



# UNIVERSIDAD MICHOCANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas "Mat.  
Luís Manuel Rivera Gutiérrez"*

Ondas Electromagnéticas y Gravitacionales una  
comparación

T E S I S

PARA OBTENER EL TITULO DE

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

José César Guerra Vázquez

ASESOR

DR. Thomas Zannias

MORELIA, MICHOCÁN., NOVIEMBRE 2011



# Índice

|          |                                                                |           |
|----------|----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>                                            | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Gravedad Linealizada de Einstein</b>                        | <b>7</b>  |
| 2.1      | Libertad de Norma . . . . .                                    | 12        |
| 2.2      | Gravedad Linealizada VS Electrodinámica de Maxwell . . . . .   | 16        |
| 2.3      | La Norma de Radiación por Gravedad Linealizada . . . . .       | 23        |
| 2.4      | Ondas Gravitacionales en Gravedad Linealizada . . . . .        | 28        |
| 2.5      | Sobre la Helicidad del “Gravitón” . . . . .                    | 38        |
| 2.6      | Energía y Momento Asociado con Ondas Gravitacionales . . . . . | 42        |
| <b>3</b> | <b>Generación de Radiación Gravitacional</b>                   | <b>45</b> |
| 3.1      | Generación de Radiación Electromagnética . . . . .             | 46        |
| 3.2      | Generación de Radiación Gravitacional . . . . .                | 55        |
|          | <b>Apéndice A</b>                                              | <b>71</b> |
|          | <b>Apéndice B</b>                                              | <b>73</b> |
|          | <b>Bibliografía</b>                                            | <b>79</b> |



# Resumen

En esta tesis estudiamos algunas propiedades de la teoría de la Relatividad General de Einstein linealizada alrededor del espaciotiempo de Minkowski. Mostramos que tal teoría predice la existencia de ondas gravitacionales, es decir, ondulaciones de la curvatura de espaciotiempo que se propagan con la velocidad de la luz. En el límite de fuentes con velocidades bajas es decir  $\frac{|v|}{c} \ll 1$  con  $|v|$  la velocidad típica de la fuente, mostraremos que la radiación gravitacional se genera por el momento cuadripolar de la fuente en contraste del caso electromagnético en donde el momento dipolar eléctrico genera radiación electromagnética. Comparamos también la razón de potencia emitida por una fuente gravitacional monocromática y una fuente electromagnética de la misma frecuencia. El trabajo de esta tesis ofrece una comparación entre la teoría de Maxwell y la teoría de la relatividad general linealizada al rededor de la métrica de Minkowski. Vemos estas dos teorías como teorías de norma y discutimos similitudes y diferencias entre ellas. La comparación involucra también una comparación entre las ondas monocromáticas planas que admiten las dos teorías y la manera en que se genera radiación. Finalmente mencionamos que nuestra comparación entre las dos teorías hasta donde sabemos no se discute de tales detalles como lo representamos en este trabajo.



# Capítulo 1

## Introducción

La teoría general de la relatividad de Einstein es una teoría de espaciotiempo y gravitación, cuya esencia se puede enunciar de la siguiente manera [1]

*En el contexto de relatividad general la gravitación se manifiesta por si misma como la curvatura de espaciotiempo.*

Recordamos que la teoría de la relatividad especial está fundada sobre el espaciotiempo de Minkowski  $(R^4, g_L)$  en donde  $g_L$  es una métrica Lorentziana tal que  $Riemman(g_L) = 0$ . Pero en contraste, en relatividad general el espaciotiempo es modelado por una tripleta  $(M, g, \nabla_g)$  donde:

$M$  es una variedad suave de dimensión 4,  $g$  es una métrica Lorentziana suave,  $\nabla_g$  denota la conexión de Levi-Civita asociada con  $g$ .

Y lo más importante: el tensor de Riemman de la métrica Lorentziana  $g$  satisface:

$$Riemman(g) \neq 0 \quad \text{sobre } M$$

Denotamos de aquí en adelante un espaciotiempo  $(M, g, \nabla_g)$  como  $(M, g)$ .

La métrica Lorentziana  $g$  en la teoría de la relatividad general satisface las

ecuaciones de Einstein:

$$G(g) = \hat{k}T \quad (1.1)$$

donde  $G(g)$  representa el tensor de Einstein  $G(g) = Ricci(g) - \frac{1}{2} g R(g)$ ,  $T$  representa el tensor de Energía-momentum y  $\hat{k} = \frac{8\pi G}{c^4}$  es la constante de acoplamiento.  $Ricci(g)$  es la curvatura de Ricci y  $R(g)$  es la curvatura escalar de  $g$  que definimos más adelante. Sea  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  un sistema de coordenadas locales que cubre una vecindad  $O$  con  $O \subseteq M$ , entonces al respecto de tal sistema de coordenadas las ecuaciones de Einstein toman la forma:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \hat{k}T_{\alpha\beta} \quad (1.2)$$

donde

$$g = g_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta, \quad g_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) \quad (1.3)$$

son las componentes coordenadas de  $g$  al respecto del mismo sistema.

Al respecto de este sistema las componentes coordenadas  $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$  del tensor de Riemman

$$R = R^\alpha_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma \otimes dx^\delta \quad (1.4)$$

están dadas por:

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &:= \left\langle dx^\alpha, R\left(\frac{\partial}{\partial x^\gamma}, \frac{\partial}{\partial x^\delta}\right) \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right\rangle = \\ &= \left\langle dx^\alpha, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\delta}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\delta}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right\rangle = \\ &= \left\langle dx^\alpha, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\gamma}} \Gamma^\nu_{\delta\beta} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^\delta}} \Gamma^\nu_{\gamma\beta} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle dx^\alpha, \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\beta\delta}^\nu \Gamma_{\gamma\nu}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^\nu}{\partial x^\delta} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \Gamma_{\gamma\beta}^\nu \Gamma_{\delta\nu}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \\
&= \left\langle dx^\alpha, \left( \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\nu}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\gamma\mu}^\nu - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^\nu}{\partial x^\delta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\delta\mu}^\nu \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \\
&= \left( \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\nu}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\gamma\mu}^\nu - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\beta}^\nu}{\partial x^\delta} - \Gamma_{\gamma\beta}^\mu \Gamma_{\delta\mu}^\nu \right) \delta_\nu^\alpha
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\gamma\mu}^\alpha - \Gamma_{\gamma\delta}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (1.5)$$

en donde  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  son los símbolos de Christoffel que representan  $4^3$  funciones tales que escriben la conexión de Levi-Civita relativamente a  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  a través de:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \left[ \frac{\partial g_{\mu\beta}}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\mu\gamma}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\mu} \right] \quad (1.6)$$

Tomando la contracción  $C^1_3$  de (1.4) definimos el tensor o curvatura de Ricci:

$$Ricci(g) = R^\alpha_{\beta\alpha\delta} dx^\beta \otimes dx^\delta = R_{\beta\delta} dx^\beta \otimes dx^\delta \quad (1.7)$$

donde las componentes coordenadas  $R_{\beta\delta}$  están dadas por:

$$R_{\beta\delta} = \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^\alpha}{\partial x^\beta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha - \Gamma_{\alpha\delta}^\mu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha \quad (1.8)$$

mientras que la curvatura escalar  $R$  de  $g$  es definida por  $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ .

De (1.2) tenemos que <sup>1</sup>

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \right) = 0$$

---

<sup>1</sup>No es trivial mostrar la propiedad  $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ . Vease por ejemplo [1] ó [2].



de donde se sigue que el tensor de energía-momentum satisface

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} \quad (1.9)$$

El contenido físico de las ecuaciones de Einstein (1.1), (1.2) se puede ver haciendo una comparación con el contenido de la teoría de la gravitación de Newton la cual como sabemos involucra un campo escalar  $\Phi$  que satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}, t) = 4\pi G \rho(\vec{x}, t) \quad (1.10)$$

donde  $\vec{x}$  representa las coordenadas relativas a un sistema de referencia inercial de física prerrelativista,  $t$  representa el tiempo Newtoniano absoluto y  $\rho(\vec{x}, t)$  es la densidad de materia que actúa como fuente del campo gravitatorio Newtoniano.

Comparando la ecuación de Einstein (1.1) con la ecuación de Newton (1.10) obtenemos las siguientes correspondencias:

$$G(g) \longleftrightarrow \nabla^2 \Phi \quad (1.11)$$

$$T \longleftrightarrow \rho \quad (1.12)$$

y de tales correspondencias concluimos que:

- $\alpha)$  El campo gravitacional relativista es descrito por 10 componentes  $g_{\alpha\beta}$  de la métrica  $g$  y no sólo por un potencial escalar  $\Phi$  como para el caso de gravitación Newtoniana.
- $\beta)$  Las fuentes de un campo gravitacional relativista no sólo son la densidad de materia  $\rho$  sino más bien la energía y momentum total, es decir, el tensor de energía-momentum  $T$  de materia y campos que viven en el espaciotiempo  $(M, g)$ .

En esta tesis estudiamos una propiedad remarcable de la teoría de Relatividad General (abreviada por R.G. de aquí en adelante). R.G. predice la existencia de ondas gravitacionales, es decir, ondulaciones en la curvatura del espaciotiempo que se propagan con la velocidad de la luz. Un estudio detallado dentro de R.G. es un problema bastante complicado, debido a la no linealidad de las ecuaciones (1.1). Pero a través de una linealización de las ecuaciones de Einstein alrededor de la métrica de Minkowski  $g_L$  nos permite reemplazar el sistema (1.1) por un sistema lineal. Es a través de este sistema lineal que nosotros vamos a ver la existencia de ondas gravitacionales. (la existencia de ondas gravitacionales en el contexto de R.G. se discute por ejemplo en [1], [6] y [7]).

En el contenido de esta tesis en el siguiente capítulo discutimos el proceso de linealización de las ecuaciones de Einstein alrededor de la métrica plana de Minkowski. De este proceso llegamos a la teoría de la relatividad general linealizada y mostramos que dicha teoría admite libertad de norma generada por un campo vectorial arbitrario. En la sección (2.2) comparamos esta propiedad de gravedad linealizada con electrodinámica de Maxwell y discutimos similitudes y diferencias entre las dos teorías. Después introducimos la norma de radiación por gravedad linealizada y probamos que siempre podemos imponer tal norma. Hacemos una comparación de esta norma con la norma de Coulomb en el contexto de la teoría de Maxwell. Después en la sección (2.4) mostramos que las ecuaciones de Einstein linealizadas y en el vacío admiten una familia de soluciones particulares referidas como *ondas gravitacionales monocromáticas planas*. Mostraremos que tales soluciones tienen propiedades similares a las de *ondas electromagnéticas*

*monocromáticas planas*. Y usando la libertad de norma que tenemos se muestra que ondas gravitacionales monocromáticas planas tienen solo dos grados de libertad, es decir tienen helicidad o spin  $\pm 2$ , en contraste de ondas electromagnéticas monocromáticas planas que tienen helicidad  $\pm 1$ .

En el capítulo 3 discutimos generación de ondas gravitacionales. Desarrollamos en paralelo la generación de ondas electromagnéticas y comparamos otra vez las dos teorías. Vemos que mientras para la teoría electromagnética fuentes que tienen momento dipolar eléctrico dependiente del tiempo generan radiación electromagnética. Para el caso de gravedad linealizada y en el límite de fuentes que se mueven con velocidad baja  $v$ , es decir,  $\frac{|v|}{c} \ll 1$  es la variación en tiempo de momento cuadrupolar que genera radiación gravitacional. Computamos explícitamente la potencia emitida por tal fuente y comparamos tal potencia con el caso de electromagnetismo. Terminamos esta teoría con una discusión acerca de la detección de radiación gravitacional.

## Capítulo 2

# Gravedad Linealizada de Einstein

Empezamos considerando un *espaciotiempo*  $(M, g) = (R^4, g)$  en donde  $g$  es una métrica Lorentziana suave y en el contexto de Relatividad General,  $g$  satisface las ecuaciones de Einstein  $G(g) = \hat{k}T$  en  $R^4$ . Como hemos discutido en la introducción  $G(g)$  representa el *tensor de Einstein*, mientras  $T$  representa el *tensor de energía-momentum* de campos y materiales que están presentes en el espaciotiempo  $(R^4, g)$ .

Nuestro enfoque en este capítulo y en esta tesis no es estudiar espaciotiempos arbitrarios, sino solo una familia de  $(R^4, g)$  que satisface las siguientes restricciones:

- $\alpha)$  Existe un sistema de coordenadas:  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  con  $x^a \in (-\infty, \infty)$ ,  $a = 0, 1, 2, 3$  que cubre todo  $R^4$  y al respecto de tal sistema  $g$  tiene la forma:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}) dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.1)$$

en donde:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.2)$$

$\beta$ ) Las funciones  $\gamma_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$  son funciones suaves que satisfacen la restricción:

$$|\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)| \ll 1 \text{ en todo } R^4$$

Aún las condiciones  $\alpha$ ) y  $\beta$ ) son muy restringidas, sin embargo como mostraremos en esta tesis espaciotiempos  $(R^4, g)$  que satisfacen propiedades  $\alpha$ ) y  $\beta$ ) también son útiles. La restricción  $|\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)| \ll 1$  nos permite ver el espaciotiempo  $(R^4, g)$  con  $g$  dado por (2.1) como el espaciotiempo de Minkowski  $(R^4, \eta)$  con:

$$\eta = \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \quad (2.3)$$

en la presencia de pequeñas perturbaciones  $\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ .

Físicamente podemos pensar que hay campos o distribuciones de material con un tensor de energía-momentum situable definido que generan las pequeñas perturbaciones  $\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$  a las componentes de la métrica plana (2.3). Nuestro enfoque en este capítulo es estudiar la dinámica de estas pequeñas perturbaciones en el contexto de Relatividad General. La suposición que  $g$  en (2.1) satisface las ecuaciones de Einstein  $G(g) = \hat{k}T$  acoplada con la suposición que las perturbaciones  $\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$  satisfacen la propiedad  $\beta$ ) nos permite linealizar las ecuaciones  $G(g) = \hat{k}T$  alrededor de la métrica plana (2.3). De esta manera llegaremos a ecuaciones dinámicas que las pequeñas

perturbaciones  $\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$  deben satisfacer.

Como hemos visto en la introducción las ecuaciones de Einstein  $G(g) = \hat{k}T$  al respecto de algún sistema de coordenadas arbitrario, tienen la forma:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \hat{k}T_{\alpha\beta} \quad (2.4)$$

en donde  $R_{\alpha\beta}$  son las componentes coordenadas del tensor de curvatura de Ricci,  $R$  es el escalar de curvatura de Ricci, es decir  $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ ,  $T_{\alpha\beta}$  son las componenets del tensor de energía-momentum y  $\hat{k} = \frac{8\pi G}{c^4}$  es la constante de acoplamiento.

Consideramos las ecuaciones de Einstein (2.4) al respecto del sistema (2.1) y nuestra primera tarea es linealizarlas alrededor de la métrica plana  $\eta_{\alpha\beta}$ . Pero antes de hacerlo primero definimos nuestras convenciones.

Denotamos de aquí en adelante:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \partial^\alpha = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} \\ \partial_\alpha \partial^\alpha &= \partial^\alpha \partial_\alpha = \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} \\ &= -\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} + \nabla^2 \equiv \square \end{aligned}$$

es decir subimos y bajamos índices usando las componentes de la métrica plana escrita en (2.3). Pero hacemos una excepción. Aún

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha \otimes dx^\beta = (\eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta})dx^\alpha \otimes dx^\beta$$

tomamos las componentes  $g^{\alpha\beta}$  definidas por:

$$g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} = (\eta^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\beta} \quad (2.5)$$

las cuales satisfacen <sup>1</sup>:

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = (\eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta})(\eta^{\beta\gamma} - \gamma^{\beta\gamma}) = \delta_{\alpha}^{\gamma} + O(\gamma^2)$$

$$\delta_{\alpha}^{\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \gamma \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \gamma \end{cases}$$

Para linealizar las ecuaciones de Einstein, primero linealizamos los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$  en donde recordamos que

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_{\gamma} g_{\delta\beta} + \partial_{\beta} g_{\delta\gamma} - \partial_{\delta} g_{\beta\gamma}) \quad (2.6)$$

en donde  $g_{\alpha\beta} = g(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial x^{\beta}})$  son las componentes coordenadas de  $g$  al respecto de algún sistema de coordenadas  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  arbitrario mientras los  $g^{\alpha\beta}$  satisfacen  $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_{\gamma}^{\alpha}$ . Evaluando el lado derecho de (2.6) relativamente al sistema (2.1) y tomando en cuenta (2.5) tenemos la forma linealizada

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\delta} (\partial_{\gamma} \gamma_{\delta\beta} + \partial_{\beta} \gamma_{\delta\gamma} - \partial_{\delta} \gamma_{\beta\gamma}) + O(\gamma^2) \quad (2.7)$$

De esta expresión las componentes del tensor de Ricci  $R_{\alpha\beta}$ , a orden lineal en  $\gamma_{\alpha\beta}$  denotadas por  $R_{\alpha\beta}^{(1)}$ , tienen la forma:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta}^{(1)} &= \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} - \partial_{\alpha} \Gamma_{\gamma\beta}^{\gamma} = \\ &= \frac{1}{2} \partial^{\gamma} \partial_{\beta} \gamma_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \partial^{\gamma} \partial_{\alpha} \gamma_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \partial^{\gamma} \partial_{\gamma} \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_{\alpha} \partial_{\beta} \gamma \end{aligned} \quad (2.8)$$

donde

$$\gamma := \gamma^{\mu}_{\mu} = \eta^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu}$$

---

<sup>1</sup>Durante el proceso de linealización el símbolo  $O(\gamma^2)$  representa términos cuadráticos en las perturbaciones  $\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ .

De (2.8) la forma linealizada  $R^{(1)}$  de la curvatura escalar  $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$  tiene la forma:

$$R^{(1)} = (\eta^{\alpha\beta} - \gamma^{\alpha\beta}) R_{\alpha\beta}^{(1)} = \partial^\gamma \partial^\delta \gamma_{\gamma\delta} - \partial^\gamma \partial_\gamma \gamma \quad (2.9)$$

Entonces el tensor de Einstein a orden lineal  $G_{\alpha\beta}^{(1)}$  es:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)} &= R_{\alpha\beta}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} R^{(1)} \\ &= \frac{1}{2} \partial^\gamma \partial_\beta \gamma_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2} \partial^\gamma \partial_\alpha \gamma_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} \partial^\gamma \partial_\gamma \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta \gamma - \\ &\quad - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (\partial^\gamma \partial^\delta \gamma_{\gamma\delta} - \partial^\gamma \partial_\gamma \gamma) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Desafortunadamente el lado derecho es complicado pero puede simplificarse si empleamos una nueva variable  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  definida por:

$$\bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \gamma \quad (2.11)$$

Esta relación puede invertirse fácilmente. Tomando la contracción con  $\eta^{\alpha\beta}$  tenemos:

$$\eta^{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} - 2\gamma$$

y definiendo  $\bar{\gamma} = \eta^{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  tenemos la relación:

$$\bar{\gamma} = \gamma - 2\gamma = -\gamma$$

entonces la inversión de (2.11) implica que:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \gamma = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \bar{\gamma} \quad (2.12)$$



Por lo tanto, en términos de  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  el lado derecho de (2.10) se convierte en:

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta}^{(1)} &= \frac{1}{2}\partial^\gamma\partial_\beta\bar{\gamma}_{\alpha\gamma} + \frac{1}{2}\partial^\gamma\partial_\alpha\bar{\gamma}_{\beta\gamma} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\partial^\gamma\partial_\gamma\bar{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\partial^\gamma\partial^\delta\bar{\gamma}_{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (2.13)$$

y las ecuaciones de Einstein linealizadas están dadas por:

$$G_{\alpha\beta}^{(1)} = \hat{k}T_{\alpha\beta} \quad (2.14)$$

Aún el lado derecho de (2.13) es más simple comparativamente a (2.10) todavía puede simplificarse más. La manera de hacer esto la discutiremos en la siguiente sección.

## 2.1 Libertad de Norma

En la sección anterior empezamos con un sistema de coordenadas  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  en donde  $g$  tiene la forma

$$g = g_{\mu\nu}dx^\mu \otimes dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu})dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.15)$$

donde:

$$|\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)| \ll 1 \quad \forall \quad (x^0, x^1, x^2, x^3) \in R^4 \quad (2.16)$$

En esta sección mostramos que las restricciones (2.15) y (2.16) no determinan únicamente el sistema de coordenadas  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ . Mostraremos que existen infinitos sistemas de coordenadas en donde las condiciones (2.15) y (2.16) son válidas.

Consideremos un nuevo sistema de coordenadas  $\{y^0, y^1, y^2, y^3\}$  tal que

$$y^\mu(x) = x^\mu - \varepsilon\xi^\mu(x) \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.17)$$

donde  $\xi = \xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es algún campo vectorial arbitrario pero suave y  $\varepsilon$  es un parámetro pequeño. Invirtiendo (2.17) obtenemos

$$x^\mu(y) = y^\mu + \varepsilon \xi^\mu(y) + O(\varepsilon^2) \quad (2.18)$$

y las componentes de  $g$  al respecto de  $\{y^0, y^1, y^2, y^3\}$  tienen la forma

$$\eta'_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^\nu} (\eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}) \quad (2.19)$$

donde, de acuerdo con (2.18)

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} = \delta_\mu^\alpha + \varepsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial y^\mu}$$

y obviamente

$$\det \left[ \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\mu} \right] \neq 0 \quad \forall x \in R^4$$

Se sigue entonces que:

$$\eta'_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu} = (\delta_\mu^\alpha + \varepsilon \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial y^\mu}) (\delta_\nu^\beta + \varepsilon \frac{\partial \xi^\beta}{\partial y^\nu}) (\eta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}) \implies$$

$$\eta'_{\mu\nu} + \gamma'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2)$$

lo cual implica que las perturbaciones  $\gamma'_{\mu\nu}$  de  $g$  al respecto del nuevo sistema (2.17) tienen la forma <sup>2</sup>

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \varepsilon \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} + O(\varepsilon^2) \quad (2.20)$$

---

<sup>2</sup>En esta expresión los argumentos de todos los campos a nivel lineal quedan expresados en términos de  $x^\mu$  ó  $y^\mu$ , de aquí en adelante los consideramos como funciones del sistema original  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . De este punto de vista la transformación (2.20) es idéntica a  $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \chi(x)$  que realizamos en la teoría de Maxwell. (Ver discusión más adelante).

y obviamente  $|\gamma'_{\mu\nu}| \ll 1$  sujeto a que  $\varepsilon$  es suficientemente pequeño.

En conclusión, bajo cambio de coordenadas de la forma:

$$x^\mu \longmapsto y^\mu(x) = x^\mu - \varepsilon \xi^\mu(x) \quad (2.21)$$

las perturbaciones  $\gamma_{\mu\nu}$  se transforman según:

$$\gamma_{\mu\nu} \longmapsto \gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.22)$$

en donde por simplicidad hemos absorbido  $\varepsilon$  en la definición del campo  $\xi$ .

Usamos esta libertad para simplificar el lado derecho del tensor  $G_{\alpha\beta}^{(1)}$  de Einstein linealizado.

Para ver de que manera usamos tal libertad comenzamos con un sistema de coordenadas en el cual la perturbación es descrita por  $\gamma_{\mu\nu}(x)$ <sup>3</sup> y la variable  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x)$  por

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x) = \gamma_{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \gamma(x) \quad , \quad \gamma(x) = \eta^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(x)$$

Bajo la transformación de norma generada por un campo vectorial arbitrario  $\xi = \xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  combinada con la ley de transformación (2.22) implica que:

$$\eta^{\mu\nu} \gamma'_{\mu\nu} = \gamma + \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} \Rightarrow \gamma' = \gamma + 2 \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} \quad (2.23)$$

De la definición de  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  tenemos:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} \longmapsto \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \gamma'$$

y usando (2.22) y (2.23) obtenemos:

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \left( \gamma + 2 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \right)$$

---

<sup>3</sup>Por conveniencia escribimos frecuentemente  $\gamma_{\mu\nu}(x)$  en lugar de  $\gamma_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ .

de la cual tenemos la siguiente regla de transformación para los  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} \longmapsto \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (2.24)$$

De esta ley de transformación observamos:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial_\nu \xi_\mu + \partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha \\ &= \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu \end{aligned} \quad (2.25)$$

la cual es una identidad de suma importancia. Mirando el lado derecho vemos que siempre podemos escoger  $\xi = \xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que se cumple <sup>4</sup>

$$\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = -\partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu \quad (2.26)$$

De este evento (2.25) implica que  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu}$  obedece:

$$\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0 \quad (2.27)$$

Regresando a las componentes de  $G_{\alpha\beta}^{(1)}$  dadas por (2.13) tomando en cuenta (2.27) concluimos que

$$G_{\alpha\beta}^{(1)} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu \bar{\gamma}_{\alpha\beta}$$

En particular en el vacío las ecuaciones de Einstein linealizadas alrededor de una métrica plana toman la forma sencilla:

$$\partial^\mu \partial_\mu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right] \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.28)$$

En presencia de materiales o campos las ecuaciones de Einstein linealizadas tienen la forma

$$-\frac{1}{2} \partial^\mu \partial_\mu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \hat{k} T_{\alpha\beta} \implies \partial^\mu \partial_\mu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = -2\hat{k} T_{\alpha\beta}$$

---

<sup>4</sup>Dada  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x)$  buscamos un  $\xi = \xi^\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que  $\partial^\mu \partial_\mu \xi_\nu \equiv \square \xi_\nu = -\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu}$ ,  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . Estas ecuaciones hiperbólicas siempre admiten solución, las cuales verifican lo que demandamos.

Es importante notar que la condición  $\partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$  demanda que las componentes  $T_{\mu\nu}$  del tensor de energía-momentum satisfacen las condiciones:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\beta\alpha} \quad , \quad \partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0$$

De aquí en adelante referimos las ecuaciones

$$\partial^\mu \partial_\mu \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = \square \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = -2\hat{k} T_{\alpha\beta}, \quad \partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0, \quad \partial^\alpha T_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.29)$$

como las ecuaciones de Einstein linealizadas alrededor de la métrica de Minkowski (vease [1], [3]).

## 2.2 Gravedad Linealizada VS Electrodinámica de Maxwell

En la sección anterior hemos visto que si  $\gamma_{\alpha\beta}$  es una perturbación de la métrica plana  $\eta$ , y si  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es un campo vectorial arbitrario y suave sobre  $(R^4, g)$  entonces  $\gamma'_{\alpha\beta}$  dada por:

$$\gamma'_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha}$$

describe otra perturbación de  $\eta$ .

Usando esta libertad de norma en la descripción de las perturbaciones de  $\eta$  hemos mostrado que en una norma particular  $\partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ , las ecuaciones linealizadas están escritas por (2.28) ó (2.29). En esta sección comparamos esta propiedad de gravedad linealizada con electrodinámica de Maxwell y discutimos similitudes y diferencias entre las dos teorías.

Recordamos que dentro del contexto de espaciotiempo de Minkowski  $(R^4, \eta)$

y relativo a un sistema de referencia inercial global  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  tal que

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \quad (2.30)$$

las ecuaciones de Maxwell en el vacío están descritas por ([1], [4]):

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\beta \quad , \quad \partial_\beta J^\beta = 0 \quad (2.31)$$

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.32)$$

donde la 4-corriente se define por:

$$J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.33)$$

con  $\rho$  la densidad de carga y  $J^i$  la densidad de corriente, mientras  $F_{\alpha\beta}$  son las componentes del tensor de Maxwell  $F$  :

$$F = F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad , \quad \alpha < \beta \quad (2.34)$$

con  $dx^\alpha \wedge dx^\beta$  el producto cuña:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha \quad (2.35)$$

En términos del 4-vector potencial  $A$  definido por:

$$A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Phi \frac{\partial}{\partial x^0} + A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.36)$$

las componentes del tensor de Maxwell  $F$  pueden representarse en la forma:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu \quad \Longleftrightarrow \quad F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (2.37)$$

entonces (2.31) es equivalente a:

$$\partial^\alpha \partial_\beta A_\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha A_\beta = \frac{4\pi}{c} J_\beta \quad (2.38)$$

mientras que de la representación  $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$  vemos que

$$\begin{aligned}\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} &= \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} \\ &= \partial_\alpha(\partial_\gamma A_\beta - \partial_\beta A_\gamma) + \partial_\beta(\partial_\alpha A_\gamma - \partial_\gamma A_\alpha) + \\ &\quad + \partial_\gamma(\partial_\beta A_\alpha - \partial_\alpha A_\beta) = 0\end{aligned}\tag{2.39}$$

La formulación de espaciotiempo de la electrodinámica de Maxwell escrita por (2.31) y (2.32) preserva la invariancia de norma propia de la teoría. Para ver esto sea que

$$\chi = \chi(t, x^i) = \chi(x^0, x^i)\tag{2.40}$$

es una función arbitraria y suave en  $(R^4, \eta)$ , y sea  $A'$  un nuevo 4-vector potencial relacionado con  $A$  por:

$$A' = A'^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (A^\mu + \partial^\mu \chi) \frac{\partial}{\partial x^\mu}\tag{2.41}$$

Entonces se ve inmediatamente que  $F_{\mu\nu}$ , (2.31) y (2.32) son forma invariante es decir:

$$\begin{aligned}F'_{\mu\nu} &= \partial_\nu A'_\mu - \partial_\mu A'_\nu = \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \chi) - \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \chi) \\ &= \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu = F_{\mu\nu}\end{aligned}\tag{2.42}$$

$$\begin{aligned}\partial^\alpha \partial_\beta A'_\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha A'_\beta &= \partial^\alpha \partial_\beta (A_\alpha + \partial_\alpha \chi) - \partial^\alpha \partial_\alpha (A_\beta + \partial_\beta \chi) \\ &= \partial^\alpha \partial_\beta A_\alpha - \partial^\alpha \partial_\alpha A_\beta = \frac{4\pi}{c} J_\beta\end{aligned}\tag{2.43}$$

y estas dos últimas relaciones prueban la invariancia de norma propia de la teoría.

La bien conocida norma de Lorentz en la descripción de espaciotiempo es

implementada escogiendo una  $\chi(t, x^i)$  tal que comenzando con un 4-vector potencial arbitrario  $A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  requerimos un nuevo 4-vector potencial

$$A' = A'^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (A^\mu + \partial^\mu \chi) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

que cumpla:

$$\partial_\mu A'^\mu = 0 \implies \partial_\mu \partial^\mu \chi = -\partial_\mu A^\mu \quad (2.44)$$

Como es bien conocido la ecuación:

$$\partial_\mu \partial^\mu \chi = \square \chi = \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right) \chi = -\partial_\mu A^\mu \quad (2.45)$$

siempre admite solución. La solubilidad de (2.45) implica que siempre y sin pérdida de generalidad podemos imponer la norma de Lorentz. Sea que elegimos  $A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que satisface la norma de Lorentz es decir  $\partial_\mu A^\mu = 0$ , entonces las ecuaciones de Maxwell (2.31) toman la forma:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A_\beta = -\frac{4\pi}{c} J_\beta, \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (2.46)$$

Ahora argumentamos que gravedad linealizada comparte propiedades idénticas con electrodinámica de Maxwell.

Para eso es suficiente notar que  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  juega el papel análogo a las componentes  $A_\mu$  del 4-vector potencial  $A$ . Ambos  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  y  $A_\mu$  pueden ser alterados, el primero por el campo vectorial  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  (vease 2.24), mientras el segundo por el gradiente  $\partial_\alpha \chi$  de una función arbitraria (vease 2.41).

En términos de los potenciales  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  las ecuaciones de Einstein linealizadas están descritas por (2.14) mientras las ecuaciones de Maxwell por (2.38). Ambas ecuaciones son invariantes bajo cambio de norma. Las ecuaciones linealizadas (2.14) son invariantes bajo el cambio de norma escrito por (2.24),



mientras las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo (2.41).

Escogiendo  $\xi$  y  $\chi$  apropiadamente imponemos las condiciones

$$\partial_\alpha \bar{\gamma}^{\alpha\beta} = 0 \quad , \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

y relativamente a estas normas las ecuaciones de Einstein linealizadas están descritas por:

$$\left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right] \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = -2\hat{k}T_{\alpha\beta} \quad , \quad \partial^\beta \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$$

y las ecuaciones de Maxwell por:

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A_\beta = -\frac{4\pi}{c} J_\beta \quad , \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0$$

Gracias a la estrecha analogía entre electrodinámica de Maxwell y teoría de Einstein linealizada nos preparamos a introducir la *norma de radiación* para gravedad linealizada. Tal norma es análoga de la norma de Coulomb o norma de radiación para la teoría de Maxwell [4].

Es instructivo ver con más detalles como imponemos primero la norma de Coulomb o norma de radiación en la teoría de Maxwell.

Para eso sea que  $A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es un 4-vector potencial y suponemos que  $A$  satisface la norma de Lorentz es decir:

$$\partial_\mu A^\mu = \partial_0 \Phi + \nabla \cdot \vec{A} = 0 \tag{2.47}$$

La norma de Lorentz no fija un único 4-vector potencial. En realidad si  $\chi = \chi(t, \vec{x})$  es una función arbitraria sujeta a  $\partial_\alpha \partial^\alpha \chi(t, \vec{x}) = 0$ , entonces

$A' = (A^\mu + \partial^\mu \chi) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  también satisface la relación (2.47) es decir

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_0 \Phi' + \nabla \cdot \vec{A}' = 0.$$

En problemas que tratan con radiación electromagnética es conveniente usar

la libertad de norma que tenemos  $A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  de manera que en una región libre de fuentes, es decir  $c\rho \equiv J^i \equiv 0$  hay que lograr que:

$$A'^0 = g^{00}A'_0 = -A'_0 \equiv 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{A}' = \partial_i A'^i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

Ahora discutiremos la manera de elegir  $\chi(t, \vec{x})$  tal que empezando con un 4-vector potencial  $A$  que satisface la norma de Lorentz (2.47) construimos un nuevo 4-vector potencial  $A' = A'^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que:

$$A'^0 = g^{00}A'_0 = 0 \quad y \quad \partial_i A'^i = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.48)$$

La norma definida por (2.48) es llamada la norma de Coulomb o norma de radiación. (Para una descripción de la norma de Coulomb en una región en donde  $\rho \neq 0$  y  $\vec{J} \neq 0$  vease [4]).

Supongamos que comenzamos con un 4-vector potencial  $A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Consideramos la  $t = 0$  hipersuperficie de espaciotiempo de Minkowski y elegimos una función  $\hat{\chi}(t = 0, \vec{x})$  definida en  $t = 0$  hipersuperficie tal que:

$$\nabla^2 \hat{\chi}(t = 0, \vec{x}) = -\partial_i A^i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.49)$$

Esta ecuación es de tipo Poisson con densidad fortuita  $\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \partial_i A^i$  y por lo tanto admite soluciones descritas por:

$$\hat{\chi}(t = 0, \vec{x}) = g(\vec{x}) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial_i A^i(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \quad (2.50)$$

en donde  $g(\vec{x})$  es una función arbitraria que satisface:

$$\nabla^2 g(\vec{x}) = 0 \quad \forall \quad \vec{x} \in R^3 \quad (2.51)$$

Supongamos que elegimos una  $g(\vec{x})$  particular y por lo tanto fijamos una única solución de (2.50). Ahora consideramos una solución de la ecuación de

onda:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \chi(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} + \nabla^2 \chi = \square \chi(t, \vec{x}) = 0 \quad (2.52)$$

sujeta a las siguientes condiciones iniciales:

$$\chi(0, \vec{x}) = \hat{\chi}(t=0, \vec{x}) \quad , \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} \Big|_{t=0} = -A_0(t=0, \vec{x}) \quad (2.53)$$

La ecuación (2.52) combinada con (2.53) define un problema de valores iniciales que admite una única solución .

Sea ahora la función

$$f(t, \vec{x}) = A_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = -A^0 - \partial^0 \chi(t, \vec{x}) \quad (2.54)$$

esta  $f(t, \vec{x})$  por construcción satisface:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\alpha f(t, \vec{x}) &= \partial^\alpha \partial_\alpha A_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\partial^\alpha \partial_\alpha \chi) = \partial^\alpha \partial_\alpha A_0 \\ &= -4\pi \rho(t, \vec{x}) = 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

en donde hemos asumido que trabajamos en una región en donde  $\rho(t, \vec{x}) = 0$ .

Adicionalmente sobre la  $t = 0$  hipersuperficie de (2.54) tenemos:

$$f(t=0, \vec{x}) = A_0(t=0, \vec{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{c} \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \nabla_i A^i + \partial_i \partial^i \chi = 0 \quad (2.57)$$

Por lo tanto en una región libre de fuentes la única solución de (2.55) sujeta a (2.56) y (2.57) es dada por

$$f(t, \vec{x}) = A_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t} = 0 \quad (2.58)$$

Ahora consideramos la transformación  $A^\mu \mapsto A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  donde  $\chi$  es la solución de (2.52) sujeta a (2.53). Mostramos que el 4-vector potencial

$A' = A'^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  satisface la norma de Coulomb o norma de radiación. Por eso notamos que:

$$A'^0 = A^0 + \partial^0 \chi = -(A_0 + \partial_0 \chi) = 0, \quad \nabla_i A'^i = 0$$

como consecuencia de (2.54). Entonces hemos mostrado que comenzando de un 4-vector potencial  $A = A^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ,  $\partial_\mu A^\mu = 0$  y en la región donde  $c\rho = J^i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  hay un procedimiento matemático que nos permite elegir una  $\chi(t, \vec{x})$  particular como la solución del problema de valores iniciales (2.52-2.53) tal que el nuevo 4-vector potencial  $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$  satisface la norma de Coulomb o norma de radiación definida por (2.48).

Habíamos mencionado que gravedad linealizada y teoría de Maxwell tienen propiedades comunes. En la siguiente sección mostraremos que existe el análogo a la norma de Coulomb o norma de radiación en gravedad linealizada de Einstein.

## 2.3 La Norma de Radiación por Gravedad Linealizada

En esta sección mostramos que, y en estrecha analogía con electrodinámica de Maxwell, la condición  $\partial^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$  no especifica únicamente  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  (y como consecuencia las correspondientes  $\gamma_{\alpha\beta} = \bar{\gamma}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{\gamma}$ ).

Por eso suponemos que  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  obedece  $\partial^\alpha \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ , y sea que  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es un campo vectorial arbitrario sujeto a que satisface  $\partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha = 0$ .

Recordamos las leyes de transformación

$$\gamma \longmapsto \gamma' = \gamma + 2 \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} \quad (2.59)$$

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} \longmapsto \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \quad (2.60)$$

Consideramos (2.60) y calculamos

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\partial^\mu \xi_\mu) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\partial^\mu \xi_\nu) - \partial_\nu \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu + \partial_\nu \partial^\mu \xi_\mu - \partial_\nu \partial_\alpha \xi^\alpha = \partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

también satisface  $\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$  siempre y cuando  $\partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha = 0$ .

Restringimos la libertad en las componentes de  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  imponiendo el análogo de la norma de Coulomb o norma de radiación para la teoría de gravedad linealizada. La norma análoga en gravedad linealizada está especificada por [1]

$$\bar{\gamma}_{0\mu} = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, 3 \quad , \quad \bar{\gamma} = \eta^{\alpha\beta} \bar{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.61)$$

y en una región libre de fuentes se obtiene adicionalmente  $\bar{\gamma}_{00} = 0$ .

La norma descrita por (2.61) en el contexto de gravedad linealizada es llamada la *norma de radiación* en gravedad linealizada <sup>5</sup>. Enseguida describiremos los detalles matemáticos necesarios para probar que siempre podemos imponer la norma descrita por (2.61).

Comenzamos con  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  tal que  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  y sea que  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es un campo vectorial arbitrario y suave que obedece  $\partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha = 0$ . Obviamente existe un número infinito de tales campos, pero nos interesa elegir uno particular

$$\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad , \quad \partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha = 0$$

---

<sup>5</sup>La norma de radiación para gravedad linealizada es muy cercana a la noción de transverse traceless gauge que introducimos más adelante.

tal que

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

satisfaga:

$$\bar{\gamma}'(x^0, \vec{x}) = 0, \quad \bar{\gamma}'_{0\mu}(x^0, \vec{x}) = 0 \quad \forall \quad (x^0, \vec{x}) \in (R^4, g), \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (2.62)$$

Nuestra manera de hacer esto es una extensión del procedimiento que empleamos en la sección anterior para imponer la norma de Coulomb. Entonces empezamos con  $t = 0$  hipersuperficie y sea que  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x})$  satisfice  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ . Consideramos un campo vectorial  $\xi = \xi^\mu(x^0, \vec{x}) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que  $\partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha(x^0, \vec{x}) = 0$  e implementamos las transformaciones generadas por tal  $\xi$ . De las fórmulas (2.59, 2.60) tenemos:

$$\bar{\gamma}'(x^0, \vec{x}) = \bar{\gamma}(x^0, \vec{x}) - 2 \frac{\partial \xi^\mu(x^0, \vec{x})}{\partial x^\mu} \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) &= \bar{\gamma}_{\mu\nu}(x^0, \vec{x}) + \frac{\partial \xi_\mu(x^0, \vec{x})}{\partial x^\nu} + \\ &+ \frac{\partial \xi_\nu(x^0, \vec{x})}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha(x^0, \vec{x})}{\partial x^\alpha} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Evaluamos (2.63) y (2.64) en  $t = 0$  e imponemos:

$$\bar{\gamma}'(0, \vec{x}) = 0, \quad \bar{\gamma}'_{0\mu}(0, \vec{x}) = 0, \quad \mu = 1, 2, 3$$

Estas restricciones demandan:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\gamma}(0, \vec{x}) - 2 \frac{\partial \xi^\mu(0, \vec{x})}{\partial x^\mu} \implies \\ \bar{\gamma}(0, \vec{x}) &= 2 \left( \frac{\partial \xi^0(0, \vec{x})}{\partial x^0} + \nabla_i \xi^i(0, \vec{x}) \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{\gamma}_{0\mu}(0, \vec{x}) + \frac{\partial \xi_\mu(0, \vec{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^\mu} - \eta_{0\mu} \frac{\partial \xi^\alpha(0, \vec{x})}{\partial x^\alpha} \Rightarrow \\
-\bar{\gamma}_{0\mu}(0, \vec{x}) &= \frac{\partial \xi_\mu(0, \vec{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Estas relaciones restringen las 4 funciones  $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$  y sus derivadas en  $t = 0$  hipersuperficie.

Diferenciando (2.63) y (2.64) al respecto de  $x^0$  obtenemos:

$$\frac{\partial \bar{\gamma}'(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} = \frac{\partial \bar{\gamma}(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} - 2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \xi^\mu(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial \bar{\gamma}'_{0\mu}(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} = \frac{\partial \bar{\gamma}_{0\mu}(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial \xi_\mu(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \xi_0(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \tag{2.68}$$

y demandamos que en  $t = 0$  hipersuperficie

$$\frac{\partial \bar{\gamma}'(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \Big|_{t=0} = \frac{\partial \bar{\gamma}'_{0\mu}(x^0, \vec{x})}{\partial x^0} \Big|_{t=0} = 0$$

entonces obtenemos de (2.67) y (2.68):

$$\frac{\partial \bar{\gamma}(0, \vec{x})}{\partial x^0} = 2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \xi^\mu(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \tag{2.69}$$

$$-\frac{\partial \bar{\gamma}_{0\mu}(0, \vec{x})}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial \xi_\mu(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \tag{2.70}$$

Recordando que  $\partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha(x^0, \vec{x}) = 0$  la relación (2.69) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\gamma}(0, \vec{x})}{\partial x^0} &= 2 \frac{\partial}{\partial x^0} \left( \frac{\partial \xi^0(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) + 2 \nabla_i \left( \frac{\partial \xi^i(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \\
&= 2 \left[ \nabla^2 \xi^0(0, \vec{x}) + \nabla_i \left( \frac{\partial \xi^i(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \right] \\
&= 2 \left[ -\nabla^2 \xi_0(0, \vec{x}) + \nabla_i \left( \frac{\partial \xi^i(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.71}$$

similarmente (2.70) se convierte en:

$$-\frac{\partial \bar{\gamma}_{0\mu}(0, \vec{x})}{\partial x^0} = \nabla^2 \xi_\mu(0, \vec{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \quad (2.72)$$

En resumen la norma de radiación requiere que en  $t = 0$  las funciones  $\xi_0(0, \vec{x})$ ,  $\xi_\mu(0, \vec{x})$  y sus derivadas obedezcan:

$$2 \left[ -\frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^0} + \nabla_i \xi^i(0, \vec{x}) \right] = \bar{\gamma}(0, \vec{x}) \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial \xi_\mu(0, \vec{x})}{\partial x^0} + \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^\mu} = -\bar{\gamma}_{0\mu}(0, \vec{x}) \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (2.74)$$

$$2 \left[ -\nabla^2 \xi_0(0, \vec{x}) + \nabla_i \left( \frac{\partial \xi^i(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) \right] = \frac{\partial \bar{\gamma}(0, \vec{x})}{\partial x^0} \quad (2.75)$$

$$\nabla^2 \xi_\mu(0, \vec{x}) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^0} \right) = -\frac{\partial \bar{\gamma}_{0\mu}(0, \vec{x})}{\partial x^0} \quad (2.76)$$

Vemos al sistema (2.73 - 2.76) como un conjunto de 8 ecuaciones para

$$\xi_0(0, \vec{x}), \quad \frac{\partial \xi_0(0, \vec{x})}{\partial x^0}, \quad \xi_\mu(0, \vec{x}), \quad \frac{\partial \xi_\mu(0, \vec{x})}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 1, 2, 3.$$

Un análisis de la solubilidad del sistema (2.73 - 2.76) queda fuera del alcance de esta tesis [8]. Para las necesidades de esta tesis necesitamos imponer la norma de radiación para soluciones particulares de la teoría linealizada y esto lo hacemos a la marcha. Hasta el momento hemos discutido propiedades de gravedad linealizada y sus analogías con la teoría de Maxwell. Tenemos suficiente entendimiento para discutir una familia importante de soluciones de gravedad linealizada referida como ondas gravitacionales monocromáticas planas y la construcción de estas soluciones la hacemos en la sección próxima.



## 2.4 Ondas Gravitacionales en Gravedad Linealizada

Como es bien conocido las ecuaciones de Maxwell en el vacío y en ausencia de densidad de carga y densidad de corriente admiten una familia particular de soluciones referida como *Ondas Electromagnéticas Monocromáticas Planas* [4]. Para construir tales soluciones comenzamos de:

$$\nabla \cdot \vec{E}(t, \vec{x}) = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{B}(t, \vec{x}) = 0$$

$$\nabla \times \vec{B}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t}$$

Tomando el rotacional  $\nabla \times$  de la ley de Ampere y Faraday obtenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(t, \vec{x})}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{E}(t, \vec{x}) &\equiv \square \vec{E}(t, \vec{x}) = 0 \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(t, \vec{x})}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{B}(t, \vec{x}) &\equiv \square \vec{B}(t, \vec{x}) = 0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

Una familia de soluciones de estas ecuaciones es descrita por:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \quad , \quad \vec{B}(t, \vec{x}) = \vec{B}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t} \tag{2.78}$$

en donde  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  son constantes,  $\vec{k} = (k^x, k^y, k^z)$  y  $\omega$  constante real.

El requisito que (2.78) satisfaga (2.77) demanda que

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c} \tag{2.79}$$

mientras que la satisfacción de las ecuaciones de Maxwell demanda que:

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (2.80)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{|\vec{k}|} \implies \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.81)$$

Interpretamos (2.78) sujeta a (2.79 - 2.81) como ondas electromagnéticas monocromáticas planas de amplitudes  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  con  $\vec{k}$  la dirección de propagación y  $\omega$  la frecuencia cíclica.

Las condiciones (2.80) y (2.81) implican que tales ondas son transversas y tienen 2 grados de libertad que describen su polarización. (Se entiende que en (2.78) sólo la parte real del lado derecho es físicamente relevante).

Mostraremos ahora que las ecuaciones de Einstein linealizadas y en el vacío también admiten una familia de soluciones particulares referidas como *Ondas Gravitacionales Monocromáticas Planas* cuyas propiedades son similares a las de ondas electromagnéticas monocromáticas planas.

Para construir tales soluciones empezamos y sin pérdida de generalidad con las ecuaciones linealizadas en la forma:

$$\square \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.82)$$

y buscamos soluciones de la forma:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x^0, x^1, x^2, x^3) = re[ \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\mu x^\mu} ] = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu}^* e^{-ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.83)$$

en donde  $\varepsilon_{\mu\nu}$  son las componentes de un campo tensorial constante y

$$k_\mu x^\mu = k_0 x^0 + k_i x^i = -\frac{\omega}{c} ct + k_i x^i = -\omega t + k_i x^i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.84)$$

Actuando el operador  $\square$  a la familia (2.83) tenemos:

$$\begin{aligned} \square[re \varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\mu x^\mu}] &= \square\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^* e^{-ik_\alpha x^\alpha}\right] = \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(-k^\alpha k_\alpha) e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^*(-k^\alpha k_\alpha) e^{-ik_\alpha x^\alpha} = \\ &= (-k^\alpha k_\alpha) re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] \end{aligned}$$

Entonces la familia (2.83) satisface  $\square\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  sujeto a que:

$$n(k, k) := k^\alpha k_\alpha = -\frac{\omega^2}{c^2} + k_i k^i = 0 \Rightarrow |\vec{k}|^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.85)$$

Por otro lado la condición  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  combinada con (2.83) implica que:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu} k^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} - \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}^* k^\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha} = \\ &= \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu} k^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} + \left(\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu} k^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}\right)^* = \\ &= re[\varepsilon_{\mu\nu} k^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \end{aligned}$$

de la cual concluimos que la familia (2.83) satisface la condición  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  sujeto a que  $\varepsilon_{\mu\nu}$  y  $k^\mu$  satisfagan la restricción:

$$\varepsilon_{\mu\nu} k^\mu = 0 \iff \varepsilon_{\mu\nu}^* k^\mu = 0 \quad (2.86)$$

Entonces la familia escrita por (2.83) satisface las ecuaciones (2.82) sujeto a las restricciones (2.85) y (2.86).

La restricción (2.86) implica que el tensor simétrico  $\varepsilon_{\mu\nu}$  tiene 6 componentes independientes, pero en realidad no es el caso. Imponiendo la norma de radiación mostraremos que solo 2 componentes en  $\varepsilon_{\mu\nu}$  son independientes.

Para ver tal reducción mostraremos detalladamente la construcción de la

norma de radiación para la familia de soluciones escrita por (2.83) y sujeta a las restricciones (2.85) y (2.86).

Dada la solución  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  escrita por (2.83) con  $\varepsilon_{\mu\nu}$  restringido por (2.86) y  $n(k, k) = 0$  investigamos primero si existe  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\mu = 0 \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\bar{\gamma}}{2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} re[ \varepsilon^\mu_\mu e^{ik_\mu x^\mu} ] = \Phi(x^0, x^i) \quad (2.88)$$

Si tal  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  existe, las transformaciones

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} - \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

implican como consecuencia de (2.88) que:

$$\bar{\gamma}' = \bar{\gamma} - 2 \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\alpha} = \bar{\gamma} - \bar{\gamma} = 0$$

Mostramos en seguida que siempre podemos elegir un  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  que obedece (2.87, 2.88). Primero observamos que el campo escalar  $\Phi(x^0, x^i)$  definido por:

$$\Phi(x^0, x^i) = \frac{1}{2} re[ \varepsilon^\mu_\mu e^{ik_\mu x^\mu} ]$$

satisface:

$$\square \Phi(x^0, x^i) = \partial_\alpha \partial^\alpha [ \frac{1}{2} re \varepsilon^\mu_\mu e^{ik_\mu x^\mu} ] = \frac{1}{2} re [ \varepsilon^\mu_\mu e^{ik_\mu x^\mu} ] n(k, k) = 0 \quad (2.89)$$

y esta observación será útil más adelante.

La existencia de un campo vectorial  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  que satisface (2.87) y (2.88) es una consecuencia del siguiente teorema general:

**Teorema 2.1.** *Sea que  $\Phi(x^0, x^i)$  es un campo escalar tal que*

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \Phi(x^0, x^i) = 0 \quad , \quad (x^0, x^i) \in R^4 \quad (2.90)$$

Entonces el siguiente sistema de ecuaciones

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad \partial_\mu \xi^\mu = \Phi(x^0, x^i) \quad (2.91)$$

es soluble.

La demostración de este teorema es teórica <sup>6</sup> (ver [5], [8]).

Este teorema acoplado con (2.89) implica que siempre podemos escoger un campo vectorial  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  de tal manera que:

$$\bar{\gamma}' = \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$$

Con esta conclusión de aquí en adelante y sin pérdida de generalidad podemos asumir que las soluciones escritas por (2.83) están escritas en la norma en donde  $\bar{\gamma} = \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ . En esta norma tenemos las restricciones:

$$\eta^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon^\mu_\mu = 0 \quad , \quad k^\mu \varepsilon_{\mu\nu} = 0 \quad (2.92)$$

**Definición 2.1.** *Cualquier tensor  $\varepsilon = \varepsilon_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$  que satisface (2.92) es referido como un tensor de polarización.*

Las 5-condiciones (2.92) implican que 5-componentes del tensor de polarización  $\varepsilon_{\mu\nu}$  son independientes.

Enseguida probaremos que gracias a la libertad de norma sólo dos de estas cinco componentes son independientes. En orden a probar esta propiedad usamos el siguiente lema:

---

<sup>6</sup>Es importante señalar aquí que el teorema (2.1) es de validez general y durante su demostración en ningún punto hace uso de la naturaleza de las perturbaciones  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x)$ . También el campo escalar  $\Phi(x^0, x^i)$  en este teorema es arbitrario sujeto sólo a que satisface  $\partial_\alpha \partial^\alpha \Phi(x^0, x^i) = 0$ .

**Lema 2.1.** *Sea que  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  es un modo específico determinado por  $k = k_\alpha dx^\alpha$  y  $\varepsilon_{\mu\nu}$ , y sea el campo vectorial  $\xi = re[-i\varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  con  $\varepsilon^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  constantes arbitrarias. Bajo una transformación de norma generada por tal  $\xi$  las componentes del tensor de polarización  $\varepsilon_{\mu\nu}$  se transforman de acuerdo a:*

$$\varepsilon_{\mu\nu} \longmapsto \varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + k_\mu \varepsilon_\nu + k_\nu \varepsilon_\mu - \eta_{\mu\nu} \varepsilon^\alpha k_\alpha \quad (2.93)$$

**Demostración:** Recordamos que bajo la transformación de norma generada por un campo vectorial  $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \xi_\alpha \\ \bar{\gamma}' &= \bar{\gamma} - 2\partial^\alpha \xi_\alpha \end{aligned}$$

Consideramos estas transformaciones por un modo  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  con un  $k = k_\alpha dx^\alpha$  fijo. Por tal modo sea el campo vectorial:

$$\xi = re[-i\varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left[ \frac{-i}{2} \varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{i}{2} \varepsilon^{*\mu} e^{-ik_\alpha x^\alpha} \right] \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.94)$$

en donde asumimos (por el momento) que las amplitudes  $\varepsilon^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  en (2.94) son arbitrarias. Notamos que:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu &= \partial^\alpha \partial_\alpha \left[ \frac{-i}{2} \varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{i}{2} \varepsilon^{*\mu} e^{-ik_\alpha x^\alpha} \right] = \\ &= \frac{-i}{2} \varepsilon^\mu (-k^\alpha k_\alpha) e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{i}{2} \varepsilon^{*\mu} (-k^\alpha k_\alpha) e^{-ik_\alpha x^\alpha} = \\ &= (-k^\alpha k_\alpha) \left[ \frac{-i}{2} \varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{i}{2} \varepsilon^\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha} \right] = \\ &= re[i\varepsilon^\alpha e^{ik_\mu x^\mu}] (k^\alpha k_\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Esta propiedad de  $\xi = re[-i\varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  garantiza que si  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  satisface  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  entonces

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \quad (2.95)$$

también satisface  $\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$ .

Combinada (2.94) y (2.95) con  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha = \\ &= re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] + \partial_\mu re[-i\varepsilon_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha}] + \partial_\nu re[-i\varepsilon_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] - \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha re[-i\varepsilon^\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha}] = \\ &= re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] + re[\varepsilon_\nu k_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] + re[\varepsilon_\mu k_\nu e^{ik_\alpha x^\alpha}] - \\ &\quad - \eta_{\mu\nu} re[\varepsilon^\alpha k_\alpha e^{ik_\alpha x^\alpha}] = \\ &= re[(\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_\nu k_\mu + \varepsilon_\mu k_\nu - \eta_{\mu\nu} \varepsilon^\alpha k_\alpha) e^{ik_\alpha x^\alpha}] \end{aligned} \quad (2.96)$$

Por lo tanto las amplitudes  $\varepsilon'_{\mu\nu}$  de  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = re[\varepsilon'_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  satisfacen:

$$\varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + k_\nu \varepsilon_\mu + k_\mu \varepsilon_\nu - \eta_{\mu\nu} \varepsilon^\alpha k_\alpha \quad (2.97)$$

■

El lema que hemos mostrado es responsable por la propiedad de ondas gravitacionales monocromáticas planas que son ondas de helicidad dos. Para mostrar esta propiedad hacemos uso del teorema (2.1).

Si  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  es una solución de  $\square \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  tal que  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  pero  $\eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\mu\nu} = \bar{\gamma} \neq 0$ , el teorema (2.1) nos asegura que existe un  $\xi = \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$  tal que

$$a) \quad \partial^\mu \partial_\mu \xi^\alpha = 0 \quad , \quad b) \quad \partial_\alpha \xi^\alpha = \frac{\bar{\gamma}}{2}$$

asi que la transformación de norma generada por  $\xi$  nos lleva a

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha$$

que satisface:

$$\square \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0 \quad \text{y} \quad \bar{\gamma}' = \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$$

Combinamos ahora el teorema (2.1) y el lema (2.1). Comenzamos por lo tanto y sin pérdida de generalidad con

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad , \quad \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.98)$$

$$\eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.99)$$

e implementamos una transformación de norma generada por

$$\xi = re[-i\varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad , \quad \varepsilon^\mu = \varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3 \quad (2.100)$$

en donde  $(\varepsilon^0, \varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)$  son arbitrarias pero sujetas a satisfacer  $\varepsilon^\alpha k_\alpha = 0$ .

Del lema (2.1) las amplitudes  $\varepsilon'_{\mu\nu}$  del campo  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = re[\varepsilon'_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  satisfacen

$$\varepsilon'_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu} + k_\nu \varepsilon_\mu + k_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon^\alpha k_\alpha = \quad (2.101)$$

$$= \varepsilon_{\mu\nu} + k_\nu \varepsilon_\mu + k_\mu \varepsilon_\nu \Rightarrow$$

$$\eta^{\mu\nu} \varepsilon'_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} + k^\mu \varepsilon_\mu + k^\nu \varepsilon_\nu = 0 \quad (2.102)$$

Pero notemos que de los 4 grados de libertad que definen el campo

$\xi = re[-i\varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  hemos utilizado sólo uno a través de la retricción  $\varepsilon^\mu k_\mu = 0$ . De este modo nos quedamos con 3 grados de libertad y usamos estos grados para establecer

$$\varepsilon'_{0\mu} = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (2.103)$$

Las condiciones  $\varepsilon'_{0\mu} = 0$  demandan de acuerdo a (2.101) y (2.103) que los  $\varepsilon_\mu$  deben satisfacer:

$$\varepsilon_{\mu 0} = -k_0 \varepsilon_\mu - k_\mu \varepsilon_0 \quad , \quad \mu = 1, 2, 3 \quad (2.104)$$



Estas tres restricciones en combinación con  $\varepsilon^\mu k_\mu = 0$  definen un sistema algebraico que fija  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  por un  $k = k_\mu dx^\mu$  dado. Tal sistema siempre admite solución por lo que comenzando con  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  que satisface (2.98) y (2.99) siempre podemos escoger un generador de norma como (2.100) tal que en la nueva norma  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu}$  satisfacen:

$$\bar{\gamma}'_{0\mu} = 0 \quad , \quad \mu = 1, 2, 3 \quad , \quad \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0 \quad (2.105)$$

Ahora mostremos que mientras estamos en el vacío, podemos establecer que  $\bar{\gamma}'_{00} \equiv 0$ . Este bono adicional se obtiene como sigue.

Sabemos que

$$\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0 \quad \implies \quad \partial^0 \bar{\gamma}'_{0\nu} + \partial^i \bar{\gamma}'_{i\nu} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3$$

De esta relación tomamos  $\nu = 0$ , entonces

$$\partial^0 \bar{\gamma}'_{00} + \partial^i \bar{\gamma}'_{i0} = 0 \quad \implies \quad \partial^0 \bar{\gamma}'_{00} = 0 \quad \implies \quad \bar{\gamma}'_{00} = f(x^1, x^2, x^3)$$

Pero  $\square \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$  y eso implica que

$$\square \bar{\gamma}'_{00} = 0 \quad \implies \quad \nabla^2 \bar{\gamma}'_{00} = \nabla^2 f(x^1, x^2, x^3) = 0$$

Queremos una solución de esta ecuación que sea regular en todo  $(x^1, x^2, x^3) \in R^3$ . Pero como las únicas soluciones de  $\nabla^2 f(x^1, x^2, x^3) = 0$  que satisfacen esta restricción están dadas por  $f(x^1, x^2, x^3) = c$  con  $c = \text{constante}$  la cual tomaremos como cero. Entonces en el vacío siempre podemos tomar  $\bar{\gamma}'_{00} = 0$ . En conclusión, hemos mostrado que:

1. Comenzando de los modos  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  tales que:

$$a) \quad \square \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad b) \quad \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad c) \quad \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$$

mostramos que existe una transformación de norma generada por

$$\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = re[-i\varepsilon^\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \varepsilon^\mu k_\mu = 0$$

Los modos transformados  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = re[\varepsilon'_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$  satisfacen

$$\begin{aligned} a) \quad \square \bar{\gamma}'_{\mu\nu} &= 0, \quad b) \quad \partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0, \quad c) \quad \eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0 \\ d) \quad \varepsilon'_{0\mu} &= 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

2. En tal norma el tensor de polarización es puramente espacial, es decir tiene la forma:

$$\varepsilon'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon'_{11} & \varepsilon'_{12} & \varepsilon'_{13} \\ 0 & \varepsilon'_{21} & \varepsilon'_{22} & \varepsilon'_{23} \\ 0 & \varepsilon'_{31} & \varepsilon'_{32} & \varepsilon'_{33} \end{pmatrix}$$

Por otra parte  $\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$  implica que  $\partial^i \bar{\gamma}'_{ij} = 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Mientras la condición  $\eta^{\mu\nu} \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  se reduce a  $\bar{\gamma}'^k_k \equiv \eta^{ij} \bar{\gamma}'_{ij} = 0$  y  $\bar{\gamma}'_{ij} = \bar{\gamma}'_{ji}$ .

**Definición 2.2.** *Cualquier campo tensorial simétrico  $h = h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$*

*$\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$  que satisfice*

$$a) \quad h_{\mu 0} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$b) \quad \partial^i h_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$c) \quad h^k_k \equiv \sum_{k=1}^3 h^k_k = 0$$

*es llamado el campo tensorial transverso sin traza.*

Con esta definición hemos mostrado que en el contexto de gravedad linealizada de Einstein en el vacío, siempre hay una norma tal que dado algún

modo

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad , \quad k_\alpha k^\alpha = 0$$

podemos a través de una elección de norma transformar el modo en forma transversa sin traza, es decir

$$\bar{\gamma}_{0\mu} = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad , \quad \partial^i \bar{\gamma}_{ij} = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad \bar{\gamma}^k_k = \sum_{k=1}^3 \bar{\gamma}^k_k = 0$$

la cual implica que  $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$  es puramente espacial y

$\varepsilon^\mu_\mu = \varepsilon^j_j = \sum_{j=1}^3 \varepsilon^j_j = 0$ . En la siguiente sección discutiremos el significado físico de esta conclusión.

## 2.5 Sobre la Helicidad del “Gravitón”

Ahora consideramos una onda gravitacional monocromática plana que se propaga en la dirección  $x^3 = z$  es decir

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}] = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_0 x^0 + ik_z z}]$$

donde la condición  $k_\alpha k^\alpha = 0$  implica que:

$$\begin{aligned} k_\alpha k^\alpha = 0 &\Rightarrow \eta^{\mu\nu} k_\mu k_\nu = 0 \Rightarrow -k_0^2 + k_z^2 = 0 \Rightarrow \\ k_0 &= k_z = k \end{aligned}$$

Entonces representamos tal modo en la forma:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik(x^0 + x^3)}], \quad x^0 = ct, \quad z = x^3$$

En la norma transversa sin traza como hemos mostrado  $\varepsilon_{0\mu} = 0$ ,  $\mu = 1, 2, 3$ , mientras de la condición  $\partial^i \bar{\gamma}_{ij} = 0$  tenemos:

$$\partial^i \bar{\gamma}_{ij} = 0 \Rightarrow \varepsilon_{ij} k^j = 0 \Rightarrow \varepsilon_{i0} k^0 + \varepsilon_{i3} k^3 = 0$$

y debido a que  $\varepsilon_{i0} = 0$  obtenemos usando la simetría  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ :

$$\varepsilon_{i3} = \varepsilon_{3i} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

entonces el tensor de polarización se reduce a:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mientras la condición  $\bar{\gamma}_k^k = 0$  implica que:

$$\eta^{ij}\varepsilon_{ij} = \varepsilon^i_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$$

En resumen y después de este largo análisis concluimos que ondas gravitacionales monocromáticas planas tienen solo dos grados de libertad. Aún comenzando de un modo

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}], \quad k^\alpha k_\alpha = 0, \quad \varepsilon_{\mu\nu} k^\nu = 0$$

usando la libertad de norma a través de los campos vectoriales  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  hemos mostrado que siempre uno puede elegir un sistema de coordenadas en donde las componentes del tensor de polarización  $\varepsilon_{\mu\nu}$  son puramente espaciales. En caso que la onda se propaga en la dirección espacial definida por  $x^3 = z$  las componentes del tensor de polarización  $\varepsilon_{\mu\nu}$  que son distintas de cero son  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$  y  $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22}$ . Esta propiedad implica que ondas gravitacionales monocromáticas planas tienen helicidad dos.

Para ver esta propiedad supongamos que  $R = R^i_j$  es una matriz de rotación que deja la dirección de propagación invariante, es decir  $R$  representa una

rotación alrededor del eje  $z$ .

$$R^i_j = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.106)$$

entonces  $\varepsilon'_{\mu\nu} = R^i_\mu R^j_\nu \varepsilon_{ij}$   $\mu, \nu = 1, 2, 3$ . De esta transformación la combinación  $\varepsilon_\pm = \varepsilon_{11} \mp \varepsilon_{12} = \varepsilon_{11} \mp i\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{22} \mp i\varepsilon_{12}$  se transforma según:

$$\varepsilon'_\pm = e^{\pm 2i\theta} \varepsilon_\pm$$

la cual implica que  $\varepsilon_\pm$  tiene helicidad  $\pm 2$ .

Es instructivo por razones de comparación considerar la helicidad de ondas electromagnéticas monocromáticas planas. Debido a que las componentes  $A_\mu$  del 4-vector potencial  $A$  son análogas de las componentes  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  empezamos con las ecuaciones de Maxwell dadas por (2.46) en el vacío, es decir

$$\partial^\alpha \partial_\alpha A_\beta = 0 \quad , \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0 \quad (2.107)$$

y sea la familia de soluciones

$$A_\mu(t, \vec{x}) = re[\varepsilon_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] = \frac{1}{2}\varepsilon_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha} + \frac{1}{2}\varepsilon_\mu^* e^{-ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.108)$$

en donde:  $k^\alpha k_\alpha = 0$ ,  $k^\mu \varepsilon_\mu = 0$ . Como en el caso de ondas gravitacionales monocromáticas planas parece que las amplitudes  $\varepsilon_\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  en (2.108) sólo 3 son independientes. Pero como hemos discutido la norma de Lorentz no fija únicamente el 4-vector potencial. Usando tal libertad mostramos que sólo dos amplitudes son relevantes. Para ver esto sea el modo específico:

$$A_\mu(t, \vec{x}) = re[\varepsilon_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}], \quad k^\alpha k_\alpha = 0, \quad k^\mu \varepsilon_\mu = 0 \quad (2.109)$$

y sea la función:

$$\chi(t, \vec{x}) = re[i\varepsilon e^{ik_\alpha x^\alpha}] = \frac{i}{2}\varepsilon e^{ik_\alpha x^\alpha} - \frac{i}{2}\varepsilon^* e^{-ik_\alpha x^\alpha} \quad (2.110)$$

la cual satisface  $\partial^\alpha \partial_\alpha \chi(t, \vec{x}) = 0$ . Como consecuencia

$$A'_\mu(t, \vec{x}) = A_\mu(t, \vec{x}) + \frac{\partial \chi(t, \vec{x})}{\partial x^\mu} = re[(\varepsilon_\mu - \varepsilon k_\mu) e^{ik_\alpha x^\alpha}] = re[\varepsilon'_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad (2.111)$$

también satisface (2.107).

Consideramos un modo  $A_\mu(t, \vec{x})$  propagado en la dirección  $x^3 = z$ . De la condición  $k_\mu k^\mu = 0$  tenemos que

$$-(k^0)^2 + (k^z)^2 = 0 \implies k^0 = k^z = k > 0$$

mientras que la condición  $\varepsilon_\mu k^\mu = 0$  implica que

$$\varepsilon_0 k^0 + \varepsilon_3 k^3 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_3)k = 0 \implies \varepsilon_0 = -\varepsilon_3$$

Sea ahora la transformación de norma generada por (2.110). Entonces  $\varepsilon'_\mu = \varepsilon_\mu - \varepsilon k_\mu$  implica que

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1, \quad \varepsilon'_2 = \varepsilon_2 \quad \text{y} \quad \varepsilon'_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon k_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon k$$

Ahora elegimos  $\varepsilon$  de tal manera que  $\varepsilon'_3 = 0$ , es decir  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_3}{k}$ . Pero debido a que

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 - \varepsilon k_0 = -\varepsilon_3 - \varepsilon k = -(\varepsilon_3 + \varepsilon k) = 0$$

Entonces en la nueva norma sólo  $\varepsilon'_1$  y  $\varepsilon'_2$  en (2.111) son distintos de cero.

Considerando una matriz de rotación como (2.106) vemos ahora que los modos  $\epsilon_\pm = e_1 \mp i e_2$  se transforman según

$$\epsilon'_\pm = e^{\pm i\theta} \epsilon_\pm$$

y esta propiedad implica que ondas electromagnéticas monocromáticas planas tienen helicidad  $\pm 1$  en contraste con ondas gravitacionales monocromáticas planas que tienen helicidad  $\pm 2$ .

## 2.6 Energía y Momento Asociado con Ondas Gravitacionales

Aún el análisis hasta este momento ha sido paralelo de la teoría de Maxwell, llegamos a un punto en donde las teorías se separan. Este punto está relacionado con la descripción de energía y momento asociado con ondas gravitacionales monocromáticas planas. Específicamente nos preguntamos ¿llevan tales ondas energía y momento? si llevan ¿cómo se define el flujo de tales cantidades?. Si consideramos estas preguntas por la teoría de Maxwell las respuestas son bien conocidas.

Como sabemos la teoría de Maxwell asigna por una solución  $(\vec{E}, \vec{B})$  la densidad de energía  $\rho$  y el flujo de energía  $\vec{S}$  de esta solución a través de

$$\rho = \frac{\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}}{8\pi} \quad , \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \quad (2.112)$$

en donde  $\vec{S}$  es conocido como el vector de Poynting [4].

Además en el vacío (2.112) satisface la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = 0 \quad (2.113)$$

Desafortunadamente, la situación para la teoría de gravedad linealizada (y más difícil para la teoría de relatividad general) la respuesta de la realidad de ondas gravitacionales tiene una historia larga. Sin embargo hoy en día se acepta que ondas gravitacionales llevan energía y momento (vease discusión

en [1], [3]). En el contenido de la teoría linealizada y al respecto de un sistema inercial cercano el tensor de energía-momentum  $T_{\mu\nu}^W$  asociado con ondas gravitacionales monocromáticas planas tiene la forma [6], [7]:

$$T_{\mu\nu}^W = \frac{k}{32\pi} \left\langle \gamma_{\alpha\beta,\mu} \gamma^{\alpha\beta}_{,\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{,\mu} \gamma_{,\nu} - \gamma^{\alpha\beta}_{,\beta} \gamma_{\alpha\mu,\nu} - \gamma^{\alpha\beta}_{,\beta} \gamma_{\alpha\nu,\mu} \right\rangle \quad (2.114)$$

donde  $k = \frac{c^4}{G}$  y  $\langle \dots \rangle$  denota un promedio de varias longitudes de onda. Esta expresión para  $T_{\mu\nu}^W$  es válida para perturbaciones arbitrarias, es decir

$$\gamma \neq 0 \quad \text{y} \quad \partial^\alpha \gamma_{\alpha\beta} \neq 0 \quad (2.115)$$

Para el caso de la norma de radiación, (2.114) se reduce a:

$$T_{\mu\nu}^W = \frac{k}{32\pi} \langle \bar{\gamma}_{\alpha\beta,\mu} \bar{\gamma}^{\alpha\beta}_{,\nu} \rangle \quad (2.116)$$

En esta tesis aceptamos sin demostración que  $T_{\mu\nu}^W$  escrito por (2.114) ó (2.116) describe correctamente la energía y momento asociado con ondas gravitacionales.

Por una onda monocromática plana propagada en la dirección  $x^3 = z$  es conveniente introducir los dos tensores de polarización unitarios  $e^+$ ,  $e^\times$  cuyas componentes son:

$$e_{xx}^+ = -e_{yy}^+ = 1, \quad e_{xy}^\times = e_{yx}^\times = 1, \quad x = x^1, \quad y = x^2 \quad (2.117)$$

entonces representamos  $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$  en la forma

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\alpha\beta} &= e_{\alpha\beta}^+ h_+ + e_{\alpha\beta}^\times h_\times = \\ &= e_{\alpha\beta}^+ \hat{h}_+ e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} + e_{\alpha\beta}^\times \hat{h}_\times e^{-i\omega(t-\frac{z}{c})} \end{aligned} \quad (2.118)$$

la cual es equivalente a

$$\bar{\gamma}_{11} = \bar{\gamma}_{xx} = h_+, \quad \bar{\gamma}_{22} = \bar{\gamma}_{yy} = -h_+, \quad \bar{\gamma}_{12} = \bar{\gamma}_{21} = h_\times \quad (2.119)$$



Por tal modo tenemos de (2.116):

$$\begin{aligned}
 T_{00}^W &= \frac{k}{32\pi} \langle \bar{\gamma}_{11,0} \bar{\gamma}_{,0}^{11} + \bar{\gamma}_{22,0} \bar{\gamma}_{,0}^{22} + 2\bar{\gamma}_{12,0} \bar{\gamma}_{,0}^{12} \rangle = \\
 &= \frac{k}{16\pi} \frac{1}{c^2} \langle (\dot{h}_+)^2 + (\dot{h}_\times)^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned}
 T_{0z}^W &= \frac{k}{32\pi} \langle \bar{\gamma}_{11,0} \bar{\gamma}_{,z}^{11} + \bar{\gamma}_{22,0} \bar{\gamma}_{,z}^{22} + 2\bar{\gamma}_{12,0} \bar{\gamma}_{,z}^{12} \rangle = \\
 &= c T_{00}^W
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

$$T_{zz}^W = c^2 T_{00}^W \tag{2.122}$$

Usaremos la expresión (2.116) más adelante.

## Capítulo 3

# Generación de Radiación Gravitacional

En el capítulo anterior hemos mostrado que gravedad linealizada admite soluciones que representan ondas gravitacionales monocromáticas planas. En la teoría de Maxwell sabemos que ondas electromagnéticas están generadas por fuentes  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  y poseen momento multipolar que varía en el tiempo [4]. En esta sección vemos que tal propiedad es válida también para la teoría linealizada de gravitación. Más precisamente en este capítulo veremos como generar radiación gravitacional y analizamos la estructura de los campos  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  generados por las fuentes  $T_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  conocidas a priori. Para ello primero veremos como se genera radiación electromagnética por un par  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  dadas. En la sección (3.2) y de manera análoga de la teoría de Maxwell estudiamos la generación de ondas gravitacionales. Y en la sección (3.3) comparamos similitudes y diferencias entre las dos teorías.

### 3.1 Generación de Radiación Electromagnética

Como hemos visto las ecuaciones de Maxwell en la norma de Lorentz toman la forma:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \Phi(\vec{x}, t) = -4\pi\rho(\vec{x}, t) \quad (3.1)$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}, t) \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.3)$$

en donde  $\Phi(\vec{x}, t)$  y  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  son el potencial eléctrico y potencial vectorial respectivamente. Los campos físicos  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  están dados por:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \nabla \Phi(\vec{x}, t) \quad , \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) \quad (3.4)$$

y por construcción son *invariantes de norma*.

Enseguida analizamos la estructura de los campos  $(\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t))$  generados por un par  $\rho(\vec{x}, t), \vec{J}(\vec{x}, t)$  dadas. Por tal análisis asumimos que  $\rho(\vec{x}, t)$  y  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  están localizadas en alguna región espacial denotada por  $V$  de volumen característico  $d^3$ ,  $d > 0$  y  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  son suficientemente suaves de manera que admiten representación de Fourier:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int e^{-i\omega t} \rho(\vec{x}, \omega) d\omega \quad , \quad \vec{J}(\vec{x}, t) = \int e^{-i\omega t} \vec{J}(\vec{x}, \omega) d\omega \quad (3.5)$$

con

$$\rho(\vec{x}, \omega) = \int e^{i\omega t} \rho(\vec{x}, t) dt \quad , \quad \vec{J}(\vec{x}, \omega) = \int e^{i\omega t} \vec{J}(\vec{x}, t) dt \quad (3.6)$$

Como es bien conocido las soluciones  $\Phi(\vec{x}, t)$  y  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  de (3.1, 3.2) en ausencia de radiación entrante están dados por (vease [4]):

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \rho(\vec{x}', t') d^3 \vec{x}' dt' \quad (3.7)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{J}(\vec{x}', t') d^3 \vec{x}' dt' \quad (3.8)$$

Sea la representación de Fourier de  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ :

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \int e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, \omega) d\omega$$

Combinando esta representación con (3.5), obtenemos de (3.8)

$$\int e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, \omega) d\omega = \frac{1}{c} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \left[ \int e^{-i\omega t'} \vec{J}(\vec{x}', \omega) d\omega \right] d^3 \vec{x}' dt'$$

Intercambiando el orden de integración al lado derecho obtenemos:

$$\begin{aligned} \int e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, \omega) d\omega &= \frac{1}{c} \int \left[ \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i\omega t'} \vec{J}(\vec{x}', \omega) d^3 \vec{x}' dt' \right] d\omega = \\ &= \frac{1}{c} \int e^{-i\omega t} \left[ \int_V \frac{e^{i\omega \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{J}(\vec{x}', \omega) d^3 \vec{x}' \right] d\omega \end{aligned}$$

de la cual concluimos:

$$e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, \omega) = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \int_V \frac{e^{i\omega \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{J}(\vec{x}', \omega) d^3 \vec{x}' \quad (3.9)$$

es decir, cada modo  $e^{-i\omega t} \vec{J}(\vec{x}, \omega)$  en la expansión de Fourier (3.5) de  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  genera su propio potencial vectorial

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}, t) := e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x}, \omega)$$

dado por (3.9). De manera análoga para  $\Phi(\vec{x}, t)$  obtenemos:

$$\Phi_\omega(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \Phi(\vec{x}, \omega) = e^{-i\omega t} \int_V \frac{e^{i\omega \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}}}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \rho(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' \quad (3.10)$$

Sea ahora que restringimos nuestra atención a los puntos  $(\vec{x}, t)$  con  $|\vec{x}| = r > d$ , en donde  $d$  representa la escala característica de la región  $V$  donde se encuentran las fuentes. Para tal  $\vec{x}$  tenemos las siguientes expansiones:

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \quad (3.11)$$

$$|\vec{x}-\vec{x}'| = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (3.12)$$

en donde  $\hat{n}$  representa el vector unitario del origen del sistema de coordenadas tomándolo al interior de  $V$  del punto de observación. Combinando las ecuaciones (3.11) y (3.12) con (3.9) vemos que para  $|\vec{x}|$  tales que  $|\vec{x}| = r \gg d$ ,  $\vec{A}_\omega(\vec{x}, t)$  y  $\Phi_\omega(\vec{x}, t)$  toman la forma

$$\vec{A}_\omega(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{c r} \int_V e^{-ik \vec{n} \cdot \vec{x}'} \vec{J}(\vec{x}') d^3\vec{x}' \quad (3.13)$$

$$\Phi_\omega(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \int_V e^{-ik \vec{n} \cdot \vec{x}'} \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' \quad (3.14)$$

La parte real de (3.13, 3.14) representan ondas monocromáticas esféricas que se propagan en la dirección  $\vec{k} = k\vec{n}$  con longitud  $\lambda = 2\pi/k$ .

Desafortunadamente debido a las oscilaciones del término  $e^{-ik \vec{n} \cdot \vec{x}'}$  en la integral de (3.13, 3.14) no es tan fácil estudiar la amplitud de estas ondas. Pero bajo restricciones sobre  $\omega$  y  $d$  es posible dar una buena estimación de estas amplitudes.

Para ver claramente el problema restringimos nuestra atención a fuentes

monocromáticas es decir  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  tienen la forma:

$$\rho(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \rho(\vec{x}) \quad , \quad \vec{J}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \vec{J}(\vec{x}), \quad \omega \neq 0 \quad (3.15)$$

y sea  $d$  la escala característica en donde se definen  $\rho(\vec{x})$  y  $\vec{J}(\vec{x})$ .

Asumimos que la frecuencia  $\omega$  para tales fuentes tienen la propiedad que la longitud  $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega$  satisface  $\lambda \gg d$ .

Para tales fuentes obtenemos de (3.13) y (3.14)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{c r} \sum_{n=0}^N \frac{(-ik)^n}{n!} \int_V \vec{J}(\vec{x}') (\vec{n} \cdot \vec{x}')^n d^3 \vec{x}' \quad (3.16)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \sum_{n=0}^N \frac{(-ik)^n}{n!} \int_V \rho(\vec{x}') (\vec{n} \cdot \vec{x}')^n d^3 \vec{x}' \quad (3.17)$$

en donde debido a que tenemos solo una frecuencia escribimos simplemente  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ ,  $\Phi(\vec{x}, t)$  en lugar de  $\vec{A}_\omega(\vec{x}, t)$ ,  $\Phi_\omega(\vec{x}, t)$ . Adicionalmente debido a que

$$|k \vec{n} \cdot \vec{x}'|^n \simeq \left| \frac{d}{\lambda} \right|^n \ll 1$$

la contribución dominante en (3.16) respectivamente en (3.17) proviene del primer término en  $\int \vec{J}(\vec{x}') (\vec{n} \cdot \vec{x}')^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , que es distinto de cero. Es natural restringir nuestra atención a fuentes monocromáticas que tienen la propiedad que

$$\int \vec{J}(\vec{x}') d^3 \vec{x}' \neq 0 \quad , \quad \int \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}' \neq 0$$

Para tales fuentes y la zona radiactiva definida por los  $\vec{x}$  que satisfacen:

$$|\vec{x}| = r \gg \lambda \gg d$$

los campos  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  ,  $\Phi(\vec{x}, t)$  se aproximan por:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{c r} \int_V \vec{J}(\vec{x}') d^3\vec{x}' \quad (3.18)$$

$$\Phi(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \int_V \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' \quad (3.19)$$

Para construir  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  en la zona radiactiva el siguiente lema es importante.

**Lema 3.1.** *Sea que en una región el potencial vectorial tiene la forma*

*$\vec{A}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x})$  y en tal región  $\rho(\vec{x}, t) = \vec{J}(\vec{x}, t) = 0$ , entonces el campo eléctrico  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  está dado por:*

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{ic}{\omega} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t)$$

**Demostración:** La suposición  $\vec{A}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \vec{A}(\vec{x})$  combinada con  $\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t)$  implica que  $\vec{B}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \nabla \times \vec{A}(\vec{x})$ . Por tal  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  la ley de Ampere implica que:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} = \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) \implies \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} = e^{-i\omega t} \nabla \times \vec{B}(\vec{x})$$

y proponemos como solución  $\vec{E}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{x})$  en donde,  $\vec{E}(\vec{x})$  está sujeto a

$$-\frac{i\omega}{c} \vec{E}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) \implies \vec{E}(\vec{x}) = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x})$$

Entonces concluimos que

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{x}) = e^{-i\omega t} \left[ \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}) \right] = \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t)$$

■

Este lema es útil para la contribución de  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  y  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  en la zona radiativa y nos permite restringir nuestra atención sólo al análisis de la estructura del vector potencial

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{c r} \int_V \vec{J}(\vec{x}') d^3\vec{x}' \quad , \quad |\vec{x}| \gg \lambda \gg d$$

Aún el lado derecho involucra  $\vec{J}(\vec{x})$  en realidad la integral es nada más el momento dipolar eléctrico de la fuente.

Para ver porque es esto recordamos que  $\rho(\vec{x})$  y  $\vec{J}(\vec{x})$  se define por:  $\rho(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \rho(\vec{x})$ ,  $\vec{J}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} \vec{J}(\vec{x})$  y satisfacen la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) = 0 \implies -i\omega \rho(\vec{x}) + \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}) = 0$$

Por otro lado para funciones  $f(\vec{x})$ ,  $g(\vec{x})$  suficientemente suaves y una  $\vec{J}(\vec{x})$  con  $\nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}) \neq 0$  tenemos la identidad:

$$\int_V \left[ f J^\mu \frac{\partial g}{\partial x^\mu} + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} J^\mu g \right] d^3\vec{x} = - \int_V f \nabla \cdot \vec{J} g d^3\vec{x} + \oint f J^\mu g \cdot d\vec{S}$$

Eligiendo  $f = x^i$ ,  $g = 1$  e ignorando el término de frontera obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_V J^i(\vec{x}) d^3\vec{x} = - \int_V x^i (\nabla \cdot \vec{J}) d^3\vec{x}$$

de la cual concluimos

$$\int_V \vec{J}(\vec{x}) d^3\vec{x} = - \int_V \vec{x} \nabla \cdot \vec{J}(\vec{x}) d^3\vec{x} = -i\omega \int_V \vec{x} \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = -i\omega \vec{P} \quad (3.20)$$

en donde  $\vec{P}$  es el momento dipolar eléctrico asociado con  $\rho(\vec{x})$ .

Con estos resultados el potencial vectorial  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  en la zona radiativa toma la forma:

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{c r} (-i\omega) \vec{P} = -ik \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \vec{P} \quad (3.21)$$



Los campos resultantes  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  y  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  en  $|\vec{x}| \gg \lambda \gg d$  se calculan de la siguiente manera:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{x}, t) = -\nabla \times \left[ ik \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \vec{P} \right]$$

y usando la identidad:

$$\nabla \times (f\vec{a}) = \nabla f \times \vec{a} + f \nabla \times \vec{a}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{x}, t) &= -(ik)^2 \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} (\nabla r \times \vec{P}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ &= k^2 \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} (\vec{n} \times \vec{P}) \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para construir el campo  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  aplicamos el lema (3.1) y tenemos que:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{i}{k} \nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{i}{k} \nabla \times \left[ k^2 \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} (\vec{n} \times \vec{P}) \right] \\ &= k^2 \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \left[ (\vec{n} \times \vec{P}) \times \vec{n} \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Usando (3.22) y (3.23) evaluamos enseguida el flujo de Poynting

$$\vec{S}(\vec{x}, t) = \frac{c}{4\pi} \vec{E}(\vec{x}, t) \times \vec{B}(\vec{x}, t)$$

Pero debido a la fase  $e^{-i\omega t}$ ,  $\vec{S}(\vec{x}, t)$  está oscilando rápidamente en el tiempo.

Por eso calculamos el flujo promedio de Poynting a través de:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{S}(\vec{x}, t) dt \quad , \quad T = \frac{2\pi n}{\omega} \quad (3.24)$$

en donde  $n$  es un número entero positivo grande. Tomando las partes reales de (3.22) y (3.23) tenemos

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = re \left[ \frac{k^2}{r} (\vec{n} \times \vec{P}) \times \vec{n} e^{i\hat{A}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}_0 e^{i\hat{A}} + \vec{E}_0 e^{-i\hat{A}} \right] \quad (3.25)$$

$$\vec{E}_0 = \frac{k^2}{r} (\vec{n} \times \vec{P}) \times \vec{n} \quad , \quad \hat{A} = -\omega t + kr$$

y similarmente para  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  tenemos:

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{B}_0 e^{i\hat{A}} + \vec{B}_0 e^{-i\hat{A}} \right] \quad (3.26)$$

$$\vec{B}_0 = \frac{k^2}{r} (\vec{n} \times \vec{P})$$

Usando (3.25) y (3.26) en  $\langle \vec{S} \rangle$  notamos que las partes que contienen contribución de las fases  $e^{i\hat{A}}$ ,  $e^{-i\hat{A}}$  dan contribución cero y finalmente

$$\begin{aligned} \langle \vec{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi} (\vec{E}_0 \times \vec{B}_0) = \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \left[ (\vec{n} \times \vec{P}) \times \vec{n} \right] \times \left[ \vec{n} \times \vec{P} \right] \\ &= -\frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \left[ \vec{n} \times \vec{P} \right] \times \left[ (\vec{n} \times \vec{P}) \times \vec{n} \right] \\ &= -\frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \left[ (\vec{n} \times \vec{P}) \cdot \vec{n} - [(\vec{n} \times \vec{P}) \cdot (\vec{n} \times \vec{P})] \vec{n} \right] \\ &= \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} \left[ (\vec{n} \times \vec{P}) \cdot (\vec{n} \times \vec{P}) \right] \vec{n} \\ &= \frac{c}{8\pi} \frac{k^4}{r^2} P^2 \sin^2 \theta \vec{n} \end{aligned} \quad (3.27)$$

en donde  $\theta$  es el ángulo que forma el vector  $\vec{P}$  y la dirección de observación:

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{\vec{x}}{r}$$

De la fórmula(3.27) concluimos que

1. Los campos (3.22) y (3.23) son radiativos es decir, transportan flujo de energía hacia el exterior.
2. El flujo de energía decae como  $r^{-2}$  en contraste con los campos estáticos en donde el decaimiento es más rápido.
3. El flujo de energía no es isotrópico,  $\langle \vec{S} \rangle = 0$  para  $\theta = 0$  ó  $\theta = \pi$  y el máximo flujo ocurre a  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .
4. Integrando  $\langle \vec{S} \rangle$  sobre de una esfera grande de radio  $r \gg \lambda \gg d$  obtenemos la potencia total emitida por la fuente

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{dE}{dt} = \oint \langle \vec{S} \rangle \cdot \hat{n} r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\
 &= \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{P}|^2 \oint \sin^4\theta d\theta d\varphi \\
 &= \frac{c}{3\pi} k^4 |\vec{P}|^2 = \frac{\omega^4}{3c^3} |\vec{P}|^2 \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

5. La distribución angular de radiación emitida es decir,  $dP/d\Omega$ ,  
 $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$  está dada por:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{P}|^2 \sin^2\theta \quad (3.29)$$

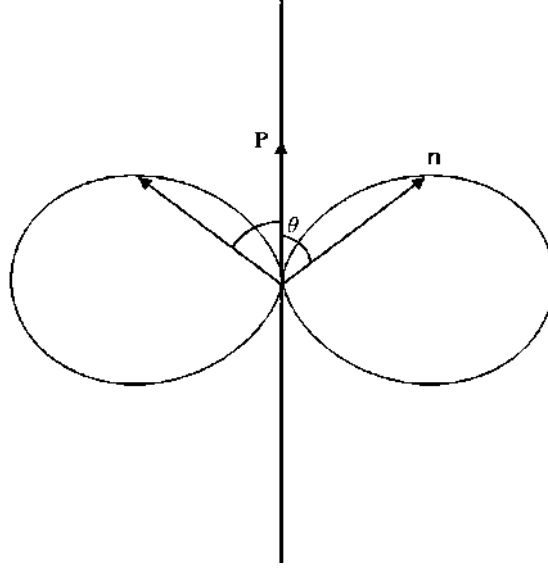


Figura 3.1: Distribución angular de radiación dipolar eléctrica. En esta figura  $\vec{P}$  representa el momento dipolar eléctrico asociado con la distribución de carga  $\rho(\vec{x})$  y  $\hat{n}$  representa la dirección de observación.

## 3.2 Generación de Radiación Gravitacional

En la sección anterior hemos visto que por las fuentes  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  restringidas a una región espacial finita los campos electromagnéticos  $\vec{E}(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  en la zona radiativa decaen como  $|\vec{x}|^{-1}$  y como consecuencia de tal decaimiento energía de las fuentes es transportada en forma de ondas electromagnéticas. En esta sección mostramos que el mismo fenómeno ocurre para la teoría linealizada de la Relatividad General.

Recordamos que en la aproximación lineal de Relatividad General las ecuaciones relevantes están descritas por (2.29):

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\nu} = -2\hat{k} T_{\mu\nu} \quad , \quad \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (3.30)$$

donde recordamos nuestras convenciones

$$\partial^\alpha \partial_\alpha := \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta = -\frac{\partial^2}{\partial x^{02}} + \nabla^2 = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2$$

De (3.30) se ve que cada componente  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$  satisface la ecuación de onda inhomogénea (compare con (3.1 - 3.2)). Aplicando el mismo razonamiento que hemos usado para la teoría electromagnética tenemos que la solución de  $\partial^\alpha \partial_\alpha \bar{\gamma}_{\mu\nu} = -2\hat{k}T_{\mu\nu}$  en ausencia de radiación entrante puede ser descrita en términos de la función de Green retardada:

$$G^r(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (3.31)$$

es decir

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) &= \frac{2\hat{k}}{4\pi} \int G^r(\vec{x}, t; \vec{x}', t') T_{\mu\nu}(\vec{x}', t') d^3\vec{x}' dt' \\ &= \frac{\hat{k}}{2\pi} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu}(\vec{x}', t') d^3\vec{x}' dt' \end{aligned} \quad (3.32)$$

o haciendo uso de la función delta la solución puede ser escrita en forma de una integral retardada:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{\hat{k}}{2\pi} \int_V \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}', t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' \quad (3.33)$$

en donde  $V$  es la región espacial en donde  $T_{\mu\nu}$  es distinto de cero.

Como para el caso de electromagnetismo asumimos que la fuente ocupa una región espacial  $V$  finita y que  $T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = T_{\mu\nu}(\vec{x}, x^0)$  admite representación de Fourier en la variable  $t$  de nuestro sistema de referencia inercial global del espaciotiempo de Minkowski, es decir

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) d\omega \Rightarrow \quad (3.34)$$

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) dt \quad (3.35)$$

es la función inversa.

Sea la representación de Fourier de los campos  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$ :

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) d\omega \quad (3.36)$$

combinando esta representación con (3.32) obtenemos de (3.34)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) d\omega &= \frac{2\hat{k}}{4\pi} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t'} T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) d\omega \right] d^3\vec{x}' dt' \end{aligned}$$

intercambiando el orden de integración al lado derecho obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) d\omega &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\hat{k}}{4\pi} \int \frac{\delta(t - t' - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} e^{-i\omega t'} T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' dt' d\omega \\ &= \frac{2\hat{k}}{4\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_V \frac{e^{-i\omega(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c})}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' d\omega \end{aligned}$$

de la cual concluimos que:

$$e^{-i\omega t} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) = \frac{\hat{k}}{2\pi} e^{-i\omega t} \int_V \frac{e^{i\omega \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}}}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' \quad (3.37)$$

Tratamos el lado derecho de esta representación de la misma manera que tratamos las integrales en la teoría electromagnética (compare (3.37) con (3.9) y (3.10)).

Sea que  $d$  representa la escala en donde  $T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega)$  es distinta de cero y sea que  $\frac{\omega}{c} = |\vec{k}| = k$  y asumimos que  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega} \gg d$ . Tomando en cuenta que  $c = \lambda\nu$  tenemos la estimación donde  $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{10^{10} \text{ cm/seg}}{\nu \text{ sec}^{-1}} = \frac{10^{10}}{\nu} \text{ cm}$ .

Si  $\nu = 10^8 \text{sec}^{-1}$  implica que  $\lambda = 10^2 \text{cm}$  y la restricción  $\lambda \gg d$  implica que tenemos una fuente que no es de interés en astrofísica. Para fuentes astrofísicas uno espera que la zona radiativa sea afuera de la fuente. Si  $\nu = 10^3 \text{sec}^{-1}$  implica que  $\lambda = 10^7 \text{cm}$  y hay fuentes compactas con tamaño  $d < 10^7 \text{cm}$ . Entonces y en contraste de ondas electromagnéticas ondas gravitacionales son de muy bajas frecuencias.

Enseguida consideramos una fuente en donde el tensor de energía-momentum  $T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega)$  es un tensor monocromático es decir (compare con (3.15)):

$$T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) = e^{-i\omega t} T_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) \quad , \quad \omega > 0$$

y sea  $|\vec{x}| = r \gg d$ . Para tal  $\vec{x}$  tenemos las siguientes expansiones:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + O\left(\frac{1}{r^5}\right) \quad (3.38)$$

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{n} \cdot \vec{x}' + O\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad \vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (3.39)$$

entonces  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  toma la forma

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) &= e^{-i\omega t} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) \\ &= \frac{\hat{k}}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \int_V T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde restringimos nuestro análisis a los campos en la zona radiativa definida por los  $\vec{x}$  que satisfacen:  $|\vec{x}| = r \gg \lambda \gg d$  y entendemos que solo la parte real de (3.40) es relevante.

La representación (3.40) nos da todas las componentes de  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  en términos de integrales que involucran la fuente  $T_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega)$ . Sin embargo gracias a la ley de conservación:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad , \quad T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

solo necesitamos evaluar la componente espacial en (3.40).

Para el tensor  $T_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  monocromático tenemos:

$$T^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = re[ e^{-i\omega t} T^{\mu\nu}(\vec{x}, \omega) ]$$

y de la ley de conservación  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$  tenemos:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu}(\vec{x}, t) = 0 \Rightarrow \partial_\mu [e^{-i\omega t} T^{\mu\nu}(\vec{x}, \omega)] = 0$$

$$\partial_0 [e^{-i\omega t} T^{0\nu}(\vec{x}, \omega)] + \partial_j [e^{-i\omega t} T^{j\nu}(\vec{x}, \omega)] = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\partial_0 [e^{-\frac{i\omega}{c} x^0} T^{0\nu}(\vec{x}, \omega)] + e^{-i\omega t} \partial_j T^{j\nu}(\vec{x}, \omega) = 0$$

$$-\frac{i\omega}{c} e^{-\frac{i\omega}{c} x^0} T^{0\nu}(\vec{x}, \omega) + e^{-i\omega t} \partial_j T^{j\nu}(\vec{x}, \omega) = 0$$

$$-\frac{i\omega}{c} T^{0\nu}(\vec{x}, \omega) + \partial_j T^{j\nu}(\vec{x}, \omega) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Esta identidad es importante para el siguiente lema

**Lema 3.2.** Sea la integral  $\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x}$ ,  $i, j \in (1, 2, 3)$  entonces:

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = \int_V [\partial_l (T^{lj}(\vec{x}, \omega) x^i) - \partial_l (T^{lj}(\vec{x}, \omega)) x^i] d^3\vec{x}, \quad l \in (1, 2, 3)$$

**Demostración:** Para mostrar esta identidad notamos que

$$\begin{aligned} \partial_l [T^{lj}(\vec{x}, \omega) x^i] &= \partial_l [T^{lj}(\vec{x}, \omega)] x^i + T^{lj}(\vec{x}, \omega) \delta_l^i \\ &= \partial_l [T^{lj}(\vec{x}, \omega)] x^i + T^{ij}(\vec{x}, \omega) \Rightarrow \\ T^{ij}(\vec{x}, \omega) &= \partial_l [T^{lj}(\vec{x}, \omega) x^i] - \partial_l [T^{lj}(\vec{x}, \omega)] x^i \end{aligned}$$

por lo tanto integrando ambos lados al respecto de la variable  $\vec{x}$  tenemos:

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = \int_V [\partial_l (T^{lj}(\vec{x}, \omega) x^i) - \partial_l (T^{lj}(\vec{x}, \omega)) x^i] d^3\vec{x}$$



■

Con la ayuda de este lema tenemos también:

**Lema 3.3.** *Combinando la identidad*

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = \int_V [\partial_l(T^{lj}(\vec{x}, \omega)x^i) - \partial_l(T^{lj}(\vec{x}, \omega))x^i] d^3\vec{x}, \quad l = 1, 2, 3 \quad (3.41)$$

$$\text{con:} \quad -\frac{i\omega}{c} T^{0\nu}(\vec{x}, \omega) + \partial_j T^{j\nu}(\vec{x}, \omega)$$

y usando el teorema de la divergencia obtenemos:

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = -\frac{i\omega}{c} \int_V T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i d^3\vec{x}$$

**Demostración:** Para una fuente  $T^{\mu\nu}(\vec{x}, \omega)$  de extensión espacial  $V$  finita el teorema de la divergencia implica que el primer término en (3.41) se anula, entonces:

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = -\int_V \partial_l [T^{lj}(\vec{x}, \omega)] x^i d^3\vec{x} \quad (3.42)$$

y de

$$-\frac{i\omega}{c} T^{0\nu}(\vec{x}, \omega) + \partial_j T^{j\nu}(\vec{x}, \omega) = 0$$

tenemos tomando  $\nu = j \in (1, 2, 3)$ :

$$-\frac{i\omega}{c} T^{0j}(\vec{x}, \omega) + \partial_l T^{lj}(\vec{x}, \omega) = 0 \Rightarrow \partial_l T^{lj}(\vec{x}, \omega) = \frac{i\omega}{c} T^{0j}(\vec{x}, \omega)$$

por lo tanto (3.42) implica que:

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = -\frac{i\omega}{c} \int_V T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i d^3\vec{x}$$

■

Combinando los dos lemas tenemos:

**Lema 3.4.**

$$\frac{i\omega}{c} \int_V T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i d^3\vec{x} = \frac{\omega^2}{2c^2} \int_V T^{00}(\vec{x}, \omega) x^i x^j d^3\vec{x}$$

**Demostración:** Para la demostración notamos primero que la identidad

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{c} \int_V T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i d^3\vec{x} &= -\frac{i\omega}{c} \int_V \left[ \frac{T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i + T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i - T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j}{2} \right] d^3\vec{x} = \\ &= -\frac{i\omega}{2c} \int_V [T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i + T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j + T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i - T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j] d^3\vec{x} \quad (3.43) \end{aligned}$$

Por otro lado del lema anterior tenemos

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = -\frac{i\omega}{c} \int_V T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i d^3\vec{x}$$

entonces de (3.43) usando  $T^{ij}(\vec{x}, \omega) = T^{ji}(\vec{x}, \omega)$  da:

$$-\frac{i\omega}{c} \int_V T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j d^3\vec{x} = \int_V T^{ji}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = \int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x}$$

Entonces la parte antisimétrica en (3.43) se anula, es decir:

$$\int_V [T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i - T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j] d^3\vec{x} = 0$$

Ahora manipulamos la parte simétrica en (3.43) y vemos que:

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{2c} \int_V [T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i + T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j] d^3\vec{x} &= \\ &= -\frac{i\omega}{2c} \int_V [\partial_l [T^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i x^j] - \partial_l [T^{0l}(\vec{x}, \omega)] x^i x^j] d^3\vec{x} \quad (3.44) \end{aligned}$$

Esta condición viene de la identidad:

$$\begin{aligned} \partial_l [T^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i x^j] &= \partial_l [T^{0l}(\vec{x}, \omega)] x^i x^j + T^{0l}(\vec{x}, \omega) \delta_l^i x^j + T^{0l}(\vec{x}, \omega) x^i \delta_l^j \\ &= \partial_l [T^{0l}(\vec{x}, \omega)] x^i x^j + T^{0i}(\vec{x}, \omega) x^j + T^{0j}(\vec{x}, \omega) x^i \end{aligned}$$

Por el teorema de la divergencia el primer término en (3.44) se anula entonces:

$$\begin{aligned} -\frac{i\omega}{2c} \int_V [T^{0j}(\vec{x}, \omega)x^i + T^{0i}(\vec{x}, \omega)x^j] d^3\vec{x} &= \\ &= \frac{i\omega}{2c} \int_V \partial_l [T^{0l}(\vec{x}, \omega)] x^i x^j d^3\vec{x} = \frac{i\omega}{2c} \frac{i\omega}{c} \int_V T^{00}(\vec{x}, \omega) x^i x^j d^3\vec{x} \end{aligned}$$

por lo que vemos finalmente:

$$\int_V T^{ij}(\vec{x}, \omega) d^3\vec{x} = -\frac{\omega^2}{2c^2} \int_V T^{00}(\vec{x}, \omega) x^i x^j d^3\vec{x}$$

■

Con la ayuda del lema (3.4) y de la ecuación (3.40) tenemos

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{ij}(\vec{x}, t) &= \frac{\hat{k}}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \int_V \hat{T}_{ij}(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' = \\ &= -\frac{\hat{k}}{2\pi} \frac{\omega^2}{2c^2} \frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r} \int_V \hat{T}_{00} x'_i x'_j d^3\vec{x}', \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Aún esta expresión da solo la parte espacial de  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}$ , veremos que es suficiente para nuestras necesidades. Debido a la libertad de norma podemos eliminar  $\bar{\gamma}_{0\mu}$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ .

Primero notamos que debido a  $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$  de (3.40) vemos que

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t) &= \frac{\hat{k}}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} \int_V \hat{T}_{\mu\nu}(\vec{x}', \omega) d^3\vec{x}' = \\ &= \frac{1}{r} f_{\mu\nu}(t - \frac{r}{c}) \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3.46)$$

En la zona radiativa en donde  $|\vec{x}| \gg d$  podemos interpretar  $\bar{\gamma}_{\mu\nu}(\vec{x}, t)$  localmente como ondas gravitacionales monocromáticas planas. Por eso introducimos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en algún punto

en la zona radiativa y tomamos el eje  $x^3 = z$  paralelo a la dirección de propagación. Relativamente a tal sistema escribimos (3.46) en la forma:

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} \left( t - \frac{z}{c} \right) \quad , \quad \partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} \left( t - \frac{z}{c} \right) = 0 \quad (3.47)$$

Consideramos ahora la condición  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  la cual implica que:

$$\partial^0 \bar{\gamma}_{0\nu} + \partial^i \bar{\gamma}_{i\nu} = -\frac{\partial \bar{\gamma}_{0\nu}}{\partial x^0} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{i\nu}}{\partial x^i} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.48)$$

Denotando  $t - \frac{z}{c} = \tilde{k}$  obtenemos

$$\frac{\partial \bar{\gamma}_{0\nu}}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\gamma}_{0\nu}}{\partial \tilde{k}} \quad , \quad \frac{\partial \bar{\gamma}_{i\nu}}{\partial x^i} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{\gamma}_{i\nu}}{\partial \tilde{k}} \delta_i^3 \quad (3.49)$$

combinando (3.49) con (3.48) obtenemos que

$$-\frac{1}{c} \left[ \frac{\partial \bar{\gamma}_{0\nu}}{\partial \tilde{k}} + \frac{\partial \bar{\gamma}_{3\nu}}{\partial \tilde{k}} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{k}} [\bar{\gamma}_{0\nu} + \bar{\gamma}_{3\nu}] = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\gamma}_{0\nu} = -\bar{\gamma}_{3\nu} \quad (3.50)$$

de donde hemos descartado la constante de integración.

La condición  $\bar{\gamma}_{0\nu} = -\bar{\gamma}_{3\nu}$  nos da:

$$\bar{\gamma}_{00} = -\bar{\gamma}_{30}, \quad \bar{\gamma}_{01} = -\bar{\gamma}_{31}, \quad \bar{\gamma}_{02} = -\bar{\gamma}_{32}, \quad \bar{\gamma}_{03} = -\bar{\gamma}_{33} \quad (3.51)$$

Combinando  $\bar{\gamma}_{00} = -\bar{\gamma}_{30}$  con  $\bar{\gamma}_{03} = -\bar{\gamma}_{33}$  obtenemos que  $\bar{\gamma}_{00} = \bar{\gamma}_{33}$ . En resumen vemos que la condición  $\partial^\mu \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$  implica que localmente la parte de onda  $\bar{\gamma}_{0\mu}$   $\mu = 0, 1, 2, 3$ , es determinada por las componentes espaciales, es decir,  $\bar{\gamma}_{ij}$   $i, j = 1, 2, 3$ .

Ahora mostremos que el sistema de coordenadas  $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$  con origen en la zona de radiación admite libertad y mostramos el siguiente teorema:

**Teorema 3.1.** *Sea que  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \xi^\mu (t - \frac{z}{c}) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es un campo vectorial arbitrario. Usando los cuatro grados de libertad en  $\xi$  en la nueva norma podemos lograr:*

$$\bar{\gamma}'_{0i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad y \quad \bar{\gamma}'_{22} + \bar{\gamma}'_{11} = 0$$

**Demostración:** Primero notamos que cada campo vectorial  $\xi$  de la forma

$$\xi = \xi^\mu \left( t - \frac{z}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \xi^\mu \left( t - \frac{x^3}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

satisface:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu \left( t - \frac{z}{c} \right) &= \partial^\alpha \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tilde{k}} \delta_\alpha^0 + \frac{-1}{c} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial \tilde{k}} \delta_\alpha^3 \right] = \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial \tilde{k}^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial \tilde{k}^2} = 0 \\ \partial_\alpha \xi^\alpha &= \partial_0 \xi^0 + \partial_i \xi^i = \partial_0 \xi^0 + \partial_3 \xi^3 = \frac{1}{c} \frac{\partial \xi^0}{\partial t} + \frac{\partial \xi^3}{\partial z} \neq 0 \end{aligned}$$

Consideramos ahora un  $\xi = \xi^\mu \left( t - \frac{z}{c} \right) \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  y cambiamos la norma. Debido a que  $\partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu = 0$  los  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu}$  definidos por

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} + \partial_\nu \xi_\mu + \partial_\mu \xi_\nu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha \quad (3.52)$$

satisfacen  $\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$  y en particular tenemos:

$$\bar{\gamma}'_{0i} = \bar{\gamma}_{0i} + \partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.53)$$

Ahora escogiendo  $\xi^\mu \left( t - \frac{z}{c} \right)$   $\mu = 0, 1, 2, 3$  tal que  $\bar{\gamma}'_{0i} \equiv 0$ . Tal condición demanda que:

$$0 = \bar{\gamma}_{0i} + \partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 \Rightarrow \quad (3.54)$$

$$0 = \bar{\gamma}_{01} + \partial_0 \xi_1 + \partial_1 \xi_0 = \bar{\gamma}_{01} + \partial_0 \xi_1 \quad (3.55)$$

$$0 = \bar{\gamma}_{02} + \partial_0 \xi_2 + \partial_2 \xi_0 = \bar{\gamma}_{02} + \partial_0 \xi_2 \quad (3.56)$$

$$0 = \bar{\gamma}_{03} + \partial_0 \xi_3 + \partial_3 \xi_0 \quad (3.57)$$

De (3.52) tenemos también:

$$\bar{\gamma}'_{11} = \bar{\gamma}_{11} + \partial_1 \xi_1 + \partial_1 \xi_1 - \partial_\alpha \xi^\alpha$$

$$\bar{\gamma}'_{22} = \bar{\gamma}_{22} + \partial_2 \xi_2 + \partial_2 \xi_2 - \partial_\alpha \xi^\alpha$$

Entonces sumando estas ecuaciones tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}'_{11} + \bar{\gamma}'_{22} &= \bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22} + 2\partial_1\xi_1 + 2\partial_2\xi_2 - 2\partial_\alpha\xi^\alpha = \\ &= \bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22} - 2\partial_\alpha\xi^\alpha\end{aligned}$$

entonces

$$\bar{\gamma}'_{11} + \bar{\gamma}'_{22} = 0 \Rightarrow \partial_\alpha\xi^\alpha = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22}) \quad (3.58)$$

Por la conclusión del teorema (2.1) sabemos que existe  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que

$$\partial^\alpha \partial_\alpha \xi^\mu = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\alpha \xi^\alpha = \Phi \quad \text{sujeto a que} \quad \square \Phi = 0$$

Para

$$\Phi = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22}) = \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{11} \left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{1}{2}\bar{\gamma}_{22} \left(t - \frac{z}{c}\right) \quad (3.59)$$

concluimos que  $\square \Phi = 0$ .

En la nueva norma generada por el campo vectorial  $\xi = \xi^\mu(t - \frac{z}{c})\frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tenemos que:

$$\bar{\gamma}'_{\mu\nu} = \bar{\gamma}_{\mu\nu} \left(t - \frac{z}{c}\right) \quad , \quad \partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$$

y además:

$$\bar{\gamma}'_{0i} = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad \bar{\gamma}'_{11} + \bar{\gamma}'_{22} = 0$$

Pero como hemos mostrado en (3.47) y (3.48) la condición  $\partial^\mu \bar{\gamma}'_{\mu\nu} = 0$  combinada con  $\bar{\gamma}'_{0i} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  implica que:

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}'_{00} = -\bar{\gamma}'_{30} = -\bar{\gamma}'_{03} = 0, \quad \bar{\gamma}'_{01} = -\bar{\gamma}'_{31} = 0, \quad \bar{\gamma}'_{02} = -\bar{\gamma}'_{32} = 0 \\ \bar{\gamma}'_{03} = -\bar{\gamma}'_{33}, \quad \bar{\gamma}'_{00} = \bar{\gamma}'_{33} = 0\end{aligned} \quad (3.60)$$

Entonces en la nueva norma las únicas componentes de  $\bar{\gamma}'_{\mu\nu}(t - \frac{z}{c})$  que son distintas de cero son:

$$\bar{\gamma}'_{11}, \quad \bar{\gamma}'_{12}, \quad \bar{\gamma}'_{22}, \quad \text{con} \quad \bar{\gamma}'_{11} + \bar{\gamma}'_{22} = 0 \quad (3.61)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}'_{11} &= \bar{\gamma}_{11} + \partial_1 \xi_1 + \partial_1 \xi_1 - \partial_\alpha \xi^\alpha = \bar{\gamma}_{11} - \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22}) = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{22}) \\ \bar{\gamma}'_{22} &= \bar{\gamma}_{22} + \partial_2 \xi_2 + \partial_2 \xi_2 - \partial_\alpha \xi^\alpha = \bar{\gamma}_{22} - \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22}) = \\ &= \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{11}) = -\bar{\gamma}'_{11} \\ \bar{\gamma}'_{12} &= \bar{\gamma}_{12} + \partial_2 \xi_1 - \partial_1 \xi_2 = \bar{\gamma}_{12} \end{aligned}$$

de la cual vemos que:

$$\bar{\gamma}'_{11} + \bar{\gamma}'_{22} = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{22}) + \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{11}) = 0 \quad (3.62)$$

es decir todavía estamos en la norma de radiación. En la nueva norma tenemos:

$$\bar{\gamma}'_{11} - \bar{\gamma}'_{22} = \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{22}) - \frac{1}{2}(\bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{11}) = \bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{22} \quad (3.63)$$

$$\bar{\gamma}'_{12} = \bar{\gamma}_{12} \quad (3.64)$$

es decir las amplitudes  $\bar{\gamma}_{11} - \bar{\gamma}_{22}$  y  $\bar{\gamma}_{12}$  son invariantes.

Regresando a (3.45) tenemos entonces de (3.63) y (3.64) que:

$$\bar{\gamma}'_{11} - \bar{\gamma}'_{22} = -\frac{\hat{k}}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} \int_V (T_{00}x'_1x'_1 - T_{00}x'_2x'_2) d^3x' \quad (3.65)$$

$$\bar{\gamma}'_{12} = -\frac{\hat{k}}{4\pi} \frac{\omega^2}{c^2} \frac{e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})}}{r} \int_V T_{00}x'_1x'_2 d^3x' \quad (3.66)$$

Ahora somos capaces de evaluar el flujo de energía que llevan las soluciones escritas por (3.65) y (3.66). Para esto asumimos que la fuente es un fluido

perfecto con tensor de energía momento dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + P) U_\mu U_\nu + \eta_{\mu\nu} P \quad (3.67)$$

en donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $P$  es la presión isotrópica medida al respecto de observadores que se mueven con el flujo y  $U = U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  es la 4-velocidad del flujo normalizada según  $g(U, U) = -1$ . Asumimos ahora que la 4-velocidad  $U$  del flujo se mueve muy lentamente en comparación de la velocidad de la luz  $c$ . Esta suposición nos permite representar

$$U = U^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{v^i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad i = 1, 2, 3$$

como la aproximación  $U^0 \simeq 1 + O(\frac{v}{c})$ . Bajo esta aproximación se sigue de (3.67) que  $T_{00} = \rho c^2$  y sea que introducimos el tensor cuadripolar  $Q_{ij}$  asociado a esta fuente a través de

$$Q_{ij} = \int_V \rho(\vec{x}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) d^3x \quad (3.68)$$

En términos de este tensor (3.65) y (3.66) toman la forma equivalente:

$$\bar{\gamma}'_{11} - \bar{\gamma}'_{22} = -\frac{\hat{k}}{12\pi} \omega^2 \frac{e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})}}{r} (Q_{11} - Q_{22}) \quad (3.69)$$

$$\bar{\gamma}'_{12} = -\frac{\hat{k}}{12\pi} \omega^2 \frac{e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})}}{r} Q_{12} \quad (3.70)$$

Consideramos también el tensor de energía y momentum asociado a estas ondas:

$$T_{\mu\nu}^W = \frac{k}{32\pi} \langle \bar{\gamma}_{\alpha\beta,\mu} \bar{\gamma}^{\alpha\beta}_{,\nu} \rangle, \quad k = \frac{c^4}{G} \quad (3.71)$$

Un observador con 4-velocidad  $u = c \frac{\partial}{\partial x^0}$  en la zona radiativa ve flujo de energía  $J_\alpha$  dado por:

$$J_\alpha = -T_{\alpha\beta}^W u^\beta = -\frac{c^5}{32\pi G} \langle \bar{\gamma}^{\alpha\beta}_{,\mu} \bar{\gamma}_{\alpha\beta,0} \rangle \quad (3.72)$$



en donde  $[J_\alpha] = \frac{\text{energía}}{L^2 T}$  es decir  $J_\alpha$  representa el flujo de energía que llevan las ondas gravitacionales en la zona de radiatividad.

Enseguida evaluamos  $J_\alpha$

$$\begin{aligned} J_\alpha &= -\frac{c^5}{32\pi G} \left\langle -\left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{11}}{\partial \tilde{k}}\right)^2 - \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{22}}{\partial \tilde{k}}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{12}}{\partial \tilde{k}}\right)^2 \right\rangle \\ &= \frac{c^5}{16\pi G} \left\langle \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{11}}{\partial \tilde{k}} - \frac{\partial \bar{\gamma}_{22}}{\partial \tilde{k}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\gamma}_{12}}{\partial \tilde{k}}\right)^2 \right\rangle n_\alpha \end{aligned} \quad (3.73)$$

en donde  $\tilde{k} = t - \frac{z}{c}$  y hemos usado la propiedad  $\bar{\gamma}'_{11} = -\bar{\gamma}'_{22}$  al pasar a la segunda igualdad.

Tomando

$$\bar{\gamma}'_{11} - \bar{\gamma}'_{22} = -\frac{\hat{k}}{12\pi} \omega^2 \frac{Q_{11} - Q_{22}}{r} \text{re}[e^{-i\omega(t - \frac{z}{c})}] \quad (3.74)$$

obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{k}} (\bar{\gamma}'_{11} - \bar{\gamma}'_{22}) = -\frac{\hat{k}}{12\pi} \omega^3 \frac{Q_{11} - Q_{22}}{r} \text{im}[e^{-i\omega k}] \quad (3.75)$$

Finalmente tenemos que el flujo de energía es dado por:

$$J_\alpha = \frac{c^3}{16\pi k} \frac{\hat{k}^2}{12^2 \pi^2} \omega^6 \left\langle \left( \frac{1}{4} (Q_{11} - Q_{22})^2 + Q_{12}^2 \right) \cdot \text{im}[e^{-i\omega k}] \right\rangle \frac{n_\alpha}{r^2} \quad (3.76)$$

y tomando el promedio llegamos a

$$J_\alpha = \frac{1}{2} \frac{c^3}{16\pi k} \frac{\hat{k}^2}{12^2 \pi^2} \omega^6 \left( \frac{1}{4} (Q_{11} - Q_{22})^2 + Q_{12}^2 \right) n_\alpha \frac{1}{r^2} \quad (3.77)$$

Integrando sobre una esfera de radio  $r$  obtenemos el flujo de energía a través de la esfera

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{c^3}{8G} \frac{\hat{k}^2}{12^2 \pi^2} \omega^6 \left( \frac{1}{4} (Q_{11} - Q_{22})^2 + Q_{12}^2 \right) = \\ &= \frac{G}{18c^5} \omega^6 \left( \frac{1}{4} (Q_{11} - Q_{22})^2 + Q_{12}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

en donde al derivar la última fórmula hemos usado  $\hat{k} = \frac{8\pi G}{c^4}$ .

Después de este largo análisis ahora comparamos  $\frac{dE}{dt}$  para el caso de ondas gravitacionales y ondas electromagnéticas. Como hemos visto para el caso de ondas electromagnéticas con momento dipolar eléctrico  $\vec{P} \neq 0$  la potencia emitida escala como

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{\omega^4}{c^3} |\vec{P}|^2 \quad (3.79)$$

mientras que para el caso gravitacional la contribución de la fuente es debido al momento cuadrupolar:

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{G}{c^5} \omega^6 \left[ \frac{1}{4} (Q_{11} - Q_{22})^2 + Q_{12}^2 \right] \quad (3.80)$$

Si por otro lado consideramos una fuente con momento dipolar eléctrico  $Q_{ij} \neq 0$  y  $\vec{P} = 0$  en lugar de (3.79) tenemos ahora (vease [4] pag 400).

$$\frac{dE}{dt} \simeq \frac{\omega^6}{c^5} Q_{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta} \quad (3.81)$$

Aún (3.81) escala de la misma manera como (3.80) la presencia de  $G$  en (3.80) implica que la energía emitida en ondas gravitacionales es mucho menor que la emitida en ondas electromagnéticas. Si consideramos una distribución de partículas puntuales con carga  $e$  y masa  $m$  (sea por ejemplo protones) vemos de (3.80) y (3.81) que

$$\left( \frac{dE}{dt} \right)_{el} \simeq 10^{38} \left( \frac{dE}{dt} \right)_{Gr} \quad (3.82)$$

Tal conclusión tiene como consecuencia que la detección de ondas gravitacionales es un reto para la tecnología.



# Apéndice A

En este apéndice discutimos algunos aspectos elementales de la formulación de espaciotiempo de la teoría de Maxwell.

Dentro del contexto de espaciotiempo de Minkowski  $(R^4, \eta)$  y relativo a un sistema de referencia inercial global  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$  tal que

$$\eta = -dx^0 \otimes dx^0 + dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3 \quad (3.83)$$

como es bien conocido las ecuaciones de Maxwell en el vacío están descritas por:

$$\partial^\alpha F_{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} J_\beta \quad , \quad \partial_\beta J^\beta = 0 \quad (3.84)$$

$$\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0 \quad (3.85)$$

donde  $F_{\alpha\beta}$  son las componentes del tensor de Maxwell  $F$  definido por:

$$\begin{aligned} F &= F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \\ &= E_1 dx^0 \wedge dx^1 + E_2 dx^0 \wedge dx^2 + E_3 dx^0 \wedge dx^3 - B_3 dx^1 \wedge dx^2 + \\ &\quad + B_2 dx^1 \wedge dx^3 - B_1 dx^2 \wedge dx^3 \end{aligned} \quad (3.86)$$

con  $dx^\alpha \wedge dx^\beta$  el producto cuña definido por:

$$dx^\alpha \wedge dx^\beta = dx^\alpha \otimes dx^\beta - dx^\beta \otimes dx^\alpha \quad (3.87)$$

y  $E^\alpha = g^{\alpha\beta} E_\beta$ ,  $B^\alpha = g^{\alpha\beta} B_\beta$  son las componentes de los campos eléctrico y magnético que son medidos por observadores inerciales con 4-velocidad  $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = c \frac{\partial}{\partial x^0}$ .

El conjunto (3.84) y (3.85) es equivalente a la familia de ecuaciones no relativista:

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}, t) = 4\pi \rho(\vec{x}, t) \quad (3.88)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.89)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{4\pi}{c} \vec{J}(\vec{x}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.90)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{x}, t)}{\partial t} \quad (3.91)$$

donde  $\rho(\vec{x}, t)$  y  $\vec{J}(\vec{x}, t)$  se definen apartir de la conservación de la 4-corriente:

$$J = J^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \rho c \frac{\partial}{\partial x^0} + J^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad , \quad \partial_\alpha J^\mu = 0 \quad (3.92)$$

## Apéndice B

**Teorema 3.2.** *Suponemos que  $\Phi(x^0, x^i)$  es un campo escalar tal que*

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \Phi(x^0, x^i) = 0 \quad , \quad (x^0, x^i) \in R^4 \quad (3.93)$$

*Entonces existe un campo vectorial suave  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tal que:*

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\mu = 0 \quad y \quad \partial_\mu \xi^\mu = \Phi(x^0, x^i) \quad , \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.94)$$

**Demostración:** Primero supongamos que tal  $\xi$  existe entonces de

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\alpha \partial^\alpha (\partial_\mu \xi^\mu) = 0 \quad \text{ó} \quad \partial_\alpha \partial^\alpha \Phi(x^0, x^i) = 0$$

es decir,  $\partial_\alpha \partial^\alpha \Phi(x^0, x^i) = 0$  es una condición necesaria para la existencia de un  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  que obedece (3.93).

Mostremos que la condición (3.93) es también condición suficiente para la existencia de un  $\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  que obedece (3.93).

Para eso sea  $\Lambda$  una solución de la siguiente ecuación:

$$\square \Lambda = \partial_\alpha \partial^\alpha \Lambda = \Phi(x^0, x^i) \quad (3.95)$$

y como hemos visto en varias ocasiones esta ecuación hiperbólica siempre admite solución. Sea que  $\Lambda$  es una solución y sea el campo vectorial  $n = n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  definido por:

$$n^\mu = \partial^\mu \Lambda = g^{\mu\nu} \partial_\nu \Lambda$$

Por elección  $n$  satisface:

$$\partial_\mu n^\mu = \partial_\mu \partial^\mu \Lambda = \Phi(x^0, x^i) \quad (3.96)$$

es decir el campo vectorial  $n = n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$  tiene la propiedad  $\partial_\mu n^\mu = \Phi(x^0, x^i)$ .

Tomando  $\partial_\alpha \partial^\alpha = \square$  de ambos lados de (3.96) obtenemos que:

$$\square(\partial_\mu n^\mu) = \square\Phi(x^0, x^i) = 0$$

Desafortunadamente esta condición no satisface  $\square n^\mu = 0$ .

Sin embargo sea:

$$k = k^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \square n^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

es decir, las componentes  $k^\mu$  de  $k$  son  $k^\mu = \square n^\mu$  y por elección tenemos:

$$\partial_\mu k^\mu = \partial_\mu (\square n^\mu) = \square(\partial_\mu n^\mu) = \square\Phi(x^0, x^i) = 0 \quad (3.97)$$

La propiedad  $\partial_\mu k^\mu = 0$  nos permite representar  $k$  en la forma:

$$k^\mu = \partial_\nu f^{\mu\nu} = -\partial_\nu f^{\nu\mu} \quad (3.98)$$

en donde  $f^{\mu\nu}$  es un campo tensorial tipo (2,0) antisimétrico  $f^{\mu\nu} = -f^{\nu\mu}$  y

$$\partial_\mu k^\mu = \partial_\mu \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0 \quad (3.99)$$

Sea ahora el sistema de ecuaciones:

$$\partial_\alpha \partial^\alpha \sigma^{\mu\nu} = f^{\mu\nu} \quad , \quad \sigma^{\mu\nu} = -\sigma^{\nu\mu} \quad (3.100)$$

Tal sistema siempre admite soluciones debido a que es de forma hiperbólica

$$\square \sigma = f.$$

Usando una solución de (3.100) acoplada con  $n^\mu = \partial^\mu \Lambda$  definimos el campo vectorial

$$\xi = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (n^\mu - \partial_\nu \sigma^{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.101)$$

y demandamos que  $\xi$  satisfice (3.94).

Tenemos entonces que:

$$\partial_\mu \xi^\mu = \partial_\mu n^\mu - \partial_\mu \partial_\nu \sigma^{\mu\nu} = \partial_\mu n^\mu = \Phi(x^0, x^i) \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial^\alpha \xi^\mu &= \partial_\alpha \partial^\alpha [n^\mu - \partial_\nu \sigma^{\mu\nu}] = \square n^\mu - \partial_\nu (\square \sigma^{\mu\nu}) \\ &= k^\mu - \partial_\nu f^{\mu\nu} = \partial_\nu f^{\mu\nu} - \partial_\nu f^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

lo cual demuestra el teorema.

**Comentarios:** Es importante mencionar que la demostración de este teorema no hace uso de la estructura de las perturbaciones de  $\gamma_{\mu\nu}$  que satisfacen  $\square \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ . En nuestro texto hemos aplicado este teorema para el caso particular en donde  $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = re[\varepsilon_{\mu\nu} e^{ik_\alpha x^\alpha}]$ . Por tales soluciones el campo  $\Phi(x^0, x^i)$  tiene la forma

$$\Phi(x^0, x^i) = \frac{1}{2} re[-i\varepsilon^\mu_\mu e^{ik_\alpha x^\alpha}] \quad (3.104)$$





# Conclusión

En esta tesis hemos realizado una comparación entre la teoría de la Relatividad General de Einstein linealizada y la Electrodinámica de Maxwell. Hemos mostrado que las ecuaciones linealizadas de Einstein en el vacío es decir,  $G^{(1)}(g) = 0$  admiten soluciones referidas como ondas gravitacionales monocromáticas planas. También hemos mostrado que en la teoría de Einstein linealizada al igual que en teoría de Maxwell hay libertad de norma y usando esta libertad de norma mostramos que ondas gravitacionales monocromáticas planas tienen sólo dos grados de libertad es decir, helicidad  $\pm 2$ , en contraste de ondas electromagnéticas monocromáticas planas que tienen helicidad  $\pm 1$ . Y mostramos la manera en que se genera radiación gravitacional la cual depende del momento cuadripolar en contraste con radiación electromagnética que depende del momento dipolar.



# Bibliografía

- [1] R.M. Wald, General Relativity (Chicago University 1984).
- [2] J.C. Guerra y T. Zannias, Notas sobre Cálculo Tensorial (Servicio social, Marzo - Septiembre 2011).
- [3] L.S. Weinberg, Gravitation and Cosmology (J. Willey 1970).
- [4] J.D. Jackson, Classical Electrodynamics (Second edition John Wiley and Sons, 1975).
- [5] N. Straumann, General Relativity (Springer Verlag 1984).
- [6] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, Gravitation 1973 (San Francisco: Freeman).
- [7] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, The Classical Theory of Fields (Oxford: Pergamon, 1962).
- [8] J.C. Guerra y T. Zannias, On the Radiation Gauge in Linearized Gravity (Paper en preparación).