UNIVERSIDAD MICHOACANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS

ELECTRODINÁMICA EN ESPACIOS-TIEMPO ARBITRARIOS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADO EN CS. FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:

JORGE HUMBERTO FELIPE MATIAS

ASESOR:

DR. THOMAS ZANNIAS

MORELIA, MICHOACÁN, NOVIEMBRE DEL 2011.

Índice

Resumen

En esta tesis presentamos una formulación completa de la electrodinámica de Maxwell en espacios-tiempo arbitrarios. Los libros presentan tal formulación limitándose a dos objetivos: ó discuten la invariancia de Poincaré de la teoría ó discuten la electrodinámica de Maxwell en un campo gravitacional relativista. Pero tal tratamiento deja afuera un problema práctico. ¿Qué forma tienen las ecuaciones de Maxwell en el contexto de relatividad especial al respecto de algún sistema de referencia no inercial?.

En esta tesis damos una formulación de la electrodinámica de Maxwell de tal forma que es válida para cualquier sistema de referencia definido en el espacio-tiempo de Minkowski. Comenzamos formulando tal teoría en Relatividad Especial, de tal manera que las ecuaciones dinámicas son de forma invariante bajo el Grupo de Poincaré (PG). Tal requisito nos lleva al tensor de Maxwell F y la cuatro corriente J como las variables primarias para la descripción de fenómenos electromagnéticos. También discutimos la manera en que aparece la invariancia de norma de la teoría en la formulación relativista. Basándose en la invariancia de la teoría bajo el grupo de Poincaré hacemos una extensión de manera que las ecuaciones dinámicas son invariantes bajo arbitrario cambio de coordenadas. Para tal formulación hacemos uso de ele-

mentos de cálculo tensorial y particularmente utilizamos la noción de la derivada covariante para escribir las ecuaciones dinámicas de forma que permanecen invariantes bajo cambio arbitrario de las coordenadas del espacio de Minkowski. Finalmente dejamos el espacio-tiempo de Minkowski y consideramos un espacio-tiempo (M, g) que representa un campo gravitacional relativista en el contexto de la relatividad general de Einstein. Discutimos primeramente el principio físico de la teoría de la relatividad general y definimos la noción de sistemas de referecias inerciales globales. Por medio del Principio de Equivalencia de Einstein, formulamos la teoría en un espacio-tiempo (M, g) que presenta un campo gravitacional relativista.

Introducción

En física pre-relativista, las ecuaciones de Maxwell en el vacío tienen la forma [1]:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho,\ \nabla\cdot\vec{B} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \tag{2}$$

en donde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x},t)$, $\vec{J} = \vec{J}(\vec{x},t)$, $\rho = \rho(\vec{x},t)$ y hemos empleado el sistema de unidades Gaussiano [1], $\vec{x} = (x,y,z) = (x^1,x^2,x^3)$ representan las coordenadas espaciales tomadas con respecto a un sistema de referencia inercial global y $t\in\mathbb{R}$ representa el tiempo Newtoniano absoluto. La constante c tiene dimensionalidad de velocidad y se identifica con la velocidad de la luz en el vacío.

Sin embargo, la teoría de Maxwell es una teoría completamente relativista y nuestro propósito en esta tesis es formular la teoría en una forma equivalente en donde la las ecuaciones dinámicas son de forma invariante bajo las siguientes transformaciones de coordenadas:

α) Transformaciones de coordenadas de un sistema de referencia inercial del espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$ a otro sistema de referencia inercial.

β) Transformaciones de coordenadas de un sistema de referencia inercial a otro sistema no necesariamente inercial.

γ) Motivado de la invariancia de la teoría de Maxwell bajo las transformaciones α) y β) y recurriendo al *principio de equivalencia* de Einstein, formulamos la teoría de Maxwell de forma que este válida en presencia de un campo gravitacional relativista (M, g).

Para realizar tal programa recordamos que dentro del dominio pre-relativista $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y $\vec{B}(\vec{x}, t)$ se interpretan como campos vectoriales definidos en el espacio Euclideano $(\mathbb{R}^3, g_E)$ [1]. Por tal espacio existen sistemas de coordenadas cartesianas $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ tal que:

$$g_E = dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3, \ -\infty < x^i < \infty, \ i = 1, 2, 3.$$

Relativamente a tal sistema $(\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t))$ admiten la representación:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= E^1(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^1} + E^2(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^2} + E^3(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^3}\\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= B^1(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^1} + B^2(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^2} + B^3(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^3}\end{aligned}$$

entonces la dependencia temporal de $(\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t))$ se visualiza como una "flecha" que cambia con el paso del tiempo t Newtoniano.

Para reformular la teoría de Maxwell, seguimos el punto de vista geométrico introducido y elaborado por Minkowski [2]. El paso crucial de Minkowski fue la "unificación" del espacio físico modelado en física pre-relativista por $(\mathbb{R}^3, g_E)$ y el tiempo absoluto $t \in \mathbb{R}$ a la noción del espacio-tiempo continuo $(\mathbb{R}^4, g_L)$ en donde ahora g_L representa la métrica Lorentziana, restringida a satisfacer: $Riem(g_L) = 0$ [2]. En esta tesis tomamos el espacio $(\mathbb{R}^4, g_L)$ referido de aquí y en adelante como espacio-tiempo de Minkowski, como el punto

[1] *Subnota: Entendemos con este término el espacio vectorial $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ equipado con una métrica Riemanniana g_E, la conexión de Levi-Civita en donde la curvatura de Riemann de g_E satisface: $Riem(g_E) = 0$.*

[2] *Subnota: Del punto de vista moderno, Minkowski indrodujo en $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$*

inicial para reformular la teoría de Maxwell de manera que sus ecuaciones dinámicas son invariantes bajo el grupo de trasformación de coordenadas denotados por α) y β) y en el último capítulo discutimos la teoría de Maxwell en presencia de un campo gravitatorio relativista. Para tal programa las ideas de cálculo tensorial son absolutamente necesarias y de enorme ayuda. Con el fin de llevar a cabo nuestro programa primero restringimos nuestra atención a transformaciones de coordenadas que pertenecen al grupo (α).

De la teoría de cálculo tensorial [5] sabemos que la suposición de que la métrica g_L en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ satisface $Riem(g_L) = 0$ en $\mathbb{R}^4$, implica que existe al menos un sistema de coordenadas $\{x^0, \ldots, x^3\}$, tal que g_L se representa en la forma [3]:

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 = \tag{3}$$

$$= -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{4}$$

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z, \quad -\infty < x^i < \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

en donde c también se identifica con la velocidad de la luz en el vacío. De (3) las componentes coordenadas de g_L

$$g_{\alpha\beta} = g_L(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) \qquad \alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

distintas de cero son:

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_L(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0}) = -1,\ g_{11} = g_L(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^1}) = 1 \\ g_{22} &= g_L(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^2}) = 1,\ g_{33} = g_L(\frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^3}) = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

---

una métrica Lorentziana y asumio la conexión de Levi-Civita. Además en el contexto de Relatividad Especial la curvatura de g_L satisface $Riem(g_L) = 0$

[3] *Subnota: La representación (4) de la métrica g_L es común en la rama de cálculo tensorial clásico. En esta tesis empleamos el punto de vista que se emplea en geometría diferencial moderna.*

Sistemas de coordenadas $\{x^0, \ldots, x^3\}$ que tienen la propiedad que g_L toma la forma (3) juegan un papel importante para el desarrollo de esta tesis y nos referimos a ellos como sistemas de referencias inerciales globales ó simplemente sistemas inerciales del espacio de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$. Elementos de $(\mathbb{R}^4, g_L)$ son referidos como eventos y al respecto del sistema $\{x^0, \ldots, x^3\}$ son etiquetados por una 4-pleta de números referidos como las coordenadas del evento al respecto del sistema $\{x^0, \ldots, x^3\}$. Debido que el espacio $(\mathbb{R}^4, g_L)$ constituye la arena de la relatividad especial (R.E) primero discutimos algunas propiedades básicas de $(\mathbb{R}^4, g_L)$ y de la teoría de relatividad especial. Discutimos estas propiedades en las 2 secciones del próximo capítulo. Vemos en detalles como la existencia de la métrica g_L en el espacio $(\mathbb{R}^4, g_L)$ definen sistemas de coordenadas privilegiadas y como estos sistemas dan nacimiento al grupo de Poincaré PG y al grupo de Lorentz ΛG. En el mismo capítulo vemos también como la métrica g_L clasifica vectores en el espacio tangente $T_A(\mathbb{R}^4)$ de cada evento A en vectores *temporales, nulos y vectores espaciales*, y como tal clasificación induce una clasificación de curvas en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ como curvas *temporales, nulas ó espaciales*. Usando estos resultados en el capítulo dos, siguiendo los pasos de Minkowski [2] introducimos el tensor de Maxwell F y de la cuatro corriente J y escribimos las ecuaciones de Maxwell en términos de estos campos tensoriales. En el mismo capítulo discutimos como la noción de invariancia de norma de la teoría de Maxwell que es una propiedad de las ecuaciones de Maxwell en forma pre-relativista se extiende al régimen relativista. Discutimos también como la norma de Lorentz se extiende de manera natural en la descripción relativista. En el mismo capítulo mostramos la invariancia de las ecuaciones relativistas bajo elementos del grupo de Poincaré

PG y discutimos algunas consecuencias de esta invariancia. En el capítulo tres discutimos la invariancia de la electrodinámica de Maxwell bajo arbitrario cambio de coordenadas.

Como discutiremos en el capítulo tres no hay una razón fundamental del porque nos restringimos solo a transformaciones del espacio-tiempo generadas por elementos del grupo de Poincaré. Mostraremos que la electrodinámica de Maxwell puede ser escrita de manera que las ecuaciones dinámicas son de forma invariante bajo arbitraria transformación (regular) de coordenadas en el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

En este mismo capítulo discutimos cual fue la idea de Einstein para afirmar que la gravitación relativista se manifiesta como la curvatura de la variedad espacio-tiempo. Finalmente discutimos el Principio de Equivalencia de Einstein el cual cual nos ayuda a formular la electrodinámica de Maxwell en un campo gravitacional relativista (M, g). Terminamos esta tesis con una discusión sobre problemas abiertos y extensión de los resultados de esta tesis.

Capítulo 1

Introducción a la Relatividad Especial

1.1 El grupo de Poincaré

Relatividad especial (R.E) como se ha formulado por Minkowski [2] (véase también referencias [3],[4]) es una teoría de espacio y tiempo (en ausencia de interacción gravitatoria) y se modela como el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$ en donde g_L es la métrica Lorentziana plana que satisface las restricciones que discutimos en la sección introductoria. En esta sesión nos preguntamos:
¿Cuántos sistemas de referencia inerciales globales admite el espacio de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$*?. Si existe más de uno, ¿Cómo se relacionan tales sistemas de referencia?.*
Como veremos la respuesta a estas preguntas da nacimiento al grupo de Poincaré PG y al grupo de Lorentz ΛG. Sea $\{y^0, \ldots, y^3\}$ otro sistema de referencia inercial global de $(\mathbb{R}^4, g_L)$, es decir g_L toma la forma (compare con

(3) de la sección introductoria):

$$g_L = -dy^0 \otimes dy^0 + dy^1 \otimes dy^1 + dy^2 \otimes dy^2 + dy^3 \otimes dy^3 \tag{1.1}$$
$$-\infty < y^i < \infty \ , \ i \in \{0, \dots, 3\}$$

Por hipótesis ambos sistemas de coordenadas $\{x^0, \dots, x^3\}$ en (3) y $\{y^0, \dots, y^3\}$ en (1.1) cubren todo $(\mathbb{R}^4, g_L)$ y satisfacen:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^0, \dots, x^3), \ det(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}) \neq 0 \tag{1.2}$$

en donde la restricción que el determinante de la matriz Jacobiana $\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\beta}$ no se anula en $\mathbb{R}^4$ significa que (1.2) son invertibles o equivalentemente la transformación (1.2) es regular. Nuestro problema es especificar la naturaleza de todas las funciones suaves [1] $y^\alpha = y^\alpha(x^0, \dots, x^3)$, $\alpha \in \{0, \dots, 3\}$ que cumplen la condición (1.2) y más importante las componentes $g_{\alpha\beta}$ de g_L al respecto de $\{y^0, \dots, y^3\}$ tienen la forma (1.1).

Asumimos por el momento que existe una $y^\alpha = y^\alpha(x^0, \dots, x^3)$ que cumplen tales restricciones y sea

$$\{\frac{\partial}{\partial y^0}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^3}\}_A \quad \text{y} \quad \{\frac{\partial}{\partial x^0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^3}\}_A$$

las bases coordenadas del espacio tangente $T_A(\mathbb{R}^4)$ de algún evento $A \in (\mathbb{R}^4, g_L)$. De la teoría de cálculo tensorial [5] tal par de bases obedecen la ley de transformación:

$$\frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{1.3}$$

[1] *Subnota: Suavidad de* $y^\alpha = y^\alpha(x^0, \dots, x^3)$ *implica que las funciones* $y^\alpha(x^0, \dots, x^3)$ *son de clase* C^k *con* $k \geq 2$.

Tal transformación implica que las componentes $g_{\mu\nu} = g_L(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$ respecto a $\{x^0, \ldots, x^3\}$ y las componentes $g'_{\alpha\beta} = g_L(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta})$ satisfacen:

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g_L(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = g_L(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu}\frac{\partial}{\partial y^\beta}) = \\ &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_L(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g'_{\ \alpha\beta} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Entonces la invariancia de las componentes de g_L bajo (1.2) implica que (ver 1.1):

$$g'_{\ \alpha\beta} = g_L(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}) = g_L(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}) = g_{\alpha\beta}$$

y como consecuencia de tal invariancia, (1.4) implica que $y^\alpha = y^\alpha(x^0, \ldots, x^3)$ deben satisfacer en $\mathbb{R}^4$ el sistema de relaciones:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

con el entendimiento que ahora $y^\alpha = y^\alpha(x^0, \ldots, x^3)$ se consideran como funciones incógnitas.

Por otro lado sean $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ los simbolos de Christofell de la conexión de Levi-Civita al respecto del sistema $\{x^0, \ldots, x^3\}$. Recordemos que los $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$ se definen por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} = \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Rightarrow \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} = < dx^\mu, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\nu}} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} > \tag{1.6}$$

en donde $<, >$ denota el par natural [2] entre elementos del espacio cotangente $T^*{}_A(\mathbb{R}^4)$ y el espacio tangente $T_A(\mathbb{R}^4)$. Similarmente los correspondientes

[2] *Subnota: Recordamos que si $T^*{}_A(\mathbb{R}^4)$ representa el espacio cotangente en A y $f \in T^*{}_A(\mathbb{R}^4)$ entonces f es un mapa lineal $f : T_A(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{R} : X \to f(X) = < f, X >$ tal que:*

$$< f, X > = < f_\alpha dx^\alpha, X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} > = f_\alpha X^\mu < dx^\alpha, \frac{\partial}{\partial x^\mu} > = f_\alpha X^\mu \delta^\alpha{}_\mu = f_\alpha X^\alpha$$

simbolos ${\Gamma'}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ al respecto del sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$ satisfacen análogamente (1.6):

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} = {\Gamma'}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Rightarrow {\Gamma'}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} =< dy^\alpha, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\beta}} \frac{\partial}{\partial y^\gamma} > \tag{1.7}$$

Recurriendo a la ley de transformación (1.3) entre las bases de vectores $\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^3}\}$ y $\{\frac{\partial}{\partial y^0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^3}\}$ concluimos de (1.6) y (1.7) que los $\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda}$ y ${\Gamma'}^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ satisfacen:

$$\Gamma^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\lambda} {\Gamma'}^{\alpha}{}_{\beta\gamma} + \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \tag{1.8}$$

Pero debido a que respecto a los sistemas $\{x^0, \ldots, x^3\}$ y $\{y^0, \ldots, y^3\}$, los simbolos de Christofell se anulan [3], entonces $y^\alpha(x^0, \ldots, x^3)$ satisfacen:

$$\frac{\partial^2 y^\alpha(x^0, \ldots, x^3)}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} = 0 \tag{1.9}$$

de la cual concluimos:

$$\frac{\partial^2 y^\alpha(x^0, \ldots, x^3)}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} = 0 \tag{1.10}$$

De esta relación vemos que:

$$y^\alpha(x^\mu) = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} x^\mu + a^\mu \tag{1.11}$$

[3] *Subnota: Por una métrica g y la conexión de Levi-civita $\nabla g = 0$ tenemos la siguiente representación de los simbolos de Christofell al respecto de un sistema de coordenadas $\{x^1, \ldots, x^n\}$ arbitrario:*

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\delta\alpha} \Gamma_{\delta\beta\gamma}, \ \textit{en donde} \quad \Gamma_{\delta\beta\gamma} = (\frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta})$$
$$y \quad g_{\alpha\beta} = g(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{1, \ldots, n\}.$$

en donde $\Lambda = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}$ es una matriz de (4×4) arbitraria con entradas constantes reales y $a^{\mu} = (a^0, \ldots, a^3)$ es una 4-pleta de números reales. De (1.11) obtenemos:

$$det(\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}}) = det(\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}) \tag{1.12}$$

entonces la regularidad de la transformación de coordenadas requiere que la matriz $\Lambda = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}$ no es singular. Combinando (1.11) con (1.5) vemos que $\Lambda = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}$ debe satisfacer también:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}g_{\alpha\beta} \tag{1.13}$$

Tomando el determinante de ambos lados de esta ecuación obtenemos que la matriz $\Lambda = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}$ satisface:

$$(det(\Lambda^{\alpha}{}_{\mu}))^2 = 1 \Rightarrow det\Lambda = \pm 1 \tag{1.14}$$

En resumen vemos que $(\mathbb{R}^4, g_L)$ admite infinitamente muchos sistemas de referencia inerciales globales. Dos sistemas de referencia inerciales $\{x^0, \ldots, x^3\}$ y $\{y^0, \ldots, y^3\}$ son relacionados por medio de:

$$y^{\mu}(x) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a^{\mu} \Leftrightarrow x^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}y^{\mu} - (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu}a^{\mu}$$

en donde $\Lambda = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ satisface las restricciones (1.13), (1.14), mientras $a^{\mu} = (a^0, \ldots, a^3)$ es un "vector" en $\mathbb{R}^4$ arbitrario.

El espacio de todas las matrices 4×4 que satisfacen (1.13) [4] juegan un papel importante para el desarrollo de esta tesis y estudiamos con más detalle

[4] *Subnota: De aquí y en adelante consideramos solo la condición (1.13) debido que (1.14) es consecuencia de (1.13).*

la estructura de este espacio. Por eso es conveniente definir los siguientes conjuntos:

$$\Lambda G = \{\Lambda \mid \ \Lambda = \text{matriz } 4 \times 4 \text{ que satisface (1.13)}\}$$
$$PG = \{(\Lambda, a) \mid \ \Lambda \in \Lambda G \text{ y } a \in \mathbb{R}^4\}$$

Sea ahora $\Lambda \in \Lambda G$. De la relación (1.13) obtenemos:

$$g_{00} = \Lambda^{\alpha}{}_0 \Lambda^{\beta}{}_0 g_{\alpha\beta} = (\Lambda^0{}_0)^2 g_{00} + \Lambda^i{}_0 \Lambda^j{}_0 g_{ij} \Rightarrow$$
$$-1 = -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2 \Rightarrow$$
$$|\Lambda^0{}_0| = \sqrt{1 + (\Lambda^1{}_0)^2 + (\Lambda^2{}_0)^2 + (\Lambda^3{}_0)^2} \geq 1$$

De esta propiedad de $\Lambda \in \Lambda G$ tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1. *Un $\Lambda \in \Lambda G$ es referido como orthochronous (ó mapeando hacia adelante en el tiempo) si y sólo si $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ mientras $\Lambda \in \Lambda G$ es referido como no-orthochronous si y sólo si $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.*

Esta definición y la propiedad de que cada $\Lambda \in \Lambda G$ satisface $det\Lambda = \pm 1$ nos permite dividir el conjunto ΛG en 4 subconjuntos de la siguiente manera:

$$\Lambda^{\uparrow}{}_{+} = \{\Lambda \in \Lambda G \mid \ \Lambda^0{}_0 \geq 1, \ det\Lambda = +1\}$$
$$\Lambda^{\uparrow}{}_{-} = \{\Lambda \in \Lambda G \mid \ \Lambda^0{}_0 \geq 1, \ det\Lambda = -1\}$$
$$\Lambda^{\downarrow}{}_{+} = \{\Lambda \in \Lambda G \mid \ \Lambda^0{}_0 \leq -1, \ det\Lambda = +1\}$$
$$\Lambda^{\downarrow}{}_{-} = \{\Lambda \in \Lambda G \mid \ \Lambda^0{}_0 \leq -1, \ det\Lambda = -1\}$$

Los conjuntos $\Lambda^{\uparrow}{}_{+}$, $\Lambda^{\downarrow}{}_{+}$ son referidos como orthochronous propio respectivamente no-orthochronous propio mientras $\Lambda^{\uparrow}{}_{-}$, $\Lambda^{\downarrow}{}_{-}$ orthochronous impropio respectivamente no-orthochronous impropio. Para tener un mejor entendimiento de la estructura de los elementos $\Lambda^{\uparrow}{}_{+}, \Lambda^{\uparrow}{}_{-}, \Lambda^{\downarrow}{}_{+}, \Lambda^{\downarrow}{}_{-}$ discutimos algunos ejemplos.

1) Sea la matriz Λ de la forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & a \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

con a una matriz 3×3 de rotación [5]. De la estructura de (1.15) vemos que $det\Lambda = deta = \pm 1$. En el caso que $deta = 1$, se sigue que $\Lambda \in \Lambda^{\uparrow}{}_{+}$ mientras en el caso que $deta = -1$ $\Lambda \in \Lambda^{\uparrow}{}_{-}$. Sea $\{x^0, \dots, x^3\}$ un sistema de referencia inercial global, entonces la matriz (1.15) genera la transformación:

$$x'^0 = x^0,\ x'^i = a^i{}_j x^j,\ i, j \in \{1, 2, 3\} \tag{1.16}$$

y por el hecho que $a^i{}_j$ es una matriz de rotación, esta transformación satisface (1.13).

Las transformaciones (1.16) generadas por Λ dadas por (1.15) con $a \in O(3)$ son referidas como rotaciones propias, si $deta = 1$, o impropias, si $deta = -1$. Físicamente representan dos sistemas de referencia inerciales globales de $(\mathbb{R}^4, g_L)$ en reposo uno respecto de otro y con el mismo origen pero las coordenadas espaciales de uno son rotadas al respecto del otro.

2) Una clase importante de elementos de ΛG son matrices que generan transformaciones referidos como boosts. Para definir tales transformaciones sea la familia de matrices:

$$\Lambda(\eta) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} cosh\eta & -sinh\eta \\ -sinh\eta & cosh\eta \end{matrix} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix},\quad \eta \in (-\infty, \infty). \tag{1.17}$$

[5] *Subnota: Denotamos de aquí y en adelante con* $O(3) = \{a \mid a^{-1} = a^\tau \Rightarrow aa^\tau = a^\tau a = 1\}$ *en donde* a^τ *significa la transpuesta de* a.

De la estructura de $\Lambda(\eta)$ se observa que:

$$\forall\eta \in (-\infty, \infty),\ det\Lambda(\eta) = cosh^2\eta - sinh^2\eta = 1,\ \Lambda^0{}_0 = cosh\eta \geq 1$$

y genera por medio de $x^{'\mu} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ la transformación:

$$x^{'0} = x^0 cosh\eta - x^1 sinh\eta,\ x^{'1} = -x^0 sinh\eta + x^1 cosh\eta$$
$$x^{'2} = x^2,\ x^{'3} = x^3 \tag{1.18}$$

Un cálculo explícito muestra que esta transformación satisface (1.13), entonces $\Lambda \in \Lambda G$ y en particular $\Lambda \in \Lambda^\uparrow{}_+$. La identificación:

$$cosh\eta = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2},\ sinh\eta = \frac{v}{c}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2} \tag{1.19}$$

y recordando que $x^{'0} = ct^{'}$ y $x^0 = ct$ nos lleva a:

$$t^{'} = \frac{t - \frac{v}{c^2}x^1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ x^{'1} = \frac{x^1 - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\ x^{'2} = x^2,\ x^{'3} = x^3. \tag{1.20}$$

la cual es la transformación familiar de Lorentz conocida de cursos elementales de física.

En el límite $\frac{v}{c} \to 0$, las transformaciones (1.20) se reducen a:

$$t^{'} = t,\ x^{'1} = x^1 - vt,\ x^{'2} = x^2,\ x^{'3} = x^3 \tag{1.21}$$

que escriben una transformación de Galileo entre dos sistemas de referencia inerciales globales K y $K^{'}$, con $K^{'}$ moviéndose a lo largo del eje x de K con velocidad v constante. Gráficamente K y $K^{'}$ se representan como en el dibujo:

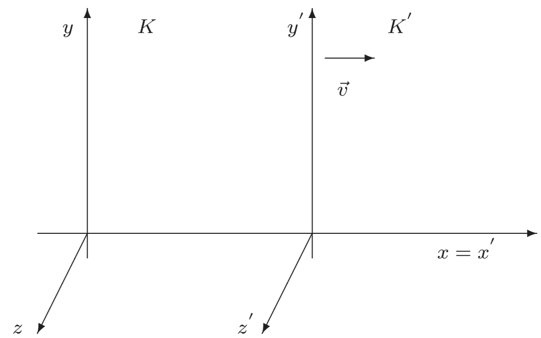
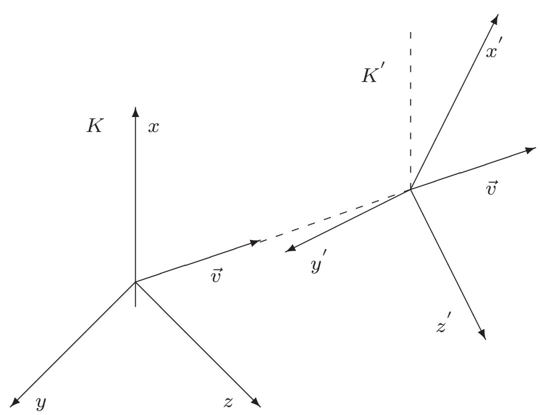


Figura 1.1: Sistemas de referencia inerciales.

Mantenemos la misma interpretación por la transformación (1.18) ó equivalentemente (1.20) y referimos a tales transformaciones como boosts con parámetro $\beta = \frac{v_x}{c}$ actuando sobre el plano (x^0, x^1).

Hay una generalización de la transformación (1.18) para el caso en que K' se mueve al respecto de K en una dirección arbitraria (véase Figura 1.2).



(x, y, z): Sistema-K

(x', y', z'): Sistema-K'

Figura 1.2: Sistemas de referencia inerciales en el caso general.

La forma general de esta transformación está dada por:

$$ct = \gamma(ct' + \vec{\beta} \cdot \vec{x'}), \quad \vec{x} = \vec{x'} + \frac{\gamma - 1}{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}(\vec{x'} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} + \gamma\vec{\beta}ct' \tag{1.22}$$

La transformación inversa de (1.22) es obtenida intercambiando: $\vec{x} \to \vec{x'}$, $t \to t'$, $\vec{\beta} \to -\vec{\beta}$ y tiene la forma:

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x'}), \quad \vec{x'} = \vec{x} + \frac{\gamma - 1}{\vec{\beta} \cdot \vec{\beta}}(\vec{x'} \cdot \vec{\beta})\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}ct \tag{1.23}$$

La derivación de las fórmulas (1.22,1.23) están dadas en [5] y también en [1].

3) La propiedad básica de que $\Lambda \in \Lambda G$ tiene $det\Lambda = \pm 1$ nos permite definir otras familias de transformaciones que trivialmente satisfacen (1.13) y son referidas como transformaciones de inversión del tiempo, inversión espacial ó inversión del espacio y tiempo. Más precisamente sea:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

tal Λ satisface $det\Lambda = -1$ y genera: $x'^0 = -x^0$, $x'^i = x^i$ y trivialmente satisface (1.13). Debido que $\Lambda^0{}_0 = -1$ tal $\Lambda \in \Lambda^{\downarrow}{}_{-}$, y decimos que Λ genera una transformación de inversión del tiempo. Obviamente si $\hat{\Lambda} \in \Lambda^{\uparrow}{}_{+}$, el producto $\Lambda\hat{\Lambda}$ con Λ dado por (1.24) pertenece a $\Lambda^{\downarrow}{}_{-}$.

En contraste de (1.24) la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tiene $det\Lambda = -1$, $\Lambda^0{}_0 = 1$ y por medio de

$$x'^0 = x^0, \; x'^i = -x^i, \; i = 1, 2, 3.$$

genera inversión espacial tal que $\Lambda \in \Lambda^{\uparrow}{}_{-}$.

Finalmente la matriz

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

satisface $det\Lambda = 1$, $\Lambda^{0}{}_{0} = -1$ y por medio de

$$x^{'0} = -x^{0},\ x^{'i} = -x^{i},\ i = 1, 2, 3.$$

genera una inversión del tiempo y simultáneamente espacial, y tal $\Lambda \in \Lambda^{\downarrow}{}_{+}$.

Enseguida discutimos algunas propiedades adicionales de los conjuntos ΛG y PG. Es conveniente representar la ley de transformación (1.5) en una forma matricial:

$$g = \Lambda^{\tau} g \Lambda$$

en donde Λ^{τ} denota la transpuesta de la matriz $\Lambda = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}$. Consideramos primero el conjunto $\Lambda^{\uparrow}{}_{+}$, y es fácil ver que $\Lambda^{\uparrow}{}_{+}$ admite la estructura de un grupo bajo la multiplicación matricial.

Para cada $\Lambda \in \Lambda^{\uparrow}{}_{+}$ se define una transformación mediante:

$$x^{'\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

llamadas transformaciones de Lorentz orthochronous propio. Estas transformaciones tienen la propiedad de transformar vectores temporales (ó nulos) dirigidos a futuro en vectores temporales (ó nulos) dirigidos a futuro, es decir, preserva la orientabilidad del espacio-tiempo de Minkowski (la definición de estos conceptos los tomamos más adelante). Y $\forall\ \Lambda \in {\Lambda^{\uparrow}}_{+}$ dejan las componentes de g de forma invariante.

En conjunto PG también admiten la estructura de un grupo. Para eso consideramos el mapa:

$$\begin{aligned}
&\cdot : PG \times PG \longrightarrow PG : (\Lambda_1, a_1), (\Lambda_2, a_2) \longrightarrow (\Lambda_1, a_1) \cdot (\Lambda_2, a_2),\\
&(\Lambda_1, a_1) \cdot (\Lambda_2, a_2) \equiv (\Lambda_1\Lambda_2, \Lambda_1 a_2 + a_1)
\end{aligned} \tag{1.25}$$

y se ve que PG con tal mapa es un grupo con $(\mathbb{I}, a = 0)$ el elemento neutro donde $\mathbb{I} \in PG$ es la matriz unitaria y para cada $(\Lambda, a) \in PG$ llamamos a $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \in PG$ el elemento inverso de (Λ, a).

Cada $(\Lambda, a) \in PG$ genera una transformación de coordenadas mediante:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{1.26}$$

que deja g de forma invariante. Transformaciones de la forma (1.26) son llamadas transformaciones de Poincaré generadas por un $(\Lambda, a) \in PG$, y $(PG, \cdot)$ es llamado el grupo de Poincaré.

En resumen la presencia de g_L en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ nos permite definir una clase de sistemas de coordenadas privilegiados que los llamamos sistemas de referencia inerciales globales. Un sistema de referencia inercial global está relacionado con otro sistema de referencia inercial global por un elemento del grupo de Poincaré (Λ, a). En las próximas secciónes discutimos las implicaciones y el significado físico de este grupo en conección con la presencia de la métrica Lorentziana g_L.

1.2 Algunas implicaciones de la métrica Lorentziana

En la sección anterior hemos visto como g_L determina sistemas de referencia previlegiados y como nace el grupo de Poincaré PG. Por la finalidad de esta tesis y particularmente en las últimas secciones en donde empleamos métricas Lorentzianas g_L que tienen curvatura de Riemann distinta de cero, consideramos de ayuda dar una introducción breve de la noción de una métrica definida en $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ y discutir algunas propiedades básicas. Empecemos con las siguientes definiciónes:

Definición 1.2. *Una métrica g definida en $\mathbb{R}^n$ es un campo tensorial C^∞ de tipo $(0,2)$ tal que $\forall A \in \mathbb{R}^n$ g_A es una métrica en $T_A(\mathbb{R}^n)$.*

Definición 1.3. *Una métrica g_A en $T_A(\mathbb{R}^n)$ es un mapa:*

$$g_A : T_A(\mathbb{R}^n) \times T_A(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} : (X, Y) \to g_A(X, Y)$$

tal que:

1) *g_A es un mapa bilineal,*

2) *g_A es simétrica, es decir, $g_A(X, Y) = g_A(Y, X)$ $\forall$ $X, Y \in T_A(\mathbb{R}^n)$,*

3) *g_A no es degenerada, es decir, si $\ni X \in T_A(\mathbb{R}^n)$: $g_A(X, Y) = 0$ $\forall$ $Y \in T_A(\mathbb{R}^n)$ entonces $X = 0 \in T_A(\mathbb{R}^n)$.*

Un teorema importante del cálculo tensorial [5] afirma que como consecuencia de las propiedades 1)-3) existe una base $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ de $T_A(\mathbb{R}^n)$ al respecto de la cual las componentes $g_{ij} = g(\hat{e}_i, \hat{e}_j)$ tienen la forma:

$$g(\hat{e}_i, \hat{e}_j) = \pm\delta_{ij}, \quad \text{en donde} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{1.27}$$

Nos referimos a la base $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ que cumple (1.27) como una base ortonormal de $T_A(\mathbb{R}^n)$, y al respecto de tal base g admite la representación:

$$g = g_{\alpha\beta}\hat{e}^\alpha \otimes \hat{e}^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \pm\delta_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, n \quad (1.28)$$

es decir, las componentes de g relativas a la base $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ tienen una forma muy simple, las componentes $g_{\alpha\beta}$ son 1 ó -1 pero jamas cero [6].
Tal propiedad de una métrica arbitraria nos lleva a la noción de la signatura por medio de la siguiente definición.

Definición 1.4. *Sea g una métrica definida en $T_A(\mathbb{R}^n)$ y sea $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ una base ortonormal de $T_A(\mathbb{R}^n)$. La signatura de g es definida como la diferencia entre el número de $g(\hat{e}_i, \hat{e}_i) = +1$ menos el número $g(\hat{e}_i, \hat{e}_i) = -1$.*

Según esta definición una métrica g en $T_A(\mathbb{R}^n)$ y al respecto de una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ tiene una de las siguientes formas:

$$g_{\alpha\beta} = g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = diag(\underbrace{+1, +1, \ldots, +1}_{k}, \underbrace{-1, -1, \ldots, -1}_{l}), \quad k + l = n$$

de la cual se ve que su signatura $sign(g)$ satisface $sign(g) = k - l$.
Si $l = 0$

$$g_{\alpha\beta} = g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = diag(\underbrace{+1, +1, \ldots, +1}_{n})$$

y $sign(g) = n$, tal g es referida como métrica positiva definitiva (ó métrica Riemaniana). En el caso en donde:

$$g_{\alpha\beta} = g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = diag(\underbrace{+1, \ldots, +1}_{n-1}, -1)$$

[6] *Subnota: En la representación (1.28) $\{\hat{e}^1, \ldots, \hat{e}^n\}$ es la base de $T^*{}_A(\mathbb{R}^n)$ dual de* $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$.

$sign(g) = n - 2$, decimos que g es Lorentziana.

Finalmente cuando:

$$g_{\alpha\beta} = g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = diag(\underbrace{+1, \ldots, +1}_{k}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{l})$$

$sign(g) = k - l, \quad l > 1$, decimos que g es semi-Riemaniana.

La importancia de la signatura de una métrica proviene a través del siguiente teorema [5]:

Teorema 1.1. *La signatura de una métrica g definida en $T_A(\mathbb{R}^n)$ es independiente de la base ortonormal, y es constante para cada $A \in \mathbb{R}^n$.*

Métricas Lorentzianas, es decir, métricas con $sign(g) = n - 2$, tienen una propiedad importante: se clasifican de manera natural los elementos de $T_A(\mathbb{R}^n)$ como vectores *temporales*, *nulos* ó *espaciales*. Para ver esta clasificación sea g una métrica Lorentziana. Por las consideraciones anteriores sabemos que $\forall\ A \in \mathbb{R}^n$ existe una base ortonormal $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ de $T_A(\mathbb{R}^n)$ tal que [7]:

$$g(\hat{e}_1, \hat{e}_1) = -1, \quad g(\hat{e}_2, \hat{e}_2) = \cdots = g(\hat{e}_n, \hat{e}_n) = 1$$

Sea ahora $X \in T_A(\mathbb{R}^n)$, entonces $X = X^\alpha \hat{e}_\alpha$ y las propiedades de g implican:

$$\begin{aligned} g(X, X) &= g(X^\alpha \hat{e}_\alpha, X^\beta \hat{e}_\beta) = X^\alpha X^\beta g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = \\ &= -(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2 \end{aligned}$$

[7] *Subnota: En forma compacta, por una métrica Lorentziana g podemos escribir:*

$$g = -e^1 \otimes e^1 + e^2 \otimes e^2 + \cdots + e^n \otimes e^n$$

Pero de esta relación se ve que:

$$g(X,X) = 0 \Rightarrow -(X^1)^2 + \cdots + (X^n)^2 = 0 \tag{1.29}$$

es decir, existen infinitas $X \in T_A(\mathbb{R}^n)$ soluciones de (1.29). Entonces por una métrica Lorentziana g la condición $g(X,X) = 0$ implica que existen $X \in T_A(\mathbb{R}^n)$ que cumplen:

$$\alpha)\ X \neq 0, \quad \beta)\ g(X,X) = 0$$

y referimos a tales elementos de $T_A(\mathbb{R}^n)$ como vectores *nulos*.

De la estructura de la ecuación (1.29) se sigue que la colección de $X \in T_A(\mathbb{R}^n)$, $g(X,X) = 0,\ X \neq 0$, se forma un cono en $T_A(\mathbb{R}^n)$ referido como el cono de luz en $T_A(\mathbb{R}^n)$ como en el dibujo (Figura 1.3):

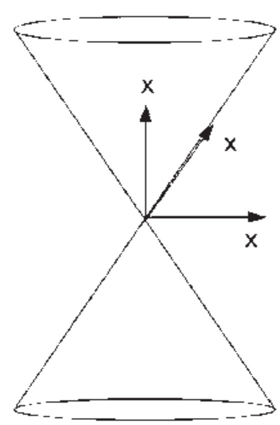


Figura 1.3: Cono de luz en el espacio tangente. Un $X \in T_A(\mathbb{R}^n)$ puede colocarse en tres lugares: en el interior del cono de luz $g(X,X) < 0$, sobre el cono de luz $g(X,X) = 0$ ó a fuera $g(X,X) > 0$.

Por un $X \in T_A(\mathbb{R}^n)$, $X \neq 0$ tenemos una de las siguientes posibilidades:

$$g(X,X) < 0 \Longleftrightarrow X \equiv Temporales$$

$$g(X,X) = 0 \Longleftrightarrow X \equiv Nulos$$

$$g(X,X) > 0 \Longleftrightarrow X \equiv Espaciales$$

Tal clasificación de los elementos de $T_A(\mathbb{R}^n)$, como veremos, juega un papel importante en la interpretación de R.E.

De aquí y en adelante restringimos nuestra atención a la métrica Lorentziana g_L de Minkowski que hemos definido en la sección introductoria [8].

Dado un sistema de referencia inercial global $\{x^0, \ldots, x^3\}$, primero notamos que el campo vectorial $X = \frac{\partial}{\partial x^0}$ satisface:

$$g(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^0}) = -1 < 0 \;\; \forall\, A \in \mathbb{R}^4 \tag{1.30}$$

entonces $X = \frac{\partial}{\partial x^0}$ es un campo vectorial globalmente temporal tal que $X|_A \neq 0 \;\; \forall\, A \in \mathbb{R}^4$. Por un evento A sea $T_A(\mathbb{R}^4)$ el espacio tangente y el cono de luz en $T_A(\mathbb{R}^4)$ como en el dibujo:

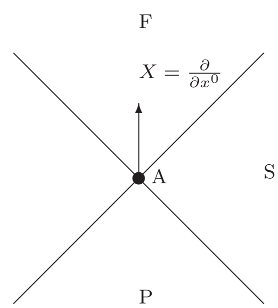


Figura 1.4: Cono de luz en $T_A(\mathbb{R}^4)$ en donde se observa como el campo vectorial $X = \frac{\partial}{\partial x^0}$ define el futuro F y el pasado P del cono de luz.

[8]*Subnota: Aún la mayoría de los conceptos que discutimos en esta sección son válidas para métricas Lorentzianas con curvatura de Riemman distinta de cero, por simplicidad restringimos nuestra atención a la métrica g_L del espacio-tiempo de Minkowski.*

El campo que hemos definido $X = \frac{\partial}{\partial x^0} \neq 0$ divide el interior del cono de luz en $T_A(\mathbb{R}^4)$ en la parte que tiene los Y con:

$$g(Y,Y) \leq 0 \ \text{ y } \ Y \uparrow\uparrow X \tag{1.31}$$

y referimos tales Y como vectores en A dirigidos hacia el futuro, mientras los $Y \in T_A(\mathbb{R}^4)$ que satisfacen:

$$g(Y,Y) \leq 0 \ \text{ y } \ Y \downarrow\uparrow X \tag{1.32}$$

son referidos como vectores en A dirigidos al pasado. Vectores en $T_A(\mathbb{R}^4)$ que viven en S son espaciales y no son dirigidos al futuro y tampoco al pasado. Decimos que $X = \frac{\partial}{\partial x^0}$ define una orientación en el tiempo por $(\mathbb{R}^4, g_L)$, y que $(\mathbb{R}^4, g_L)$ es orientable en el tiempo. De aquí y en adelante asumimos que hemos orientado el espacio-tiempo de Minkowski a través de una selección particular del campo $X = \frac{\partial}{\partial x^0}$, que define la orientación temporal de $(\mathbb{R}^4, g_L)$. En este punto justificamos porque definimos los conjuntos $\Lambda^{\uparrow}{}_{+}$, $\Lambda^{\downarrow}{}_{-}$ que hemos definido en la sección anterior. Elementos de $\Lambda^{\uparrow}{}_{+}$ generan transformaciones en conforme con la orientación temporal definida por X.
La clasificación de elementos de $T_A(\mathbb{R}^4)$ como vectores temporales, nulos ó espaciales induce también una clasificación entre curvas suaves en $\mathbb{R}^4$. Discutimos primero la definición de una curva regular que empleamos en este trabajo.

Definición 1.5. *Una curva regular γ en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ es un mapa:*

$$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^4 : \lambda \longmapsto \gamma(\lambda) \tag{1.33}$$

tal que: α) γ es suave, es decir, γ es C^k, $k \geq 1$. β) $\forall\ \lambda \in I \rightsquigarrow \frac{d\gamma(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda} \neq \vec{0}$.

El intervalo I puede ser de la forma: (a,b), $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ ó $I=\mathbb{R}$, e I es el dominio de definición de γ. El conjunto $\gamma(I)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4\ :\ \exists\ \lambda\in I\ :\ \gamma(\lambda)=\vec{x}\}$ es la imagen de I bajo γ. De aquí y en adelante consideramos curvas regulares γ que cumplen:

$$\lambda_1\neq\lambda_2\Rightarrow\gamma(\lambda_1)\neq\gamma(\lambda_2)$$

es decir, curvas que no permiten auto-intersecciones.
Sea $\{x^0,\ldots,x^3\}$ un sistema de coordenadas que cubre $O\subseteq\mathbb{R}^4$ y sea $\gamma([I])\cap O\neq\{\phi\}$, entonces (1.33) admite la representación:

$$\gamma: I\subseteq\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}^4:\lambda\longmapsto\gamma(\lambda)=x^0(\lambda),\ldots,x^3(\lambda) \tag{1.34}$$

en donde:

$$x^i: I\subseteq\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}:\lambda\longmapsto x^i(\lambda)=(pr^i\circ\gamma)(\lambda),\quad i=0,\ldots,3 \tag{1.35}$$

son las n-proyecciones de γ relativas al sistema $\{x^0,\ldots,x^3\}$. La condición de que γ es C^k implica que las n-proyecciones x^i en (1.35) son de clase C^k como funciones realvaluadas y tal propiedad por una curva de clase C^k debe ser válida para cada sistema $\{x^0,\ldots,x^3\}$ que satisface $\gamma([I])\cap O\neq\{\phi\}$.
De la representación (1.34), se sigue que el vector tangente T de γ a lo largo de $\gamma([I])\cap O$ admite la representación:

$$T=\frac{d}{d\lambda}=\frac{dx^\mu(\lambda)}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.36}$$

que expresa el vector tangente T en términos de coordenadas locales.
La presencia de la métrica Lorentziana y la existencia del vector tangente $T\neq 0$ a lo largo de una curva regular γ nos permite introducir una familia de curvas importantes según la definición:

Definición 1.6. *Sea γ una C^k-curva regular $k \geq 1$ y sea T el vector tangente de γ a lo largo de $\gamma([I])$. Decimos que γ es una curva temporal dirigida hacia el futuro si $\forall\ A \in \gamma([I])$ el vector tangente T_A es temporal dirigido hacia el futuro. La definición de que γ es una curva temporal dirigida al pasado requiere que T es dirigido al pasado, mientras la definición de que γ es una curva nula dirigida al futuro (respectivamente al pasado) será ahora obvia.*

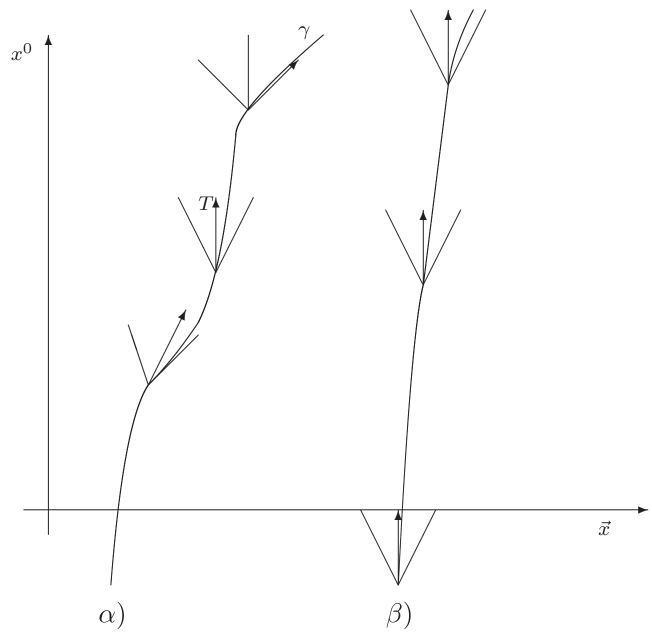


Figura 1.5: α) curva regular que no es globalmente temporal, β) globalmente temporal. La flecha denota el vector tangente de la curva y también hemos dibujado el cono de luz en el espacio tangente representado por la intersección de dos lineas rectas.

La clasificación de curvas regulares en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ en globalmente temporales, globalmente nulas y spacelike combinada con la métrica Lorentziana g_L nos permite definir la noción importante del tiempo propio.

Definición 1.7. *Sea $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \longmapsto (\mathbb{R}^4, g_L) : \lambda \longmapsto \gamma(\lambda)$, globalmente temporal y sea T su vector tangente. Sea también $A = \gamma(\lambda_1)$ y $B = \gamma(\lambda_2)$,*

$\lambda_2 > \lambda_1$ *dos eventos sobre* $\gamma([I])$ *entonces: se define el tiempo propio* $\tau[A, B]$ *del evento* A *hasta el evento* B *y a lo largo de* γ *mediante la siguiente integral:*

$$\tau[A, B] = \frac{1}{c}\int_A^B [-g(T,T)]^{\frac{1}{2}} d\lambda = \frac{1}{c}\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} [-g(T,T)]^{\frac{1}{2}} d\lambda \tag{1.37}$$

La suposición de que γ es globalmente temporal (y regular) implica que $g(T, T) < 0$ la cual garantiza que el lado derecho de (1.37) está bien definido y además $\tau[A, B]$ satisface las siguientes propiedades:

α) $\tau[A, B]$ *es invariante bajo cambio de coordenadas.*

β) $\tau[A, B]$ *es invariante bajo reparametrización de* γ*.*

Las propiedades α) y β) hacen $\tau[A, B]$ una cantidad matemáticamente bien definida. Tanto en relatividad especial y relatividad general $\tau[A, B]$ se identifica como el tiempo que registra un reloj que esta moviéndose a lo largo de la curva temporal γ. Tal interpretación ha sido verificada varias veces con observaciones.

Mencionamos aquí una consecuencia útil de (1.37). Sean $A = \gamma(\lambda)$ y $B = \gamma(\lambda + d\lambda)$ entonces de (1.37) se ve que:

$$\begin{aligned} d\tau(\lambda) &= \frac{1}{c}[-g(T,T)]^{\frac{1}{2}} d\lambda \Rightarrow \\ \frac{d\tau(\lambda)}{d\lambda} &= \frac{1}{c}[-g(T,T)]^{\frac{1}{2}} \neq 0 \ \ \forall\ \lambda \in I \end{aligned} \tag{1.38}$$

esta propiedad implica que podemos usar el tiempo propio τ como una parametrización de la curva γ. Usamos esta propiedad más adelante. Pero por el momento discutimos una consecuencia de la propiedad (α).

Sean dos eventos A, B en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ que están unidos por una curva temporal γ, tal que al respecto de un sistema de referencia inercial global $\{x^0, \ldots, x^3\}$

está dada:

$$\begin{aligned}
&\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^4 : \lambda \longrightarrow \gamma(\lambda) = \\
&= x^0(A) + (x^0(B) - x^0(A))\lambda, x^1(A) + (x^1(B) - x^1(A))\lambda, \\
&x^2(A) + (x^2(B) - x^2(A))\lambda, x^3(A) + (x^3(B) - x^3(A))\lambda
\end{aligned} \tag{1.39}$$

en donde $x^\alpha(A), x^\alpha(B)$ son las coordenadas de A, B relativas a $\{x^0, \ldots, x^3\}$. El vector tangente T a lo largo de (1.39) está dado por:

$$T = \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (x^\mu(B) - x^\mu(A))\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.40}$$

Evaluamos el tiempo propio (1.37) a lo largo de γ escrita por (1.39):

$$\begin{aligned}
&\tau[A,B] = \frac{1}{c}\int_0^1 [-g(T,T)]^{\frac{1}{2}} d\lambda = \\
&= \frac{1}{c}\int_0^1 [-g_{\mu\nu}(x^\mu(B) - x^\mu(A))(x^\nu(B) - x^\nu(A))]^{\frac{1}{2}} d\lambda = \\
&= \frac{1}{c}[-g_{\mu\nu}(x^\mu(B) - x^\mu(A))(x^\nu(B) - x^\nu(A))]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ó equivalentemente:

$$\tau^2[A,B] = -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}(x^\mu(B) - x^\mu(A))(x^\nu(B) - x^\nu(A)).$$

Mostraremos ahora que tal expresión es un invariante de Poincaré. Por eso sea $(\Lambda, a) \in PG$ y sea $y^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ una transformación de coordenadas generada por tal (λ, a). Eliminando las coordenadas $x^\mu(A), x^\mu(B)$ de los eventos A, B en favor de $y^\mu(A), y^\mu(B)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\tau^2[A,B] = -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(y^\alpha(B) - y^\alpha(A))(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta(y^\beta(B) - y^\beta(A)) = \\
&= -\frac{1}{c^2}g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta(y^\alpha(B) - y^\alpha(A))(y^\beta(B) - y^\beta(A)) = \\
&= -\frac{1}{c^2}g_{\alpha\beta}(y^\alpha(B) - y^\alpha(A))(y^\beta(B) - y^\beta(A))
\end{aligned}$$

la cual muestra la invariancia de $\tau[A, B]$ bajo elementos del grupo PG.

Mostraremos ahora que la estructura de $(\mathbb{R}^4, g_L)$ nos permite clasificar dos eventos arbitrarios A, B como eventos separados temporalmente, espacialmente ó eventos que son unidos con un rayo de luz. Tal clasificación define el cono de luz en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ con vértice en un evento A.

Sean ahora dos eventos A, B y sea la linea recta γ como en (1.39) (pero ahora no necesariamente temporal) que une estos eventos. Evaluamos la magnitud del vector tangente T de γ através de:

$$\begin{aligned} & g(T,T) = g((x^\mu(B) - x^\mu(A))\frac{\partial}{\partial x^\mu}, (x^\nu(B) - x^\nu(A))\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \\ & = (x^\mu(B) - x^\mu(A))(x^\nu(B) - x^\nu(A))g_{\mu\nu} = -(x^0(B) - x^0(A))^2 + \\ & +(x^1(B) - x^1(A))^2 + (x^2(B) - x^2(A))^2 + (x^3(B) - x^3(A))^2 \end{aligned} \tag{1.41}$$

y ahora discutimos algunas consecuencias de (1.41).

Sea que el evento B está colocado de tal manera que la linea recta γ escrita por (1.39) que une A y B tiene la propiedad que el vector tangente T a lo largo de $\gamma([0, 1])$ es temporal, es decir:

$$\begin{aligned} & g(T,T) < 0 \Rightarrow -(x^0(B) - x^0(A))^2 + (x^1(B) - x^1(A))^2 + \\ & +(x^2(B) - x^2(A))^2 + (x^3(B) - x^3(A))^2 < 0 \Rightarrow \\ & (x^0(B) - x^0(A))^2 > (x^1(B) - x^1(A))^2 + (x^2(B) - x^2(A))^2 + \\ & +(x^3(B) - x^3(A))^2 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Del mismo razonamiento como por el tiempo propio vemos que la desigualdad (1.42) es invariante bajo transformaciones de coordenadas generadas por elementos del grupo de Poincaré. Decimos que los eventos (A, B) están temporalmente separados.

Asumimos ahora que el evento B está colocado de manera que:

$$
\begin{aligned}
&g(T,T) = 0 \Rightarrow (x^0(B) - x^0(A))^2 = (x^1(B) - x^1(A))^2 + \\
&+(x^2(B) - x^2(A))^2 + (x^3(B) - x^3(A))^2
\end{aligned}
\tag{1.43}
$$

y recordando que $x^0 = ct$ obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&(t_B - t_A)^2 = \\
&= \frac{(x^1(B) - x^1(A))^2 + (x^2(B) - x^2(A))^2 + (x^3(B) - x^3(A))^2}{c^2}
\end{aligned}
\tag{1.44}
$$

Pero de (1.44) concluimos que el evento B está relacionado con A por medio de un rayo de luz. Esta propiedad por medio de (1.43) es también invariante bajo el grupo de Poincaré. Dado un evento A la totalidad de todos los eventos B en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ que satisfacen (1.43) ó equivalentemente (1.44), forma un cono con vértice en A y en contraste con el cono de luz definido en $T_A(\mathbb{R}^4)$, el cono ahora está definido en $\mathbb{R}^4$ como en el dibujo:

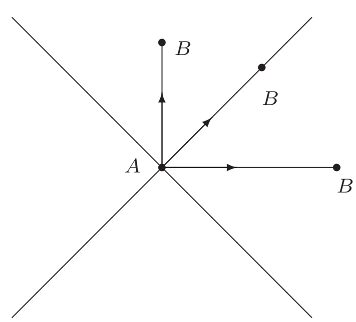


Figura 1.6: Cono de Luz en $\mathbb{R}^4$ con origen en el evento A. Los eventos $B \neq A$ pueden colocarse en tres diferentes regiones: en el interior, sobre ó a fuera del cono de luz.

Referimos tal cono en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ como el cono de luz en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ con vértice en el evento A.

Finalmente en el caso en que B está colocado de manera que:

$$g(T,T) > 0 \Rightarrow (x^1(B) - x^1(A))^2 + (x^2(B) - x^2(A))^2 + \\ +(x^3(B) - x^3(A))^2 > (x^0(B) - x^0(A))^2 \tag{1.45}$$

El evento B esta colocado a fuera del cono de luz con vértice en A, y decimos que B es espacialmente separado de A.

La propiedad que dos eventos (A, B) son separados temporalmente, se unen con un rayo de luz ó son espacialmente separados es una propiedad que se queda invariante bajo los elementos del grupo de Poincaré. Este análisis muestra que la métrica g_L nos permite clasificar eventos (A, B) como eventos en el interior, sobre y afuera del cono de luz. Si $(\Lambda, a) \in PG$ entonces:

$$y^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha + a^\mu \Rightarrow x^\alpha = (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu y^\mu - (\Lambda^{-1})^\alpha{}_\mu a^\mu$$

y se ve de inmediato que:

$$g_{\mu\nu}(x^\mu(B) - x^\mu(A))(x^\nu(B) - x^\nu(A)) = \\ = g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha(\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta(y^\alpha(B) - y^\alpha(A))(y^\beta(B) - y^\beta(A)) = \\ = g_{\alpha\beta}(y^\alpha(B) - y^\alpha(A))(y^\beta(B) - y^\beta(A))$$

que verifica lo demandado. En particular tenemos como consecuencia que si respecto de un sistema de referencia inercial un observador mide c como la velocidad de la luz, lo mismo se concluye de cualquier otro observador relativamente a cualquier sistema de referencia inercial de $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

La existencia del tiempo propio medido a lo largo de una curva temporal γ nos permite introducir una reparametrización particular para cada curva γ globalmente temporal. Para ver esto sea la curva γ temporal escrita en términos del parámetro λ como en (1.34), y sea:

$$\tilde{\gamma}(\tau) = (\gamma \circ \tau) \Rightarrow \tilde{\gamma}(\tau) = x^0(\lambda(\tau)), \ldots, x^3(\lambda(\tau))$$

una reparametrización de γ que usa el tiempo propio τ como parámetro natural a lo largo de γ. Denotamos por u el vector tangente de $\tilde{\gamma}(\tau)$ y por la propiedad (1.38) tenemos:

$$u = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu(\lambda(\tau))}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{d\lambda}{d\tau} T$$

Evaluamos:

$$g(u, u) = g(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\nu}) =$$

$$= (\frac{d\lambda}{d\tau})^2 g(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = (\frac{d\lambda}{d\tau})^2 g(T, T) =$$

$$= \frac{g(T,T)}{(\frac{d\tau}{d\lambda})^2} = \frac{g(T,T)}{\frac{1}{c^2}(-g(T,T))} = -c^2 \tag{1.46}$$

Entonces mostramos que cada curva γ regular globalmente temporal puede ser reparametrizada empleando el tiempo propio τ medido a lo largo de $\gamma[I]$ de tal manera que el vector tangente: $u = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ satisface $g(u, u) = -c^2$. Con esta propiedad de curvas temporales tenemos la siguiente definición:

Definición 1.8. *El vector tangente u de una curva temporal γ normalizado según $g(u, u) = -c^2$ es referido como la 4-velocidad de γ. La suposición de que γ es dirigida hacia el futuro (respectivamente al pasado) está implementada por la condición:*

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau} > 0 \quad (\textit{respectivamente} \quad \frac{dx^0}{d\tau} < 0).$$

Varias veces es conveniente trabajar con una representación de u que satisface $g(u,u) = -1$. Para lograr esto notamos que:

$$\hat{u} = \frac{dx^\mu}{cd\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c}u$$

satisface:

$$g(\hat{u},\hat{u}) = \frac{1}{c^2}g(u,u) = -\frac{c^2}{c^2} = -1$$

Para la interpretación de (R.E) (ó relatividad general R.G) la noción de observadores es muy importante. Por ambas teorías tenemos la definición:

Definición 1.9. *En R.E (ó R.G) un observador se modela por una curva regular* $\gamma : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}^4$ *al menos de clase* C^1 *que es globalmente temporal que posee 4-velocidad:*

$$u = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad g(u,u) = -c^2 \;\; ó \;\; \hat{u} = \hat{u}^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{dl}\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad g(\hat{u},\hat{u}) = -1.$$

y nos referimos a $\gamma[\mathbb{R}]$ *como la linea del mundo de observadores.*

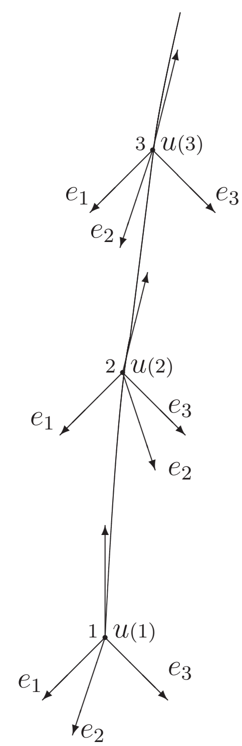


Figura 1.7: Línea del mundo de un observador en donde hemos dibujado para cada evento la base ortonormal que lleva este observador.

Cada evento A a lo largo de su línea del mundo γ el observador lleva además de u otros 3-vectores $(e_1, e_2, e_3)|_A$ tal que $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $g(u, e_i) = 0$ y por definición $g(u, u) = -c^2$. La 4-pleta $\{u, e_1, e_2, e_3\}|_A$ constituye una base ortonormal de $T_A(\mathbb{R}^4)$, y tal base existe para cada evento a lo largo de la trayectoria del observador.

Ahora mostramos que un sistema de referencia inercial global $\{x^0, \ldots, x^3\}$ en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ define una familia de observadores privilegiados. Sea la familia de curvas:

$$\gamma : \mathbb{R} \longmapsto (\mathbb{R}^4, g_L) : \lambda \longmapsto \gamma(\lambda) = (\lambda, c^1, c^2, c^3) \tag{1.47}$$

con $c^i, \quad i = 1, 2, 3$ constantes.

Para cada una de estas curvas representa las lineas del mundo de observadores que se encuentran en posiciones especiales $(x^1 = c^1, x^2 = c^2, x^3 = c^3)$ fijas. Gráficamente tenemos:

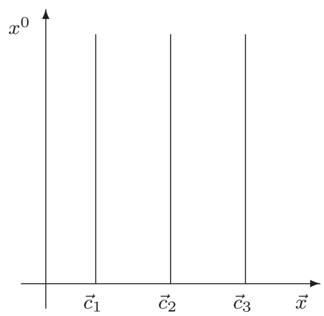


Figura 1.8: Líneas del mundo de observadores inerciales en reposo relativo al sistema inercial $\{x^0, \ldots, x^3\}$.

Es conveniente reparametrizar las curvas γ tomando $\lambda := x^0 = ct$ es decir:

$$\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \longmapsto (\mathbb{R}^4, g_L) : t \longmapsto \tilde{\gamma}(t) = (ct, c^1, c^2, c^3) \tag{1.48}$$

Por tal parametrización el vector tangente $\hat{T}$ esta dado por:

$$\tilde{T} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = c\frac{\partial}{\partial x^0} \Rightarrow g(\tilde{T}, \tilde{T}) = -c^2$$

Evaluando el tiempo propio a lo largo de la linea del mundo de estos observadores tenemos:

$$\tau(t_2, t_1) = \frac{1}{c}\int_{t_1}^{t_2} [-g(\tilde{T}, \tilde{T})]^{\frac{1}{2}} dt = (t_2 - t_1) \tag{1.49}$$

la cual implica que el tiempo propio a lo largo de las lineas del mundo de observadores escritos por (1.48) satisface:

$$\tau(t_2, t_1) = (t_2 - t_1)$$

La cuatro velocidad de estos observadores está dada por:

$$u = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = c\frac{\partial}{\partial x^0}, \quad g(u,u) = -c^2 \tag{1.50}$$

La familia de observadores que hemos definido por medio de (1.47 ó 1.48) es una familia de observadores privilegiados.

Para ver que es particular sobre estos observadores notamos que el vector tangente (4-velocidad) $u = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = c\frac{\partial}{\partial x^0}$ satisface la ecuación:

$$\nabla_u u = 0$$

es decir, la familia de curvas escritas por (1.47 ó 1.48) son curvas *geodésicas* temporales de la métrica g_L. Llamamos tales observadores como *observadores inerciales* en $(\mathbb{R}^4, g_L)$. Más general tenemos la siguiente definición:

Definición 1.10. *Las geodésicas temporales de la métrica Lorentziana g_L y la conexión de Levi-Civita son las lineas del mundo de observadores inerciales en* $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

Mencionamos aquí que la familia particular de observadores inerciales escritas por la familia (1.47-1.48), son observadores inerciales en reposo uno de otro y en reposo al respecto de $\{x^0, \ldots, x^3\}$ pero es importante mencionar que tal familia no es la única familia de observadores inerciales en $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

En resumen en las últimas dos secciones hemos explotado algunas consecuencias elementales de la métrica Lorentziana g_L. A través de g_L hemos:

α) Definido el grupo de Poincaré y de Lorentz.

β) Clasificado elementos de $T_A(\mathbb{R}^4)$ como: temporales, nulos y espaciales.

γ) Clasificado curvas regulares como: temporales, nulas y espaciales.

δ) Definido el cono de luz através de un evento $A \in (\mathbb{R}^4, g_L)$.

ε) Definido la noción de observadores en $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

ζ) Definido la noción de geodésicas en $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

Capítulo 2

Formulación Relativista de la Electrodinámica de Maxwell

2.1 Formulación de la Electrodinámica de Maxwell en relatividad especial

Como hemos mencionado, Minkowski [2] formuló relatividad especial (R.E) como una teoría del espacio-tiempo (sin interacción gravitatoria). Históricamente la teoría de relatividad especial fue formulada por Einstein en 1905 y está basada en dos postulados [1]:

1) *Postulado de la constancia de la velocidad de la luz: La velocidad de la luz c es independiente del movimiento de la fuente.*

2) *Postulado de relatividad: Las leyes de la naturaleza y los resultados de todos los experimentos realizados en un sistema de referencia dado, es inde-*

[1] *Subnota: La forma de estos postulados los tomamos palabra por palabra del libro de Jackson [1].*

pendiente del movimiento de traslación del sistema en conjunto. Así, existe un conjunto infinito de sistemas de referencia equivalentes en movimiento con velocidad constante respecto a otro en la que todos los fenómenos físicos se producen de una manera idéntica.

En la sección anterior hemos discutido algunas propiedades elementales de (R.E) que son consecuencia natural de la estructura del espacio de Minkowski y hemos visto como la estructura de $(\mathbb{R}^4, g_L)$ se incorpora naturalmente al postulado (1). En esta sección discutimos el significado y las implicaciones del segundo postulado. Primero con los resultados de las últimas dos secciones hemos identificado el conjunto de los infinitos sistemas de referencia que nombramos como sistemas de referencia inerciales globales de $(\mathbb{R}^4, g_L)$. Hemos visto también como por medio de los elementos del grupo de Poincaré PG pasamos de un sistema de referencia inercial global a otro. En este punto estamos en posición para reformular la teoría de Maxwell de manera que las ecuaciones resultantes son invariantes bajo el grupo de transformación (α) que hemos definido en la sección introductoria, y como demanda el segundo postulado.

Empezamos con un sistema de referencia inercial global.

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$$

$$x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z, \quad -\infty < x^i < \infty, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Como hemos mencionado, del punto de vista de Minkowski, tal sistema resultó por la unificación del espacio Euclideano $(\mathbb{R}^3, g_E)$ y la variable del tiempo. Asumimos ahora que en $(\mathbb{R}^3, g_E)$ son definidos los campos eléctricos $\vec{E}(\vec{x}, t)$ y magnéticos $\vec{B}(\vec{x}, t)$ escritos por:

$$\vec{E}(x^0, x^1, x^2, x^3) = E^1(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^1} + E^2(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^2} + E^3(\vec{x}, t)\frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.1)$$

$$\vec{B}(x^0,x^1,x^2,x^3) = B^1(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x^1} + B^2(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x^2} + B^3(\vec{x},t)\frac{\partial}{\partial x^3} \quad (2.2)$$

y $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$ satisfacen las ecuaciones pre-relativistas dadas por (1,2). La idea esencial de Minkowski fue tomar las 6−funciones $(E^1(x^0,\vec{x}),\ldots,B^3(x^0,\vec{x}))$ y reacomodarlas como las componentes de un campo tensorial $(0,2)$ antisimétrico. En esta sección discutimos con detalle esta idea y vemos como esta hipótesis da nacimiento a una nueva representación de la electrodinámica de Maxwell en el vacío. Sea primero $F = F_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta$, un campo tensorial antisimétrico. La antisimetría de F implica que las componentes coordenadas $F_{\alpha\beta} := F(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta})$ satisfacen:

$$F_{\alpha\beta} = F(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta}) = -F(\frac{\partial}{\partial x^\beta},\frac{\partial}{\partial x^\alpha}) = -F_{\beta\alpha}$$

Expandiendo en suma en $F = F_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
&F = F_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta = F_{01}dx^0 \otimes dx^1 + F_{02}dx^0 \otimes dx^2 + F_{03}dx^0 \otimes dx^3 \\
&+F_{10}dx^1 \otimes dx^0 + F_{20}dx^2 \otimes dx^0 + F_{30}dx^3 \otimes dx^0 + F_{12}dx^1 \otimes dx^2 \\
&+F_{21}dx^2 \otimes dx^1 + F_{13}dx^1 \otimes dx^3 + F_{31}dx^3 \otimes dx^1 + F_{23}dx^2 \otimes dx^3 \\
&+F_{32}dx^3 \otimes dx^2 = \\
&= F_{01}(dx^0 \otimes dx^1 - dx^1 \otimes dx^0) + F_{02}(dx^0 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^0) \\
&+F_{03}(dx^0 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^0) + F_{12}(dx^1 \otimes dx^2 - dx^2 \otimes dx^1) \\
&+F_{13}(dx^1 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^1) + F_{23}(dx^2 \otimes dx^3 - dx^3 \otimes dx^2) = \\
&= F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu,\ \mu < \nu
\end{aligned}$$

en donde de la estructura del lado derecho introducimos una nueva operación referida como producto cuña $\wedge$ através de:

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu,\ \mu < \nu.$$

Dados los campos $(\vec{E}, \vec{B})$ como (2.1,2.2), según Minkowski elegimos las componentes $F_{\mu\nu}$ de F por medio de:

$$\begin{aligned} &F_{01} = E_1, F_{02} = E_2, F_{03} = E_3, \\ &F_{12} = -B_3, F_{13} = B_2, F_{23} = -B_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

es decir el campo F tiene la representación [2]:

$$\begin{aligned} &F = E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 \\ &-B_3 dx^1 \wedge dx^2 + B_2 dx^1 \wedge dx^3 - B_1 dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \tag{2.4}$$

De aquí y en adelante nos referimos a $F = F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,\ \mu < \nu$ como el campo tensorial de Maxwell, y sus componentes $F_{\mu\nu}$ tienen la forma:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_{00} & F_{01} & F_{02} & F_{03} \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{20} & F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{30} & F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando la métrica g_L subimos los índices de $F_{\mu\nu}$ através de: $F^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} F_{\mu\nu}$

[2] *Subnota: En (2.3) y (2.4) se entiende que* $F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}(x^0, \vec{x})$, $E_1(x^0, \vec{x})$, *etc., y de aquí y en adelante por simplicidad omitimos la dependencia explícita de las componentes de campos tensoriales las coordenadas* $(x^0, \vec{x})$.

y esta relación implica que las componentes contravariantes $F^{\alpha\beta}$ son:

$$
\begin{aligned}
F^{00} &= g^{0\mu}g^{0\nu}F_{\mu\nu} = g^{00}g^{00}F_{00} = 0\\
F^{01} &= g^{0\mu}g^{1\nu}F_{\mu\nu} = g^{00}g^{11}F_{01} = -F_{01} = -E_1 = -E^1\\
F^{02} &= g^{0\mu}g^{2\nu}F_{\mu\nu} = g^{00}g^{22}F_{02} = -F_{02} = -E_2 = -E^2\\
F^{03} &= g^{0\mu}g^{3\nu}F_{\mu\nu} = g^{00}g^{33}F_{03} = -F_{03} = -E_3 = -E^3\\
F^{12} &= g^{1\mu}g^{2\nu}F_{\mu\nu} = g^{11}g^{22}F_{12} = F_{12} = -B_3 = -B^3\\
F^{13} &= g^{1\mu}g^{3\nu}F_{\mu\nu} = g^{11}g^{33}F_{13} = F_{13} = B_2 = B^2\\
F^{23} &= g^{2\mu}g^{3\nu}F_{\mu\nu} = g^{22}g^{33}F_{23} = F_{23} = -B_1 = -B^1
\end{aligned}
$$

y en una representación matricial tiene la forma:

$$
F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03}\\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13}\\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23}\\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3\\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2\\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1\\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Enseguida consideraremos la ecuación de continuidad en la forma pre-relativista:

$$
\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J^1}{\partial x^1} + \frac{\partial J^2}{\partial x^2} + \frac{\partial J^3}{\partial x^3} = 0.
$$

La estructura del lado derecho sugiere definir el 4-vector (en realidad campo vectorial) J como:

$$
\begin{aligned}
J = J^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} &= J^0\frac{\partial}{\partial x^0} + J^1\frac{\partial}{\partial x^1} + J^2\frac{\partial}{\partial x^2} + J^3\frac{\partial}{\partial x^3} =\\
&= c\rho\frac{\partial}{\partial x^0} + J^1\frac{\partial}{\partial x^1} + J^2\frac{\partial}{\partial x^2} + J^3\frac{\partial}{\partial x^3}
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

en donde la presencia de c uniformiza las dimensiones de J es decir:

$$
[\rho c] = [J^i] = \frac{\text{Carga eléctrica}}{L^2T}, \quad i = 1, 2, 3.
$$

De aquí y en adelante nos referimos al campo J como la 4-corriente eléctrica y por su definición satisface: $\partial_\mu J^\mu = 0$. En este punto tenemos todos los ingredientes necesarios para formular la Electrodinámica de Maxwell en términos de componentes de campos tensoriales F y J que hemos definido. Por esto sea el sistema:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}J^\beta \iff \partial_\alpha F^{\beta\alpha} = -\frac{4\pi}{c}J^\beta \tag{2.6}$$

Mostramos que este sistema es equivalente a la ley de Coulomb y la ley de Ampere, es decir:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho,\ \nabla\times\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Para mostrar tal propiedad tomamos $\beta = 0$ en (2.6), entonces tenemos:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{4\pi}{c}J^0 = \frac{4\pi}{c}\rho c = 4\pi\rho \Rightarrow\\
&\partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = 4\pi\rho \Rightarrow\\
&\partial_1 E^1 + \partial_2 E^2 + \partial_3 E^3 = 4\pi\rho \Rightarrow \nabla\cdot\vec{E} = 4\pi\rho.
\end{aligned}$$

Por otro lado tomando $\beta = 1$ en (2.6), tenemos:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F^{\alpha 1} = \frac{4\pi}{c}J^1 \Rightarrow \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \frac{4\pi}{c}J^1 \Rightarrow\\
&\partial_0(-E^1) + \partial_2(B^3) + \partial_3(-B^2) = \frac{4\pi}{c}J^1 \Rightarrow\\
&-\frac{1}{c}\frac{\partial E^1}{\partial t} + \frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3} = \frac{4\pi}{c}J^1
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Para ver el contenido de esta relación recordamos la estructura de $\nabla\times\vec{B}$:

$$\nabla\times\vec{B} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ B^1 & B^2 & B^3 \end{pmatrix} =$$

$$= (\frac{\partial B^3}{\partial x^2} - \frac{\partial B^2}{\partial x^3})\frac{\partial}{\partial x^1} + (\frac{\partial B^1}{\partial x^3} - \frac{\partial B^3}{\partial x^1})\frac{\partial}{\partial x^2} + (\frac{\partial B^2}{\partial x^1} - \frac{\partial B^1}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial x^3}$$

Tomando en cuenta esta representación concluimos que (2.7) es equivalente a:

$$\Rightarrow (\nabla \times \vec{B})^1 = \frac{4\pi}{c} J^1 + \frac{1}{c}\frac{\partial E^1}{\partial t}$$

Tomando $\beta = 2$, respectivamente $\beta = 3$ en (2.6) concluimos que la estructura de (2.6) es equivalente a la ley de Ampere:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Junto con (2.6) agregamos la siguiente ecuación homogénea:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0.\ \alpha, \beta, \gamma \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{2.8}$$

Mostraremos que el otro par de ecuaciones de Maxwell homogéneas, es decir:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

están contenidas en (2.8):

Para ver esto sea que tomamos $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ en (2.8):

$$\begin{aligned} &\partial^0 F^{12} + \partial^1 F^{20} + \partial^2 F^{01} = 0 \Rightarrow \\ &\partial^0(-B^3) + \partial^1(E^2) + \partial^2(-E^1) = 0 \Rightarrow \\ &\frac{\partial E^2}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1}{\partial x^2} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^3}{\partial t} \end{aligned} \tag{2.9}$$

y en donde hemos usado la propiedad: $\partial^0 = g^{00}\partial_0 = -\partial_0$. La estructura de (2.9) implica:

$$(\nabla \times \vec{E})^3 = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^3}{\partial t}$$

Tomando $\beta = 1$, $\gamma = 3$, respectivamente $\beta = 2$, $\gamma = 3$ concluimos que (2.8) es equivalente a la ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Enseguida tomando $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, tenemos:

$$\partial^1 F^{23} + \partial^2 F^{31} + \partial^3 F^{12} = 0 \Rightarrow$$

$$\partial^1(-B^1) + \partial^2(-B^2) + \partial^3(-B^3) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{\partial B^1}{\partial x^1} + \frac{\partial B^2}{\partial x^2} + \frac{\partial B^3}{\partial x^3} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

En resumen vemos que el sistema de ecuaciones:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \Longleftrightarrow \partial_\alpha F^{\beta\alpha} = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \tag{2.10}$$

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.11}$$

Por medio de la representación del tensor de Maxwell F escrita por (2.4) son equivalentes a la forma pre-relativista de las ecuaciones de Maxwell escritas por (1,2). Nótese también que la antisimetría de F implica por medio de (2.6) que:

$$0 = \partial_\beta \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} \partial_\beta J^\beta \Rightarrow \partial_\beta J^\beta = 0$$

y como mostraremos más adelante $\partial_\alpha J^\alpha = 0$ expresa la conservación de la carga eléctrica.

En resumen empezando con las ecuaciones de Maxwell pre-relativistas definidas en $(\mathbb{R}^3, g_E)$ y siguiendo los pasos de Minkowski hemos introducido el tensor de Maxwell F usando los campos $(\vec{E}, \vec{B})$ y la 4-corriente J por medio de ρ y $\vec{J}$. Postulando las ecuaciones (2.10,2.11) hemos mostrado que son equivalentes a la forma pre-relativista de las ecuaciones de Maxwell.

Suponemos que tenemos una solución $(F = F_{\alpha\beta}\ dx^\alpha \wedge dx^\beta,\ J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu})$ del sistema (2.10,2.11) relativamente a algún sistema de referencia inercial

$\{x^0, \ldots, x^3\}$. Nos preguntamos *¿Cómo recupera uno de (F, J) las ecuaciones (1,2)?*.

Aún las representaciones de las componentes de F implican $E^1 = -F^{01}$, $E^2 = -F^{02}$, etc., hay una manera covariante para definir (E, B) es términos de F. Recordemos que en el capítulo anterior $u = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = c\frac{\partial}{\partial x^0}$ es la cuatro velocidad de observadores inerciales en reposo al respecto de $\{x^0, \ldots, x^3\}$ en donde:

$$g = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$$

Relativamente al campo de cuatro velocidad $u = c\frac{\partial}{\partial x^0}$ definimos el campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ que miden estos observadores por medio de:

$$E^\alpha = F^{\alpha b} u_b, \quad B^\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha b}{}_{cd} F^{cd} u_b \tag{2.12}$$

en donde $\epsilon^{\alpha bcd}$ son las componentes del tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico. De esta definición tenemos que:

$$g(u, E) = g_{\alpha b} E^\alpha u^b = g_{\alpha b} F^{\alpha\mu} u_\mu u^b = F_{b\mu} u^\mu u^b = 0 \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} g(u, B) &= g_{\alpha b} B^\alpha u^b = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\mu}{}_{cd} g_{\alpha b} F^{cd} u_\mu u^b = \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon^{b\mu}{}_{cd} F^{cd} u_\mu u_b = 0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

y estas relaciones implican que (E, B) son campos ortogonales de la cuatro velocidad u de los observadores, es decir, (E, B) son campos espaciales.

Adicionalmente de la definición (2.12), tenemos la siguiente representación covariante de las componentes $F_{\alpha b}$ de F:

$$F_{\alpha b} = u_\alpha E_b - u_b E_\alpha + \epsilon_{\alpha b}{}^{cd} B_d u_c \tag{2.15}$$

Verificamos primero que la descomposición (2.15) es consistente con las definiciones dadas por (2.12).

Por eso sea la contracción de (2.15) con las componentes de $u = u^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, es decir:

$$F_{\alpha b}u^b = u_\alpha E_b u^b - E_\alpha(u_b u^b) + \epsilon_{\alpha b}{}^{cd}B_d u_c u^b = u_\alpha(E_b u^b) + E_\alpha = E_\alpha$$

Por otro lado consideramos la combinación:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha b}F_{\alpha b}u^\nu &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha b}(u_\alpha E_b - u_b E_\alpha + \epsilon_{\alpha b}{}^{k\lambda}B_\lambda u_k)u^\nu = \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha b}\epsilon_{\alpha b}{}^{k\lambda}B_\lambda u_k u^\nu \end{aligned} \tag{2.16}$$

Pero tenemos que la contracción:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha b}\epsilon_{\alpha b}{}^{k\lambda} &= \epsilon^{\alpha b}{}_{\mu\nu}\epsilon_{\alpha b}{}^{k\lambda} = (-1)(4-2)!2!\delta^{[k\lambda]}{}_{\mu\nu} = \\ &= -2!(\delta^k{}_\mu\delta^\lambda{}_\nu - \delta^\lambda{}_\mu\delta^k{}_\nu) \end{aligned} \tag{2.17}$$

Combinando (2.16) con (2.17) se ve que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu}{}^{\alpha b}\epsilon_{\alpha b}{}^{k\lambda}B_\lambda u_k u^\nu &= (\delta^k{}_\mu\delta^\lambda{}_\nu - \delta^\lambda{}_\mu\delta^k{}_\nu)B_\lambda u_k u^\nu = \\ &= (B_\nu u^\nu)u_\mu - B_\mu(u_\nu u^\nu) = B_\mu \end{aligned}$$

es decir, la representación (2.15) es consistente con (2.12).

De la definición de las componentes (E^α, B^α) de $(\vec{E}, \vec{B})$ tomando en cuenta que F satisface (2.10,2.11), ahora mostramos que en realidad $(\vec{E}, \vec{B})$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell en forma pre-relativista. Por eso observamos:

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha E^\alpha &= \partial_\alpha E^\alpha = \partial_\alpha(F^{\alpha b}u_b) = (\partial_\alpha F^{\alpha b})u_b + F^{\alpha b}\partial_\alpha u_b = \\ &= \frac{4\pi}{c}J^b u_b = \frac{4\pi}{c}\rho c = 4\pi\rho \end{aligned}$$

Similarmente:

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha B^\alpha = \partial_\alpha B^\alpha = \partial_\alpha(-\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha b}{}_{cd}F^{cd}u_b) = \\ = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha b}{}_{cd}(\partial_\alpha F^{cd})u_b - \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha b}{}_{cd}F^{cd}\partial_\alpha u_b = 0\end{aligned}$$

debido del segundo par de ecuaciones (2.11). La confirmación de las otras ecuaciones viene por un cálculo análogo.

De este análisis vemos que dada una solución (F, J) de las ecuaciones (2.10, 2.11), observadores inerciales asignan campo eléctrico $\vec{E}$ y magnético $\vec{B}$ por medio de (2.12) que satisfacen la forma pre-relativista de las ecuaciones de Maxwell.

2.2 Invariancia de norma de la teoría de Maxwell

En la sección anterior hemos mostrado que las ecuaciones de Maxwell en forma pre-relativista escritas por (1,2) son equivalentes a las ecuaciones (2.10,2.11) y viceversa. Todavía no hemos mostrado el punto crucial: la invariancia de las ecuaciones (2.10,2.11) bajo elementos del grupo de Poincaré. Antes de hacer esto consideramos de importancia discutir la noción de la invariancia de norma por la teoría de Maxwell. Como es bien conocida las ecuaciones de Maxwell en la forma (1) y (2) exhiben una propiedad importante referida como invariancia de norma (para una discusión véase por ejemplo [1]). En esta sección discutimos si tal propiedad está presente en la formulación relativista, y si está presente como se manifiesta. Por este análisis vemos brevemente como nace la noción de invariancia de norma del sistema pre-relativista (1,2). De las ecuaciones:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0,\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

concluimos que existen potenciales $\Phi(\vec{x},t)$, $\vec{A}(\vec{x},t)$ tales que:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\Phi,\ \vec{B}(\vec{x},t) = \nabla\times\vec{A} \tag{2.18}$$

La propiedad remarcable es que los campos físicos $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$ no fijan únicamente los potenciales $(\vec{A},\Phi)$. Si por ejemplo $\chi(\vec{x},t)$ es una función suave arbitraria y definimos nuevos potenciales $(\vec{A}'(\vec{x},t),\Phi'(\vec{x},t))$ através de:

$$\vec{A}'(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x},t) + \nabla\chi(\vec{x},t),\ \Phi'(\vec{x},t) = \Phi(\vec{x},t) - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi(\vec{x},t)}{\partial t} \tag{2.19}$$

vemos también que $(\vec{A}',\Phi')$ satisfacen:

$$\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla\Phi',\ \vec{B}(\vec{x},t) = \nabla\times\vec{A}'$$

La invariancia de $(\vec{E},\vec{B})$ bajo transformación de los potenciales $(\vec{A},\Phi)$ escrita por (2.19) y por extensión la invariancia de las ecuaciones (1,2) bajo cambio de los potenciales es referido como invariancia de norma de los campos $(\vec{E},\vec{B})$. La invariancia de norma se utilizará para simplificar las ecuaciones de Maxwell mediante una selección particular de norma. Recordamos, en el tratamiento pre-relativista la norma de Lorentz tiene la forma [3]:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A} = 0 \tag{2.20}$$

[3] *Subnota: Siempre podemos forzar la norma de Lorentz. Para mostrar esto, sea que empezamos con $(\vec{A},\Phi)$ que no satisfacen la norma de Lorentz, es decir:*

$$\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} \neq 0$$

Sea $\chi(\vec{x},t)$ una función de clase C^2, queremos elegir $\chi(\vec{x},t)$ de tal manera que los nuevos potenciales $(\vec{A}',\Phi')$ satisfacen:

$$\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = \nabla\cdot(\vec{A}+\nabla\chi) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = -(\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}) \qquad (*)$$

y las ecuaciones de Maxwell (1,2) relativamente a esta norma son (ver [1])

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\nabla^2\Phi=-4\pi\rho,\quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}+\nabla^2\vec{A}=-\frac{4\pi}{c}\vec{J} \tag{2.21}$$

mientras $(\vec{E},\vec{B})$ están dados por:

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\nabla\Phi,\ \ \vec{B}=\nabla\times\vec{A}. \tag{2.22}$$

Vemos ahora que la invariancia de norma se preserva en la descripción relativista de la teoría escrita por (2.6,2.8). Por eso sean $(\vec{A},\Phi)$ potenciales arbitrarios por $(\vec{E},\vec{B})$. Primero unimos tales potenciales introduciendo el 4-vector potencial a través de:

$$A=A^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\Phi\frac{\partial}{\partial x^0}+A^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ \ i=1,2,3$$

Por otro lado el lado derecho de (2.22) puede estar escrito en la forma equivalente:

$$\vec{E}=E^i\frac{\partial}{\partial x^i}=-\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x^i}-g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}=[-\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}-g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}]\frac{\partial}{\partial x^i}\Rightarrow$$

$$E^i=-\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t}-g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial x^j}=-\frac{\partial A^i}{\partial x^0}-\partial^i A^0=$$

$$=\partial^0A^i-\partial^iA^0,\quad i=1,2,3. \tag{2.23}$$

y esta relación implica que las componentes $F^{\mu\nu}$ pueden también ser escritas en términos de las componentes A^{μ} del 4-vector potencial. De (2.23) y de la

vemos (*) como una ecuación para determinar $\chi(\vec{x},t)$ y el término $-(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t})$ como una fuente conocida. Aceptando que (*) puede resolverse (una ecuación hiperbólica simpre admite solución al menos en una vecindad), hemos mostrado que siempre podemos forzar la condición de Lorentz.

definición de $F^{\mu\nu}$ tenemos:

$$E^1 = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = -F^{01},\ E^2 = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 = -F^{02},$$
$$E^3 = \partial^0 A^3 - \partial^3 A^0 = -F^{03} \tag{2.24}$$

También de:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = (\frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3})\frac{\partial}{\partial x^1} + (\frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1})\frac{\partial}{\partial x^2}$$
$$+(\frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2})\frac{\partial}{\partial x^3}$$

concluimos tomando en cuenta las componentes de $F^{\mu\nu}$ que:

$$B^1 = (\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) = -F^{23},\ B^2 = (\partial^3 A^1 - \partial^1 A^3) = F^{13},$$
$$B^3 = (\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) = -F^{12} \tag{2.25}$$

En resumen (2.24) y (2.25) implican:

$$F^{01} = \partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 = -E^1,\ F^{02} = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 = -E^2$$
$$F^{03} = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = -E^3,\ F^{12} = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 = -B^3$$
$$F^{13} = \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 = B^2,\ F^{23} = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3 = -B^1$$

y representamos tales relaciones en forma compacta:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, \dots, 3\} \tag{2.26}$$

En su turno la ecuación $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$ toma la forma:

$$\partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha - \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta \tag{2.27}$$

mientras se ve de inmediato que:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} =$$
$$= \partial^\alpha(\partial^\gamma A^\beta - \partial^\beta A^\gamma) + \partial^\beta(\partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha) + \partial^\gamma(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) = 0$$

es decir, la representación (2.26) satisface idénticamente el segundo par de las ecuaciones relativistas. La representación:

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} A^{\nu} \Longleftrightarrow F_{\mu\nu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \partial_{\mu} A_{\nu} \tag{2.28}$$

de las componentes de F por medio de las componentes del potencial A es análogo de (2.18).

Sea ahora que consideramos un nuevo 4-vector potencial $A^{'}$ con componentes A'^{μ} dadas por:

$$A^{'\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi \tag{2.29}$$

en donde $\chi = \chi(x^0, x^i)$ es una función arbitraria salvo que es suave. Mostramos que las componentes $F^{\alpha\beta} = \partial^{\beta} A^{\alpha} - \partial^{\alpha} A^{\beta}$ quedan invariantes bajo (2.29). Para ver eso calculemos:

$$\begin{aligned}
&F^{'\mu\nu} = \partial^{\nu} A^{'\mu} - \partial^{\mu} A^{'\nu} = \\
&= \partial^{\nu}(A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi) - \partial^{\mu}(A^{\nu} + \partial^{\nu}\chi) = \\
&= \partial^{\nu} A^{\mu} - \partial^{\mu} A^{\nu} + \partial^{\nu}\partial^{\mu}\chi - \partial^{\mu}\partial^{\nu}\chi = \\
&= F^{\mu\nu} + \partial^{\nu}\partial^{\mu}\chi - \partial^{\mu}\partial^{\nu}\chi = F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

en donde hemos empleado la conmutatividad de las derivadas parciales de la función $\chi(x^o, x^i)$. Entonces por una F dada existen infinitos vectores potenciales A que satisfacen (2.28), y esta propiedad es la forma relativista de la noción de invariancia de norma conocida en el régimen pre-relativista.

La noción de norma de Lorentz (2.20) se extiende naturalmente al régimen relativista. Decimos que el vector potencial A satisface la norma de Lorentz si sus componentes A^{μ} satisfacen:

$$\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial A^{0}}{\partial x^{0}} + \frac{\partial A^{i}}{\partial x^{i}} = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{2.30}$$

Como en el régimen no-relativista, las ecuaciones de Maxwell se simplifican cuando A satisface la norma de Lorentz. Combinando (2.30) con (2.26) y (2.6) obtenemos:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta \Rightarrow \partial_\alpha(\partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta) = \frac{4\pi}{c} J^\beta \Rightarrow$$
$$-\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = \frac{4\pi}{c} J^\beta \Rightarrow \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = -\frac{4\pi}{c} J^\beta$$

en donde hemos usado la conmutatividad de las derivadas parciales y el hecho que las componentes A^μ del potencial vectorial A satisfacen $\partial_\alpha A^\alpha = 0$.
En resumen, si el 4-potencial:

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Phi \frac{\partial}{\partial x^0} + A^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

satisface la condición de Lorentz:

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$$

entonces las ecuaciones de Maxwell (2.27) son equivalentes a:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta = -\frac{4\pi}{c} J^\beta$$

de las cuales concluimos recurriendo a (2.30) que $(\Phi, \vec{A})$ satisfacen:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \Phi = -4\pi\rho, \quad -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Recordamos que en la forma pre-relativista la norma de Lorentz no fija únicamente los potenciales $(\vec{A}, \Phi)$. Si por ejemplo $(\vec{A}, \Phi)$ están sujetas a:

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

y definimos nuevos potenciales $(\vec{A}', \Phi')$ escritos por:

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi \tag{2.31}$$

en donde la función $\chi = \chi(\vec{x}, t)$ satisface $\partial_\alpha \partial^\alpha \chi(\vec{x}, t) = 0$, mostraremos que $(\vec{A}', \Phi')$ también satisfacen:

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0 \tag{2.32}$$

Evaluando directamente:

$$\nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = \nabla \cdot (\vec{A} + \nabla\chi) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}) =$$

$$= \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \partial_\alpha \partial^\alpha \chi = 0$$

es decir, los nuevos potenciales $(\vec{A}', \Phi')$ satisfacen la norma de Lorentz sujetos a que $\chi(\vec{x}, t)$ satisface $\partial_\alpha \partial^\alpha \chi(\vec{x}, t) = 0$.

Examinamos el mismo problema desde el punto de vista relativista. Sea entonces:

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Phi \frac{\partial}{\partial x^0} + A^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

y sea ahora un nuevo 4-potencial

$$A' = A'^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Phi' \frac{\partial}{\partial x^0} + A'^i \frac{\partial}{\partial x^i} = (\Phi + \partial^0 \chi)\frac{\partial}{\partial x^0} + (A^i + \partial^i \chi)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Primero notamos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A'^\mu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \partial_0 \partial^0 \chi + \partial_i \partial^i \chi = \\ &= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \partial_\alpha \partial^\alpha \chi = \partial_\alpha \partial^\alpha \chi \end{aligned}$$

Entonces si la función $\chi(x^0, \vec{x})$ satisface:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \chi = 0 \rightsquigarrow -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \nabla^2 \chi = 0$$

la condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ está preservada bajo la transformación

$$A^\mu \longmapsto A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi \tag{2.33}$$

la cual es equivalente a:

$$\Phi' = \Phi + \partial^0 \chi = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}$$
$$A'^i = A^i + \partial^i \chi = A^i + g^{ij}\frac{\partial \chi}{\partial x^j}$$

Entonces la norma de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ como en el caso pre-relativista no fija únicamente el 4-vector potencial A. Existe la libertad escrita por (2.33).

2.3 Invariancia de Poincaré de la Electrodinámica de Maxwell

En la sección anterior hemos mostrado que relativamente a un sistema de referencia inercial global $\{x^0, \ldots, x^3\}$ las ecuaciones de Maxwell en forma relativista son:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad \partial^{[\alpha} F^{\beta\gamma]} = \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.34}$$

y por medio de la noción del vector potencial $A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ las componentes del tensor de Maxwell están dadas por:

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\beta A^\alpha - \partial^\alpha A^\beta \Longleftrightarrow F_{\alpha\beta} = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta \tag{2.35}$$

y esta representación implica que la propiedad fundamental de invariancia de las ecuaciones (1,2) bajo cambio de norma está preservada en la descripción relativista de la teoría.

Ahora nos preguntamos:

¿Cómo se comportan las ecuaciones (2.34) bajo cambio de sistemas de coordenadas generadas por elementos del grupo de Poncaré?.

Mostraremos que la suposición que las componentes $F_{\alpha\beta}$ y J^{α} se comportan como componentes de campos tensoriales bajo transformaciones de coordenadas generadas por elementos de PG garantizan la forma invariante de las ecuaciones fundamentales (2.34). Sea $\{y^0, y^1, y^2, y^3\}$ otro sistema de referencia inercial. Como hemos visto $\{y^0 \ldots, y^3\}$ y $\{x^0 \ldots, x^3\}$ están relacionados por:

$$y^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} \tag{2.36}$$

en donde $\Lambda = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \in \Lambda G$ y $a^{\mu} = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ es un "vector" constante.

De la discusión de la sección 2 tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \text{ y } \frac{\partial^2 y^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\alpha}} \frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\alpha}} \Lambda^{\alpha}{}_{\mu} = \delta^{\nu}{}_{\mu} \\ &\Rightarrow \frac{\partial x^{\nu}}{\partial y^{\alpha}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\alpha} \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}}, \quad dx^{\alpha} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} dy^{\mu}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \quad dy^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} dx^{\alpha} \tag{2.38}$$

Con estas relaciones las componentes $F^{\alpha\beta} = F(dx^{\alpha}, dx^{\beta})$ se transforman como:

$$F'^{\mu\nu} = F(dy^{\mu}, dy^{\nu}) = \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial y^{\nu}}{\partial x^{\beta}} F(dx^{\alpha}, dx^{\beta}) = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \tag{2.39}$$

y esta ley implica que:

$$\begin{aligned} F &= F'_{\mu\nu} dy^{\mu} \wedge dy^{\nu} = (\Lambda^{-1})^{\alpha}{}_{\mu} (\Lambda^{-1})^{\beta}{}_{\nu} F_{\alpha\beta} \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} = \\ &= F_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Por otro lado las componentes de la 4-corriente $J = J^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ se transforman como:

$$J'^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} J^\alpha = \Lambda^\mu{}_\alpha J^\alpha$$

y esta ley implica

$$J = J^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = J'^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

La invariancia de F y J implica que las ecuaciones de Maxwell en la forma relativista deben cambiar de una manera particular. Para ver eso consideramos la diferencia: $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta$, combinando con las reglas de transformación anteriores:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = \partial_\alpha \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} F'^{\mu\nu}\right) - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} J'^\mu =$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F'^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} J'^\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\left(\frac{\partial}{\partial y^\rho} F'^{\mu\nu}\right)\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} -$$

$$-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} J'^\mu = \delta^\rho{}_\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial y^\rho} F'^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu} J'^\mu =$$

$$= \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial y^\mu} F'^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} J'^\nu\right] \tag{2.41}$$

Entonces

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial y^\mu} F'^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} J'^\nu\right]$$

Pero esta relación implica que si $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = 0$ entonces también $\partial'_\alpha F'^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J'^\beta = 0$ y viceversa, la cual implica que el primer par de las ecuaciones de Maxwell relativistas se queda de forma invariante bajo el cambio de un sistema de referencia inercial global a otro sistema inercial.

Sea ahora el segundo par de ecuaciones de Maxwell: $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$. Tenemos también:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} =$$

$$= \partial^\alpha(\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu}F'^{\mu\nu}) + \partial^\beta(\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu}F'^{\mu\nu}) + \partial^\gamma(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}F'^{\mu\nu}) =$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu}\partial'^\rho F'^{\mu\nu} + \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu}\partial'^\rho F'^{\mu\nu} + \frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\partial'^\rho F'^{\mu\nu}$$

arreglando los índices μ, ν, ρ factorizamos el término

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu}$$

y obtenemos:

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu}[\partial'^\rho F'^{\mu\nu} + \partial'^\mu F'^{\nu\rho} + \partial'^\nu F'^{\rho\mu}]$$

Entonces si $\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0$, entonces

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\nu}[\partial'^\rho F'^{\mu\nu} + \partial'^\mu F'^{\nu\rho} + \partial'^\nu F'^{\rho\mu}] = 0$$

multiplicando esta relación por:

$$\frac{\partial y^\kappa}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\eta}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^J}{\partial x^\gamma}$$

obtenemos que

$$\partial'^\kappa F'^{\eta J} + \partial'^\eta F'^{J\kappa} + \partial'^J F'^{\kappa\eta} = 0$$

la cual verifica la forma invariante del segundo par de ecuaciones de Maxwell.

2.4 Algunas implicaciones de la invariancia de Poincaré de la electrodinámica de Maxwell

En la seccion anterior hemos visto como las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell son unificados con los principios de relatividad especial. Tal unificación nos lleva al tensor de Maxwell y el vector corriente como los principales objetos para estudiar electrodinámica. En esta sección vemos algunas consecuencias de tal unificación.

Sea $\{x^0, \ldots, x^3\}$ un sistema de referencia inercial en $(\mathbb{R}^4, g_L)$, es decir:

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \qquad (2.42)$$

y sea que al respecto de este sistema $F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta$, $\alpha < \beta$ el tensor de Maxwell. Como hemos visto $F_{\alpha\beta}$ satisface:

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\beta \Longleftrightarrow \partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$$
$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

donde $J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ es la 4-corriente.

Como hemos discutido en la sección (2.2) el sistema inercial $\{x^0, \ldots, x^3\}$ define una familia de observadores inerciales con:

$$u = u^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^0} \Rightarrow g(u, u) = -1$$

los cuales ven campo eléctrico y magnético dados por:

$$E^\alpha = F^{\alpha b} u_b, \quad B^\alpha = -\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha b}{}_{cd} F^{cd} u_b$$

Queremos ver el significado y la estructura que tiene la noción del campo eléctrico y magnético que estamos acostumbrados en la descripción pre-relativista.

Sea ahora otro sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$ inercial global de modo que:

$$g_L = -dy^0 \otimes dy^0 + dy^1 \otimes dy^1 + dy^2 \otimes dy^2 + dy^3 \otimes dy^3 \qquad (2.43)$$

mientras la invariancia de Poincaré implica que $F = F^{'}_{\alpha\beta} dy^\alpha \wedge dy^\beta$, $\alpha < \beta$ satisface relativo a $\{y^0, \ldots, y^3\}$ las ecuaciones:

$$\partial'^{\alpha} F^{'}_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^{'}_{\beta} \Longleftrightarrow \partial^{'}_{\alpha} F^{'\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^{'\beta}$$
$$\partial^{'}_{[\alpha} F^{'}_{\beta\gamma]} = 0$$

donde $\partial^{'}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$ y

$$J = J^{'\mu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \rho^{'} c \frac{\partial}{\partial y^0} + J^{'i} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

Observadores inerciales con $v = v^\mu \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^0}$ ven también campos eléctricos y magnéticos dados por:

$$E^{'a} = F^{'ab} v_b, \quad B^{'a} = -\frac{1}{2} \epsilon^{'ab}{}_{cd} F^{'cd} v_b$$

Queremos ver como $(\vec{E}, \vec{B})$ medidos por el observador u y como $(\vec{E}', \vec{B}')$ medidos por el observador v están relacionados.

Por eso sea $(\Lambda, a) \in PG$ que relacionan $\{x^0, \ldots, x^3\}$ con $\{y^0, \ldots, y^3\}$. Sin pérdida de generalidad asumimos que Λ corresponde a un boost en el plano (x^0, x^1), es decir, $\Lambda = \Lambda^a{}_b$ tiene la forma:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{{v_x}^2}{c^2}}}, \quad \beta = \frac{v_x}{c} \qquad (2.44)$$

Como consecuencia que $F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = F^{'}_{\mu\nu} dy^\mu \wedge dy^\nu$ obtenemos:

$$F^{'\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu F^{\mu\nu} \qquad (2.45)$$

Recordamos que las componentes $(E^{'1}, E^{'2}, E^{'3})$ y $(B^{'1}, B^{'2}, B^{'3})$ definen las componentes $F^{'\alpha\beta}$ del tensor de Maxwell mediante:

$$F^{'\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E^{'1} & -E^{'2} & -E^{'3} \\ E^{'1} & 0 & -B^{'3} & B^{'2} \\ E^{'2} & B^{'3} & 0 & -B^{'1} \\ E^{'3} & -B^{'2} & B^{'1} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

mientras las componentes $F^{\alpha\beta}$ en términos de (E^1, E^2, E^3), (B^1, B^2, B^3) tiene la misma estructura que (2.46), pero:

$$E^{'1}, E^{'2}, E^{'3} \rightarrow E^1, E^2, E^3, \quad B^{'1}, B^{'2}, B^{'3} \rightarrow B^1, B^2, B^3 \tag{2.47}$$

La regla (2.45) $F^{'\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\Lambda^{\beta}{}_{\nu}F^{\mu\nu}$ implica:

$$\begin{aligned}
&E^{'1} = -F^{'01} = -\Lambda^0{}_\mu \Lambda^1{}_\nu F^{\mu\nu} \\
&= -(\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_0F^{00} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_2F^{02} + \Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_3F^{03} \\
&+\Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_1F^{11} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_2F^{12} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_3F^{13} \\
&+\Lambda^0{}_2\Lambda^1{}_0F^{20} + \Lambda^0{}_2\Lambda^1{}_1F^{21} + \Lambda^0{}_2\Lambda^1{}_2F^{22} + \Lambda^0{}_2\Lambda^1{}_3F^{23} \\
&+\Lambda^0{}_3\Lambda^1{}_0F^{30}\Lambda^0{}_3\Lambda^1{}_1F^{31} + \Lambda^0{}_3\Lambda^1{}_2F^{32} + \Lambda^0{}_3\Lambda^1{}_3F^{33}) \\
&= -(\Lambda^0{}_0\Lambda^1{}_1F^{01} + \Lambda^0{}_1\Lambda^1{}_0F^{10}) \\
&= (\gamma^2 - \gamma^2\beta^2)E^1 = (\frac{1}{1-\frac{v^{x2}}{c^2}} - \frac{(\frac{v^x}{c})^2}{1-\frac{v^{x2}}{c^2}})E^1 = E^1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&E'^{2} = -F'^{02} = -\Lambda^{0}{}_{\mu}\Lambda^{2}{}_{\nu}F^{\mu\nu} \\
&= -(\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{0}F^{00} + \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{1}F^{01} + \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{2}F^{02} + \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{3}F^{03} \\
&+\Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{0}F^{10} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{1}F^{11} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2}F^{12} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{3}F^{13} \\
&+\Lambda^{0}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{0}F^{20} + \Lambda^{0}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{1}F^{21} + \Lambda^{0}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{2}F^{22} + \Lambda^{0}{}_{2}\Lambda^{2}{}_{3}F^{23} \\
&+\Lambda^{0}{}_{3}\Lambda^{2}{}_{0}F^{30}\Lambda^{0}{}_{3}\Lambda^{2}{}_{1}F^{31} + \Lambda^{0}{}_{3}\Lambda^{2}{}_{2}F^{32} + \Lambda^{0}{}_{3}\Lambda^{2}{}_{3}F^{33}) \\
&= -(\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{2}F^{02} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2}F^{12}) \\
&= \gamma(E^{2} - \beta B^{3})
\end{aligned}
$$

Con un procedimiento análogo para las demás componentes obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&E'^{3} = -F'^{03} = -(\Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{3}{}_{3}F^{03} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{3}{}_{3}F^{13}) = \gamma(E^{3} + \beta B^{2}) \\
&B'^{1} = F'^{32} = \Lambda^{3}{}_{3}\Lambda^{2}{}_{2}F^{32} = B^{1} \\
&B'^{2} = -F'^{31} = -(\Lambda^{3}{}_{3}\Lambda^{1}{}_{0}F^{30} + \Lambda^{3}{}_{3}\Lambda^{1}{}_{1}F^{31}) = \gamma(B^{2} + \beta E^{3}) \\
&B'^{3} = F'^{21} = \Lambda^{2}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{0}F^{20} + \Lambda^{2}{}_{2}\Lambda^{1}{}_{1}F^{21} = \gamma(B^{3} - \beta E^{2})
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

Las transformaciones (2.48) pueden escribirse en forma general como [1]:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^{2}}{\gamma + 1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \tag{2.49}$$

$$\vec{B}' = \gamma(\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^{2}}{\gamma + 1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \tag{2.50}$$

en donde $\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$ y $\gamma = (1 - \frac{v^{2}}{c^{2}})^{-\frac{1}{2}}$. La transformación inversa puede obtenerse por medio de un procedimiento análogo, solo cambiando los primados por no primados y cambiando $\vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$, solo cambia la estructura de la matriz (2.44). Los resultados son:

$$\vec{E} = \gamma(\vec{E}' - \vec{\beta} \times \vec{B}') - \frac{\gamma^{2}}{\gamma + 1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{E}') \tag{2.51}$$

$$\vec{B} = \gamma(\vec{B}' + \vec{\beta} \times \vec{E}') - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}\vec{\beta}(\vec{\beta} \cdot \vec{B}') \tag{2.52}$$

Es importante señalar aquí que al formular (2.51,2.52), $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son el campo eléctrico y magnético medido por un observador inercial y en reposo relativo al sistema inercial $\{x^0, \ldots, x^3\}$, mientras $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ son los campos medidos por un observador inercial en reposo al respecto al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$. Si por ejemplo en $\{y^0, \ldots, y^3\}$ el campo es púramente eléctrico, es decir, $\vec{B}' = 0$, un observador en $\{x^0, \ldots, x^3\}$ ve campo $\vec{E}$ y también campo $\vec{B}$. Entonces la noción de campo eléctrico o magnético no es un invariante bajo el grupo de Poincaré.

La carga eléctrica es absolutamente conservada [1]. Adicionalmente la carga eléctrica de partículas elementales observadas son múltiplos enteros de carga eléctrica del protón [1]. Estas propiedades han sido verificadas experimentalmente dentro de errores experimentales y apoyó la hipótesis referida como la invariancia de carga eléctrica bajo transformaciones de Lorentz (véase discusión en [1]).

Por otro lado para mostrar la invariancia de Poincaré de la electrodinámica de Maxwell hemos asumido que:

$$J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

define un cuatro vector bajo transformaciones generadas por elementos del grupo PG. En esta sección nos gustaría investigar como esta propiedad del cuatro vector J garantiza la invariancia de carga eléctrica. Como en la sección anterior sea:

$$J = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \rho v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

la corriente eléctrica relativa al sistema de referencia inercial $\{x^0, \ldots, x^3\}$ [4]. Pasando a un nuevo sistema de referencia inercial $\{y^0, \ldots, y^3\}$ generado por la matriz Λ como en (2.44) obtenemos:

$$\begin{aligned} J &= \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \rho v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \rho c \Lambda^\mu{}_0 \frac{\partial}{\partial y^\mu} + \rho v^i \Lambda^\mu{}_i \frac{\partial}{\partial y^\mu} = \\ &= \rho c \Lambda^0{}_0 \frac{\partial}{\partial y^0} + \rho c \Lambda^1{}_0 \frac{\partial}{\partial y^1} + (\rho v^i)\Lambda^0{}_i \frac{\partial}{\partial y^0} + (\rho v^i)\Lambda^j{}_i \frac{\partial}{\partial y^j} = \\ &= \gamma(\rho c - \beta v^1)\frac{\partial}{\partial y^0} + \gamma(\rho c \beta - \beta \rho v^1)\frac{\partial}{\partial y^1} + \rho v^2 \frac{\partial}{\partial y^2} + \rho v^3 \frac{\partial}{\partial y^3} = \\ &= \gamma(\rho c - \beta \rho v^1)\frac{\partial}{\partial y^0} + \gamma(\rho v^1 - \rho c \beta)\frac{\partial}{\partial y^1} = \\ &= \rho^{'} c \frac{\partial}{\partial y^0} + J^{'1} \frac{\partial}{\partial y^1} \end{aligned} \tag{2.53}$$

donde pasamos a la última igualdad asumiendo que $\rho v^2 = \rho v^3 = 0$, es decir, la 4-corriente J en $\{x^0, \ldots, x^3\}$ tiene la forma:

$$J = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + \rho v^1 \frac{\partial}{\partial x^1}$$

De la fórmula (2.53) vemos que:

$$\rho^{'} c = \gamma(\rho c - \beta \rho v^1) = \frac{\rho c (1 - \frac{v}{c^2} v^1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.54}$$

$$J^{'1} = \gamma(\rho v^1 - \rho c \beta) = \frac{\rho v^1 (1 - \frac{v}{v^1})}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.55}$$

Supongamos que elegimos el boost con parámetro $v = v^1$ en el boost Λ en (2.44), es decir, relativo al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$ el elemento de carga está en reposo. Entonces se deduce de (2.54) y (2.55) que $J^{'1} \equiv 0$ y:

$$\rho^{'} c = \rho c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \rho = \frac{\rho^{'}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{2.56}$$

[4] *Subnota: Hemos asumido aquí que la densidad de corriente $\vec{J}$ está generada por el flujo de algún fluido cargado. Cada elemento de fluido lleva carga total de $= \rho d^3 \vec{x}$.*

y esta transformación implica que ρ y $\rho^{'}$ no se comportan como escalares bajo transformaciones de PG. Aún si recordamos que ρ, $\rho^{'}$ son densidades de carga. Consideramos entonces el volumen infinitesimal $dx^1dx^2dx^3$ así que $de = \rho dx^1dx^2dx^3$ representa la carga total dentro de $dx^1dx^2dx^3 = dV$. Se deduce de:

$$de = \rho dV = \frac{\rho^{'}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dV^{'} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \rho^{'} dV^{'} = de^{'} \tag{2.57}$$

donde hemos tomado el efecto de la contracción de Lorentz.

La relación (2.57) muestra que $de = de^{'}$, es decir, la carga contenida en un volumen de "material" es una cantidad invariante de Lorentz. A su vez esta propiedad expresa la esperable idea que la carga de un electrón es independiente de la velocidad del electrón.

En nuestro análisis hemos asumido que la cuatro corriente J se comporta como un vector bajo Poincaré y como una consecuencia hemos mostrado la conservación de la carga eléctrica.

Puede valer la pena tener en cuenta aquí que *Sommerfeld* partió del principio de que la carga eléctrica debe ser absolutamente conservada y entonces demostró que esta propiedad requiere que la corriente eléctrica J debe transformarse como un vector bajo Poincaré. El punto de vista de Sommerfeld está discutida por ejemplo en la referencia [6].

Capítulo 3

Electrodinámica en espacios-tiempo arbitrarios

3.1 Covarianza general de la electrodinámica de Maxwell

Hasta este punto hemos mostrado que dentro del contexto de Relatividad especial, la electrodinámica de Maxwell relativa a un sistema de referencia inercial $\{x^0, \ldots, x^3\}$:

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \tag{3.1}$$

es descrita por:

$$\partial_\alpha F^{\alpha b} = \frac{4\pi}{c} J^b, \quad \partial_{[\alpha} F_{bc]} = 0 \tag{3.2}$$

donde $F = F_{\alpha b} dx^\alpha \wedge dx^b$, $\alpha < b$ es el campo tensorial de Maxwell y $J = J^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ el vector de 4-corriente.

Además, hemos mostrado que bajo una transformación de Poincaré las ecuaciones (3.2) permanecen de forma invariante y referimos esta propiedad como invariancia de la teoría de Maxwell bajo el grupo de Poincaré.

Sin embargo y todavía dentro del espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$, no hay una razón fundamental en cuanto a por qué debemos restringir nuestra atención solamente a transformaciones del espacio-tiempo generadas por elementos del grupo de Poincaré. El hecho de tal invariancia nos ayuda en problemas prácticos. Por ejemplo en un problema con simetría esférica es conveniente introducir coordenadas esféricas polares (r, θ, ϕ) de manera que (3.1) esta escrita en la forma:

$$
\begin{aligned}
&g = -dx^0 \otimes dx^0 + dr \otimes dr + r^2(d\theta \otimes d\theta + sen^2\theta d\phi \otimes d\phi) \\
&r > 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi]
\end{aligned}
$$

La transformación:

$$
x^0 \longmapsto x^{'0} = x^0, \quad x^1 = rsen\theta cos\phi, \quad x^2 = rsen\theta sen\phi, \quad x^3 = rcos\theta
$$

es regular para $r > 0$, $sen\theta \neq 0$ pero no es una transformación generado por elementos del grupo de Poincaré PG. Nos preguntamos: ¿Cuál es la forma de las ecuaciones de Maxwell relativamente al sistema (x^0, r, θ, ϕ)?. Mostraremos en esta sección que la electrodinámica de Maxwell puede ser escrita de manera que las ecuaciones dinámicas permanecen invariantes bajo una transformación arbitraria de coordenadas (regular) en el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$. Las herramientas necesarias para este análisis, como para las secciones anteriores, es la teoría de cálculo tensorial [5].

Para plantear el problema vamos a comenzar desde un sistema de referencia inercial $\{x^0, \ldots, x^3\}$, así que las ecuaciones de Maxwell son descritas por

(3.2). Sea ahora:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^0, \ldots, x^3) \Longleftrightarrow x^\alpha = x^\alpha(y^0, \ldots, y^3) \tag{3.3}$$

es una transformación de coordenadas regular donde $y^\alpha = y^\alpha(x^0, \ldots, x^3)$ son funciones arbitrarias suaves sujetas sólamente a la restricción:

$$det(\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^\mu}) \neq 0 \ \ \forall \ \ (x^0, \ldots, x^3) \in O \subseteq \mathbb{R}^4$$

donde O es un conjunto abierto del espacio-tiempo de Minkowski en donde la transformación (3.3) es regular. Si $\{\frac{\partial}{\partial y^0}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^3}\}$ representan las bases coordenadas de $T_A(\mathbb{R}^4)$, $A \in O$ relativas al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$, entonces:

$$\begin{aligned} g'_{\ \mu\nu} &= g_L(\frac{\partial}{\partial y^\mu}, \frac{\partial}{\partial y^\nu}) = g_L(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}) = \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} g_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{3.4}$$

definen las componentes coordenadas $g'_{\mu\nu}$ de g_L relativas al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$. De (3.4) vemos que la métrica g_L toma la forma:

$$g_L = g'_{\ \mu\nu}(y^0, \ldots, y^3) dy^\mu \otimes dy^\nu, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{3.5}$$

Además, los símbolos de Christofell $\Gamma'^{\mu}_{\ \nu\lambda}$ de la conexión de Levi-Civita de g_L son definidos por:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\nu}} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} = \Gamma'^{\mu}_{\ \nu\lambda} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \Rightarrow \Gamma'^{\mu}_{\ \nu\lambda} = < dy^\mu, \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^\nu}} \frac{\partial}{\partial y^\lambda} >$$

y pueden ser evaluados usando la representación:

$$\Gamma'^{\mu}_{\ \nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \Gamma_{\rho\nu\lambda} = \frac{1}{2} g'^{\mu\rho} [\frac{\partial g'_{\rho\nu}}{\partial y^\lambda} + \frac{\partial g'_{\rho\lambda}}{\partial y^\nu} - \frac{\partial g'_{\nu\lambda}}{\partial y^\rho}] \tag{3.6}$$

ó más rápido recurriendo directamente a la regla de transformación:

$$\Gamma'^{\mu}_{\ \nu\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^\gamma}{\partial y^\lambda} \Gamma^{\alpha}_{\ \beta\gamma} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\nu \partial y^\lambda}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \tag{3.7}$$

combinada con ${\Gamma^{\alpha}}_{\beta\gamma} = 0$. De cualquier manera se sigue que:

$$ {\Gamma'^{\mu}}_{\nu\lambda} = \frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial y^{\nu}\partial y^{\lambda}}\frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} $$

Recordamos que si A es un campo tensorial suave de tipo (k,l) definido en $(\mathbb{R}^4, g_L)$, entonces, la derivada covariante ∇A es un campo tensorial de tipo $(k, l+1)$, de modo que si:

$$ A = {A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_l}\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}} \otimes dy^{b_1} \otimes \ldots \otimes dy^{b_l} $$

son las componentes de A relativas al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$, entonces:

$$ \nabla A = (\nabla_{\mu}{A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_l})\frac{\partial}{\partial y^{\alpha_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{\alpha_k}} \otimes dy^{b_1} \otimes \ldots \otimes dy^{b_l} \otimes dy^{\mu} $$

donde las componentes $\nabla_{\mu}{A^{\alpha_1\cdots\alpha_k}}_{b_1\cdots b_l}$ de ∇A están dadas por:

$$ \nabla_{\mu}{A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_l} = \frac{\partial {A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_l}}{\partial y^{\mu}} + {\Gamma^{\alpha_1}}_{\rho\mu}{A^{\rho\alpha_2\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_l} + {\Gamma^{\alpha_2}}_{\rho\mu}{A^{\alpha_1\rho\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_l} + $$
$$ + \cdots - {\Gamma^{\rho}}_{b_1\mu}{A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}_{\rho b_2\ldots b_l} - \cdots - {\Gamma^{\rho}}_{b_l\mu}{A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}}_{b_1\ldots b_{l-1}\rho} $$

Combinamos la noción de derivada covariante con la hipótesis central de esta sección: el campo de Maxwell F y la cuatro corriente J son campos tensoriales en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ no solo bajo cambio de coordenadas generadas por elementos del grupo PG, también bajo cambio arbitrario de coordenadas regulares. Bajo esta hipotésis tenemos:

$$ F = F_{\alpha\beta}dx^{\alpha}\wedge dx^{\beta} = {F'}_{\mu\nu}dy^{\mu}\wedge dy^{\nu}, \quad \alpha < \beta, \quad \mu < \nu $$

donde ${F'}_{\mu\nu}$ son las componentes de F relativas al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$. La hipótesis que J es campo vectorial implica que $J = J^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = J'^{\mu}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}$. Estas hipótesis implican:

$$ {F'}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial y^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial y^{\nu}}F_{\alpha\beta}, \quad J'^{\mu} = \frac{\partial y^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}J^{\alpha} \tag{3.8} $$

que son las reglas de la transformación de las componentes de campos tensoriales de tipo $(0,2)$ y $(1,0)$ respectivamente bajo transformaciones del sistema de referencia inercial $\{x^0,\ldots,x^3\}$ a un sistema arbitrario $\{y^0,\ldots,y^3\}$. Tomando estas reglas de transformación como punto inicial mostramos que si:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

entonces:

$$\nabla_\alpha F'^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J'^\beta, \quad \nabla_{[\alpha} F'_{\beta\gamma]} = 0 \tag{3.9}$$

en donde $\nabla_\gamma F'^{\alpha\beta}$ ahora representa las componentes de la derivada covariante del campo F.

Demostración: La demostración es sencilla y esta basada en la regla de transformación escrita por (3.8). Comenzamos de:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = 0$$

e invirtiendo las relaciones (3.8), obtenemos:

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta} F'_{\mu\nu}, \quad J^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} J'^\mu \tag{3.10}$$

desde el cual llegamos a:

$$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} F'^{\mu\nu} \tag{3.11}$$

Como consecuencia tenemos:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\rho \partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} F'^{\mu\nu} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial y^\rho \partial y^\nu}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} F'^{\mu\nu} +$$

$$+\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}\frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial y^\rho}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} - \frac{4\pi}{c}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\lambda} J'^\lambda \tag{3.12}$$

Eliminamos el término $\frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial y^\rho}$ en (3.12) por las componentes de la derivada covariante $\nabla_\rho F'^{\mu\nu}$ dadas por:

$$\nabla_\rho F'^{\mu\nu} = \frac{\partial F'^{\mu\nu}}{\partial y^\rho} + \Gamma'^{\mu}{}_{\lambda\rho} F'^{\lambda\nu} + \Gamma'^{\nu}{}_{\lambda\rho} F'^{\mu\lambda} \tag{3.13}$$

y tomamos en cuenta que:

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\nu\lambda} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\nu \partial y^\lambda} \tag{3.14}$$

se sigue que (3.12) es equivalente a:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial y^\rho \partial y^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} F'^{\lambda\nu} + \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial y^\rho \partial y^\lambda} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} F'^{\mu\lambda} + \\
&+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \nabla_\rho F'^{\mu\nu} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\lambda \partial y^\rho} F'^{\lambda\nu} - \\
&- \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\tau} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial y^\lambda \partial y^\rho} F'^{\mu\lambda} - \frac{4\pi}{c} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\lambda} J'^\lambda = \\
&= \nabla_\mu F'^{\mu\nu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} - \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\lambda} \frac{4\pi}{c} J'^\lambda
\end{aligned}$$

por lo cual obtenemos:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \frac{4\pi}{c} J^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\lambda} [\nabla_\mu F'^{\mu\lambda} - \frac{4\pi}{c} J'^\lambda]$$

De esta relación y debido que el determinante de la matriz Jacobiana es distinta de cero concluimos que la validez de $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta$ implica la validez de $\nabla_\alpha F'^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J'^\beta$ y viceverza.

Enseguida mostramos que la misma propiedad es válida para el segundo par de ecuaciones de Maxwell. Comenzamos de:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}[\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}F'_{\mu\nu}] + \frac{\partial}{\partial x^\beta}[\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}F'_{\mu\nu}] + \frac{\partial}{\partial x^\gamma}[\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}F'_{\mu\nu}] = \\
&= \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} + \\
&+ \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\gamma}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\beta}\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial y^\rho} + \\
&+ \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\gamma}\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial y^\rho}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

eliminamos el término $\frac{\partial F'_{\mu\nu}}{\partial y^\rho}$ en (3.15) por las componentes de la derivada covariante $\nabla_\gamma F'_{\alpha\beta}$ dadas por:

$$\nabla_\gamma F'_{\alpha\beta} = \frac{\partial F'_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} - \Gamma'^\mu{}_{\gamma\alpha}F'_{\mu\beta} - \Gamma'^\nu{}_{\gamma\beta}F'_{\alpha\nu}$$

y tomando en cuenta que:

$$\Gamma'^\rho{}_{\tau\alpha} = -\frac{\partial x^\nu}{\partial y^\tau}\frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha}\frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^\nu \partial x^\lambda}$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}F'_{\mu\nu} + \\
&+ \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}[\nabla_\rho F'_{\mu\nu} + \Gamma'^\tau{}_{\rho\mu}F'_{\tau\nu} + \Gamma'^\tau{}_{\rho\nu}F'_{\mu\tau}] + \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}F'_{\mu\nu} + \\
&+ \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\beta \partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\gamma}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\beta}[\nabla_\rho F'_{\mu\nu} + \Gamma'^\tau{}_{\rho\mu}F'_{\tau\nu} + \Gamma'^\tau{}_{\rho\nu}F'_{\mu\tau}] + \\
&+ \frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}F'_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\gamma \partial x^\beta}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}F'_{\mu\nu} + \\
&+ \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\gamma}[\nabla_\rho F'_{\mu\nu} + \Gamma'^\tau{}_{\rho\mu}F'_{\tau\nu} + \Gamma'^\tau{}_{\rho\nu}F'_{\mu\tau}]
\end{aligned}$$

Factorizando el término $\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
&\partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=\\
&=\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}F^{'}_{\mu\nu}+\frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}F^{'}_{\mu\nu}+\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\beta\partial x^\gamma}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\alpha}F^{'}_{\mu\nu}+\\
&+\frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\gamma}F^{'}_{\mu\nu}+\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial x^\gamma\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\beta}F^{'}_{\mu\nu}+\frac{\partial^2 y^\nu}{\partial x^\gamma\partial x^\beta}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\alpha}F^{'}_{\mu\nu}+\\
&+\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}[\nabla_\rho F^{'}_{\mu\nu}+\nabla_\mu F^{'}_{\nu\rho}+\nabla_\nu F^{'}_{\rho\mu}]+\\
&+\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}[-\frac{\partial^2 y^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}F^{'}_{\tau\nu}-\frac{\partial^2 y^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\rho}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}F^{'}_{\mu\tau}-\\
&-\frac{\partial^2 y^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu}F^{'}_{\tau\rho}-\frac{\partial^2 y^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\rho}F^{'}_{\nu\tau}-\\
&-\frac{\partial^2 y^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\rho}F^{'}_{\tau\mu}-\frac{\partial^2 y^\tau}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial y^\mu}F^{'}_{\rho\tau}]=\\
&=\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}[\nabla_\rho F^{'}_{\mu\nu}+\nabla_\mu F^{'}_{\nu\rho}+\nabla_\nu F^{'}_{\rho\mu}]
\end{aligned}$$

por lo cual tenemos que:

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=\frac{\partial y^\rho}{\partial x^\alpha}\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\beta}\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\gamma}[\nabla_\rho F^{'}_{\mu\nu}+\nabla_\mu F^{'}_{\nu\rho}+\nabla_\nu F^{'}_{\rho\mu}]$$

de la cual concluimos que si $\partial_\alpha F_{\beta\gamma}+\partial_\beta F_{\gamma\alpha}+\partial_\gamma F_{\alpha\beta}=0$ entonces también $\nabla_\rho F^{'}_{\mu\nu}+\nabla_\mu F^{'}_{\nu\rho}+\nabla_\nu F^{'}_{\rho\mu}=0$.

En resumen las ecuaciones de Maxwell relativamente a un sistema de referencia tal que:

$$g_L=g_{\alpha\beta}(y^0,\ldots,y^3)dy^\alpha\otimes dy^\beta$$

tienen la forma:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta}=\frac{4\pi}{c}J^\beta,\quad \nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}=0 \tag{3.16}$$

en donde $F=F_{\alpha\beta}dy^\alpha\wedge dy^\beta$, $J=J^\mu\frac{\partial}{\partial y^\mu}$. Estas ecuaciones por supuesto se reducen a la forma (3.2) para el caso en que $\{y^0,\ldots,y^3\}$ es un sistema inercial.

Pero tienen la propiedad importante que se quedan de forma invariante bajo un cambio de coordenadas arbitrario del espacio-tiempo de Minkowski.

La invariancia de norma que hemos mostrado en secciones anteriores está también preservada por el sistema (3.16). Para ver esto introducimos un potencial $A = A_\mu dy^\mu$ tal que:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\alpha A_\beta = \partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta \tag{3.17}$$

Sustituyendo esta representación en $\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]}$ obtenemos:

$$\nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = \nabla_\alpha(\nabla_\gamma A_\beta - \nabla_\beta A_\gamma) + \nabla_\beta(\nabla_\alpha A_\gamma - \nabla_\gamma A_\alpha) +$$
$$+\nabla_\gamma(\nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\alpha A_\beta) = 0$$

Si $A^{'} = A^{'}{}_\mu dy^\mu = (A_\mu + \nabla_\mu \chi) dy^\mu$ vemos de (3.17) que:

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\beta A_\alpha - \nabla_\alpha A_\beta = \nabla_\beta A^{'}{}_\alpha - \nabla_\alpha A^{'}{}_\beta$$

Referimos a $A = A_\mu dy^\mu$ como el cuatro potencial por el tensor de Maxwell F. En términos de las componentes $A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$ tenemos del primer par de ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla^\alpha \nabla_\alpha A^\beta - \nabla_\alpha \nabla^\beta A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} J^\beta \tag{3.18}$$

Tal ecuación se simplifica imponiendo la norma de Lorentz:

$$\nabla_\mu A^\mu = 0 \tag{3.19}$$

y debido que no hay curvatura como es bien conocido las componentes de la derivada covariante conmutan, entonces tenemos de (3.18):

$$\nabla_\alpha \nabla^\alpha A^\beta = -\frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad \nabla_\alpha A^\alpha = 0. \tag{3.20}$$

Siguiendo pasos idénticos como en la sección anterior notamos que si:

$$A^{'} = A^{'}{}_{\mu} dy^{\mu} = (A_{\mu} + \nabla_{\mu}\chi) dy^{\mu} \tag{3.21}$$

con $\chi = \chi(y^0, \ldots, y^3)$ es una función arbitraria, también tenemos:

$$\nabla_{\mu} A^{'\mu} = \nabla_{\mu} A^{\mu} + \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \chi \tag{3.22}$$

entonces la norma de Lorentz (3.19) aquí también no fija únicamente el potencial vectorial. En resumen hemos concluido que la invariancia de norma es una propiedad intrínseca de la teoría de Maxwell.

La covariancia general que exhiben las ecuaciones dinámicas (3.9) de la electrodinámica de Maxwell es útil y se usa en [7] para estudiar electrodinámica en la curva de Rindler.

3.2 ¿Qué es Relatividad General?

Hasta este punto nuestro análisis involucra solo el espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$ y como hemos mencionado R.E es una teoría de espacio y tiempo, la cual no envuelve la interacción gravitacional. En contraste la teoría general de la relatividad de Einstein (R.G) es una teoría de: *espacio-tiempo y gravitación.* La esencia de R.G puede ser descrita por la siguiente frase [4]:

En R.G la gravitación se manifiesta como la curvatura de la variedad espacio-tiempo.

En esta sección discutimos brevemente el significado de esta frase y nos preguntamos como la teoría de Maxwell se mezcla con tal hipótesis.

Así como en R.E en R.G espacio y tiempo está representado por un espacio-tiempo continuo, pero en contraste con R.E este continuo es modelado ahora por una tripleta $(M, g, \nabla g = 0)$ en donde:

M es una variedad 4-dimensional suave [1], g es una métrica Lorentziana suave y $\nabla g = 0$ es la conexión de Levi-Civita asociada con g y *más importante*: el tensor de Riemann de g satisface: $Riem(g) \neq 0 \;\; en \;\; M$, (compare esta hipótesis con el postulado básico de Minkowski que en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ en la sección introductoria).

Un espacio-tiempo $(M, g, \nabla g = 0)$ se denota simplemente de aquí y en adelante como (M, g), y en el contexto de la teoría de R.G la métrica Lorentziana g satisface las ecuaciones de Einstein:

$$G(g) = \hat{k}T(g) \tag{3.23}$$

donde: $G(g)$ representa el tensor de Einstein de g, $\hat{k} = \frac{8\pi G}{c^4}$ es la constante de acoplamiento y $T(g)$ es un campo tensorial (0,2) (ó (2,0)) que modela la distribución de materia-energía que se encuentra en el espacio-tiempo. Si $(x^0, \ldots, x^3)$ es un sistema de coordenadas local de (M, g) definido en $O \subseteq M$, entonces las ecuaciones de Einstein toman la forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \hat{k}T_{\mu\nu} \tag{3.24}$$

donde: $g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu$, $g_{\mu\nu} = g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu})$ y $G_{\alpha\beta}$ el tensor de Einstein.

De la teoría de cálculo tensorial [5], el tensor de Einstein satisface [4]:

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R) = 0$$

[1]*Subnota: No es el enfoque de esta tesis definir y discutir variedades. Será sin embargo suficiente tomar como una variedad M un espacio que tiene la propiedad que para cada $A \in M$ existe una vecindad O de A tal que O es un conjunto uno a uno y sobre de conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^4$. Por tal O etiquetamos sus elementos con $(x^0, \ldots, x^3)$ y las referimos como un sistema de coordenadas locales. Diferentes coordenadas $(y^0, \ldots, y^3)$ de O satisfacen $x^\alpha = x^\alpha(y^0, \ldots, y^3)$ y $y^\mu = y^\mu(x^0, \ldots, x^3)$ con $det(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu}) \neq 0$.*

y se sigue de (3.24) que: $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Debido a la simetría $G^{\alpha\beta} = G^{\beta\alpha}$, entonces cualquier tensor de energía-momento T que modela el contenido de materia de algún espacio-tiempo satisface:

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad y \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.25}$$

Es interesante e instructivo preguntar que razonamiento llevo a Einstein a la conclusión de que la gravitación debe manifestarse como la curvatura de la variedad espacio-tiempo.
Para eso regresemos al espacio-tiempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, g_L)$ y sea que consideramos un sistema de referencia inercial global.

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3$$

y sea una partícula libre masiva, donde libre significa que no hay interacción entre la partícula y otros campos.
La suposición que la partícula es libre significa que su trayectoria satisface:

$$\nabla_u u = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0 \tag{3.26}$$

$$\Rightarrow x^\mu(\tau) = a^\mu \tau + \beta^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.27}$$

es decir, la línea de mundo de la partícula es una linea recta relativa al *sistema de referencia inercial global*.
Supongamos ahora que $(y^0, \ldots, y^3)$ es otro sistema no inercial de $(\mathbb{R}^4, g_L)$ arbitrario que hemos introducido en la seccion anterior (véase 3.5):

$$g_L = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 = g_{\mu\nu} dy^\mu \otimes dy^\nu$$

Ahora estamos interesados en ver la trayectoria de la partícula libre según la percepción del sistema no inercial $\{y^0, \ldots, y^3\}$.

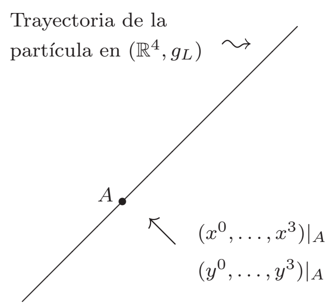


Figura 3.1: Trayectoria de la partícula libre en $(\mathbb{R}^4, g_L)$.

A lo largo de la trayectoria de la partícula tenemos:

$$\begin{aligned} &y^\mu(\tau) = y^\mu(x^0(\tau), \ldots, x^3(\tau)) \Longleftrightarrow \\ &x^\mu(\tau) = x^\mu(y^0(\tau), \ldots, y^3(\tau)) \end{aligned} \tag{3.28}$$

Por definición la 4-velocidad u de la partícula está dada por:

$$u = \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{dy^\mu}{d\tau}\frac{\partial}{\partial y^\mu}$$

De la relación (3.28) tenemos:

$$\frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{dy^\alpha(\tau)}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}[\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{dy^\alpha(\tau)}{d\tau}] = \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}\frac{dy^\beta(\tau)}{d\tau}\frac{dy^\alpha(\tau)}{d\tau} + \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{d^2y^\alpha(\tau)}{d\tau^2}$$

pero ya que $\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0$, obtenemos:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{d^2y^\alpha(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}\frac{dy^\beta(\tau)}{d\tau}\frac{dy^\alpha(\tau)}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha}\frac{d^2y^\alpha(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\delta^\gamma{}_\alpha\frac{d^2y^\alpha(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d^2y^\gamma(\tau)}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}\frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d^2y^\gamma(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} = 0$$

donde como hemos visto en la sección anterior:

$$\Gamma^\gamma{}_{\alpha\beta} := \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^\mu}\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}$$

son los simbolos de Christofell de la conexión de Levi-Civita de g_L relativos al sistema $\{y^0, \ldots, y^3\}$.

Las ecuaciones que escriben la trayectoria de la partícula en los dos sistemas tienen la forma:

$$\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2} = 0 \longleftarrow \quad \textit{No “fuerzas”}$$

$$\frac{d^2y^\mu(\tau)}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} \longleftarrow \quad \textit{Fuerzas “ficticias” debidas al sistema de referencia no inercial}$$

Einstein tomo un punto drástico y propuso: Las “fuerzas ficticias” que la partícula libre siente relativamente a un sistema de referencia no inercial, es decir, el término:

$$-\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} \tag{3.29}$$

No puede ser separado por una verdadera interacción gravitacional de la partícula con un *campo gravitacional real*. Él documentó tal hipótesis recurriendo a los *"elevadores de Einstein"* que los representamos en los siguientes dibujos:

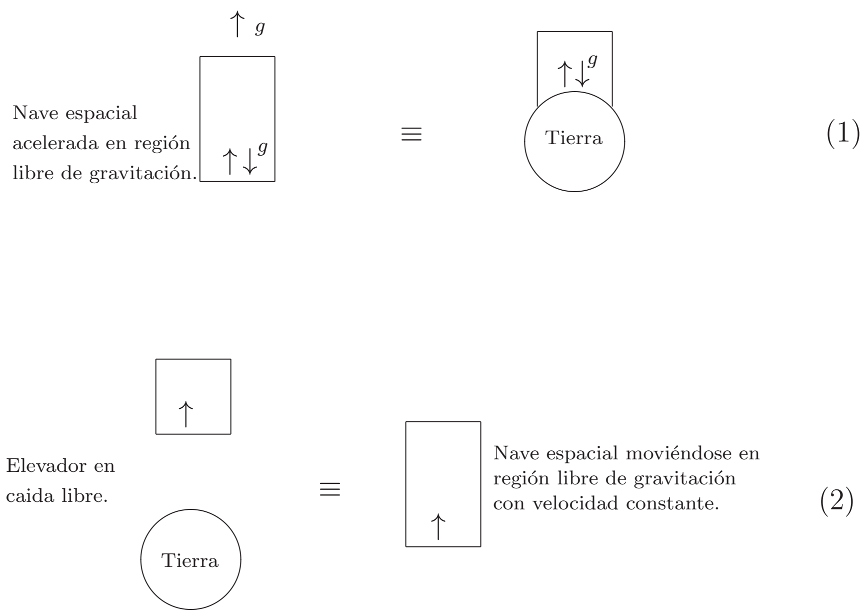


Figura 3.2: Elevadores de Einstein: Localmente los escenarios (1) y (2) son equivalentes.

Para el escenario (1): consideramos una nave espacial acelerada relativa a un sistema de referecia inercial global (es decir, en ausencia de interacción gravitatoria). En el interior del elevador las partículas "libres" caen en la dirección del piso con la misma aceleración independiente de sus masas. Pero tal situación ocurre por el campo gravitacional de la tierra. En la caja en reposo en la superficie de la tierra también las partículas que se mueven solo bajo la influencia de gravitación se mueven con la misma aceleración independientemente de sus masas (los experimentos de Galileo), es decir, la misma situación ocurre en el interior de la nave espacial.

Einstein propuso la hipótesis que es la *piedra angular* de R.G: *no hay ningún experimento físico que pueda diferenciar la física (la física clásica no la física cuántica) en el interior de la nave espacial de la física en una caja en reposo en la superficie de la tierra.*

Si aceptamos esta hipótesis llegamos a la conclusión de que:

$$\frac{d^2y^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dy^\alpha}{d\tau}\frac{dy^\beta}{d\tau} = 0 \Longleftrightarrow \nabla_u u = 0$$

deben ser las ecuaciones de movimiento de una partícula en un *campo gravitacional real*.

Einstein, además, tuvo en cuenta el escenario (2). En el interior de un elevador en caída libre en el campo gravitacional de la tierra las partículas no sienten la fuerza de gravitación que es lo mismo que ocurre en el interior de una nave espacial moviéndose con velocidad constante. Localmente podemos "aniquilar" los efectos de la gravedad por sistemas no inerciales.

Einstein buscó una teoría que respete ambas conclusiones derivadas de los escenarios (1) y (2).

Con la ayuda de su amigo *Marcel-Grossmann* que era un geómetra, se dió cuenta de que en una variedad M equipada con una métrica g tal que $Riem(g) \neq 0$ existen curvas preferenciales, es decir, las curvas geodésicas que satisfacen $\nabla_T T = 0$ en donde T es el vector tangente y tales curvas encajan muy bien en el escenario (1).

Por otra parte se enteró que de cualquier manera en que sea escrita la interacción gravitatoria ésta debe ser consistente con el escenario (2), la cual implica que los efectos de gravitación se aniquilan localmente por efectos debidos a sistemas de referencias no inerciales. Esta propiedad se incorpora muy bien con la siguiente propiedad: para cada $(M, g, \nabla g = 0, Riem(g) \neq 0)$ y para cada $p \in M$ existe un sistema de coordenadas local de modo que [2]:

α) $g|_p :=$ métrica de Minkowski

β) $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}|_p := 0$

pero $Riem(g)|_p \neq 0$, es decir, no se puede aniquilar Riemman por transformaciones de coordenadas. El sistema de coordenadas predicho por las propiedades α) y β) define un sistema de referencias inercial local (también se refieren como sistemas de referencia locales de Lorentz y juegan un papel importante para la formulación del principio de equivalencia).

Estas propiedades empíricas llevaron a Einstein a concluir que la *gravedad se manifiesta como la curvatura del espacio-tiempo*. Este razonamiento no explica el por qué las ecuaciones dinámicas por el campo gravitacional tienen la forma (3.24). Aquí solo podemos asumir que él se movió por el principio de simplicidad.

3.3 Principio de Equivalencia y Electrodinámica de Maxwell en un Campo Gravitacional

La existencia de sistemas de referencia inerciales locales que hemos discutido en la sección anterior nos permite formular el llamado *Principio de Equivalencia* de Einstein. El contenido de este principio es la naturaleza de las leyes de la Física en presencia de un campo gravitacional relativístico. Este principio afirma:

[2] *Subnota: La existencia de este sistema está discutida en [5].*

α) Las leyes de la física no gravitacional en un espacio-tiempo arbitrario (M, g) deben involucrar campos tensoriales definidos en (M, g) (*Principio de Covarianza general*).

β) Las leyes de la física no gravitacional cuando es restringida a un sistema de referencia inercial local se reducen a la forma de Relatividad Especial (Principio de Equivalencia de Einstein).

Naturalmente nos lleva a preguntar: *¿Qué forma tendrán las ecuaciones de la electrodinámica de Maxwell en un (M, g) que representa un campo gravitatorio relativista?.*

Los principios anteriores implican que cualquiera que sea la forma de las ecuaciones de Maxwell en un espacio-tiempo (M, g) estará sujeta a dos restricciones:

a) Las variables involucradas deben ser campos tensoriales definidos en (M, g).

b) Cuando las ecuaciones de Maxwell se restringen a un sistema de referencia inercial local en $p \in (M, g)$ su forma debe ser reducida a la forma de Relatividad Especial, es decir, en $p \in (M, g)$ y relativo a un sistema de referencia inercial local con $\{x^0, \ldots, x^3\}$ las coordenadas locales. En p debemos recuperar:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

La condición (a) por sí sola no es suficiente para determinar o restringir la naturaleza de las ecuaciones de Maxwell en un (M, g). Por ejemplo, no se puede descartar la posibilidad de que tal vez los términos de la curvatura estén presentes en la forma relativista de las ecuaciones de Maxwell.

Sin embargo, la condición (b) descarta esta posibilidad. Para ver eso sea que las leyes de la teoría de Maxwell en un (M, g) toman la forma:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha b} = \frac{4\pi}{c} J^b + aR^b{}_{\mu k\lambda} J^\mu F^{k\lambda} \tag{3.30}$$

$$\nabla_{[\alpha} F_{bc]} = 0 \tag{3.31}$$

en donde $aR^b{}_{\mu k\lambda} J^\mu F^{k\lambda}$ representa una contribución adicional derivados de la curvatura de la variedad espacio-tiempo.

La forma de (3.30) y (3.31) son compatibles con el principio de covarianza general, es decir, el principio (α). Sin embargo (3.30) es incompatible con el *Principio de Equivalencia*, es decir, el pricipio (β). Para ver esto sea $p \in (M, g)$ y sea $(x^0, \ldots, x^3)$ un sistema de referencia inercial local en $p \in (M, g)$. Como hemos visto al respecto de tal sistema tenemos:

a_1) $g_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)|_p = diag(-1, 1, 1, 1)|_p$.

a_2) $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}|_p = 0$.

Por lo tanto de la restricción (3.30) y (3.31) en $p \in (M, g)$ tenemos:

$$\partial_\alpha F^{\alpha b} = \frac{4\pi}{c} J^b + aR^b{}_{\mu k\lambda} J^\mu F^{k\lambda}|_p \tag{3.32}$$

$$\partial_{[\alpha} F_{bc]} = 0 \tag{3.33}$$

Sin embargo, en general el término

$$aR^b{}_{\mu k\lambda} J^\mu F^{k\lambda}|_p \neq 0$$

y por lo tanto (3.32) y (3.33) son diferentes de:

$$\partial_\alpha F^{\alpha b} = \frac{4\pi}{c} J^b, \quad \partial_{[\alpha} F_{bc]} = 0 \tag{3.34}$$

que demanda el Principio de Equivalencia de Einstein.

Las ecuaciones de Maxwell en un campo gravitacional relativísta (M, g) que están de acuerdo con el Principio de Equivalencia de Einstein están escritas en términos de un tensor antisimétrico F y un campo vectorial que representa el cuatro vector corriente J. Al respecto de algún sistema de coordenadas $(x^0, \ldots, x^3)$ definido en $O \subseteq (M, g)$ tienen la forma covariante:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad \nabla_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0 \tag{3.35}$$

en donde:

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{\partial F^{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu} F^{\mu\gamma} + \Gamma^\gamma{}_{\alpha\mu} F^{\beta\mu}$$

y $\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu}$ son los símbolos de Christofell asociados con la métrica g que ahora satisface $Riem(g) \neq 0$. Aún la forma de la electrodinámica de Maxwell en un (M, g) es de forma idéntica a (3.16) que hemos derivado de la sección anterior aunque hay una diferencia crucial. La forma de las ecuaciones (3.16) son válidas en $(\mathbb{R}^4, g_L, Riem(g_L) = 0)$ y por medio de una transformación de coordenadas pueden llevarse a la forma válida en todo $(\mathbb{R}^4, g_L)$:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J^\beta, \quad \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0$$

Tal simplificación es imposible por (3.35). La presencia de curvatura prohibe la construcción de sistemas de referencias inerciales globales.

Aún deseable se queda fuera del alcance de esta tesis un estudio detallado del sistema (3.35). Mi esperanza es que en el futuro seré capaz de entender mejor cómo interactúan la electrodinámica y gravitación.

Conclusiones

En esta tesis empesamos con la forma no relativista de la ecuaciones de Maxwell y hemos terminado con la forma de la electrodinámica de Maxwell válida en un campo gravitacional relativista. A lo largo de este trabajo hemos formulado la Electrodinámica de Maxwell de tal manera que sus ecuaciones quedan invariantes primero bajo el grupo de Poincaré y segundo bajo arbitrario cambio de coordenadas del espacio-tiempo de Minkowski. También hemos visto como nace el grupo de Poincaré en el contexto de Relatividad Especial. Apelando al cálculo tensorial formulamos la electrodinámica de Maxwell de forma invariante bajo arbitrario cambio de coordenadas. Finalmente por medio del Principio de Equivalencia de Einstein escribimos la teoría en presencia de un campo gravitacional relativista. Durante este camino largo nuestro énfasis fue la importancia que tiene la métrica Lorentziana en relatividad especial ó en relatividad general. La métrica Lorentziana g_L en $(\mathbb{R}^4, g_L)$ fue la responsable para definir el grupo de Poincaré y también fue la responsable para escribir las ecuaciones de Maxwell de forma invariante bajo arbitrario cambio de coordenadas en el espacio-tiempo de Minkowski. Así también como el principio de equivalencia de Einstein fue responsable para definir la electrodinámica de Maxwell en un campo gravitacional relativista. Sentimos que la contribución de esta tesis es el significado de la métrica g en la electrodinámica de Maxwell. Sería interesante desarrollar las ecuaciones de Einstein acopladas con el tensor de energía-momento de un campo electromagnético, pero en el futuro sería otro tema ha ser estudiado detalladamente aunque por el momento se queda fuera del alcance de esta tesis.

Bibliografía

[1] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics, Second Edition John Wiley and Sons (1975).

[2] H. Minkowski, In the Principle of Relativity (Dover, pub. 1923).

[3] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (J. Wiley 1970).

[4] R.M Wald, General Relativity (Chicago University Press (1984)).

[5] J.H. Felipe, T. Zannias, Notas sobre cálculo tensorial (Parte del servicio social Marzo-Septiembre 2011).

[6] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, The classical theory of fields, Perganon press (1975).

[7] X