

Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

**"Métodos Integrales en el Estudio de Microscopios
Capacitivos en Dos y Tres Dimensiones"**

TESIS

que para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

presenta

Sergio Villa Cortés

director de tesis

Dr. Alberto Mendoza Suárez

Diciembre 2011

"Cualquier hombre, a la vuelta de cualquier esquina, puede experimentar la sensación del absurdo, porque todo es absurdo."

Albert Camus

Resumen

En este trabajo se presenta un modelo de microscopio capacitivo que supone, exclusivamente, la presencia de superficies conductoras cerradas en condiciones electrostáticas. La obtención de imágenes se realiza por medio del escaneo de superficies conductoras que representan objetos a examinar. Para resolver las ecuaciones del modelo se propone un nuevo método integral mediante el cual nos es posible obtener las propiedades eléctricas del sistema propuesto. Particularmente, el método permite calcular el potencial electrostático en una región vacía acotada por dos superficies conductoras, entre las cuales se establece una diferencia de potencial. Este método es aplicado al caso de superficies unidimensionales y al caso de bidimensionales.

Con el modelo de microscopio propuesto se obtuvieron imágenes capacitivas (numéricamente) de objetos con diferentes tipos de geometrías bien determinadas. Para el caso de geometrías más complejas, se abordó como ejemplo el estudio de superficies aleatorias unidimensionales con estadística gaussiana. Se obtuvieron imágenes de las realizaciones de esas superficies y se estudió la estadística del ensamble de las imágenes. También, se planteó un método para tratar de resolver un problema tipo inverso. Mediante ese método se trataron de obtener los parámetros estadísticos de las superficies aleatorias gaussianas. El método usado fué semejante a uno propuesto en la literatura para superficies extendidas pero en nuestro caso no se obtuvieron los resultados que hubiéramos deseado. En el caso de superficies bidimensionales se planteó un caso con cierta analogía al de superficies unidimensionales aleatorias. Específicamente, en este caso la superficie presentada tiene rugosidades periódicas armónicas y el problema inverso a resolver fué obtener las frecuencias angulares que la generan.

Debemos señalar que una propiedad interesante del modelo propuesto es la gran sensibilidad de la capacitancia del sistema a cambios relativamente pequeños en la geometría. Esto da la pauta para posibles futuras aplicaciones de nuestro trabajo.

Índice general

Capítulo 1. Introducción	7
Capítulo 2. El método integral	11
2.1. Formulación del Método	11
2.2. El caso bidimensional	14
2.2.1. Los elementos de matriz en el plano	19
2.3. El caso tridimensional	25
2.3.1. Elementos de matriz en el espacio	26
Capítulo 3. El Microscopio de capacitancia	41
3.1. Resultados numéricos para el microscopio capacitivo cilíndrico	44
3.1.1. Superficies aleatorias con estadística gaussiana	50
3.2. Resultados numéricos para el microscopio capacitivo esférico	61
Capítulo 4. Conclusiones	69
Apéndices	72
A.- Función de Green	72
B.- Teorema de Green	77
C.- Función de Green para la ecuación de Poisson	79
Bibliografía	82

Capítulo 1

Introducción

La microscopía capacitiva es una técnica que permite obtener imágenes de objetos relativamente pequeños. El tamaño de éstos puede ser de micras o incluso nanómetros. En las últimas dos décadas muchos resultados se han centrado en la posibilidad de usar la capacitancia como una variable para el desarrollo de un microscopio de escaneo, que tome en cuenta esta cantidad física para obtener imágenes capacitivas de diferentes sistemas [1-7]. Algunos resultados importantes para los microscopios capacitivos se han obtenido siguiendo un análisis similar aplicado a otros microscopios, como el microscopio óptico de escaneo de campo cercano (SNOM) [8] o el microscopio de fuerza atómica [9], que están basados en el escaneo de una punta afilada cerca de la superficie bajo observación. En el caso del microscopio capacitivo, se establece una diferencia de potencial entre el objeto y la sonda, supuestos en este trabajo conductores. Entonces, la capacitancia puede ser medida en diferentes posiciones relativas entre ambos conductores y de esta manera es posible obtener una imagen capacitiva.

A una escala pequeña, las superficies de objetos físicos pueden presentar rugosidades y algunas veces es conveniente modelarlas usando el concepto de rugosidades aleatorias con ciertas propiedades estadísticas dadas. Nosotros estamos interesados en considerar un problema de microscopía de capacitancia que involucre objetos cuyas superficies presenten rugosidades aleatorias [10, 11]. En [10], Bruce et al. proponen un sistema de superficies abiertas compuestas por dos planos. Uno de ellos sirve como

objeto y se supone que tiene una rugosidad aleatoria; el otro tiene una punta para escanear y funciona como microscopio. En [11] los autores consideran el problema de los parámetros estadísticos de superficies con rugosidades aleatorias usando dos configuraciones diferentes: una con una sonda plana y otra con un plano que tiene una punta gaussiana. Cabe mencionar que para buscar imágenes y sus propiedades estadísticas, ellos usan un método integral que involucra funciones de Green periódicas. Este método está limitado a superficies unidimensionales y a rugosidades aleatorias no reentrantes, esto es, descritas por perfiles representables por medio de funciones univaluadas.

La idea del escaneo de una punta metálica sobre una superficie de algunos nanómetros, para obtener una imagen capacitiva de un objeto, se ha usado con éxito midiendo la concentración de dopaje en semiconductores [12-14]. Por otro lado, durante los últimos años la tomografía capacitiva ha sido objeto de estudio para obtener imágenes capacitivas de objetos microscópicos volumétricos con la idea de monitorizar y controlar procesos industriales. En este caso el objeto es colocado dentro de un cilindro que tiene varios electrodos en la pared curvada que establecen un potencial electrostático, para determinar, por ejemplo, la función de permitividad dieléctrica en la superficie del objeto, midiendo la capacitancia del sistema [15-18].

Tomando las ideas de los sistemas capacitivos descritos, en este trabajo queremos obtener imágenes capacitivas mediante el escaneo de superficies conductoras cerradas, tanto para el caso de superficies representadas por un parámetro (superficies unidimensionales), como para las representadas por dos parámetros (superficies bidimensionales). Estudiamos un modelo para el caso de conductores que puede ser extendido para ser aplicado a diversos materiales. Un posible uso de estas ideas sería

en el estudio de la geometría y propiedades físicas de algunas estructuras usadas en nanotecnología.

El problema a tratar involucra la solución de la ecuación de Laplace sujeta a valores en la frontera para el potencial electrostático (condiciones de Dirichlet). Existen diferentes métodos numéricos para resolver esta ecuación y uno de los más empleados es la llamada *relajación numérica* [19]. Este consiste en un método de diferencias finitas que usa una malla de puntos para aproximar las derivadas que aparecen en la ecuación de Laplace. Este método requiere gran cantidad de recursos computacionales en el caso de superficies aleatorias; además, podría ser difícil definir una malla de puntos en superficies con una geometría compleja, como por ejemplo una geometría fractal.

Este trabajo, aunque está basado sobre todo en los trabajos de N.C. Bruce et al. para objetos en superficies extendidas, básicamente es una propuesta original, tanto en el tipo de microscopio capacitivo planteado como en los métodos empleados en la resolución de los modelos. De hecho ya se dió una primera publicación al respecto [23] y es posible una segunda publicación sobre el caso tridimensional.

El desarrollo de este trabajo de tesis es el siguiente. En el capítulo 2 se propone un modelo de microscopio capacitivo; además, para resolver las ecuaciones del modelo se formula un nuevo método integral. Este método está basado en algunas ideas provenientes de la teoría del esparcimiento de la luz [20, 21] y algunos conceptos de geometría diferencial. El capítulo 3 contiene imágenes de diversos objetos, tanto en el caso bidimensional, como en el tridimensional. Las imágenes son obtenidas realizando simulaciones numéricas cuyos resultados son interpretados. Particularmente, en este capítulo se estudia la estadística de las imágenes de una superficie aleatoria, gaussiana

y cerrada. También, se muestran las dificultades para obtener la desviación estándar y la longitud de correlación de la estadística gaussiana por medio de cierto estudio de imágenes capacitivas del objeto. Finalmente, en el capítulo 4 se dan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

El método integral

En este capítulo proponemos un modelo de microscopio capacitivo. La capacitancia del sistema se calcularía, en principio, por medio de la resolución de ciertas ecuaciones. Para resolver esas ecuaciones formularemos un método que requiere la solución de ecuaciones integrales que involucran funciones de Green y densidades de carga en superficies conductoras. Las ecuaciones integrales se resuelven numéricamente. En lo que sigue describiremos a detalle el método de solución a emplear.

2.1. Formulación del Método

El microscopio capacitivo que proponemos es muy básico. Contiene una sonda que en nuestro caso está formada por una superficie conductora lisa, salvo por una protuberancia (punta) que es esencial para coleccionar la información de algunas propiedades de objetos a observar. El microscopio contiene también otra superficie conductora que sería lisa, a no ser por algún objeto (rugosidad) que consideremos que forme parte de esta superficie. Las dos superficies conductoras están separadas por una región vacía y por lo tanto forman un capacitor. Se establece una diferencia de potencial electrostático entre ambos conductores y para una geometría dada tenemos una capacitancia del sistema. La geometría va cambiando a medida que se realiza el escaneo del objeto y la capacitancia cambia como una función de algunos parámetros.

En particular la capacitancia graficada adecuadamente nos permite obtener imágenes capacitivas del objeto.

La geometría del sistema descrito se muestra en la figura 1, donde a la izquierda se muestra el caso de un microscopio formado por superficies unidimensionales (simetría cilíndrica) y a la derecha otro con superficies bidimensionales. En condiciones electrostáticas el potencial, $\phi(\vec{r})$, satisface la ecuación de Laplace

$$(2.1.1) \quad \nabla^2 \phi(\vec{r}) = 0,$$

dentro de la región vacía limitada por los conductores. Se supone que las superficies conductoras interior y exterior se encuentran a los potenciales constantes ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente. Suponiendo que nuestro problema consiste en calcular el potencial podemos usar un cierto método que utiliza funciones de Green. Una función de Green para nuestro problema es una función, $G(\vec{r}, \vec{r}')$, que satisface la ecuación inhomogénea

$$(2.1.2) \quad \nabla^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'),$$

donde $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ es la función delta de Dirac.

El método para resolver el problema está basado en el teorema de Green. Este teorema establece una relación entre una integral de superficie y una de línea (caso bidimensional); y una relación entre una de volumen y una de superficie (caso

tridimensional). Ambos casos los representamos a continuación

$$(2.1.3) \quad \int_{\partial} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) da = \oint_{\Gamma} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds$$

$$(2.1.4) \quad \int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv = \int_{\partial} \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) da,$$

donde ϕ y ψ representan funciones escalares y $\partial\psi/\partial n$ representa la derivada normal de ψ , por ejemplo.

Conviene escoger las funciones ϕ y ψ , que aparecen en el teorema de Green, precisamente como el potencial electrostático y una función de Green correspondiente. Algo que nos será útil es que, al aplicar el teorema de Green a la región vacía de nuestros microscopios, la densidad de carga sobre los conductores está dada por

$$(2.1.5) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \phi}{\partial n},$$

donde la normal está dirigida hacia el interior de los conductores.

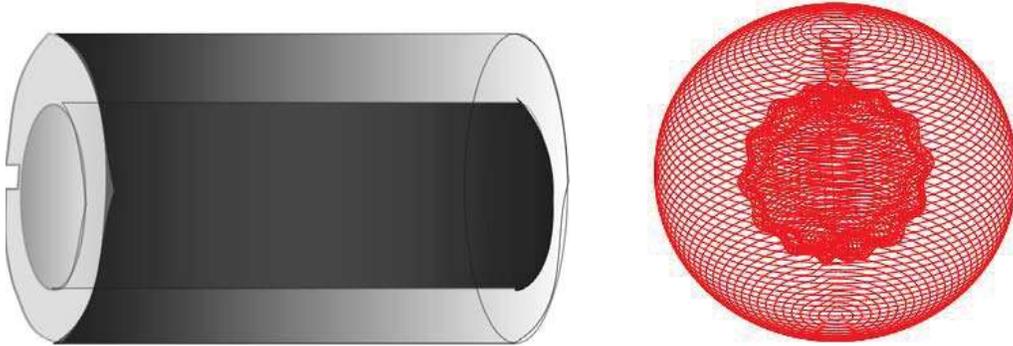


Figura 1.- A la izquierda se muestra un microscopio con superficies unidimensionales; a la derecha otro con superficies bidimensionales.

2.2. El caso bidimensional

Considérese el caso del modelo de microscopio formado por superficies unidimensionales (lado izquierdo en la Fig. 1). Se tienen superficies cilíndricas coaxiales con una simetría de traslación a lo largo del eje común (eje z). Para ésto se supone que dichas superficies son de longitud infinita a lo largo de ese eje. Debido a esta simetría resulta que el potencial es independiente de la coordenada z y entonces podemos estudiar el sistema a partir de la geometría bidimensional mostrada en la figura 2. Resulta que a partir de las ecuaciones 2.1.1, 2.1.2, 2.1.5 y de las condiciones de frontera

- $\phi(\vec{r}) = \phi_1$, en Γ_1 ,
- $\phi(\vec{r}) = \phi_2$ en Γ_2 ,

la relación 2.1.3 se convierte en

$$(2.2.1) \quad \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \left(\phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} - 4\pi\sigma(\vec{r}') G(\vec{r}; \vec{r}') \right) ds = \begin{cases} -\phi(\vec{r}) & \text{si } \vec{r} \in R \\ 0 & \text{si } \vec{r} \notin R \end{cases},$$

donde la variable de integración es \vec{r}' y se asume que está parametrizada por medio de la longitud de arco s . Además, en la expresión anterior tenemos como incógnitas, tanto el potencial que aparece en el lado derecho como la densidad de carga que aparece en la integral del lado izquierdo. Podemos obtener una ecuación integral que nos permite en principio obtener σ al considerar un punto de observación, \vec{r} , ubicado dentro de los conductores, pero apenas separado infinitesimalmente de los contornos $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Esta ecuación se puede expresar como

$$(2.2.2) \quad \frac{\phi_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial G(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} ds + \frac{\phi_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_2} \frac{\partial G(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} ds = \oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}; \vec{r}') ds,$$

que es una ecuación integral de Fredholm de primera clase, con el kernel de la ecuación dado por la función de Green.

La ecuación integral anterior en general no puede resolverse analíticamente. Existen varios métodos numéricos para resolver este tipo de ecuación. Nosotros formularemos uno que es semejante al desarrollado en [7], que simplemente consiste en resolver numéricamente la densidad de carga resolviendo un sistema inhomogéneo de ecuaciones algebraicas y lineales.

Primeramente reescribimos las integrales que aparecen en la Ec. 2.2.2 por medio de una suma de integrales sobre pequeños intervalos $[s_i - \frac{\Delta s}{2}, s_i + \frac{\Delta s}{2}]$. Esos intervalos son curvas sobre los perfiles con longitud de arco relativamente pequeña Δs y centrados en puntos calculados por medio de una discretización del contorno como se ve en la figura 3. Por ejemplo, sobre el contorno Γ_1 se tiene que

$$(2.2.3) \quad \int_{\Gamma_1} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}; \vec{r}') ds = \sum_{j=1}^{N_1} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}; \vec{r}') ds \approx \sum_{j=1}^{N_1} \sigma_{1j} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} G(\vec{r}; \vec{r}') ds,$$

donde N_1 es el número de intervalos sobre Γ_1 y la expresión extrema derecha resulta al aproximar la densidad de carga en el i -ésimo intervalo pequeño simplemente por su valor en el centro del intervalo, denotado éste por σ_{1i} .

Recordamos que el punto de observación, \vec{r} , está muy cercano al perfil Γ_1 . Numéricamente, podemos elegir tantos puntos de observación como puntos se tienen en la discretización (N_1) de manera que tenemos para el i -ésimo punto $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i$, siendo ϵ un infinitésimo positivo y \hat{n}_i la normal hacia fuera de la región vacía en dicho punto. Al evaluar la Ec. 2.2.3 en los diferentes puntos de observación considerados hacen su aparición cantidades que serán interpretadas como elementos de matriz.

Los elementos de matriz M_{1ij} los definimos de acuerdo a

$$(2.2.4) \quad M_{1ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} G\left(\vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i; \vec{r}'\right) ds.$$

Con ésto resulta que uno de los términos representativo de la ecuación integral que tenemos (Ec. 2.2.2) se puede expresar como

$$(2.2.5) \quad \int_{\Gamma_1} \sigma(\vec{r}') G\left(\vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i; \vec{r}'\right) ds' \approx \sum_{j=1}^{N_1} M_{1ij} \sigma_{1j}.$$

De manera semejante, conviene definir a los elementos N_{1ij} por

$$(2.2.6) \quad N_{1ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \frac{\partial G\left(\vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i; \vec{r}'\right)}{\partial n'} ds.$$

Resulta que otro de los términos en la Ec. 2.2.2 se puede escribir por

$$(2.2.7) \quad \frac{\phi_1}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial G\left(\vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i; \vec{r}'\right)}{\partial n'} ds \approx \frac{\phi_1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_1} N_{1ij}$$

Análogamente, para el contorno Γ_2 tenemos

$$(2.2.8) \quad \int_{\Gamma_2} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i; \vec{r}') ds \approx \sum_{j=1}^{N_2} M_{2ij} \sigma_{2j}$$

$$(2.2.9) \quad \frac{\phi_2}{4\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{\partial G(\vec{r}'_i + \epsilon \hat{n}_i; \vec{r}')}{\partial n'} ds \approx \frac{\phi_2}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_2} N_{2ij},$$

donde M_{2ij} y N_{2ij} se encuentran definidos de forma similar a 2.2.4 y 2.2.6, respectivamente, pero integrando sobre el contorno Γ_2 .

Con lo anterior resulta que, numéricamente, la ecuación 2.2.2 se puede representar por la expresión

$$(2.2.10) \quad \sum_{j=1}^{N_1} M_{1ij} \sigma_{1j} + \sum_{j=1}^{N_2} M_{2ij} \sigma_{2j} = \frac{\phi_1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_1} N_{1ij} + \frac{\phi_2}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_2} N_{2ij}.$$

La expresión anterior la podemos representar en forma matricial usando una matriz de rango $[N_1 + N_2] \times [N_1 + N_2]$,

$$(2.2.11) \quad \begin{pmatrix} M_{1ij} & M_{2ij} \\ M_{1ij} & M_{2ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{1j} \\ \sigma_{2j} \end{pmatrix} = (b_i)$$

donde los elementos b_i están dados por

$$b_i = \frac{\phi_1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_1} N_{1ij} + \frac{\phi_2}{4\pi} \sum_{j=1}^{N_2} N_{2ij}, \quad i = 1, \dots, N_1 + N_2.$$

Así es como hemos obtenido un conjunto de ecuaciones algebraicas, que nos permiten obtener numéricamente la densidad de carga sobre las superficies conductoras del microscopio capacitivo. Ya con ésto podemos enseguida encontrar (numéricamente) cualquier otra propiedad del sistema, tal como la carga eléctrica por unidad de longitud o la capacitancia (por unidad de longitud).

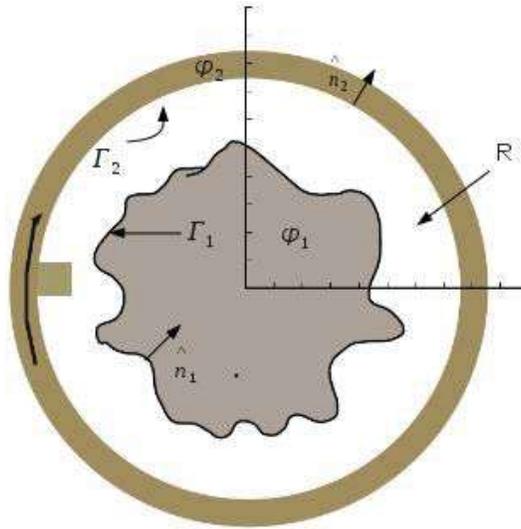


Figura 2.- Perfil de dos conductores coaxiales.

2.2.1. Los elementos de matriz en el plano. Para implementar la Ec. 2.2.11 debemos encontrar una expresión para los elementos M_{1ij} , M_{2ij} , N_{1ij} y N_{2ij} . Para ésto, la función de Green que usaremos es una sencilla solución de la ecuación 2.1.2 en el plano encontrada en el apéndice C

$$(2.2.12) \quad G(\vec{r}; \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Esta función de Green físicamente representa un potencial producido por una distribución de carga uniforme y lineal. Nótese que esa función es singular cuando $\vec{r} = \vec{r}'$

Comenzaremos con los elementos M_{1ij} dados por la Ec. 2.2.4. En este caso se puede demostrar que es posible invertir el orden de la realización del límite y la integral. En este caso obtenemos los elementos a partir de la expresión

$$(2.2.13) \quad M_{1ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \ln \sqrt{(x'_i - x')^2 + (y'_i - y')^2} ds.$$

Para realizar la integración sobre el contorno Γ_1 es conveniente parametrizar las coordenadas cartesianas del perfil en función de la longitud de arco s . Escribimos

$$(2.2.14) \quad M_{1ij} = -\frac{1}{2\pi} \int_{s_j - \frac{\Delta s}{2}}^{s_j + \frac{\Delta s}{2}} \ln \sqrt{(x'(s_i) - x'(s))^2 + (y'(s_i) - y'(s))^2} ds.$$

En la expresión anterior definimos $x'(s_i) = x'_i$, etc. Considerando además que la distancia entre un par de puntos del perfil, d_{ij} , es

$$d_{ij} = \sqrt{(x'(s_i) - x'(s_j))^2 + (y'(s_i) - y'(s_j))^2},$$

entonces la Ec. 2.2.14 se convierte en

$$(2.2.15) \quad M_{1ij} = -\frac{\Delta s}{2\pi} \ln d_{ij}.$$

Algo importante es notar que la expresión anterior no es adecuada para computar los elementos M_{1ij} , ya que presenta una singularidad cuando $i = j$. Para integrar tal singularidad realizamos el desarrollo siguiente. Introducimos el cambio de variable $u = s - s_i$, que implica $ds = du$. Sustituyendo ésto en la Ec. 2.2.14 podemos obtener

$$M_{1ii} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \ln \sqrt{(x'(s_i) - x'(s_i + u))^2 + (y'(s_i) - y'(s_i + u))^2} du.$$

Expandiendo las funciones $x'(s_i + u)$ y $y'(s_i + u)$ en series de Taylor hasta primer orden en u y reordenando términos obtenemos

$$(2.2.16) \quad x'(s_i) - x'(s_i + u) = -u \frac{dx'}{ds}$$

$$y'(s_i) - y'(s_i + u) = -u \frac{dy'}{ds}.$$

Sustituyendo lo anterior en M_{1ii} se tiene que

$$(2.2.17) \quad M_{1ii} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \ln \sqrt{\left(u \frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(u \frac{dy'}{ds}\right)^2} du.$$

Antes de realizar la integración debemos considerar que el cuadrado de la longitud de arco se puede expresar por

$$ds^2 = dx'^2 + dy'^2.$$

De ésto resulta la expresión

$$1 = \left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds}\right)^2.$$

Este resultado puede usarse en la Ec. 2.2.17. Tenemos que

$$(2.2.18) \quad M_{1ii} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \ln \left(u \sqrt{\left(\frac{dx'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{ds}\right)^2} \right) du = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\Delta s}{2}}^{\frac{\Delta s}{2}} \ln(u) du.$$

En este momento ya podemos integrar para obtener el resultado

$$M_{1ii} = -\frac{1}{\pi} [u \ln(u) - u]_0^{\frac{\Delta s}{2}} = -\frac{\Delta s}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\Delta s}{2}\right) - 1 \right].$$

Finalmente, los elementos de matriz M_{1ij} los podemos expresar de manera general en términos de la delta de Kronecker, δ_{ij} , como sigue

$$(2.2.19) \quad M_{1ij} = -\frac{\Delta s}{2\pi} \left[\ln d_{ij} (1 - \delta_{ij}) + \left[\ln\left(\frac{\Delta s}{2}\right) - 1 \right] \delta_{ij} \right].$$

Vamos ahora por el cálculo de los elementos N_{1ij} , dada por la Ec. 2.2.6. Debemos recordar la definición de derivada normal de la función de Green expresada por

$$(2.2.20) \quad \frac{\partial G(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial \hat{n}'} = \nabla' G(\vec{r}; \vec{r}') \cdot \hat{n}'.$$

Tenemos que con la función de Green que estamos utilizando

$$(2.2.21) \quad \nabla' G(\vec{r}; \vec{r}') = \nabla' \left(-\frac{1}{2\pi} \ln |\vec{r} - \vec{r}'| \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2}.$$

Queremos representar la derivada normal de la función de Green en términos de la longitud de arco. Para ésto consideramos lo siguiente. El vector unitario normal se puede escribir como

$$(2.2.22) \quad \hat{n}' = -\text{sen } \theta' \hat{i} + \text{cos } \theta' \hat{j},$$

donde θ' denota el ángulo de inclinación de la tangente al perfil en un punto dado, e \hat{i} y \hat{j} a los vectores base de las coordenadas cartesianas. De esta ecuación resulta que

$$(2.2.23) \quad \text{cos } \theta' = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy'/dx')^2}}, \quad \text{sen } \theta' = \frac{dy'/dx'}{\sqrt{1 + (dy'/dx')^2}}.$$

Aplicando la regla de la cadena, la derivada de $y(x')$ se reescribe como

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{dy' ds}{ds dx'} = \frac{y'(s)}{x'(s)}.$$

Sustituyendo ésto en la Ec. 2.2.23 obtenemos

$$\text{cos } \theta' = x'(s), \quad \text{sen } \theta' = y'(s).$$

Con lo anterior podemos expresar el vector normal de la Ec. 2.2.22 en función del parámetro s'

$$(2.2.24) \quad \hat{n}' = -\dot{y}'(s) \hat{i} + \dot{x}'(s) \hat{j}.$$

De esta forma la expresión 2.2.20 se convierte en

$$\nabla' G \cdot \hat{n}' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{-(x - x'(s)) \dot{y}'(s) + (y - y'(s)) \dot{x}'(s)}{(x - x'(s))^2 + (y - y'(s))^2} \right).$$

Con lo anterior ya podemos avanzar en el cálculo de los elementos N_{1ij} , sólo hay que tomar en cuenta que el punto de observación se debe evaluar en un punto muy cercano al perfil. Se obtiene

$$(2.2.25) \quad N_{1ij} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s_j - \Delta s}^{s_j + \Delta s} \left(\frac{(x'_i - \epsilon \dot{y}'_i - x'(s)) \dot{y}'(s) + (y'_i + \epsilon \dot{x}'_i - y'(s)) \dot{x}'(s)}{(x'_i - \epsilon \dot{y}'_i - x'(s))^2 + (y'_i + \epsilon \dot{x}'_i - y'(s))^2} \right) ds.$$

Los elementos de matriz fuera de la diagonal ($i \neq j$) se obtienen, aproximadamente, suponiendo que la derivada normal no varía apreciablemente en el intervalo pequeño Δs y tomando el límite indicado

$$(2.2.26) \quad N_{1ij} = \frac{\Delta s}{2\pi} \left(\frac{-(x(s_i) - x(s_j)) \dot{y}'(s_j) + (y(s_i) - y(s_j)) \dot{x}'(s_j)}{(x(s_i) - x(s_j))^2 + (y(s_i) - y(s_j))^2} \right), \quad i \neq j.$$

Sin embargo, como en el caso de los elementos M_{1ij} , la expresión anterior tiene una singularidad cuando $i = j$ ($\vec{r} = \vec{r}'$), por lo que debemos volver a nuestra Ec. 2.2.25 para realizar el cálculo correspondiente. De nuevo hacemos el cambio de variable

$u = s - s_i$ y consideramos la expansión de Taylor alrededor de $u = 0$ para las derivadas de las coordenadas del perfil. Obtenemos a primer orden

$$(2.2.27) \quad \dot{y}'(s) = \dot{y}'(s_i + u) \approx \dot{y}'(s_i) + u\ddot{y}'(s_i)$$

$$\dot{x}'(s) = \dot{x}'(s_i + u) \approx \dot{x}'(s_i) + u\ddot{x}'(s_i).$$

Haciendo las substituciones pertinentes y realizando un álgebra engorrosa pero directa se llega a

$$(2.2.28) \quad N_{1ii} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\Delta s}{2}} \left(\frac{u^2 (\dot{x}'(s_i) \ddot{y}'(s_i) - \ddot{x}'(s_i) \dot{y}'(s_i)) + \epsilon}{u^2 + \epsilon^2} \right) du.$$

Integrando y tomando el límite obtenemos finalmente

$$(2.2.29) \quad N_{1ii} = \frac{\Delta s}{2\pi} (\dot{x}'(s_i) \ddot{y}'(s_i) - \ddot{x}'(s_i) \dot{y}'(s_i)) + \frac{1}{2}.$$

Con ésto, ya nos es posible obtener una expresión general para los elementos N_{1ij}

$$(2.2.30) \quad N_{1ij} = \frac{\Delta s}{2\pi} \left(\frac{-(x'(s_i) - x'(s_j)) \dot{y}'(s_j) + (y'(s_i) - y'(s_j)) \dot{x}'(s_j)}{(x'(s_i) - x'(s_j))^2 + (y'(s_i) - y'(s_j))^2} \right) (1 - \delta_{ij}) + \\ + \left(\frac{\Delta s}{2\pi} (\dot{x}'(s_i) \ddot{y}'(s_i) - \ddot{x}'(s_i) \dot{y}'(s_i)) + \frac{1}{2} \right) \delta_{ij}.$$

Por último, los elementos de matriz correspondientes a M_{2ij} y N_{2ij} se obtienen mediante un análisis idéntico al realizado anteriormente.

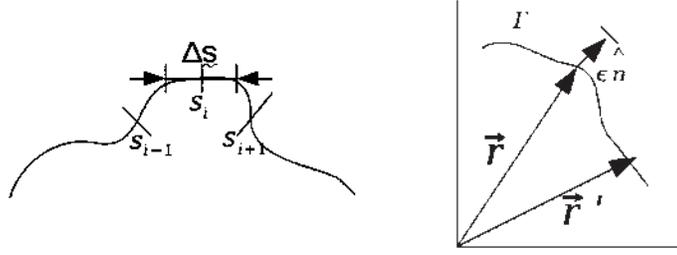


Figura 3.- A la izquierda discretización del contorno Γ en N secciones de longitud Δs . A la derecha traslación del vector de observación a una distancia ϵ de las fuentes.

Habiendo obtenido expresiones para los elementos de matriz, el sistema de ecuaciones algebraicas a resolver (Ec. 2.2.11) queda determinado.

2.3. El caso tridimensional

En esta sección formularemos el método de solución del modelo de microscopio capacitivo tridimensional. En este caso se utiliza el teorema de Green en tres dimensiones. Como en el apartado anterior, a partir de las ecuaciones (2.1.1), (2.1.2), (2.1.5) y las condiciones de frontera

- $\phi(\vec{r}) = \phi_1$, en ∂_1 ,
- $\phi(\vec{r}) = \phi_2$, en ∂_2 ,

es fácil deducir la validez de la expresión

$$(2.3.1) \quad \frac{\phi_1}{4\pi} \oint_{\partial_1} \frac{\partial G(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} da + \frac{\phi_2}{4\pi} \oint_{\partial_2} \frac{\partial G(\vec{r}; \vec{r}')}{\partial n'} da = \oint_{\partial_1 + \partial_2} \sigma(\vec{r}') G(\vec{r}; \vec{r}') da.$$

En esta ecuación \vec{r}' denota al punto de integración y ahora necesitamos dos parámetros para representar dicho vector. En este caso el formalismo numérico que se necesita

es semejante al formulado en el caso bidimensional. Resulta una ecuación integral cuya solución numérica proporciona la densidad de carga. Para obtener (numéricamente) esa densidad de carga es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones algebraicas. La matriz del sistema se obtiene por medio de elementos de matriz de cuatro matrices básicas: las dos matrices M_{1ij} y M_{2ij} ; y las dos matrices N_{1ij} y N_{2ij} .

2.3.1. Elementos de matriz en el espacio. Antes de proseguir es necesario escoger una parametrización adecuada que nos permita tratar las integrales de superficie. Como una generalización a la parametrización usada en el caso de superficies unidimensionales, consideremos en este nuevo caso una parametrización basada en dos longitudes de arco, a lo largo de direcciones localmente perpendiculares en cada punto de la superficies. Para ser más específicos, usaremos un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales que dependerá de la geometría de la superficie a ser discretizada.

Se tiene que el elemento diferencial de área se pueda representar mediante

$$(2.3.2) \quad da = ds_1 ds_2,$$

donde ds_1 y ds_2 son los diferenciales de arcos en las direcciones mutuamente perpendiculares. Por ejemplo, en el caso de las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (ver figura 4), se tiene que $ds_1 = r d\theta$ y $ds_2 = r \sin\theta d\phi$; además, el vector de posición de un punto arbitrario de la superficie se puede parametrizar tanto en términos de s_1 y s_2 , como en términos de θ y ϕ .

Algo que necesitaremos para nuestro formalismo es el vector normal dado por

$$(2.3.3) \quad \hat{n}' = \frac{\partial \vec{r}'(s_1, s_2)}{\partial s_1} \times \frac{\partial \vec{r}'(s_1, s_2)}{\partial s_2}.$$

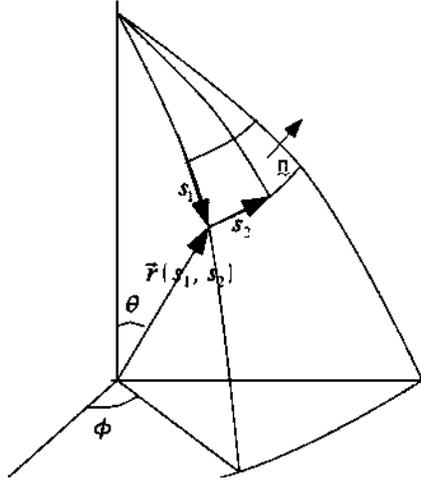


Figura 4.- Parametrización en el caso de coordenadas esféricas.

La función de Green de espacio libre que en el caso presente usaremos es

$$(2.3.4) \quad G(\vec{r}; \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Esta función físicamente representa el potencial electrostático que se tendría en el punto de observación \vec{r} , que sería producido por una carga puntual ubicada en el punto fuente \vec{r}' .

No es difícil seguir el formalismo del caso de dos dimensiones y construir el nuevo formalismo para el caso de tres dimensiones. Resulta que los elementos de matriz M_{1ij} se encuentran definidos por

$$(2.3.5) \quad M_{1ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s_{2j} - \frac{\Delta s_2}{2}}^{s_{2j} + \frac{\Delta s_2}{2}} \int_{s_{1j} - \frac{\Delta s_1}{2}}^{s_{1j} + \frac{\Delta s_1}{2}} \frac{ds_1 ds_2}{|\vec{r}(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}_i'|},$$

donde al igual que en la solución en el plano, la integración se realizará considerando un punto de observación apenas separado una distancia infinitesimal ϵ de la superficie. La indicada es nuestra forma de tratar la integración sobre la singularidad, aunque aclaramos que no es la única manera de hacerlo.

La expresión anterior presenta una singularidad cuando $i = j$ de forma que la integración la realizaremos por casos. Primero, para $i \neq j$ directamente usamos la relativa pequeñez de la superficie de integración para obtener una aproximación para la integral, además, en todos los cálculos numéricos presentados en esta tesis usaremos que $\Delta s = \Delta s_1 = \Delta s_2$. De esta manera, obtenemos el resultado

$$(2.3.6) \quad M_{1ij} = \frac{\Delta s^2}{|\vec{r}(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}(s_{1j}, s_{2j})|}, \quad i \neq j$$

que obviamente se puede reescribir en términos de las coordenadas cartesianas (x' , y' , z') del vector parametrizado $\vec{r}(s_1, s_2)$.

Para el caso $i = j$ primero necesitamos desarrollar el término $|\vec{r}(s_{i1}, s_{i2}) - \vec{r}(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'_i|$ en (2.3.5)

$$|\vec{r}(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}(s_{1j}, s_{2j}) + \epsilon \hat{n}'_i| = \sqrt{(x'(s_{1i}, s_{2i}) - x'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'_{ix})^2 + (y'(s_{1i}, s_{2i}) - y'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'_{iy})^2 + (z'(s_{1i}, s_{2i}) - z'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'_{iz})^2}$$

Introduciendo los cambios de variable $u_1 = s_1 - s_{1i}$ y $u_2 = s_2 - s_{2i}$ y considerando las expansiones

(2.3.7)

$$x'(s_{1i}, s_{2i}) - x'(u_1 + s_{1i}, u_2 + s_{2i}) = -(u_1 \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}))$$

$$y'(s_{1i}, s_{2i}) - y'(u_1 + s_{1i}, u_2 + s_{2i}) = -(u_1 \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i}))$$

$$z'(s_{1i}, s_{2i}) - z'(u_1 + s_{1i}, u_2 + s_{2i}) = -(u_1 \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i})),$$

obtenemos

(2.3.8)

$$|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}_i'| =$$

$$[u_1^2 \partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) + 2u_1 u_2 \partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) + \epsilon^2 (\hat{n}_i' \cdot \hat{n}_i')]$$

$$+ u_2^2 \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) + 2\epsilon (\partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \hat{n}_i' + \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \hat{n}_i')]^{\frac{1}{2}}.$$

Para facilitar el cálculo es conveniente considerar las siguientes relaciones, las cuales no son difíciles de demostrar y provienen básicamente del hecho de que estamos trabajando con un par de coordenadas curvilíneas ortogonales, montadas sobre la

superficies conductoras del microscopio capacitivo,

$$\begin{aligned}
 \partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) &= 1 \\
 \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) &= 1 \\
 \partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.3.9}$$

$$\partial_{s_1} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\partial_{s_2} \vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) \cdot \hat{n} = 0$$

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1.$$

Con ésto obtenemos

$$|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}_i'| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2}.$$

Sustituyendo la expresión anterior en la Ec. 2.3.5 obtenemos

$$M_{1ii} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{du_1 du_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2}}.$$

Finalmente, integrando y tomando el límite resulta que los elementos de la diagonal están dados por

$$M_{1ii} = 2\Delta s \ln \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right].$$

Este resultado es válido otra vez para el caso en que las longitudes de arco usadas para la discretización son iguales.

Podemos entonces representar la matriz M_{1ij} como

$$(2.3.13) \quad M_{1ij} = 2\Delta s \ln \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{-1 + \sqrt{2}} \right] \delta_{ij} + \left[\frac{\Delta s^2}{|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_{1j}, s_{2j})|} \right] (1 - \delta_{ij}).$$

Ahora comencemos con el cálculo de los elementos de matriz complementarios N_{1ij} . En este caso hay que ser cuidadosos porque el resultado correcto depende de que tomemos el límite hasta el final del cálculo. Consideremos la expresión

$$(2.3.14) \quad N_{1ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{s_{2j} - \frac{\Delta s_2}{2}}^{s_{2j} + \frac{\Delta s_2}{2}} \int_{s_{1j} - \frac{\Delta s_1}{2}}^{s_{1j} + \frac{\Delta s_1}{2}} \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'|} \right) \cdot \hat{n}' ds_1 ds_2.$$

Empecemos representando el gradiente de la función de Green

$$(2.3.15) \quad \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'|} \right) = \frac{\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'}{|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'|^3},$$

y el vector normal

$$\hat{n}' = n'_x \hat{i} + n'_y \hat{j} + n'_z \hat{k}.$$

Las componentes de ese vector se pueden escribir considerando la Ec. 2.3.3 como

$$(2.3.16) \quad \begin{aligned} n'_x &= (\partial_{s_1} y'(s_1, s_2) \partial_{s_2} z'(s_1, s_2) - \partial_{s_1} z'(s_1, s_2) \partial_{s_2} y'(s_1, s_2)) \\ n'_y &= -(\partial_{s_1} x'(s_1, s_2) \partial_{s_2} z'(s_1, s_2) - \partial_{s_1} z'(s_1, s_2) \partial_{s_2} x'(s_1, s_2)) \\ n'_z &= (\partial_{s_1} x'(s_1, s_2) \partial_{s_2} y'(s_1, s_2) - \partial_{s_1} y'(s_1, s_2) \partial_{s_2} x'(s_1, s_2)). \end{aligned}$$

Con lo anterior podemos reescribir la Ec. 2.3.14 como

$$(2.3.17) \quad N_{1ij} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{s_{2j} - \frac{\Delta s_2}{2}}^{s_{2j} + \frac{\Delta s_2}{2}} \int_{s_{1j} - \frac{\Delta s_1}{2}}^{s_{1j} + \frac{\Delta s_1}{2}} \frac{(\vec{r}'(s_{i1}, s_{i2}) - \vec{r}'(s_1, s_2)) \cdot \hat{n}' - \epsilon \hat{n}'_i \cdot \hat{n}'}{|\vec{r}'(s_{i1}, s_{i2}) - \vec{r}'(s_1, s_2) - \epsilon \hat{n}'_i|^3} ds_1 ds_2.$$

Para los elementos de matriz fuera de la diagonal ($i \neq j$) hacemos la aproximación multicitada. Resulta que

$$(2.3.18) \quad N_{1ij} = \Delta s^2 \frac{(\vec{r}'(s_{i1}, s_{i2}) - \vec{r}'(s_{j1}, s_{j2})) \cdot \hat{n}'}{|\vec{r}'(s_{i1}, s_{i2}) - \vec{r}'(s_{j1}, s_{j2})|^3}, \quad i \neq j.$$

En el caso en el que se tiene $i = j$, conviene introducir el cambio de variable 2.3.7.

Con esa sustitución el integrando de la Ec. 2.3.14 se convierte en

$$(2.3.19) \quad \begin{aligned} & \nabla' \left(\frac{1}{|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_1, s_2) + \epsilon \hat{n}'_i|} \right) \cdot \hat{n}' = \\ & - \frac{(u_1 \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i})) n'_x}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{(u_1 \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i})) n'_y}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{(u_1 \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i})) n'_z}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \\ & - \frac{\epsilon}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la Ec. 2.3.10. Expandiendo las derivadas hasta primer orden mediante series de Taylor

$$\partial_{s_1} x'(s_1, s_2) = \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_1 \partial_{s_1}^2 x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$\partial_{s_2} x'(s_1, s_2) = \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2}^2 x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_1 \partial_{s_1} \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$\partial_{s_1} y'(s_1, s_2) = \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_1 \partial_{s_1}^2 y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i})$$

(2.3.20)

$$\partial_{s_2} y'(s_1, s_2) = \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2}^2 y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_1 \partial_{s_1} \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$\partial_{s_1} z'(s_1, s_2) = \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_1 \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$\partial_{s_2} z'(s_1, s_2) = \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_1 \partial_{s_1} \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i}).$$

Al sustituir 2.3.19 y 2.3.20 en la Ec. 2.3.14 se obtiene una expresión bastante larga. Es por eso que a partir de ahora comenzaremos a trabajar por separado con las cuatro integrales correspondientes al lado derecho de 2.3.14, obtenidas al realizar las sustituciones citadas anteriormente. Estas son

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-(u_1 \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i})) n'_x}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2, \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-(u_1 \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i})) n'_y}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2, \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-(u_1 \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i})) n'_z}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2, \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-\epsilon}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2.
\end{aligned}
\tag{2.3.21}$$

Desarrollando el producto en el numerador de la primera integral obtenemos

$$\begin{aligned}
& -(u_1 \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i})) n'_x = au_1^2 \\
& +bu_2^2 + cu_1^3 + du_1^2 u_2 + eu_2^2 u_1 + fu_1 + gu_2 + hu_1 u_2,
\end{aligned}
\tag{2.3.22}$$

donde

(2.3.23)

$$a = \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) \left(\partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i}) \right)$$

$$b = \partial_{s_1}^2 x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2}^2 y'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$c = \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$d = \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2}^2 y'(s_{1i}, s_{2i}) + \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$e = \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2}^2 y'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$f = \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$g = \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i})$$

$$h = \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) \left(\partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + \partial_{s_2}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i}) \right)$$

$$+ \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2}^2 y'(s_{1i}, s_{2i}).$$

Entonces la primera integral en 2.3.21 se convierte en

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{au_1^2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{bu_2^2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 \\
& + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{cu_1^3}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{du_1^2 u_2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 \\
(2.3.24) \quad & + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{eu_2^2 u_1}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{fu_1}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 \\
& + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{gu_2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 + \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{hu_1 u_2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2.
\end{aligned}$$

Los términos en la expresión anterior los podemos integrar para obtener

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{au_1^2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = a \Delta s \ln \left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right] \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{bu_2^2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = b \Delta s \ln \left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right] \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{cu_1^3}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = 0 \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{du_1^2 u_2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = 0 \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{eu_2^2 u_1}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = 0 \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{fu_1}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = 0 \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{gu_2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = 0 \\
& \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{hu_1 u_2}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.3.25}$$

Por lo tanto, para la primera integral de la Ec. 2.3.21 resulta que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-(u_1 \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i})) n'_x}{(u_1^2+u_2^2+\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = (a+b) \Delta s \ln \left[\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \right].
\tag{2.3.26}$$

De forma similar procedemos a realizar la segunda integral de la Ec. 2.3.21. En este caso tenemos

$$(2.3.27) \quad \begin{aligned} & - (u_1 \partial_{s_1} y'(s_{i1}, s_{i2}) + u_2 \partial_{s_2} y'(s_{i1}, s_{i2})) n'_y = a' u_1^2 + b' u_1^3 \\ & + c' u_2^2 + d' u_1^2 u_2 + e' u_2 + f' u_1 + g' u_1 u_2 + h' u_2^2 u_1, \end{aligned}$$

donde los coeficientes del miembro derecho tienen una analogía directa con los correspondientes en la Ec. 2.3.23.

Con la experiencia adquirida al realizar la integral anterior, podemos inferir que los únicos términos no nulos de la integración son $a' u_1^2$ y $c' u_2^2$. Con ésto, la segunda integral de 2.3.21 es

$$(2.3.28) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-(u_1 \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i})) n'_y}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = (a' + c') \Delta s \ln \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right].$$

En la expresión anterior los coeficientes a' y c' están dados por

$$(2.3.29) \quad \begin{aligned} a' &= -\partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) \left(\partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + \partial_{s_1}^2 z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) \right) \\ c' &= -\partial_{s_1}^2 y'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2}^2 x'(s_{1i}, s_{2i}). \end{aligned}$$

Para la tercera integral tenemos

$$(2.3.30) \quad \begin{aligned} & - (u_1 \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i})) n'_z = a'' u_1^3 + \\ & b'' u_2^2 u_1 + c'' u_1^2 u_2 + d'' u_1 u_2 + e'' u_1 + f'' u_1^2. \end{aligned}$$

Resulta que

$$(2.3.31) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-(u_1 \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) + u_2 \partial_{s_2} z'(s_{1i}, s_{2i})) n'_z}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = f'' \Delta s \ln \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right],$$

donde

$$(2.3.32) \quad f'' = \partial_{s_1} z'(s_{1i}, s_{2i}) \left(\partial_{s_2} \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) - \partial_{s_1}^2 x'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} y'(s_{1i}, s_{2i}) \right. \\ \left. - \partial_{s_2} \partial_{s_1} y'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_1} x'(s_{1i}, s_{2i}) + \partial_{s_1}^2 y'(s_{1i}, s_{2i}) \partial_{s_2} x'(s_{1i}, s_{2i}) \right)$$

Finalmente, consideremos la última integral

$$(2.3.33) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-\epsilon}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 4 \arctan \left[\frac{\Delta s^2}{2\epsilon \sqrt{2\Delta s^2 + 4\epsilon^2}} \right].$$

Al realizar el límite obtenemos

$$(2.3.34) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\frac{\Delta s_2}{2}}^{\frac{\Delta s_2}{2}} \int_{-\frac{\Delta s_1}{2}}^{\frac{\Delta s_1}{2}} \frac{-\epsilon}{(u_1^2 + u_2^2 + \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} du_1 du_2 = -2\pi.$$

Con este resultado podemos reescribir los elementos de la diagonal N_{1ii} como

$$(2.3.35) \quad N_{1ii} = (a + b + a' + c' + f'') \Delta s \ln \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right] - 2\pi,$$

o en su forma general

$$(2.3.36) \quad N_{1ij} = \left[(a + b + a' + c' + f'') \Delta s \ln \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right] - 2\pi \right] \delta_{ij} + \left[\frac{\Delta s^2 (\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_{1j}, s_{2j})) \cdot \hat{n}'}{|\vec{r}'(s_{1i}, s_{2i}) - \vec{r}'(s_{1j}, s_{2j})|^3} \right] (1 - \delta_{ij}).$$

En base a los resultados mostrados anteriormente tenemos bien definido el sistema de ecuaciones algebraico y, resolviéndolo, la densidad de carga en las superficies

conductoras del microscopio capacitivo. Esta es la parte principal en la resolución del problema. Una vez obtenida dicha densidad de carga el cálculo del potencial electrostático en la región vacía, la capacitancia, u otras propiedades del sistema, ya puede realizarse fácilmente.

Capítulo 3

El Microscopio de capacitancia

En este capítulo utilizaremos el concepto de capacitancia para obtener información de la morfología de la superficie de los conductores presentes en el microscopio capacitivo estudiado. El formalismo presentado en el capítulo anterior es válido para superficies extendidas (abiertas) y ese caso ha sido tratado extensamente en la literatura [11]. Menos conocido es el caso de superficies cerradas [22] y es el caso que nos interesa por sus potenciales aplicaciones al estudio de sistemas nanométricos.

Consideremos que el microscopio bajo estudio está constituido por dos partes: Un objeto a observar y un dispositivo que sirva como observador. Considérese otra vez la figura 1. Las superficies mostradas representan superficies de materiales conductores sujetos a una diferencia de potencial. Por lo tanto podemos considerar que esta figura representa dos capacitores (izquierdo y derecho). En ambos el conductor exterior tiene una punta escaneadora, a la que nombraremos *objetivo*, mientras que el conductor en el interior será el objeto que esperamos observar.

Ahora consideremos la definición de capacitancia dada por

$$(3.0.37) \quad C = \frac{Q}{\Delta\phi},$$

donde $\Delta\phi = |\phi_2 - \phi_1|$ es la diferencia de potencial (positiva) entre los conductores y Q es la carga (también positiva) del capacitor. Esta carga la podemos calcular integrando la densidad de carga, σ_1 , sobre la superficie del objeto, tal como lo expresa

la ecuación

$$(3.0.38) \quad Q = \left| \int_{\partial_1} \sigma_1 da \right| \approx \left| \sum_{i=1}^{N1} \sigma_{1i} \Delta a \right|.$$

La capacitancia del sistema la podemos reescribir como

$$(3.0.39) \quad C = \frac{\Delta a}{\Delta \phi} \sum_{i=1}^{N1} \sigma_{1i}.$$

Por lo tanto, el problema de encontrar la capacitancia en el sistema objeto-objetivo consiste en encontrar las densidades de carga distribuidas en la superficie del objeto que podemos calcular mediante el sistema de ecuaciones (2.2.11). Sin embargo, ésto aún no es suficiente para hablar de un microscopio capacitivo, porque no hemos aclarado cómo se puede obtener la imagen capacitiva del objeto. Es por eso que antes de proseguir enunciaremos la siguiente conjetura:

Conjetura 1. *El cambio de orientación relativa entre el objetivo y el objeto modifica la distribución de carga eléctrica sobre la superficie del objeto y así, en general, la capacitancia del sistema.*

Esta conjetura se puede justificar por el hecho de que al cambiar la orientación relativa cambia la geometría del sistema y, por lo tanto, la capacitancia también presenta un cambio. La orientación relativa la podemos manejar por medio de un ángulo de rotación para el caso bidimensional y por dos ángulos de rotación para el caso tridimensional. Así, la capacitancia se vuelve función de esos ángulos y esa función, representada adecuadamente, es lo que define a la imagen capacitiva del objeto. En este sentido ya nos es posible hablar acerca de un microscopio capacitivo basado en la rotación (escaneo) del objetivo alrededor del objeto y de la medición de la capacitancia para cada ángulo de rotación. De esta manera obtendremos una

función, $C(\theta)$ (caso bidimensional) o $C(\theta, \varphi)$ (caso tridimensional), que contendrá información de la morfología del objeto.

Vale la pena en este momento hacer un par de aclaraciones. La primera es que aunque hablamos de ángulos de rotación, no hay que imaginar al objetivo girando continuamente alrededor del objeto con alguna velocidad angular. Se realiza la rotación para llevar a cabo el escaneo, pero se tiene que ir haciendo reposo en el sistema para que se establezca la condición electrostática. Es hasta entonces cuando se toma la medida de la capacitancia. La segunda es que la imagen capacitiva depende tanto del objeto como del objetivo. Estamos en una situación en la que el observador afecta a lo observado, tal como sucede en el dominio cuántico. Esto sucede particularmente por la cercanía necesaria que debe tenerse entre el objeto y el objetivo. El microscopio es de campo cercano porque simulaciones numéricas muestran que al alejar el objetivo se pierde rápidamente la resolución de las imágenes, por lo que es necesario tener esa relativa cercanía.

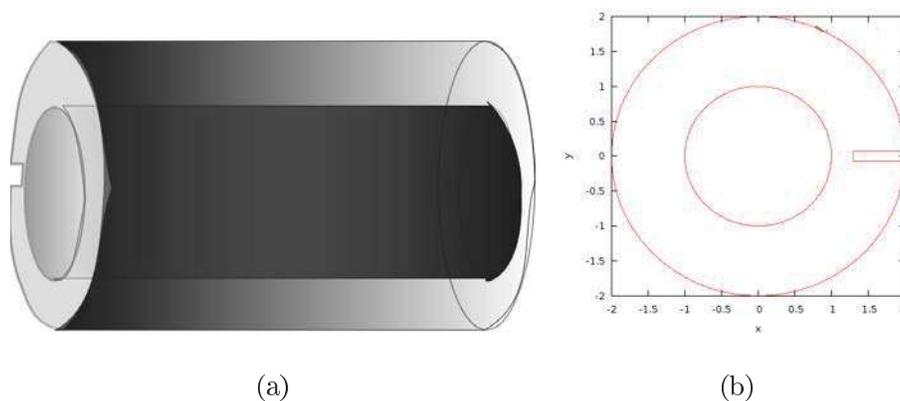


Figura 5.- (a) Microscopio capacitivo con geometría cilíndrica.

(b) Perfiles de un corte transversal del microscopio capacitivo.

3.1. Resultados numéricos para el microscopio capacitivo cilíndrico

Considérese el caso del capacitor cilíndrico mostrado en la figura 5. Como ya se explicó anteriormente, el escaneo de la superficie se realizaría aplicando sucesivas rotaciones al objetivo y se mediría la capacitancia correspondiente. En nuestro modelo, la simetría a lo largo del eje asume que tenemos superficies de longitud infinita. Para los cálculos numéricos que mostraremos a continuación usaremos el concepto de capacitancia por unidad de longitud, C_l . Esta cantidad se define por

$$(3.1.1) \quad C_l(\theta) = \frac{C(\theta)}{L},$$

en donde L es la longitud de una sección del microscopio capacitivo a lo largo del eje de simetría y $C(\theta)$ está dada en la Ec. 3.0.39. Agregamos que graficando en coordenadas polares la capacitancia $C_l(\theta)$, calculada como función del ángulo de rotación, obtenemos una imagen capacitiva del objeto.

Es necesario checar que, al menos en algún caso particular, el método numérico presentado proporciona resultados correctos. Para ésto, consideremos el caso en el cual el capacitor está formado por dos cilindros coaxiales, cuyo eje común está a lo largo del eje z . Físicamente, en un prototipo de microscopio capacitivo se debe cumplir la condición $L_c \gg r_2$, donde L_c es la longitud finita de los conductores cilíndricos y r_2 es el radio (interior) del cilindro exterior. Para ésta geometría se puede encontrar una expresión analítica del potencial electrostático y de la capacitancia.

El potencial está dado por

$$(3.1.2) \quad \phi(r) = (\phi_2 - \phi_1) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_1}\right)}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} + \phi_1,$$

donde r es la distancia perpendicular desde el punto de observación hasta el eje z . Mientras que para la capacitancia por unidad de longitud obtenemos

$$(3.1.3) \quad C_l = \frac{1}{2 \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Para nuestros cálculos elegimos los valores de los potenciales de los conductores como $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = 1$; los radios de los cilindros correspondientes fueron $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$. El valor numérico para la capacitancia, obtenido utilizando el método integral propuesto, fué 0,7212, que es muy cercano al valor analítico 0,7213 obtenido al utilizar la ecuación 3.1.3. Además, la figura 6 muestra el potencial electrostático, en una dirección radial, dentro de la región vacía entre los dos conductores. La gráfica muestra con estrellas rojas el potencial electrostático calculado analíticamente y con círculos azules el potencial calculado mediante el método numérico. Se observa que ambas curvas prácticamente se traslapan. Esto muestra que el método numérico está funcionando.

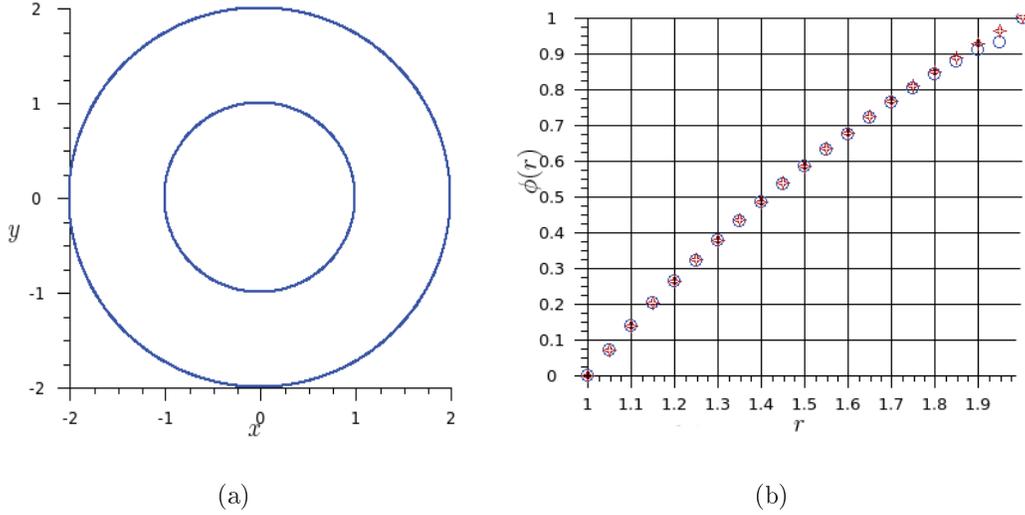


Figura 6.- (a) Geometría de un capacitor cilíndrico con radios $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$. (b) Comparación entre los resultados analítico (estrellas) y numérico (círculos) para el potencial electrostático.

Ahora considérese la geometría del microscopio mostrada en la figura 5b. En este caso el círculo exterior, con radio $r_2 = 2$, presenta una punta rectangular, que tomamos de longitud 0,7 y ancho 0,14. Para este sistema el cálculo numérico dió un valor para la capacitancia $C_l = 0,655$. Al comparar este valor con el que se tiene en el caso sin punta (resultado numérico del caso anterior) que es 0.721, se nota una apreciable variación de la capacitancia debido a la presencia de la punta. Esto nos dice que las imágenes que podemos obtener no son exclusivas del objeto, sino que dependen de la presencia de la punta. Debemos aclarar que para el caso presente no se conoce solución analítica para la capacitancia.

Primeramente, para un simple propósito de comparación, se muestra en la figura 7a lo que podría considerarse como la imagen de un objeto circular de radio $r_1 = 1$,

calculada usando un objetivo que también es circular pero de radio $r_2 = 2$. Como era de esperarse la imagen es un circunferencia de radio $C_l(\theta) = 0,721$.

Para el microscopio de la figura 5b mostramos imágenes obtenidas de varios objetos. La imagen mostrada en la figura 7b corresponde al mismo objeto que en el caso anterior, pero ahora el objetivo tiene una punta. Dicha imagen es una circunferencia de radio $C_l(\theta) = 0,655$. Al comparar esta imagen (Fig. 7b) con la anterior (Fig. 7a) es evidente el efecto perturbador de la punta en el funcionamiento del microscopio. Aunque parece trivial el cálculo de la imagen de un objeto circular, numéricamente es necesario hacerlo para checar que nuestros programas computacionales den resultados simétricos correspondientes a la simetría de las geometrías propuestas.

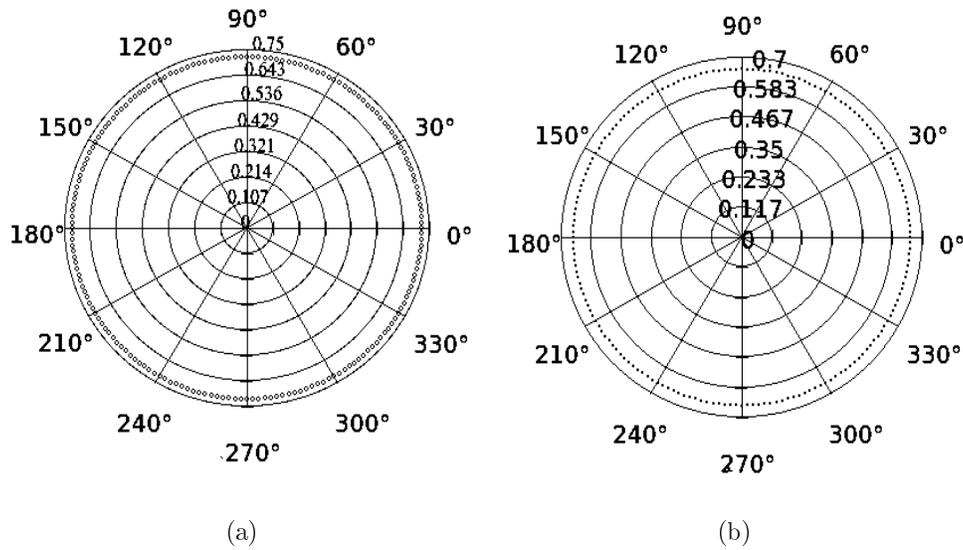


Figura 7.- (a) Imagen correspondiente al objeto mostrado en la figura 6a. (b) Imagen correspondiente al objeto mostrado en la figura 5b.

Veamos qué imagen resulta al considerar un objeto de topografía menos sencilla. Sea un objeto circular de radio $r_1 = 1$ con cuatro protuberancias rectangulares

iguales, de altura 0,2 y de anchura 0,18. que se puede observar en la figura 8a. El objetivo corresponde al utilizado en el caso anterior. En la figura 8b se muestra la imagen capacitiva y se observan protuberancias en la imagen, que corresponden en buena medida a las del objeto. Notamos que las protuberancias en la imagen no son rectangulares, pero de todas maneras esa imagen nos da una idea de la geometría del objeto original. Desafortunadamente, con la única información contenida en esta imagen resulta imposible reproducir la geometría del objeto. Si además consideramos que se conocen las características de la punta, de todas maneras la reproducción del objeto es un problema difícil. Este interesante problema es de hecho un *problema inverso* cuyo estudio no está considerado en el desarrollo de esta tesis.

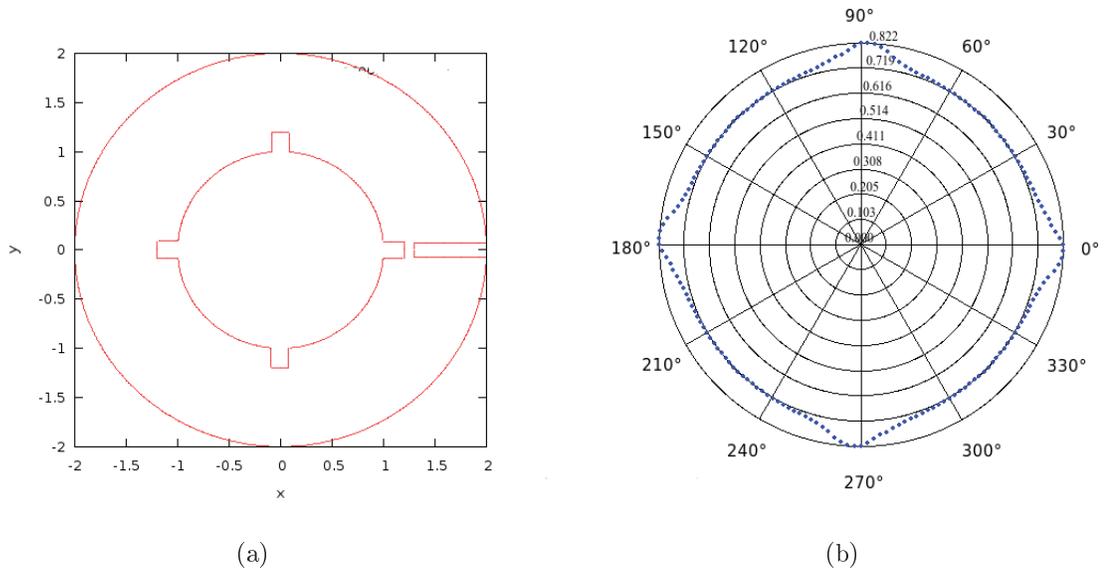
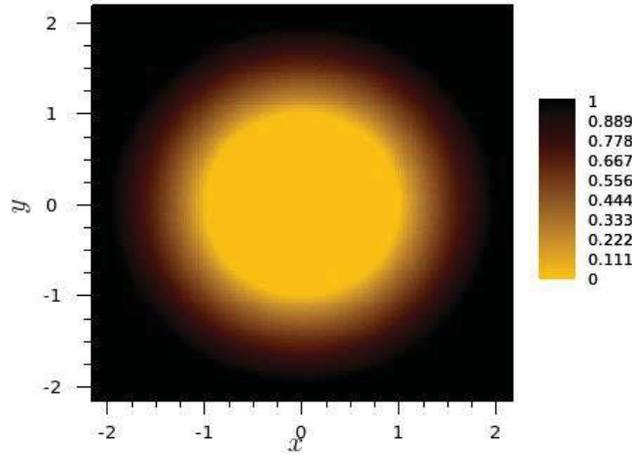


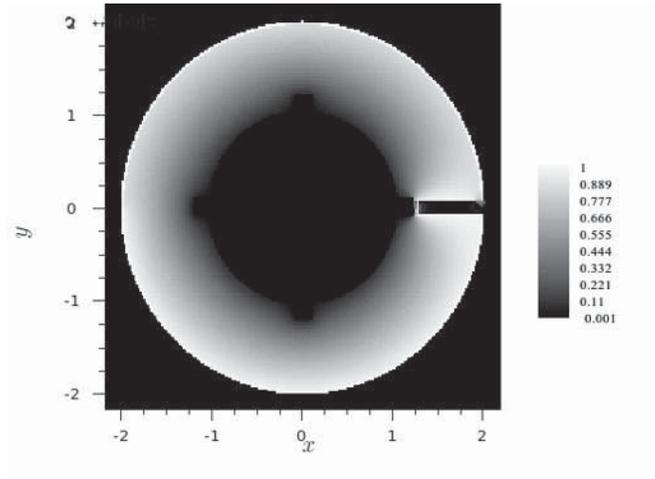
Figura 8.- (a) Objetivo con una punta rectangular

y objeto circular con cuatro protuberancias. (b) Imagen correspondiente al objeto mostrado en (a).

Las figuras 9a y 9b muestran el potencial electrostático correspondiente a los sistemas objeto-objetivo mostrados en las figuras 6a y 8a, respectivamente. Podemos observar que en términos generales los resultados observados son consistentes con las condiciones de frontera propuestas. Por ejemplo, en ambos casos el potencial electrostático es menos intenso cerca del objeto y es posible apreciar como se intensifica el gradiente del potencial (campo eléctrico) en la región cercana a la punta del objetivo.



(a)



(b)

Figura 9.- (a) Potencial electrostático correspondiente al sistema mostrado en la figura 6a. (b) Potencial electrostático correspondiente al sistema mostrado en la figura 8b.

3.1.1. Superficies aleatorias con estadística gaussiana. Una de las principales características de los objetos estudiados en las secciones anteriores es su

simetría. En este caso, debido a que el perfil de las superficies está bien determinado se dice que son *superficies deterministas*. En contraposición a este caso se tiene que los objetos reales de los cuales nos gustaría obtener imágenes en general no son simétricos y muchas veces, a pequeña escala, presentan rugosidades sin un orden aparente. Aún más, a veces los resultados experimentales resultan del efecto promedio sobre un gran número de pequeñas superficies. El modelado en este caso considera a las superficies como *superficies aleatorias*, con una cierta estadística. En este caso no necesitamos conocer el perfil de las superficies. Nos basta con el tipo de estadística y los parámetros que la determinan. Al respecto, es muy común la estadística gaussiana, que está determinada en base a dos parámetros: la desviación estándar de alturas y la longitud de correlación. En el caso de objetos cilíndricos con superficies aleatorias cerradas una forma de modelarlas es mediante un ensamble de un gran número de perfiles cerrados, a los cuales se les llama *realizaciones*. En [21] se describe un método numérico para generarlas y a continuación se exponen brevemente las bases.

Si una función $r(\theta)$, con $0 \leq \theta < 2\pi$, representa en coordenadas polares a un perfil dado con promedio $\langle r(\theta) \rangle = R$, definimos la función

$$(3.1.4) \quad \rho(\theta) = r(\theta) - R,$$

donde $\rho(\theta)$ representa la variación radial de un perfil respecto a una circunferencia de radio R . La superficie aleatoria que suponemos gaussiana puede ser modelada por medio de una distribución gaussiana dada por la densidad de probabilidad

$$(3.1.5) \quad f(\rho) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\rho-\langle\rho\rangle)^2}{2\sigma^2}},$$

donde σ representa la desviación estándar de alturas y el significado de este parámetro es un ancho promedio de las variaciones en la rugosidad aleatoria, además, $\langle \rangle$ significa el promedio de la cantidad contenida por ese símbolo. Además, es necesario considerar la función de correlación angular

$$(3.1.6) \quad B(\theta, \theta') = \frac{1}{\sigma^2} \langle \rho(\theta) \rho(\theta') \rangle.$$

Asumiendo que esta función tiene una forma gaussiana

$$B(\theta, \theta') = e^{-\frac{(\theta - \theta')^2}{\Theta^2}},$$

donde Θ representa la longitud correlación angular y el significado de este parámetro es la longitud de onda promedio de las variaciones en la rugosidad aleatoria.

Resulta que un ensamble de perfiles con estas propiedades estadísticas puede ser generado numéricamente por la siguiente expresión

$$(3.1.7) \quad \rho(\theta_k) = \sigma \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\Delta\theta}{\Theta\sqrt{\pi}} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{2(\Delta\theta_j)^2}{\Theta^2}} X_{j+k},$$

aquí X_j representa variables gaussianas con media cero y desviación estándar igual a uno, θ_k es un elemento de una discretización del ángulo θ , la cual está definida por $\theta_k = k\Delta\theta$, $k = 0, 1, \dots, n$, donde $\Delta\theta$ es el intervalo angular de discretización.

La figura 10 muestra tres realizaciones cuya estadística gaussiana está determinada por los parámetros $\sigma = 0,0970873$, $\Theta = 0,087266 \text{ rad}$ para la primera; $\sigma = 0,051813$, $\Theta = 0,13962 \text{ rad}$ para la segunda; y $\sigma = 0,0980392$, $\Theta = 0,1483352 \text{ rad}$ para la tercera. Se observa que un aumento en la longitud de correlación angular da lugar a un aumento de la rugosidad en el perímetro de la circunferencia y un

aumento de la desviación estándar de alturas da lugar a que se tengan rugosidades más grandes.

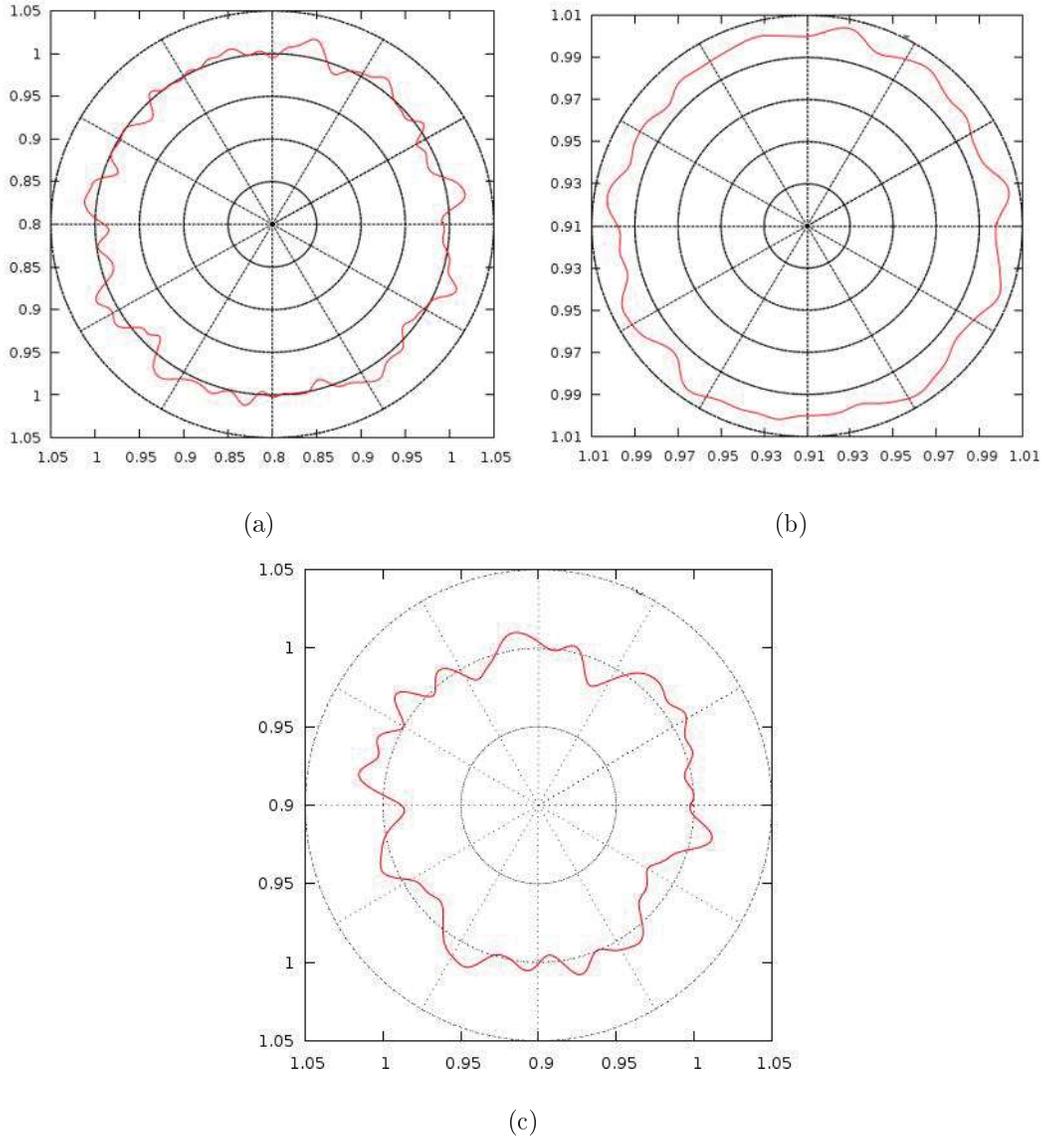


Figura 10.- Realizaciones de objetos con rugosidades aleatorias.

Nuestro método numérico puede dar imágenes capacitivas de los objetos mostrados en la figura 10. En la figura 11 se muestran las imágenes correspondientes a los objetos anteriores. Se pueden observar bastantes similitudes entre imágenes y

objetos, sin embargo, muchos detalles de los objetos se pierden. Por comparación podemos deducir que a la mayor resolución en la imagen se obtiene cuando el perfil es suave. Este tipo de perfiles tienen una desviación estándar de alturas pequeña y una longitud de correlación angular grande.

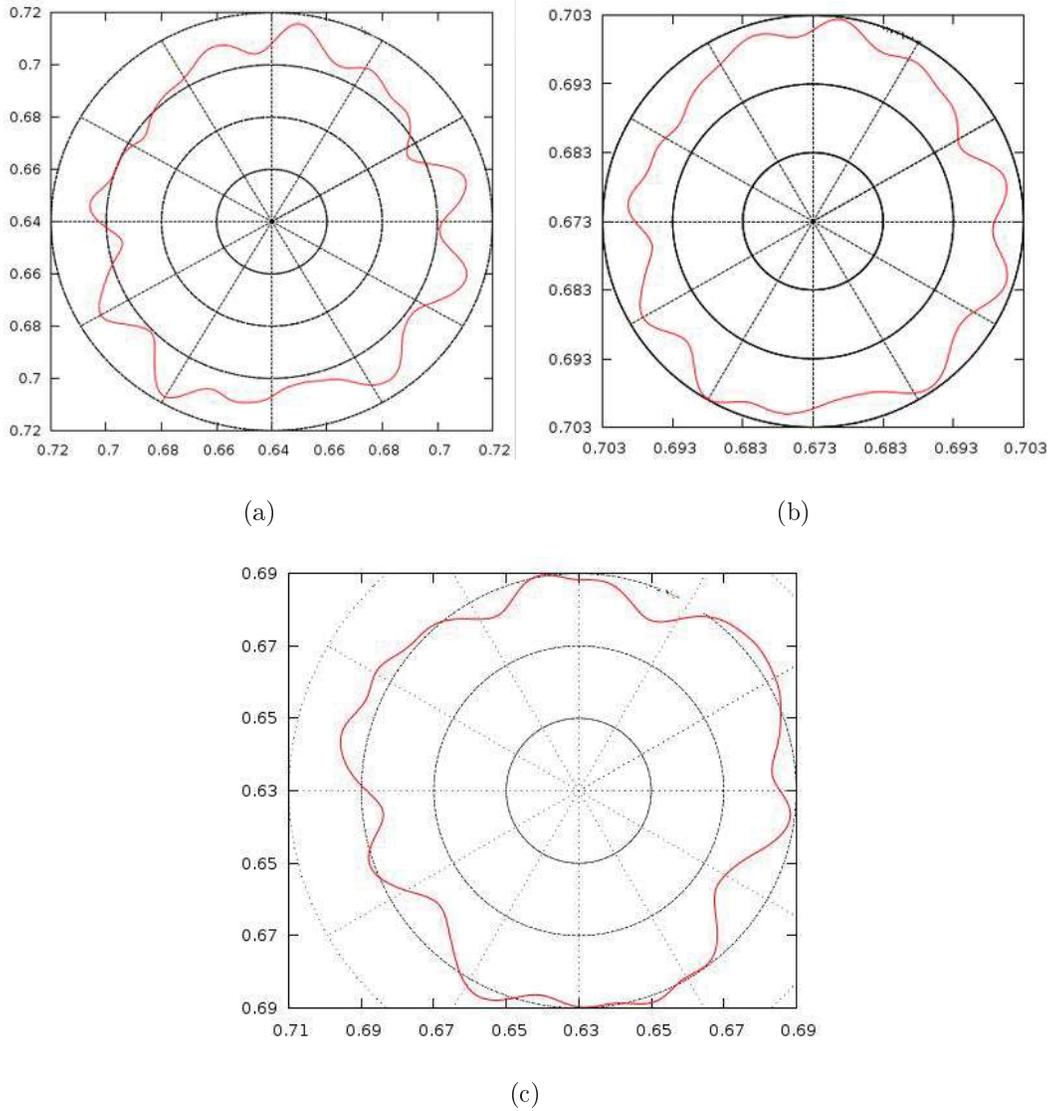


Figura 11.- Imagenes obtenidas de los objetos mostrados en la figura 10.

Considerando que las superficies aleatorias de los objetos que estamos considerando se asumen con estadística gaussiana, nos gustaría estudiar la posibilidad de recuperar algunas de las propiedades estadísticas de un objeto dado a partir de las imágenes de las realizaciones de éste. Esta cuestión nos lleva a la siguiente

Conjetura 2. *La estadística de las imágenes capacitivas corresponde a una estadística gaussiana.*

Para mostrar que la conjetura anterior es verdadera (o falsa) estudiamos la estadística de las imágenes obtenidas de dos casos de superficies aleatorias. En el primer caso se tiene una superficie con los parámetros $\sigma = 0,0970873$, $\Theta = 0,087266 \text{ rad}$; en el segundo caso $\sigma = 0,0980392$, $\Theta = 0,1483352 \text{ rad}$. La tabla 1 muestra algunos parámetros estadísticos correspondientes a estos dos casos. Para el cálculo se consideraron 100 imágenes de realizaciones; cada imagen contiene 180 valores de la capacitancia, obtenidos para los ángulos $\theta = 0^\circ, 2^\circ, 4^\circ, \dots, 358^\circ$.

	primer caso	segundo caso
$\langle C_l \rangle$	0.70558771	0.6879351
σ	0.00508008	4.5862E-3

Tabla 1.- Parámetros estadísticos correspondientes a las imágenes (a) y (c) mostradas en la figura 11.

Las figuras 12 y 13 muestran la comparación entre la densidad de probabilidad teórica (puntos) y la densidad de probabilidad obtenida numéricamente (impulsos) de los datos correspondientes a las imágenes de los dos casos anteriormente presentados. En la Fig. 12 se muestra un intervalo para la capacitancia mayor que en el caso de la Fig. 13 con el objetivo de mostrar el intervalo donde no hay correspondencia de lo numérico con lo analítico. En dichas figuras se puede observar cierta concordancia

entre ambas curvas en el intervalo donde existen valores para las dos densidades de probabilidad, sin embargo, ésto no garantiza que efectivamente el conjunto de datos asociado a las imágenes posea una distribución gaussiana. Aunque a simple vista se puede ver que bajo algún criterio algo laxo la distribución numérica se puede aproximar por la distribución gaussiana, podemos ser más estrictos y aplicar, por ejemplo, el test de Kolmogorov-Smirnov [19], que nos permite obtener una medida de la concordancia entre un conjunto de datos y una función de distribución teórica dada. El test nos arroja dos parámetros: D definido como el máximo valor absoluto de la diferencia entre dos funciones de distribución acumulativas y P , que nos dice el nivel de significancia. Valores de P cercanos a cero nos indican una diferencia significativa entre el conjunto de datos y la función dada. La tabla 2 muestra los parámetros obtenidos mediante el test de Kolmogorov-Smirnov. Resulta que el parámetro P para las Figs. 12 y 13 es prácticamente cero (del orden de 10^{-17}), con lo cual se infiere que el conjunto de datos que forman las imágenes, bajo este criterio, no pertenecen a la misma distribución gaussiana. Lógicamente, podrían compararse los resultados numéricos con otra distribución gaussiana, con diferente media y desviación estándar, quizás con algún resultado positivo en el nivel de significancia.

	Figura 12	Figura 13
D	1.0000	0.6879
P	0.0000	0.0000

Tabla (2).- Parámetros obtenidos del Test de Kolomorov-Smirnov realizado a las curvas de las Figs. 12 y 13.

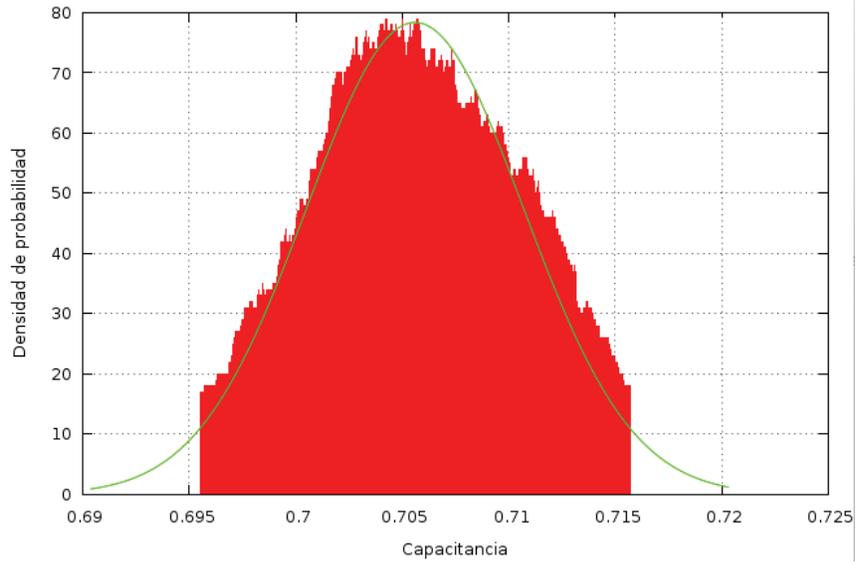


Figura 12.- Comparación entre la densidad de probabilidad teórica (curva con puntos) y la densidad de probabilidad obtenida numéricamente con los parámetros correspondientes a la Fig. 10a.

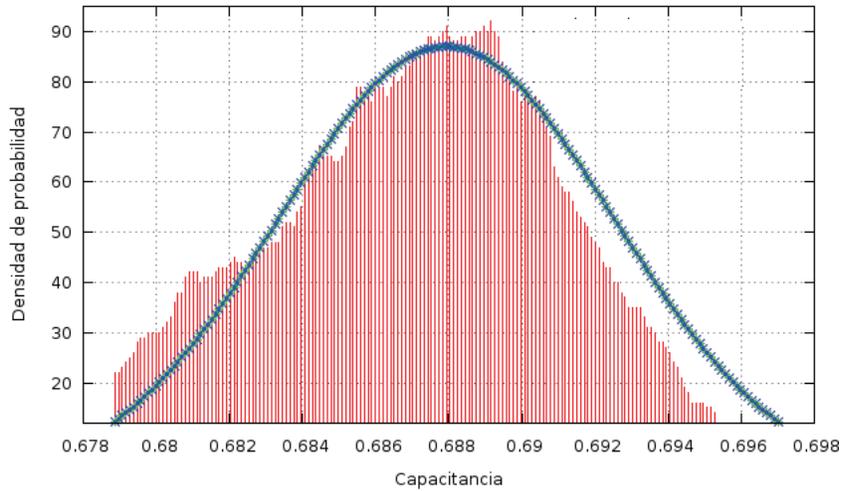


Figura 13.- Comparación entre la densidad de probabilidad teórica (curva con puntos) y la densidad de probabilidad obtenida numéricamente con los parámetros correspondientes a la Fig. 10c.

Ahora consideremos el problema de encontrar los parámetros estadísticos (desviación estándar de alturas y longitud de correlación angular) de una superficie aleatoria (supuesta con estadística gaussiana) a partir de los resultados que podemos obtener por medio de nuestra técnica de microscopía capacitiva. En [11] se describe un método por el cual es posible obtener información de propiedades estadísticas. El sistema estudiado es un plano corrugado como objeto extendido que es escaneado por un plano que tiene una punta gaussiana como objetivo. Básicamente, ese método utiliza valores de la capacitancia por unidad de longitud normalizada

$$(3.1.8) \quad C_N = \frac{C_l}{C},$$

donde C es la capacitancia entre dos planos separados una distancia D_0 y C_l es la capacitancia medida en la parte central del objeto con una separación D entre el plano medio del objeto y el plano que contiene a la punta. Para un valor dado del parámetro D se puede encontrar un valor correspondiente de la separación mínima entre el plano-objetivo y el plano-objeto. Este valor es la distancia entre el máximo de la rugosidad y el plano-objeto. Se grafica la capacitancia como función de la separación mínima para distintos valores de la desviación estándar (σ), dejando fija la longitud de correlación (τ). Luego se obtienen otras variando τ y dejando fija la σ . Resultan curvas que sí dependen de σ pero no de τ . La utilidad de sus resultados es que obtuvieron curvas que podrían servir como curvas de calibración, en el sentido de que al realizar un experimento para medir la desviación estándar el resultado experimental de la capacitancia coincidiría con alguna de las curvas, de manera que se podría inferir el valor del parámetro buscado.

Retomando este método pero para superficies cerradas nosotros variamos la longitud de la punta dejando fijo el radio exterior del microscopio capacitivo. Obtenemos también curvas en las que por un lado se varía la desviación estándar de alturas (σ) manteniendo fija la longitud de correlación angular (Θ); y por otro se varía Θ y se deja fija σ . Para obtener esas curvas se grafica la capacitancia normalizada como función de la separación mínima, esta última calculada al usar una realización correspondiente a cada par de valores (σ, Θ).

Las figuras 14 y 15 muestran resultados numéricos obtenidos para dos conjuntos de datos: el primero de ellos tiene una longitud de correlación angular fija ($\Theta = 0,104719$) y diversos valores de la desviación estándar de alturas ($\sigma = \frac{R}{6,3}, \frac{R}{8,3}, \frac{R}{10,3}, \frac{R}{9,3}, \frac{R}{11,3}, \frac{R}{7,3}$); el segundo mantiene fija la desviación estándar ($\sigma = \frac{R}{9}$) y varía la longitud de correlación ($\Theta = 0,0698, 0,1047, 0,1396, 0,1745, 0,2094, 0,2423$). En todos los casos se tomó la capacitancia de normalización, C , como el valor de la capacitancia de un capacitor cilíndrico de radio interno uno y radio externo igual a 2. El valor de la longitud de la punta se fue variando y para cada valor de esa longitud se obtuvo la separación mínima entre la punta y el objeto. Se puede observar que la capacitancia es sensible con la variación de ambos parámetros estadísticos (Θ y σ), lo que impide tener curvas de calibración para el caso en que se desconozcan los parámetros de una superficie dada. Lo más que tenemos en este caso es que si, por cualquier circunstancia, se conoce uno de los parámetros (digamos Θ), en principio se podrían tener curvas de las cuales se podría estimar el parámetro complementario.

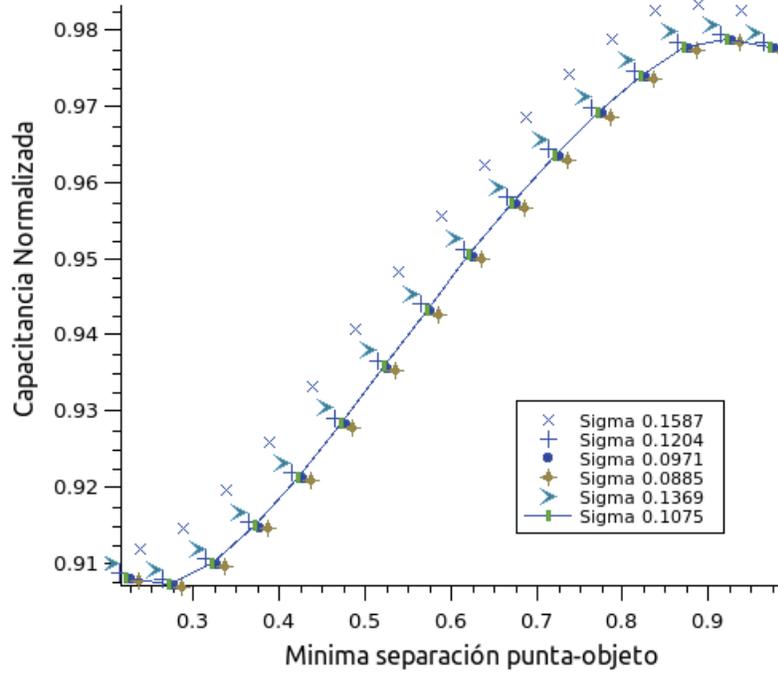


Figura 14.- Capacitancia normalizada contra la mínima separación entre el objeto y el objetivo. La longitud de correlación angular fué $\Theta = 0,104719$ y los valores de la desviación estándar fueron $\sigma = \frac{R}{6,3}$ con x , $\sigma = \frac{R}{8,3}$ cruces, $\sigma = \frac{R}{10,3}$ círculos, $\sigma = \frac{R}{9,3}$ rectángulos, $\sigma = \frac{R}{11,3}$ estrellas, $\sigma = \frac{R}{7,3}$ flechas.

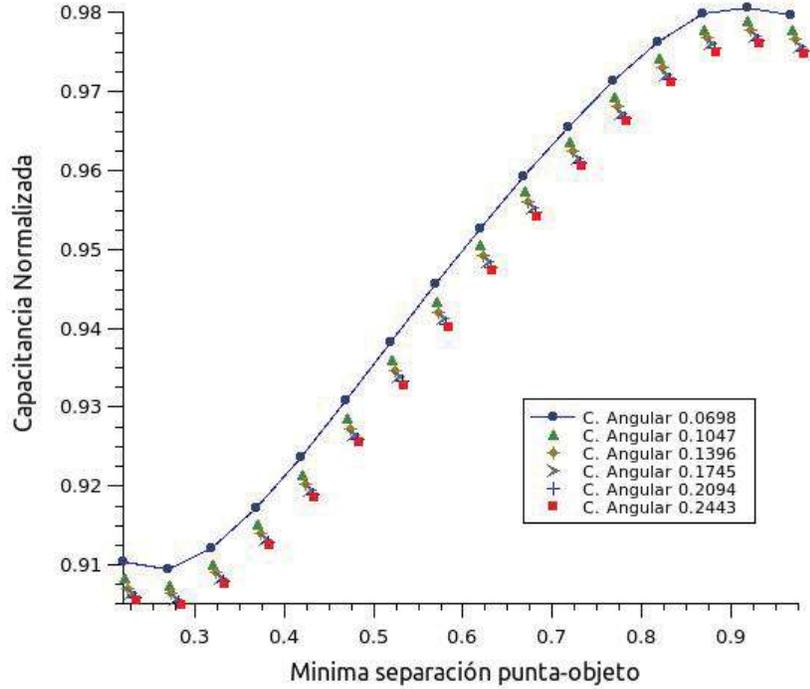


Figura 15.- Capacitancia normalizada contra la mínima separación entre el

objeto y el objetivo. La desviación estaándar fué $\sigma = \frac{R}{9}$ y los valores

de la longitud de correlacion fueron $\Theta = 0,0698$ círculos, $\Theta = 0,1047$ triángulos,

$\Theta = 0,1396$ estrellas, $\Theta = 0,1745$ flechas, $\Theta = 0,2094$ cruces y $\Theta = 0,2423$ cuadrados.

3.2. Resultados numéricos para el microscopio capacitivo esférico

En este caso, podemos considerar un microscopio capacitivo esférico cuyo funcionamiento sea similar al del microscopio cilíndrico estudiado en la sección anterior. Nuestro modelo de microscopio esférico contiene dos superficies conductoras esféricas. Suponemos que en la exterior se encuentra el objetivo, tal como se aprecia en la figura 16, y la interior sirve como objeto, o se le puede poner alguna rugosidad que sirva para tal finalidad. Mediante rotaciones del objetivo respecto al objeto se puede

realizar un escaneo que involucra a los ángulos polar (θ) y azimutal (φ) de las coordenadas esféricas. Para cada posición relativa tenemos un valor de la capacitancia y de esta manera obtenemos la capacitancia del sistema $C(\theta, \varphi)$, como una función de θ y φ . De esta forma es que podemos formar imágenes capacitivas.

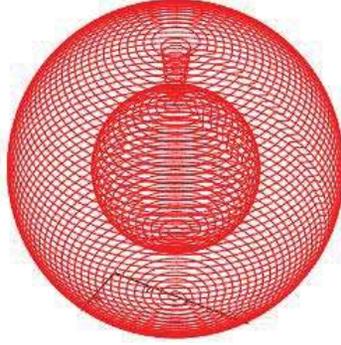


Figura 16.- Geometría del Microscopio Capacitivo Esférico.

En forma semejante al caso del microscopio cilíndrico queremos checar la validez del método numérico formulado para el caso tridimensional. Para ésto consideremos un caso en la que se conozca la solución analítica de la capacitancia en términos de la geometría del sistema. Sea un capacitor esférico, formado por dos superficies esféricas conductoras de radios $r_1 = 1$ y $r_2 = 2$, sujetas a los potenciales $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = 1$, respectivamente. En este caso el potencial electrostático y la capacitancia están dados por

$$(3.2.1) \quad \phi(r) = \frac{(\phi_2 r_2 - \phi_1 r_1) r - r_1 r_2 (\phi_2 - \phi_1)}{(r_2 - r_1) r}$$

$$(3.2.2) \quad C = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}.$$

Como resultados tenemos lo siguiente. El valor numérico de la capacitancia para este arreglo, obtenido mediante el método integral propuesto en el capítulo anterior, fué

2,0003, que concuerda bastante bien con el valor esperado 2,0000 que fué calculado analíticamente usando la Ec. 3.2.2. En cuanto al potencial electrostático, la curva de color rojo de la figura 17 muestra el potencial electrostático exacto, como función de la coordenada esférica r , calculado usando la Ec. 3.2.1; la curva en azul muestra el potencial calculado numéricamente con un intervalo de discretización $\Delta s = 0,09$; finalmente, la curva de color amarillo fué calculada también numéricamente, pero con un intervalo menor, dado por $\Delta s = 0,07$. Nótese la muy buena concordancia entre el resultado analítico y el numérico en casi toda la región vacía, salvo en la región muy cercana al conductor externo. Nótese también que al aumentar el número de puntos en el muestreo se obtiene una mejora apreciable en la región conflictiva.

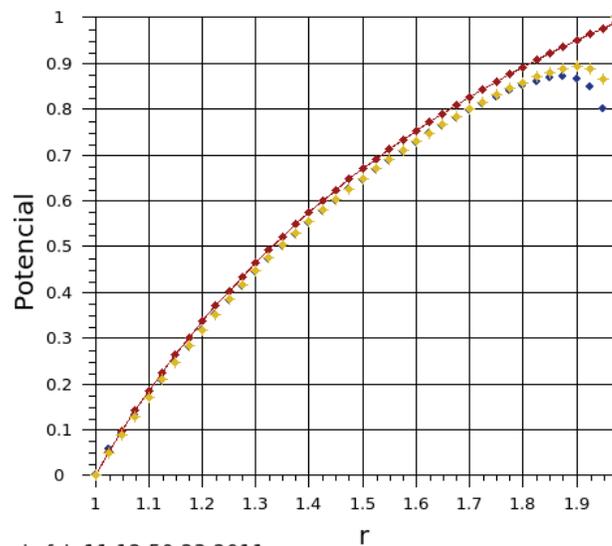


Figura 17.- Potencial electrostático entre dos superficies conductoras esféricas concéntricas.

La curva en rojo fué calculada analíticamente; la curva en azul lo fué numéricamente con

$\Delta s = 0,09$; y la curva en amarillo fué calculada numéricamente pero con $\Delta s = 0,07$.

Ahora considérese el microscopio capacitivo representado en la figura 16. Está formado por dos conductores esféricos de radio $r_1 = 1$ en el interior, y de radio

$r_2 = 2$ en el exterior, pero en esta ocasión el conductor exterior cuenta con una punta semi-cónica de radio 0,163 en la base y de longitud 0,7. Con estos parámetros se obtuvo una capacitancia de 2,245673, que por supuesto difiere de la capacitancia igual a 2,0 del caso sin punta, anteriormente estudiado. Esa diferencia es el efecto de la presencia de la punta y representa una perturbación a la imagen capacitiva idealizada del objeto.

La figura 18 muestra la imagen capacitiva del objeto esférico de radio $r_1 = 1$. Se trata de una esfera de radio 2,245673 (en un espacio de capacitancia). Obviamente la imagen de una esfera debería ser a su vez una esfera, y de hecho lo es en este caso. Sin embargo, el problema inverso de obtener el radio de la esfera-objeto dado que la imagen es una esfera del radio mencionado (en unidades de capacitancia) no es sencillo de resolver. Como sea este caso nos sirve para checar que nuestros programas computacionales dan resultados correspondientes a la simetría de nuestro sistema físico.

A continuación tenemos el caso de la obtención de la imagen de un objeto de geometría menos simétrica. En la figura 19 (parte izquierda) se representa un microscopio capacitivo que contiene un objeto cúbico de lado 1,38 y su respectiva imagen (parte derecha). La imagen encontrada fué similar al objeto pero hay una pérdida de resolución evidente. Nuevamente viene a nuestra mente la complejidad del problema inverso correspondiente. Como quiera que sea, la experiencia acumulada en el caso del microscopio cilíndrico nos permite tener un grado razonable de confianza en el método numérico usado para estos casos tridimensionales.

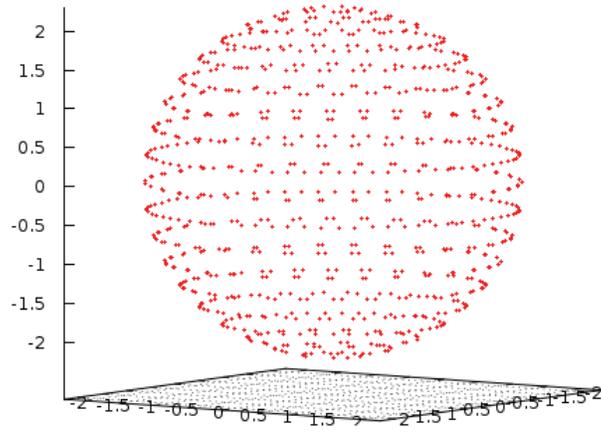


Figura 18.- Imagen capacitiva correspondiente a un objeto esférico de radio $r_1 = 1$.

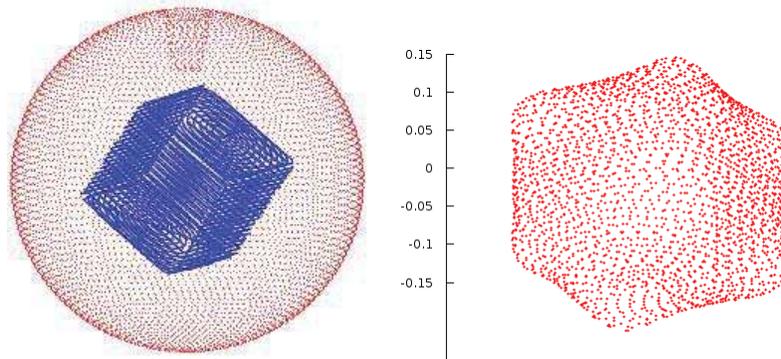


Figura 19.- A la izquierda se representa un microscopio capacitivo con un objeto cúbico de lado 1,38; a la derecha la imagen capacitiva correspondiente.

El último objeto considerado es el caso de un objeto irregular interesante. Se trata de una esfera que presenta cierta rugosidad en su superficie (ver lado derecho de la Fig. 1). La rugosidad fué generada utilizando la función

$$(3.2.3) \quad r(\theta, \varphi) = r_0 - \Delta r \sin(f_\theta \theta) \cos(f_\varphi \varphi).$$

En la expresión anterior r_0 es el radio de una esfera promedio de la superficie del objeto, Δr es la amplitud de la desviación de la rugosidad respecto a esa superficie promedio y, finalmente, f_θ y f_φ son las frecuencias angulares correspondientes a la dirección polar y azimutal, respectivamente. La estadística gaussiana usada en superficies unidimensionales aleatorias tiene los parámetros desviación estándar de alturas y longitud de correlación angular, que tienen una correspondencia clara con los parámetros Δr y el par $(2\pi/f_\theta$ y $2\pi/f_\varphi)$, respectivamente.

En el caso bidimensional las Figs. 14 y 15 fueron generadas variando los parámetros de la superficie aleatoria. En forma semejante nosotros presentamos algunos resultados variando las frecuencias, f_θ y f_φ , aunque conservando fijo el parámetro $\Delta r = 0,095$. La figura 20 muestra la capacitancia normalizada en función de la distancia mínima de separación entre la punta del objetivo y la superficie rugosa, ésto para $f_\theta = 8$ y con varios valores de la frecuencia f_φ . La variación de esa distancia mínima fué obtenida variando la longitud de la punta. Las curvas que aparecen en la Fig. 20 son: con círculos la curva para $f_\varphi = 3$, con asteriscos para $f_\varphi = 6$, con líneas y rectángulos para $f_\varphi = 9$ y con estrellas para $f_\varphi = 12$. La figura 21 muestra la capacitancia normalizada en función de la distancia mínima de separación, pero ésto para $f_\varphi = 7$ y con varios valores de la frecuencia f_θ . Las curvas que aparecen en

la Fig. 21 son: con línea continua la curva para $f_\theta = 4$, con círculos para $f_\theta = 6$, con rectángulos para $f_\theta = 8$ y con flechas para $f_\theta = 10$. De las Figs. 20 y 21 se puede observar que el microscopio capacitivo es sensible a la variación de las frecuencias. Esto es comprensible porque tal variación da lugar a una variación correspondiente de la geometría del sistema capacitivo. Podemos conjeturar la posibilidad de obtener información de algunas propiedades estadísticas de superficies aleatorias tridimensionales con el uso del microscopio capacitivo propuesto en esta tesis. Ésto queda abierto para un posible futuro trabajo.

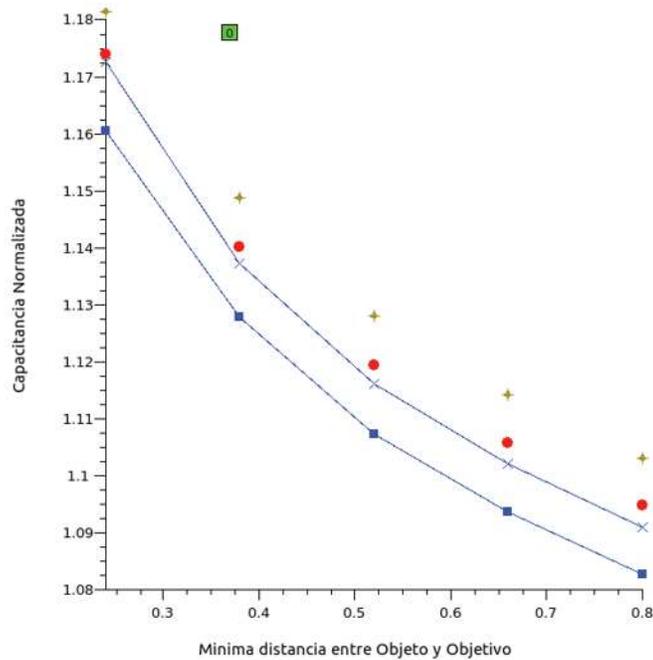


Figura 20.- Capacitancia normalizada en función de la distancia mínima de separación con $f_\theta = 8$.

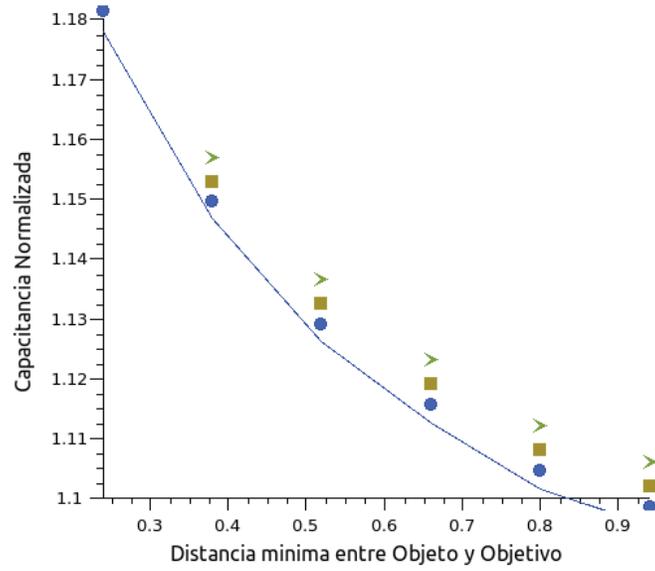


Figura 21.- Capacitancia normalizada en función de la distancia mínima de separación con $f_{\varphi} = 7$.

Capítulo 4

Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis.

Formulamos un nuevo método integral para resolver el problema de encontrar el potencial electrostático en una región vacía acotada por dos superficies conductoras, entre las cuales se establece una diferencia de potencial dada. Ésto tanto para superficies unidimensionales (problema en dos dimensiones) como para superficies bidimensionales (problema en tres dimensiones). En particular, mediante el uso de este método, nos fue posible modelar numéricamente dos prototipos de microscopio capacitivo: el primero de ellos está formado a partir de dos superficies cilíndricas coaxiales (superficies unidimensionales) y el segundo a partir de dos superficies esféricas concéntricas (superficies bidimensionales).

Para el modelo de microscopio cilíndrico, fué posible obtener imágenes de superficies cerradas cuando la geometría de éstas está bien determinada (superficies deterministas). Fué posible observar que se obtiene una mejor resolución de las imágenes cuando el objeto está formado por curvas suaves. Cuando se tienen superficies con topografía más compleja, como la de superficies aleatorias gaussianas, las imágenes obtenidas en general preservan gran parte de la topografía del objeto, sin embargo, muchos de los detalles del objeto se pierden. Bajo un criterio no riguroso, la densidad de probabilidad de las imágenes obtenidas tiene una buena concordancia con una cierta densidad de probabilidad gaussiana teórica; sin embargo, cuando se realizó

la prueba estadística de Kolmogorov-Smirnov entre las densidades de probabilidad numérica y teórica no se obtuvieron buenos resultados.

Se intentó plantear un método para obtener las propiedades estadísticas de superficies aleatorias gaussianas. Básicamente se considera una simulación numérica en la que se varía la longitud de la punta del objetivo y no se rota éste respecto al objeto. Con el método se obtuvieron curvas para una desviación estándar de alturas y longitud de correlación angular dadas. En este caso se encontró que el microscopio es bastante sensible a la variación de esos parámetros lo cual dificulta la extracción de la información buscada.

En el caso de superficies bidimensionales se obtuvieron imágenes únicamente de objetos cuya superficie está bien determinada. Las imágenes obtenidas presentan una buena similitud con sus respectivos objetos.

Como un estudio previo de superficies aleatorias bidimensionales, que sea análogo al caso unidimensional, se presentó el caso de un objeto esférico con rugosidad periódica armónica. Se presentaron simulaciones con variaciones en las frecuencias angulares de la rugosidad, esto para estudiar la posibilidad de obtener información de las propiedades de la superficie usando el microscopio capacitivo. Esas simulaciones son correspondientes a algunas realizadas en el caso unidimensional. Se encontró que el microscopio esférico es bastante sensible a la variación de las frecuencias.

Por último, hay que hacer énfasis en que, en general, aunque las imágenes presentan gran similitud a sus respectivos objetos a partir de ellas es muy difícil reproducir con una muy buena resolución la topografía de los objetos. Entonces ¿Cuál es la utilidad del microscopio capacitivo propuesto? La sensibilidad del microscopio es la clave de su utilidad más evidente. Por ejemplo, dado un objeto se puede medir la

capacitancia al ponerlo como parte de nuestro microscopio capacitivo. Si el objeto sufriera algún cambio, tal como una pequeña fractura, una nueva medida de la capacitancia daría un resultado apreciablemente distinto. De esta manera se podrían detectar piezas defectuosas entre un lote fabricado. Otra posible utilidad sería en la caracterización de estructuras a escala nanométrica, donde quizás en algunos casos no sea necesaria gran resolución de la morfología de un sistema. Esta aplicación se llevaría a cabo en la medida en que ampliemos nuestro modelo para incluir otros materiales tales como aislantes y semiconductores.

Apéndices

A.- Función de Green. Sea $\Lambda [y]$ una expresión lineal diferencial de segundo orden con coeficientes constantes

$$(4.0.4) \quad \Lambda [y] = a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y$$

y sean $B_1 [y]$ y $B_2 [y]$ las funciones de frontera

$$(4.0.5) \quad \begin{aligned} B_1 [y] &= a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) + b_{11}y(x_2) + b_{12}y'(x_2) \\ B_2 [y] &= a_{21}y(x_1) + a_{22}y'(x_1) + b_{21}y(x_2) + b_{22}y'(x_2). \end{aligned}$$

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones no homogéneo con valores a la frontera

$$(4.0.6) \quad \begin{aligned} \Lambda [y] &= f(x) \\ B_1 [y] &= c_1 \\ B_2 [y] &= c_2, \end{aligned}$$

donde c_1, c_2 son constantes, y el problema de valores a la frontera asociado

$$(4.0.7) \quad \begin{aligned} \Lambda [\eta] &= 0 \\ B_1 [\eta] &= 0 \\ B_2 [\eta] &= 0. \end{aligned}$$

Hay dos posibilidades a considerar: (4.0.7) tiene una solución no trivial o solo tiene la solución trivial. El efecto de esto en la solución de (4.0.6) es indicado en

Teorema. *Si el problema homogéneo (4.0.7) tiene una solución no trivial, entonces el problema no homogéneo (4.0.6) tiene una solución si $f(x)$, c_1 , c_2 satisfacen ciertas condiciones. Si este es el caso, entonces (4.0.6) tiene infinitas soluciones. Sin embargo, si el problema homogéneo (4.0.7) tiene solo la solución trivial, entonces (4.0.6) tiene una única solución para cualquier $f(x)$, c_1 , c_2 .*

DEMOSTRACIÓN. $\Lambda[\eta] = 0$ tiene dos soluciones linealmente independientes η_1 , η_2 . Por lo tanto la solución general puede escribirse en la forma

$$\eta = \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2$$

y $\Lambda[y] = f(x)$ tendrá la solución general

$$y = y_0 + \alpha_1\eta_1 + \alpha_2\eta_2,$$

donde y_0 es una solución particular de $\Lambda[y] = f(x)$. Para satisfacer las condiciones de frontera (4.0.6), necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} B_1[y] &= B_1[y_0] + \alpha_1 B_1[\eta_1] + \alpha_2 B_1[\eta_2] = c_1 \\ B_2[y] &= B_2[y_0] + \alpha_1 B_2[\eta_1] + \alpha_2 B_2[\eta_2] = c_2. \end{aligned}$$

Reordenando las dos ecuaciones anteriores obtenemos

$$(4.0.8) \quad \begin{aligned} \alpha_1 B_1[\eta_1] + \alpha_2 B_1[\eta_2] &= c_1 - B_1[y_0] \\ \alpha_1 B_2[\eta_1] + \alpha_2 B_2[\eta_2] &= c_2 - B_2[y_0], \end{aligned}$$

con determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_1[\eta_1] & B_1[\eta_2] \\ B_2[\eta_1] & B_2[\eta_2] \end{vmatrix}.$$

Ahora tenemos que distinguir entre dos casos: □

1. $\Delta \neq 0$. En este caso, (4.0.8) tiene una única solución α_1, α_2 y la solución de (4.0.6) existe y está determinada de forma única. Para (4.0.7) obtenemos

$$\eta = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2$$

y

$$(4.0.9) \quad \begin{aligned} \alpha_1 B_1[\eta_1] + \alpha_2 B_1[\eta_2] &= 0 \\ \alpha_1 B_2[\eta_1] + \alpha_2 B_2[\eta_2] &= 0. \end{aligned}$$

Ya que $\Delta \neq 0$, este sistema tiene solo la solución trivial y consecuentemente, (4.0.7) tiene solo la solución trivial $\eta = 0$.

2. $\Delta = 0$. En este caso (4.0.9) tiene una solución no trivial α_1, α_2 . Por lo tanto la Ec. (4.0.7) tiene una solución no trivial. Entonces, (4.0.8) en general no tiene solución. Sin embargo hay valores de $c_1 - B_1[y_0]$ y $c_2 - B_2[y_0]$ para los que el sistema puede tener una solución y cuando un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo con un determinante de coeficientes nulo tiene una solución no trivial, entonces este tiene infinitas soluciones, q.e.d.

Como ejemplo considérese la expresión diferencial de segundo orden y sus condiciones de frontera

$$(4.0.10) \quad \Lambda[y] = \frac{d}{dx} [a_0(x) y'] + a_2(x) y = -f(x),$$

$$(4.0.11) \quad \begin{aligned} a_{11}y(x_1) + a_{12}y'(x_1) &= 0, \\ a_{21}y(x_2) + a_{22}y'(x_2) &= 0, \end{aligned}$$

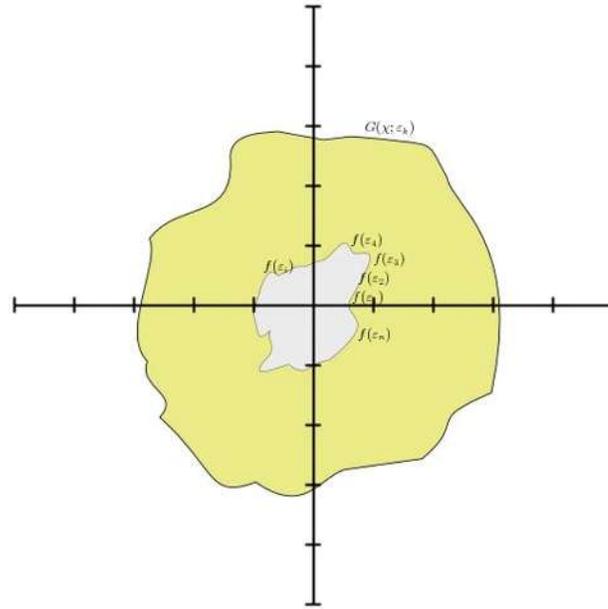


Figura A.1.- Geometría del ejemplo presentado.

donde $f(x)$ representa la densidad de carga. En lugar de considerar $f(x)$ como una función continua, considérese como una densidad discreta de carga en la forma $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ distribuida sobre la superficie Γ_2 (ver figura A.1) y sea $G(x, \xi_k)$ el potencial producido en el punto x por la densidad de carga $f(\xi_k)$ en $x = \xi_k$. Entonces el potencial en el punto x debido a todas las densidades de carga $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$ en $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ se puede aproximar como:

$$(4.0.12) \quad y_n(x) = \sum_{k=1}^n G(x, \xi_k) f(\xi_k).$$

Como se trata de una densidad de carga esperamos obtener

$$(4.0.13) \quad y(x) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

con sus derivadas

$$y'(x) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G(x, \varepsilon_k)}{\partial x} f(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$y''(x) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 G(x, \varepsilon_k)}{\partial x^2} f(\varepsilon) d\varepsilon - f(x) \left[\frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} \right].$$

Sustituyendo lo anterior en (4.0.10) obtenemos

$$\begin{aligned} & a_0(x) \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 G(x, \varepsilon_k)}{\partial x^2} f(\varepsilon) d\varepsilon - f(x) \left[\frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} \right] \right\} + \\ & a'_0(x) \int_{x_1}^{x_2} G(x, \varepsilon_k) f(\varepsilon) d\varepsilon + a_2(x) \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G(x, \varepsilon_k)}{\partial x} f(\varepsilon) d\varepsilon = \\ & \int_{x_1}^{x_2} \left(a_0(x) \frac{\partial^2 G(x, \varepsilon_k)}{\partial x^2} f(\varepsilon) + a_2(x) \frac{\partial G(x, \varepsilon_k)}{\partial x} f(\varepsilon) + a'_0(x) G(x, \varepsilon_k) f(\varepsilon) \right) d\varepsilon - \\ & a_0(x) f(x) \left[\frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} \right] = -f(x) \end{aligned}$$

(4.0.14)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\varepsilon) \Lambda [G(x, \varepsilon_k)] d\varepsilon - a_0(x) f(x) \left[\frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} \right] = -f(x).$$

Entonces obtenemos la siguiente condición para $G(x, \varepsilon_k)$: (4.0.13) es una solución de la ecuación diferencial (4.0.10) si $G(x, \varepsilon_k)$ satisface la ecuación homogénea $\Lambda [G(x, \varepsilon_k)] = 0$ en todo el espacio excepto en $x = \varepsilon$ y la siguiente relación

$$(4.0.15) \quad \frac{\partial G(x, x+0)}{\partial x} - \frac{\partial G(x, x-0)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial G(x, \epsilon)}{\partial x} \Big|_{\epsilon=x-\epsilon}^{\epsilon=x+\epsilon} = \frac{1}{a_0(x)}.$$

Debido a la Ec. 4.0.15

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{d}{dx} \left(a_0(x) \frac{\partial G(x, \epsilon)}{\partial x} \right) + a_2(x) G(x, \epsilon) \right] dx = \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \left[\frac{d}{dx} \left(a_0(x) \frac{\partial G(x, \epsilon)}{\partial x} \right) + a_2(x) G(x, \epsilon) \right] dx = \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[a_0(x) \frac{\partial G(x, \epsilon)}{\partial x} \Big|_{x=\xi-\epsilon}^{x=\xi+\epsilon} + 2a_2(x') G(x', \epsilon) \cdot \epsilon \right] = -1, \end{aligned}$$

donde $\xi - \epsilon \leq x' \leq \xi + \epsilon$. Entonces podemos reemplazar (4.0.15) por la siguiente condición:

$$(4.0.16) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} \Lambda [G(x, \epsilon_k)] dx = -1,$$

que es una expresión básica para encontrar una función de Green.

B.- Teorema de Green. Dado el teorema de la divergencia:

$$(4.0.17) \quad \int_v \nabla \cdot A dv = \oint_s A \cdot nda.$$

Sea el campo vectorial A definido en un volumen v con frontera la curva cerrada s tal que $A = \phi \nabla \psi$, donde ϕ y ψ son campos escalares arbitrarios. La divergencia del potencial A se encuentra dada por

$$(4.0.18) \quad \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi.$$

Definimos

$$(4.0.19) \quad \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}.$$

Sustituyendo las ecuaciones (4.0.18) y (4.0.19) en (4.0.17) obtenemos la primera identidad de Green:

$$(4.0.20) \quad \int_v (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dv = \oint_s \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} da.$$

Si reescribimos el potencial en la forma $A = \psi \nabla \phi$ y aplicamos el teorema de la divergencia al nuevo potencial obtenemos:

$$(4.0.21) \quad \int_v (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv = \oint_s \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} da.$$

Restando las ecuaciones (4.0.20) y (4.0.21) obtenemos:

$$\int_v (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi - \psi \nabla^2 \phi - \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv = \oint_s \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) da,$$

donde los términos $\nabla \psi \cdot \nabla \phi$ se cancelan y obtenemos el teorema de Green:

$$(4.0.22) \quad \int_v (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dv = \oint_s \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) da$$

en tres dimensiones. Una fórmula análoga en dos dimensiones es

$$(4.0.23) \quad \int_v (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dx dy = \oint_c \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) ds$$

C.- Función de Green para la ecuación de Poisson. Considérese la ecuación de Poisson

$$(4.0.24) \quad \nabla^2 \phi(\chi) = -\rho(\chi).$$

Esperamos encontrar una solución para el potencial en la forma

$$(4.0.25) \quad \phi(\chi) = \int_R G(\chi, \xi) \rho(\xi) d^n \xi,$$

donde R es la región encerrada por C . De acuerdo a la condición (4.0.16) y con el operador $\Lambda = \nabla^2$, obtenemos

$$(4.0.26) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\varrho}^{\xi+\epsilon} \nabla^2 [G(x, \xi)] d^n \chi = -1,$$

donde ϱ representa la región $|\chi - \xi|^2 \leq \epsilon^2$. Aplicando el teorema de Green con $\phi = 1$ y $\psi = G(\chi, \xi)$ obtenemos

$$(4.0.27) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\rho} \nabla^2 [G(\chi, \xi)] d^n \chi = \oint_{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = -1,$$

donde γ denota al círculo $|\chi - \xi| = \epsilon$ y n es la dirección de la normal hacia afuera de γ . Claramente n puede reemplazarse por $r = |\chi - \xi|$ obteniendo

$$(4.0.28) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\gamma} \frac{\partial G(\chi, \xi)}{\partial r} ds = -1.$$

Para encontrar la función de Green en el plano tomemos $\chi = (x, y)$. Introduciendo coordenadas polares

$$x = \xi + r \cos \theta,$$

$$y = \eta + r \sin \theta$$

con $ds = r d\theta$ obtenemos

$$(4.0.29) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial G(\chi, \xi)}{\partial r} r d\theta = -1.$$

Integrando obtenemos

$$(4.0.30) \quad \frac{\partial G(\chi, \xi)}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r}.$$

Claramente una función de Green que satisfaga la ecuación anterior es

$$(4.0.31) \quad G(\chi, \xi) = -\frac{1}{2\pi} \ln r.$$

Para el caso en que se desee resolver la ecuación 4.0.24 en el espacio fácilmente se puede obtener que

$$G(\chi, \xi) = \frac{1}{r}.$$

Bibliografía

- [1] Bugg, C. D. and P. J. King, "Scanning capacitance microscopy", *J. Phys. E: Sci. Instrun.*, Vol. 21, 147-151, 1988.
- [2] Williams, C. C., W. P. Hough, and S. A. Rishton, "Scanning capacitance microscopy on a 25 nm scale", *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 55, 203-205, 1989.
- [3] Gomez-Moñivas, S., J. J. Saenza, R. Carminati, and J. J. Greffet, "Theory of electrostatic probe microscopy: A simple perturbative approach", *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 76, 2955-2957, 2000.
- [4] Jaensch, S., H. Schmidt, and M. Grundmann, "Quantitative scanning capacitance microscopy", *Physica B*, Vol. 376-377, 913-915, 2006.
- [5] Garcia-Valenzuela, A., N. C. Bruce, and D. Kouznetsov, "An investigation into the applicability of perturbation techniques to solve integral equations for a parallel-plate capacitor with a rough electrode", *J. Phys. D: Appl. Phys.*, Vol. 31, 240-251, 1998.
- [6] Garcia-Valenzuela, A., N. C. Bruce, and D. Kouznetsov, "Perturbation theory for surface-profile imaging with a capacitive probe", *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 77, 2066-2068, 2000.
- [7] Garcia-Valenzuela, A., N. C. Bruce, and D. Kouznetsov, "The lateral resolution for imaging periodic conducting surfaces in capacitive microscopy", *J. Phys. D: Appl.*, Vol. 33, 2890-2899, 2000.
- [8] Setälä, T., M. Kaivola, and A. T. Friberg, "Evanescent and propagation electromagnetic fields in scattering from point-dipole structures", *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, 678-688, 2001.
- [9] Beladi, S., P. Girard, and G. Leveque, "Electrostatic forces acting on the tip in atomic force microscopy: Modelization and comparison with analytic expressions", *J. Appl. Phys.*, Vol. 81, 1023-1030, 1997.

- [10] Garcia-Valenzuela, A., N. C. Bruce, and D. Kouznetsov, "Rough-surface capacitor: Approximations of the capacitance with elementary functions", *J. Phys.*, Vol. 32, 2692-2702, 1999.
- [11] Garcia-Valenzuela, A., N. C. Bruce, and D. Kouznetsov, "Capacitance measurement of Gaussian random rough surfaces with planar and corrugated electrodes", *Meas. Sci. Technol.*, Vol. 16, 669-676, 2005.
- [12] Marchiando, J. F. and J. J. Kopanski, "Regression procedure for determining the dopant profile in semiconductors from scanning capacitance microscopy data", *J. Appl. Phys.*, Vol. 92, 5798, 2002.
- [13] Giannazzo, F., D. Goghero, V. Raineri, S. Mirabella, and F. Priolo, "Scanning capacitance microscopy on ultranarrow doping profiles in Si", *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 83, 2659, 2003.
- [14] Giannazzo, F., D. Goghero and V. Raineri, "Experimental aspects and modeling for quantitative measurements in scanning capacitance microscopy", *J. Vac. Sci. Technol. B*, Vol. 22, 2391, 2004.
- [15] Banasiak, R., R. Wajman, D. Sankowski, and M. Soleimani, "Three-dimensional nonlinear inversion of electrical capacitance tomography data using a complete sensor model", *Progress In Electromagnetic Research, PIER 100*, 219-234, 2010.
- [16] Wang, C.-F., L.-W. Li, P.-S. Kooi, and M.-S. Leong, "Efficient capacitance computation for three-dimensional structures based on adaptive integral method", *Progress In Electromagnetic Research, Pier 30*, 33-46, 2001.
- [17] Goharian, M., M. Soleimani, and G. Moran, "A trust region subproblem for 3D electrical impedance tomography inverse problem using experimental data", *Progress In Electromagnetic Research, PIER 94*, 19-32, 2009.
- [18] Soleimani, M., C. N. Mitchell, R. Banasiak, R. Wajman, and A. Adler, "Four dimensional electrical capacitance tomography imaging using experimental data", *Progress In Electromagnetic Research, PIER 90*, 171-182, 2009.
- [19] Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran 77*, 2nd Edition, Cambridge University Press, New York 2003.
- [20] Mendoza-Suarez, A. and E. R. Mendez, "Light scattering by a reentrant fractal surface", *Appl. Opt.*, Vol. 36, 3521-3531, 1997.

- [21] Mendoza-Suarez, A., U. Ruiz-Corona, and R. Espinosa-Luna, "Effects of wall random roughness on TE and TM modes in a hollow conducting waveguide", *Opt. Comm.*, Vol. 238, 291-299, 2004.
- [22] A. Fraguera, J. Oliveros, L. Cervantes, M. Morín and S. Gomez, "Un algoritmo iterativo para la tomografía de capacitancia eléctrica", *Rev. Mex. Fis.*, Vol 51, 236-242, 2005.
- [23] A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, "Integral Method for a Capacitance Microscope that is Based on Cylindric Metallic Surfaces", *Progress in Electromagnetic Research B*, Vol. 21, 203-218, 2010.