El momento está relacionado con el vector de onda de la manera usual:  $p = \hbar k$ . En particular, en el límite ultrarelativista,  $E \approx pc = \hbar ck$ .

Si reemplazamos  $\hbar^2 k^2/2m$  en la ecuación  $dE = (\hbar^2 V k^2) k^2 dk / (2m\pi^2)$  por la expresión ultrarelativista,  $\hbar ck$ , y calculamos la  $E_{tot}$  en este régimen de la siguiente manera:

$$dE = (\hbar ck) \frac{V}{\pi^2} k^2 dk \Rightarrow E_{tot} = \frac{\hbar c V}{\pi^2} \int_0^{k_F} k^3 dk = \frac{\hbar c V}{4\pi^2} k_F^4; \quad (2.16)$$

donde  $k_F = (3\pi^2 Nq/V)$ . Entonces,

$$E_{tot} = \frac{\hbar c}{4\pi^2} (3\pi^2 Nq)^{4/3} V^{-1/3}. \quad (2.17)$$

También podemos calcular el número crítico de nucleones  $N_c$  tal que el colapso gravitacional ocurra para  $N > N_c$ . A este resultado se le conoce como el Límite de Chandrasekhar. Para obtener lo anterior tenemos que considerar lo siguiente:

El volumen para este caso es

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (2.18)$$

Entonces, la energía de degeneración es

$$E_{deg} = \frac{\hbar c}{4\pi^2 R} (3\pi^2 Nq)^{4/3} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{-1/3} = \frac{\hbar c}{3\pi R} \left(\frac{9}{4}\pi Nq\right)^{4/3}. \quad (2.19)$$

Poniendo la ecuación anterior en la energía gravitacional y usando el resultado obtenido en el caso de las enanas blancas, tenemos que

$$E_{tot} = \frac{A}{R} - \frac{B}{R}, \quad (2.20)$$

donde  $A = \hbar c(9\pi Nq)^{4/3}/3\pi(4)^{4/3}$  y  $B = 3GN^2M^2/5$ . Entonces si derivamos  $E_{tot}$  respecto a  $R$  obtenemos

$$\frac{dE_{tot}}{dR} = -\frac{(A-B)}{R^2} = 0 \Rightarrow A = B, \quad (2.21)$$

pero no hay un valor en especial de  $R$  para el cual  $E_{tot}$  sea mínima. Sin embargo, podemos identificar un punto crítico, el cual es:

$$A = B (E_{tot} = 0) \Rightarrow \frac{\hbar c}{3\pi} \left( \frac{9}{4}\pi Nq \right)^{4/3} = \frac{3}{5}GN^2M^2. \quad (2.22)$$

Entonces la densidad crítica de nucleones es

$$N_c = \frac{15}{16}\sqrt{5\pi} \left( \frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \frac{q^2}{M^3},$$

que numéricamente es

$$N_c = 2,04 \times 10^{57}. \quad (2.23)$$

El resultado anterior nos da aproximadamente dos veces el valor de la densidad de nucleones en el sol.

Finalmente, podemos calcular el radio de la estrella de neutrones usando la masa del sol, así como también la energía de Fermi, y de esa manera podremos hacer una comparación con la energía en reposo de un neutrón. Para calcular el radio  $R$  consideramos lo siguiente:

Usando el mismo razonamiento que para las enanas blancas, pero con  $m_e \rightarrow m_n$  y  $q \rightarrow 1$ , además de que multiplicamos el resultado obtenido en ese caso por el factor  $(2)^{5/3}m/M$ , tenemos que el radio es

$$\begin{aligned} R &= 2^{5/3} \frac{(9,109 \times 10^{-31})}{(1,674 \times 10^{-27})} (7,58 \times 10^{25} \text{m}) N^{-1/3} \\ &= (1,31 \times 10^{23} \text{m}) N^{-1/3}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usando  $N = 1,188 \times 10^{57}$ , entonces

$$R = (1,31 \times 10^{23} \text{m}) (9,44 \times 10^{-20}) = 12,4 \text{km}. \quad (2.25)$$

O sea que podemos acomodar aproximadamente, una de estas estrellas en 12 campos de fútbol.

Para obtener la energía de Fermi  $E_F$ , usamos nuevamente los resultados para el caso de las enanas blancas, sólo que ponemos  $q = 1$ , el valor del radio  $R$  para las estrellas de neutrones y el valor de la masa  $m_n$  del neutrón:

$$E_F = 2^{2/3} \left( \frac{7,16 \times 10^6}{1,24 \times 10^4} \right)^2 \left( \frac{9,11 \times 10^{-31}}{1,67 \times 10^{-27}} \right) (1,94 \times 10^5 \text{eV}) = 5,60 \times 10^7 \text{eV}. \quad (2.26)$$

La energía en reposo de un neutrón es 940MeV, lo que significa que una estrella de neutrones es razonablemente no relativista. Lo anterior es si consideramos solamente a la RE, pero si tomamos en cuenta las correcciones provenientes de la RG las estrellas de neutrones son relativistas como se analizará en el capítulo 5.

Las enanas blancas pueden ser observadas directamente con telescopios ópticos en su período de reflexión ( $\sim 25$  billones de años). Las estrellas de neutrones, pueden ser observadas directamente como fuentes de radio punzantes (pulsares) o indirectamente como fuentes periódicas de rayos X (pulsares de rayos X).

A continuación consideramos uno de los ingredientes más controversiales de la Relatividad General, la constante cosmológica.

## 2.2. Constante Cosmológica

En esta sección, analizaremos la constante cosmológica, basándonos en el trabajo [4]. Además exploramos el artículo [5] que nos habla del misterio que esconde la constante cosmológica. La constante cosmológica fue introducida por primera vez por Albert Einstein [6], quien necesitaba un término de balance en las ecuaciones de Relatividad General (RG) que describen el universo a gran escala. Einstein asumió que el universo era estático, por lo que colapsaría sin un término de equilibrio debido a la atracción gravitacional. Más recientemente, se ha observado que el universo se está expandiendo

[14]. Einstein llamó a la introducción de una constante cosmológica como “su mayor metida de pata”.

Aunque no hay una necesidad de equilibrar las ecuaciones para el universo estático, como sabemos el universo es dinámico, hay algunos indicios de que existe una constante cosmológica. La Sonda de Microondas Anisotrópicas de Wilkinson (WMAP) por sus siglas en inglés, mide la Radiación Cómica de Fondo de Microondas (CMB) del universo (ver Figura 2.4).

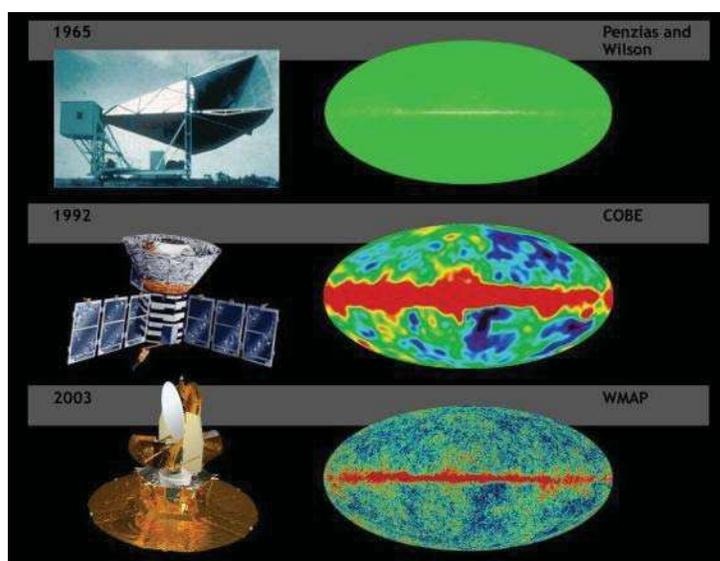


Figura 2.4: Penzias y Wilson descubrieron el resplandor remanente del Big Bang y fueron galardonados con el Premio Nobel en 1978 por su descubrimiento. El COBE descubrió por primera vez los patrones en el resplandor. El WMAP proporciona los patrones de relieve mucho mejor para dar a conocer una gran cantidad de información sobre la historia y el destino del universo. El receptor de microondas de Penzias y Wilson-1965 (SI). La simulación del cielo vista por el receptor de microondas de Penzias y Wilson-1965 (SD). Imagen de la nave espacial COBE-1992 (MI). Vista del universo temprano vista COBE-1992 (MD). Equipo de computación de la nave espacial WMAP-2001 (II). Simulación del universo temprano por el WMAP (ID) [14].

Las observaciones indican que el universo es plano. Por lo tanto, tiene que haber una cierta densidad crítica. La primera de las ecuaciones de Friedman, la cual es una aplicación de la RG en la cosmología, define un parámetro de densidad:

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.27)$$

Aquí,  $\rho$  es la densidad del universo y  $\rho_c$  es la densidad crítica para la cual la geometría del universo es plana. El valor de  $\Omega$  determina cuando el universo es cerrado, abierto o plano. Para  $\Omega < 1$ , el universo es abierto, y si  $\Omega > 1$  el universo es cerrado. Pero esta ecuación sólo es válida para un universo sin una constante cosmológica.

La forma más general de un término de balance, sin embargo, se puede escribir como una suma de varias contribuciones. Un ejemplo de esto es el modelo Lambda-CDM, donde Lambda es la constante cosmológica y CDM (por sus siglas en inglés) denota a la materia oscura fría, ambas se definen más abajo [15]. Según este modelo, existen importantes contribuciones a  $\Omega$  de bariones, materia oscura fría y energía oscura. La planidad del espacio-tiempo indicada por WMAP implica que el parámetro de curvatura  $K \simeq 0$ . La primera ecuación de Friedman se escribe a menudo en esta forma

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega_R a^{-4} + \Omega_M a^{-3} + \Omega_\Lambda - K c^2 a^{-2}. \quad (2.28)$$

En esta expresión,  $c$  es la velocidad de la luz,  $H_0$  es la constante de Hubble, y  $H$  es el parámetro de Hubble que describe el rango de expansión del universo. Esta se define como

$$H = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.29)$$

donde  $a$  es el factor de escala, una función del tiempo la cual representa la expansión relativa del universo. La  $\Omega_R$  es la densidad de radiación actual,  $\Omega_M$  es la densidad de materia (bariónica y oscura) actual y  $\Omega_\Lambda$  es la densidad del vacío (o constante cosmológica) actual.

La radiación cósmica de fondo medida por WMAP indica que la cantidad total de materia (ambas bariónica y materia oscura) en el universo representa aproximadamente sólo el 27% de la densidad crítica. Por medio de mediciones de fluctuaciones en la radiación cósmica de fondo, el WMAP puede determinar la composición del universo. Además de cerca del 4% de la composición

del universo es materia atómica (Gas, estrellas, etc.), y aproximadamente el 23% es de materia oscura fría, y 73% proviene de la energía oscura, de la que poco se sabe. Por lo tanto, aproximadamente el 96% de la densidad de energía en el universo es de una forma que nunca se ha detectado directamente en el laboratorio, como se muestra en la Figura 2.5.

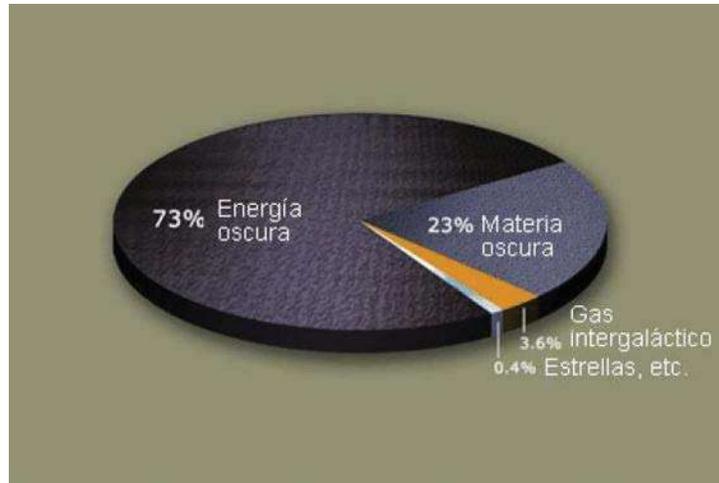


Figura 2.5: Composición actual del universo. Adaptada de [16].

La naturaleza de la energía oscura es una cuestión especulativa, pero se sabe que es muy homogénea, no muy densa y de interactuar sólo lo haría a través de la gravedad. Las dos principales teorías son la quintaesencia y la constante cosmológica. La constante cosmológica describe una distribución homogénea de la energía en todo el universo, y la quintaesencia describe un campo de diferente energía que depende de la posición y el tiempo. Nos centraremos en la constante cosmológica a partir de ahora.

La densidad de energía relacionada con la constante cosmológica es a menudo llamado la energía del vacío, ya que es precisamente la energía del vacío. La energía oscura se cree que es la razón de la expansión acelerada del universo, debido a su presión negativa. La energía oscura tiene una presión negativa porque la energía tiene que perderse desde el interior para hacer el trabajo en el contenedor. Un cambio en el volumen  $dV$  requiere un trabajo igual a la energía  $-pdV$  con  $p$  siendo la presión. Pero la cantidad de energía en una caja de energía de vacío debe aumentar cuando aumenta el volumen ( $dV$  es positivo), porque la energía es igual a  $\rho_{vac}V$ , donde  $\rho_{vac}$  es la densidad de

energía de la constante cosmológica. Por lo tanto,  $p$  es negativa y, de hecho,  $p = -\rho_{vac}$ .

De acuerdo a las ecuaciones de Friedman, la presión dentro de una sustancia contribuye a la atracción gravitacional sobre otros objetos, así como su masa y densidad lo hacen. Por lo tanto, la presión negativa causa repulsión. En la energía oscura, este efecto es mayor que la atracción causada por la masa, y el efecto global es una fuerza repulsiva.

La materia oscura por otro lado, es materia que interactúa débilmente con la radiación electromagnética, lo que hace difícil observarla. Se cree que puede ser materia bariónica que se encuentra en forma de estrellas enanas cafés y MACHOS (Objetos Astrofísicos Masivos de Halo Compacto), o materia no bariónica. La cantidad total de materia oscura bariónica puede ser calculada de la nucleosíntesis del Big Bang y de observaciones de la radiación cósmica de fondo, y ambos resultados nos dan un valor mucho más pequeño de la materia oscura bariónica que la materia oscura total.

La teoría más probable es que la materia oscura se compone principalmente de uno o una mezcla de las variedades de la materia no bariónica: la materia oscura caliente, tibia o fría. El nombre refleja las energías de las partículas, es decir, las partículas calientes se mueven con velocidad ultra-relativista, las tibias se mueven relativistamente y las frías se mueven con velocidad no relativista. Ejemplos de las distintas variedades son: Neutrinos (calientes), gravitinos y fotinos (tibias) y partículas supersimétricas tales como WIMPs [Partículas Masiva que interactúan débilmente, incluyendo neutralinos] (frías). Las velocidades se refieren a la época de recombinación y no a la época actual, de hecho se pueden definir en las épocas en las que empiezan a formar galaxias. Entonces hay que tener bien en claro que las velocidades referidas no son en el presente (podría haber materia oscura moviéndose a velocidades mucho menores que la luz a nuestros días).

Mediante el uso de lentes gravitacionales, es posible calcular la abundancia de la materia oscura, por ejemplo, en los cúmulos de galaxias. El efecto de una lente gravitacional se basa en la RG para predecir las masas debido a la curvatura de la luz causada por la materia.

La lente débil mira a distorsiones a microescala de las galaxias, debido a los objetos en primer plano. A través del análisis estadístico, la distribución media de la materia oscura se puede encontrar (ver Figura 2.6).

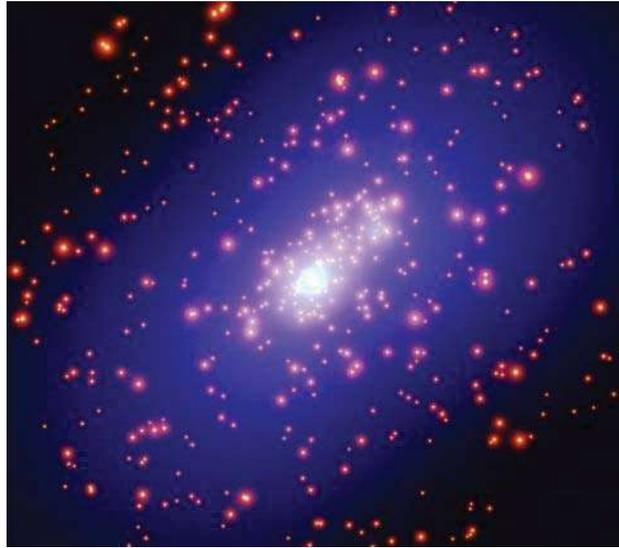


Figura 2.6: La masa de un grupo de galaxias gigantes, CL0025 y 1654, situadas a unos 4.500 millones de años-luz, produce una lente gravitacional cósmica curvando la luz tal como predice la teoría de la relatividad de Einstein, de manera que forma imágenes detectables más distantes aún que las propias galaxias. El mapa resultante muestra la materia oscura invisible en azul y las posiciones de los grupos de galaxias en amarillo. La materia luminosa sigue de cerca la acumulación de materia oscura, ya que la materia oscura es mucho más que la luminosa y es la que define los pozos de potencial que están manteniendo a los bariones en sus órbitas [17].

Las estrellas compactas se estudian a partir de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. En el siguiente capítulo introduciremos estas ecuaciones en un caso ideal, que permite obtener resultados analíticos.

# Capítulo 3

## Las Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)

En este capítulo resolveremos analíticamente las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) (ver deducción en el apéndice A) para el caso de estrellas con densidad de materia constante. Observaremos que estos objetos poseen una masa máxima, el cual calcularemos junto con el radio de Schwarzschild. Finalmente, obtendremos el límite Newtoniano para la presión a partir de nuestras expresiones. Seguiremos la referencia [4].

Las ecuaciones TOV describen a las estrellas de neutrones mejor que las ecuaciones newtonianas del equilibrio hidrostático, ya que toman en consideración correcciones provenientes de la RG. Basándonos en una métrica esférica, de la forma

$$ds^2 = -e^{\varphi(r)} c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.1)$$

las ecuaciones de TOV para las estrellas estáticas con simetría esférica son [3]

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r), \quad (3.2)$$

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1} \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + \frac{4\pi G r p(r)}{c^2}\right) \quad (3.3)$$

$$\frac{dp(r)}{dr} = \left( -\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right) \frac{d\varphi(r)}{dr}, \quad (3.4)$$

así que combinando las últimas 2 expresiones, la ec. de TOV es

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2} \frac{\left(1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)c^2}\right)}{\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)}, \quad (3.5)$$

donde  $m = m(r)$  es la masa,  $r$  es el radio,  $\rho = \rho(r)$  es la densidad de masa y  $p = p(r)$  es la presión de la estrella. La ecuación (3.4) es la que difiere de la ecuación Newtoniana del equilibrio hidrostático

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2}, \quad (3.6)$$

por tres factores adimensionales adicionales. La ecuación (3.2) es la misma en ambas teorías. Cuando el término “ecuaciones de TOV” es usado, sólo una de las ecuaciones es diferente de sus contrapartes Newtonianas, pero el conjunto de las dos ecuaciones son normalmente llamadas ecuaciones de TOV por lo que será la convención que usaremos aquí.

Usaremos unidades naturales, donde  $G = c = 1$ .

### 3.1. Solución de las Ecuaciones de TOV con Densidad Constante

En el caso de una hipotética estrella de densidad constante, la presión  $p$  es independiente de la densidad  $\rho$ . Reescribimos la ecuación (3.4) de una forma más compacta para facilitar la integración:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\epsilon + p)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}, \quad (3.7)$$

en donde  $\epsilon = \rho c^2$ . La ecuación general para la masa de un objeto esféricamente simétrico con densidad constante es

$$\int_0^m dm' = 4\pi\rho \int_0^r r'^2 dr', \quad (3.8)$$

que integrando, nos dice que

$$m(r) = \frac{4\pi\rho r^3}{3}. \quad (3.9)$$

Insertando la ecuación (3.8) en (3.6), obtenemos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{(\rho + p)(\rho + 3p)}{1 - \frac{8}{3}\pi\rho r^2}. \quad (3.10)$$

Integrando desde una presión central  $p_c = p(r = 0)$  hasta una presión  $p$ , entonces

$$\int_{p_c}^p \frac{dp'}{(\rho + p')(\rho + 3p')} = -\frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{r' dr'}{1 - \frac{8\pi\rho r'^2}{3}}, \quad (3.11)$$

tal que la integral del lado derecho de la ecuación (3.10) es

$$-\frac{4\pi}{3} \int_0^r \frac{r' dr'}{1 - \frac{8\pi\rho r'^2}{3}} = \frac{1}{4\rho} \int_1^{1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}} \frac{du'}{u'}, \quad (3.12)$$

donde hemos hecho la sustitución  $u' = 1 - 8\pi\rho r'^2/3$ . La integración puede hacerse fácilmente, y da

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\rho} \int_1^{1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}} \frac{du'}{u'} &= \frac{1}{4\rho} \ln \left| \frac{1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}}{1} \right| \\ &= \frac{1}{4\rho} \ln \left( 1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

El lado izquierdo de la ecuación (3.10) es

$$\begin{aligned} \int_{p_c}^p \frac{dp'}{(\rho + p')(\rho + 3p')} &= \int_{p_c}^p \frac{dp'}{(\rho^2 + 4\rho p' + 3p'^2)} \\ &= \frac{1}{2\rho} \ln \left( \frac{3p + \rho}{p + \rho} \right) \Bigg|_{p_c}^p \\ &= \frac{1}{2\rho} \left[ \ln \left( \frac{3p + \rho}{p + \rho} \right) - \ln \left( \frac{3p_c + \rho}{p_c + \rho} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Combinando las ecuaciones (3.12) y (3.13), llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho} \left[ \ln \left( \frac{3p + \rho}{p + \rho} \right) - \ln \left( \frac{3p_c + \rho}{p_c + \rho} \right) \right] &= \frac{1}{4\rho} \ln \left( 1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3} \right) \Rightarrow \\ \frac{3p + \rho}{p + \rho} \frac{p_c + \rho}{3p_c + \rho} &= \sqrt{1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}} \Rightarrow \\ \frac{\rho + 3p}{\rho + p} &= \frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde en la última línea, hicimos la sustitución de  $m(r) = 4\pi r^3 \rho / 3$  para incluir la masa de la estrella.

Podemos encontrar el radio de la estrella con la condición de que la presión se anule, *i.e.*  $p(R) = 0$ . Para encontrar una expresión de como el radio de la estrella depende de su masa y densidad de energía, insertamos los valores de  $p = 0$  y  $r = R$  en la ecuación (3.14), y obtenemos

$$R^2 = \frac{3}{8\pi\rho} \left[ 1 - \left( \frac{p_c + \rho}{3p_c + \rho} \right)^2 \right], \quad (3.16)$$

que cuando sustituimos en la ecuación (3.12) nos permite eliminar la presión central  $p_c$ :

$$p = \rho \frac{\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}}. \quad (3.17)$$

Aquí  $M = 4\pi R^3 \rho / 3$  es la masa de la estrella. Ahora tenemos una ecuación para la presión de una estrella compacta con densidad de materia constante. En la Figura 3.1 se muestra la gráfica de esta expresión.

## 3.2. El límite superior de la masa de las estrellas

Insertando el valor  $r = 0$  en la ecuación (3.16) para obtener una expresión de  $p_c$  en términos de  $R$  y  $M$ , llegamos a

$$p_c = \rho \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - 1} \Rightarrow \frac{2M}{R} = 1 - \left( \frac{p_c + \rho}{3p_c + \rho} \right)^2. \quad (3.18)$$

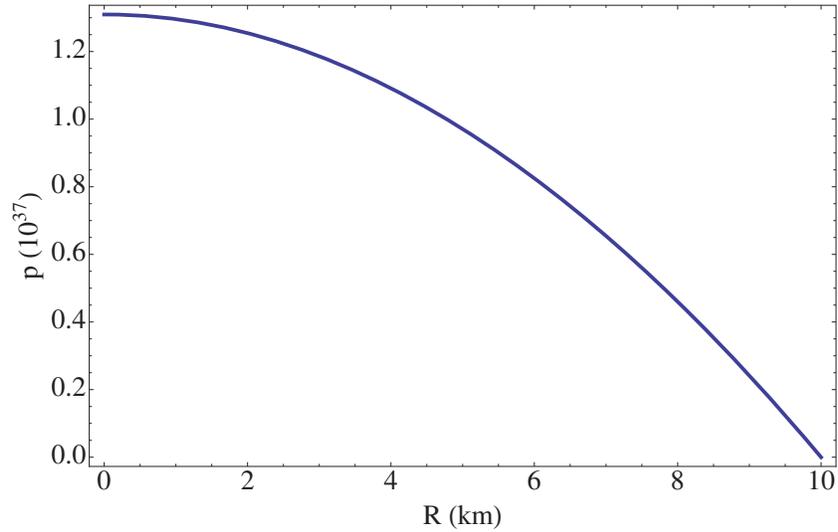


Figura 3.1: Presión de una estrella de neutrones de densidad constante como función del radio, ecuación (3.16).

Introduciendo la variable  $x = \rho/p_c$  en la ecuación (3.17) implica

$$\frac{2M}{R} = 1 - \left( \frac{1+x}{3+x} \right)^2 = 1 - [\lambda(x)]^2, \quad (3.19)$$

tal que  $\lambda(x) = (1+x)/(3+x)$ . La ecuación (3.18) alcanza su valor máximo cuando  $\lambda(x)$  alcanza su mínimo, debido al signo negativo del término  $\lambda(x)$ . Por lo tanto,  $x$  es una variable de la constante  $p_c$  y de  $\rho$ , las cuales nunca pueden ser negativas, lo que implica que  $x$  no puede ser negativa. Para encontrar el mínimo de  $\lambda(x)$ , calculamos la derivada

$$\frac{d\lambda(x)}{dx} = \frac{2}{(3+x)^2}. \quad (3.20)$$

Esto siempre es positivo, *i.e.*  $\lambda(x)$  crece cuando  $x$  decrece. Entonces, el mínimo de  $\lambda(x)$  debe ocurrir cuando  $x = 0$ . Poniendo  $x = 0$  en la ecuación (3.18) resulta el valor de la masa  $M$

$$\frac{2M}{R} = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow M = \frac{4}{9}R. \quad (3.21)$$

La ecuación (3.20) nos permite obtener el valor de la masa máxima para una estrella de un radio dado. La existencia de este límite se debe a la incorporación de la relatividad (tanto especial como general) en las ecuaciones de

TOV. Sin embargo, no hay un límite correspondiente en la teoría newtoniana del equilibrio hidrostático.

### 3.3. El radio de Schwarzschild

Si  $M = 4\pi\rho R^3/3$  en la ecuación (3.15), obtenemos que

$$(\rho + 3p_c)^2 \left(1 - \frac{2M}{R}\right) = (\rho + p_c)^2. \quad (3.22)$$

Manipulando un poco la ecuación anterior:

$$2p_c^2 \left(4 - \frac{9M}{R}\right) + p_c \left(4\rho - \frac{12M\rho}{R}\right) - \frac{2M\rho^2}{R} = 0, \quad (3.23)$$

y resolviendo para  $p_c$ , nos da como resultado

$$p_c = \frac{-4\rho \left(1 + \frac{3M}{R}\right) \pm \sqrt{\left[4\rho \left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right]^2 + \frac{16M\rho^2}{R} \left(4 - \frac{9M}{R}\right)}}{4 \left(4 - \frac{9M}{R}\right)}. \quad (3.24)$$

Para obtener un valor real de  $p_c$ , la expresión dentro de la raíz de la ecuación (3.23) debe ser positiva, de otra manera la presión central sería compleja, y la ecuación (3.23) no tendría sentido. Para encontrar el valor donde esto pase, calculemos el límite,

$$\left[4\rho \left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right]^2 + \frac{16M\rho^2}{R} \left(4 - \frac{9M}{R}\right) \rightarrow 0:$$

$$\left[4\rho \left(1 - \frac{3M}{R}\right)\right]^2 + \frac{16M\rho^2}{R} \left(4 - \frac{9M}{R}\right) = 0 \Rightarrow \quad R = 2M. \quad (3.25)$$

El resultado obtenido para  $R$  es conocido como radio de Schwarzschild, y se define como el horizonte de eventos de una agujero negro. De una región esférica con este radio, ninguna información puede escapar. Salvo en procesos cuánticos donde se tiene la radiación de Hawking.

### 3.4. El límite Newtoniano

Para encontrar el límite Newtoniano de la ecuación (3.16), usaremos la condición  $2M/R \ll 1$ . Esto viene del hecho de que la métrica

$$ds^2 = -e^{\varphi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.26)$$

la cual describe la geometría del espacio tiempo, debe ser casi plana en el límite Newtoniano. Una métrica plana describe el espacio Euclidiano, y esta es la forma de la métrica, cuando no hay influencia de la RG, y en el límite Newtoniano no hay efectos de la RG.

De acuerdo al Teorema de Birkhoff , podemos establecer que las soluciones esféricamente simétricas de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, deben ser estáticas y asintóticamente planas. El Teorema de Birkhoff se enuncia de la siguiente manera [19]:

**Teorema 3.1 (Teorema de Birkhoff)** *Para una distribución de materia simétrica, las ecuaciones de campo de Einstein tienen una solución única. Si consideramos la derivada de la ecuación*

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{8\pi G\rho_0}{3R} = -kc^2, \quad (3.27)$$

obtenemos que

$$2\frac{dR}{dt}\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{8\pi G\rho_0}{3R^2}\frac{dR}{dt} = 0. \quad (3.28)$$

Cancelando la primera derivada, y usando que  $R^3(t)\rho(t) = cte. \Rightarrow R^3(t_0)\rho_0 = \rho_0$ , donde  $\rho$  es la densidad actual del universo. Entonces obtenemos que

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{4}{3}\pi GR. \quad (3.29)$$

*Este es el Teorema de Birkhoff.*

Entonces la métrica más general fuera de una estrella esféricamente simétrica y estática es de la forma [20]:

$$ds^2 = -g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.30)$$

donde por las ecuaciones de Einstein en el vacío, esféricamente simétricas identificamos a  $g_{00} = (1 - 2M/R)$  y a  $g_{rr} = (1 - 2M/R)^{-1}$ , además de que  $M$  es la masa total de la estrella. Para una métrica casi plana,  $g_{00}$  y  $g_{rr}$  debe ser aproximadamente uno:

$$\left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{\pm 1} \approx 1 \Rightarrow \frac{2M}{R} \rightarrow 0, \quad (3.31)$$

*i.e.* la métrica es casi plana cuando  $M \ll R$ .

Cuando esta aproximación se aplica a la ecuación (3.16), obtenemos

$$\begin{aligned} p &\approx \rho \frac{\left(1 - \frac{Mr^2}{R^3}\right) - \left(1 - \frac{M}{R}\right)}{3\left(1 - \frac{M}{R}\right) - \left(1 - \frac{Mr^2}{R^3}\right)} \\ &= \rho \frac{1 - \frac{r^2}{R^2}}{\frac{2R}{M} + \frac{r^2}{R^2} - 1}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

y como el cociente  $2R/M$  es mucho mayor que los otros términos en el denominador, entonces

$$p \approx \frac{\rho M}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \quad (3.33)$$

Insertando la expresión  $M = 4\pi\rho R^3/3$  llegamos a

$$p = \frac{2\pi\rho^2}{3} (R^2 - r^2). \quad (3.34)$$

Para obtener las unidades correctas, reinsertamos los factores de  $G$  y  $c$ . Esto se hace poniendo  $M \rightarrow MG$ ,  $R \rightarrow R^2/c^2$  y  $r \rightarrow r^2/c^2$ , finalmente obtenemos la siguiente expresión

$$p = \frac{2\pi G\rho^2}{3c^2} (R^2 - r^2). \quad (3.35)$$

Esta es la misma expresión que obtendremos usando la teoría Newtoniana como se muestra en la derivación de abajo.

A partir de la ecuación (3.5) escrita en unidades naturales ( $G = c = 1$ ), asumimos una densidad constante de la estrella, *i.e.*  $\rho(r) = \rho$ . Entonces podemos insertar la ecuación (3.8) en la ecuación (3.34), obteniendo

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4\pi\rho^2 r}{3}. \quad (3.36)$$

Para  $r > R$ , la presión será cero, pero para  $r < R$ , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{p_c}^p dp' &= -\frac{4\pi\rho^2}{3} \int_0^r r' dr' \\ p_c - p &= \frac{2\pi\rho^2}{3} r^2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

en donde la constante  $p_c$  es la presión para  $r = 0$  (presión central):

$$\int_{p_c}^0 dp = -\frac{4\pi\rho^2}{3} \int_0^R r dr \quad (3.38)$$

$$p_c = \frac{2\pi\rho^2}{3} r^2, \quad (3.39)$$

e insertando esto en la ecuación (3.36), tenemos que:

$$p = \frac{2\pi\rho^2}{3} (R^2 - r^2). \quad (3.40)$$

Reinsertando los factores  $G$  y  $c$

$$p = \frac{2\pi G\rho^2}{3c^2} (R^2 - r^2). \quad (3.41)$$

Esta expresión se muestra en la Figura 3.2, para una estrella de neutrones de radio  $R = 15\text{km}$  y una masa de  $1,5M_\odot$ .

Lo obtenido anteriormente demuestra que si tomamos el límite newtoniano de la solución de las ecuaciones TOV con densidad constante nos da el mismo resultado que cuando se utiliza la teoría de Newton pura, que es lo que esperábamos. En la Figura 3.3 se muestra la comparación entre el caso relativista y Newtoniano para una estrella de neutrones con densidad constante.

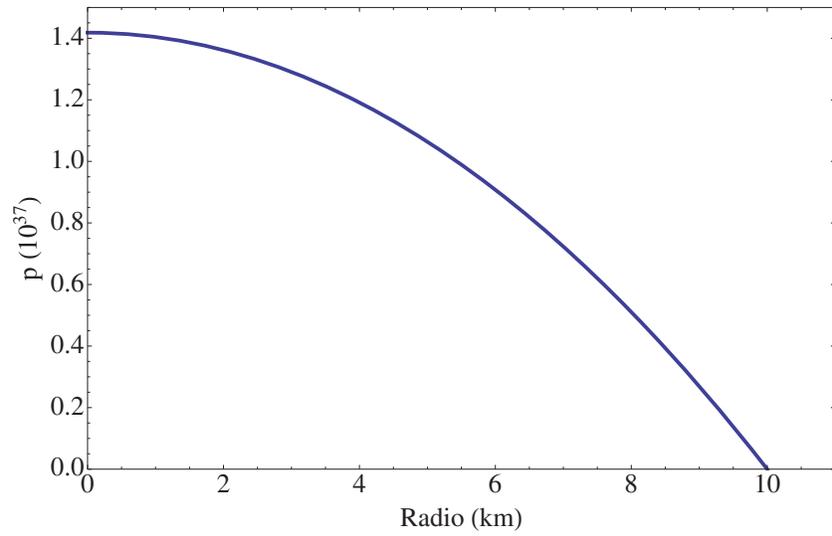


Figura 3.2: Presión de una estrella de neutrones de densidad constante como función del radio, ecuación (3.40).

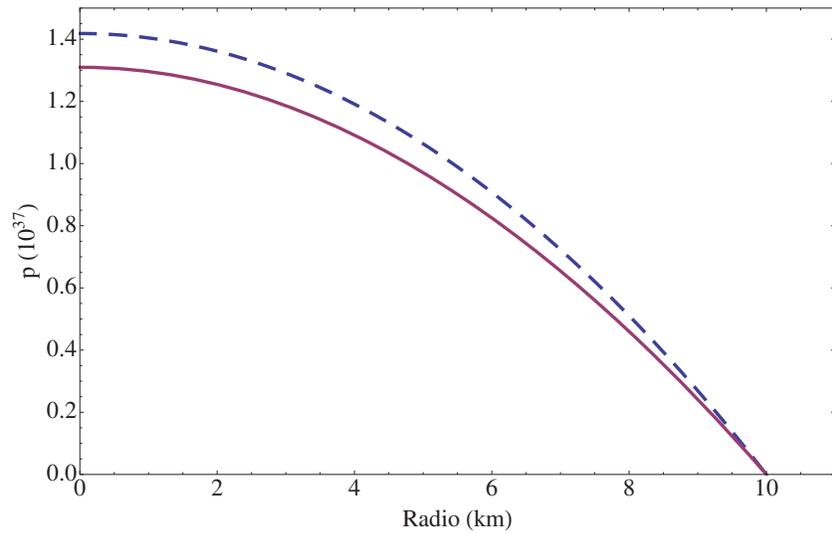


Figura 3.3: Comparación entre el caso relativista (curva continua) ecuación (3.16) y el caso Newtoniano (curva punteada) ecuación (3.40) de la presión como función del radio para una estrella de neutrones con densidad constante.

En la siguiente sección resolveremos analíticamente las ecuaciones de TOV con una constante cosmológica, para el caso de una estrella con densidad constante.

### 3.5. Solución de las Ecuaciones TOV con una Constante Cosmológica

En esta sección, serán resueltas analíticamente las ecuaciones de TOV con un término que incluye la constante cosmológica para el caso de estrellas con densidad de materia constante. La constante cosmológica se define como [7]

$$\Lambda = \frac{8\pi\rho_{vac}}{3}, \quad (3.42)$$

en unidades naturales ( $G = c = 1$ ) y donde  $\rho_{vac}$  (densidad del vacío) es la densidad de materia de la energía oscura en el universo. La definición de la constante cosmológica es a veces dada sin el factor de 3 [8].

Las ecuaciones de Einstein incluyendo la constante cosmológica, están dadas de la siguiente forma [21]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3.43)$$

en donde  $R_{\mu\nu}$ , es el tensor de curvatura de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci,  $g_{\mu\nu}$  es un tensor simétrico de  $4 \times 4$ ,  $\Lambda$  es la constante cosmológica y  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-momento.

Por lo tanto la ecuación de TOV para la presión con una constante cosmológica difiere sólo por un término extra de corrección en comparación con la ecuación original ecuación (3.6), y este término es

$$\left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)c^2}\right] \rightarrow \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)c^2} - \frac{\Lambda r^3}{2Gm(r)}\right]. \quad (3.44)$$

Siguiendo la referencia [2], entonces la ecuación (3.4) con constante cosmológica se convierte en

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\rho(r)m(r)}{r^2} \frac{\left[1 + \frac{p(r)}{\rho(r)c^2}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{m(r)c^2} - \frac{\Lambda r^3}{2Gm(r)}\right]}{\left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right]}. \quad (3.45)$$

Usamos ahora la condición de que la densidad de materia es constante, *i.e.*  $\rho(r) = \rho$ , junto con la ecuación (3.8) para la masa, y unidades naturales, llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{4\pi\rho^2 r}{3} \frac{\left[1 + \frac{p}{\rho}\right] \left[1 + \frac{3p}{\rho} - \frac{3\Lambda}{8\pi\rho}\right]}{\left[1 - \frac{8\pi r^2 \rho}{3}\right]} \\ &= \frac{-r(\rho + p)(\rho + p - \frac{3\Lambda}{8\pi})}{2\left(\frac{3}{8\pi} - r^2\rho\right)}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Definiendo

$$a^2 = \frac{3}{8\pi\rho}, \quad (3.47)$$

la ecuación (3.45) se reescribe como

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)(\rho + 3p - \Lambda a^2 \rho)}{2\rho a^2 (1 - \frac{r^2}{a^2})} r. \quad (3.48)$$

Integrando desde una presión central  $p_c$  hasta una presión  $p$ , tenemos que

$$\int_{p_c}^p \frac{dp'}{(\rho + p')(\rho + 3p' - \Lambda a^2 \rho)} = -\frac{1}{2\rho a^2} \int_0^r \frac{r' dr'}{1 - \frac{r'^2}{a^2}}. \quad (3.49)$$

Sea

$$r' = a \sin \chi'. \quad (3.50)$$

Por lo tanto, la integral del lado derecho de la ecuación (3.48) es

$$I_D = -\frac{1}{2\rho a^2} \int_0^r \frac{r' dr'}{1 - \frac{r'^2}{a^2}} = -\frac{1}{2\rho} \int_{\chi_c}^{\chi} \frac{\sin \chi'}{\cos \chi'} d\chi'. \quad (3.51)$$

Calculando la integral

$$I_D = \frac{1}{2\rho} \ln(\cos \chi') \Big|_{\chi_c}^{\chi}, \quad (3.52)$$

y usando la ecuación (3.49), llegamos a

$$I_D = \frac{1}{4\rho} \ln \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right). \quad (3.53)$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación (3.48) es

$$\begin{aligned} I_I &= \int_{p_c}^p \frac{dp'}{(\rho + p')(\rho + 3p' - \Lambda a^2 \rho)} \\ &= \int_{p_c}^p \frac{dp'}{3p'^2 + (4 - \Lambda a^2)\rho p' + (1 - \Lambda a^2)\rho^2}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Definimos las constantes

$$A = (4 - \Lambda a^2) \rho, \quad B = (1 - \Lambda a^2) \rho^2. \quad (3.55)$$

Realizando la integración de la ecuación (3.53) obtenemos tres casos dependiendo del signo de  $A^2 - 3B$ .

$$I_L = \frac{1}{2\sqrt{A^2 - 3B}} \left[ \ln \left( \frac{3p + A - \sqrt{A^2 - 3B}}{3p + A + \sqrt{A^2 - 3B}} \right) - \ln \left( \frac{3p_c + A - \sqrt{A^2 - 3B}}{3p_c + A + \sqrt{A^2 - 3B}} \right) \right], \quad (3.56)$$

para  $A^2 - 3B > 0$  el cual es el mismo caso que para la ecuación de TOV ordinaria.

$$I_L = \frac{1}{\sqrt{3B - A^2}} \left[ \arctan \left( \frac{3p + A}{\sqrt{3B - A^2}} \right) - \arctan \left( \frac{3p_c + A}{\sqrt{3B - A^2}} \right) \right], \quad (3.57)$$

para la condición  $A^2 - 3B < 0$ , y

$$I_L = \frac{1}{3p_c + A} - \frac{1}{3p + A}, \quad (3.58)$$

para  $A^2 - 3B = 0$ .

Para saber cual es el caso físicamente relevante, derivamos  $y = A^2 - 3B = (4 - \Lambda a^2)^2 \rho^2 - (1 - \Lambda a^2) 3\rho^2$  con respecto a  $x = \Lambda a^2$ ;

$$y(x) = (4 - x)^2 \rho^2 - (1 - x) 2\rho^2. \quad (3.59)$$

Tenemos que

$$\frac{dy}{dx} = -5\rho^2 + 2\rho x, \quad (3.60)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\rho^2. \quad (3.61)$$

Igualando la ecuación (3.60) a 0 para encontrar los extremos de la función  $y(x)$ , obtenemos

$$x = \Lambda a^2 = \frac{5}{2}. \quad (3.62)$$

Entonces,  $\Lambda = 20\pi\rho/3$  es un extremo. Ahora, queremos saber si es un mínimo o un máximo. Como la ecuación (3.60) muestra que la curvatura de  $y$  es siempre positiva, el punto  $x = 5/2$  es un mínimo. La función  $y$  tiene un mínimo positivo para valores positivos de la densidad de materia  $\rho$ , *i.e.* la función es siempre positiva, entonces para el caso  $(A^2 - 3B) > 0$ , la solución del lado izquierdo de la ecuación (3.48) es aplicable.

Combinando el lado derecho y el lado izquierdo de las ecuaciones (3.53) y (3.56), tenemos las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho} \ln \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) &= \frac{1}{C} \left[ \ln \left( \frac{3p + A - C}{3p + A + C} \right) - \ln \left( \frac{3p_c + A - C}{3p_c + A + C} \right) \right] \Rightarrow \\ \frac{3p + A - C}{3p + A + C} &= \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{C}{2\rho}} \frac{3p_c + A - C}{3p_c + A + C}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde

$$C = \sqrt{A^2 - 3B}. \quad (3.64)$$

Para eliminar  $p_c$ , sustituimos el valor  $p(r = R) = 0$ , en la superficie de la estrella, y usando la ecuación (3.62), obtenemos

$$\frac{3p_c + A - C}{3p_c + A + C} = \frac{A - C}{A + C} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{\frac{C}{2\rho}}. \quad (3.65)$$

Combinando la ecuación (3.63) y la ecuación (3.64) tenemos que la presión  $p$  es

$$p = \frac{C - A + (A - C) \left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - R^2}\right)^{\frac{C}{2\rho}}}{3 \left[1 - \frac{A - C}{A + C} \left(\frac{a^2 - r^2}{a^2 - R^2}\right)^{\frac{C}{2\rho}}\right]}. \quad (3.66)$$

Si sustituimos el valor de la constante cosmológica  $\Lambda = 0$  en la ecuación (3.65), debemos ser capaces de reproducir la ecuación (3.16). Haciendo la sustitución de  $\Lambda = 0$  en la ecuación (3.54) y después colocando el resultado en la ecuación (3.63) llegamos a los valores de  $A$ ,  $B$  y  $C$

$$A = 2\rho, \quad B = \rho^2, \quad C = \rho. \quad (3.67)$$

Colocando estos valores en la ecuación (3.65)

$$p = \frac{\rho \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - R^2}} - \rho}{3 - \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2 - R^2}}} = \rho \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}}}{3\sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}. \quad (3.68)$$

Finalmente sustituimos la definición de  $a$ , ecuación (3.46) en (3.67), y obtenemos

$$p = \rho \frac{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}} - \sqrt{1 - \frac{R^2}{a^2}}}{3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}}, \quad (3.69)$$

donde  $M = 4\pi\rho R^3/3$ . Esta ecuación es la misma que la ecuación (3.16), como era de esperarse.

### 3.6. Derivación alternativa de la Presión con Constante Cosmológica

Esta forma alternativa de derivar la presión para una estrella incompresible ( $\rho(r) = \rho$ ) con constante cosmológica, nos da una manera más sencilla de encontrar el valor máximo de la masa de una estrella de neutrones. La única diferencia en la derivación de la sección anterior es la notación.

Comenzamos con la ecuación (3.48), la integramos desde la superficie de la estrella donde  $r = R$  y  $p(R) = 0$ .

$$\int_0^p \frac{dp'}{(\rho + p')(\rho + 3p' - \Lambda a^2 \rho)} = -\frac{1}{2\rho a^2} \int_R^r \frac{r' dr'}{1 - \frac{r'^2}{a^2}}. \quad (3.70)$$

La integral del lado derecho de la ecuación es como anteriormente

$$I_D = \frac{1}{2\rho} \ln(\cos \chi') \Big|_{\chi_R}^{\chi} = \frac{1}{2\rho} \ln\left(\frac{\cos \chi}{\cos \chi_R}\right), \quad (3.71)$$

con

$$\sin \chi_R = \frac{R}{a}. \quad (3.72)$$

La integral del lado izquierdo de la ecuación (3.69) es

$$I_I = \int_0^p \frac{dp'}{(\rho + p')(k\rho + 3p')}, \quad (3.73)$$

donde

$$k = 1 - \Lambda a^2. \quad (3.74)$$

Usando fracciones parciales en  $I_I$ , obtenemos

$$I_I = \frac{1}{\rho(k-3)} \int_0^p \left[ \frac{1}{\rho + p'} - \frac{3}{k\rho + 3p'} \right]. \quad (3.75)$$

Realizando la integración nos da

$$\begin{aligned} I_I &= \frac{1}{\rho(k-3)} [\ln(\rho + p') - \ln(k\rho + 3p')] \Big|_0^p \\ &= \frac{-1}{\rho(k-3)} \left[ \ln\left(\frac{k\rho + 3p}{\rho + p}\right) + \ln(k) \right] \\ &= \frac{-1}{\rho(k-3)} \ln\left(\frac{k(k\rho + 3p)}{(\rho + p)}\right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Igualando la ecuación (3.70) con la ecuación (3.75), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{-1}{k-3} \ln \left( \frac{k(k\rho + 3p)}{\rho + p} \right) &= \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\cos \chi}{\cos \chi_R} \right) \Rightarrow \\ \frac{k(k\rho + 3p)}{\rho + p} &= \left( \frac{\cos \chi}{\cos \chi_R} \right)^{\frac{3-k}{2}}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Esto da como resultado una expresión para la presión

$$p = \rho \frac{\cos \chi^{\frac{3-k}{2}} - k^2 \cos \chi_R^{\frac{3-k}{2}}}{3k \cos \chi_R^{\frac{3-k}{2}} - \cos \chi^{\frac{3-k}{2}}}. \quad (3.78)$$

Si ponemos la constante cosmológica ( $\Lambda = 0$  *i.e.*  $k = 1$ ) llegamos a

$$p = \rho \frac{\cos \chi - \cos \chi_R}{3 \cos \chi_R - \cos \chi}. \quad (3.79)$$

La ecuación (3.77) es graficada para distintos valores de la constante cosmológica  $\Lambda$  (*i.e.* de  $k$ ) y se muestra en la Figura 3.4.

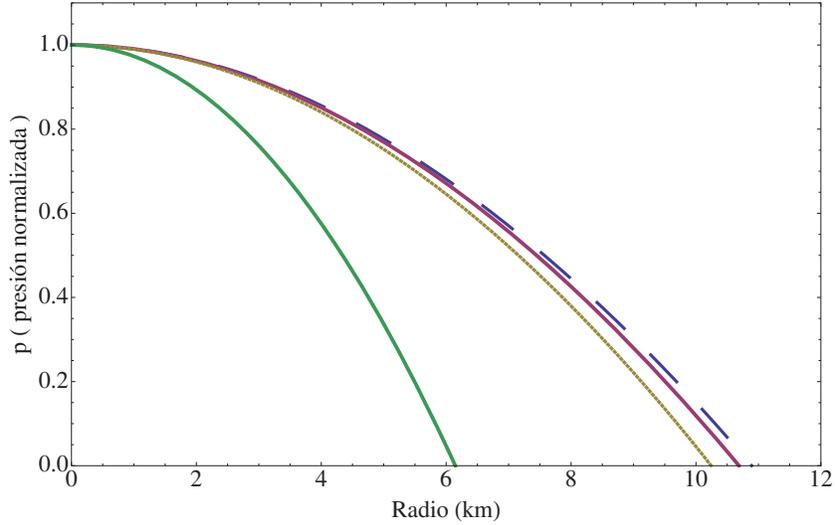


Figura 3.4: Presión normalizada como función del radio de una estrella de neutrones de densidad para distintos valores de  $k$  *i.e.*, para distintos valores de  $\Lambda$ , Ec. (3.77). En donde  $k = 0,96$  (curva punteada),  $k = 0,97$  (curva continua entre curvas punteadas),  $k = 0,99$  (curva en líneas y puntos) y  $k = 1,1$  (primera curva continua).

Las estrellas de neutrones usualmente tienen una masa de  $1.35\text{-}2.1 M_{\odot}$  y un radio de sólo  $10 - 20$  km (donde las estrellas con masas más grandes, tienen radios más pequeños) provocando que la densidad sea del orden de la densidad nuclear ( $\sim 10^{18} \text{kg/m}^3$ ) [23]. La sustitución de las ecuaciones (3.35) y (3.39) en la ecuación (3.66) nos da como resultado

$$k = 1 - \frac{\rho_{vac}}{\rho}. \quad (3.80)$$

Para  $k = 0,999999999$ , la densidad del vacío  $\rho_{vac}$  es el  $10^{-7}\%$  de la densidad de materia  $\rho$  de la estrella de neutrones. Es un valor muy grande de la densidad del vacío, es del orden de la densidad de materia promedio del universo, que es aproximadamente dos átomos de hidrógeno por metro cúbico ( $\sim 10^{-27} \text{kg/m}^3$ ) [22]. Como la densidad de una estrella de neutrones es del orden de  $\sim 10^{18} \text{kg/m}^3$  [23], esto hace que  $\rho_{vac}$  tenga un orden de  $10^{36}$ , *i.e.* mucho más grande de lo que podría ser. Incluso este valor es demasiado grande para la constante cosmológica  $\Lambda$ , lo cual resulta en un cambio en el radio de la estrella de neutrones de aproximadamente un  $15\%$ . Entonces concluimos que la presencia de la constante cosmológica no afectará la presión ni

el radio de una estrella de neutrones, al menos que sea del orden  $10^{36}$  mayor de lo previsto, lo cual es muy poco probable.

En la Figura 3.5, se muestra la presión como función del radio de una estrella de neutrones con densidad constante, para distintos valores de la constante cosmológica  $\Lambda$ , en los casos Newtoniano y de la ecuación de TOV con constante cosmológica.

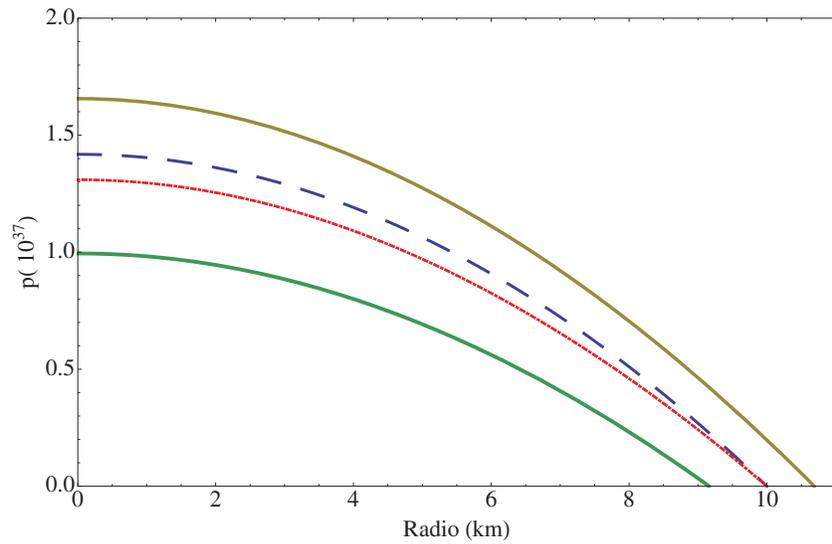


Figura 3.5: Presión como función del radio de una estrella de neutrones con densidad constante para el caso Newtoniano (curva punteada), relativista (curva en líneas y puntos) y relativista con constante cosmológica  $\Lambda = 0,0001327$  (curva continua de arriba) y  $\Lambda = -0,0001327$  (curva continua de abajo).

### 3.7. El límite superior para la masa

El límite superior de la masa sólo puede ser calculado para algunas estrellas de neutrones. Si la masa es superior a este límite, habrá una singularidad gravitacional, el equilibrio cesará, y en algunos casos el resultado final del colapso será un agujero negro.

El origen de este límite radica en la RE. Esto hace que en la teoría newtoniana pura no se tenga un límite para la masa. Las teorías que incorporan la RE, tales como el modelo de gas de Fermi que provee una masa máxima en ambos casos cuando usamos las ecuaciones del equilibrio hidrostático y las ecuaciones de TOV con correcciones relativistas. Las ecuaciones de TOV, sin embargo, no exigen el uso del modelo de gas de Fermi para indicar una masa máxima, ya que estas ecuaciones incorporan tanto la RE como la RG.

De la ecuación (3.8) la masa es

$$M = \frac{4\pi\rho R^3}{3}, \quad (3.81)$$

donde  $M = M(R)$  es la masa de la estrella. Combinando las ecuaciones (3.46) y (3.71) obtenemos

$$\sin^2 \chi_R = \frac{2M}{R}. \quad (3.82)$$

Sustituyendo el valor  $p(r = 0) = p_c$  en la ecuación (3.77) nos da una expresión para la presión central de la estrella

$$p_c = \rho \frac{1 - k^2 \cos^{\frac{3-k}{2}} \chi_R}{3k \cos^{\frac{3-k}{2}} \chi_R - 1}. \quad (3.83)$$

Como la presión  $p$  siempre tiene que ser mayor a cero para una estrella estable, tenemos la condición para el denominador de la ecuación (3.82)

$$3k \cos^{\frac{3-k}{2}} \chi_R - 1 > 0 \Rightarrow \cos \chi_R > \left( \frac{1}{3k} \right)^{\frac{2}{3-k}}. \quad (3.84)$$

Ahora si usamos la identidad trigonométrica  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , aplicada a  $\cos^2 \chi_R + \sin^2 \chi_R = 1$ , entonces sabiendo que  $\cos \chi_R > \left(\frac{1}{3k}\right)^{\frac{2}{3-k}} \Rightarrow \cos^2 \chi_R > \left(\frac{1}{3k}\right)^{\frac{4}{3-k}}$ , nos lleva a que

$$\sin^2 \chi_R < 1 - \left(\frac{1}{3k}\right)^{\frac{4}{3-k}}. \quad (3.85)$$

Sustituyendo la ecuación (3.71) en la ecuación (3.81) obtenemos una expresión para la masa

$$M = \frac{a}{2} \sin^3 \chi_R. \quad (3.86)$$

Poniendo la ecuación (3.46) en la ecuación (3.85) implica que

$$M = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}} \sin^3 \chi_R. \quad (3.87)$$

Finalmente, usando la condición de la ecuación (3.84) obtenemos una cota para la masa

$$M < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3k}\right)^{\frac{4}{3-k}} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (3.88)$$

De la ecuación (3.87), notamos que tiene una dependencia del orden  $1/\sqrt{\rho}$ . También podemos ver que la masa máxima de la estrella depende de la constante cosmológica, esto sólo pasa en el caso de una estrella con densidad constante, ya que como veremos en capítulos posteriores para estrellas con densidad de energía variable la influencia de la constante cosmológica en la masa de una estrella de neutrones no es significativa.

En el caso particular cuando la constante cosmológica  $\Lambda = 0$  y  $k = 1$ , la ecuación (3.87) se convierte en

$$M < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}} \frac{8\sqrt{2}}{27}. \quad (3.89)$$

De la ecuación (3.88), vemos que la masa máxima depende inversamente de la densidad  $\rho$ . Podemos explicarlo físicamente usando el hecho de que cuando la densidad decrece, las partículas en la estrella aumentan su energía cinética (son más relativistas), entonces la presión central aumenta, por lo tanto soportan una masa mayor.

En el siguiente capítulo resolveremos numéricamente las ecuaciones de TOV para las estrellas enanas blancas con una densidad de energía  $\epsilon(r)$  variable.

# Capítulo 4

## Soluciones Numéricas para Estrellas Enanas Blancas

En este capítulo, utilizaremos la teoría newtoniana del equilibrio hidrostático para realizar una integración numérica y encontrar las masas y los radios de enanas blancas, tanto en el caso relativista como en el no relativista.

### 4.1. Estructura de las Ecuaciones Adimensionales

La ecuación del equilibrio en el régimen newtoniano es [24]

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (4.1)$$

La definición de la densidad de energía  $\epsilon(r)$  es

$$\rho(r) = \frac{\epsilon(r)}{c^2}. \quad (4.2)$$

Esta ecuación introduce la RE en la teoría, ya que es equivalente a la famosa ecuación de Einstein,  $E = mc^2$ . Insertando la ecuación (4.2) en la ecuación (4.1) produce

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\bar{M}(r)\epsilon(r)M_{\odot}\rho(r)}{c^2r^2}, \quad (4.3)$$

con

$$m(r) = \bar{M}(r)M_{\odot}, \quad (4.4)$$

tal que  $M_{\odot}$  es la masa del sol, y  $\bar{M}(r)$  es un número adimensional. La ecuación (4.3) puede ser escrita en la forma:

$$\frac{dp}{dr} = -R_0 \frac{\bar{M}(r)\epsilon(r)}{r^2}, \quad (4.5)$$

donde se define  $R_0 = GM_{\odot}/c^2 = 1,47km$ . En la ecuación (4.5)  $p$  y  $\epsilon$  tienen dimensiones de energía / (longitud)<sup>3</sup>. Entonces, definimos la densidad de energía  $\bar{\epsilon}$ , y la presión  $\bar{p}$  adimensionales como:

$$p = \epsilon_0 \bar{p}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \bar{\epsilon}, \quad (4.6)$$

tal que  $\epsilon_0$  tiene dimensiones de densidad de energía, y puede ser escogida arbitrariamente. Basamos esta decisión en los números adimensionales que definen el problema. Para una estrella politrópica, podemos escribir

$$\bar{p} = \bar{K} \bar{\epsilon}^{\gamma}, \quad (4.7)$$

donde

$$\bar{K} = K \epsilon_0^{\gamma-1}, \quad (4.8)$$

$\bar{K}$  y  $K$  tiene diferentes valores dependiendo si es el caso relativista o no relativista. Es decir para cada caso tenemos [2, 4]

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left( \frac{3\pi^2 Z}{Am_N c^2} \right)^{\frac{4}{3}}, \quad K_{norel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left( \frac{3\pi^2 Z}{Am_N c^2} \right)^{\frac{5}{3}}, \quad (4.9)$$

[2], donde  $Z$  es el número de protones y  $m_N$  masa de los nucleones. La constante  $\gamma = 4/3$  en el caso relativista, y  $\gamma = 5/3$  en el caso no relativista. Poniendo la ecuación (4.8) en la ecuación (4.5) obtenemos

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{\alpha \bar{p}(r)^{\frac{1}{\gamma}} \bar{M}(r)}{r^2}, \quad (4.10)$$

tal que definimos la constante  $\alpha$  como

$$\alpha = \frac{R_0}{\bar{K}^{\frac{1}{\gamma}}} = \frac{R_0}{(K \epsilon_0^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (4.11)$$

Aquí  $R_0$  tiene dimensiones de longitud ( $km$ ), entonces  $\alpha$  está en  $km$ , y la ecuación (4.11) tiene dimensiones de  $km^{-1}$ . Como  $\epsilon_0$  es aún libre, podemos escoger cualquier valor conveniente de  $\alpha$ . Para un valor dado de  $\alpha$ ,  $\epsilon_0$  está dado por la ecuación (4.11) de la forma

$$\epsilon_0 = \left[ \frac{1}{K} \left( \frac{R_0}{\alpha} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \quad (4.12)$$

También deseamos tener la otra ecuación acoplada, para eso usamos la ecuación (3.1)

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r). \quad (4.13)$$

Para convertirla a una forma adimensional combinamos las ecuaciones (4.2), (4.4) y (4.6) implica

$$\frac{d\bar{M}(r)}{dr} = \beta r^2 [\bar{p}(r)]^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (4.14)$$

en donde

$$\beta = \frac{4\pi\epsilon_0}{M_\odot c^2 (K \epsilon_0^{\gamma-1})^{\frac{1}{\gamma}}}. \quad (4.15)$$

La ecuación (4.14) tiene dimensiones de  $km^{-1}$ .

Estos son los ingredientes que utilizaremos para resolver numéricamente las ecuaciones del equilibrio hidrostático de Newton.

## 4.2. Integración Numérica

Integraremos numéricamente las ecuaciones adimensionales (4.10) y (4.14) desde valores iniciales en el centro de la estrella. Para hacer esto necesitamos los valores de la presión central y de la masa. El valor de  $\bar{M}(0)$  tiene que ser cero en el centro, y  $\bar{p}(0)$  debe ser positivo. La presión tenderá a cero y la masa se incrementará hacia la masa total de la estrella. El radio de la estrella  $R$  y la masa  $M = \bar{M}(R)$  cambiarán dependiendo de la elección de  $\bar{p}(0)$ .

Deseamos que las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  no sean muy distintas la una de la otra con la finalidad (numérica) de tener estabilidad en la resolución numérica de las ecuaciones. Lo anterior se puede arreglar, tanto para el caso relativista como para el no relativista.

Para resolver estas ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, se utiliza una rutina NDSolve en Mathematica usando el método de Runge-Kutta de octavo orden a paso constante, o en algunos casos se usará un método de solución automático que indicará cual es el método más indicado para la solución de las ecuaciones. El valor de  $r$  en el centro será igual a 0.0000001 en lugar de cero para evitar la división por cero. Mostramos el programa en el apéndice C.

## 4.3. Condiciones Iniciales

### 4.3.1. El Caso Relativista

El régimen relativista incluye a las enanas blancas de mayor masa. Para una masa grande se necesita una mayor presión central para soportarla, lo que provoca que los electrones sean relativistas.

Siguiendo la referencia [4], elegimos el valor  $\alpha = R_0 = 1,473km$ , de donde  $\epsilon_0 = 4,17M_\odot c^2/km^3$  y  $\beta = 52,46km^{-3}$ .

Para la presión central elegimos valores similares a  $\bar{p}(0) \sim 10^{-15}$ , ya que estos están en el régimen relativista. La Tabla 1 muestra los resultados numéricos de nuestro programa para  $R$  y  $\bar{M}$ , así como de su dependencia con  $\bar{p}(0)$ .

### 4.3.2. El Caso no Relativista

Para este caso la presión central  $\bar{p}(0)$  llega a ser menor. Entonces los electrones ya no son relativistas. Para presiones más pequeñas, sólo podemos tener estrellas menos masivas a diferencia que en el caso relativista, por lo que las estrellas enanas blancas no relativistas se encuentran en el extremo de la escala de masa. Estas estrellas no relativistas tienen radios más grandes que sus contrapartes relativistas.

Cuando vamos al límite no relativista,  $\gamma = 5/3$  en la EDE politrópica, ecuación (4.7). La integración se realiza de la misma forma que en el caso relativista, sólo que se cambia el valor de  $\gamma$ .

Al igual que en la referencia [4], elegimos:  $\alpha = 0,05km$ , de tal manera que  $\epsilon_0 = 0.01392M_\odot c^2/km^3$  y  $\beta = 0.00592 km^{-3}$ .

El valor de  $\alpha$  de este caso es menor que el valor de  $\alpha$  en el límite no relativista. Los valores de la presión central deben ser  $\bar{p}(0) \leq 10^{-15}$  [2] para una estrella no relativista. La Tabla 2 muestra los resultados de nuestro programa para  $R$  y  $\bar{M}$ , y su dependencia con  $\bar{p}(0)$ .

## 4.4. Resultados de la Integración Numérica

Para el caso relativista, obtuvimos los valores del radio y de la masa, y éstos se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1: Radio (en  $km$ ) y masa (en  $M_\odot$ ) para una enana blanca con un gas de Fermi de electrones relativistas.

Presión central $\bar{p}(0)$	Radio $R (km)$	Masa $\bar{M} (M_\odot)$
$10^{-14}$	5000	1.24693
$10^{-15}$	8900	1.24693
$10^{-16}$	15700	1.24693

Como se muestra en la Tabla 1, para enanas blancas de distintos radios obtenemos la misma masa.

En las figuras 4.1 y 4.2 mostramos las gráficas obtenidas para la presión adimensional y la masa como función del radio de una enana blanca.

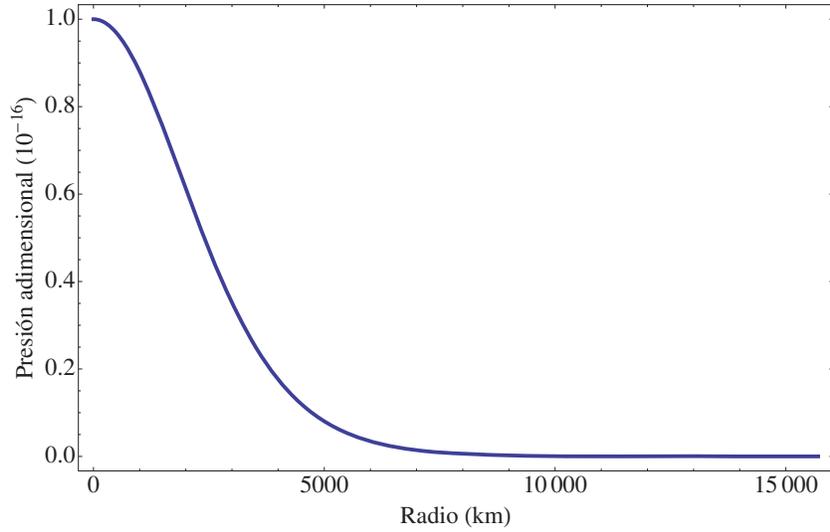


Figura 4.1: Gráfica que muestra la presión adimensional como función del radio de una enana blanca politropa para un gas de electrones relativistas de Fermi con una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-16}$ .

En la figura 4.1 la presión adimensional  $\bar{p}(r)$  llega ser más pequeña en alrededor de 5000 *km* antes de que se haga cero en 10000 *km*. Entonces, esta estrella tiene una atmósfera muy alta.

Para el caso del gas de Fermi no relativista, obtuvimos los valores que se muestran en la Tabla 2 para el radio y la masa de la estrella.

Tabla 2: Radio (en *km*) y masa (en  $M_{\odot}$ ) para una enana blanca con un gas de Fermi de electrones no relativistas.

Presión central $\bar{p}(0)$	Radio $R$ ( <i>km</i> )	Masa $\bar{M}$ ( $M_{\odot}$ )
$10^{-15}$	10650	0.394245
$10^{-16}$	13400	0.197591
$10^{-17}$	16850	0.099029

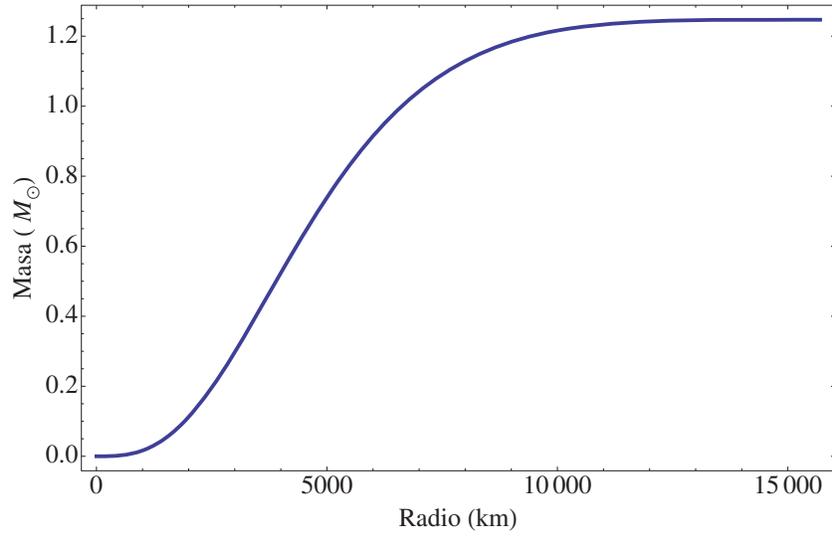


Figura 4.2: Gráfica que muestra a la masa (en  $M_{\odot}$ ) de una enana blanca como función del radio para un gas de electrones relativistas de Fermi con una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-16}$ .

La Tabla 2 muestra que en el caso no relativista la masa de la estrella depende de la presión central, es decir, la masa disminuye cuando la presión disminuye. Esto también muestra que las enanas blancas no relativistas son menos masivas que las relativistas, como se esperaba.

En la Figura 4.3 se muestra a la presión adimensional como función del radio para una enana blanca.

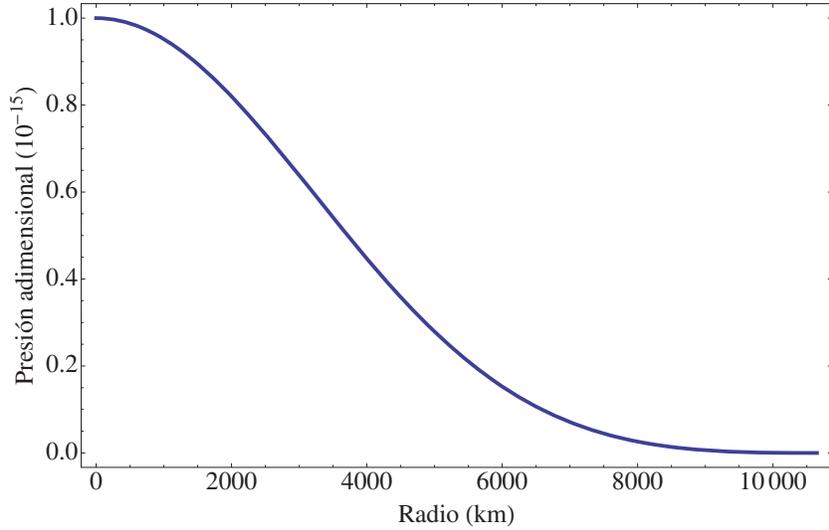


Figura 4.3: Gráfica que muestra la presión adimensional como función del radio para una enana blanca politropa con un gas de electrones no relativistas de Fermi para una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-15}$ .

En la Figura 4.3 la presión adimensional llega a ser más pequeña en alrededor de 1000  $km$  antes de que tienda a cero en 10650  $km$ . Por lo tanto, esta estrella enana blanca no relativista tiene una atmósfera mucho más pequeña que una enana blanca relativista. La masa de una enana blanca no relativista es más pequeña que la relativista, pero el radio es más grande para el caso no relativista, *i.e.* la densidad es mucho más pequeña para la enana blanca no relativista comparada con su contraparte relativista.

Existe un método desarrollado por Lane-Emden [18], para calcular de una forma semianalítica la masa y el radio de una enana blanca, a través de [23]

$$M = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{3}{2}} \rho_c^{\frac{(3-n)}{2n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|, \quad (4.16)$$

para la masa de la estrella. La densidad  $\rho_c \propto \bar{p}(0)$  y la constantes  $n = 1/(\gamma - 1)$  y  $K$  son para las ecuaciones politrópicas (4.7) y (4.8) respectivamente.

También sabemos que  $\xi_1$  y  $|\theta'(\xi_1)|$  son constantes numéricas que dependen de la elección de  $\gamma$ . Así como que  $\xi$  es el radio adimensional, y  $\theta(\xi_1)$  es la densidad adimensional de la estrella. Definimos  $\xi_1$  como el punto que corresponde a la superficie de la estrella, *i.e.*  $|\theta(\xi_1)| = 0$ .

Para el caso relativista tendremos  $\gamma = 4/3$ , y entonces será independiente de la presión central. El enfoque de Lane-Emden nos da una ecuación para la dependencia radial de la masa [23]:

$$M = 4\pi R^{\frac{(3-n)}{(1-n)}} \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{\frac{n}{(n-1)}} \xi_1^{\frac{(3-n)}{1-n}} \xi_1^2 |\theta'(\xi_1)|. \quad (4.17)$$

De esta ecuación, vemos que el radio decrece cuando la masa crece. Entonces, las enanas blancas más masivas son también las más pequeñas. La excepción es para  $n = 3$ , el caso ultrarelativista, donde la masa es independiente del radio.

En el siguiente capítulo resolveremos numéricamente las ecuaciones de TOV para las estrellas de neutrones con una densidad de energía variable  $\epsilon(r)$ . Así como también haremos un análisis similar al que se hizo en este capítulo.

# Capítulo 5

## Soluciones Numéricas para Estrellas de Neutrones

En este capítulo, encontraremos numéricamente las masas y los radios para estrellas de neutrones. La teoría sobre las estrellas de neutrones que se utilizará aquí difiere de la teoría usada para las enanas blancas, debido a que se usarán las ecuaciones de TOV que incorporan la RG, además de las contribuciones que provienen de la RE. Los tres factores adimensionales en la ecuación de TOV que representan dichas contribuciones se muestran en la siguiente ecuación.

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G\epsilon(r)M(r)}{c^2r^2} \left[1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 p(r)}{M(r)c^2}\right] \left[1 - \frac{2GM(r)}{c^2r}\right]^{-1}. \quad (5.1)$$

Los primeros dos corchetes cuadrados contienen factores de los efectos de la RE que son del orden  $v^2/c^2$ , donde  $v$  es la velocidad de las partículas. Los factores del orden  $v^2/c^2$  entran porque, en el límite no relativista, la presión  $p$  varía como  $k_F^2/2m = mv^2/2$ , y para el caso de  $\epsilon(r)$  y  $M(r)c^2$  varían como  $mc^2$ . El tercer factor representa el efecto de la RG [23].

La elección de la ecuación de estado estará basada en el modelo del gas de Fermi para neutrones en lugar de usar electrones como en el capítulo 4. Este modelo no es realista por dos razones. En primer lugar, se desprecian importantes contribuciones a la densidad de energía causada por la interacción nucleón-nucleón. En segundo lugar, una estrella de neutrones no sólo contiene neutrones, sino también una fracción de protones y electrones, los cuales provocan que los neutrones decaigan en protones y electrones mediante la

interacción débil. Se dará una explicación más extensa de lo anterior en el próximo capítulo.

## 5.1. Estructura Adimensional de las Ecuaciones

Usando el modelo descrito para una estrella de neutrones, podemos tomar en cuenta los resultados del capítulo anterior sobre las enanas blancas, sólo que cambiaremos la masa del electrón  $m_e$  por la masa del neutrón  $m_n$  en las ecuaciones (4.10) y (4.14). Esto dará el resultado de la teoría newtoniana. Para incluir la RG, tenemos que usar la ecuación de TOV (5.1), junto con la ecuación (4.14). Mediante las definiciones de las variables adimensionales para la masa, presión y densidad de energía, tenemos que

$$M(r) = M_\odot \bar{M}(r), \quad p = \epsilon_0 \bar{p}, \quad \epsilon = \epsilon_0 \bar{\epsilon}, \quad (5.2)$$

entonces la ecuación de TOV para la presión adimensional es

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{\alpha \bar{p}(r)^{\frac{1}{\gamma}} \bar{M}(r)}{r^2} \left[ 1 + \bar{K}^{\frac{1}{\gamma}} \bar{p}(r) \right] \left[ 1 + \delta r^3 \frac{\bar{p}(r)}{\bar{M}(r)} \right] \left[ 1 - \frac{2R_0 \bar{M}(r)}{r} \right]^{-1}. \quad (5.3)$$

Aquí

$$\delta = \frac{4\pi}{M_\odot c^2} \left[ \frac{1}{K} \left( \frac{R_0}{\alpha} \right)^\gamma \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (5.4)$$

y las demás constantes ya se definieron en el capítulo anterior.

## 5.2. Condiciones Iniciales

### 5.2.1. El Caso no Relativista

Como en el caso no relativista para las enanas blancas, el índice politrópico es  $\gamma = 5/3$ . En este caso la ecuación (4.9) se convierte en

$$K_{norel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_n} \left( \frac{3\pi^2 Z}{A m_N c^2} \right)^{\frac{5}{3}}. \quad (5.5)$$

Cuando escogemos el valor de  $\alpha = 1km$ , el factor de escala  $\epsilon_0$  está dado por  $\epsilon_0 = 1,603 \times 10^{37} J/m^3$ , y  $\beta = 0,7636km^{-3}$ .

En este caso las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  son numéricamente del mismo orden.

Una estrella de neutrones típica tiene una masa del orden de una masa del sol ( $M_\odot$ ) y un radio de  $10 km$ , entonces el valor de la presión central es  $\bar{p}(0) \sim 10^{-4}$  o menor. Usaremos un programa que es esencialmente el mismo que para una enana blanca no relativista, y los resultados los mostraremos en la Tabla 3.

### 5.2.2. El Caso Relativista

La ecuación politrópica en este caso tiene un  $\gamma = 1$ , lo cual nos da  $p = \epsilon/3$ , que es un resultado bien conocido para un gas relativista [2]. Las ecuaciones (4.7) y (4.8) nos permiten obtener los valores  $K = \bar{K} = 1/3$ . Seguiremos usando el mismo valor del factor de escala como en el caso no relativista,  $\epsilon_0 = 1,603 \times 10^{37} J/m^3$ . En este caso  $\alpha = 3R_0 = 4,428 km$  y  $\beta = 3,374km^{-3}$ .

La presión central  $\bar{p}(0)$  se espera que sea mayor a  $10^{-4}$  ya que este valor fué elegido para el caso no relativista. El programa que usamos para realizar la integración numérica se muestra en el apéndice C.

La integración numérica realizada en nuestro programa, sin embargo, no nos da valores esperados del radio y la masa de una estrella de neutrones. Esto es porque la presión que se muestra en la Figura 5.1 decae monótonamente a cero, pero nunca pasa por el cero. La razón es porque este modelo falla para una ecuación de estado de gas relativista la cual no es apropiada para tales presiones bajas. Por su parte, la masa se muestra en la Figura 5.2, para el caso de una estrella de neutrones politropa con un gas de Fermi relativista.

## 5.3. Resultados Numéricos para Estrellas de Neutrones

Los efectos de la RG son pequeños, pero aumentan cuando la presión central aumenta, como se esperaría. Las estrellas de neutrones menos masivas tienen los radios más grandes como en el caso de las enanas blancas, porque

la atracción gravitacional es menor y entonces la estrella se extiende a radios grandes.

Tabla 3: Radio (en  $km$ ) y masa (en  $M_{\odot}$ ) para una estrella de neutrones con una ecuación de estado de gas de Fermi no relativista.

Presión Central $\bar{p}(0)$	Radio (Newton) $R$ ( $km$ )	Masa (Newton) $\bar{M}$ ( $M_{\odot}$ )	Radio (RG) $R$ ( $km$ )	Masa (RG) $\bar{M}$ ( $M_{\odot}$ )
$10^{-4}$	16.7	0.774633	15.31	0.61829
$10^{-5}$	20.9	0.388236	20.15	0.35365
$10^{-6}$	26.4	0.194579	25.85	0.18737

Como se muestra en la Tabla 3, el radio aumenta cuando la presión central disminuye. Para la masa podemos observar que disminuye cuando la presión central es menor. Sin embargo, estos valores nos son los esperados para una estrella de neutrones.

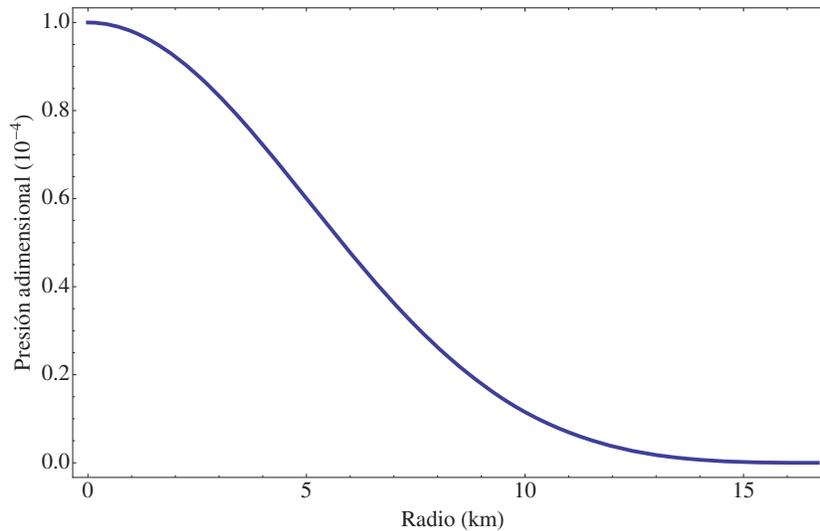


Figura 5.1: Gráfica que muestra la presión adimensional como función del radio de una estrella de neutrones politropa para un gas de electrones relativistas de Fermi, y una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-4}$ .

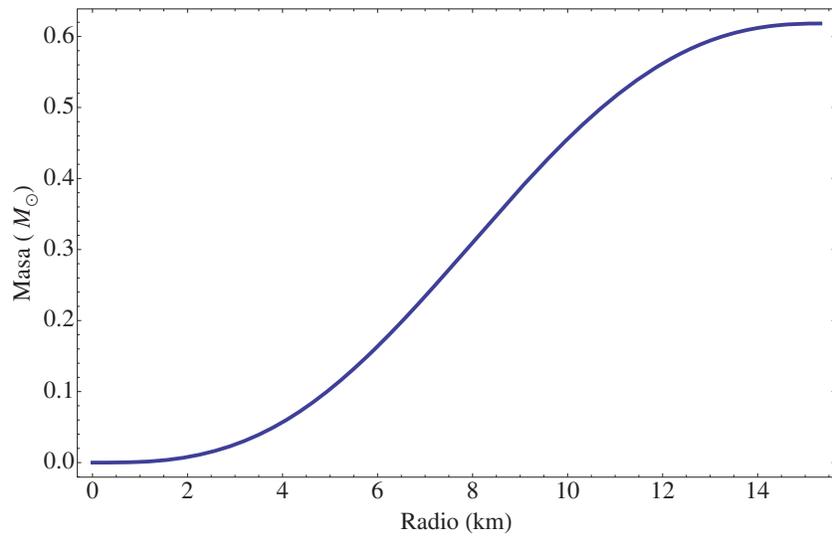


Figura 5.2: Gráfica que muestra la masa (en  $M_{\odot}$ ) como función del radio de una estrella de neutrones politropa para un gas de electrones relativistas de Fermi, y una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-4}$ .

En el próximo capítulo analizaremos el caso de la ecuación de estado para la relatividad arbitraria, la cual tiene un carácter más general y nos permitirá obtener resultados numéricos más precisos para el radio y la masa de una estrella de neutrones.

# Capítulo 6

## La Ecuación de Estado para la Relatividad Arbitraria

En este capítulo encontraremos una ecuación de estado para un gas de electrones y neutrones para enanas blancas y estrellas de neutrones respectivamente. Dicha Ecuación de Estado (EE) será útil para los casos relativista y no relativista.

### 6.1. Enanas Blancas

Para el caso de las estrellas enanas blancas, derivaremos el modelo de gas de electrones y lo usaremos junto con la ecuación para las estrellas politrópicas y así encontraremos una ecuación de estado adecuada para la relatividad arbitraria de las enanas blancas.

#### 6.1.1. El Modelo del Gas de Fermi para Electrones

El número de estados  $dn$  con momentum entre el momentum  $k$  y el  $k + dk$  para electrones libres es [2]

$$dn = \frac{gd^3k}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4\pi gk^2 dk}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (6.1)$$

en tres dimensiones isotrópicas. Aquí,  $g$  es el factor de degeneración, y es igual a 2, porque hay 2 estados de espín para cada nivel de energía del electrón.

Realizando la integración de la ecuación (6.1) llegamos a

$$n = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad (6.2)$$

con  $k_F = E_F/c$  el momento de Fermi (la energía de Fermi dividida por la velocidad de la luz) para los electrones en la estrella.

La densidad de masa de la estrella está dada por

$$\rho = nm_N \frac{A}{Z}, \quad (6.3)$$

donde la masa del electrón  $m_e$  es despreciada con respecto a la masa del nucleón  $m_N$  (la cual es  $\sim 2000 m_e$ ). Además definimos  $A/Z$  como el número de nucleones por electrón ( $A$  es el número de nucleones y  $Z$  es el número de protones). Sustituyendo la ecuación (6.2) en la ecuación (6.3), obtenemos

$$\rho = nm_N \frac{A}{Z} \frac{k_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (6.4)$$

Como para las estrellas enanas blancas la densidad de energía está dominada por la masa del nucleón, lo que implica que

$$\epsilon \approx \rho c^2. \quad (6.5)$$

La contribución de la densidad de energía de los electrones es [2]

$$\begin{aligned} \epsilon_{elec}(k_F) &= \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \sqrt{k^2 c^2 + m_e^2 c^4} k^2 dk \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} \left[ (2x^3 + x) \sqrt{1 + x^2} - \operatorname{arcsinh}(x) \right], \end{aligned} \quad (6.6)$$

tal que  $x = k_F/m_e c$ . La densidad total de energía es entonces

$$\epsilon = nm_N c^2 \frac{A}{Z} + \epsilon_{elec}(k_F). \quad (6.7)$$

Para obtener la ecuación de estado, necesitamos también una expresión para la presión. Encontramos dicha expresión de la primera ley de la termodinámica, es decir usando que  $dU = dQ - pdV$  con la temperatura constante  $T = 0$ ,

donde  $dU$  es el cambio en la energía interna,  $dQ$  es el calor transferido y  $dV$  es el cambio de volumen. Entonces obtenemos

$$p = - \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = n^2 \frac{d(\frac{\epsilon}{n})}{dn} = n \frac{d\epsilon}{dn} - \epsilon = n\mu - \epsilon, \quad (6.8)$$

como  $dQ = 0$  porque  $dQ = TdS$ , donde  $T = 0$  es la temperatura y  $dS$  es el cambio en la entropía. La cantidad  $\mu = d\epsilon/dn$  es llamada potencial químico, y nos da la energía requerida para agregar un electrón en la estrella. Combinando las ecuaciones (6.8), (6.6) y (6.5) tenemos que

$$\begin{aligned} p(k_F) &= \frac{8\pi}{3c(2\pi\hbar)^3} \int_0^{k_F} \frac{1}{\sqrt{k^2c^2 + m_e^2c^4}} k^4 dk \\ &= \frac{m_e^4 c^5}{24\pi^2 \hbar^3} \left[ (2x^3 - 3x)\sqrt{1+x^2} + 3\text{arcsinh}(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.9)$$

La Figura 6.1 muestra la gráfica de la densidad de energía  $\epsilon$  contra  $p$ , usando las ecuaciones (6.6) y (6.9).

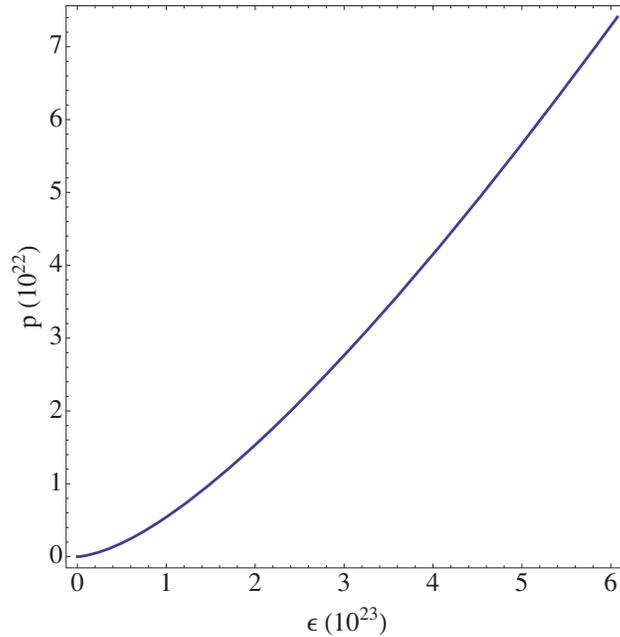


Figura 6.1: La densidad de energía vs. la presión de una enana blanca politrópica que consiste de un gas de Fermi de electrones relativistas.

### 6.1.2. Modelo Politrópico

En el caso relativista, la ecuación (6.9) combinada con la ecuación (6.3) da una ecuación simplificada

$$\begin{aligned}
 p(k_F) &= \frac{m_e^4 c^5}{3\pi^2 \hbar^3} \int_0^{\frac{k_F}{m_e c}} u^3 du \\
 &= \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left( \frac{3\pi^2 Z \rho}{m_N A} \right)^{\frac{4}{3}} \\
 &\approx K_{rel} \epsilon^{\frac{4}{3}}, \tag{6.10}
 \end{aligned}$$

en donde

$$K_{rel} = \frac{\hbar c}{12\pi^2} \left( \frac{3\pi^2 Z \rho}{m_N A} \right)^{\frac{4}{3}}. \tag{6.11}$$

Esto satisface la ecuación politrópica  $p = K\epsilon^\gamma$  con  $\gamma = 4/3$ . En el caso no relativista, sin embargo, hay otra ecuación politrópica. De manera similar que en la derivación de la ecuación (6.10), encontramos

$$p(k_F) = K_{norel} \epsilon^{\frac{5}{3}}, \tag{6.12}$$

tal que

$$K_{norel} = \frac{\hbar^2}{15\pi^2 m_e} \left( \frac{3\pi^2 Z}{A m_N c^2} \right)^{\frac{5}{3}}. \tag{6.13}$$

La ecuación (6.10) describe la presión como una función de la densidad de energía para una enana blanca ultrarelativista, y la ecuación (6.12) describe la presión como una función de la densidad de la energía para una enana blanca no relativista. Reescribimos las ecuaciones de la densidad de energía como una función de la presión

$$\epsilon_R = \left( \frac{p}{K_R} \right)^{\frac{3}{4}}, \quad \epsilon_{NR} = \left( \frac{p}{K_{NR}} \right)^{\frac{3}{5}}. \tag{6.14}$$

Para encontrar una expresión de todo el rango de  $k_F$ , es decir desde el caso de la ecuación no relativista hasta el de la ultrarelativista, debemos combinar las ecuaciones anteriores. La manera de hacer esto es reescribir las ecuaciones (6.14) en una sola, de la forma adimensional

$$\bar{\epsilon}(\bar{p}) = A_{NR}\bar{p}^{\frac{3}{5}} + A_R\bar{p}^{\frac{3}{4}}, \quad (6.15)$$

donde  $A_{NR}$  y  $A_R$  son constantes. Para presiones bajas (no relativistas), el primer término es el dominante, y para presiones altas (ultrarelativistas), el segundo término es el que domina.

## 6.2. Estrellas de Neutrones

Como las estrellas de neutrones del caso ultrarelativista no proporcionan una respuesta para el radio y la masa, queremos encontrar una ecuación factible para valores arbitrarios del parámetro relativo  $x = k_F/m_n c$ . La ecuación para una politrópica  $p = K\epsilon^{\frac{1}{\gamma}}$  tiene el valor  $\gamma = 5/3$  en el caso no relativista, que es igual al valor de  $\gamma$  para el caso de las enanas blancas no relativistas. El valor para el caso ultrarelativista, es por lo tanto diferente.

Para enanas blancas, derivamos el valor de  $\gamma = 4/3$ , pero el valor correspondiente a las estrellas de neutrones es  $\gamma = 1$ . La razón de esto se debe al resultado bien conocido de un gas ultra relativista, que derivamos en las secciones anteriores,  $p = \epsilon/3$  [4]. De esta ecuación observamos que la dependencia entre la presión y la densidad de energía es lineal, resultando  $\gamma = 1$ . Esto es aplicable a las estrellas de neutrones, y no a las enanas blancas debido a una diferencia en la ecuación (6.7). Para las enanas blancas la ecuación está formada de dos términos, el primero es dominante sobre el segundo debido a que la masa del neutrón es aproximadamente 2000 veces mayor que la masa del electrón ( $m_n \approx 2000m_e$ ). El primer término describe la masa-energía en reposo de los nucleones, y el segundo término representa la densidad de energía total de los electrones (en reposo y cinética). Para estrellas de neutrones, sin embargo, el primer término es incorporado en el segundo término (el cual es igual al término para las enanas blancas, con la excepción de la masa del electrón que es reemplazada por la masa del neutrón), *i.e.* hay un sólo término en la ecuación (6.7) para estrellas de neutrones puras ya que no hay electrones presentes. Esta diferencia provoca que cambiemos la ecuación de estado.

La expresión equivalente a la ecuación (6.16) para una estrella de neutrones es

$$\bar{\epsilon}(\bar{p}) = A_{NR}\bar{p}^{\frac{3}{5}} + A_R\bar{p}, \quad (6.16)$$

y la constante  $\epsilon_0$  se define como

$$\epsilon_0 = \frac{m_n^4 c^5}{(3\pi^2 \hbar)^3} \approx 6,26031238 \times 10^{32} J/m^3. \quad (6.17)$$

El resultado varía con la longitud del intervalo del parámetro relativo  $x$  [4]. Para valores grandes de este parámetro, la función  $\bar{\epsilon}$  es dominada por la parte relativista de la dependencia de la presión, y para valores pequeños de  $x$ , es dominada por la parte no relativista. Los valores de las constantes de ajuste  $A_{NR}$  y  $A_R$  por lo tanto variarán tal como cambia la ecuación (6.17) para distintos valores del parámetro  $x$ . Un rango de diferentes intervalos se eligen para mostrar el resultado de este efecto, donde  $0 \leq x \leq x_{max}$ .

Usando un programa hecho en Mathematica encontramos el mejor ajuste de las constantes  $A_{NR}$  y  $A_R$ , los valores son mostrados en la Tabla 4.

Tabla 4: Las constantes no relativistas y relativistas para una estrella de neutrones con un gas de Fermi de electrones arbitrariamente relativistas.

$x_{max}$	$A_{NR}$	$A_R$
100	1.145774	2.999737
200	0.8692956	2.999934
300	0.7393258	2.999971
400	0.6590228	2.999983
500	0.6027763	2.999989
600	0.5603698	2.999993
700	0.5269196	2.999995
800	0.4994799	2.999996
900	0.4765051	2.999997
1000	0.4568627	3.000000

En la Tabla 5 se muestran los valores del radio y la masa de una estrella de neutrones.

Tabla 5: Radio (en km) y masa (en  $M_\odot$ ) para una estrella de neutrones con gas de Fermi de electrones arbitrariamente relativistas para el caso de la mecánica clásica newtoniana y la RG.

$x_{max}$	Radio (Newton) $R(km)$	Masa (Newton) $\bar{M}(M_\odot)$	Radio (RG) $R(km)$	Masa (RG) $\bar{M}(M_\odot)$
100	31	3.62228	25	1.95006
200	39	5.54886	31	2.68175
300	45	7.04456	35	3.19079
400	50	8.30029	37	3.58494
500	54	9.39694	41	3.92291
600	57	10.3788	45	4.21223
700	60	11.2699	47	4.46599
800	63	12.0928	49	4.69498
900	66	12.8559	51	4.90347
1000	69	13.5697	53	5.09549

La definición de  $\epsilon_0$  y la elección del valor  $\alpha = R_0 = 1,476km$ , nos da el valor de  $\beta = 0,03778km^{-3}$  de las ecuaciones (4.11) y (4.15). Escogemos  $\bar{p}(0) = 0,01$  el cual está claramente en el régimen relativista.

Usamos los mismos valores de la referencia [2]

$$A_{NR} = 2,4216 \quad y \quad A_R = 2,8663, \quad (6.18)$$

para las constantes de la ecuación (6.17). No conocemos los detalles de los cálculos para obtener estos valores, por ejemplo podría ser la longitud del intervalo tomado. Sin embargo ni usando una función de ajuste en Mathematica fuimos capaces de reproducir los valores obtenidos en [2]. El programa que hicimos está listado en el apéndice C.

De acuerdo a nuestro programa obtuvimos valores distintos a los de la Tabla 4, por ejemplo para el caso  $x_{max} = 200$ , obtuvimos que  $A_{NR} = 8,82927$  y  $A_R = 2,99993$ . Sin embargo decidimos seguir los valores de la Tabla 3 dados en la referencia [4], para poder comparar así los resultados dados en [2].

Si usamos los valores directamente del artículo [2], somos capaces de reproducir los resultados para el radio y la masa de una estrella de neutrones dentro de los valores numéricos esperados. Nuestros resultados para la masa y el radio usando los valores (6.19) son:

$$R = 15,08\text{km}, \bar{M} = 1,03716M_{\odot} \text{ (Teoría Newtoniana)}$$

$$R = 13,38\text{km}, \bar{M} = 0,716283M_{\odot} \text{ (Relatividad General, TOV)}.$$

La conclusión es que nuestro programa para los cálculos del radio y la masa de una estrella de neutrones es correcto, lo que implica que obtenemos los mismos valores que en [2]:

$$R = 15\text{km}, \bar{M} = 1,037M_{\odot} \text{ (Teoría Newtoniana),}$$

$$R = 13,4\text{km}, \bar{M} = 0,717M_{\odot} \text{ (Relatividad General, TOV)}.$$

La presión y la masa como funciones del radio son graficadas en las figuras 6.2 y 6.3, tal como se muestra a continuación.

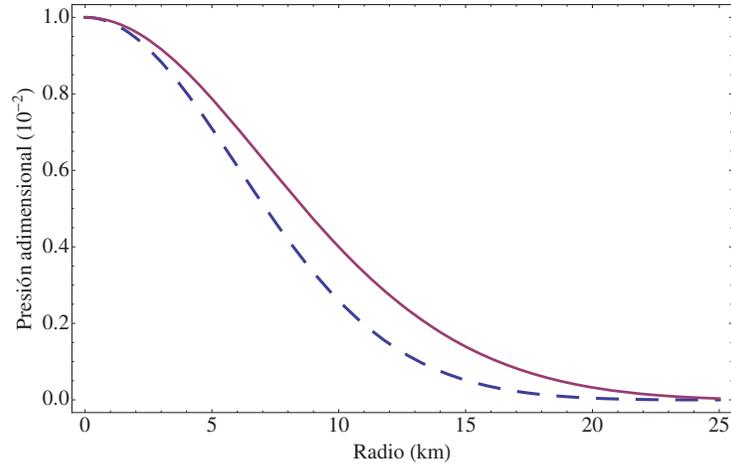


Figura 6.2: La presión adimensional  $\bar{p}(r)$  como una función del radio  $r$  en  $km$  para una estrella de neutrones pura para el caso de RG (curva punteada) y caso Newtoniano (curva continua) con presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  usando la ecuación de estado de Fermi para la relatividad arbitraria, ecuación (6.17), para  $x_{max} = 100$ .

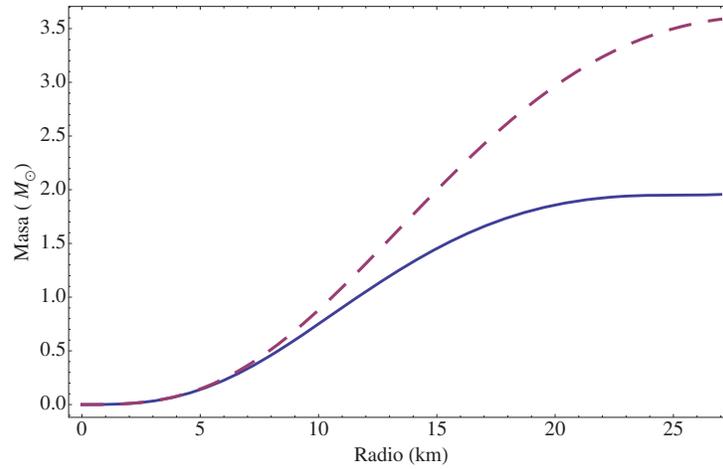


Figura 6.3: La masa  $\bar{M}$  en  $M_{\odot}$  como una función del radio  $r$  en  $km$  para una estrella de neutrones pura para el caso de RG (curva continua) y caso Newtoniano (curva punteada) con una presión central  $\bar{p}(0)$  usando la ecuación de estado de Fermi para relatividad arbitraria, ecuación (6.17), para  $x_{max}=100$ .

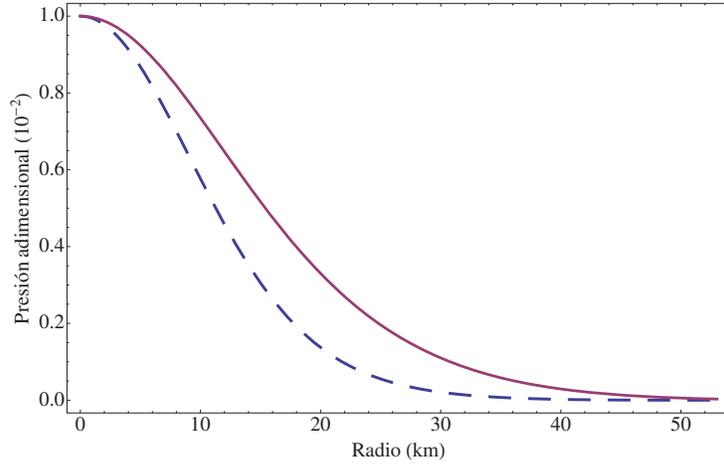


Figura 6.4: Presión adimensional  $\bar{p}(r)$  como una función del radio  $r$  en  $km$  para una estrella de neutrones pura para el caso de RG (curva punteada) y caso Newtoniano (curva continua) con presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  usando la ecuación de estado de Fermi para la relatividad arbitraria, ecuación (6.17), para  $x_{max} = 1000$ .

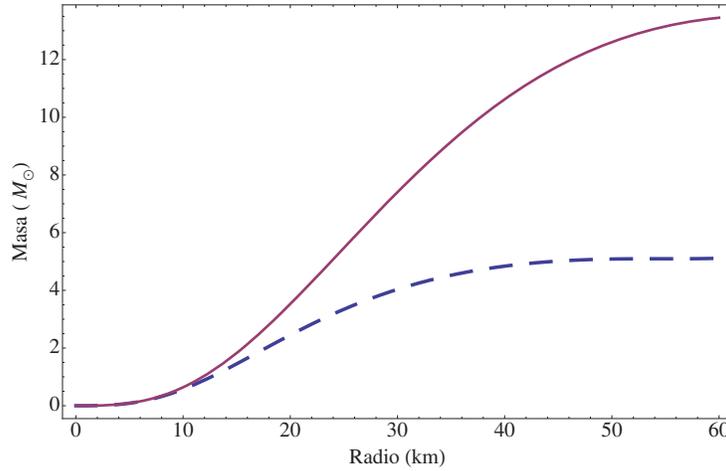


Figura 6.5: Masa  $\bar{M}$  en  $M_\odot$  como una función del radio  $r$  en  $km$  para una estrella de neutrones pura para el caso de RG (curva punteada) y caso Newtoniano (curva continua) con una presión central  $\bar{p}(0)$  usando la ecuación de estado de Fermi para relatividad arbitraria, ecuación (6.17), para  $x_{max} = 1000$ .

Nuestros resultados son graficados en las Figuras 6.2, 6.3, 6.4 y 6.5 para dos intervalos distintos,  $x_{max} = 100$  y  $x_{max} = 1000$  comparando la teoría Newtoniana y la RG. Como se esperaba, los efectos de la RG son más grandes para el intervalo  $x_{max} = 1000$ . Esto es porque este intervalo enfatiza la parte relativista de la ecuación de estado, esto es para  $x$  grandes tenemos  $k_F$  grandes, lo cual es equivalente a energía grande (energías relativistas). Los efectos de la RG son más importantes para estrellas con masas grandes, *i.e.* para las estrellas con un gas de Fermi de electrones relativistas, ya que las estrellas se expanden en tamaño y masa para una ecuación de estado relativista comparada con una ecuación de estado no relativista.

Calculando el radio y la masa para un rango de presión inicial  $\bar{p}(0)$ , obtenemos una gráfica el radio versus masa, como se muestra en la Figura 6.6.

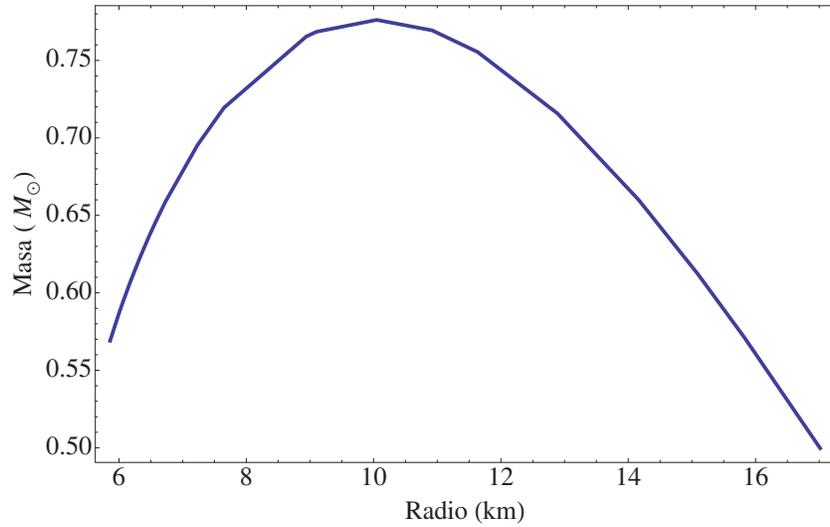


Figura 6.6: Masa (en  $M_{\odot}$ ) como una función del radio (en  $km$ ) para una estrellas de neutrones pura usando una ecuación de estado del gas de Fermi para los valores de  $A_R = 2,4216$  y  $A_{NR} = 2,8663$  en la ecuación (6.17). Las estrellas en el lado derecho del máximo son estables, sin embargo las que están en el lado izquierdo son inestables contra el colapso gravitacional.

En la Figura 6.6 las estrellas de masa baja con radios grandes están a la derecha de la gráfica y corresponden a valores pequeños de la presión inicial  $\bar{p}(0)$ . Como la presión central aumenta, la estrella es capaz de soportar una masa mayor, entonces la masa aumenta. Una masa más grande tiene una mayor atracción gravitacional, por lo tanto estas estrellas tienen radios más pequeños. Entonces, el aumento en la presión central corresponde al ascenso en la gráfica de la Figura 6.6.

La estrella alcanza el máximo de la gráfica en aproximadamente  $\bar{p}(0) = 0,05$ , con una masa de  $\bar{M} \approx 0,776154M_{\odot}$  y un radio de  $R \approx 10,0489km$ .

Las soluciones del lado izquierdo del máximo, se vuelven inestables debido al colapso gravitacional en un agujero negro [2].

Podemos también mostrar una gráfica de la masa máxima para una estrella de neutrones en presencia de una constante cosmológica, y ver si cambia el valor de dicha masa de acuerdo a la existencia de tal constante. La Figura 6.7 muestra la masa máxima para una estrella de neutrones con un valor de la constante cosmológica  $\Lambda = 10^8$ .

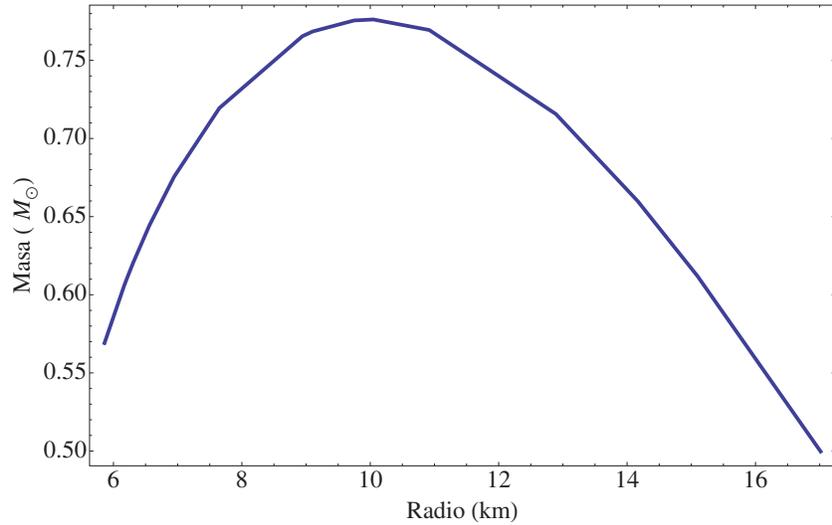


Figura 6.7: Masa (en  $M_{\odot}$ ) como una función del radio (en  $km$ ) para una estrellas de neutrones pura usando una ecuación de estado del gas de Fermi para los valores de  $A_R = 2,4216$  y  $A_{NR} = 2,8663$  en la ecuación (6.17) y una constante cosmológica  $\Lambda = 10^8$ . Las estrellas en el lado derecho del máximo son estables, sin embargo las que están en el lado izquierdo son inestables contra el colapso gravitacional.

Como podemos ver en la Figura 6.7 la masa máxima es de  $0,776154M_{\odot}$  para un radio de  $10,0489km$ . Estos valores son prácticamente los mismos que para el caso en donde no hay presencia de la constante cosmológica. Por lo tanto, podemos concluir que la presencia de la constante cosmológica no afecta el valor de la masa máxima de una estrella de neutrones que sigue la ecuación (6.17).

### 6.3. Masa Máxima

La razón por la que la Figura 6.6 tiene una masa máxima puede ser explicada de manera general. Podemos argumentar que tanto las enanas blancas y las estrellas de neutrones deben tener una masa límite más allá de la cual las configuraciones hidrostáticas ya no sean posibles.

En estrellas frías, el componente térmico de la presión es insignificante ya que la temperatura es mucho menor que la temperatura de Fermi de la estrella. Debido a esto, las variaciones en la presión y la densidad de energía se deben sólo a los cambios en la densidad.

Un incremento en la densidad resulta en un aumento proporcional en la densidad de energía de la forma  $\epsilon = \rho c^2$ . Este incremento resulta en un incremento correspondiente de la atracción gravitacional. Para ser capaces de equilibrar este aumento, el incremento en la presión tiene que ser lo suficientemente grande. Pero la tasa de cambio de la presión con respecto a la densidad de energía está relacionada con la velocidad del sonido. En la teoría newtoniana, la velocidad del sonido no tiene un límite superior. En la RE, sin embargo, la velocidad de propagación de señales no puede exceder la velocidad de la luz. Este es un límite en el incremento de la presión asociada con cambios en la densidad.

Como no hay un límite en este incremento en la teoría de la RE, podemos concluir que todos los objetos compactos fríos (como las enanas blancas y estrellas de neutrones) sufrirán un aumento en la densidad que se traducirá en un aumento de la atracción gravitacional que no puede compensarse con un aumento correspondiente en la presión, por lo tanto, hay un valor máximo para la masa de estos objetos. Pero este valor máximo se origina en la teoría relativista, por lo tanto las teorías newtonianas puras, tales como la del equilibrio hidrostático, no nos permiten calcular una masa máxima para las estrellas.

Cuando introducimos las correcciones de la RG, las ecuaciones de TOV, tienden a extender la gravedad, dando así un límite inferior para la masa máxima a diferencia del caso de la RE.

## 6.4. Estrellas de Neutrones con Constante Cosmológica

En esta sección, resolveremos numéricamente las ecuaciones de TOV con una constante cosmológica y una densidad de energía variable. Como en la sección (4.1), las definiciones para las variables adimensionales masa, presión y densidad de energía son

$$m(r) = \bar{M}(r)M_{\odot}, \quad p = \epsilon_0\bar{p}, \quad \epsilon = \epsilon_0\bar{\epsilon}. \quad (6.19)$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación de estado para una estrella politrópica

$$\bar{p} = \bar{K}\bar{\epsilon}^{\gamma}. \quad (6.20)$$

Sustituyendo lo anterior en las ecuaciones (3.1) y (4.3), obtenemos las ecuaciones adimensionales para este caso

$$\frac{d\bar{M}}{dr} = \beta r^2 \bar{p}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (6.21)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{\alpha \bar{M} \bar{p}^{\frac{1}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{R_0}{\alpha} \bar{p}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi\epsilon_0 \bar{p} r^3}{M_{\odot} c^2 \bar{M}} - \frac{\Lambda r^3}{2R_0 c^2 \bar{M}} \right]}{r^2 \left[ 1 - \frac{2R_0 \bar{M}}{r} \right]}, \quad (6.22)$$

con las constantes de la forma como en las secciones previas.

Los valores para  $\alpha$  y  $\beta$  son los mismos que en la sección (6.2). Estos valores fueron escogidos como en el caso de la relatividad arbitraria (ya que es imposible usar un modelo politrópico ultrarelativista para estrellas de neutrones, ver sección 6.2) para hacer la integración numérica.

Escogemos los valores de las constantes ajustadas  $A_{NR}$  y  $A_R$  con  $x_{max} = 100$  y el valor para la presión central de  $\bar{p}(0) = 0.01$ . Los resultados se muestran en la Tabla 6.

Tabla 6: Radio y Masa para una estrella de neutrones de las ecuaciones de TOV con una constante cosmológica  $\Lambda$ . Los valores de las constantes de ajuste  $A_{NR}$  y  $A_R$  son tomadas del ajuste para  $x_{max} = 100$  y una presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  la cual está en el régimen relativista donde la constante cosmológica tiene mayor importancia.

Constante cosmológica $\Lambda$ ( $s^{-2}$ )	Radio $R$ $km$	Masa $\bar{M}$ ( $M_{\odot}$ )
0	25.0372	1.95006
1	25.0427	1.95006
10	25.0428	1.95006
$10^2$	25.0428	1.95006
$10^3$	25.0430	1.95008
$10^4$	25.0563	1.95023
$10^5$	25.0742	1.95177
$10^6$	25.2543	1.96730
$10^7$	28.2073	2.15198

Los radios que obtuvimos son prácticamente los mismos dentro de nuestra precisión numérica para valores de  $0km^{-2} \leq \Lambda \leq 10^3km^{-2}$ . De igual forma pasa para las masas donde notamos que prácticamente no hay cambio. Sin embargo, a partir de  $\Lambda = 10^4$  se notan pequeños cambios tanto en el radio como en la masa. Pero el cambio más notorio se da cuando  $\Lambda = 10^7$ , *i.e.* para el valor más grande de la constante cosmológica. Entonces la variación de masa para el rango de  $10^4km^{-2} \leq \Lambda \leq 10^7km^{-2}$  es de 0,020%. En las Figura 6.7 y 6.8 mostramos una gráfica de la masa y la presión como función del radio, respectivamente, para una estrella de neutrones con  $\Lambda = 10^7km^{-2}$ .

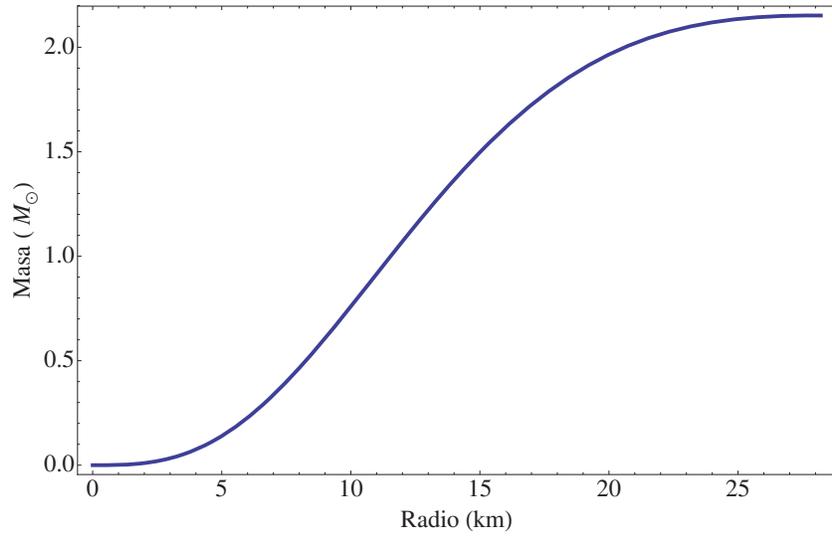


Figura 6.8: Masa ( $M_{\odot}$ ) como función del radio ( $km$ ) para una estrella de neutrones relativista con constante cosmológica  $\Lambda = 10^7 km^{-2}$ .

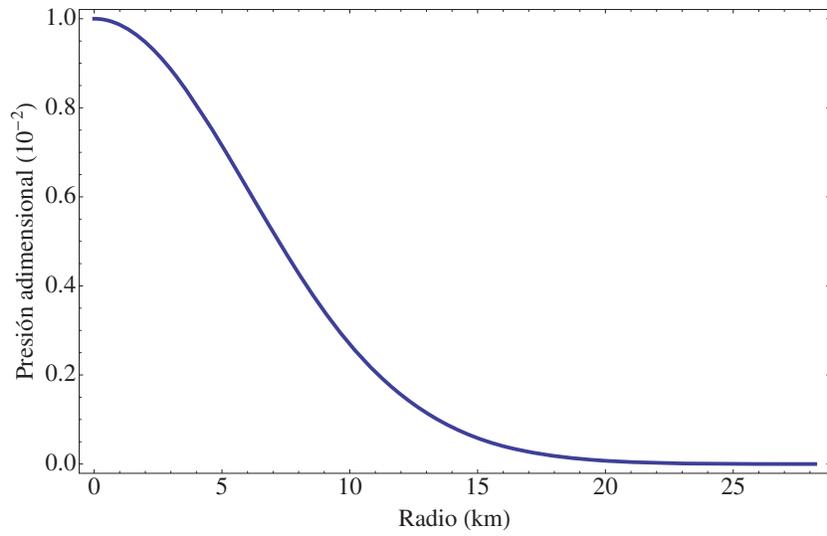


Figura 6.9: Presión adimensional como función del radio ( $km$ ) para una estrella de neutrones relativista con constante cosmológica  $\Lambda = 10^7 km^{-2}$ .

La definición de  $\Lambda$  de la ecuación (3.36), con las unidades restauradas (*i.e.*  $G$  y  $c$  distintas de 1) es

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{vac}, \quad (6.23)$$

con la constante cosmológica  $\Lambda$  en unidades  $m^{-2}$ . Esto implica que la densidad del vacío es

$$\rho_{vac} = \frac{3c^2\Lambda}{8\pi G}. \quad (6.24)$$

El valor más grande que usamos de la constante cosmológica fue  $\Lambda = 10^{10}m^{-2}$ . Usando la ecuación (6.25), encontramos entonces que la densidad del vacío correspondiente es  $\rho_{vac} \sim 10^{36}kg/m^3$ . El valor para la densidad del vacío se ha calculado del orden  $\sim 10^{-27}kg/m^3$  [22], *i.e.* el valor para el cual nuestros resultados producen una diferencia de masa (del 0.0020%) es de un factor  $10^{63}$  más grande que el valor calculado. De esto podemos concluir que la existencia de una constante cosmológica no afectará el valor del radio ni de la masa de las estrellas de neutrones. Este cálculo numérico es más general que el resultado de la sección 3.7, ya aquí tenemos una densidad de energía que no es constante, lo que da lugar a un modelo más realista. Debemos notar entonces que para el modelo con densidad constante, el efecto de la constante cosmológica  $\Lambda$  es de mayor importancia que para el caso del modelo con una densidad variable.

En el siguiente capítulo resolveremos paramétricamente las ecuaciones de TOV, para el caso de una estrella de neutrones con constante cosmológica.

# Capítulo 7

## Soluciones Paramétricas de las Ecuaciones de TOV

En los capítulos anteriores resolvimos numéricamente las ecuaciones de TOV para distintos valores de la presión central  $\bar{p}(0)$ . En este capítulo escribimos dichas soluciones de manera paramétrica. Usaremos una función para la presión  $p(r)$  de la forma

$$p(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c, \quad (7.1)$$

en donde los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  serán determinados mediante un ajuste. Finalmente calcularemos la masa máxima y el radio máximo usando la función de parametrización.

### 7.1. Soluciones Paramétricas para las Estrellas de Neutrones con Constante Cosmológica

En esta sección representaremos de manera paramétrica las soluciones a las ecuaciones de TOV con constante cosmológica. Obtendremos el radio y la masa de una estrella de neutrones de manera semianalítica. Compararemos los resultados semianalíticos con los resultados numéricos obtenidos en el capítulo 6.

Sabemos que las ecuaciones adimensionales de TOV con constante cosmológica son:

$$\frac{d\bar{M}}{dr} = \beta r^2 \bar{p}^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (7.2)$$

$$\frac{d\bar{p}}{dr} = -\frac{\alpha \bar{M} \bar{p}^{\frac{1}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{R_0}{\alpha} \bar{p}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \left[ 1 + \frac{4\pi\epsilon_0 \bar{p} r^3}{M_\odot c^2 \bar{M}} - \frac{\Lambda r^3}{2R_0 c^2 \bar{M}} \right]}{r^2 \left[ 1 - \frac{2R_0 \bar{M}}{r} \right]}. \quad (7.3)$$

Para tener una función  $\bar{p}(r)$  (adimensional) consistente con el análisis que hemos hecho en los capítulos anteriores, debemos de ser cuidadosos en indicar las dimensiones de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación (7.1). Por lo tanto la forma adimensional de la ecuación (7.1) es

$$\bar{p}(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c, \quad (7.4)$$

en donde  $r$  está en  $km$ , el parámetro  $a$  es adimensional, el parámetro  $b$  tiene dimensiones de  $km$ , y el parámetro  $c$  es adimensional.

La ecuación (7.4) nos permite encontrar la presión central (adimensional) de la estrella  $\bar{p}_c = \bar{p}(0) = a - c$ . Usando la condición de que  $\bar{p}(R) = 0$ , podemos calcular el radio de la estrella de la siguiente manera

$$R^2 = b^2 \log \left[ \frac{a}{c} \right]. \quad (7.5)$$

La masa de la estrella, sin embargo, debe calcularse numéricamente. Es decir si sustituimos la ecuación (7.4) en la ecuación (7.3) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{M}}{dr} &= \beta r^2 (a \exp^{-r^2/b^2} - c)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \\ \bar{M} &= \int \beta (a \exp^{-r^2/b^2} - c)^{\frac{1}{\gamma}} r^2 dr. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Es importante mencionar que la ecuación (7.4) no es una solución analítica de las ecuaciones (7.2) y (7.3), sólo es una representación paramétrica de las soluciones numéricas encontradas en la sección 6.4 del capítulo 6.

Usando la función de parametrización (7.4), encontramos el valor de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  para distintos valores de la constante cosmológica  $\Lambda$  mediante un ajuste con los datos numéricos de la sección 6.3. El programa está listado en el apéndice C.

En las figuras 7.1 y 7.2 se muestra la parametrización comparada con las curvas numéricas para los casos  $\Lambda = 0$  y  $\Lambda = 10^5$ .

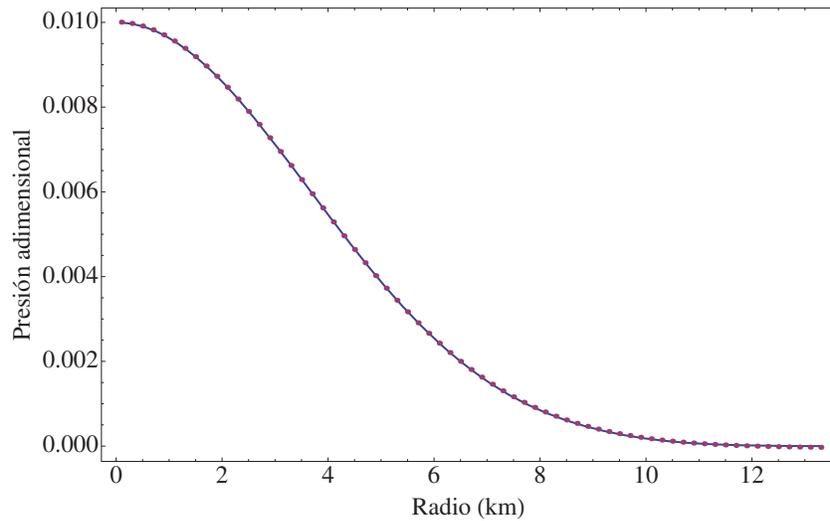


Figura 7.1: Gráfica que compara los resultados numéricos de la presión adimensional  $\bar{p}$  como función del radio con la ecuación (7.1), para una estrella de neutrones con una presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  y una constante cosmológica  $\Lambda = 0$ .

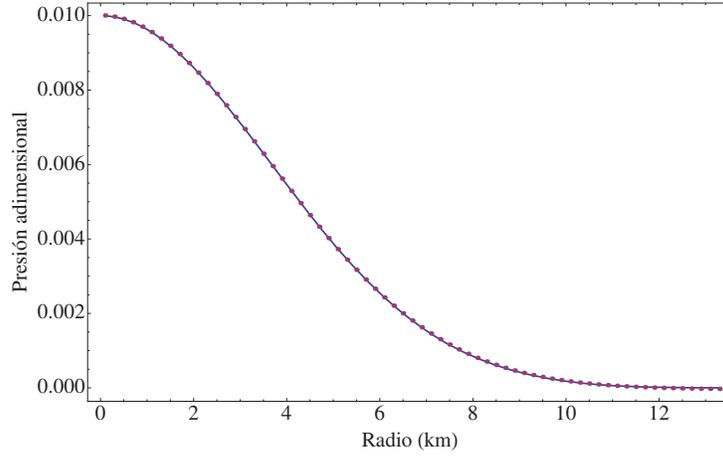


Figura 7.2: Gráfica que compara los resultados numéricos de la presión adimensional  $\bar{p}$  como función del radio con la ecuación (7.1), para una estrella de neutrones con una presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  y una constante cosmológica  $\Lambda = 10^5$ .

Los resultados de los valores numéricos de los parámetros de ajuste  $a$ ,  $b$  y  $c$  se presentan en la Tabla 7.

Tabla 7: Valores de los parámetros de ajuste de la ecuación (7.4), para distintos valores de la constante cosmológica  $\Lambda$ .

$\Lambda$	$a$	$b$	$c$
0	0.0100494	5.14918	0.000041333
1	0.0100494	5.14918	0.000041333
10	0.0100494	5.14918	0.000041333
$10^2$	0.0100494	5.14918	0.000041333
$10^3$	0.0100494	5.14918	0.000041333
$10^4$	0.0100494	5.14922	0.000041324
$10^5$	0.0100493	5.14960	0.000041242
$10^6$	0.0100481	5.15343	0.000040407

Notamos que los valores de los parámetros de la Tabla 7 no presentan cambios significativos cuando cambiamos el valor de  $\Lambda$ .

Con nuestra parametrización también somos capaces de obtener el valor del radio máximo y de la masa máxima de una estrella de neutrones con la presencia de la constante cosmológica. Para encontrar el radio máximo ( $R_{max}$ ) encontramos la raíz de la ecuación (7.4). Para la masa máxima integramos numéricamente la ecuación (7.6) desde un cierto valor de  $r$  hasta el valor de  $R_{max}$ , y usamos los valores de  $\beta$ ,  $\gamma$  de la sección (6.3), y la ecuación (7.4) para distintos valores de los parámetros de ajuste  $a$ ,  $b$  y  $c$ . El programa fue hecho en Mathematica y se incluye en el apéndice C.

Para los valores de los parámetros de ajuste  $a$ ,  $b$  y  $c$  y  $\Lambda = 0$ , tenemos que el valor del radio máximo es

$$R = 12,0426 \text{ km},$$

y la masa máxima es

$$M = 0,710177M_{\odot}.$$

Podemos presentar los resultados del radio máximo ( $R_{max}$ ) y la masa máxima ( $M_{max}$ ) para diferentes valores de la constante cosmológica. En la Tabla 8 se muestran los valores numéricos y semianalíticos obtenidos del  $R_{max}$  y  $M_{max}$  de una estrella de neutrones.

Tabla 8: Valores numéricos y semianalíticos para el radio máximo y la masa máxima de una estrella de neutrones con constante cosmológica.

$\Lambda$	$R_{max}(km)$ Numérico	$M_{max}(M_{\odot})$ Numérica	$R_{max}(km)$ Semianalítico	$M_{max}(M_{\odot})$ Semianalítico
0	10.0489	0.776154	12.0426	0.710177
1	10.0489	0.776154	12.0426	0.710177
10	10.0489	0.776154	12.0426	0.710177
$10^2$	10.0489	0.776154	12.0426	0.710177
$10^3$	10.0489	0.776154	12.0426	0.710180
$10^4$	10.0490	0.776166	12.0429	0.710206
$10^5$	10.0502	0.776277	12.0459	0.710468
$10^6$	10.0623	0.777387	12.0767	0.713109

La Tabla 8 muestra que los valores para el radio máximo encontrados numéricamente difieren de los encontrados semianalíticamente. Sin embargo, los valores semianalíticos aún están en el rango del radio de una estrella de neutrones. En el caso de la masa máxima notamos que los valores semianalíticos son parecidos, aunque son mayores a los valores del caso numérico. Podemos concluir entonces que los valores encontrados usando la ecuación (7.4), nos describen de manera correcta los valores del radio y la masa de una estrella de neutrones en presencia de una constante cosmológica.

En las Figuras 7.3 y 7.4 comparamos las curvas numéricas de  $\bar{M}(r)$  y las curvas de la masa semianalítica de la ecuación (7.6).

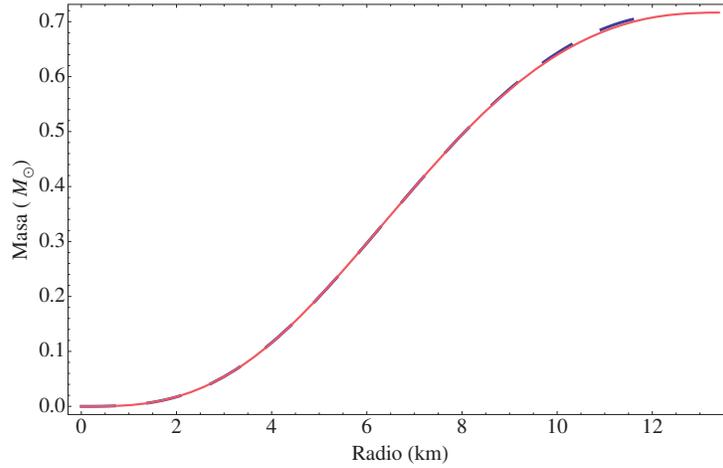


Figura 7.3: Gráfica que muestra la solución numérica (curva punteada) para  $\bar{M}(r)$  y la solución semianalítica (curva continua) para la masa (en  $M_{\odot}$ ) de una estrella de neutrones con presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  y constante cosmológica  $\Lambda = 0$ .

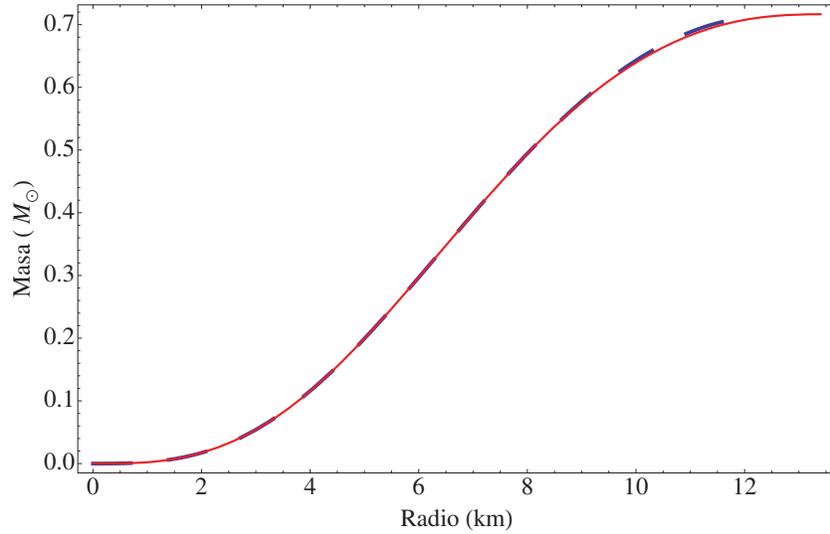


Figura 7.4: Gráfica que muestra la solución numérica (curva punteada) para  $\bar{M}(r)$  y la solución semianalítica (curva continua) para la masa (en  $M_{\odot}$ ) de una estrella de neutrones con presión central  $\bar{p}(0) = 0,01$  y constante cosmológica  $\Lambda = 10^5$ .

En las Figuras 7.3 y 7.4 notamos que los resultados numéricos y semi-analíticos coinciden hasta un valor del radio de aproximadamente  $12 \text{ km}$ , después de ese valor la curva numérica (curva en rojo) tiende asintóticamente a un valor de la masa. Sin embargo, en el caso de la curva semianalítica (curva en azul) este comportamiento no es tan claro. Aunque existen esas diferencias los valores obtenidos para la masa de una estrella de neutrones en ambos casos son correctos.

En este capítulo fuimos capaces de escribir soluciones paramétricas de las ecuaciones de TOV, usando una función para la presión de la forma  $p(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c$ , en donde calculamos los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  mediante un ajuste. Calculamos la masa máxima y el radio máximo de una estrella de neutrones en presencia de una constante cosmológica.

# Capítulo 8

## Conclusiones

En este trabajo estudiamos estrellas compactas mediante las soluciones de las ecuaciones de TOV considerando una constante cosmológica a partir de una EDE para un gas de fermiones en los límites no relativista y relativista. En el límite Newtoniano, pudimos establecer la masa de  $1,24693M_{\odot}$  y radio típico de  $15700km$  para una enana blanca.

Considerando correcciones provenientes de la RG, resolvimos las ecuaciones de TOV para estrellas de neutrones con masas de  $0,716283M_{\odot}$  y radios de  $13,38km$ . Al incluir la constante cosmológica, vimos que la estructura de una estrellas de neutrones cambiaría si  $\Lambda$  fuera  $10^7s^{-2}$ . De acuerdo a las observaciones  $\Lambda \sim 10^{-35}s^{-2}$  y entonces su existencia no modifica el comportamiento de estas estrellas.

Pudimos parametrizar las soluciones de las ecuaciones de TOV de una forma  $p(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c$  y encontramos que los coeficientes cambian poco como función de  $\Lambda$ . Encontramos expresiones para  $p_c$ ,  $R$  mientras que  $M$  se determina por una integración numérica. Es importante mencionar que lo anterior es la idea original propuesta en esta tesis.

Existe otro tipo de estrellas compactas, las estrellas de quarks, para las cuales las ecuaciones de TOV toman la misma forma pero  $\Lambda$  define una constante de confinamiento  $B$ , y la ecuación de estado estaría dada por  $\epsilon = B + 3p$ . Esperamos que nuestra descripción paramétrica pueda ser fácilmente adaptada también a estos objetos. Este trabajo se encuentra en progreso.

# Bibliografía

- [1] A. Pérez Martínez, M. Orsaria, R. González Felipe, E. López Fune., “Materia extraña en el universo”, *Rev. Mex. Fís. E* 54 (2) 175–185 (2008).
- [2] R.R., Silbar and S. Reddy., “Neutron stars for undergraduates”, *Am. J. Phys.* 72 (7) (2004).
- [3] J. Margueron., “Observation and modelisation of neutron stars”, lec. 1, (2009).
- [4] E. Egeland., “Compact Stars”, N-7491, (2007).
- [5] Das Gupta Patrick., ”Mystery of the Cosmological Constant”, arXiv:1105.3402v3 [physics.pop-ph], (2011).
- [6] A. Einstein., “Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, 142, 235–237, (1931).
- [7] S. Weinberg., “The cosmological constant problem”, *Rev. Mod. Phys.*, 61, 1–23, (1989).
- [8] S.M. Carroll., “The Cosmological Constant”, *Living Rev. Relativity* 4, (2001).
- [9] R. Bailan and J.P. Blaizot., “Stars and statistical physics: a teaching experience”, SPhT, CEA/Saclay, Orme des Merisiers, F-91191 Gif-sur Yvette Cedex, France.
- [10] <http://es.wikipedia.org/wiki/Formación-estelar>
- [11] <http://ricardofernandezmercal.wordpress.com/2009/11/22/lamariposa-enana-blanca/>

- [12] D. J. Griffiths., “Introduction to Quantum Mechanics”, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. (1995).
- [13] <http://eltamiz.com/2008/01/08/la-vida-privada-de-las-estrellas-estrellas-de-neutrones/>
- [14] <http://map.gsfc.nasa.gov/mig/030644/030644.html>
- [15] Rong-Jia Yang, Shuang Nan Zhang., “The age problem in  $\Lambda$ CDM model”, Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, 1–7 (2009).
- [16] <http://maravillasdeluniverso2.blogspot.com/2010/06/composicion-del-universo.html>
- [17] <http://www.astromia.com/fotouniverso/matoscuroa.htm>
- [18] C.Flynn., “Lectures on Stellar Physics”, <http://www.astro.utu.fi/~flynn/Stars/>
- [19] <http://www.astro.ugto.mx/cursos/astrofisicaII/AstrofisicaII-Parte-II/capitulo-11/cap-11-docs/Subcap2/principio-teorema.htm>
- [20] B. F. Schutz., “A first course in general relativity”, Cambridge University Press. (1986).
- [21] R. M. Wald., General Relativity, Chicago University Press, ISBN 0-226-87033-2.
- [22] A.H. Guth., “The Inflationary Universe”, Addison Wesley, New York, p. 22. (1997).
- [23] S.L. Shapiro and S.A. Teukolsky., “Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars”. Wiley Interscience. (1983).
- [24] T. Padmanabhan., “Theoretical Astrophysics” Volume II: Stars and Stellar Systems, Cambridge University Press, Cambridge, UK. (2001).
- [25] P. Büscher., “Bag-Model Studies of Strange and Hybrid Stars”, Darmstadt, Germany. (2006).

# Apéndice A

## Derivación de las Ecuaciones de TOV

Siguiendo la referencia [25], derivamos las ecuaciones de TOV de las ecuaciones de campo de Einstein bajo la hipótesis de que la métrica es estática e isotrópica, y que la materia es un fluido perfecto. Lo supuesto anteriormente se espera que sea una buena aproximación para el interior extremadamente denso de una estrella compacta, ya que la fuerza gravitacional intensa es equilibrada por una enorme presión y las fuerzas del cuerpo rígido tienen un efecto insignificante en la estructura. El tensor de energía-momento tiene que ser un tensor simétrico de segundo rango que tiene una divergencia covariante nula. En un fluido perfecto, la presión es isotrópica en el sistema en reposo de un elemento líquido, y no hay tensiones tangenciales. En este marco de referencia local el tensor de energía-momento es

$$T'^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix},$$

donde  $\epsilon$  es la densidad de energía y  $p$  es la presión. Este resultado puede ser generalizado para cualquier marco de referencia de Lorentz por una transformación de coordenadas estándar de la forma  $T^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} T'^{\alpha\beta}$ . El resultado para un marco de Lorentz arbitrario es

$$T^{\mu\nu} = -p\eta^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^{\mu}u^{\nu}, \quad (8.1)$$

donde  $u^{\mu}$  es la cuadrivelocidad de un elemento del fluido. En el marco de referencia en reposo, donde  $u^0 = 1$  y  $u^i = 0$ . El tensor de energía-momento dado por la ecuación (8.1) puede ser generalizado para un campo gravitacional

arbitrario mediante el principio de la covariancia general,

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^\mu u^\nu. \quad (8.2)$$

La cuadrivelocidad del fluido satisface la relación

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1, \quad (8.3)$$

ya que  $d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  y

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (8.4)$$

La relación entre la presión y la densidad de energía depende de las propiedades microscópicas de la materia y del estado de la estrella, *i.e.*, de su temperatura.

En una estrella estática, la tres-velocidad de cada elemento de fluido es cero. Entonces se sigue de la ecuación (8.3) que

$$u^0 = g_{00}^{-1/2}, \quad u^i = 0. \quad (8.5)$$

Consecuentemente, en una estrella estática el tensor de energía-momento de un fluido perfecto dada por la ecuación (8.2) se simplifica

$$T_0^0 = \epsilon, \quad T_i^i = -p. \quad (8.6)$$

Usando estas expresiones y los tensores de Ricci para este caso, además de las ecuaciones de campo de Einstein

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu}, \quad (8.7)$$

obtenemos el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales para las funciones  $\nu(r)$  y  $\lambda(r)$

$$\frac{e^{-2\lambda(r)}}{r^2} [1 - 2r\lambda'(r)] - \frac{1}{r^2} = k\epsilon(r), \quad (8.8)$$

$$\frac{e^{-2\lambda(r)}}{r^2} [1 - 2r\nu'(r)] - \frac{1}{r^2} = -kp(r), \quad (8.9)$$

$$e^{-2\lambda(r)} \left[ \nu''(r) + \nu'(r)^2 - \nu'(r)\lambda'(r) + \frac{\nu'(r) - \lambda'(r)}{r} \right] = -kp(r). \quad (8.10)$$

Podemos integrar la ecuación (8.7) inmediatamente, y obtenemos

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 + \frac{k}{r} \int_0^r dr' r'^2 \epsilon(r'). \quad (8.11)$$

En donde hemos fijado la constante de integración tal que el resultado es consistente en límite del vacío,  $\epsilon(r) \rightarrow 0$ . La métrica es continua en la superficie de la estrella. Por lo tanto, este resultado coincide con la solución de Schwarzschild:  $g_{11} \equiv -e^{2\lambda} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$ , en  $r = R$ ,

$$e^{-2\lambda(R)} = 1 + \frac{k}{R} \int_0^R dr' r'^2 \epsilon(r') = 1 - \frac{2GM}{R}. \quad (8.12)$$

Es natural definir la masa  $M(r)$ , encerrada en un cascarón esférico de radio  $r$  de acuerdo a

$$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r dr' r'^2 \epsilon(r'), \quad (8.13)$$

donde el factor anterior es definido tal que el elemento infinitesimal representa el volumen del cascarón de radio  $r'$  y espesor  $dr'$ . La masa total es  $M = M(R)$ , y la constante de proporcionalidad de la ecuación (8.7)

$$k = -8\pi G. \quad (8.14)$$

De estos resultados llegamos a que

$$g_{11}(r) = -e^{2\lambda(r)} = -\left[1 - \frac{2GM(r)}{r}\right]^{-1}, \quad (8.15)$$

la cual tiene la misma forma que una de las soluciones de Schwarzschild, con la diferencia de que la métrica en  $r$  depende sólo de la masa encerrada dentro del cascarón de radio  $r$ , y no de la masa total.

De esta información las ecuaciones hidrostáticas pueden ser derivadas de las ecuaciones diferenciales (8.8)-(8.10). Arreglando los términos, las dos primera ecuaciones diferenciales pueden ser escritas como

$$2r\lambda'(r) = 1 - e^{2\lambda(r)} [1 + kr^2\epsilon(r)], \quad (8.16)$$

$$2r\nu'(r) = -1 + e^{2\lambda(r)} [1 - kr^2p(r)]. \quad (8.17)$$

La derivada de la ecuación (8.17) es

$$2\nu'(r) + 2r\nu''(r) = 2\lambda'(r)[1 - kr^2p(r)] - k[2rp(r) + r^2p'(r)]e^{2\lambda(r)}. \quad (8.18)$$

Podemos combinar las ecuaciones (8.16), (8.17) y (8.18), y obtenemos una expresión para  $\nu''(r)$ ,

$$2r^2\nu''(r) = 1 - [2kr^2p(r) + kr^3p'(r)]e^{2\lambda(r)} - [1 - kr^2p(r)][1 + kr^2\epsilon(r)]e^{4\lambda(r)}. \quad (8.19)$$

Insertando las expresiones para  $\lambda'(r)$ ,  $\nu'(r)$ , y  $\nu''(r)$  en la ecuación (8.10), y usando el valor físico para  $k$  ecuación (8.14), obtenemos la ecuación diferencial para la presión

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G[p(r) + \epsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3p(r)]}{r[r - 2GM(r)]}. \quad (8.20)$$

Esta es la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para el equilibrio hidrostático de un objeto esféricamente simétrico. En combinación con la expresión para la masa ecuación (8.13), y una teoría microscópica para la relación entre la presión y la densidad de energía, la ecuación (8.20) nos da la solución de equilibrio para la presión en una estrella compacta.

# Apéndice B

## Símbolos y definiciones

Tabla 9: Constantes y sus valores

Constantes	Valores
Electronvoltio $eV$	$1,60219 \times 10^{-19} J$
Masa del electrón $m_e$	$9,10953 \times 10^{-31} kg$
Masa del neutrón $m_n$	$1,67493 \times 10^{-27} kg$
Masa del protón $m_p$	$1,67262 \times 10^{-27} kg$
Masa del nucleón $m_N$	$\simeq m_p, m_n$
Constante gravitacional de Newton $G$	$6,67300 \times 10^{-11} Nm^2/kg^2$
Constante de Planck $h$	$6,62516 \times 10^{-34} Js$
Constante de Planck reducida $\hbar = h/2\pi$	$1,05450 \times 10^{-34} Js$
Masa solar $M_\odot$	$1,98892 \times 10^{30} kg$
Radio solar $R_\odot$	$6,96000 \times 10^8 m$
Velocidad de la luz $c$	$2,99792 \times 10^8 m/s$
Radio de Schwarzschild del sol $R_0 = 2M_\odot G/c^2$	$2,47 km$

# Apéndice C

## Programas hechos en Mathematica

Programa para calcular la masa en  $M_{\odot}$  y la presión  $\bar{p}(r)$  para una enana blanca, con una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-14}$ .

```
(*caso en donde la presión central vale p(0)=10-14*)  
solutions = NDSolve[{p'[r] == If[p[r] > 0,  $\frac{-\alpha (p[r])^{\frac{1}{2}} M[r]}{r^2}$ , 0.0],  
M'[r] == If[p[r] > 0,  $\beta r^2 (p[r])^{\frac{1}{2}}$ , 0.0], p[0.000001] == 1 * 10-14, M[0.000001] == 0},  
{M, p}, {r, 0.000001, 5000}, Method -> {"ExplicitRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 8}]
```

Programa para calcular la masa en  $M_{\odot}$  y la presión  $\bar{p}(r)$  de una estrella de neutrones, para una gas de Fermi no relativista, con una presión central  $\bar{p}(0) = 10^{-4}$ .

```
(*ESTRELLAS DE NEUTRONES*)  
(*Estrellas de neutrones: Caso newtoniano no relativista  $K_F \ll m_n$ *)  
(*caso en donde la presión central vale p(0)=10-4*)  
 $\alpha 2 = 1$ ;  
 $\beta 2 = 0.7636$ ;  
 $\gamma 2 = 5 / 3$ ;  
sol2 = NDSolve[{p'[r] == If[p[r] > 0,  $\frac{-\alpha 2 (p[r])^{\frac{1}{2}} M[r]}{r^2}$ , 0.0],  
M'[r] == If[p[r] > 0,  $\beta 2 r^2 (p[r])^{\frac{1}{2}}$ , 0.0], p[0.000001] == 1 * 10-4, M[0.000001] == 0},  
{M, p}, {r, 0.000001, 17}, Method -> {"ExplicitRungeKutta", "DifferenceOrder" -> 6}]
```

Programa de ajuste de las constantes  $A_{NR}$  Y  $A_R$  de la ecuación de estado  $\bar{\epsilon}(\bar{\rho}) = A_{NR}\bar{\rho}^{3/5} + A_R\bar{\rho}$ , para una estrella de neutrones.

```

In[1]:= p[x_] :=  $\frac{27 \pi^4}{24} \left( \sqrt{1 + x^2} (2 x^3 - 3 x) + 3 \text{ArcSinh}[x] \right);$ 
        e[x_] :=  $\frac{27 \pi^4}{8} \left( \sqrt{1 + x^2} (2 x^3 + x) - \text{ArcSinh}[x] \right);$ 

In[3]:= Tabla1 = Table[{p[x], e[x]}, {x, 0, 200, 0.001}];

In[4]:= Tabla2 = Table[{N[p[x]], N[e[x]]}, {x, 1, 100}];

        Datos = Tabla1  $\cup$  Tabla2;

In[5]:= aju = NonlinearModelFit[Tabla1, Anr x3/5 + Ar x, {Anr, Ar}, x]

Out[5]= FittedModel[  $8.82927 x^{3/5} + 2.99993 x$  ]

        aju["ParameterErrors"]

        {0.00146142,  $4.38758 \times 10^{-8}$ }

```

Programa de ajuste para los parámetros a,b y c de la función de parametrización  $p(r) = a \exp^{-r^2/b^2} - c$ , para el caso de una estrella de neutrones y una constante cosmológica  $\Lambda = 0$ .

```

In[49]:= rmin1 = 10-6;
rmax1 = 13.4;
pc = 0.01;
tovn1 =
NDSolve[{{p'[r] == If[M[r] > 0, -Ro  $\frac{M[r] \epsilon[p[r]]}{r^2} \left(1 + \frac{p[r]}{\epsilon[p[r]]}\right) \left(1 + \delta r^3 \frac{p[r]}{M[r]} - \frac{\Lambda r^3}{2 Ro c^2 M[r]}\right)$ 
(1 - 2 Ro  $\frac{M[r]}{r}$ )-1, 0.0], M'[r] ==  $\delta \epsilon[p[r]] r^2$ , p[rmin1] == pc,
M[rmin1] == 0}, {M, p}, {r, rmin1, rmax1}, Method -> {"Automatic"}];

In[53]:= fn1 = Plot[Evaluate[M[r] /. tovn1], {r, rmin1, rmax1},
Frame -> True, FrameLabel -> {"Radio (km)", "Masa (Msol)"},
PlotStyle -> Thickness[0.005], LabelStyle -> Directive[Black, 18]];

In[54]:= fn2 = Plot[Evaluate[p[r] /. tovn1], {r, rmin1, rmax1},
Frame -> True, FrameLabel -> {"Radio (km)", "Presión adimensional"},
PlotStyle -> Thickness[0.005], LabelStyle -> Directive[Black, 16]];

In[56]:= datospn1 = Table[{r, Evaluate[p[r] /. tovn1][[1]]}, {r, 0.1, rmax1, 0.2}];

In[57]:= ajn1 = FindFit[datospn1, a0 e-x2/b02 - c0, {a0, b0, c0}, x]
Out[57]= {a0 -> 0.0100494, b0 -> 5.14918, c0 -> 0.000041334}

```

Programa para obtener de manera semianalítica el valor del radio máximo y masa máxima, para una estrella de neutrones y una constante cosmológica  $\Lambda = 0$ .

```

In[58]:= fitn1[r_] := a0 e-r2/b02 - c0 /. ajn1
In[59]:= fitdatospn1 = Table[{r, fitn1[r]}, {r, 0.1, rmax1, 0.2}];
In[60]:= ListPlot[{datospn1, fitdatospn1}, Joined → {True, False},
  Frame → True, FrameLabel → {"Radio (km)", "Presión adimensional"},
  PlotStyle → {Thick, PointSize[0.007]}, LabelStyle → Directive[Black, 25]];
In[61]:= radion1 = FindRoot[fitn1[R] == rmin1, {R, 13}]
Out[61]= {R → 12.0426}

In[62]:= NIntegrate[δ r2 Evaluate[ε [a0 Exp[-r2/b02] - c0] /. ajn1], {r, rmin1, Re[R /. radion1]}]
Out[62]= 0.710177

```