



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLÁS DE HIDALGO

---

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

## Representaciones Discretas del Momento Angular

# TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Lic. en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Omar Eduardo Uribe Juárez

ASESOR DE TESIS:

Dr. Rafael González Campos



Diciembre 2011

---

*Solo cuestionando lo que crees verdadero,  
tus ojos pueden abrirse para ver más allá  
de lo que los demás no pueden.*

Omar Eduardo Uribe Juárez

Esta es la última parte de la tesis que escribo y curiosamente la que menos trabajo me cuesta redactar, ya que tengo bien claro que esta tesis la pude terminar gracias a ustedes **Ma. Guadalupe Juárez Contreras** y **Jorge Enrique Uribe Cuevas**.

Gracias por estar ahí y decirme “ *Cuando te titulas* ”, “ *No estás haciendo nada*”, “ *Ya tienes más de dos años que saliste y todavía no te puedes titular*”, “ *Nada más te estás haciendo wey Omarcito*”, creo que esta última frase ya sabemos a quién pertenece, verdad Papá ?

Gracias por jalarme las riendas cuando me desvió del camino, aunque no me guste que lo hagan.

*Esta tesis está dedicada solo a ustedes*  
**Jorge Enrique Uribe Cuevas**  
**Ma. Guadalupe Juárez Contreras**

---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>II</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1. Matrices de Diferenciación</b>	<b>4</b>
1.1. Matriz de diferenciación cuando interpolamos con la base de Lagrange . . . . .	4
1.2. Matriz de diferenciación para funciones periódicas . . . . .	6
1.2.1. Caso impar . . . . .	7
1.2.2. Caso par . . . . .	9
1.3. Matrices de diferenciación parcial . . . . .	11
<b>2. Momento Angular Total</b>	<b>12</b>
2.1. Momento angular orbital . . . . .	12
2.2. Espín . . . . .	23
<b>3. Generador de Rotaciones Sobre un Espacio de Hilbert Discreto</b>	<b>25</b>
<b>4. Momento Angular Total sobre un Toro</b>	<b>35</b>
<b>5. Momento Angular Total sobre una Esfera</b>	<b>45</b>
5.1. Ejemplo 1 . . . . .	48
5.2. Ejemplo 2 . . . . .	49
5.3. Ejemplo 3 . . . . .	50
5.4. Ejemplo 4 . . . . .	51
5.5. Ejemplo 5 . . . . .	52
5.6. Ejemplo 6 . . . . .	53
5.7. Ejemplo 7 . . . . .	54
5.8. Ejemplo 8 . . . . .	55

---

5.9. Ejemplo 9 . . . . .	56
5.10. Ejemplo 10 . . . . .	58
5.11. Ejemplo 11 . . . . .	59
<b>Conclusiones</b>	<b>62</b>
<b>Apéndice</b>	<b>64</b>
A.1. Producto de Kronecker . . . . .	64
A.2. Interpolación . . . . .	67
A.2.1. Interpolación para una función de una variable . . . . .	67
A.2.2. Interpolación para una función de dos variables . . . . .	69
A.2.3. Interpolación para una función de $N$ variables . . . . .	71
A.3. Desigualdad de Schwartz . . . . .	73
A.4. Principio de Incertidumbre de Heisenberg . . . . .	74
A.5. Prueba de la necesidad para poder simplificar $\tilde{A}$ . . . . .	77
<b>Bibliografía</b>	<b>79</b>

---

# Introducción

La derivada de una función es un proceso que surge originalmente como un proceso al límite, por lo cual es necesario la existencia de al menos un punto de acumulación en el dominio de dicha función, sin embargo es de interés definir la derivada de una función conocida solo en un número finito de puntos.

Hace más de dos décadas comenzaron a surgir matrices de  $N \times N$  que representaban en ciertos casos la derivada de una función conocida en  $N$  puntos, a dichas matrices les llamaremos matrices de diferenciación. Estas matrices surgieron en diferentes contextos de la física-matemática, una obtenida por R. G. Campos en [1], [2] y la otra por F. Calogero en [3],[4], ambas matrices muy parecidas, pero sus aplicaciones eran diferentes y en un principio se pensaron diferentes. Posteriormente cada autor obtuvo una matriz de diferenciación para funciones periódicas de variable real [5],[6], en este caso las matrices son totalmente diferentes, además la matriz obtenida en [6] es válida solo para funciones periódicas y no para funciones antiperiódicas<sup>1</sup> y sus potencias no representan propiamente a las derivadas de orden superior, mientras que la matriz obtenida en [5] es válida para funciones periódicas y antiperiódicas y sus potencias representan a las derivadas de orden superior.

Estas matrices de diferenciación han sido utilizadas para encontrar soluciones aproximadas o analíticas en muchos problemas de la física-matemática tales como problemas de valores a la frontera, sistemas dinámicos no autónomos y quantum lattice theory.

En esta tesis obtendremos la matriz de diferenciación cuando interpolamos una función con la base de Lagrange ó con los polinomios trigonométricos en el caso de que la función sea periódica, y veremos cómo obtener las matrices de derivadas parciales en el caso de que la función sea de varias variables.

Después hablaremos del momento angular total  $\hat{J}$  en el caso continuo, primero

---

<sup>1</sup> $f(x + \tau) = -f(x)$  en donde  $\tau$  es el período

resolveremos el problema de valores propios para el momento angular orbital  $\hat{L}$  utilizando el álgebra que satisfacen sus componentes y después hablaremos de cómo fue introducido el concepto de espín y daremos un análogo clásico [18],[19] aunque en la inmensa mayoría de la literatura suele hacerse hincapié en la ausencia de análogos clásicos del espín.

Luego discretizaremos el espacio de Hilbert y construiremos un operador  $\Delta$  que genera rotaciones cíclicas sobre una base del espacio de Hilbert, en [7]<sup>2</sup>, [8]<sup>3</sup> obtienen casos particulares de este operador. Ya que  $\Delta$  resulta ser unitario, podemos reescribirlo de la forma  $e^{iA}$ , y encontramos que bajo ciertas condiciones  $A$  esta relacionado con la matriz de diferenciación para funciones periódicas y que  $\Delta$  genera un grupo cíclico, en [9]<sup>4</sup> obtienen que los generadores del toro pueden ser escritos de la forma  $e^{2\pi i D}$ , en donde  $D$  es una matriz de diferenciación en términos del momento lineal, el campo magnético y un ángulo  $\theta$ , sin embargo no obtienen la forma explícita de  $D$ , en [10]<sup>5</sup> también obtienen que los generadores del toro pueden ser escritos de la forma  $e^{2\pi i D}$ , en donde  $D$  es una matriz de diferenciación, pero aquí tampoco escriben de forma explícita a  $D$ , en [8] encuentran que los generadores del toro forman un grupo cíclico. Luego encontramos la representación del momento angular total  $J$ , resolvemos el problema de valores propios, en [11]<sup>6</sup> obtienen los vectores propios de un  $\theta$ -toro y son parecidos a los que obtenemos nosotros. Por último encontramos que  $\Delta$  se divide en dos casos independientes que curiosamente están asociados a los dos tipos de partículas cuánticas existentes, los fermiones y los bosones.

Después discretizando al toro con una malla de  $Z_{N_\theta} \times Z_{N_\varphi}$ , encontraremos la representación del momento angular total  $J$  y resolveremos el problema de valores propios, en [7] y [8] también discretizan el toro como una malla de  $Z_N \times Z_N$  y en [12] estudian los estados coherentes de un toro y sus propiedades básicas. El problema de la mecánica cuántica sobre un toro es un problema importante

---

<sup>2</sup>Discretizan la superficie del toro en una malla  $Z_N \times Z_N$  y encuentran que  $SU(2)$  define un álgebra a través del grupo de Heisenberg-Weyl en  $Z_N \times Z_N$

<sup>3</sup>Definen un conjunto de generadores de una  $C^*$  álgebra no conmutativa que coincide con los generadores del toro y analizan la  $C^*$  álgebra

<sup>4</sup>Utilizan un álgebra no conmutativa para estudiar los observables de un toro no conmutativo en un campo magnético

<sup>5</sup>Presenta una nueva formulación con matrices finitas de la teoría de Gage sobre un toro no conmutativo basada en la caracterización algebraica del espacio de configuraciones

<sup>6</sup>Definen un conjunto de generadores de una  $C^*$  álgebra no conmutativa que coincide con los generadores del toro y prueban que hay un isomorfismo entre el espacio cuántico de Koopman y  $L^2$  sobre el  $\theta$ -toro

---

que ha sido tratado en las últimas veinte décadas por investigadores de Japón, Massachusetts y Cern entre otros [10], [11] y [7].

Por último haremos colapsar el toro a una esfera haciendo el radio exterior del toro igual a cero, veremos los distintos casos que podemos obtener al hacer esto y la forma en que actúan los operadores que generan rotaciones cíclicas sobre esta superficie.

---

# Capítulo 1

## Matrices de Diferenciación

En este capítulo obtendremos la matriz de diferenciación para una función  $f$  conocida en  $N$  puntos

$$f(x_k), \quad k = 1, \dots, N,$$

cuando interpolamos con la base de Lagrange y para una función periódica cuando interpolamos con los polinomios trigonométricos<sup>1</sup>.

Para ello primero encontraremos la función  $g(x)$  que interpola a  $f$  y calcularemos  $g'(x_k)$ , para después encontrar la matriz  $\mathcal{D}$  tal que

$$\mathbf{g}' = \mathcal{D}\mathbf{g}$$

donde  $\mathbf{g}$  es el vector con  $k$ -ésima entrada  $g(x_k)$ ,  $\mathbf{g}'$  un vector con  $k$ -ésima entrada  $\frac{dg(x_i)}{dx}$  y  $\mathcal{D}$  la matriz de diferenciación buscada, que como se verá más adelante, depende exclusivamente de los valores  $x_k$ .

### 1.1. Matriz de diferenciación cuando interpolamos con la base de Lagrange

En la sección A.2 del apéndice obtenemos que la función de interpolación está dada por

---

<sup>1</sup>  $\{1, \sin(z), \cos(z), \dots, \sin(nz), \cos(nz)\}$



$$g(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

una vez conocida  $g(x)$ , podemos calcular  $g'(x_k)$

$$g'(x_k) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} (x - x_j)|_{x=x_k}}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

si  $i \neq k$

$$\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} (x - x_j)|_{x=x_k} = \prod_{k,i}$$

en donde

$$\prod_{k,i} = \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq i}} (x_k - x_j)$$

y como

$$\prod_{k,i} = \frac{1}{x_k - x_i} \prod_{j \neq k} (x_k - x_j)$$

entonces

$$\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} (x - x_j)|_{x=x_k} = \frac{1}{x_k - x_i} \prod_{j \neq k} (x_k - x_j)$$

si  $i = k$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} (x - x_j)|_{x=x_i} &= \prod_{i,1} + \dots + \prod_{i,i-1} + \prod_{i,i+1} + \dots + \prod_{i,N} \\ &= \left( \frac{1}{x_i - x_1} + \dots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i - x_N} \right) \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \\ &= \sum_{l \neq i} \frac{1}{x_i - x_l} \prod_{j \neq i} (x_i - x_j) \end{aligned}$$

por lo tanto nuestra matriz de diferenciación está dada por

$$(\mathcal{D})_{mn} = \begin{cases} \sum_{j \neq m} \frac{1}{x_m - x_j} & m = n \\ \frac{\prod_{j \neq m} (x_m - x_j)}{\prod_{j \neq n} (x_n - x_j)} \frac{1}{x_m - x_n} & m \neq n \end{cases} \quad (1.1)$$

y puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} \tilde{\mathcal{D}} \mathcal{P}^{-1}$$

en donde

$$(\tilde{\mathcal{D}})_{mn} = \begin{cases} \sum_{j \neq m} \frac{1}{x_m - x_j} & m = n \\ \frac{1}{x_m - x_n} & m \neq n \end{cases} \quad (1.2)$$

$$(\mathcal{P})_{mn} = \prod_{j \neq m} (x_m - x_j) \delta_{nm}$$

y por tanto

$$(\mathcal{P}^{-1})_{mn} = \frac{\delta_{nm}}{\prod_{j \neq m} (x_m - x_j)}$$

## 1.2. Matriz de diferenciación para funciones periódicas

Si  $f$  es una función periódica<sup>2</sup> podemos interpolarla con los polinomios trigonométricos cuando  $N$  es impar, si  $N$  es par tendremos que hacer un desarrollo diferente.

<sup>2</sup>Supondremos que  $f$  es  $2\pi$ -periódica, pero podemos generalizar fácilmente este resultado a funciones con cualquier periodo cambiando  $x$  por  $\frac{2\pi}{\tau}x$ , en donde  $\tau$  es el período de la función

### 1.2.1. Caso impar

En la sección A.2 del apéndice obtenemos que la función de interpolación está dada por

$$g(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)}$$

una vez conocida  $g(x)$ , podemos calcular  $g'(x_k)$

$$g'(x_k) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{d}{dx} \frac{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right) \Big|_{x=x_k}}{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)}$$

si  $i \neq k$

$$\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right) \Big|_{x=x_k} = \frac{1}{2} \prod_{k,i}^*$$

en donde

$$\prod_{k,i}^* = \prod_{\substack{j \neq k \\ j \neq i}} \sin\left(\frac{x_k-x_j}{2}\right)$$

y como

$$\prod_{k,i}^* = \frac{1}{\sin\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)} \prod_{j \neq k} \sin\left(\frac{x_k-x_j}{2}\right)$$

entonces

$$\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right) \Big|_{x=x_k} = \frac{\csc\left(\frac{x_k-x_i}{2}\right)}{2} \prod_{j \neq k} \sin\left(\frac{x_k-x_j}{2}\right)$$

si  $i = k$

$$\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right) \Big|_{x=x_i} = \prod_{i,1}^{**} + \dots + \prod_{i,i-1}^{**} + \prod_{i,i+1}^{**} + \dots + \prod_{i,N}^{**}$$

en donde

$$\prod_{i,l}^{**} = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{z_i-z_l}{2}\right) \prod_{i,l}^*$$

y como

$$\prod_{i,l}^{**} = \frac{1}{2} \cot\left(\frac{x_i - x_l}{2}\right) \prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)$$

entonces

$$\frac{d}{dx} \prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right) \Big|_{x=x_i} = \frac{1}{2} \sum_{l \neq i} \cot\left(\frac{x_i - x_l}{2}\right) \prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)$$

por lo tanto la matriz de diferenciación está dada por

$$(\mathcal{D})_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j \neq m} \cot\left(\frac{x_m - x_j}{2}\right) & m = n \\ \frac{1}{2} \frac{\prod_{j \neq m} \sin\left(\frac{x_m - x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq n} \sin\left(\frac{x_n - x_j}{2}\right)} \csc\left(\frac{x_m - x_n}{2}\right) & m \neq n \end{cases} \quad (1.3)$$

y puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\mathcal{D} = \mathcal{T} \tilde{\mathcal{D}} \mathcal{T}^{-1}$$

en donde

$$(\tilde{\mathcal{D}})_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j \neq m} \cot\left(\frac{x_m - x_j}{2}\right) & m = n \\ \frac{1}{2} \csc\left(\frac{x_m - x_n}{2}\right) & m \neq n \end{cases} \quad (1.4)$$

$$(\mathcal{T})_{mn} = \prod_{j \neq m} \sin\left(\frac{x_m - x_j}{2}\right) \delta_{nm}$$

y por tanto

$$(\mathcal{P}^{-1})_{mn} = \frac{\delta_{nm}}{\prod_{j \neq m} \sin\left(\frac{x_m - x_j}{2}\right)}$$

si además escogemos los puntos de tal forma que

$$x_j = -\pi + \frac{2\pi j}{N}, \quad j = 1, \dots, N$$

entonces<sup>3</sup>

$$\frac{\prod_{j \neq m} \sin\left(\frac{m-j}{\pi} 2\right)}{\prod_{j \neq n} \sin\left(\frac{x_n - x_j}{2}\right)} = (-1)^{m+n}$$

$$\sum_{j \neq m} \cot\left(\frac{x_m - x_j}{2}\right) = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

por tanto nuestra matriz de diferenciación toma la forma

$$(\mathcal{D})_{mn} = \begin{cases} 0 & m = n \\ \frac{(-1)^{m+n}}{2} \csc\left(\frac{\pi(m-n)}{N}\right) & m \neq n \end{cases} \quad (1.5)$$

### 1.2.2. Caso par

Cuando el número puntos es par, no podemos usar los polinomios trigonométricos para interpolar, ya que esta base tiene un número impar de funciones. Una forma de solucionar dicho problema es la siguiente.

Sea

$$\tilde{f}_i = \frac{f(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i - x_s}{2}\right)}, \quad i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, N.$$

Si los puntos en donde  $f$  es conocida son tales que<sup>4</sup>

$$x_i - x_j < 2\pi \quad \forall x_i, x_j \in x,$$

entonces  $\tilde{f}$  es una función bien definida<sup>5</sup> que podemos interpolar con los polinomios trigonométricos ya que esta definida en un número impar de puntos, utilizando la ecuación A.4 tenemos que

<sup>3</sup>Utilizando [20]

<sup>4</sup>Esto lo podemos lograr fácilmente escogiendo adecuadamente nuestros puntos

<sup>5</sup>Ya que la distancia entre dos ceros contiguos de  $\sin\left(\frac{x-x_s}{2}\right)$  es de  $2\pi$

$$\tilde{g}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \tilde{f}(x_i) \frac{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)}.$$

Ahora bien

$$g_s(x) = \sin\left(\frac{x-x_s}{2}\right) \tilde{g}(x)$$

es una función que interpola a todos los puntos de  $f$  exepcto a  $f(x_s)$  ya que  $g_s(x_s) = 0$ , sin embargo es fácil ver que

$$g(x) = \sin\left(\frac{x-x_s}{2}\right) \tilde{g}(x) + f(x_s) \frac{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x_s-x_j}{2}\right)},$$

es una función que interpola a  $f$ , veamos la forma que tiene  $g(x)$

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin\left(\frac{x-x_s}{2}\right) \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \tilde{f}(x_i) \frac{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)} \right) + f(x_s) \frac{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x_s-x_j}{2}\right)} \\ &= \sin\left(\frac{x-x_s}{2}\right) \left( \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \frac{f(x_i)}{\sin\left(\frac{x_i-x_s}{2}\right)} \frac{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)} \right) + f(x_s) \frac{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x_s-x_j}{2}\right)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N \frac{f(x_i) \sin\left(\frac{x-x_s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_i-x_s}{2}\right)} \frac{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{\substack{j \neq i \\ j \neq s}} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)} + f(x_s) \frac{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x_s-x_j}{2}\right)} \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^N f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)} + f(x_s) \frac{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq s} \sin\left(\frac{x_s-x_j}{2}\right)} \\ &= \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)} \end{aligned}$$

que es la misma forma que tiene para el caso impar, por lo tanto la matriz de diferenciación es la misma

### 1.3. Matrices de diferenciación parcial

Sea  $f$  una función de  $N$  variables conocida en un número finito de puntos

$$f(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{Nk}), \quad i = 1, \dots, m_1, \quad j = 1, \dots, m_2, \quad \dots, \quad k = 1, \dots, m_N,$$

sea  $\beta = \beta_1(x_1) \otimes \beta_2(x_2) \otimes \dots \otimes \beta_N(x_N)$  la base de interpolación, en donde

$$\beta_t(x_t) = \{h_{t1}(x_t), h_{t2}(x_t), \dots, h_{tm_t}(x_t)\}, \quad t = 1, \dots, N.$$

En la sección A.2.3 del apéndice encontramos que la función de interpolación está dada por

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) \otimes g_2(x_2) \cdots \otimes g_N(x_N),$$

en donde

$$g_t(x_t) \in \mathcal{L}(\beta_t(x_t)), \quad t = 1, \dots, N.$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, x_2, \dots, x_N) = g_1(x_1) \otimes g_2(x_2) \otimes \dots \otimes g'_i(x_i) \otimes \dots \otimes g_N(x_N),$$

por lo tanto, la matriz de diferenciación parcial respecto a  $x_i$  esta dada por

$$\mathbf{D}_{x_i} = I_{m_1} \otimes I_{m_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{D}_{x_i} \otimes \dots \otimes I_{m_N},$$

en donde  $\mathcal{D}_{x_i}$  es la matriz de diferenciación para  $g_i(x_i)$  y  $I_{n_t}$  es la matriz identidad de  $n_t \times n_t$ ,  $t = 1, \dots, N$

---

## Capítulo 2

# Momento Angular Total

En este capítulo hablaremos un poco acerca del momento angular total  $J$ , mencionando sólo los temas que se relacionan con este trabajo y omitiendo algunos detalles, pero si el lector quiere abundar más en el tema, puede leer [13], [14], [15] y [16], además, este será el único capítulo de la tesis en donde se use la notación de un gorrito arriba para los operadores ya que posteriormete se complica mucho la notación

### 2.1. Momento angular orbital

En la mecánica cuántica los operadores de momento angular orbital se obtienen a partir de su definición clásica,

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= yp_z - zp_y, \\ \hat{L}_y &= zp_x - xp_z, \\ \hat{L}_z &= xp_y - yp_x,\end{aligned}$$

sustituyendo las magnitudes clásicas por sus operadores cuánticos correspondientes. De esta forma,



$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \\ \hat{L}_y &= -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).\end{aligned}$$

Usando las relaciones de conmutación que se satisfacen entre  $x, y, z$  y  $p_x, p_y, p_z$ , se puede mostrar que

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i\hbar \sum_n \varepsilon_{jkn} \hat{L}_n. \quad (2.1)$$

Por lo tanto,  $\hat{L}_x, \hat{L}_y$  y  $\hat{L}_z$  forman un álgebra de Lie y sólo podemos medir una de las componentes con precisión arbitraria, ya que el producto de las varianzas<sup>1</sup> en la medición de dos operadores autoadjuntos  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  esta dada por

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{\hbar}{2} |\langle \hat{C} \rangle|,$$

en donde  $\langle \hat{C} \rangle = [\hat{A}, \hat{B}]$ , en nuestro caso tenemos que

$$\Delta \hat{L}_j \Delta \hat{L}_k \geq \frac{\hbar^2}{2} |\langle \hat{L}_n \rangle|.$$

Al cambiar a coordenadas esféricas, la componente  $z$  del momento angular toma la forma simple

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.2)$$

Entonces, el problema de valores propios se transforma en la ecuación diferencial

$$-i\hbar \frac{d}{d\varphi} y(\varphi) = \ell y(\varphi),$$

cuya solución está dada por  $y(\varphi) = e^{im\varphi}$ . En toda la literatura referente a este tema o al menos en la inmensa mayoría, se suele imponer como condición

$$y(\varphi) = y(\varphi + 2\pi),$$

---

<sup>1</sup>Ver en el apéndice Principio de Incertidumbre de Heisenberg

con lo cual implícitamente se pide que las funciones de onda sigan la estadística de Bose-Einstein<sup>2</sup>, bajo esta condición

$$\begin{aligned} e^{im\varphi} &= e^{im(\varphi+2\pi)} \\ &= e^{im\varphi} e^{i2m\pi} \end{aligned}$$

o de forma equivalente  $e^{i2m\pi} = 1$ , esta condición se cumple si y sólo si  $m$  es entero, entonces

$$-i\hbar \frac{d}{d\varphi} e^{im\varphi} = m\hbar e^{im\varphi}, \quad (2.3)$$

por lo tanto, los valores propios de  $\hat{L}_z$  son múltiplos enteros de  $\hbar$ .

Por otro lado, si se pide que las partículas sigan la estadística de Fermi-Dirac, entonces

$$\begin{aligned} y(\varphi) &= -y(\varphi + 2\pi), \\ e^{i2m\pi} &= -1, \\ m &= \frac{2l+1}{2} \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

y por lo tanto, los valores propios de  $\hat{L}_z$  son múltiplos semi-enteros de  $\hbar$ .

Podemos ver esto de forma más general y sin tener que recurrir a este tipo de argumentos utilizando el álgebra que satisfacen estos operadores. Sean  $\hat{J}_x$ ,  $\hat{J}_y$  y  $\hat{J}_z$  operadores autoadjuntos tales que satisfacen

$$[\hat{J}_j, \hat{J}_k] = i\hbar \sum_n \varepsilon_{jkn} \hat{J}_n. \quad (2.4)$$

Sea  $\hat{J}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ , entonces

---

<sup>2</sup>En la siguiente sección hablaremos acerca de estas estadísticas, pero si el lector así lo prefiere puede leer ahora esta parte.

$$\begin{aligned}
[\hat{J}^2, \hat{J}_j] &= [\hat{J}_j^2, \hat{J}_j] + [\hat{J}_k^2, \hat{J}_j] + [\hat{J}_n^2, \hat{J}_j] \\
&= \hat{J}_k [\hat{J}_k, \hat{J}_j] + [\hat{J}_k, \hat{J}_j] \hat{J}_k + \hat{J}_n [\hat{J}_n, \hat{J}_j] + [\hat{J}_n, \hat{J}_j] \hat{J}_n \\
&= i\hbar\varepsilon_{kjn} (\hat{J}_k \hat{J}_n + \hat{J}_n \hat{J}_k) + i\hbar\varepsilon_{njk} (\hat{J}_n \hat{J}_k + \hat{J}_k \hat{J}_n),
\end{aligned}$$

y como  $\varepsilon_{kjn} = -\varepsilon_{njk}$

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_j] = 0 \quad j = x, y, z.$$

Por lo tanto, podemos encontrar una base  $|l, m\rangle$ , en donde  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$  son diagonales. Sin pérdida de generalidad podemos tomar la componente  $z$ , es decir,  $j = z$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 |l, m\rangle &= J_l^2 |l, m\rangle, \\
\hat{J}_z |l, m\rangle &= \hbar m |l, m\rangle,
\end{aligned}$$

en donde hemos denotado con  $J_l^2$  y  $\hbar m$  a los valores propios de  $\hat{J}^2$  y  $\hat{J}_z$  respectivamente.

Sean  $\hat{J}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_x + i\hat{J}_y)$  y  $\hat{J}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)$ , observemos que  $\hat{J}_+^\dagger = \hat{J}_-$ , por lo tanto  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  no son operadores autoadjuntos. Es fácil ver que las siguientes relaciones de conmutatividad se cumplen

$$\begin{aligned}
[\hat{J}^2, \hat{J}_+] &= 0, \\
[\hat{J}^2, \hat{J}_-] &= 0, \\
[\hat{J}_z, \hat{J}_+] &= \hbar \hat{J}_+, \\
[\hat{J}_z, \hat{J}_-] &= -\hbar \hat{J}_-, \\
[\hat{J}_+, \hat{J}_-] &= \hbar \hat{J}_z.
\end{aligned}$$

Estas relaciones de conmutatividad tienen las siguientes consecuencias importantes

$$\begin{aligned}
\hat{J}_z \hat{J}_+ |l, m\rangle &= \hat{J}_+ \hat{J}_z |l, m\rangle + \hbar \hat{J}_+ |l, m\rangle \\
&= \hbar(m+1) \hat{J}_+ |l, m\rangle, \\
\hat{J}_z \hat{J}_- |l, m\rangle &= \hat{J}_- \hat{J}_z |l, m\rangle - \hbar \hat{J}_- |l, m\rangle \\
&= \hbar(m-1) \hat{J}_- |l, m\rangle,
\end{aligned}$$

es decir,  $\hat{J}_+ |l, m\rangle = \hbar \alpha_{m+1} |l, m+1\rangle$  y  $\hat{J}_- |l, m\rangle = \hbar \beta_{m-1} |l, m-1\rangle$ . Esto quiere decir que a partir del estado  $|l, m\rangle$ ,  $\hat{J}_+$  y  $\hat{J}_-$  crean<sup>3</sup> los estados  $|l, m+1\rangle$  y  $|l, m-1\rangle$ . Además,

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2 \hat{J}_+ |l, m\rangle &= \hat{J}_+ \hat{J}^2 |l, m\rangle \\
&= J_l^2 \hat{J}_+ |l, m\rangle, \\
\hat{J}^2 \hat{J}_- |l, m\rangle &= \hat{J}_- \hat{J}^2 |l, m\rangle \\
&= J_l^2 \hat{J}_- |l, m\rangle.
\end{aligned}$$

Es decir, los estados  $|l, m+1\rangle$  y  $|l, m-1\rangle$  tienen el mismo valor propio para el operador  $\hat{J}^2$ , por lo tanto el operador  $\hat{J}^2$  es degenerado, pero como nuestros estados tienen dos índices, podemos etiquetar todos los estados que tienen el mismo valor propio  $J_l^2$  mediante el segundo índice.

Como  $J_+^\dagger = \hat{J}_-$ , si encontramos la representación de  $J_+$  podemos encontrar fácilmente la representación de  $J_-$ . Obsérvenos que

$$\langle l', m' | [\hat{J}^2, \hat{J}_+] |l, m\rangle = J_{l'}^2 \langle l', m' | \hat{J}_+ |l, m\rangle - J_l^2 \langle l', m' | \hat{J}_+ |l, m\rangle,$$

pero  $[\hat{J}^2, \hat{J}_+] = 0$ , por lo tanto

$$(J_{l'}^2 - J_l^2) \langle l', m' | \hat{J}_+ |l, m\rangle = 0,$$

entonces  $\hat{J}_+$  tiene una representación distinta de cero solo cuando  $l' = l$ , además

$$\langle l', m' | [\hat{J}_z, \hat{J}_+] |l, m\rangle = \hbar(m' - m) \langle l', m' | \hat{J}_+ |l, m\rangle,$$

---

<sup>3</sup>por así decirlo

y como  $[\hat{J}_z, \hat{J}_+] = \hbar \hat{J}_+$ , entonces

$$\hbar \langle l', m' | \hat{J}_+ | l, m \rangle = \hbar(m' - m) \langle l', m' | \hat{J}_+ | l, m \rangle,$$

es decir

$$\hbar(m' - m - 1) \langle l', m' | \hat{J}_+ | l, m \rangle = 0,$$

por lo tanto,  $\hat{J}_+$  es una matriz diagonal inferior

$$\hat{J}_+ = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & \hbar\alpha_m & 0 & & & & \\ & & \hbar\alpha_{m+1} & 0 & & & \\ & & & \hbar\alpha_{m+2} & 0 & & \\ & & & & \ddots & & \end{pmatrix},$$

y  $\hat{J}_-$  es una matriz diagonal superior. Además se satisface que  $\alpha_m^* = \beta_{m-1}$ .

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle l, m | [\hat{J}_+, \hat{J}_-] | l, m \rangle &= \langle l, m | \hat{J}_+ | l, m - 1 \rangle \langle l, m - 1 | \hat{J}_- | l, m \rangle \\ &\quad - \langle l, m | \hat{J}_- | l, m + 1 \rangle \langle l, m + 1 | \hat{J}_+ | l, m \rangle \\ &= \hbar^2 (\|\alpha_m\|^2 - \|\alpha_{m+1}\|^2), \end{aligned}$$

y como  $[\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \hbar \hat{J}_z$ , entonces

$$\|\alpha_m\|^2 - \|\alpha_{m+1}\|^2 = m,$$

o análogamente

$$\|\beta_{m-1}\|^2 - \|\beta_m\|^2 = m.$$

Podemos utilizar estas ecuaciones de diferencias para obtener  $\|\alpha_{m+n}\|^2$  en función de  $m$  y  $n$ . Nótese que

$$\begin{aligned} \|\alpha_m\|^2 - \|\alpha_{m+1}\|^2 &= m, \\ \|\alpha_{m+1}\|^2 - \|\alpha_{m+2}\|^2 &= m + 1, \\ &\vdots \\ \|\alpha_{m+n-1}\|^2 - \|\alpha_{m+n}\|^2 &= m + n - 1. \end{aligned}$$

Así que sumando todas las ecuaciones tenemos

$$\|\alpha_m\|^2 - \|\alpha_{m+n}\|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (m + j) \quad .$$

Para calcular  $\sum_{j=0}^{n-1} (m + j)$  observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (m + j) &= m + m + 1 + \dots + m + n - 2 + m + n - 1 \\ \sum_{j=0}^{n-1} (m + j) &= m + n - 1 + m + n - 2 + \dots + m + 1 + m \end{aligned} \quad ,$$

sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=0}^{n-1} (m + j) &= 2m + n - 1 + \dots + 2m + n - 1 \\ &= n(2m + n - 1) \\ &= n^2 + 2n \left(m - \frac{1}{2}\right) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \left(n + m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\|\alpha_{m+n}\|^2 = \|\alpha_m\|^2 + \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(n + m - \frac{1}{2}\right)^2 .$$

Observemos que haciendo  $n$  suficientemente grande podemos encontrar un  $\alpha_{m+n}$  tal que

$$\|\alpha_{m+n}\|^2 \leq 0 ! ,$$

lo cual es un absurdo, por lo tanto debemos tener que  $m \leq l_+$ , que  $\hat{J}_+ |l, l_+\rangle = 0$  y que

$$\begin{aligned} \hbar^2 l_+ &= \langle l, l_+ | \hbar \hat{J}_z | l, l_+ \rangle \\ &= \langle l, l_+ | [\hat{J}_+, \hat{J}_-] | l, l_+ \rangle \\ &= \langle l, l_+ | \hat{J}_+ | l, l_+ - 1 \rangle \langle l, l_+ - 1 | \hat{J}_- | l, l_+ \rangle - \langle l, l_+ | \hat{J}_- \hat{J}_+ | l, l_+ \rangle \\ &= \hbar^2 \|\alpha_{l_+}\|^2 . \end{aligned}$$

De manera similar, calculemos ahora  $\|\beta_{m-n}\|^2$

$$\begin{aligned} \|\beta_{m-1}\|^2 - \|\beta_m\|^2 &= m - 1, \\ \|\beta_{m-2}\|^2 - \|\beta_{m-1}\|^2 &= m - 2, \\ &\vdots \\ \|\beta_{m-n}\|^2 - \|\beta_{m-n+1}\|^2 &= m - n. \end{aligned}$$

Sumando todas las ecuaciones se tiene

$$\|\beta_{m-n}\|^2 - \|\beta_m\|^2 = \sum_{j=1}^n (m - j) .$$

Para calcular  $\sum_{j=1}^n (m - j)$  observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n (m - j) &= m - 1 + m - 2 + \dots + m - n + 1 + m - n \\ \sum_{j=1}^n (m - j) &= m - n + m - n + 1 + \dots + m - 2 + m - 1 \end{aligned} ,$$

sumando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{j=1}^n (m-j) &= 2m - (n+1) + \dots + 2m - (n+1) \\
 &= -n(n+1-2m) \\
 &= -\left(n^2 - 2n\left(m - \frac{1}{2}\right) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(m - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\
 &= -\left(n - m + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2,
 \end{aligned}$$

entonces

$$\|\beta_{m-n}\|^2 = \|\beta_m\|^2 + \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(n - m + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Análogamente, haciendo  $n$  suficientemente grande podemos encontrar un  $\beta_{m-n}$  tal que

$$\|\beta_{m-n}\|^2 \leq 0 \quad !,$$

lo cual es un absurdo, por lo tanto debemos tener que  $l_- \leq m$ , que  $\hat{J}_- |l, l_- \rangle = 0$  y que

$$\begin{aligned}
 \hbar^2 l_- &= \langle l, l_- | \hbar \hat{J}_z | l, l_- \rangle \\
 &= \langle l, l_- | [\hat{J}_+, \hat{J}_-] | l, l_- \rangle \\
 &= \langle l, l_- | \hat{J}_+ \hat{J}_- | l, l_- \rangle - \langle l, l_- | \hat{J}_- | l, l_- + 1 \rangle \langle l, l_- + 1 | \hat{J}_+ | l, l_- \rangle \\
 &= -\hbar^2 \|\beta_{l_-}\|^2.
 \end{aligned}$$

Ahora bien

$$\begin{aligned}
 \|\alpha_{l_-+1}\|^2 - \|\alpha_{l_-+2}\|^2 &= l_- + 1, \\
 \|\alpha_{l_-+2}\|^2 - \|\alpha_{l_-+3}\|^2 &= l_- + 2, \\
 &\vdots \\
 \|\alpha_{l_+-1}\|^2 - \|\alpha_{l_+}\|^2 &= l_- + (l_+ - l_-) - 1, \\
 \|\alpha_{l_+}\|^2 &= l_- + (l_+ - l_-),
 \end{aligned}$$



sumando todas la ecuaciones

$$\|\alpha_{l_-+1}\|^2 = l_- (l_+ - l_-) + \sum_{j=1}^{l_+-l_-} j,$$

utilizando la fórmula de Gauss<sup>4</sup> y que  $\|\alpha_{l_-+1}\|^2 = \|\beta_{l_-}\|^2 = -l_-$ , tenemos

$$-l_- = l_- (l_+ - l_-) + \frac{1}{2} (l_+ - l_-) (l_+ - l_- + 1),$$

de donde se sigue que

$$(l_+ - l_- + 1) (l_+ + l_-) = 0,$$

entonces

$$l_- = l_+ + 1,$$

ó bien,

$$l_- = -l_+,$$

pero  $l_- = l_+ + 1$  es un absurdo ya que  $l_- \leq l_+$ , por lo tanto  $l_- = -l_+$ , asi que podemos olvidarnos de los subindices + y -, para simplificar la notacion

Ahora bien, sea  $\hbar m$  el valor propio de  $\hat{J}_z$ , entonces existe un numero entero  $p$  tal que  $m + p = l$  y un numero entero  $q$  tal que  $m - q = -l$ , restando la segunda ecuación a la primrera tenemos que

$$2l = p + q,$$

entonces

$$l = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, \\ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \end{cases}$$

es decir,  $l$  es entero ó semi-entero.

---

<sup>4</sup> $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$

Si  $l$  es entero

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l.$$

Si  $l$  es semi-entero

$$m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots \pm l.$$

Por lo tanto, si  $l$  es entero  $m$  es entero y existe un número impar de valores posibles para  $m$ , ó bien, si  $l$  es semi-entero  $m$  es semi-entero y existe un número par de valores posibles para  $m$ .

Este resultado es válido para cualquier conjunto de operadores autoadjuntos que satisfagan la relación 2.4, en particular para  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  y  $\hat{L}_z$ , por lo tanto debemos considerar los valores propios semi-enteros de  $\hat{L}_z$ .

Ahora bien

$$\begin{aligned} \|\alpha_m\|^2 - \|\alpha_{m+1}\|^2 &= m, \\ \|\alpha_{m+1}\|^2 - \|\alpha_{m+2}\|^2 &= m+1, \\ &\vdots \\ \|\alpha_{l-1}\|^2 - \|\alpha_l\|^2 &= m - (l - m - 1), \\ \|\alpha_l\|^2 &= m - (l - m), \end{aligned}$$

sumando todas las ecuaciones y utilizando la fórmula de Gauss

$$\|\alpha_m\|^2 = \frac{(l+m)(l-m+1)}{2},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{2}} e^{i\nu}, \\ \beta_{m-1} &= \sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{2}} e^{-i\nu}, \end{aligned}$$

con  $\nu \in [0, 2\pi]$ . Y ya que

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_z^2 + \left( \hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+ \right),$$

entonces

$$\hat{J}_l^2 = \hbar^2 (m^2 + \|\alpha_m\|^2 + \|\alpha_{m+1}\|^2),$$

en particular podemos tomar  $m = l$  y por lo tanto

$$\hat{J}_l^2 = \hbar^2 (l^2 + l).$$

## 2.2. Espín

En 1922 Otto Stern y Walther Gerlach realizaron un experimento famoso, que consistía en hacer pasar un haz colimado de átomos de plata sobre un campo magnético no uniforme que crece en dirección perpendicular al haz, el experimento tuvo como resultado el desdoblamiento del haz en dos haces independientes, mostrando así que los niveles energéticos de los átomos de plata estaban cuantizados. La física clásica y cuántica del momento no pudo dar una explicación satisfactoria al espectro atómico de la plata.

En 1925 fue introducido el concepto de espín, los físicos Kroning, Goudsmit y Uhlenbeck descubrieron que si añaden un número cuántico adicional al que llamo espín, se podía dar una explicación satisfactoria al espectro atómico de la plata. Luego el concepto de espín del electrón fue modelado matemáticamente por Wolfgang Pauli, utilizando las matrices de Pauli como base del espacio vectorial  $SU(2)$ .

Existen dos tipos de analogías que se pueden hacer para tratar de entender lo que es el espín, la primera dice que es una rotación, como la rotación de los planetas sobre su propio eje, pero las partículas cuánticas son tan pequeñas que no podemos hablar de un eje y por tanto de este tipo de rotación, la segunda dice que es un momento magnético, ya que las partículas con espín presentan un momento magnético similar a un cuerpo con carga en rotación, pero la analogía se pierde al ver que el espín existe para partículas sin carga como el fotón.

La explicación más satisfactoria es que el espín es una propiedad intrínseca de la materia, como la masa o la carga eléctrica, que sólo presentan las partículas cuánticas. El espín es un momento angular intrínseco que no puede asociarse con

rotaciones en el espacio, por tanto, en mecánica cuántica el momento angular total se define como  $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ , en donde  $\hat{L}$  es el momento angular orbital y  $S$  es el espín. Las propiedades más importantes del espín, son que el espín está cuantizado por múltiplos de  $\frac{\hbar}{2}$  y que distintos observadores pueden diferir en el sentido de la rotación, pero no en la magnitud del espín.

Una propiedad fundamental de las partículas cuánticas es que, parecen existir sólo dos tipos de partículas, los fermiones y los bosones. La primera obedece la estadística de Fermi-Dirac y la segunda la estadística de Bose-Einstein, esto implica que los fermiones están descritos por funciones de onda antisimétricas y los bosones por funciones de onda simétricas. Curiosamente existe una relación entre la estadística que obedecen las partículas y su espín, los fermiones tienen espín semi-entero y los bosones entero.

No existen análogos clásicos del espín, pero existen modelos clásicos que dan lugar al espín, así como, tras un proceso de discretización a la ecuación de Dirac para partículas de espín  $\frac{1}{2}$ . La idea se centra en que el centro de masa y el centro de carga de la partícula no coinciden, aunque no es un tema conocido ni popular, merece ser mencionado, porque de este tipo de modelos se suele aprender mucho. Generalmente es bueno tener un modelo clásico de las teorías cuánticas para ganar intuición sobre el sistema, desgraciadamente, si bien en las clases y en los libros de texto se suele hacer incapié en la ausencia de analogía clásica, el lector puede encontrar un resumen de las características del modelo en [18] y un libro extenso donde se explica detalladamente este modelo en [19].

---

## Capítulo 3

# Generador de Rotaciones Sobre un Espacio de Hilbert Discreto

En este capítulo encontraremos la representación del momento angular  $J$  cuando discretizamos el espacio de Hilbert de la Mecánica Cuántica. Resolveremos el problema de valores propios para este operador y compararemos los resultados obtenidos con los del problema de valores propios del caso continuo.

Sea  $\Psi = \{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle\}$  un conjunto completo de estados cuánticos y sea  $\Delta$  un operador que produce permutaciones cíclicas<sup>1</sup> en  $\Psi$  de la siguiente manera

$$\Delta |\Psi_j\rangle = \begin{cases} e^{i\gamma_{j+1}} |\psi_{j+1}\rangle, & j \neq N, \\ e^{i\gamma_1} |\psi_1\rangle, & j = N. \end{cases} \quad (3.1)$$

y que gráficamente podemos ver como

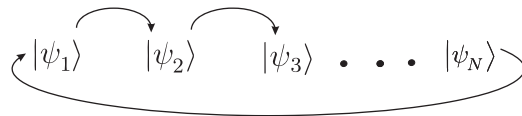


Figura 3.1: Representación gráfica de la acción del operador  $\Delta$  sobre  $\Psi$

Ahora bien, observemos que la disposición de estos estados puede ser arbitraria

---

<sup>1</sup>Salvo un factor de fase

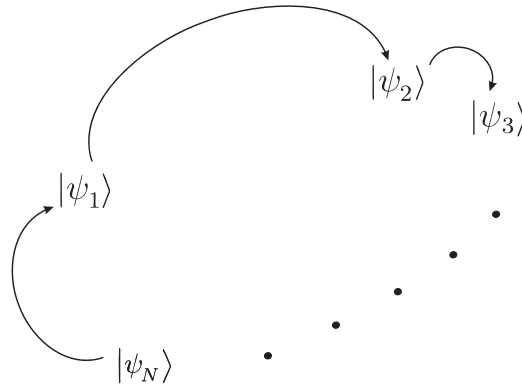


Figura 3.2: Representación gráfica de la acción del operador  $\Delta$  sobre  $\Psi$  cuando la disposición de los estados cuánticos  $|\Psi_j\rangle \quad j = 1, \dots, N$  es arbitraria

Sin embargo, para simplificar ideas, podemos considerar que los estados se encuentran dispuestos sobre un círculo y que son equidistantes entre sí

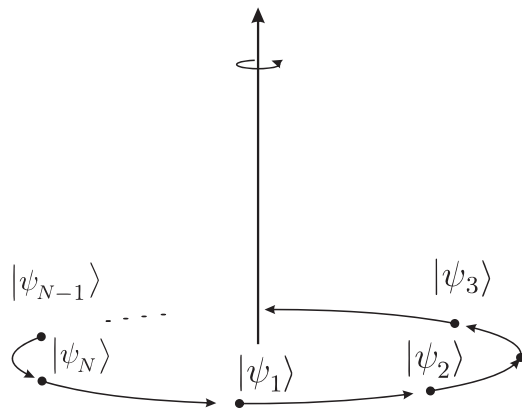


Figura 3.3: Representación gráfica de la acción del operador  $\Delta$  sobre  $\Psi$  cuando los estados cuánticos  $|\Psi_j\rangle \quad j = 1, \dots, N$  están dispuestos en un círculo y son equidistantes

Independientemente de la disposición de los estados, la representación de  $\Delta$  en la base  $\Psi$  está dada por la matriz

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\gamma_1} \\ e^{i\gamma_2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\gamma_N} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es fácil ver<sup>2</sup> que  $\det(\Delta) = (-1)^{N-1}e^{i\Gamma}$  en donde  $\Gamma = \sum_{j=1}^N \gamma_j$  y que el polinomio característico de  $\Delta$  es  $P(\lambda) = (-1)^{N-1}(-\lambda^N + e^{i\Gamma})$ . Por lo tanto, los valores propios de  $\Delta$  son las raíces  $N$ -ésimas de  $e^{i\Gamma}$ .

Ya que  $\Delta$  es unitario, existe  $A$  tal que  $\Delta$  puede ser escrita como

$$\Delta = e^{iA},$$

En donde  $A$  es un operador que tiene los mismos vectores propios que  $\Delta$ . Así que si  $A|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle$  entonces  $\Delta|a_j\rangle = e^{ia_j}|a_j\rangle$ .

Para conocer la representación de  $A$  en la base de  $\Psi$  necesitamos conocer sus vectores propios o de forma equivalente los vectores propios de  $\Delta$ .

Para encontrar los vectores propios de  $\Delta$  resolvemos el sistema

$$(\Delta - e^{ia_j}I)|a_j\rangle = |0\rangle,$$

es decir

$$\begin{pmatrix} -e^{ia_j} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & e^{i\gamma_1} \\ e^{i\gamma_2} & -e^{ia_j} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\gamma_3} & -e^{ia_j} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\gamma_4} & -e^{ia_j} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & e^{i\gamma_{N-1}} & -e^{ia_j} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{i\gamma_N} & -e^{ia_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

que de forma más compacta, podemos reescribir de la siguiente manera

<sup>2</sup>Ya que  $\det(\Delta) = \varepsilon_{N-1, 2, \dots, N-1} e^{i\gamma_1} e^{i\gamma_2} \dots e^{i\gamma_N}$  y  $P(\lambda) = \varepsilon_{1, 2, \dots, N} (-\lambda)^N + \varepsilon_{N-1, 2, \dots, N-1} e^{i\Gamma}$

$$\begin{aligned}
 -x_1 e^{ia_j} + x_N e^{i\gamma_N} &= 0 \\
 x_1 e^{-i\gamma_2} - x_2 e^{ia_j} &= 0 \\
 x_2 e^{-i\gamma_3} - x_3 e^{ia_j} &= 0 \\
 &\vdots \\
 x_{N-2} e^{-i\gamma_{N-1}} - x_{N-1} e^{ia_j} &= 0 \\
 x_{N-1} e^{-i\gamma_N} - x_N e^{ia_j} &= 0
 \end{aligned}$$

Quitando la primera ecuación<sup>3</sup> y resolviendo tenemos que

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_2 e^{-i\gamma_2} e^{ia_j} \\
 x_2 &= x_3 e^{-i\gamma_3} e^{ia_j} \\
 &\vdots \\
 x_{N-2} &= x_{N-1} e^{-i\gamma_{N-1}} e^{ia_j} \\
 x_{N-1} &= x_N e^{-i\gamma_N} e^{ia_j}
 \end{aligned}$$

Poniendo a todos los  $x_k$  en términos de  $x_N$ , tenemos que

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_N e^{-i\Gamma_1} e^{i(N-1)a_j} \\
 x_2 &= x_N e^{-i\Gamma_2} e^{i(N-2)a_j} \\
 &\vdots \\
 x_{N-2} &= x_N e^{-i\Gamma_{N-2}} e^{i(N-(N-2))a_j} \\
 x_{N-1} &= x_N e^{-i\Gamma_{N-1}} e^{i(N-(N-1))a_j} \\
 x_N &= x_N
 \end{aligned}$$

en donde  $\Gamma_q = \sum_{r>q} \gamma_r$ , por tanto<sup>4</sup> la  $k$ -ésima entrada del vector propio normalizado  $|a_j\rangle$  está dada por

---

<sup>3</sup>Podemos quitar cualquiera, ya que es combinación lineal de las  $N - 1$  restantes  
<sup>4</sup>Ya que  $e^{i(N-k)a_j} = e^{-ika_j}$



$$\langle \psi_k | a_j \rangle = \frac{e^{-i\Gamma_k} e^{-ika_j}}{\sqrt{N}}.$$

Ahora podemos encontrar la representación de  $A$

$$\begin{aligned} (A)_{km} &= \sum_l \langle \psi_k | a_l \rangle a_l \langle a_l | \psi_m \rangle \\ &= e^{-i\Gamma_k} \left( \frac{1}{N} \sum_l a_l e^{-i(k-m)a_l} \right) e^{i\Gamma_m}. \end{aligned}$$

Así que podemos reescribir a  $A$  de la siguiente forma

$$A = Q \tilde{A} Q^{-1},$$

en donde

$$\begin{aligned} (\tilde{A})_{km} &= \frac{1}{N} \sum_l a_l e^{-i(k-m)a_l}, \\ (Q)_{km} &= \delta_{km} e^{-i\Gamma_k}, \end{aligned}$$

y por tanto

$$(Q^{-1})_{km} = \delta_{km} e^{i\Gamma_k}.$$

Como mencionamos al principio del capítulo, queremos encontrar la representación del momento angular  $J$  cuando discretizamos el espacio de Hilbert. Para ello necesitamos relacionar a  $\tilde{A}$  con una matriz de diferenciación, esto lo podemos hacer<sup>5</sup> si y sólo si

$$\Gamma = \begin{cases} 2l\pi, & N = 2n + 1, \\ (2l + 1)\pi, & N = 2n. \end{cases}$$

Bajo esta condición

---

<sup>5</sup>La suficiencia se expone a continuación, la prueba de la necesidad se encuentra en la sección A.5 del apéndice

$$(\Delta)^N = \begin{cases} 1, & N = 2n + 1, \\ -1, & N = 2n, \end{cases}$$

es decir, cuando tomamos un estado cuántico  $|\psi_j\rangle$  y lo rotamos  $N$  veces como se muestra en la figura 3.3, llegamos a  $|\psi_j\rangle$  si  $N$  es impar ó a  $-|\psi_j\rangle$  si  $N$  es par. Si  $N$  es impar, es como si nos moviéramos sobre un círculo y si  $N$  es par, es como si nos moviéramos sobre una banda de Möbius. Además,  $\Delta$  genera un grupo cíclico de orden  $N$  y  $2N$  para  $N$  impar y para  $N$  par, respectivamente.

Veamos la forma explícita que toma  $a_j$  para cada uno de los casos.

#### Caso impar

En este caso,  $e^{ia_j}$  es una raíz  $N$ -ésima de la unidad. Es fácil ver<sup>6</sup> que el desfaseamiento entre dos raíces contiguas es  $\frac{2\pi}{N}$ , sabiendo esto, podemos encontrar todas las raíces a partir de una de ellas. Trivialmente  $1$  ó  $e^{i0}$ , es una raíz  $N$ -ésima de la unidad, por tanto las demás raíces están dadas por

$$e^{i\frac{2\pi}{N}(\pm 1)}, e^{i\frac{2\pi}{N}(\pm 1)}, \dots, e^{i\frac{2\pi}{N}(\pm n)}.$$

#### Caso par

En este caso,  $e^{ia_j}$  es una raíz  $N$ -ésima de  $-1$ . y trivialmente  $e^{i\pm\frac{\pi}{N}}$  son dos raíces, pero para fines prácticos las reescribimos de la siguiente forma

$$e^{i\pm\frac{\pi}{N}} = e^{i\frac{2\pi}{N}(\pm\frac{1}{2})}.$$

Utilizando  $e^{i\frac{2\pi}{N}(\pm\frac{1}{2})}$  como nuestras raíces triviales y sabiendo que el desfaseamiento entre dos raíces contiguas es  $\frac{2\pi}{N}$ , es fácil ver que las raíces  $N$ -ésimas de  $-1$  son

$$e^{i\pm(\frac{1}{2})\frac{2\pi}{N}}, e^{i\pm(\frac{1}{2}+1)\frac{2\pi}{N}}, e^{i\pm(\frac{1}{2}+2)\frac{2\pi}{N}}, \dots, e^{i\pm(\frac{2n-1}{2})\frac{2\pi}{N}}.$$

---

<sup>6</sup>Si  $\alpha$  es el desfaseamiento ente dos raíces contiguas, entonces  $N\alpha = 2\pi$  ya que  $e^{iN(a_j+\alpha)} = e^{iNa_j}$  y por tanto  $\alpha = \frac{2\pi}{N}$

Resumiendo, los valores propios del operador  $\Delta$  están dados por  $e^{ia_j}$ , en donde

$$a_j = \frac{2\pi}{N}j, \quad j \in \mathcal{I}_n,$$

$$\mathcal{I}_n = \begin{cases} 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n, & N = 2n + 1, \\ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2n-1}{2}, & N = 2n. \end{cases}$$

Por lo tanto

$$(\tilde{A})_{km} = \frac{2\pi}{N^2} \sum_{l \in \mathcal{I}_n} l e^{-i(k-m)\frac{2\pi}{N}l},$$

es fácil ver que los elementos de la diagonal son iguales a cero ya que

$$(\tilde{A})_{km} = \frac{2\pi}{N^2} \sum_{l \in \mathcal{I}_n} l,$$

encontremos ahora los elemetos fuera de la diagonal.

Para  $N = 2n + 1$

$$(\tilde{A})_{jk} = -\frac{4\pi}{N^2}i \sum_{l=1}^n l \sin \frac{2\pi l(j-k)}{N},$$

y para  $N = 2n$

$$(\tilde{A})_{jk} = -\frac{4\pi}{N^2}i \sum_{l=1}^n \left(l - \frac{1}{2}\right) \sin \frac{2\pi(l - \frac{1}{2})(j-k)}{N}.$$

Ambas sumas pueden ser calculadas fácilmente [20] y para  $N$  impar y par se tiene que

$$(\tilde{A})_{jk} = \langle \varphi_j | (\tilde{A}) | \varphi_k \rangle = \begin{cases} 0, & j = k, \\ \frac{i(-1)^{j+k} \frac{\pi}{N}}{\sin \frac{\pi(j-k)}{N}}, & j \neq k. \end{cases}$$

Más aún, podemos ver que

$$\tilde{A} = i \frac{2\pi}{N} \mathcal{D}, \quad (3.2)$$

en donde  $\mathcal{D}$  es la matriz de diferenciación para polinomios trigonométricos obtenida en la ecuación 1.5.

Como ya sabemos  $A = Q\tilde{A}Q^{-1}$ , por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta &= e^{iQ\tilde{A}Q^{-1}} \\ &= \sum_0^\infty \frac{(Q\tilde{A}Q^{-1})^n}{n!} \\ &= \sum_0^\infty \frac{Q(\tilde{A})^n Q^{-1}}{n!} \\ &= Qe^{i\tilde{A}}Q^{-1}. \end{aligned}$$

Sean  $\tilde{A}$  y  $\tilde{\Delta} = e^{i\tilde{A}}$  operadores en la base  $\tilde{\Psi} = \{e^{-i\sum_{r>1}\gamma_r} |\psi_1\rangle, e^{-i\sum_{r>2}\gamma_r} |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle\}$ , al cambiar a la base  $\Psi$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\Psi &= Q\tilde{A}Q^{-1} \\ &= A, \\ \tilde{\Delta}_\Psi &= Qe^{i\tilde{A}}Q^{-1} \\ &= \Delta, \end{aligned}$$

análogamente, si  $|\varphi_j\rangle$  es vector propio de  $\tilde{A}$  en la base  $\tilde{\Psi}$ , entonces

$$|a_j\rangle = Q|\varphi_j\rangle,$$

por lo tanto

$$\langle \tilde{\psi}_k | \varphi_j \rangle = \frac{e^{-ika_j}}{\sqrt{N}},$$

los valores propios son invariantes bajo transformaciones de similitud.

Ambas bases son ortogonales, y podemos pasar de una a otra muy fácilmente, así que, sin pérdida de generalidad trabajaremos de ahora en adelante en la base  $\tilde{\Psi}$ .

Por construcción,  $\Delta$  es el generador de rotaciones en el espacio de estados, por lo tanto  $\Delta = e^{-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi J}$ . Por otro lado<sup>7</sup>,  $\Delta = e^{i(\frac{2\pi}{N}\mathcal{D})}$ , entonces

$$\begin{aligned} e^{-\frac{i}{\hbar}\delta\varphi J} &= e^{i(\frac{2\pi}{N}\mathcal{D})} \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}(-i\hbar\frac{2\pi}{N}\mathcal{D})}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$J = -i\hbar\mathcal{D} \tag{3.3}$$

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{N} \tag{3.4}$$

Observemos que las representaciones de  $\hat{L}_z$  y  $J$  obtenidas en las ecuaciones 2.2 y 3.3 son muy similares, pero la diferencia entre ellos es que,  $\hat{L}_z$  se obtiene a partir de rotaciones en el espacio físico y  $J$  se obtiene a partir de rotaciones en una base del espacio de Hilbert discretizado, observemos también que,  $\mathcal{D}$  y  $J$  son múltiplos de  $A$ , y  $\Delta$  es una suma de potencias de  $A$ , por tanto, existe una base de vectores ortonormales en donde los cuatro operadores son diagonales, dicha base está dada por  $\{|\varphi_j\rangle \mid j \in I_n\}$ . Para encontrar el espectro de  $\mathcal{D}$  y  $J$  utilizamos las ecuaciones 3.2 y 3.3, Así

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= -i\frac{N}{2\pi}A, \\ J &= -\hbar\frac{N}{2\pi}A. \end{aligned}$$

Por tanto, los espectros de  $\mathcal{D}$  y  $J$  estan dados por

$$-ji, \quad j \in \mathcal{I}_n, \tag{3.5}$$

$$-j\hbar, \quad j \in \mathcal{I}_n, \tag{3.6}$$

es decir, los valores propios de  $J$  son múltiplos enteros y semi-enteros de  $\hbar$ , para  $N$  impar y  $N$  par respectivamente. Esto es un poco análogo al experimento de

---

<sup>7</sup>Sustituimos  $A$  y utilizando la ecuación 3.2

Otto Stern y Walther Gerlach,  $\Delta$  se divide en dos casos independientes que curiosamente están asociados con los dos tipos de partículas cuánticas existentes, los bosones y los fermiones, ya que para  $N$  impar las funciones de onda son simétricas, siguen la estadística de Bose-Einstein y tienen espín entero y para  $N$  par las funciones de onda son antisimétricas, siguen la estadística de Fermi-Dirac y tienen espín semi-entero.

Al igual que en el capítulo anterior, hemos obtenido que los valores propios de  $J$  son múltiplos enteros y semi-enteros de  $\hbar$ .

---

## Capítulo 4

# Momento Angular Total sobre un Toro

En este capítulo encontraremos la representación del momento angular  $J$  cuando el espacio de Hilbert se discretiza sobre un toro y mostraremos que existe una base de la forma  $\Psi = \Psi_\varphi \otimes \Psi_\theta$ ,<sup>1</sup> en donde  $\Psi_\varphi$  y  $\Psi_\theta$  son dos conjuntos de estados cuánticos tales que podemos definir operadores que generen rotaciones cíclicas en cada uno de ellos, esto nos llevara a encontrar la representación de  $J_\varphi$  y  $J_\theta$  sobre el toro y por ultimo resolveremos el problema de valores propios para  $J_\varphi$ ,  $J_\theta$  y  $J^2$

Primero construyamos un toro y veamos cuales son los parámetros y las variables que lo determinan. Para construir un toro primero trazamos un círculo de radio  $r$

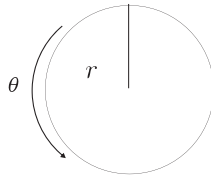


Figura 4.1: *Esta primera construcción está determinada por el parámetro  $r$  y la variable  $\theta \in [0, 2\pi)$*

luego giramos  $2\pi$  sobre un eje que se encuentra a una distancia  $R$  del círculo

---

<sup>1</sup>En donde  $\otimes$  es el producto de kronecker, para mas iformacion ver la seccion del Apéndice

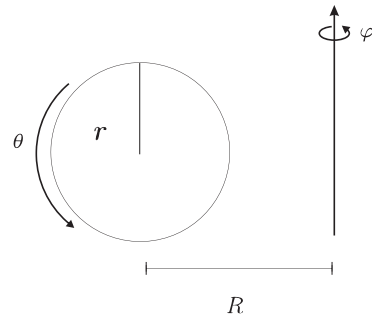


Figura 4.2: Esta segunda construcción está determinada por el parámetro  $R$  y la variable  $\varphi \in [0, 2\pi)$

Así obtenemos nuestro toro.

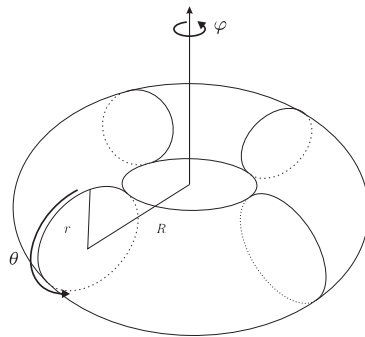


Figura 4.3: El toro está determinado por los parámetros  $r$  y  $R$ , y por las variables  $\theta$  y  $\varphi$ , en donde  $r$  es el radio interno del toro,  $R$  el radio externo del toro y  $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$

Ahora, discretizamos el toro mapeandolo a una malla  $\Psi$

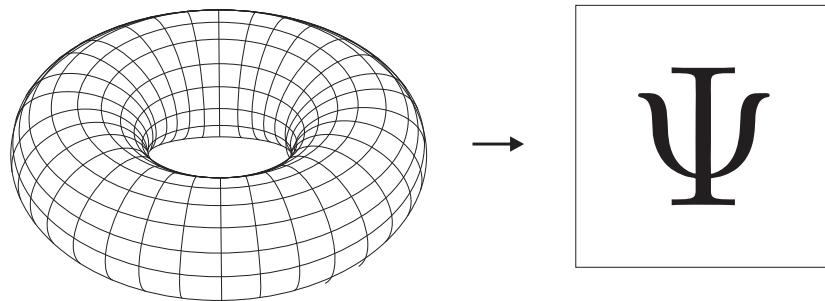


Figura 4.4: Mapeo del toro a la malla  $\Psi$



en donde cada punto sobre la malla  $\Psi$  es un estado cuántico posible

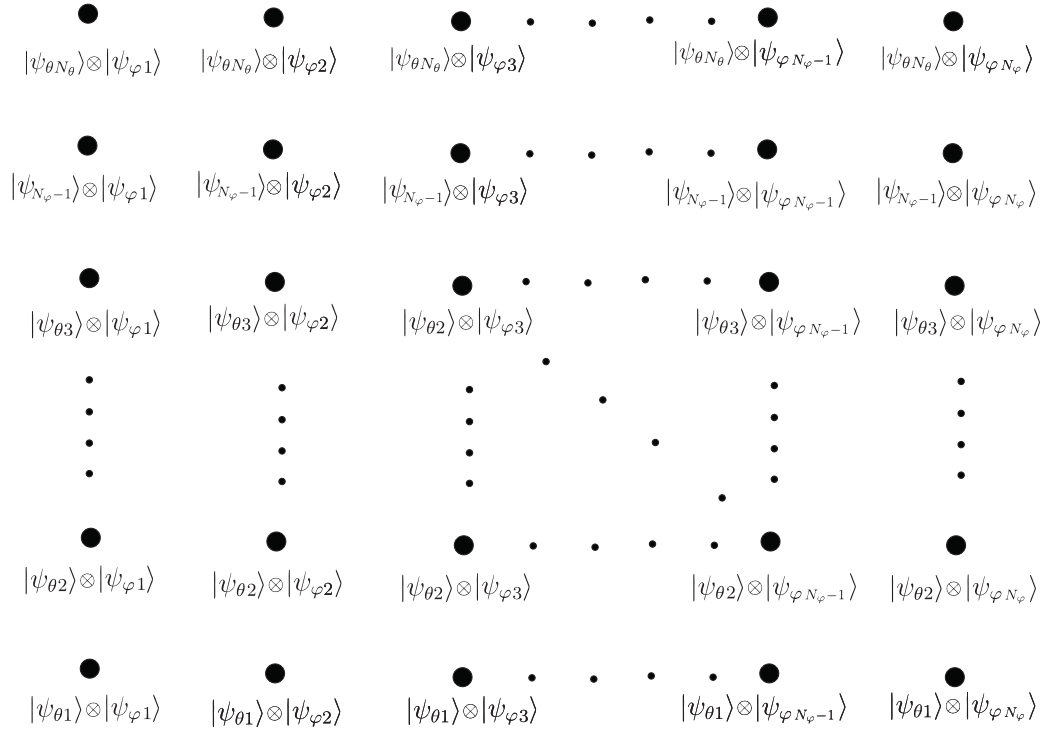


Figura 4.5: Malla  $\Psi = \Psi_\varphi \otimes \Psi_\theta$  en donde  $\Psi_\varphi = \{\psi_{\varphi_1}, \psi_{\varphi_2}, \dots, \psi_{\varphi_{N_\varphi}}\}$  y  $\Psi_\theta = \{\psi_{\theta_1}, \psi_{\theta_2}, \dots, \psi_{\theta_{N_\theta}}\}$

De esta forma,  $\Psi = \Psi_\varphi \otimes \Psi_\theta$  forma nuestra base del espacio de Hilbert.

Sean  $\Delta_\theta$  y  $\Delta_\varphi$  operadores que generan rotaciones cíclicas<sup>2</sup> en  $\Psi_\theta$  y  $\Psi_\varphi$  respectivamente, entonces los operadores<sup>3</sup>  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  generan rotaciones cíclicas en los conjuntos  $\psi_{\theta_j} \otimes \Psi_\varphi$   $j = 1, \dots, N_\theta$  y  $\Psi_\theta \otimes \psi_{\varphi_k}$   $j = 1, \dots, N_\varphi$  respectivamente. Además podemos ver fácilmente que

$$[I_\theta \otimes \Delta_\varphi, \Delta_\theta \otimes I_\varphi] = 0, \tag{4.1}$$

Veamos esto con mas detalle, sin pérdida de generalidad comencemos con  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$ , para saber como actúa sobre  $\Psi$ , apliquemos este operador sobre un estado

<sup>2</sup>Como en 3.1

<sup>3</sup>En donde  $I_\theta$  Y  $I_\varphi$  son los operadores identidad en  $\Psi_\theta$  y  $\Psi_\varphi$  respectivamente

arbitrario

$$\begin{aligned} (I_\theta \otimes \Delta_\varphi) |\psi_{\theta j}\rangle \otimes |\psi_{\varphi k}\rangle &= I_\theta |\psi_{\theta j}\rangle \otimes \Delta_\varphi |\psi_{\varphi k}\rangle \\ &= |\psi_{\theta j}\rangle \otimes e^{i\gamma_{\varphi k+1}} |\psi_{\varphi k+1}\rangle, \end{aligned}$$

Esta acción puede verse de la siguiente forma

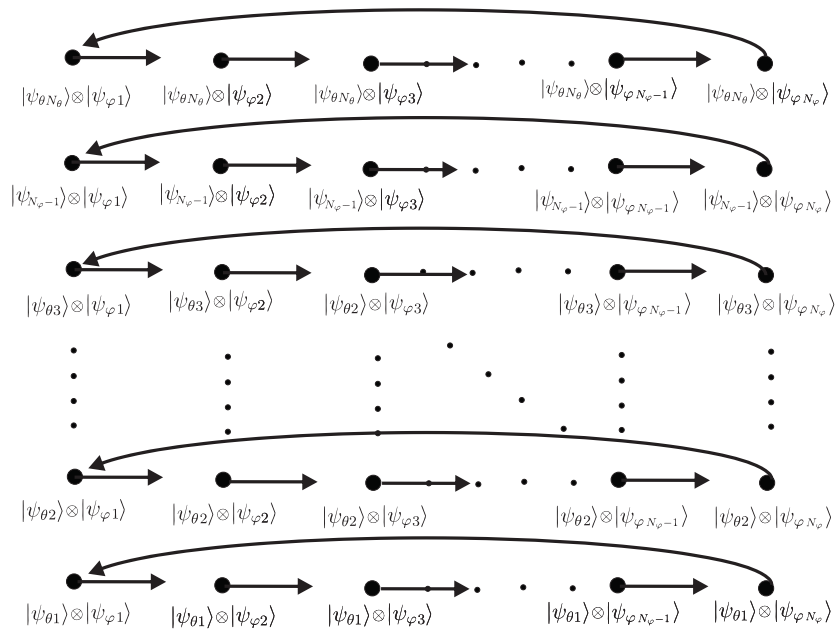


Figura 4.6: Representación gráfica de la acción de  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre  $\Psi$

o de forma equivalente

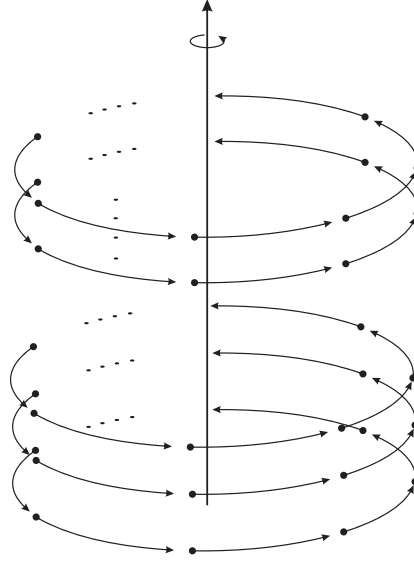


Figura 4.7: Representación gráfica de la acción de  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre  $\Psi$  en donde podemos ver como  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  genera rotaciones cíclicas sobre  $\psi_{\theta_j} \otimes \Psi_\varphi$

es decir,  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  actúa sobre  $\Psi$  generando rotaciones cíclicas sobre los subconjuntos  $\psi_{\theta_j} \otimes \Psi_\varphi$ . Análogamente

$$\begin{aligned} (\Delta_\theta \otimes I_\varphi) |\psi_{\theta_j}\rangle \otimes |\psi_{\varphi k}\rangle &= \Delta_\theta |\psi_{\theta_j}\rangle \otimes I_\varphi |\psi_{\varphi k}\rangle \\ &= e^{i\gamma_{\theta_j+1}} |\psi_{\theta_{j+1}}\rangle \otimes |\psi_{\varphi k}\rangle, \end{aligned}$$

que puede verse de la siguiente forma

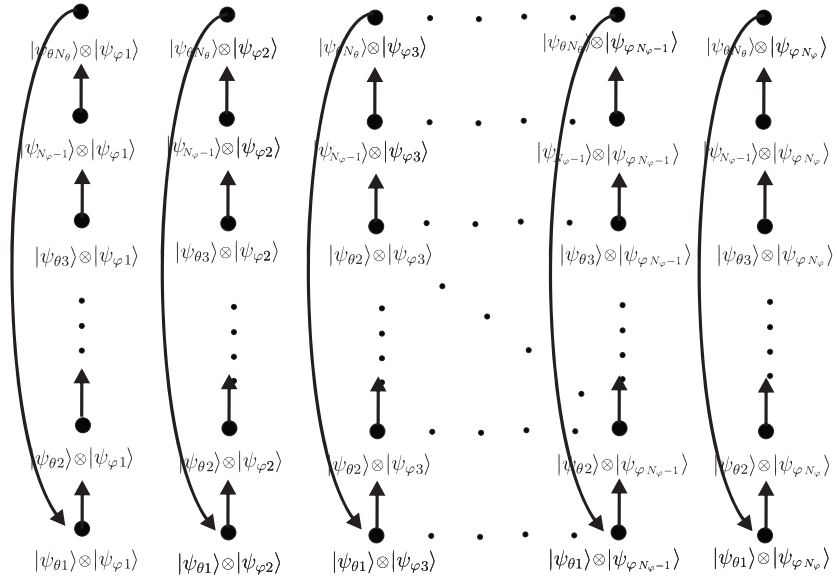


Figura 4.8: Representación gráfica de la acción de  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre  $\Psi$

o de forma equivalente

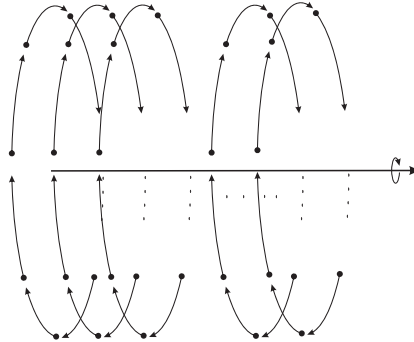


Figura 4.9: Representación gráfica de la acción de  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre  $\Psi$  en donde podemos ver como  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  genera rotaciones cíclicas sobre  $\Psi_\theta \otimes \psi_{\varphi i}$

es decir,  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  actúa sobre  $\Psi$  generando rotaciones cíclicas sobre los subconjuntos  $\Psi_\theta \otimes \psi_{\varphi k}$ .

Por lo tanto,  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  actúan sobre  $\Psi$  generando rotaciones cíclicas, es decir, generan rotaciones cíclicas sobre un toro en dos direcciones independientes que son ortogonales entre sí, además estas rotaciones son conmutativas 4.1

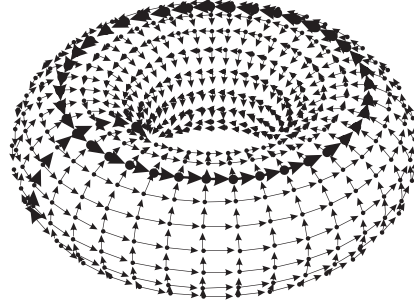


Figura 4.10: Representación gráfica de la acción de  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre el toro.

ya que  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  genera rotaciones en la componente  $\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  genera rotaciones en la componente  $\theta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} I_\theta \otimes \Delta_\varphi &= e^{\frac{-i}{\hbar} \delta\varphi J_\varphi}, \\ \Delta_\theta \otimes I_\varphi &= e^{\frac{-i}{\hbar} \delta\theta J_\theta}. \end{aligned}$$

Ahora encontremos las representaciones de las componentes del momento angular  $J$ . Sin pérdida de generalidad comencemos con  $J_\varphi$

$$\begin{aligned} e^{\frac{-i}{\hbar} \delta\varphi J_\varphi} &= I_\theta \otimes \Delta_\varphi \\ &= I_\theta \otimes e^{iA_\varphi} \\ &= I_\theta \otimes \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iA_\varphi)^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(I_\theta \otimes iA_\varphi)^m}{m!} \\ &= e^{I_\theta \otimes iA_\varphi} \\ &= e^{I_\theta \otimes i \left( i \frac{2\pi}{N_\varphi} \mathcal{D}_\varphi \right)} \\ &= e^{\frac{-i}{\hbar} \left( i \frac{2\pi}{N_\varphi} \right) (I_\theta \otimes -i\hbar \mathcal{D}_\varphi)} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\delta_\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}, \quad (4.2)$$

$$J_\varphi = -i\hbar \mathbf{D}_\varphi, \quad (4.3)$$

en donde  $\mathbf{D}_\varphi$  representa la matriz de diferenciación parcial respecto a  $\varphi$ . Análogamente

$$\delta_\theta = \frac{2\pi}{N_\theta}, \quad (4.4)$$

$$J_\theta = -i\hbar \mathbf{D}_\theta, \quad (4.5)$$

en donde  $\mathbf{D}_\theta$  representa la matriz de diferenciación parcial respecto a  $\theta$ . Nótese que a diferencia de lo que ocurre en el caso estándar y en otras geometrías, en donde las componentes del momento angular no conmutan, en el toro sí conmutan, es decir

$$\begin{aligned} [J_\varphi, J_\theta] &= \left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ &= [-i\hbar I_\theta \otimes \mathcal{D}_\varphi, -i\hbar \mathcal{D}_\theta \otimes I_\varphi] \\ &= 0, \end{aligned}$$

en [12] obtienen este mismo resultado, este resultado puede explicarse en términos de rotaciones, ya que en el toro una rotación en  $\varphi$  seguida de otra en  $\theta$  si conmutan, como se pueer en 4.1. También se tiene que

$$[J^2, J_\varphi] = 0,$$

$$[J^2, J_\theta] = 0.$$

Por lo tanto, por el segundo postulado de la mecánica cuántica, existe una base de vectores ortonormales en donde  $J_\varphi$ ,  $J_\theta$  y  $J^2$  son diagonales, dicha base esta dada por  $\{|\varphi_1\rangle, \dots, |\varphi_{N_\varphi}\rangle\} \otimes \{|\theta_1\rangle, \dots, |\theta_{N_\theta}\rangle\}$ , en donde

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{\varphi k} | \varphi_j \rangle &= \frac{e^{-ika_{\varphi j}}}{\sqrt{N_{\varphi}}}, \\
 a_{\varphi j} &= \frac{2\pi}{N_{\varphi}} j, \\
 j \in \mathcal{I}_{n_{\varphi}} &= \begin{cases} 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_{\varphi}, & N_{\varphi} = 2n_{\varphi} + 1, \\ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2n_{\varphi}-1}{2}, & N_{\varphi} = 2n_{\varphi}. \end{cases}, \\
 \langle \psi_{\theta k} | \theta_l \rangle &= \frac{e^{-ika_{\theta l}}}{\sqrt{N_{\theta}}}, \\
 a_{\theta l} &= \frac{2\pi}{N_{\theta}} l, \\
 l \in \mathcal{I}_{n_{\theta}} &= \begin{cases} 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_{\theta}, & N_{\theta} = 2n_{\theta} + 1, \\ \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots, \pm \frac{2n_{\theta}-1}{2}, & N_{\theta} = 2n_{\theta}. \end{cases},
 \end{aligned}$$

además tenemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\varphi} |\varphi_j\rangle &= -ij |\varphi_j\rangle \\
 \mathcal{D}_{\theta} |\theta_l\rangle &= -il |\theta_l\rangle.
 \end{aligned}$$

Ahora resolvamos el problema de valores propios para  $J_{\varphi}$

$$\begin{aligned}
 J_{\varphi} |\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle &= -i\hbar \mathbf{D}_{\varphi} (|\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle) \\
 &= -i\hbar (I_{\theta} \otimes \mathcal{D}_{\varphi}) (|\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle) \\
 &= -i\hbar I_{\theta} |\theta_l\rangle \otimes \mathcal{D}_{\varphi} |\varphi_j\rangle \\
 &= -i\hbar |\theta_l\rangle \otimes -ij |\varphi_j\rangle \\
 &= -j\hbar |\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle,
 \end{aligned}$$

análogamente

$$J_{\theta} |\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle = -l\hbar |\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} J^2 |\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle &= (J_\varphi^2 + J_\theta^2) \\ &= \hbar^2 (j^2 + l^2) |\theta_l\rangle \otimes |\varphi_j\rangle. \end{aligned}$$

De todos estos resultados podemos concluir que la mecánica cuántica del momento angular sobre el toro queda determinada por la paridad de  $N_\theta$  y  $N_\varphi$ .

Los resultados obtenidos en este capítulo son válidos incluso cuando deformamos el toro como si se tratara de una figura de plastilina

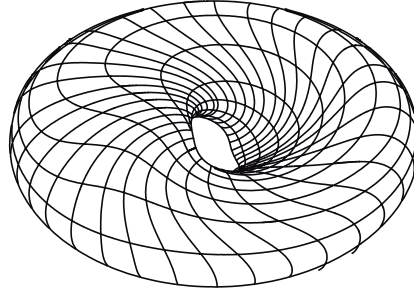


Figura 4.11: *Toro deformado.*

ver figuras las figuras 3.1, 3.2 y 3.3

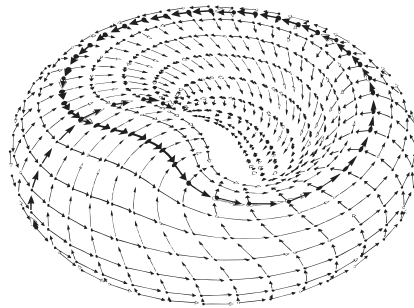


Figura 4.12: *Representación gráfica de la acción de  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre el toro deformado.*



---

## Capítulo 5

# Momento Angular Total sobre una Esfera

En este capítulo haremos colapsar el toro a una esfera haciendo el radio exterior del toro igual a cero, veremos los distintos casos que podemos obtener y como actúan los generadores de rotaciones en las direcciones  $\varphi$  y  $\theta$

En el desarrollo de los capítulos anteriores no ha sido necesario fijar los parámetros  $r$  y  $R$  del toro, por lo que los resultados obtenidos son válidos<sup>1</sup> para cualquier valor posible de  $r$  y  $R$ .

---

<sup>1</sup>Los resultados obtenidos son válidos incluso cuando deformamos el toro

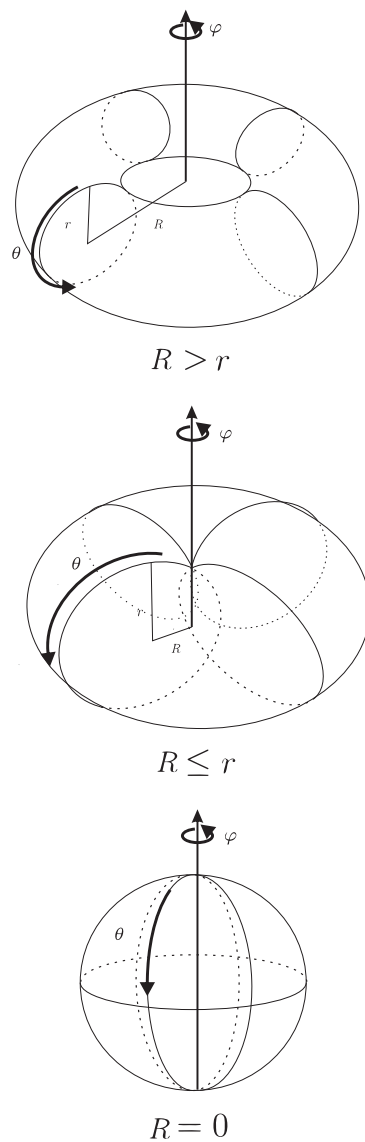


Figura 5.1: *Distintos casos posibles del parámetro  $R$*

Un caso particularmente interesante es cuando  $R = 0$ , es decir, cuando colapsamos el toro a una esfera<sup>2</sup>, en este caso, la acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre los puntos de la esfera, así como la discretización de esta, serán diferentes según la disposición de los puntos utilizados para discretizar el toro, así como de la paridad de  $N_\theta$  y  $N_\varphi$ . Para ilustrar esto veamos algunos ejemplos sencillos.

Antes de eso diremos brevemente como se discretiza la esfera cuando el toro

<sup>2</sup>Esta esfera será diferente a una esfera ordinaria ya que podremos movernos sin restricciones en la coordenada  $\theta$

colapsa en esta. Para discretizar la esfera, primero trazamos un círculo y sobre este  $N_\theta$  puntos equidistantes entre sí

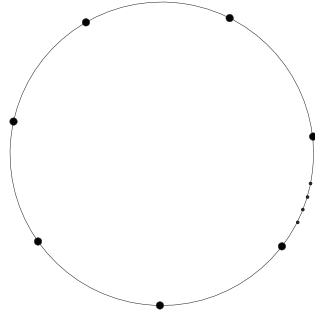


Figura 5.2:  $N_\theta$  puntos equidistantes sobre un círculo

luego giraremos  $\frac{2\pi}{N_\varphi}$  radianes  $N_\varphi - 1$  veces por un eje que pase por el centro del círculo<sup>3</sup>, si el eje de rotación pasa por el punto medio del arco entre dos nodos consecutivos diremos que la rotación es normal

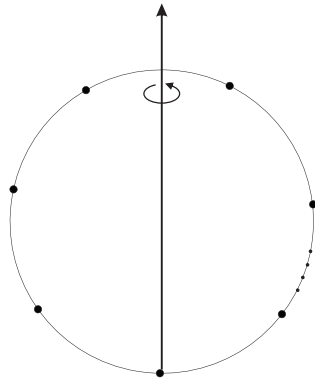


Figura 5.3: Giramos  $\frac{2\pi}{N_\varphi}$  radianes  $N_\varphi - 1$  veces, esto nos genera  $N_\varphi$  puntos equidistantes

de esta forma obtenemos la discretización de la esfera

<sup>3</sup>Si el eje de rotación pasara fuera del círculo obtendríamos la discretización del toro del capítulo anterior

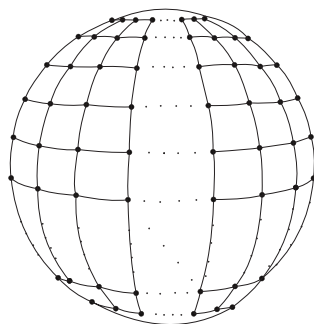


Figura 5.4: *Discretización de la esfera*

### 5.1. Ejemplo 1

Consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\pi$  radianes sobre un eje que pase por el centro del círculo.

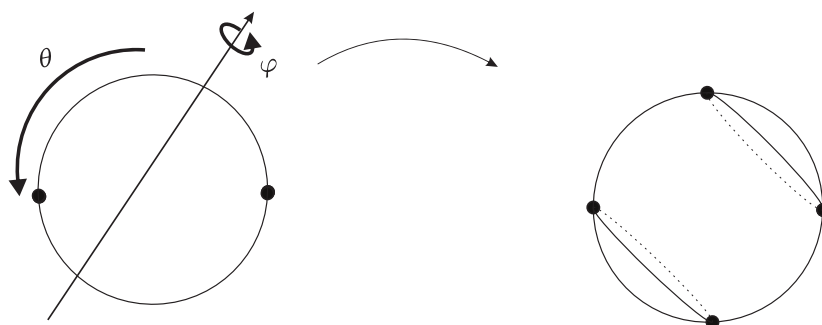


Figura 5.5: *Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación no es normal*

En este caso obtenemos una esfera con cuatro puntos que se encuentran sobre una  $\theta$ -órbita<sup>4</sup> y sobre dos  $\varphi$ -órbitas<sup>5</sup>

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos

<sup>4</sup> Con el fin de facilitar la redacción, la comprensión y la lectura de este capítulo abusaremos un poco de la definición de ciertas palabras, en particular, cuando mencionemos una  $\theta$ -órbita nos estaremos refiriendo a los círculos sobre la esfera que podemos describir dejando fija la coordenada  $\varphi$  y variando la coordenada  $\theta$  y que además contengan puntos de la esfera

<sup>5</sup> Cuando mencionemos una  $\varphi$ -órbita nos estaremos refiriendo a los círculos sobre la esfera que podemos describir dejando fija la coordenada  $\theta$  y variando la coordenada  $\varphi$  y que además contengan puntos de la esfera

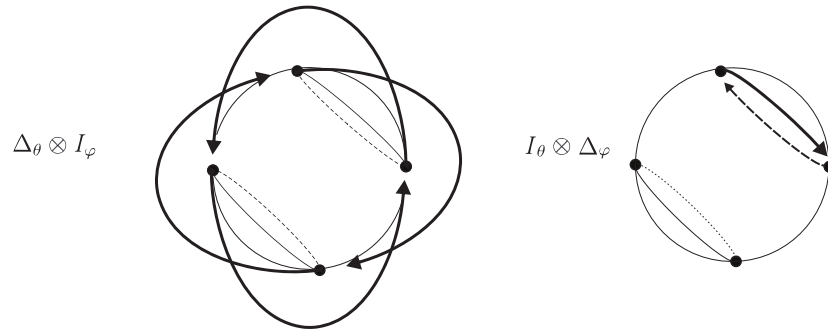


Figura 5.6: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación no es normal

En este caso, no podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre la misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , sin embargo, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

## 5.2. Ejemplo 2

Consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\pi$  radianes sobre un eje que pase por el centro del círculo.

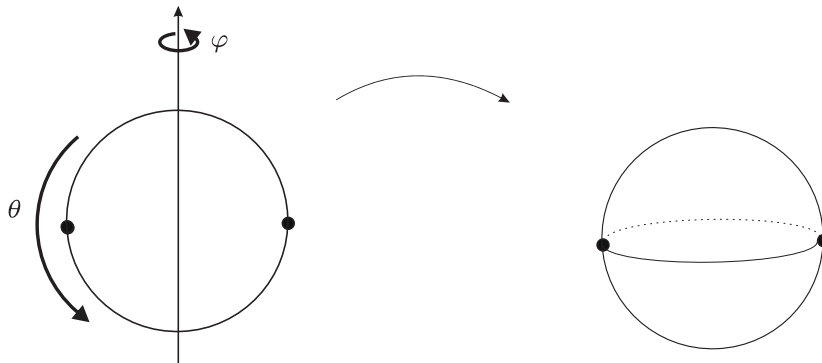


Figura 5.7: Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación es normal

En este caso obtenemos una esfera con dos puntos que se encuentran sobre una  $\theta$ -órbita y sobre una  $\varphi$ -órbita

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos

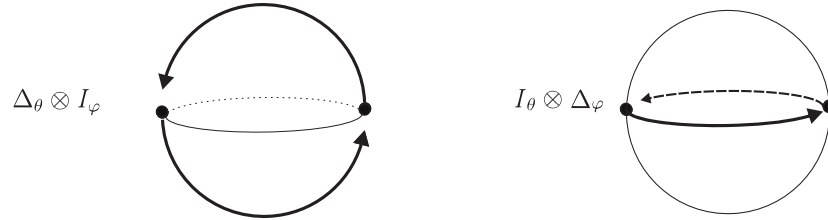


Figura 5.8: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación es normal

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  y también podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.3. Ejemplo 3

Consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\pi$  radianes sobre un eje que pase por el centro del círculo.

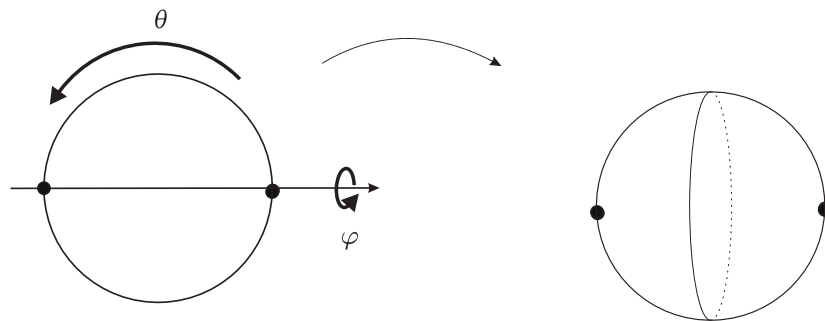


Figura 5.9: Discretización de la esfera cuando el eje de rotación pasa por uno o mas puntos

En este caso obtenemos una esfera con dos puntos que se encuentran sobre una  $\theta$ -órbita.

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos

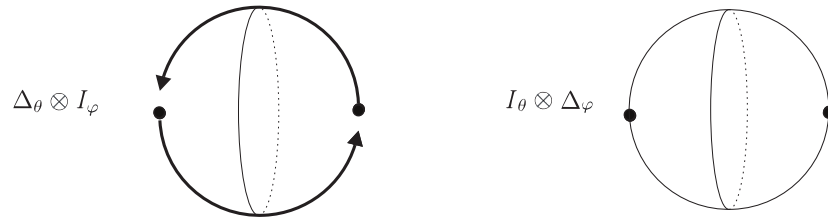


Figura 5.10: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación pasa por uno o mas puntos

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre la  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , por otro lado, el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  no realiza acción alguna ya que no existen  $\varphi$ -órbitas.

### 5.4. Ejemplo 4

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\frac{2\pi}{4}$  radianes tres veces sobre un eje que pasa por el centro del círculo

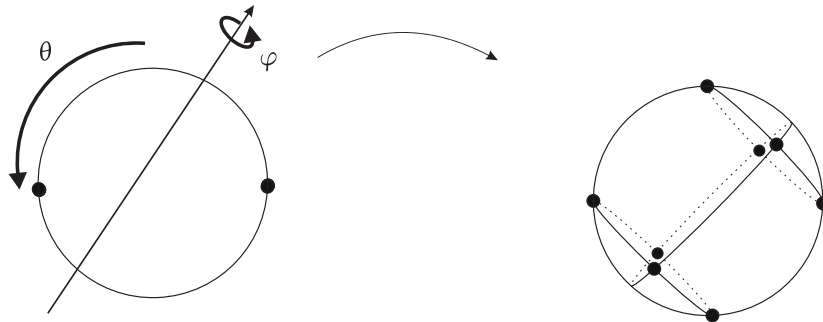


Figura 5.11: Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación no es normal

En este caso obtenemos una esfera con ocho puntos que se encuentran sobre dos  $\theta$ -órbitas y sobre dos  $\varphi$ -órbitas

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos

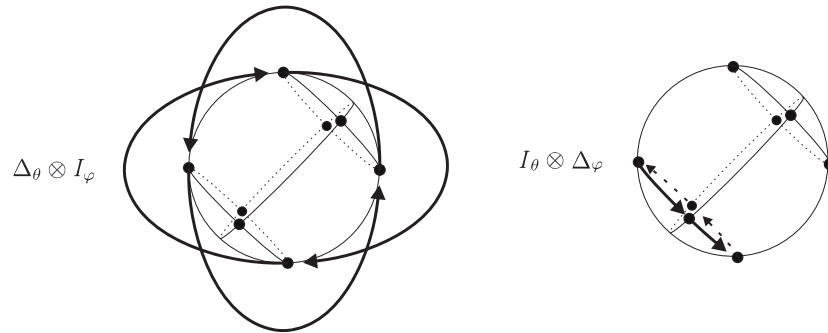


Figura 5.12: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación no es normal

En este caso, no podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , sin embargo, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.5. Ejemplo 5

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\frac{2\pi}{4}$  radianes tres veces sobre un eje que pasa por el centro del círculo

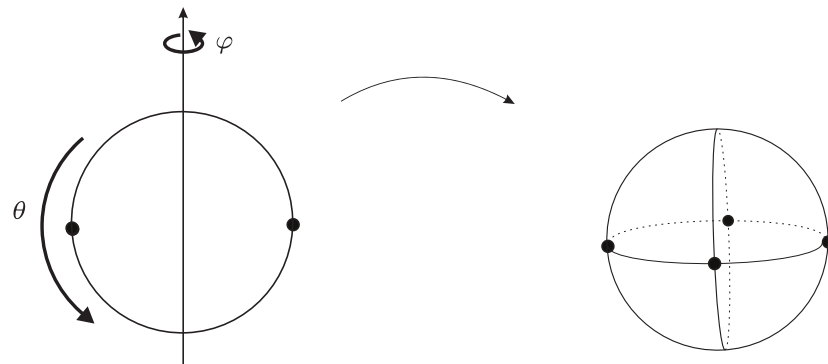


Figura 5.13: Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación es normal

En este caso obtenemos una esfera con cuatro puntos que se encuentran sobre dos  $\theta$ -órbitas y sobre una  $\varphi$ -órbita



Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos



Figura 5.14: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación es normal

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre la misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , y también no podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.6. Ejemplo 6

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\frac{2\pi}{3}$  radianes dos veces sobre un eje que pasa por el centro del círculo

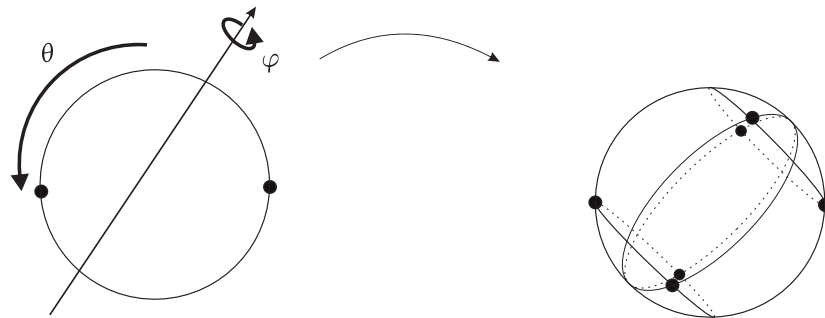


Figura 5.15: Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación no es normal

En este caso obtenemos una esfera con seis puntos que se encuentran sobre tres  $\theta$ -órbitas y sobre dos  $\varphi$ -órbitas

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos

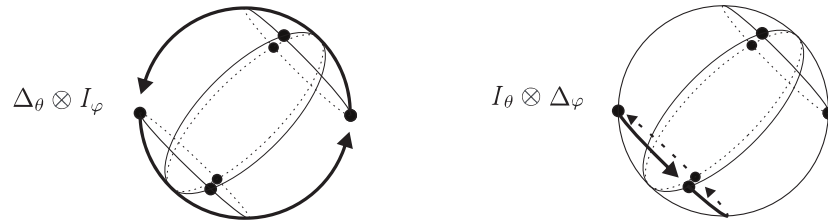


Figura 5.16: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación no es normal

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  y también podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.7. Ejemplo 7

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con dos puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\frac{2\pi}{3}$  radianes dos veces sobre un eje que pasa por el centro del círculo

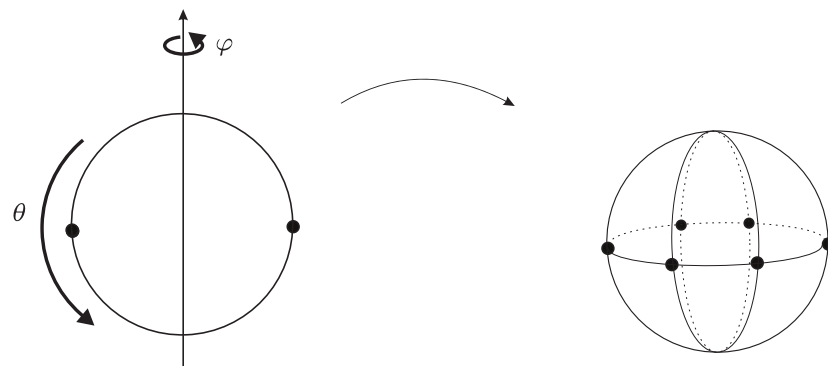


Figura 5.17: Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación es normal

En este caso obtenemos una esfera con seis puntos que se encuentran sobre tres  $\theta$ -órbitas y sobre una  $\varphi$ -órbita

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtubimos

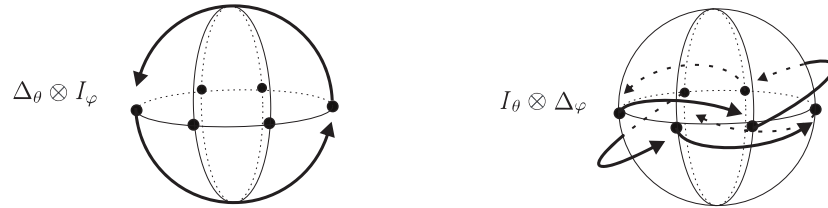


Figura 5.18: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación es normal

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre la misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , sin embargo, no podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.8. Ejemplo 8

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con tres puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\pi$  radianes sobre un eje que pasa por el centro del círculo

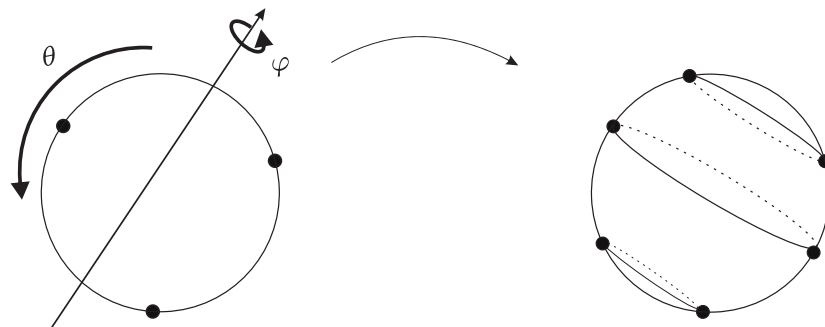


Figura 5.19: Discretización de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación no es normal

En este caso obtenemos una esfera con seis puntos que se encuentran sobre una  $\theta$ -órbita y sobre tres  $\varphi$ -órbitas

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretización de la esfera que obtuvimos

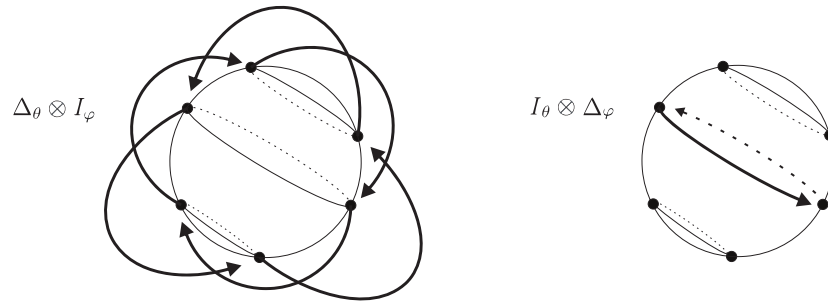


Figura 5.20: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación no es normal

En este caso, no podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , sin embargo, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

## 5.9. Ejemplo 9

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con tres puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\pi$  radianes sobre un eje que pasa por el centro del círculo

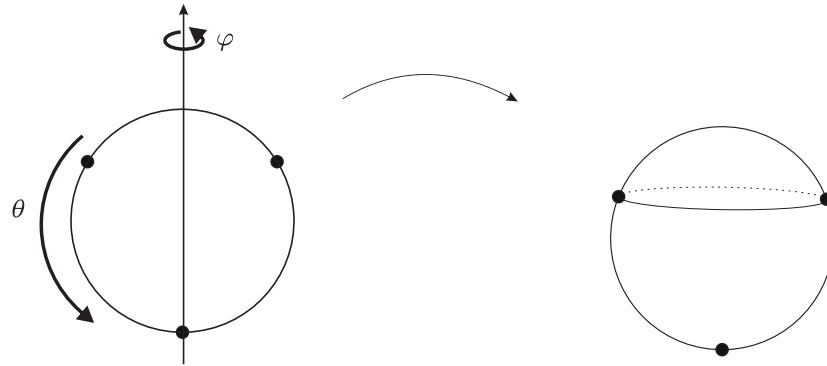


Figura 5.21: *Discretizacion de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación es normal*

En este caso obtenemos una esfera con tres puntos que se encuentran sobre una  $\theta$ -órbita y sobre una  $\varphi$ -órbita

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretizacion de la esfera que obtubimos

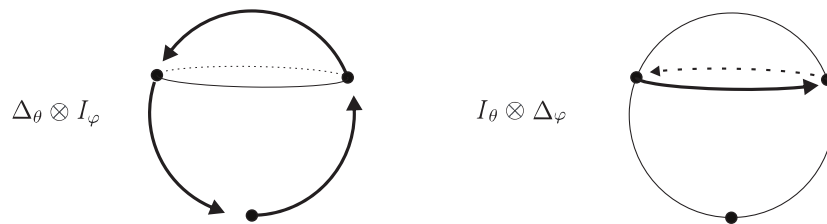


Figura 5.22: *Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación es normal*

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre la misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , y también podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.10. Ejemplo 10

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con tres puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\frac{2\pi}{3}$  radianes dos veces radianes sobre un eje que pasa por el centro del círculo

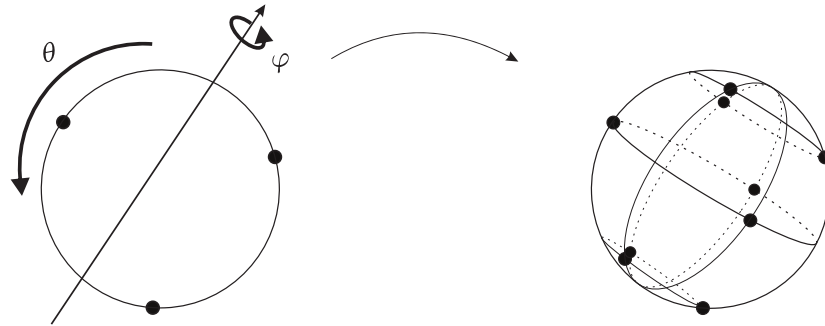


Figura 5.23: *Discretizacion de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación no es normal*

En este caso obtenemos una esfera con nueve puntos que se encuentran sobre tres  $\theta$ -órbitas y sobre tres  $\varphi$ -órbitas

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretizacion de la esfera que obtubimos

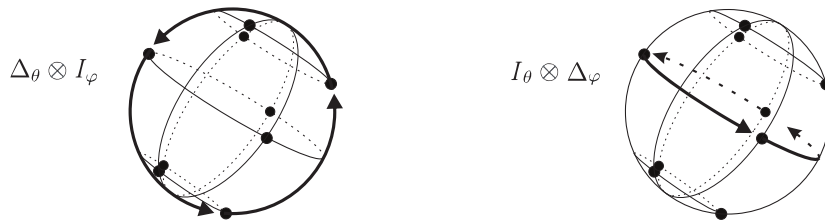


Figura 5.24: *Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación no es normal*

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\theta$ -órbita utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  y también podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

### 5.11. Ejemplo 11

Veamos ahora el siguiente ejemplo, consideremos un círculo con tres puntos equidistantes entre sí, luego giremos  $\frac{2\pi}{3}$  radianes dos veces radianes sobre un eje que pasa por el centro del círculo

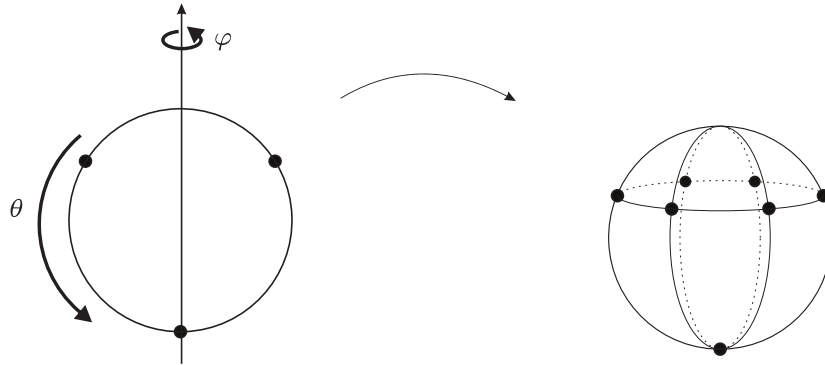


Figura 5.25: Discretizacion de la esfera que obtenemos cuando el eje de rotación es normal

En este caso obtenemos una esfera con siete puntos que se encuentran sobre tres  $\theta$ -órbitas y sobre una  $\varphi$ -órbita

Ahora veamos como actúa  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sobre una  $\theta$ -órbita cualquiera y  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sobre una  $\varphi$ -órbita cualquiera, para la discretizacion de la esfera que obtubimos

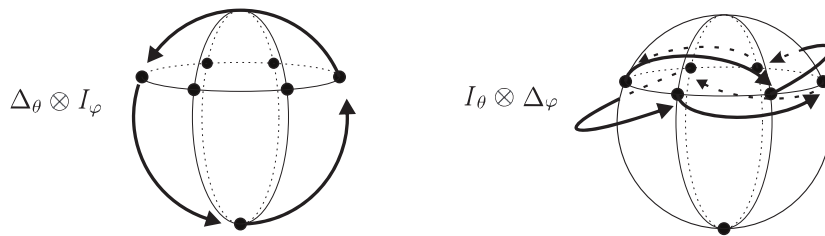


Figura 5.26: Acción de los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  cuando el eje de rotación es normal

En este caso, podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre la misma  $\theta$ -órbita

utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ , sin embargo, no podemos llegar de un punto a cualquier otro sobre una misma  $\varphi$ -órbita utilizando solamente el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$

Análizando los ejemplos 1, 2, 3, 5, 7, 9 y 11 podemos observar que si la rotación es normal, dos  $\varphi$ -órbitas se juntaran para formar una nueva  $\varphi$ -órbita y si queda una  $\varphi$ -órbita sola, esta  $\varphi$ -órbita colapsara y todos los puntos sobre esta coalesceran<sup>6</sup> a un punto.

Si además  $N_\varphi$  es par, es decir, si el número de puntos sobre las  $\varphi$ -órbitas es par, al juntarse dos  $\varphi$ -órbitas cada punto de una de las  $\varphi$ -órbitas coalescera sobre otro de la segunda formando una nueva  $\varphi$ -órbita idéntica a cualquiera de las dos  $\varphi$ -órbitas iniciales y por lo tanto el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  nos moverá de punto en punto sobre la nueva  $\varphi$ -órbita, al igual que lo hacia en las  $\varphi$ -órbitas iniciales. Sin embargo, si  $N_\varphi$  es impar al juntarse las dos  $\varphi$ -órbitas los puntos no coalesceran y sobre la nueva  $\varphi$ -órbita tendremos el doble de puntos, pero el operador  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  sólo nos moverá sobre los puntos de una de las  $\varphi$ -órbitas iniciales de manera que no podremos llegar de los puntos de una de  $\varphi$ -órbitas a los puntos de la otra  $\varphi$ -órbita.

Análizando los ejemplos 2, 4, 5, 9 y 11 podemos observar que si la rotación es normal entonces el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  nos mueve de una  $\varphi$ -órbita a otra  $\varphi$ -órbita contigua, es decir, sin saltarse  $\varphi$ -órbitas.

Análizando los ejemplos 1,4 y 8 podemos observar que si la rotación no es normal y  $N_\varphi$  es par, dos  $\theta$ -órbitas se juntaran para formar una nueva  $\theta$ -órbita pero los puntos de estas  $\theta$ -órbitas no coalesceran de modo que tendremos el doble de puntos sobre la  $\theta$ -órbita pero el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  sólo nos movéara sobre los puntos de una de las  $\theta$ -órbitas iniciales y lo hará en el sentido contrario al de la otra  $\theta$ -órbita inicial, de modo que no podremos llegar de los puntos de una de las  $\theta$ -órbitas iniciales a los puntos de la otra  $\theta$ -órbita inicial utilizando solamente el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$ .

---

<sup>6</sup>Cuando mencionemos que dos o más puntos coalescen, nos estaremos refiriendo a que se unen para formar un solo punto, recordemos que cada punto es un estado cuántico posible



Análizando el ejemplo 10 podemos observar que si la rotación no es normal y  $N_\varphi$  es impar, entonces el operador  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  no nos mueve de  $\varphi$ -órbita en  $\varphi$ -órbita si no que nos mueve de una  $\varphi$ -órbita a la segunda  $\varphi$ -órbita contigua saltando la primera  $\varphi$ -órbita contigua.

En particular, si la rotación es normal y  $N_\varphi$  es par, obtenemos una esfera sobre la cual los operadores  $I_\theta \otimes \Delta_\varphi$  y  $\Delta_\theta \otimes I_\varphi$  nos mueven de punto en punto en las dirección  $\varphi$  y  $\theta$  respectivamente, además sobre esta esfera las componentes del momento angular conmutan, los valores propios de  $J_\varphi$  son múltiplos semi-enteros de  $\hbar$  y los valores de  $J_\theta$  son múltiplos enteros ó semi-enteros de  $\hbar$ . No obstante los demás casos también son interesantes

---

## Conclusiones

Si las componentes de un operador  $\hat{O}$  satisfacen la relación de conmutación  $[\hat{O}_j, \hat{O}_k] = i\hbar \sum_n \varepsilon_{jkn} \hat{O}_n$ , entonces los valores propios de sus componentes son múltiplos enteros y semi-enteros de  $\hbar$ . En particular las componentes de  $\hat{L}$  satisfacen esta relación de conmutación como puede verse en la ecuación 2.1 y por lo tanto deben considerarse los múltiplos semi-enteros de  $\hbar$  como valores propios de cualquiera de sus componentes.

Cuando discretizamos el espacio de Hilbert y generamos rotaciones cíclicas sobre este,  $\Delta$  genera un grupo de orden  $N$  y  $2N$ , para  $N$  impar y  $N$  par respectivamente.

El operador  $\Delta$  resulta ser unitario, y está relacionado con la matriz de diferenciación para funciones periódicas cuando los puntos son equidistantes.

Obtenemos de forma natural que los valores propios de las componentes del momento angular  $J$  son múltiplos enteros y semi-enteros de  $\hbar$ , para  $N$  impar y  $N$  par respectivamente.

Un poco análogo al experimento de Otto Stern y Walther Gerlach, en el que el haz de plata se dividía en dos haces,  $\Delta$  se divide en dos casos independientes que curiosamente están asociados con los dos tipos de partículas cuánticas existentes, los bosones y los fermiones, ya que para  $N$  impar las funciones de onda son simétricas, siguen la estadística de Bose-Einstein y tienen espín entero y para  $N$  par las funciones de onda son antisimétricas, siguen la estadística de Fermi-Dirac y tienen espín semi-entero.

Las componentes del momento angular  $J$  conmutan sobre el toro.

La mecánica cuántica del momento angular sobre un toro queda determinada por la paridad de  $N_\theta$  y  $N_\varphi$ .

Todos los resultados obtenidos sobre el toro son validos incluso cuando lo deformamos.

Cuando colapsamos el toro a una esfera obtenemos distintos casos interesanes que depende de la disposición de los puntos y de la paridad de  $N_\varphi$ .

Podemos extender los resultados obtenidos en el toro a una esfera sobre la cual las componentes del momento angular conmutan.

---

# Apéndice

## A.1. Producto de Kronecker

El Producto de Kronecker, denotado con  $\otimes$ , es una operación sobre dos matrices de tamaño arbitrario que da como resultado una matriz "bloque". Es un caso especial del producto tensorial. El producto de Kronecker no debería confundirse con el producto de matrices habitual, que es una operación totalmente diferente. Debe su nombre al matemático alemán Leopold Kronecker.

*DEFINICIÓN.* Sea  $A$  una matriz de  $n \times m$  y  $B$  es una una matriz  $p \times q$ ,  $A \otimes B$  es la matriz bloque  $mp \times nq$ , dada por

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{pmatrix},$$

O más explícitamente

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{11}b_{1q} & & a_{1m}b_{11} & \dots & a_{1m}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & \dots & a_{11}b_{pq} & & a_{1m}b_{p1} & \dots & a_{1m}b_{pq} \\ & & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & \dots & a_{n1}b_{1q} & & a_{nm}b_{11} & \dots & a_{nm}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{p1} & \dots & a_{n1}b_{pq} & & a_{nm}b_{p1} & \dots & a_{nm}b_{pq} \end{pmatrix}.$$

*PROPIEDADES*

1. Bilinealidad y asociatividad, el producto de Kronecker es un caso especial del producto tensorial, así que es bilineal y asociativo.
2.  $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$  (si  $B$  y  $C$  tienen la misma dimensión)
3.  $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$  (si  $A$  y  $B$  tienen la misma dimensión)
4.  $(kA) \otimes B = A \otimes (kB) = k(A \otimes B)$
5.  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$

en donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son matrices y  $k$  es un escalar.

6. El producto de Kronecker no es conmutativo, en general  $A \otimes B$  y  $B \otimes A$  son matrices diferentes. Sin embargo,  $A \otimes B$  y  $B \otimes A$  son equivalentes en permutación, lo que quiere decir que existen matrices permutación  $P$  y  $Q$  tales que

$$A \otimes B = P(B \otimes A)Q.$$

Si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas, entonces  $A \otimes B$  y  $B \otimes A$  son incluso de permutación similar, lo que quiere decir que podemos tomar  $P = Q^T$ .

7. La propiedad del producto mixto

Si  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son matrices de manera que se puedan formar los productos  $AC$  y  $BD$ , entonces

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

A esto se llama la propiedad del producto mixto, porque mezcla el producto ordinario de matrices y el de Kronecker. Se deduce que  $A \otimes B$  es inversible si y solo si  $A$  y  $B$  son invertibles, en cuyo caso

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

8. Espectro

Supongamos que  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas de tamaños respectivos  $n$  y  $q$ . Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los autovalores de  $A$  y  $\mu_1, \dots, \mu_q$  los de  $B$  (listados de acuerdo a la multiplicidad). Entonces los autovalores de  $A \otimes B$  son

$$\lambda_i \mu_j, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, q.$$

Se deduce que la traza y el determinante de un producto de Kronecker vienen dados por

$$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \quad \text{y} \quad \det(A \otimes B) = (\det A)^q (\det B)^n.$$

## A.2. Interpolación

En numerosos fenómenos de la naturaleza observamos una cierta regularidad en la forma de producirse, esto nos permite sacar conclusiones de la marcha de un fenómeno en situaciones que no hemos medido directamente.

El problema general de la interpolación se nos presenta cuando tenemos una función  $f$  la cual sólo conocemos en un número finito de puntos, se desea, por tanto encontrar una función cuya gráfica pase por esos puntos y que nos sirva para encontrar nuevos puntos de la función. Los resultados obtenidos son naturalmente estimaciones aproximadas.

### A.2.1. Interpolación para una función de una variable

Sea  $f$  una función conocida solamente en un número finito de puntos

$$f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dado un conjunto de funciones  $\beta = \{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)\}$ , al que llamaremos base de interpolación, queremos saber cuándo es posible una combinación lineal tal que

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^n a_j h_j(x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.1})$$

a dicha combinación lineal le llamaremos función de interpolación<sup>7</sup> y la denotaremos por  $g(x)$ . La ecuación ?? determina un sistema de ecuaciones lineales, en donde las incógnitas son los coeficientes que determinan la función de interpolación

$$\begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

<sup>7</sup>O polinomio de interpolación en el caso de que la base de interpolación sean polinomios de alguna clase

o de forma equivalente

$$H\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

en donde  $H$  es la matriz  $(H)_{ij} = h_i(x_j)$ ,  $\mathbf{a}$  un vector con  $i$ -ésima entrada  $a_i$  y  $\mathbf{f}$  un vector con  $i$ -ésima entrada  $f(x_i)$ . Por lo tanto, la combinación lineal existe y es única si y solo si  $\det H \neq 0$ .

Ahora bien, para encontrar la función de interpolación necesitamos resolver el sistema A.2, sin embargo, en casos particulares existen fórmulas de interpolación, con las cuales es más fácil encontrar la función de interpolación, como por ejemplo, cuando utilizamos  $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$  como base de interpolación, es fácil ver que el polinomio de interpolación está dado por

$$g(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \quad (\text{A.3})$$

otro ejemplo también muy conocido, es cuando utilizamos los polinomios trigonométricos<sup>8</sup> como base de interpolación, en este caso, el polinomio de interpolación está dado por

$$g(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) \frac{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x-x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i-x_j}{2}\right)} \quad (\text{A.4})$$

La idea de este tipo de fórmulas de interpolación consiste en encontrar funciones  $l_i(x)$ , tales que

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

$$l_i(x) \in \mathcal{L}(\{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)\}) \quad (\text{A.6})$$

Una vez encontradas dichas funciones, es fácil ver que la función de interpolación esta dada por

$$g(x) = \sum_{i=1}^N f(x_i) l_i(x).$$

---

<sup>8</sup>Solo podemos utilizar esta base cuando el número de nodos es impar, en la sección ?? del Apéndice veremos cómo se resuelve este caso cuando el número de nodos es par



En el primer ejemplo

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)},$$

y fácilmente podemos ver que se satisface A.5 y A.6, en el segundo ejemplo

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x - x_j}{2}\right)}{\prod_{j \neq i} \sin\left(\frac{x_i - x_j}{2}\right)},$$

y fácilmente podemos ver que se satisface A.5, sin embargo no es fácil ver que se satisfaga A.6<sup>9</sup>

### A.2.2. Interpolación para una función de dos variables

Sea  $f$  una función escalar de dos variables que es conocida sólo en un número finito de puntos

$$f(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, n, \quad j, \dots, m.$$

Sea  $\beta = \{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)\} \otimes \{q_1(y), q_2(y), \dots, q_m(y)\}$  una base de interpolación<sup>10</sup>, queremos encontrar una combinación lineal tal que

$$f(x_i, y_j) = (a_1 h_1(x_i) + \dots + a_n h_n(x_i)) \otimes (b_1 q_1(y_i) + \dots + b_m q_m(y_i))$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j, \dots, m,$$

esta condición determina un sistema de ecuaciones lineales en donde las incógnitas son los coeficientes que determinan la función de interpolación

<sup>9</sup>Se puede mostrar que esta condición también se cumple utilizando la fórmula  $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$ , pero nos desviaríamos mucho del tema principal

<sup>10</sup>En donde  $\otimes$  es el producto de Kronecker, para más información, ver la sección A.1 del Apéndice

$$\begin{aligned}
f(x_1, y_1) &= (a_1 h_1(x_1) + \dots + a_n h_n(x_1)) \otimes (b_1 q_1(y_1) + \dots + b_m q_m(y_1)) \\
&\vdots \\
f(x_1, y_m) &= (a_1 h_1(x_1) + \dots + a_n h_n(x_1)) \otimes (b_1 q_1(y_m) + \dots + b_m q_m(y_m)) \\
f(x_2, y_1) &= (a_1 h_1(x_2) + \dots + a_n h_n(x_2)) \otimes (b_1 q_1(y_1) + \dots + b_m q_m(y_1)) \\
&\vdots \\
f(x_2, y_m) &= (a_1 h_1(x_2) + \dots + a_n h_n(x_2)) \otimes (b_1 q_1(y_m) + \dots + b_m q_m(y_m)) \\
&\vdots \\
&\vdots \\
f(x_n, y_m) &= (a_1 h_1(x_n) + \dots + a_n h_n(x_n)) \otimes (b_1 q_1(y_m) + \dots + b_m q_m(y_m))
\end{aligned}$$

o de forma equivalente

$$(H \otimes Q) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{f},$$

en donde

$$H = \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1(y_1) & q_2(y_1) & \dots & q_m(y_1) \\ q_1(y_2) & q_2(y_2) & \dots & q_m(y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1(y_m) & q_2(y_m) & \dots & q_m(y_m) \end{pmatrix},$$

$$(\mathbf{a})^t = (a_1, \dots, a_n),$$

$$(\mathbf{b})^t = (b_1, \dots, b_m),$$

$$(\mathbf{f})^t = (f(x_1, y_1), \dots, f(x_1, y_m), f(x_2, y_1), \dots, f(x_n, y_m)),$$

por lo tanto la función de interpolación existe y es única si y solo si  $\det(H \otimes Q) \neq 0$ , y como<sup>11</sup>  $\det(H \otimes Q) = (\det H)^n (\det Q)^m$ , entonces  $\det(H \otimes Q) \neq 0$  si y solo si  $\det H \neq 0$  y  $\det Q \neq 0$ .

Por lo tanto una vez resuelto el sistema de ecuaciones la función de interpolación estará dada por

$$g(x, y) = (a_1 h_1(x) + \dots + a_n h_n(x)) \otimes (b_1 q_1(y) + \dots + b_m q_m(y))$$

Sin embargo, en casos particulares existen fórmulas de interpolación con las cuales es más fácil encontrar la función de interpolación. Sean  $\ell_i(x)$  y  $t_j(y)$  funciones tales que

$$\begin{aligned} \ell_i(x_k) &= \delta_{ik}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \ell_i(x) &\in \mathcal{L}\{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)\} \\ t_j(y_k) &= \delta_{jk}, \quad j = 1, \dots, m, \\ t_j(y) &\in \mathcal{L}\{q_1(y), q_2(y), \dots, q_m(y)\} \end{aligned}$$

entonces la función de interpolación está dada por

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i, y_j) \ell_i(x) t_j(y)$$

### A.2.3. Interpolación para una función de $N$ variables

Podemos extender fácilmente los resultados anteriores a una función de varias variables, pero la notación se vuelve muy compleja, así que solo escribiremos los resultados ya que las deducciones son análogas a los casos anteriores.

Sea  $f$  una función escalar de  $N$  variables conocida sólo en un número finito de puntos

$$f(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{Nk}), \quad i = 1, \dots, m_1, \quad j = 1, \dots, m_2, \quad \dots, \quad k = 1, \dots, m_N,$$

y sea

<sup>11</sup>Ver las propiedades del producto de Kronecker en la sección A.1 del Apéndice

$$\beta = \{h_{11}(x_1), \dots, h_{1m_1}(x_1)\} \otimes \{h_{21}(x_2), \dots, h_{2m_2}(x_2)\} \otimes \{h_{N1}(x_N), \dots, h_{Nm_N}(x_N)\}$$

una base de interpolación, entonces existe una función que interpola a  $f$  y es única si y solo si

$$\det H_t \neq 0, \quad t = 1, \dots, N,$$

en donde

$$H_t = \begin{pmatrix} h_{t1}(x_{t1}) & h_{t2}(x_{t1}) & \dots & h_{tm_t}(x_{t1}) \\ h_{t1}(x_{t2}) & h_{t2}(x_{t2}) & \dots & h_{tm_t}(x_{t2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{t1}(x_{tm_t}) & h_{t2}(x_{tm_t}) & \dots & h_{tm_t}(x_{tm_t}) \end{pmatrix},$$

en dicho caso la función de interpolación está dada por

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = (a_{11}h_{11}(x_1) + \dots + a_{1m_1}h_{1m_1}(x_1)) \otimes \dots \\ \dots \otimes (a_{N1}h_{N1}(x_N) + \dots + a_{Nm_N}h_{Nm_N}(x_N)),$$

ó

$$f(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \dots \sum_{k=1}^{m_N} f(x_{1i}, x_{2j}, \dots, x_{Nk}) \ell_{1i}(x_1) \ell_{2j}(x_2) \dots \ell_{Nk}(x_N)$$

si podemos encontrar funciones  $\ell_{rs}(x_r)$  tales que

$$\ell_{rs}(x_{rs}) = \delta_{rs}, \quad r = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, m_r, \\ \ell_{rs}(x_r) \in \mathcal{L}(\{h_{r1}(x_r), h_{r2}(x_r), \dots, h_{rm_r}(x_r)\})$$

### A.3. Desigualdad de Schwartz

Sean  $|\psi\rangle, |\phi\rangle \in \mathcal{H}$  y  $\langle\psi|, \langle\phi| \in \mathcal{H}^\dagger$  los vectores duales respectivos, entonces

$$\langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \geq |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

Demostración

Consideremos el vector  $|f\rangle = |\phi\rangle + \lambda|\psi\rangle$ . Como  $\langle f|f\rangle \geq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq I &\equiv \langle f|f\rangle \\ &= (\langle\phi| + \lambda^* \langle\psi|) (|\phi\rangle + \lambda|\psi\rangle) \\ &= \langle\phi|\phi\rangle + \lambda^* \langle\psi|\phi\rangle + \lambda \langle\phi|\psi\rangle + \lambda^* \lambda \langle\psi|\psi\rangle. \end{aligned}$$

En particular, si tomamos  $\lambda = -\frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

$$\langle\phi|\phi\rangle + \left(-\frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right) \langle\psi|\phi\rangle + \left(-\frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right) \langle\phi|\psi\rangle + \left(-\frac{\langle\phi|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right) \left(-\frac{\langle\psi|\phi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}\right) \langle\psi|\psi\rangle \geq 0.$$

Multiplicando por  $\langle\psi|\psi\rangle$  ambos lados de la ecuación, se tiene que

$$\langle\phi|\phi\rangle \langle\psi|\psi\rangle - |\langle\psi|\phi\rangle|^2 \geq 0,$$

es decir

$$\langle\psi|\psi\rangle \langle\phi|\phi\rangle \geq |\langle\psi|\phi\rangle|^2.$$

## A.4. Principio de Incertidumbre de Heisenberg

Sean  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  dos operadores hermitianos cuyo, tales que  $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\hat{C}$ , entonces

$$\Delta\hat{A} \Delta\hat{B} \geq \frac{\hbar}{2} \langle \hat{C} \rangle$$

Demostración

Consideremos los operadores  $\hat{a}$ ,  $\hat{b}$  definidos por

$$\begin{aligned} \hat{a} &\equiv \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{1} \\ \hat{b} &\equiv \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \hat{1} \end{aligned}$$

Como  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  son hermitianos, también lo son  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$ . Más aún, tienen el mismo conmutador,

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{b}] &= [\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{1}, \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \hat{1}] \\ &= [\hat{A}, \hat{B}] - \langle \hat{B} \rangle [\hat{A}, \hat{1}] - \langle \hat{A} \rangle [\hat{1}, \hat{B}] + \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle [\hat{1}, \hat{1}] \\ &= [\hat{A}, \hat{B}] \\ &= i\hbar\hat{C}. \end{aligned}$$

Evaluemos  $\langle (\Delta A)^2 \rangle$  y  $\langle (\Delta B)^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle &= \langle \psi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{1})^2 | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \hat{a}^2 | \psi \rangle \\ &= (\langle \psi | \hat{a}^\dagger) (\hat{a} | \psi \rangle) \\ &= \langle \phi | \phi \rangle, \end{aligned}$$

en donde  $|\phi\rangle = \hat{a} |\psi\rangle$ . Análogamente

$$\langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle = \langle \chi | \chi \rangle,$$

con  $|\chi\rangle = \hat{b} |\psi\rangle$ . Usando la desigualdad de Schwartz

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle &= \langle \phi | \phi \rangle \langle \chi | \chi \rangle \\ &\geq |\langle \phi | \chi \rangle|^2. \end{aligned}$$

Evaluemos  $\langle \phi | \chi \rangle$ ,

$$\begin{aligned} \langle \phi | \chi \rangle &= \langle \phi | \hat{a}^\dagger \hat{b} | \chi \rangle \\ &= \langle \phi | \hat{a} \hat{b} | \chi \rangle \\ &= \langle \phi | \frac{\hat{a} \hat{b} - \hat{b} \hat{a}}{2} + \frac{\hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a}}{2} | \chi \rangle \\ &= \langle \phi | \frac{\hat{a} \hat{b} - \hat{b} \hat{a}}{2} | \chi \rangle + \langle \phi | \frac{\hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a}}{2} | \chi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \phi | [\hat{a}, \hat{b}] | \chi \rangle + \Gamma, \end{aligned}$$

en donde  $2\Gamma = \langle \phi | \hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a} | \chi \rangle$ , además

$$\begin{aligned} 2\Gamma &= \langle \phi | \hat{a} \hat{b} + \hat{b} \hat{a} | \chi \rangle \\ &= \langle \phi | \hat{a} \hat{b} | \chi \rangle + \langle \psi | \hat{b} \hat{a} | \chi \rangle \\ &= \langle \phi | \hat{a} \hat{b} | \chi \rangle + \langle \phi | \hat{b}^\dagger \hat{a}^\dagger | \chi \rangle \\ &= \langle \phi | \hat{a} \hat{b} | \chi \rangle + \langle \chi | \hat{a} \hat{b} | \phi \rangle \\ &= \langle \phi | \hat{a} \hat{b} | \chi \rangle + (\langle \phi | \hat{a} \hat{b} | \chi \rangle)^*, \end{aligned}$$

por tanto  $\Gamma \in \mathbb{R}$ , entoces

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle \langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle &= \langle \phi | \phi \rangle \langle \chi | \chi \rangle \\ &\geq |\langle \phi | \chi \rangle|^2 \\ &= \left| \frac{i\hbar}{2} \langle \hat{C} \rangle + \Gamma \right|^2 \\ &= \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C} \rangle^2 + \Gamma^2 \\ &\geq \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C} \rangle^2, \end{aligned}$$

y aplicando raíz cuadrada a esta expresión

$$\langle (\Delta \hat{A}) \rangle \langle (\Delta \hat{A}) \rangle = \frac{\hbar}{2} \langle \hat{C} \rangle.$$



## A.5. Prueba de la necesidad para poder simplificar $\tilde{A}$

Observemos que una matriz de diferenciación debe mandar al vector identidad a cero, ya que es una función constante en todos los puntos y por tanto su derivada es cero, por lo tanto

$$(\tilde{A})_{jj} = \sum_l a_l$$

veamos bajo que condiciones  $(A)_{jk} = 0$ . Como el desfaseamiento entre dos raíces contiguas de  $-\lambda^N + e^{i\Gamma} = 0$ , es  $\frac{2\pi}{N}$ , entonces

Para  $N = 2n + 1$ , sea  $x$  tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= x - \frac{2n\pi}{N} \\ &\vdots \\ a_n &= x - \frac{2\pi}{N} \\ a_{n+1} &= x \\ a_{n+2} &= x + \frac{2\pi}{N} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= x + \frac{2n\pi}{N} \end{aligned}$$

por tanto,  $x = (A)_{jj} = 0$  y  $\Gamma = 2l\pi$ , ya que  $e^{i\Gamma} = e^{iNa_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, n + 1, \dots, 2n + 1$ .

Para  $N = 2n$ , sea  $y$  tal que

$$\begin{aligned} a_1 &= y - \frac{(2n-1)\pi}{N} \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= y - \frac{3\pi}{N} \\ a_n &= y - \frac{\pi}{N} \\ a_{n+1} &= y + \frac{\pi}{N} \\ a_{n+2} &= y + \frac{3\pi}{N} \\ &\vdots \\ a_{2n} &= y + \frac{(2n-1)\pi}{N} \end{aligned}$$

por tanto,  $x = (A)_{jj} = 0$  y  $\Gamma = (2l+1)\pi$ , ya que  $e^{i\Gamma} = e^{iNa_l}$ ,  $l = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n$ .

---

## Bibliografía

- [1] R.G. Campos, *A nonlocal equation for the wave function of the harmonic oscillator when the spectrum is to be made discrete*, Rev. Mex. Fis., 29 (1983) 217-236
- [2] R.G. Campos, *A nonperturbative method for the  $\alpha^2 + \beta^4$  interaction*, Rev. Mex. Fis., 32 (1986) 379-400
- [3] F. Calogero, *Matrices, differential operators and polynomials*, J. Math. Phys. 22 (1981) 919-932
- [4] F. Calogero, *Integrable dynamical systems and related mathematical results*, Lecture Notes in Physics 189, Springer-Verlag (1983).
- [5] R.G. Campos and L.O. Pimentel, *A finite-dimensional representation of the quantum angular momentum operator*, Il Nuovo Cimento B116 (2001) 31-46
- [6] F. Calogero, *Interpolation, differentiation and solution of eigenvalue problems for periodic functions*, Lett. Nuovo Cimento 39 (1984) 305-311
- [7] E. C. Floratos, *The Heisenberg-Weyl group on the  $Z_N \times Z_N$  discretized torus membrane*, E. C. Floratos Cern-Geneva, 1989.
- [8] Rocío del Pilar Aguilar Benítez, *Álgebras  $C^*$  y Grupos Cuánticos Compactos*, Toro Cuántico, páginas 81 - 100, 25 de Noviembre del 2006.
- [9] Bogdan Morariu and Alexios P. Polychronakos, *Quantum Mechanics on the Noncommutative Torus*, Department of Physics, Rockefeller University New York and Department of Physics, City College of the CUNY, 21 de Mayo del 2001.
- [10] Hajime Aoki, Jun Nishimura and Yoshiaki Suaki, *Finite-matrix formulation of gauge theories on a non-commutative torus with twisted boundary*, Saga

- University, High Energy Accelerator Research Organization (*KEK*) and Department of Particle and Nuclear Physics, 2009.
- [11] Ron S. Rubin and Andrzej Lesniewski, *Quantum Mechanics on a Torus*, Massachusetts Institute of Technology and Paribas Capital Markets, 20 de Julio de 1998.
- [12] K. Kowalski and J. Rembiliński, *Coherent states for the quantum mechanics on a torus*, Department of Theoretical Physics, University of Łódź, 11 de Diciembre del 2007.
- [13] José Rogan C. y Víctor Muoz G., *Física Matemática*, Teoría de Grupos, Momento angular orbital, 3th. Ed., 162-166.
- [14] William A. Ponce, *Mecánica Cuántica I*, Momento angular y espín, 111-114.
- [15] Dpto. de Matematicas. Univ. de Extremadura, *Apuntes de Grupos de Lie*, 2009.
- [16] F. Iachello, *The Interacting Boson-Fermion Model*, 1991.
- [17] A. S. Davyov, *Quantum Mechanic Volume 1*, Angular Momentum Operator, First Edition, 140-144.
- [18] Martín Rivas, *Classical elementary particles, spin, zitterbewegung and all that*, arXiv:physics/0312107v1 2003.
- [19] Martín Rivas, *Kinematical formalism of elementary spinning particles* 2007.
- [20] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, (Academic Press, London, 1994), 5th. Ed.