UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

TESIS

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

ERIC PAULÍ PÉREZ CONTRERAS

ASESOR:

DR. ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ

MORELIA, MICHOACÁN, ENERO DE 2012.

A mis Padres.

Agradecimientos.

A mis padres por su paciencia, apoyo y amor incondicional.

A Papo y Mamy por su hermoso legado familiar del cual soy parte.

A mis Maestros, por su apoyo, sus invaluables enseñanzas y comentarios.

A mis sinodales por sus valiosas observaciones.

A mi asesor por su paciencia, su enseñanza y sus sabios consejos.

A mis amigos por ser parte de mi formación profesional y humana.

A la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, por ser recinto de tantas oportunidades y vivencias de aprendizaje.

Resumen

La historia muestra que el desarrollo de la matemática se debe fundamentalmente a la solución de los problemas que matemáticos y otros científicos se han propuesto resolver.

Sin duda, la resolución de problemas es la línea sobre la que se han centrado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo escrito sobre el tema como por el desarrollo de proyectos de investigación en los últimos años y, en consecuencia, la que mayor impulso ha proporcionado a la educación matemática. Quizás, la razón sea que se nutre de los aspectos esenciales del quehacer matemático: los problemas y las acciones típicas del pensamiento que intervienen en el proceso de solución.

En este trabajo queremos estudiar con cierto detalle los procesos que intervienen en la resolución de problemas de las matemáticas escolares. Documentaremos las estrategias heurísticas propuestas por George Polya, en 1945, como las acciones físicas o mentales que dan pistas o ayudan a resolver un problema, así como los procesos metacognitivos que intervienen durante el proceso de resolución.

En el primer capítulo establecemos cuál es nuestro problema de estudio y cuáles son las preguntas que queremos responder, dando la justificación sobre la importancia de este trabajo. En el segundo capítulo documentamos los elementos teóricos que consideramos necesarios: algunas consideraciones acerca de los aspectos particulares y generales de las matemáticas como ciencia, el trabajo de Polya acerca de la heurística y las posturas de los trabajos sobresalientes sobre el tema. En el tercer capítulo hemos seleccionado un conjunto de problemas que nos han parecido interesantes para ilustrar el uso de los recursos matemáticos, las estrategias heurísticas (tácticas y herramientas). Finalmente, en el cuarto capítulo, presentamos las conclusiones del trabajo.

Índice General

Capítulo 1

Introducción

La escuela es la institución creada por el hombre para asegurar la transmisión de la cultura y el conocimiento; algunos agregan, incluso, que ha sido el principal medio del que se vale el hombre para asegurar su sobrevivencia como ente socialmente útil. En general, la educación proporcionada por la escuela, tiene como propósito principal la formación de ciudadanos educados, reflexivos, constructivos y comprometidos con su entorno social, de manera que sus conocimientos les permita integrarse a la sociedad y resolver distintos tipos de problemas que se les presentan en su ámbito de trabajo y en la vida cotidiana.

Sin embargo, en los diversos niveles escolares de nuestro sistema educativo, es común observar diferencias en el aprendizaje que manifiestan algunos estudiantes respecto a la mayoría de sus compañeros; unos pocos manejan conocimientos y aspectos matemáticos de manera distinta que otros. Las diferencias se hacen evidentes cuando emiten sus opiniones; regularmente, opinan con argumentos concretos y contundentes y, si el caso lo amerita, anteponen el análisis de la situación y expresan lo que piensan después de un proceso de meditación y reflexión.

Ellos, al igual que muchos otros, cumplen satisfactoriamente los requisitos escolares establecidos por el currículum; pero resulta notable el hecho de que se ha producido un aprendizaje matemático diferente; la mayoría lo hizo en forma rutinaria, aplicando algoritmos, escuchando y memorizando hechos que expresa el profesor o que están contenidos en los libros de texto.

Las diferencias observadas en el aprendizaje matemático de los estudiantes se deben fundamentalmente a:

i) la disposición que tienen por explorar e ir más allá de lo que su profesor le proporciona. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM -por sus siglas en inglés-, 2000) manifiesta que un aspecto relevante en la educación matemática, es provocar esa disposición para que los estudiantes logren un aprendizaje con entendimiento (Hiebert y Carpenter, 1992);

ii) el tipo de problemas que se abordan en clase y el rol que juega el estudiante en la resolución de los mismos (también se incluyen aquí los problemas que se dejan de tarea); y

iii) la forma de instrucción utilizada y el ambiente generado en el salón de clases, en donde el papel que juega el profesor es preponderante.

En general, existe el reconocimiento de que las matemáticas nos ayudan a organizar y ordenar nuestros pensamientos; nos hace competentes tanto para el desarrollo de diversas actividades intelectuales como hacia los demás. A pesar de estos puntos destacables, es evidente que la mayoría de las personas tienen dificultades y muestran deficiencias en el aprendizaje de las matemáticas; algunas de las posibles razones son: los alumnos no tienen la oportunidad de entender la importancia de lo que significa aprender matemáticas; el currículum que se ofrece es demasiado rígido; y los estudiantes y profesores no están comprometidos con el aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, algunas de las preguntas que los educadores matemáticos se han planteado en sus investigaciones durante las dos últimas décadas son: ¿Qué aspectos intervienen para que estudiantes de un mismo currículum escolar tengan aprendizajes que se diferencian por la forma de usar los recursos matemáticos y el tipo de argumentos esgrimidos? ¿Qué tipo de problemas promueven el aprendizaje de los estudiantes? ¿Qué significa que los estudiantes aprendan matemáticas?

Desde nuestro punto de vista, los resultados en el aprendizaje de las matemáticas escolares dependen, principalmente, de tres factores que intervienen en el sistema educativo: (1) el currículum, (2) la organización escolar, (3) el tipo de enseñanza -desde luego que existen otros factores como: las características propias de la matemática (nivel de abstracción y naturaleza epistemológica) y la variada formación matemática de quienes imparten clases.

(1) El currículum es el responsable del perfil que adquirirán los estudiantes cuando egresen de un nivel de estudios o carrera profesional; incluye la estructuración de las asignaturas, los programas de estudio y sus objetivos. (2) La organización escolar tiene que ver con la disposición de las instituciones por atender los problemas educativos, que

van desde las necesidades docentes más elementales, hasta cuestiones políticas, como el carácter de las decisiones sobre asuntos académicos que se toman en los niveles cupulares. (3) El tipo de enseñanza que el profesor desarrolla en el salón de clases, considera las actividades y problemas que se estudian, la forma de impartir la clase, el papel que juegan tanto el profesor como los estudiantes durante las sesiones de clase, así como el tipo de problemas que se dejan de tarea y su retroalimentación. Algunos de estos factores están estrechamente interrelacionados.

El tercero de estos factores merece especial atención; es sobre el que tienen posibilidad de incidir investigadores y profesores de matemáticas. En este sentido, surgen preguntas como: ¿los problemas que se abordan en el salón de clases, son atractivos y alientan la participación de los estudiantes?, ¿poseen contenidos fundamentales del currículum?, ¿se promueven procesos de resolución de problemas en la clase?, ¿se implementan en el aula formas de trabajo distintas a la tradicional? Estas preguntas son importantes porque dependiendo de su respuesta, se tiene la orientación para poder mejorar algún tipo de aprendizaje en los estudiantes.

Una de las propuestas curriculares más influyente en la educación matemática en los últimos años, a nivel internacional, es la planteada por el NCTM (2000) en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares, según la cual los fines de la educación se pretenden lograr a través de una serie *principios* y *estándares*, donde se flexibiliza la visión del orden tradicional en que deben cubrirse los contenidos matemáticos, desde el primer año escolar hasta el bachillerato y, además, se pretende lograr un aprendizaje diferente, que vaya más allá del tradicional. Ahí se sugiere organizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas alrededor de la resolución de problemas, donde los estudiantes adquieran la formación para desarrollar distintos recursos y estrategias para resolver diferentes tipos de problemas; se pretende lograr un aprendizaje con entendimiento de las matemáticas (Hiebert y Carpenter, 1992).

Dicha propuesta curricular contiene seis *principios*, que establecen la filosofía de la educación a la que se aspira con ese proyecto educativo y diez *estándares*; criterios de calidad previamente establecidos que contienen instrucciones sobre contenidos a cubrir y procesos de pensamiento que se pretende promover para conseguir un aprendizaje significativo de los estudiantes. Cinco de los estándares se refieren a líneas de contenido y los otros cinco a procesos de pensamiento que se espera desarrollar a lo largo de los

12 grados escolares. También se contempla, con una visión amplia y flexible, la forma en que se entrelazan las líneas de contenido y los procesos de pensamiento a lo largo de la matemática escolar. El estudio de los contenidos así como el impulso y promoción de los procesos de pensamiento en los estudiantes, están concebidos como un todo armónico y dinámico que produce aprendizaje en los estudiantes.

Uno de los estándares es el de resolución de problemas y en él se plantea la utilización de problemas adecuados para promover el aprendizaje de las matemáticas. En este proceso, los maestros juegan un papel importante en la educación matemática, pues ellos tienen la posibilidad de seleccionar problemas con ciertas cualidades que permitan alcanzar los objetivos y metas planteadas; ayudan a los estudiantes a plantear o explorar conjeturas. Se debe aprovechar que en este nivel de desarrollo, los estudiantes son manipulables e influenciables por las orientaciones de sus maestros.

Los seis *principios* son: principio de la equidad; del currículum; de la enseñanza; del aprendizaje; de la evaluación; y de la tecnología. Los cinco *estándares* relacionados con líneas de contenido matemático son: números y operaciones; álgebra; geometría; medición; análisis de datos y probabilidad. Los cinco *estándares* relacionados con procesos de pensamiento que se deben promover en cada uno de los grados escolares, son: resolución de problemas; razonamiento y prueba; comunicación; conexiones; y representaciones.

La interacción de los estudiantes con los problemas, ya sea mediante lápiz y papel o con el uso de la tecnología (computadora con software dinámico), puede contribuir a que los estudiantes se involucren en el proceso de resolución de problemas planteado por Polya (1945), quien ideó un método con la intención de ayudar a los estudiantes a resolver problemas, el cual consiste de cuatro fases: Comprensión del problema; Diseño de un plan se solución Ejecución del plan; y Revisión retrospectiva de los realizado. Dicha interacción también puede contribuir a la evolución de los ciclos de entendimiento (Lesh, *et al.* 2000) que están presentes en el aprendizaje de las matemáticas, y que evolucionan de un nivel inicial, intermedio y final del entendimiento que en ese momento tiene el estudiante respecto a los conceptos y nociones involucradas; o bien, pueden contribuir al desarrollo de las características propias del pensamiento matemático, que Schoenfeld (1998) ha identificado como: tomar casos particulares, descubrir patrones y relaciones, hacer generalizaciones, justificar resultados; lo cual constituye el propósito principal del aprendizaje de las matemáticas.

1.1 Justificación

Dadas las dificultades existentes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, una tarea importante en educación matemática ha sido estudiar e impulsar la generación de teorías que expliquen dichas dificultades. Éstas teorías han aterrizado en la determinación y el estudio del tipo de actividades que favorezcan el aprendizaje; un aprendizaje que sea significativo para los estudiantes, que vaya más allá de las cuestiones algorítmicas y rutinarias.

Sin duda, la resolución de problemas es la línea sobre la que se han centrado el mayor número de esfuerzos, tanto por lo escrito sobre el tema como por el desarrollo de proyectos de investigación en los últimos años y, en consecuencia, la que mayor impulso ha proporcionado a la educación matemática. Quizás la razón sea que se nutre de los aspectos esenciales del quehacer matemático: los problemas y las acciones típicas del pensamiento que intervienen en el proceso de solución.

El estudio e incorporación de estos aspectos, así como la puesta en claro de cómo realizar acciones que contribuyan a la resolución de los problemas, se debe a George Polya que, debido al acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas, se propuso diseñar un método que pudiera servirles para aprender a resolver problemas y, en consecuencia, a aprender matemáticas. Dicho método lo denominó ¿Cómo resolverlo? (Polya, 1945), marcando así un nuevo rumbo en el estudio de problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Sin embargo, el reconocimiento del trabajo de Polya no ocurrió inmediatamente; fue hasta la década de 1970, después de haber aceptado la invitación para trabajar en Estados Unidos, que se reconocen plenamente sus planteamientos, los cuales inicialmente estaban dirigidos a los estudiantes como una propuesta de aprendizaje, pero que pronto se convirtieron también en una propuesta de enseñanza, pues dichos lineamientos podrían ser utilizados por los profesores para organizar sus cursos. Es así como surgen estudios, artículos y libros que buscan dar explicaciones y desarrollar la teoría de resolución de problemas en educación matemática; algunos de ellos son: NCTM (2000); Schoenfeld (1985, 1999); Santos (2007); y Zeitz (1999).

1.2. Problema de investigación

Tomado en cuenta lo anterior, el presente trabajo se desarrolla en torno a la resolución de problemas, la línea de investigación que mayor número de explicaciones ha proporcionado respecto a un tipo de aprendizaje de las matemáticas que vaya más allá de la memorización y del desarrollo de procedimientos rutinarios que abundan en los libros de texto; para centrarse más en el desarrollo de habilidades, aplicación de estrategias y métodos generales para resolver problemas, así como el fortalecimiento del monitoreo y control que, sin duda, se da durante el proceso de resolución de problemas.

Así, nuestro problema de investigación en esta investigación es:

¿Cuáles son y cómo se caracterizan los recursos matemáticos y estrategias heurísticas que son utilizados en la resolución de problemas de las matemáticas escolares?

Se trata de poner de manifiesto cuáles son las estrategias y métodos que intervienen en la resolución de problemas, que permiten el desarrollo de las habilidades del pensamiento y estrategias generales como son: la toma de casos particulares, la concretización, la generalización, el uso de analogías, la comparación, el establecimiento de conexiones entre una y otra idea, etc. En un nivel más avanzado, el desarrollo de esas habilidades podrá permitir a los estudiantes fomentar la curiosidad y el sentido de reto para crear soluciones cada vez más ingeniosas.

Algunas de las preguntas que guiarán el desarrollo de este estudio son:

¿Qué formas de comprensión matemática y métodos de solución aparecen durante los procesos de resolución de problemas?

¿Qué formas de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes?

¿Qué tipo de problemas promueven el aprendizaje matemático?

Estas preguntas han sido parte de la agenda de investigación en educación matemática durante los últimos años. En este trabajo nos interesa concretamente, poner de manifiesto los procesos, las estrategias, representaciones y recursos que intervienen durante el proceso de resolución de problemas, ya que ellos representan un aspecto clave de las orientaciones que actualmente se promueven en la educación matemática.

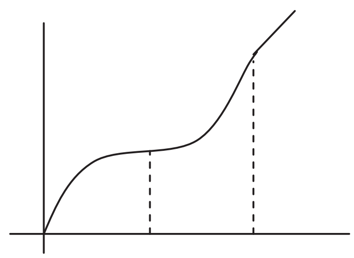
1.3. Problemas, estrategias, tácticas y herramientas.

Naturalmente, existen diversas concepciones en cuanto a lo que significa enseñar o aprender matemáticas, y en cuanto a lo que es un problema o un ejercicio. Hoy en día en la mayoría de las clases de Cálculo diferencial de nivel medio superior y superior, el énfasis principal se da a las reglas para calcular derivadas, sin que se comente o se haga el intento por que los estudiantes comprendan las ideas fundamentales que originaron este concepto. De hecho, algunos estudiantes pueden obtener la máxima calificación en esta materia sin que, necesariamente, tengan la capacidad de resolver problemas donde se requiera la comprensión de alguna de las ideas fundamentales, como las nociones de pendiente, tangente a una curva, la tasa de variación entre dos cantidades, etc.

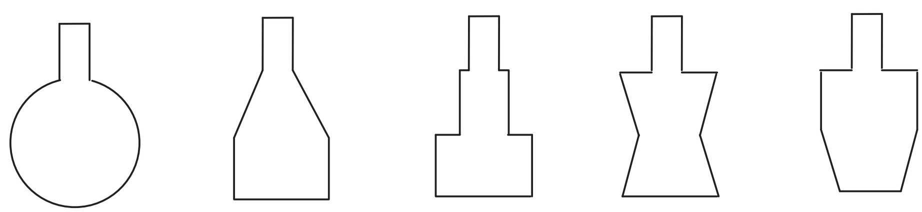
Un ejercicio típico podría ser: Calcular la derivada de la función $f(x)$ y encontrar los valores extremos de la función y puntos de inflexión. Un buen estudiante de ese curso sabrá cómo proceder para resolver correctamente esa cuestión y se reconocerá que ha aprendido.

Sin embargo, se requerirá algo más que eso para responder a una situación como la siguiente:

Se llenó una botella con un flujo constante de agua. La gráfica describe el comportamiento de la altura h del agua en la botella dependiendo del tiempo t[1].



¿Cuál de las siguientes puede haber sido la forma de la botella?



(a) (b) (c) (d) (e)

La anterior es una pregunta que no demanda conocimiento de algún algoritmo, o proceso específico para resolverla, sino más bien demanda concentración, observación y análisis de lo que significa una gráfica y la información que ésta puede proporcionar.

Para nosotros, la esencia del aprendizaje de las matemáticas está en la resolución de problemas. Un estudiante va aprendiendo matemáticas, en la medida que es capaz de resolver problemas rutinarios y cada vez más no rutinarios, problemas que antes no se era capaz de resolver y que requieren de algo más que la aplicación de una definición, fórmula o algoritmo.

[1] Problema tomado del Examen Canguro Matemático 2004, nivel estudiante.

Zeitz (1999) destaca tres acciones diferentes que pueden emplearse en la resolución de un problema: estrategias, tácticas y herramientas. Para ilustrar la aplicación de cada una de estas acciones, Zeitz plantea como analogía el problema que tiene un montañista que se propone escalar para llegar a la cima de una montaña.

Inicialmente, este propósito puede ser una tarea que no se sabe cómo atacarla, pues ofrece toda clase de obstáculos desconocidos. La primera estrategia puede ser observar la montaña desde distintos ángulos, para visualizar una posible vía que pueda ser accesible. Una vez en ella, al aparecer obstáculos tales como ríos, grietas o zonas nevadas o rocosas, necesita emplear tácticas para vencer cada uno de esos obstáculos; además, necesitará herramientas como el uso de cuerdas, martillo y piolets, que son acciones muy específicas para cada tipo de obstáculo.

Claramente, la experiencia será la que irá dando al aventurero de éstas tareas una visión cada vez más objetiva y aguda para tener éxito. Análogamente, la experiencia en la resolución de problemas proveerá al resolutor de una avidez especial para aplicar la estrategia adecuada, usar tácticas y herramientas, establecer conjeturas y validarlas.

Bajo ésta visión, la matemática escolar es, en cierto grado, formativa en el sentido de que resolver problemas de matemáticas permite desarrollar habilidades generales de pensamiento que, pueden transferirse para resolver otro tipo de problemas. Logrado esto, los estudiantes habrán adquirido conocimientos realmente significativos y un mayor nivel de razonamiento que les servirá para la formación y para toda la vida.

Capítulo 2

Marco Teórico.

2.1 Conocimiento particular y conocimiento general en la resolución de problemas.

Hablar sobre el desarrollo de habilidades del pensamiento en el estudiante que resuelve problemas de matemáticas, puede parecer demasiado ambicioso. Es necesario precisar y especificar claramente a qué nos referimos por habilidades. Para ello, se requiere clasificar aspectos generales y particulares de la matemática como disciplina, y considerar algunos aspectos relacionados con la didáctica. Al respecto, Santos (1997, p. 13) hace las siguientes observaciones:

> Estudiar matemáticas implica asimilar conceptos, métodos y principios **específicos** de éste dominio de conocimientos y distintos de los que se estudian en otros…
>
> La propuesta de que la resolución de problemas es una actividad esencial, está relacionada con el **desarrollo de la inteligencia** o de un pensamiento crítico, pues permite **la transferencia**: un componente importante en el aprendizaje de las estrategias para resolver problemas, ¿hasta qué punto puede transferir el estudiante su experiencia de resolver problemas en ciertos contextos a otros establecidos en otros contextos diferentes?

En éstas tres esferas (asimilación de conceptos, métodos y principios específicos, desarrollo de la inteligencia y la transferencia) podemos distinguir en el conocimiento que participa en el estudio de las matemáticas, por un lado, el conocimiento específico, que son los conceptos, definiciones, resultados y hechos propios de la disciplina y, por el otro lado, el conocimiento general que son las habilidades de pensamiento que, se afirma, es posible transferir a otros dominios.

Al respecto, Perkins (1981, citado en Santos, 1997, p.14) plantea las siguientes cuestiones:

¿Cuál es el tipo de conocimiento que debe enfatizarse más en el aprendizaje?

1. El conocimiento general de cómo pensar bien.

   Incluye estrategias ampliamente aplicables para resolver problemas, tomar decisiones, desarrollar un pensamiento inventivo, y regular o monitorear el proceso de solución de un problema.

2. El conocimiento específico de los detalles internos de cada campo de estudio.

   Aspectos particulares de cada disciplina.

¿Qué es lo esencial para lograr una habilidad notable en el dominio de un área del conocimiento?

1. Llegar a ser reflexivo y cultivar el uso de estrategias generales, y esto garantiza que cualquiera puede aprender las particularidades del campo. O bien:

2. Adquirir un conocimiento profundo en el campo específico. Dar énfasis a las cuestiones particulares del área y esto es suficiente para que cualquiera pueda aprender las estrategias generales de pensamiento que se necesitan.

Estas dos preguntas son centrales para determinar en qué aspectos se debe centrar la enseñanza. Pareciera que las dos posturas en la segunda pregunta fueran diametralmente opuestas; al respecto, Santos considera una tercera en la que considera complementarias a las posturas 1 y 2. Es decir, de manera resumida considera:

1. El desarrollo de habilidades para resolver problemas.
2. El desarrollo de un conocimiento local: materia por materia.
3. La combinación de estrategias generales y particulares.

En la siguiente sección discutiremos algunas consideraciones ontológicas y/o epistemológicas, acerca del carácter particular de lo que son las matemáticas como disciplina o de lo que significa *hacer* matemáticas.

Posteriormente, discutiremos algunas generalidades acerca de las **habilidades generales** para resolver problemas, sin por ello minimizar la importancia del desarrollo del conocimiento específico.

Es de suma importancia prestar especial atención a estas habilidades generales, ya que usualmente son las que implican un mayor esfuerzo por parte de estudiantes y profesores y por ello se ven frecuentemente descuidadas. Esto último normalmente aparece asociado a la instrucción.

Al respecto, Polya (1945) propone el uso y aplicación de los llamados **métodos heurísticos** para la resolución de problemas que son *a grosso modo*, estrategias generales aplicables y útiles para resolver problemas incluso, en otras áreas del conocimiento. En este sentido la resolución de problemas puede ser vista como una habilidad general de la cual la resolución de problemas matemáticos sería un caso especial.

2.2 Sobre el carácter de lo particular de las matemáticas como disciplina.

A continuación mencionamos algunas consideraciones de carácter ontológico y/o epistemológico[2] que diferentes investigadores hacen sobre lo que *son* las matemáticas:

¿Qué significa *hacer* matemáticas?

En años pasados se han visto diversos intentos por parte de filósofos y matemáticos por re conceptualizar y re describir la matemática. La re conceptualización tiene sus raíces en el trabajo de Polya (1945), Lakatos (1974), Benacerraf y Putnam (1964), y en los escritos de Kitcher (1984). Un tema central en ese trabajo es el hecho de que el *hacer* matemáticas es un proceso de naturaleza empírica.

Al respecto, Schoenfeld (1994) cita las ideas de Hoffman (1989) sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre la necesidad de hacer una reforma en la educación matemática. Algunos puntos importantes son los siguientes:

> Se requiere hacer una revisión comprensiva en el sistema actual de educación matemática (en las matemáticas escolares), ya que:
>
> Regularmente se presenta a las matemáticas como una disciplina agotada que difícilmente ofrece oportunidades de descubrimiento.
> Se basa en una idea falsa de que ciertas habilidades particulares y aisladas pueden ser usadas para resolver problemas previamente programados y dosificados.

Por tanto, se requiere una descripción sobre las matemáticas que transmita el "sabor" de la disciplina y, en función de ella, guiar la enseñanza.

Schoenfeld, en concordancia con las ideas de Hoffman y Steen (1988), asevera *a grosso modo* que **las matemáticas son la ciencia de los patrones**.

Es decir, de manera general las matemáticas consisten en establecer relaciones y caracterizaciones entre los objetos matemáticos a fin de describir patrones entre ellos,

[2] La ontología es una rama de la metafísica que se encarga de estudiar sobre la existencia de las cosas y sobre las relaciones entre las que existen; por ejemplo ¿existen entidades abstractas como número? La epistemología es parte de la filosofía que estudia en desarrollo del conocimiento científico.

valiéndose desde luego de un lenguaje simbólico y de la lógica. Describir a las matemáticas de esa manera plantea algunas cuestiones interesantes y nos lleva a territorios que Hoffman y otros más que han utilizado esta descripción, pudieron no haber anticipado.

Entonces, ¿qué son las matemáticas?

Cuando los matemáticos hablan sobre matemáticas, usualmente se refieren a "los productos" de las matemáticas.

Hoffman (1989) comienza con dos preguntas: una metafísica: ¿Qué son las matemáticas?; y otra epistemológica: ¿Qué significa *hacer* matemáticas, ó *actuar* matemáticamente?

En su artículo, Steen (1988) describe el alcance y profundidad de las matemáticas modernas y su poder en un creciente mundo matemático. Provee algunos ejemplos que ilustran cómo ciertas áreas dentro de la matemática pura y de la aplicada, han alcanzado un desarrollo tal que han logrado impactar a la sociedad en nuestros días. El principal punto de Steen es que las viejas concepciones sobre las matemáticas nunca fueron muy precisas y que ahora se quedan cortas. Las matemáticas, definidas clásicamente como "la ciencia del número y el espacio" (Steen, 1988, p. 611), ahora incluyen el estudio de regularidades de todo tipo. Por ello ambos, Steen y Hoffman, proponen que las matemáticas son "la ciencia de los patrones". Por su parte, Schoenfeld (1994, p. 55) describe:

> Desde el punto de vista de los matemáticos típicos las matemáticas son las "cosas" caracterizadas por encima (teoría de números, aplicaciones, matemáticas básicas, etc.); *aprender matemáticas* es descubrir acerca de esas cosas (a veces por ser dichas, otras veces por ser presentadas con la oportunidad de ser desarrolladas por uno mismo); y *hacer matemáticas* es llegar a la etapa en la que uno está produciendo más de esas cosas por uno mismo o en colaboración con otros. A partir de "la ciencia de patrones", podemos perseguir una visión muy diferente.

Analicemos la descripción de "la ciencia de los patrones".

La parte que se refiere a los *patrones* no requiere entrar en mucho detalle. Las matemáticas consisten en observar y codificar –en general vía representaciones simbólicas abstractas– regularidades en los mundos de los símbolos y objetos, trabajar en estas dos esferas comprende matemáticas puras y aplicadas respectivamente. (Schoenfeld, 1990)

La parte que tiene que ver con *ciencia* es más interesante. Para empezar, una vinculación general del término es que la ciencia trata de darle sentido a las cosas descubriendo lo que las motiva. Desde el punto de vista de Schoenfeld (1987, 1990), eso es precisamente de lo que se tratan las matemáticas –una particular forma de hallar el sentido de las cosas, en la que el principal instrumento consiste en un juego de herramientas simbólicas y hay estilos bien establecidos de razonamiento para ver cómo las cosas encajan.

Además, para Schoenfeld, "hacer ciencia" es generalmente reconocido por ser un acto social en vez de uno simple individual y aislado. Es decir, existe una comunidad específica que comparte y construye ideas; de ahí que exista la necesidad de ser capaz de comunicar resultados específicos y obtener respuestas. Así es también en la comunidad matemática.

Actualmente varios de los elementos comentados hasta aquí se han perdido o nunca han estado presentes en la instrucción matemática, cuando al ser parte inherente de la naturaleza de la matemática como ciencia, son de una importancia central.

Por ejemplo, muchos estudiantes ven a los problemas matemáticos como enunciados ficticios que les demandan hacer cálculos y operaciones, sin invitarlos a reflexionar en el sentido o el significado que tengan esas operaciones o los resultados de las mismas en el contexto del problema. Las matemáticas son enseñadas como un conjunto de instrucciones en lugar de como algo significativo que valga la pena compartir, socializar y descubrir.

Algunas creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas se resumen en el hecho de que las matemáticas consisten en aprender un conjunto de reglas, definiciones y enunciados para ser capaces de aplicarlos adecuadamente en los ejercicios que demanda el profesor.

Como hemos comentado anteriormente, la ciencia la hace toda una comunidad que forma un marco de validez para los resultados establecidos por un grupo de personas tras haber desarrollado un método más o menos empírico. Así pues, de igual forma las matemáticas son una ciencia empírica. Lo que hace un matemático al trabajar en un resultado que cree verdadero es tomar casos particulares, intentar esbozar una prueba, buscar contraejemplos que funcionen y, si no funcionan, encontrar cuál es la razón por la cual no funcionan para de este modo dar con el posible ingrediente que esté faltando en la prueba, etcétera.

Hacer ciencia es un proceso de descubrimiento continuo que se va actualizando conforme se hacen nuevas aportaciones por diversos científicos. De acuerdo con Schoenfeld (1994):

> Así, hacer matemáticas es hacer ciencia, con el componente empírico que hemos venido describiendo y el de descubrimiento. Sin embargo, lo que caracteriza y diferencia a las matemáticas de las otras ciencias, es el carácter único de los objetos que son estudiados y las herramientas utilizadas.
>
> Otra característica de la empresa científica es el carácter social de la disciplina. Algunos problemas son demasiado grandes para trabajarlos aisladamente. Por tanto un gran porcentaje del trabajo científico va creciendo hacia lo colaborativo. Requiere diversas perspectivas. Cuando decimos que una persona pertenece a una comunidad científica, estamos diciendo muchas cosas. Por supuesto se supone que esa persona posee el conocimiento adecuado, pero también estamos diciendo que tiene las herramientas y las perspectivas propias de su disciplina; una forma particular de ver el mundo, y un estilo propio de pensarlo. (p. 58)

En relación a cómo se llega a determinar la veracidad del conocimiento matemático, Schoenfeld (*Ibíd.*) considera:

> Puede ser por un lado que los matemáticos estén siempre absolutamente seguros de la verdad de ciertos resultados matemáticos complejos, o bien, que lo que se acepte como verdad matemática sea de hecho el mejor juicio colectivo de la comunidad de matemáticos, que podría llegar a ser erróneo (en un caso muy extremo).

Schoenfeld argumenta esto último y menciona que ésta visión tiene sus implicaciones en la instrucción en los salones de clase. En ese sentido, en una comunidad científica, las verdades (resultados establecidos como verdaderos por la comunidad de científicos) deben ser considerados como verdades "provisionales" o "falibles". Popper (1959) y Kuhn (1962) ilustran este punto. La idea de que una verdad absoluta es inalcanzable en la ciencia aparece implícita en su lenguaje, por ejemplo en el uso del término *teoría* para referirse a una "explicación tentativa". Del diccionario Webster, "Una teoría es una formulación de relaciones aparentes o principios acerca de ciertos fenómenos observados que han sido comprobados en cierta medida". La ciencia básica consiste en gran parte del descubrimiento y refinamiento de teorías, la construcción de marcos explicativos que dan cuenta de los hechos lo mejor que es posible.

Las nuevas y mejores explicaciones y marcos de referencia han venido a sustituir a los anteriores al proveer un paradigma más general, como fue el caso de la relatividad de Einstein que generalizó a la mecánica newtoniana, que a su vez sustituyo a la visión aristotélica.

Cuando uno estudia matemáticas, las cosas están organizadas de tal manera que pareciera que el conocimiento ya está dado mediante ciertos axiomas y definiciones y lo todo lo demás se puede seguir de manera inexorable. Lo que a veces se ignora es el proceso de descubrimiento y adaptación que fue necesario para llegar a definir conceptos nuevos de manera que se pudieran satisfacer las propiedades deseadas.

Muchas veces es necesario adaptar una definición para que satisfaga ciertas propiedades, como es el caso de la definición "natural" de poliedro, que por mucho tiempo fue aceptada en la comunidad de matemáticos y se usó para probar la fórmula de Euler. Después se encontraron algunos sólidos que cumplían tal definición pero que no satisfacían la fórmula. Fue entonces necesario modificar la definición.

En este contexto, Munkres (2000) comenta por ejemplo que la definición actual de espacio topológico tardó mucho tiempo en ser formulada. Varios matemáticos propusieron distintas definiciones en las primeras décadas del siglo veinte, pero fue más tarde cuando establecieron la definición que parecía ser la más apropiada en el sentido de que fuera lo más general posible e incluyera como casos especiales a todos los ejemplos útiles tales como los espacios euclidianos y espacios de funciones, pero también que los teoremas sobre estos y otros espacios familiares se adaptaran a los espacios topológicos generales.

Lakatos (1978) utiliza el término "cuasi empírica" para clasificar a las matemáticas dentro de las ciencias, en el sentido de que el conocimiento es convenido y establecido de manera colaborativa, pero las verdades son "conjeturales".

En resumen podemos decir que el marco de autoridad para establecer la validez y veracidad de un conocimiento es la propia comunidad de matemáticos. Esto implica en el escenario de la enseñanza la importancia de que los estudiantes desarrollen una visión de las matemáticas que vaya en concordancia con esta idea y la necesidad de eliminar la tradicional concepción de que el profesor o el libro de texto juegan el papel de dicha autoridad.

Es natural que esas concepciones que se tienen acerca de las matemáticas se vayan generando, si han estado presentes en nuestra etapa escolar. Si a la mayoría se nos presentaron las matemáticas escolares como una disciplina fría, agotada y sin ofrecer oportunidades de descubrimiento, experimentación, comunicación y validación de ideas o conjeturas, es natural que hoy en día se tengan concepciones imprecisas de lo que son en verdad las matemáticas.

Es preciso entonces tener presentes todos los elementos que hasta aquí se han comentado acerca del carácter particular de la matemática como ciencia y llevarlos también a los salones de clases. Schoenfeld justifica lo anterior, y en seguida comentamos algunas ideas al respecto.

El papel de la dimensión social en la concepción de las matemáticas.

Schoenfeld (1994) reconoce que las concepciones de las personas son desarrolladas a raíz de sus interacciones sociales. Bajo esta premisa, Schoenfeld lleva a cabo cursos de resolución de problemas y verifica cómo con la participación en actividades de resolución de problemas, los estudiantes desarrollan un sentido particular de las matemáticas. A través de sus cursos pudo orientar a sus estudiantes para que desarrollaran un mejor punto de vista de las matemáticas acorde con su naturaleza como disciplina.

Concretamente, para ilustrar este punto, Schoenfeld plantea las preguntas siguientes: ¿dónde reside la autoridad matemática?; y ¿quiénes pueden *hacer* matemáticas?

El marco de veracidad o validez de los hechos reside **en la matemática misma**.

El estilo de trabajo en actividades de resolución de problemas, permite que los estudiantes vayan dejando atrás antiguas concepciones en las que el profesor y el libro de texto son los marcos para validar los resultados obtenidos. Poco a poco van desarrollando un marco de validez y veracidad conforme son capaces de hacer conjeturas, argumentarlas o refutarlas y finalmente de comunicar sus resultados. Reconocen de este modo a la autoridad en la validez matemática de los mismos argumentos.

Por ejemplo, en una sesión de un curso especial de resolución de problemas para estudiantes de nivel de secundaria, se planteó el siguiente problema:

¿Puede dividirse un cuadrado en cualquier número de cuadrados menores?

En un primer acercamiento es fácil que los alumnos vean que el intento de dividir en dos y tres cuadrados falla, pero sin dar un argumento contundente. Una forma de argumentar el caso de dos es observar que dos esquinas del cuadrado original tendrían que pertenecer al mismo cuadrado, lo que implicaría que el lado de uno de los cuadrados menores es igual al lado del cuadrado original, lo cual es imposible. De la misma forma se argumenta que no se puede dividir un cuadrado en tres cuadrados más pequeños. Sí se puede dividir en cuatro. Dividirlo en cinco también es imposible: se sabe que las cuatro esquinas del cuadrado original pertenecen a distintos nuevos cuadraros. Si fuera posible, debería haber un solo cuadrado nuevo que no tocara una esquina del original. Para esto hay dos posibilidades, (1) que si toque uno de los lados, (2) que esté localizado en el interior del cuadrado original. Las dos posibilidades pueden descartarse fácilmente.

Después de guiar a los estudiantes para que primero vean la necesidad de construir argumentos y convencerse de sus afirmaciones, pueden resolver el problema y aprender que el hecho de que uno o varios intentos fallen no implica que no sea posible dividirlo en cierto número de cuadrados.

Schoenfeld describe dentro de sus metas para sus cursos de resolución de problemas la de crear una comunidad intelectual local con perspectivas similares. De modo tal que los acercamientos y las formas de trabajar los problemas sean similares a las de una comunidad matemática. En este sentido Schoenfeld dice que los estudiantes son capaces de *hacer* matemáticas dentro de su propia comunidad intelectual.

Las consideraciones anteriores hacen ver que la resolución de problemas provee una perspectiva valiosa en el sentido de que brinda a los estudiantes oportunidades de descubrimiento, búsqueda de conjeturas, comunicación y argumentación de ideas, desarrollándose como protagonistas de las matemáticas. Schoenfeld reconoce que estos ambientes proporcionan a los estudiantes una experiencia con las *verdaderas* matemáticas comparada con la instrucción convencional.

En el siguiente párrafo nos preocuparemos por las acciones físicas y/o mentales que entran en juego para llegar a todas las acciones que mencionamos son posibles en la resolución de problemas.

2.3 Polya y los métodos heurísticos.

La historia muestra que el desarrollo de la matemática se debe fundamentalmente a la solución de los problemas que matemáticos y otros científicos se han propuesto resolver. A pesar de que este reconocimiento existe desde hace varios siglos, es hasta después del trabajo inicial de George Polya, en 1945, que la resolución de problemas empieza a convertirse en un aspecto importante en el ámbito escolar. G. Polya, era un matemático productivo que preocupado por el acostumbrado fracaso de sus estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas se propuso diseñar un método que pudiera ayudarles a resolver problemas y así superar esas dificultades de aprendizaje. Trató de llevar al aula su experiencia como matemático cuando se encuentra inmerso en el proceso de solución de un problema, e identificó un método que sugiere cómo abordarlo y cómo realizar intentos para que, quizás, permita a los estudiantes llegar con éxito a la solución.

El método de Polya (1945), descrito en su libro *How to Solved it*, que acertadamente una editorial mexicana tradujo con el nombre de “Cómo plantear y resolver problemas”, contiene una *lista* de preguntas, sugerencias y recomendaciones “típicas” que debería seguir el buen resolutor de problemas. Dentro de esa lista de preguntas que se sugiere siga el estudiante en el proceso de resolución de problemas, podemos destacar las siguientes: *¿Cuál es la incógnita?, ¿Cuáles son los datos?, ¿Conoce algún problema parecido?, ¿Ha visto esto antes?, ¿Qué teorema o propiedades conoce relacionadas con el problema?, ¿cuál es la condición que me piden?,* entre otras. Todas éstas no son sino invitaciones para que el estudiante *conciba un* plan y utilice procedimientos heurísticos tales como: *trazar una figura*, *tomar casos particulares*, *elaborar una tabla*, y muchos otros cuya finalidad es *llevar a cabo el plan* concebido anteriormente.

Estas preguntas se clasifican estratégicamente en cuatro fases:

- Entender el problema. Se trata de analizar y “desmenuzar” el enunciado del problema para poner en claro qué y cómo es lo que se pregunta.
- Concebir un plan. Se aplican los recursos con los que se cuenta para resolver el problema o, en su caso, se identifica un plan que permita obtener y aplicar recursos que tiendan a obtener una solución.

- Llevar a cabo el plan. La experiencia en el manejo de recursos (algorítmicos, conceptos) y en el autocontrol, juegan un papel importante.
- Hacer una revisión retrospectiva de lo realizado. El propósito es detectar incoherencias y contradicciones, o bien, constatar resultados y concordancias.

Polya plantea que un problema se tiene cuando el que lo enfrenta no puede resolverlo en forma inmediata con los recursos con que cuenta, y entonces requiere de un método que le permita resolverlo. En palabras del propio Polya, "Resolver un problema es encontrar un método que no se tiene de manera directa" (Yearbook 1980, p. 1), para encontrar ese posible método o forma de resolver el problema, propone aplicar estrategias en las que intervienen los procesos heurísticos y la reflexión. Los primeros se refieren a estrategias que se siguen para facilitar el proceso, como son: hacer analogías, realizar trazos, hacer una tabla, tomar casos particulares, etc. Éstos son procesos del pensamiento matemático.

La **heurística** agrupa estrategias y métodos que al ser aplicados conducen a (o tienden a facilitar) la solución de los problemas. La aplicación de esas estrategias y métodos se basa fuertemente en la experiencia que va adquiriendo la persona que resuelve problemas, ya sea por su propia participación en dicho proceso o por la observación de los métodos que utilizan otros. Preguntas o instrucciones como: ¿Cuál es la incógnita y qué datos tienes?, ¿es posible satisfacer tal condición?, ¿podrías enunciar el problema en forma diferente?, ¿qué pasa si ves la figura desde arriba?, ¿qué pasa si x toma determinados valores?, etc., son importantes para ayudar a los estudiantes en la resolución de problemas. Al respecto, Santos (1997) dice:

> Las heurísticas identificadas por Polya se enmarcan en comunicar su propia experiencia como matemático al resolver problemas. Polya compartía que las estrategias y preguntas de un experto al resolver problemas podrían ser modeladas por los maestros en el salón de clases. Así, Polya creía que bajo la guía del maestro, los estudiantes podrían en algún momento internalizar el proceso de cómo un matemático dialoga consigo mismo durante el proceso de solución, y utilizarlo naturalmente sin ayuda externa. (p. 15)

En ésta medida podemos decir que Polya trató de sistematizar de una manera explícita cuáles son los procesos que atraviesa la actividad de resolución de problemas, entendida ésta como la esencial actividad del quehacer matemático y que además será una importante habilidad en general.

En el Capítulo 3 de "*¿Cómo resolverlo?" (How to Solved it?*) Polya (1945) habla de los siguientes aspectos como habilidades potenciales del estudiante que aprende resolviendo problemas.

➔ **Afición a resolver problemas.** El estudiante que se logra interesar en resolver problemas a tal grado que se ve involucrado en este quehacer, no tendrá nada que lo detenga para seguir aprendiendo.

➔ **Reformular problemas.** *¿Conoces algún problema parecido?* Ver el problema desde otro punto de vista, cambiar el enunciado, dividir el problema en sub – metas, etc. son estrategias útiles para reformular un problema y atacarlo más fácilmente.

➔ **Reflexión sobre la resolución de problemas.** Indudablemente la resolución de problemas implica un proceso de reflexión, análisis, síntesis y toma de decisiones que con una enseñanza tradicional y rutinaria resulta difícil.

➔ **Experiencia en el control.** Esta experiencia se refiere al desarrollo de esa "intuición" que nos dice cuando estamos tomando argumentos incorrectos o hay que cambiar de estrategia. Es un monitoreo para que esa idea reveladora llegue, más que de manera milagrosa, como resultado de una serie de razonamientos bien entendidos. Al principio los estudiantes suelen comenzar a hacer operaciones, plantear y resolver ecuaciones sin entender un sentido del significado que éstas tengan, sino solo por hallar una respuesta que muchas veces, ni siquiera revisan si tiene sentido. De ahí la importancia de la cuarta etapa que plantea Polya de "Hacer una revisión retrospectiva de la solución".

La heurística es una ciencia que antiguamente estaba más ligada con la lógica, la filosofía y la psicología. Su objetivo eran las reglas y procedimientos del descubrimiento y la invención. Actualmente la heurística se dedica a estudiar cuales son las operaciones particularmente útiles para resolver problemas. Se ha visto enriquecida por las aportaciones de Pappus, Descartes, Leibniz y Bolzano, pero más aún a la experiencia misma en resolución de problemas. Por eso la lista de preguntas planteada por Polya es una serie de motivaciones a seguir o a llegar a usar éstas operaciones heurísticas. Según un texto extraído de Pappus "La heurística es en resumen, una doctrina especial para uso de aquellos que, tras haber estudiado los elementos ordinarios, desean dedicarse a la solución de problemas matemáticos, no sirve más que para esto". Actualmente, podemos decir que la heurística es toda acción física o mental que contribuye, da pistas, o sugiere el camino para la resolución de los problemas.

2.4 Importancia de los métodos heurísticos como habilidades generales.

En su tiempo hubo cuestionamientos hacia la enseñanza de las estrategias generales de las que hablamos. Thorndike por ejemplo dudaba del entrenamiento de las facultades del pensamiento. Enseñar el uso de estrategias generales independientes de un dominio específico no produciría beneficios fuera del contexto en que eran enseñados.

Santos Trigo señala algunos resultados de investigación que evidencian la importancia de estos métodos:

a) el papel de los expertos ante problemas no rutinarios.

b) La metacognición y los métodos generales, y

c) La evidencia de transferencia. Entendida como la habilidad de aplicar un conocimiento en situaciones diversas o contextos diferentes.

Señala que al estar ante un problema no rutinario los expertos aplican diversas estrategias de carácter general como la búsqueda de analogías con sistemas que pueden entenderse mejor, hacer referencia a los modelos intuitivos mentales para tratar de entender cómo se comportaría el sistema, considerar casos extremos (tender a cero, a infinito), construir problemas más simples con la misma estructura, con la idea de importar la solución al problema original, etc.

Por su parte Schoenfeld (1985) incorpora la dimensión cognitiva al proceso de resolución de problemas, considera que el monitoreo o auto-evaluación juegan un aspecto central en ese proceso. Las acciones de reflexión asociadas con ese monitoreo se identifican como estrategias metacognitivas. Schoenfeld afirma que la metacognición se refiere al conocimiento de nuestro proceso de pensar, al autocontrol y la orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de problemas.

Schoenfeld fundamenta la importancia de la dimensión metacognitiva y encuentra evidencia de la transferencia al trabajar como coordinador de un grupo de estudiantes universitarios de un curso intensivo en el que los estudiantes consiguieron resolver problemas totalmente diferentes a los discutidos en el curso. El desarrollo del curso destaca la componente del control o monitoreo constante por parte de los estudiantes al trabajar con los problemas.

Santos señala de acuerdo con Brown y Kane (1988), que la transferencia ocurre cuando:

i. Se le muestra al alumno cómo se relacionan los problemas entre sí.

ii. La atención de los estudiantes es dirigida a resaltar la estructura de problemas comparables.

iii. Los alumnos están familiarizados con los problemas del campo o dominio específico.

iv. Los ejemplos se acompañan de reglas (formuladas por los estudiantes).

v. El aprendizaje se lleva a cabo en un contexto social (enseñanza recíproca) donde las justificaciones, los principios y las explicaciones son socialmente promovidas, generadas y contrastadas.

(1997, p. 22)

El desarrollo de habilidades para resolver problemas en diversos contextos se ha vinculado con el desarrollo del pensamiento o razonamiento de alto nivel.

La mayoría de los investigadores en ésta dirección coinciden en que las habilidades de alto grado de pensamiento incluyen el desarrollo de:

a) Un pensamiento no algorítmico.

b) Un pensamiento en el que el individuo tenga que contemplar varias formas de solución.

c) Un pensamiento que involucre el uso de diversos criterios.

d) Un pensamiento que algunas veces implica cierta incertidumbre.

e) Un pensamiento que incluye un monitoreo constante del proceso de solución.

(Resnick, 1987, citado por Santos 1997, p. 23)

En el Capítulo 3 de su libro, Santos (*Ibíd.*) manifiesta que entender el cómo un individuo resuelve problemas, desempeña un papel fundamental al proponer actividades de instrucción para el aprendizaje de las matemáticas.

Esto, junto con las consideraciones hechas por Schoenfeld acerca del carácter particular de la matemática, robustece la importancia de documentar y estudiar los procesos que intervienen en la resolución de problemas en matemáticas escolares, así como del papel que juegan en la instrucción de los estudiantes.

2.5 Un punto de vista dinámico de las Matemáticas.

El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés) en Norteamérica ha realizado uno de los esfuerzos colectivos más importantes educación matemática, al desarrollar e implementar el proyecto curricular conocido como *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* (NCTM, 2000), en el que subyace la idea de lograr los fines de la educación, cubriendo ciertos contenidos bajo la observación e implementación de una serie de principios (sus ideales, su filosofía) y procesos (de pensamiento) donde se amplían y "flexibilizan" las concepciones tradicionales sobre los contenidos curriculares y su enseñanza; en ellas sobresalen las altas expectativas que se tienen sobre el aprendizaje de los estudiantes.

Se acepta la existencia de diferencias individuales y se plantea que la evaluación no debe seguir siendo una acción que impida el aprendizaje de los estudiantes, sino una actividad que les brinde oportunidades para aprender, donde se les permita mostrar lo que ya saben y los impulse a adquirir nuevos y más robustos conocimientos, y donde se tome en cuenta todo el esfuerzo del estudiante por resolver una tarea y no sólo el resultado.

Esta propuesta curricular tienen sus antecedentes, pues desde 1980 el NCTM publicó el primer documento relacionado con dicha propuesta curricular, al que denominó *Agenda para la Acción*, en la que propone que la resolución de problemas debe ser el centro de atención de las matemáticas escolares, pues es un proceso que los estudiantes deben realizar en forma individual y colectiva, ya que propicia las condiciones de un ambiente en el que se pueden aprender las matemáticas de manera significativa, donde se promueve la intervención de otros procesos ya sea usando diversos tipos de representaciones, estableciendo conexiones con otros resultados, justificando los pasos dados en la solución de un problema, o comunicando los resultados obtenidos. Ello conlleva a que los estudiantes desarrollen ciertas capacidades para el estudio y entendimiento de las matemáticas que son característicos del quehacer de la disciplina.

En 1990 señalan que un punto de vista dinámico de las matemáticas conlleva a un ambiente de aprendizaje que tienda:

(a) Hacia la aceptación de un salón de clases como una comunidad matemática.

(b) Hacia el uso de la lógica y la evidencia matemática como un medio de verificación, contrapuesto a ver al maestro como la sola autoridad para dar las respuestas correctas.

(c) Hacia el desarrollo del razonamiento matemático; es decir, no ubicar a las matemáticas como un conjunto de fórmulas o reglas para memorizar.

(d) Hacia la resolución de problemas y no solamente dar énfasis a la actividad de encontrar respuestas mecánicamente.

(e) Hacia la conexión y aplicación de las matemáticas; es decir, no concebirlas como un cuerpo aislado de conceptos y procedimientos.

Cabe mencionar que éste organismo publica mensualmente un calendario de problemas (uno por día) en las páginas centrales de la revista Mathematics Teacher.

2.6 Problema y ejercicio.

Zeitz (1999) describe en su libro a la resolución de problemas como toda una aventura que se enriquece en la medida en que uno resuelve más problemas. También describe las **características deseables en el estudiante que resuelve problemas:** conoce bien las matemáticas básicas (desde el nivel escolar hasta conocimientos básicos de cálculo y álgebra lineal), disfruta haciendo matemáticas; tiene nociones (aunque sean vagas) de demostración, ha invertido tiempo resolviendo problemas, y desea ser cada vez mejor resolviendo problemas cada vez más difíciles.

De manera general, se distinguen dos tipos de problemas: rutinarios y no rutinarios (o ejercicios). Un problema es rutinario si el que lo enfrenta puede visualizar o anticipar su solución mediante la aplicación de los recursos matemáticos con los que cuenta, o bien, puede localizar estos recursos de manera más o menos inmediata; es decir, la solución de este tipo de problemas depende de técnicas usuales y no de la aplicación especializada de éstas y otras técnicas a las que suele recurrir un experto. En cambio, la solución de un problema no rutinario demanda pensamiento y reflexión, antes de poder tener una propuesta de solución (Polya, 1945). Cabe mencionar también que la naturaleza misma de un problema es una cuestión relativa, pues "la misma tarea que exige esfuerzos significativos de algunos estudiantes, puede ser un ejercicio rutinario para otros y, solucionarlo, puede ser un acto de simple recordatorio para un matemático talentoso" (Schoenfeld 1985, p. 74). En este sentido, Zeitz (1999) señala la diferencia entre un ejercicio y un problema:

> Un ejercicio es una cuestión que uno reconoce cómo resolver inmediatamente. Si se resuelve bien o no, dependerá de cómo se apliquen técnicas específicas y no se necesita hacer mayor esfuerzo para saber cuáles técnicas utilizar. En contraste, un problema demanda pensamiento, meditación, recursos e ingenio, antes de que un acercamiento apropiado sea encontrado. (p. 3)

De acuerdo con Zeitz (*Ibíd.*), un buen problema es misterioso e interesante. Misterioso porque al principio uno no sabe cómo resolverlo. Si no es interesante, uno no querrá pensar demasiado. Si es interesante, uno estará dispuesto a invertir algo de tiempo y esfuerzo en entenderlo y resolverlo.

El que es inexperto resolviendo problemas suele rendirse rápidamente, por diversas razones como pueden ser:

- No sabe cómo empezar.
- Hace un pequeño progreso al principio, pero no sabe cómo proceder después. (Se atora)
- Se hacen distintos intentos, pero nada funciona así que se rinde. (Zeitz, 1999)

El carácter relativo de los problemas. Hemos mencionado ya que una cierta cuestión que para alguien resulte un problema, para otro puede ser un simple ejercicio.

El que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática.

Para Schoenfeld un problema es una tarea que es difícil para el individuo que está tratando de hacerla. Además, la dificultad debe ser un impasse intelectual y no solamente a nivel operacional o de cálculo.

Los problemas que se plantean a los estudiantes en sus estudios matemáticos no son realmente problemas, sino ejercicios.

El uso de problemas no rutinarios puede constituir un recurso natural para discutir actividades que ilustren el uso de conjeturas, contraejemplos, aproximaciones y en general, estrategias de carácter cognoscitivo y de monitoreo.

El uso de problemas rutinarios se identifica más con el empleo de procesos mecanizados o memorísticos.

Para Simon (1973) hay problemas bien estructurados y los que no presentan una estructura bien definida.

Para Fredericksen (1984) hay: 1. Problemas bien estructurados, 2. Problemas estructurados que requieren un pensamiento productivo y 3. Problemas mal estructurados.

Para Polya (1962) existen tres componentes cuando se tiene un problema: (a) Estar consciente de una dificultad, (b) tener deseos de resolverla, y (c) la no existencia de un camino inmediato para resolverlo.

Según Kilpatrick (1985), un problema matemático se identifica como un problema que requiere conocimientos matemáticos para resolverlo y para el cual no existe un camino directo o inmediato para resolverlo.

En un problema, en términos generales aparece:

(a) La existencia de un interés.

(b) La no existencia de una solución inmediata.

(c) La presencia de diversos caminos o métodos de solución.

(d) La atención por parte de una persona o un grupo para llevar a cabo acciones a resolver esta tarea.

Aunque en cada tipo de problema puede haber unos con mayor dificultad que otros, se considera que tanto la clasificación de un problema como su dificultad son relativas.

Tipos de problemas.

Cabe mencionar que dentro de los problemas es posible establecer distintas clasificaciones. Por ejemplo, podemos distinguir básicamente los problemas que son de determinación y los problemas de demostración. En los primeros puede ser necesario cierto nivel de argumentación para establecer un marco de validez para las afirmaciones que se hacen. Zeitz (1999) también describe otras clasificaciones como son los problemas recreativos, problemas para examen y problemas de respuesta abierta.

2.7 Modelos de análisis en la resolución de problemas.

Polya (1945) documenta su propia experiencia como matemático y educador, resalta la identificación de varias etapas en el proceso de resolver problemas. Recordándolas: Entendimiento del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y evaluación de la solución o soluciones. Plantea una lista de preguntas que uno puede hacerse en el proceso de solución de problemas, ilustrando así el uso de las estrategias heurísticas.

Schoenfeld (1987) sugiere además que es necesario considerar dimensiones o categorías que encontró que existen cuatro dimensiones en la instrucción matemática que influyen en el proceso de resolver problemas:

i) Los recursos. Cuerpo de conocimientos con que cuenta el individuo. Hay cinco tipos:

a) Conocimiento informal e intuitivo.

b) Hechos y definiciones.

c) Procedimientos rutinarios.

d) Conocimiento acerca del discurso del dominio.

e) Errores consistentes o recursos débiles.

ii) Los métodos heurísticos. Estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar en la resolución de un problema. "Para entender un problema no familiar, uno puede ejemplificar el problema por medio de la consideración de varios casos particulares. Eso puede sugerir la dirección y quizás la plausibilidad de la solución".

Otra estrategia heurística general es considerar sub metas que incluyan condiciones parciales. La solución de las sub metas puede servir de base para construir la solución requerida.

iii) Estrategias metacognitivas. Monitoreo o autoevaluación del proceso utilizado al resolver un problema. La metacognición se refiere al conocimiento de nuestro propio proceso cognoscitivo, al monitoreo activo y a la consecuente regulación y orquestación de las decisiones y procesos utilizados en la resolución de un problema.

iv) **Sistema de creencias.** La concepción que el individuo tenga acerca de las matemáticas. Las creencias establecen el contexto dentro del cual funcionan los recursos, las estrategias heurísticas y el control. Schoenfeld documenta las siguientes creencias:

1. Las pruebas formales no son necesarias al menos que explícitamente se requieran.
2. Todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos a lo más en 10 min.
3. Solo los genios son capaces de descubrir, crear y entender matemáticas.
4. Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo o el descubrimiento de las ideas matemáticas

Por su parte, Branca (1980) plantea que la resolución de problemas en las matemáticas escolares tiene tres acepciones: (i) como meta, al señalar que el fin último del estudio de las matemáticas es resolver problemas, (ii) como habilidad, ya que esta debería ser una de las características a fomentar en la formación de los estudiantes; y (iii) como proceso, al considerar que ejercer la resolución de problemas provoca la intervención de otros procesos y habilidades que permiten la evolución de las formas de pensamiento de los estudiantes, hasta un mayor dominio en el uso de recursos y en consecuencia, hacia un mayor entendimiento de las matemáticas.

2.8 Investigación y pensamiento estratégico.

Los tres niveles de acción en resolución de problemas.

Zeitz (1999) haciendo uso de la analogía con el montañista que comentamos en el primer capítulo, describe tres niveles de acción en la resolución de problemas, sin tratar de dar una definición estricta en cada caso.

Estrategias. Son ideas matemáticas y psicológicas para iniciar y atacar problemas.

Tácticas. Son métodos matemáticos diversos que funcionan en diferentes contextos.

Herramientas. Técnicas o "trucos" enfocados a situaciones muy específicas.

Proceso de investigación. Desarrollando el pensamiento estratégico.

De acuerdo con Zeitz (*Ibíd.*):

> Cuando uno se enfrenta a un problema, es necesario cierto nivel de investigación inicial. Esta investigación puede tomar varias formas. Por ejemplo, se puede comenzar intentando llevar a cabo cualquier idea que aparezca en mente y ver si funciona, si uno tiene una imaginación creativa y una buena gamma de métodos y por su puesto tiempo y paciencia suficiente para intentar, eventualmente se puede llegar a resolver el problema. Sin embargo, si uno es principiante, es mejor cultivar una visión más organizada. Primero pensar estratégicamente; no tratar de resolver el problema inmediatamente. La meta del pensamiento estratégico es elaborar un plan que puede apenas tener contenido matemático, pero que tienda a mejorar la situación inicial, similar a la analogía del montañista. (p. 6)

Las estrategias nos ayudan a iniciar y a avanzar hacia la solución del problema, pero simplemente nos dan una idea de la situación actual de nuestro trabajo y nos muestran lo que hay que hacer. Los hechos concretos para lograr nuestros planes estratégicos se desarrollan en subniveles de la táctica y la herramienta. (Ver por ejemplo el problema 18).

Estrategias para investigación en problemas.

Un buen problema matemático no puede resolverse por sí solo. Se debe poner esfuerzo en descubrir la combinación de las tácticas matemáticas que se van a usar para llevar a cabo la estrategia adecuada. El término “estrategia” no es propio de las matemáticas. Muchas estrategias funcionan en diferentes tipos de problemas, no solo matemáticos.

Para principiantes, la estrategia es muy importante. Cuando uno se enfrenta a un nuevo problema, regularmente no se sabe cómo comenzar. Algunas estrategias psicológicas pueden ayudar a tomar el camino correcto para resolver el problema, otras a iniciar el proceso de investigación. Una vez iniciado el trabajo se requerirá establecer un marco estratégico y así completar la solución.

La solución a un problema consta de dos partes: La investigación durante la cual uno descubre qué es lo que está pasando, y la argumentación en la cual uno convence a los otros acerca de sus descubrimientos.

Existe el reconocimiento de que los que son expertos resolviendo problemas piensan de manera diferente, su pensamiento es analítico, sensible y flexible. Desarrollan habilidades especiales como la concentración, creatividad, y desarrollan lo que Zeitz llama la visión periférica que les permite hacer cambios de puntos de vista según sea conveniente, usar distintas representaciones, recursos y herramientas apropiadas, etcétera.

El estudiante que resuelve problemas desarrolla gradualmente también una fortaleza mental que le permite hacer varios intentos y nunca rendirse ante un problema. Los novatos o principiantes desisten rápidamente debido a que carecen de atributos de fortaleza mental como confianza y concentración. A veces puede hacer falta investigar un poco hacia el uso de recursos que puedan ser necesarios o para tener algún conocimiento en particular.

Zeitz (*Ibíd.*) señala que es difícil trabajar en un problema si quien lo resuelve no cree poder resolverlo. Para los novatos es difícil superar la frustración inicial ante un intento fallido. El estudiante novato debe mejorar su fortaleza mental a la par con sus habilidades matemáticas para poder hacer progresos significativos.

Creatividad, visión periférica y buen conocimiento y uso del folklore matemático (recursos de conocimiento o estratégicas y tácticas usuales como el principio extremo o el de inducción) son cualidades esenciales deseables a desarrollar en alguien que desee ser mejor resolviendo problemas y por tanto aprendiendo matemáticas.

Por creatividad Zeitz (1999) se refiere a la receptividad que el individuo tiene para ciertas ideas que se supone existen de por sí en cierto sentido platónico; la solución a un problema existe y es no inherente al resolutor, el individuo puede ser capaz de descubrir esa solución dependiendo de su capacidad para recibir nuevas ideas.

Estrategias de inicio.

Zeitz (*Ibíd.*) reconoce la necesidad de recurrir a ciertas estrategias aplicables en general al iniciar un problema. Experimentar, vislumbrar una solución parcial o un penúltimo paso, intentar hacer una inducción, utilizar recursos como la factorización, definiciones, propiedades, etcétera, son acciones que pueden servir para romper la brecha de inicio. Concretamente Zeitz clasifica estas estrategias como sigue:

1° Orientación. Algunas consideraciones que deben hacerse al iniciar cualquier problema:

- Leer el problema con cuidado. Poner atención a detalles como positivo, negativo, finito, infinito, etcétera.
- Clasificar si se trata de un problema "por encontrar" o uno "por demostrar". ¿El problema es similar a algún otro conocido?
- Identificar cuidadosamente la hipótesis y la conclusión.
- Intentar una breve lluvia de ideas:
  - Pensar en la notación conveniente.
  - ¿Puede ser plausible un método o argumento particular?
  - ¿Se puede anticipar una posible solución? Confiar en la intuición.
  - ¿Hay palabras o conceptos importantes? (Zeitz, 1999 p.29)

Una vez concluida esta etapa uno debe regresar y revisarla nuevamente, intentar abordar el problema de distintos puntos de vista.

2° Ya estoy orientado ¿y ahora? Hasta este momento se debe estar familiarizado suficientemente con el problema como para entender qué es lo que se pide, cuáles son las condiciones y tener una idea de lo que se debe hacer. Esto puede involucrar una o más de las siguientes estrategias:

- **Penúltimo paso.** Una vez que se tiene identificada la conclusión a la que se quiere llegar, es conveniente preguntarse ¿qué hecho puede implicar la conclusión en un solo paso? Muchas veces un penúltimo paso es obvio una vez que se busca. Mientras más experiencia se tiene, más obvio puede ser encontrarlo.

- **Ensuciarse las manos.** Básicamente se trata de experimentar y buscar patrones y relaciones. Esto es fácil y divertido de hacer. Experimentar con varios casos particulares. "Jugar" con las propiedades de los elementos involucrados, tratar de vislumbrar un patrón y argumentar si dicho patrón realmente se está dando.

- **Ilusiones y simplificar el problema.** Estas estrategias combinan psicología y matemáticas para ayudar a empezar el trabajo. Conviene preguntarse: ¿Qué es lo que hace difícil al problema?, luego ver si es posible hacer desaparecer esa dificultad, aunque sea solo temporalmente, para permitirnos avanzar hacia la solución. Por ejemplo si el problema involucra números grandes y complicados, puede tomarse un caso con números más pequeños en aras de simplificar y hacernos ver más fácilmente la estrategia que debemos seguir.

Capítulo 3.

Problemas y estrategias heurísticas.

3.1. Algunos métodos y estrategias heurísticas usuales en la resolución de problemas.

A continuación se presentan algunas estrategias heurísticas que consideramos útiles en la resolución de problemas. Las hemos comentado sin ningún orden particular, ya que, no hay restricción en cuanto a cuándo usar una u otra; la constante práctica resolviendo problemas irá desarrollando la habilidad de saberlas aplicar adecuadamente valiéndose del proceso metacognitivo que se va madurando conforme se adquiere experiencia resolviendo problemas. Comentaremos brevemente algunas estrategias y en algunos casos ilustraremos con un ejemplo.

Considerar casos particulares. Esta es una de las heurísticas más socorridas, y la iremos ilustrando en varios de los problemas que hemos planteado en este capítulo. Suele ayudar mucho para entender un problema, pues permite fijar ideas y observar algunos hechos y propiedades que podrían darnos una pista sobre la dirección que se debe seguir para atacar el caso general, y dar así una idea plausible de la solución.

La cancelación. Es una estrategia que es comúnmente usada en contextos algebraicos, por ejemplo cuando se multiplica y divide por el conjugado de un denominador, o por ejemplo cuando queremos calcular los primeros n términos de una progresión geométrica con razón común $r \neq 1$,

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

Multiplicando por r se obtiene

$$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 + \cdots + a_1 r^n$$

Restando ésta ultima igualdad, de la primera observamos que se cancelan varios de los términos y obtenemos que

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1 r^n$$

o sea

$$S_n(1-r) = a_1 - a_1 r^n$$

de donde

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$$

La cancelación suele efectuarse después de hacer alguna observación simple que puede ser la clave para avanzar hacia la solución. Identificar qué es lo que se va a cancelar puede no ser fácil en una primera inspección.

Introducir elementos auxiliares. Un problema puede ser difícil debido a que su planteamiento no arroja relaciones muy claras o explícitas entre las condiciones o las variables que aparecen. Después de pensar un rato puede surgir la idea de introducir un elemento auxiliar como puede ser una nueva variable, un trazo, un teorema o definición, u otro elemento que no esté presente en el planteamiento original del problema, pero cuyo uso resulte ser clave para solucionarlo. (Ver problema 8).

Reconocer la necesidad o utilidad de introducir un elemento auxiliar suele ser parte de una *idea brillante* (*insight*) que puede llegar con una justificación más o menos clara dependiendo de varios factores como pueden ser la naturaleza del problema, la experiencia de quien lo resuelve o su familiaridad con ese tipo de problemas, etcétera. Comentaremos más adelante algunos ejemplos acerca de esto.

Reducir un problema a uno más simple. En ocasiones especiales se puede observar que un problema puede conducir a otro, cuya solución nos permita resolver el problema original, pero que sea más sencillo. Tal es el caso conocido de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas, en el cual un trabajo algebraico puede reducir el número de ecuaciones e incógnitas, llevando el problema a uno más simple.

Hagamos hincapié en el hecho de que no queremos dar una definición precisa de cada estrategia, como tampoco delimitar su aplicabilidad. Uno puede notar que una acción empleada en la resolución de un problema puede ser combinación de dos o bien, una puede conducir a otra. Por ejemplo si deseamos saber para qué x reales se satisface la ecuación $x^4 - 13x^2 + 67 = 0$, la introducción de la *variable auxiliar* $y = x^2$ nos permite *reducir el problema* a la ecuación cuadrática $y^2 - 13y + 67 = 0$, cuya solución es más fácil de obtener.

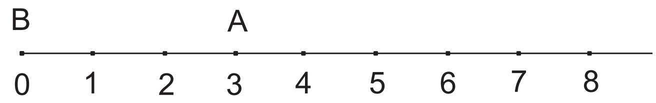
Considerar sub metas. Pueden identificarse una o varias sub metas en un problema, y atacar primero un caso simple que contenga condiciones parciales o que reduzca las hipótesis permitiendo llegar después a la solución general. (Véase problema 10). En un problema de demostración, si se desea probar $P \Rightarrow Q$, es posible encontrar que $R \Rightarrow Q$ y entonces *basta ver* que $P \Rightarrow R$.

Reformular el problema. En matemáticas es común encontrar distintas representaciones para un mismo objeto o situación. A veces cambiar de una a otra facilita la resolución de un problema, por ejemplo al traducir del lenguaje común al algebraico; enunciar el problema con otras palabras que contengan menos conceptos técnicos, intentar probar la contrarrecíproca[3] de una proposición, representar un sistema de ecuaciones en forma matricial, etc.

Problema 1. Si las manecillas de un reloj marcan las 3 P.M., ¿Cuánto tiempo transcurre para que la manecillas de los minutos se superponga a la manecilla de las horas?

Solución: Notemos que es posible reformular el problema representándolo en una línea recta. Llamemos A al punto donde se localiza el horero y B al punto donde se localiza el minutero.

[3] Dada una implicación lógica de la forma $P \Rightarrow Q$, su contrarrecíproca es $\neg Q \Rightarrow \neg P$, donde el símbolo $\neg$ denota la negación de una proposición.



El minutero *B* avanza una unidad por cada cinco minutos que transcurren, mientras que el horero *A* avanza una unidad por cada sesenta minutos que transcurren. Esto lo podemos expresar escribiendo las velocidades de *A* y de *B* en unidades por minuto como sigue:

$$v_A = \frac{1}{60} \text{ y } v_B = \frac{1}{5}$$

Observemos que *B* avanza más rápido que *A* y que en menos de una hora ambas manecillas van a coincidir en un punto *x* que está a la derecha tanto de *A* como de *B*. Si *t* es el tiempo que tardarán en llegar a *x*, se cumple el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= v_A t \\ 3 + x &= v_B t, \end{aligned}$$

que tiene por solución: $t = 180/11$ min. ■

Sumar cero. Al igual que el método de la cancelación, "sumar cero" (o multiplicar por uno) es una estrategia que se usa frecuentemente. Su aplicación al principio parece ser poco natural en el sentido de que no es evidente que pueda ser clave para resolver el problema. Más adelante se verá que no es así, cuando se adquiera mayor familiaridad y destreza en la resolución de problemas en los que es útil recurrir a este tipo de "trucos".

Hacer un dibujo. El trazo de una figura que ilustre el enunciado de un problema es útil, no sólo en geometría, sino en otras ramas de las matemáticas o de las ciencias en general. Se trata de una representación que puede permitir visualizar y describir las condiciones del problema e incluso vislumbrar una herramienta auxiliar como puede ser el trazo de una recta, hacer evidente la igualdad, semejanza o congruencia entre ciertos elementos, y demás observaciones que puedan contribuir sustancialmente al entendimiento del problema. En cierto sentido, esta podría ser una forma de reformular el problema.

Sustituir. Es una herramienta que regularmente es un truco algebraico, que bien utilizado puede llevarnos a simplificar el problema como lo hicimos en la ecuación de cuarto grado que expusimos antes. También se puede pensar en la sustitución cómo una operación lógica: dada una expresión lógica reemplazamos todas las apariciones de una cierta variable x por algún término $t(x)$ en aras de simplificar el problema considerablemente. Ésta técnica es frecuentemente usada en diversos artificios de integración o para deducir las expresiones generales que resuelven una ecuación de tercero o cuarto grado.

Usar analogías. La analogía es un concepto útil para establecer conjeturas en la resolución de problemas no solamente de matemáticas sino también de otras ciencias o áreas del conocimiento. Se basa en encontrar relaciones entre objetos distintos. Si se tienen dos sistemas S y S' -cuyos elementos pueden ser líneas, vértices, caras, números, conjuntos u otros entes matemáticos- y se preservan algunas de las relaciones más estructurales del sistema (básicas para el mismo) quizá se pueda establecer una **analogía** que es una especie de comparación, y hacer *inferencia sobre la analogía* para llegar a una conclusión. Las relaciones de congruencia y semejanza de figuras son ejemplos de analogías que pueden establecerse entre dos figuras si se satisfacen ciertas relaciones.

Debemos distinguir entre una analogía en el sentido lógico estricto (que no detallaremos de manera formal) y las comparaciones vagas, que si bien podrían ser un principio de una analogía, su uso incorrecto puede conducirnos a razonamientos erróneos.

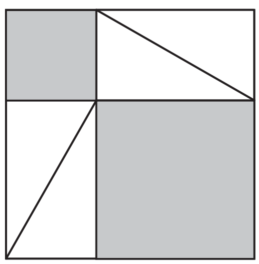
Regresar a las definiciones. Quizás ésta sea una forma de *reformular el problema.* En muchas ocasiones plantear un problema en términos de las definiciones hace evidente su solución.

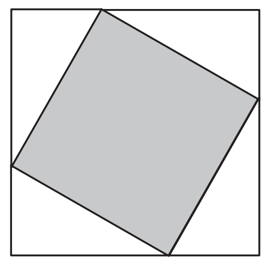
Hacer reacomodos. La idea es considerar las partes que componen un objeto y reordenarlas de tal manera que simplifiquemos el trabajo y obtengamos lo que buscamos. Se pueden hacer reacomodos en problemas aritmético algebraicos buscando una manera de agrupar o acomodar los términos con los que se va a operar, antes de hacer operaciones. Por ejemplo para encontrar la suma de los primeros n naturales el hecho de escribir la suma en dos acomodos distintos

1	$+$	2	$+$	3	$+$	$\ldots$	$+$	$(n-1)$	$+$	n
n	$+$	$(n-1)$	$+$	$(n-2)$	$+$	$\ldots$	$+$	2	$+$	1

nos ayuda a obtener la suma deseada.

También en problemas de geometría se pueden hacer reacomodos. Por ejemplo, el siguiente reacomodo de cuatro triángulos rectángulos congruentes nos proporciona una prueba intuitiva del teorema de Pitágoras.

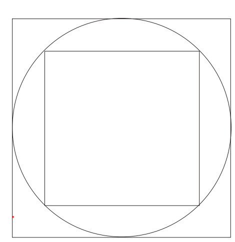




Un caso particular de un reacomodo podría ser la siguiente estrategia.

Realizar una rotación. En algunos problemas resulta conveniente la rotación de una figura un cierto ángulo para observar una congruencia o semejanza o para poder aplicar alguna propiedad esencial.

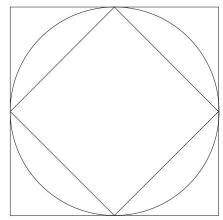
Problema 2. ¿Cuánto vale la razón del área del cuadrado excrito a la del cuadrado inscrito en una circunferencia de radio r?



Solución: Tracemos el radio que pasa por uno de los vértices del cuadrado inscrito. Éste radio es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos miden $\frac{\sqrt{2}}{2}r$. Por tanto, el lado del cuadrado inscrito es $\sqrt{2}r$.

El área del cuadrado inscrito es $2r^2$, mientras que la del cuadrado excrito es $4r^2$, por lo que la razón buscada es 2.

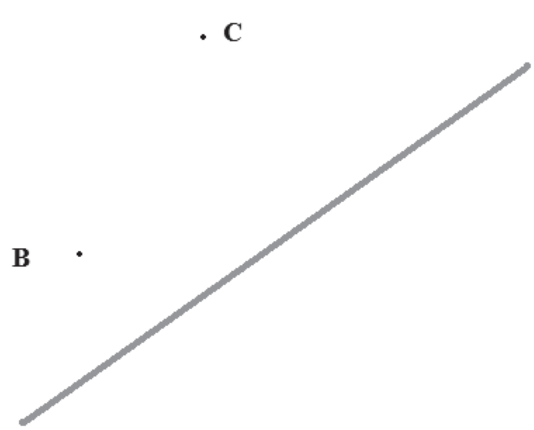
Sin embargo: *¿Qué pasa si* giramos el cuadrado inscrito?



Al girar el cuadrado inscrito, no cambian las condiciones del problema y la solución emerge: la razón es 2.■

Establecer una simetría. En geometría resulta bastante útil recurrir al simétrico de un punto o de una recta, figura, etc., respecto a otro punto o recta para encontrar pistas sobre el comportamiento de alguna situación. En el Cálculo, considerar el comportamiento simétrico de algunas funciones resulta útil para resolver problemas.

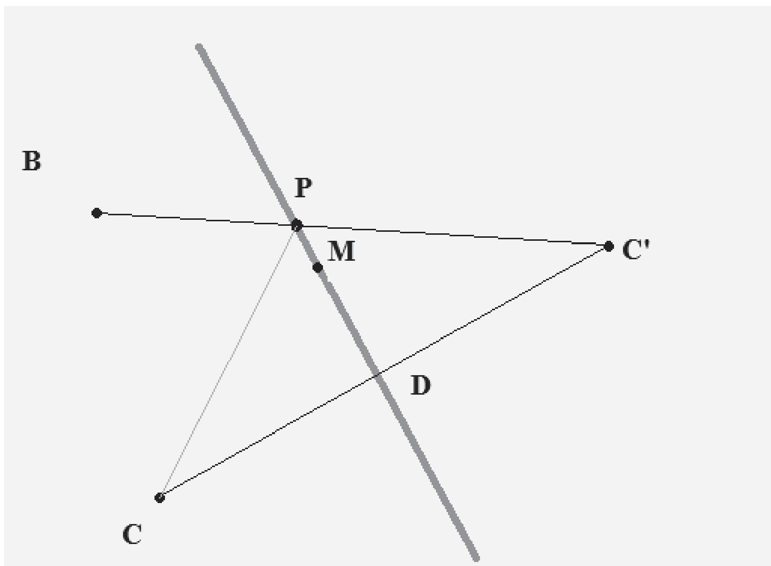
Problema 3. Si *l* es un río rectilíneo y de un mismo lado de *l* se encuentran un bombero en *B* y una casa quemándose en *C*, ¿Cuál es el mejor camino para que el bombero vaya por agua al río y luego a la casa para apagar el fuego?



Solución: ¿cuál es la incógnita? – La ubicación de un punto P sobre la recta l, de manera que $BP + PC$ sea mínimo.

Vamos a introducir un elemento auxiliar. Sea C' el simétrico de C respecto a l, y tracemos BC' que cruza a l en P.

Veamos que P es el punto buscado. Si trazamos PC se forma el triángulo PCD, el cual es congruente con el triángulo $PC'D$ por el criterio de congruencia LAL (lado ángulo lado) y entonces se tiene que $PC = PC'$.



Ahora, $BC' = BP + PC$ y si M es cualquier otro punto de l, al trazar BM y MC' se forma el triángulo $BC'M$, y por el Teorema de la desigualdad del triángulo [4], $BC' < BM + MC$. Por tanto, en efecto, P es el punto que minimiza el recorrido del bombero.■

El problema anterior es un ejemplo de cómo establecer una simetría puede ser muy útil para resolver un problema de geometría. Sin embargo, la noción de simetría no se restringe a la geometría, en el álgebra también se pueden encontrar ejemplos donde podamos usarla, como por ejemplo, el reacomodo que hicimos para encontrar la suma de los primeros 100 números naturales nos permite establecer una simetría en los términos de la suma, y concluir que resulta (100)(101)/2.

[4] Dado un triángulo, cualquiera de sus lados es de menor longitud que la suma de los otros dos.

Creemos que la resolución de problemas y el quehacer matemático están lejos de llegar a ser actividades predecibles o rutinarias; el ingenio, curiosidad y creatividad para resolver problemas serán cualidades que siempre estarán presentes, y no se ha encontrado un límite hasta donde puedan desarrollarse dichas cualidades para poder hacer crecer y mantener viva a la matemática.

Hemos comenzado pues, con una pequeña lista de estrategias heurísticas que son muy usadas, y algunos comentarios acerca de cada una. Vamos a seguir ilustrando y discutiremos éstas y otras heurísticas a lo largo de los problemas que hemos seleccionado como ejemplos, pero tengamos en cuenta que ésta lista está lejos de ser completa y no pretende dar definiciones precisas ni decir exactamente en qué casos es aplicable cada estrategia. Cada uno de nosotros al estar inmersos en el trabajo de resolver problemas de diversas partes de la matemática tendrá la posibilidad de analizar conscientemente éstas y otras heurísticas y de reflexionar sobre de su aplicación y utilidad.

Problema 4. Encontrar un número entero positivo a tal que la suma $a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a$ resulta ser un número con todas sus cifras iguales (Pérez, 1997).

Solución: Primero veamos que $a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a=45a=9\cdot 5\cdot a$ así que la suma es múltiplo tanto de 9 como de 5, y puesto que todas sus cifras deben ser iguales, es fácil ver que debe ser un número formado únicamente por 5's, y debe tener 9 (o un múltiplo de 9) cincos, es decir, proponemos

$$45a=555555555$$

Entonces, $a=555555555\div 45=12345679$. ■

En este problema se hace uso del recurso de los criterios de divisibilidad. Además, cabe observar que este número *a* cumple con la propiedad de que si se multiplica por 9 o por un número de dos cifras que sea múltiplo de 9, se obtiene lo siguiente:

$$9a = 111111111$$

$$18a = 222222222$$

$$27a = 333333333$$

$$36a = 444444444$$

$$\dots$$

$$81a = 999999999$$

Como hemos dicho, los métodos heurísticos son estrategias generales que pueden ser útiles para avanzar en la resolución de un problema. En el siguiente problema vamos a ilustrar la *consideración de casos particulares*.

Problema 5. Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios cuyos coeficientes son los mismos pero en orden inverso; es decir,

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, y $Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_0x^n$. ¿Cuál es la relación entre las raíces de $P(\mathrm{x})$ y $Q(x)$? Demostrar la respuesta.

Solución: Comencemos dando un polinomio particular cuya factorización sea sencilla, digamos $P(x) = (x-3)(x-1) = x^2 - 4x + 3$ y entonces $Q(x) = 3x^2 - 4x + 1$. Calculando las raíces de P, obtenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$, y para Q tenemos $x_1 = 1/3$ y $x_2 = 1$.

Si ahora consideramos $P(x) = (x + 4)(x + 2) = x^2 + 6x + 8$. Entonces $Q(x) = 8x^2 + 6x + 1$ y vemos que sus raíces son: $x_1 = -4$ y $x_2 = -2$ para P; mientras que para Q, $x_1 = -1/2$ y $x_2 = -1/4$.

Los casos anteriores nos sugieren la siguiente conjetura: las raíces de P son los recíprocos de las raíces de Q.

Para probar esto consideremos el caso general $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

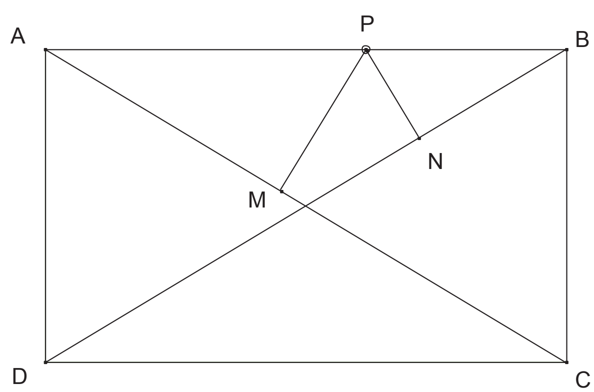
Si $r \neq 0$ es raíz de P, entonces lo que queremos ver es que $1/r$ es raíz de $Q(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + \cdots + a_0x^n$, para lo cual basta evaluar Q en $1/r$:

$$\begin{aligned} Q(1/r) &= a_n + a_{n-1}(1/r) + \dots + a_1(1/r)^{n-1} + a_0(1/r)^n \\ &= (1/r)^n (a_nr^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0) \\ &= (1/r)^n P(r) = (1/r)^n (0) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, efectivamente, las raíces no nulas de P son las recíprocas de las de Q.■

Cuando se intenta resolver problemas que inviten a la reflexión y meditación, después de la primera fase de entendimiento del problema, suele aparecer una ***idea brillante*** (*insight*), que representa un acto de inspiración que resuelve el problema. Desde luego, su aparición no es producto de la casualidad, sino el resultado de la experiencia y de una avidez especial que se va desarrollando después de examinar y reflexionar diversas situaciones problemáticas durante de un tiempo indeterminado. Un ejemplo histórico está en cómo los antiguos conjeturaron que la luz de la luna no es sino el reflejo de la del sol, al ver durante un tiempo indeterminado la posición opuesta de la luna respecto al sol.

Problema 6. En el rectángulo $ABCD$, $AB = 5$ y $AD = 3$. Un punto P se mueve libremente en AB y desde el él se trazan perpendiculares a las diagonales. Calcular la suma $PM + PN$.



Solución: Por criterio de semejanza AAA (los tres pares de ángulos correspondientes son congruentes), tenemos que los triángulos PMA y CBA son semejantes. Entonces es posible escribir:

$$\frac{PM}{CB} = \frac{PA}{CA} = \frac{MA}{BA}$$

Además los triángulos PNB y DAB también son semejantes por AAA, así que

$$\frac{PN}{DA} = \frac{PB}{DB} = \frac{NB}{AB}$$

De las relaciones anteriores obtenemos $PM = CB\dfrac{PA}{CA}$ y $PN = DA\dfrac{PB}{DB}$. Sumando

$$PM + PN = \frac{CB(PA)}{CA} + \frac{DA(PB)}{DB}.$$

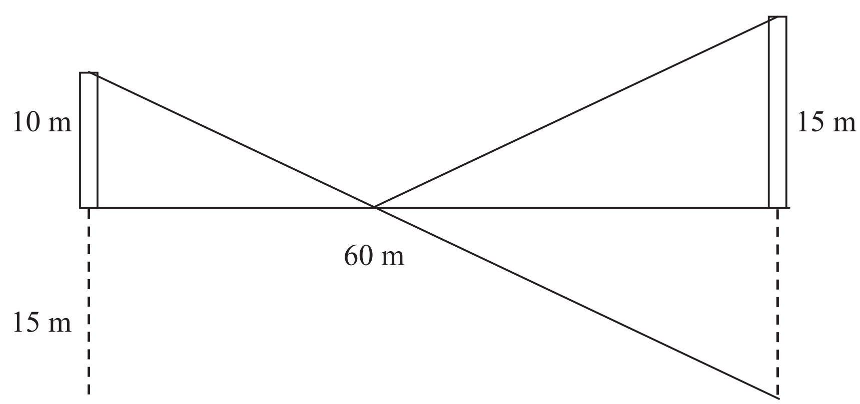
Como $CA = DB = \sqrt{34}$ por el teorema de Pitágoras, entonces

$$PM + PN = \frac{CB(PA)}{\sqrt{34}} + \frac{DA(PB)}{\sqrt{34}} = \frac{3(5)}{\sqrt{34}} = \frac{15}{\sqrt{34}}. \blacksquare$$

Problema 7. Se tiene necesidad de sujetar dos postes de 10 y 15 metros de altura, colocados en una banqueta rectilínea, por un cable de acero en un punto entre ellos. La distancia entre los postes es de 60. ¿Dónde colocar el soporte para que se use menos cable?

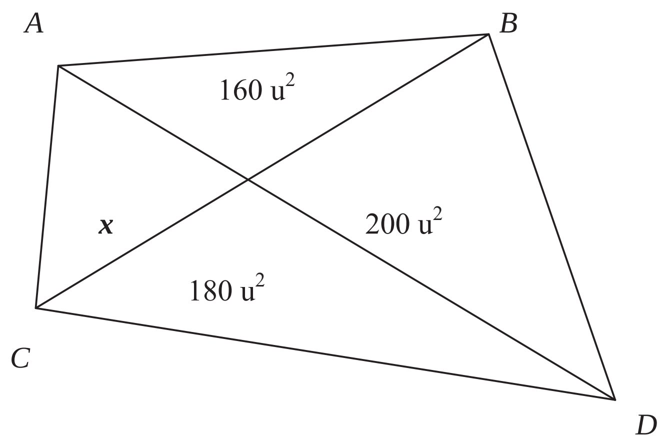
Solución: ¿Hay algún problema parecido? ¡Claro! Usaremos la misma idea que en el problema del bombero.

Sea x la distancia que entre el primer poste y el punto de soporte

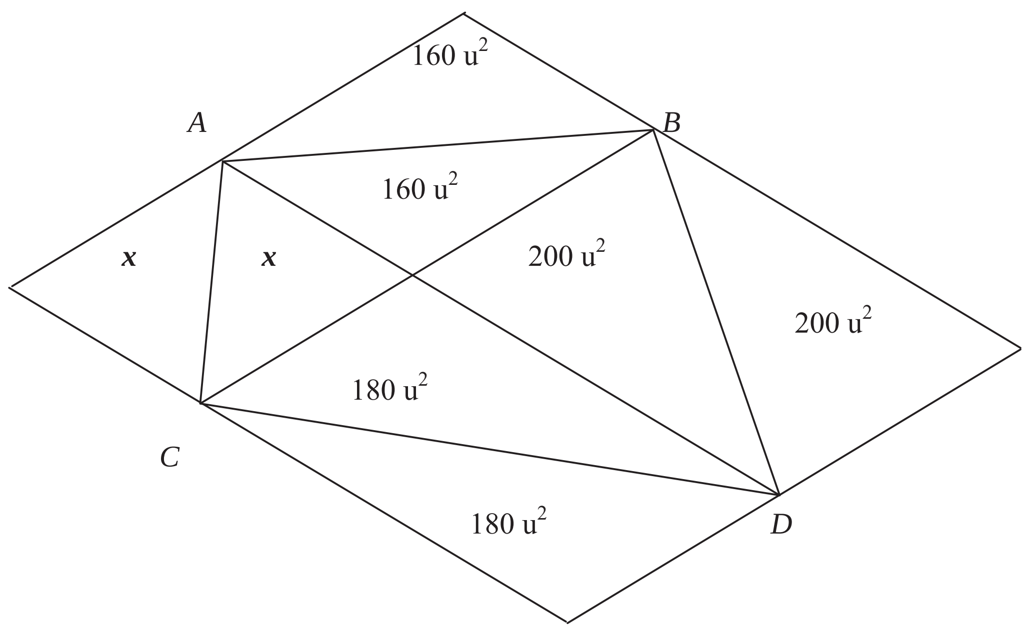


Entonces es inmediato que $\dfrac{x}{10} = \dfrac{60}{25}$, de donde se sigue que $x = 24$. $\blacksquare$

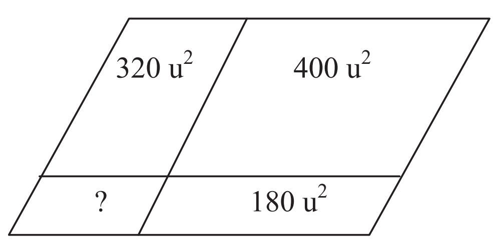
Problema 8. El cuadrilátero *ABCD* es dividido en cuatro triángulos por sus diagonales. Si se conocen las áreas de tres de ellos, ¿cuánto vale el área del cuarto?



Solución: ¿Qué pasa si trazamos las paralelas a las diagonales?



Obtenemos un paralelogramo dividido en cuatro paralelogramos como sigue:



Los dos rectángulos de arriba tienen la misma altura, y los de abajo también, pero la razón entre sus bases es la misma (teorema de Tales), así que

$$\frac{400}{320} = \frac{180}{2x}$$

O sea,

$$\frac{180}{2x} = \frac{5}{4}$$

De donde $2x = 144$ ➔ $x = 72$. Por tanto, el área del cuarto triángulo es 72 u^2.■

Hemos comentado que hacer un dibujo es una estrategia útil. En el problema anterior se dio la figura pero la *idea brillante* fue el trazo de las paralelas a las diagonales. Hecho que, al principio podría no ocurrirse.

Estas rectas paralelas son un elemento auxiliar, ya que no aparecen en el planteamiento original del problema, pero ayudan a resolverlo. Un elemento auxiliar útil suele ser un trazo, una variable muda, una definición o teorema auxiliar, que solamente se use para resolver cierto problema, etc. Estas y otras heurísticas constituyen la *idea brillante* que viene a dar solución a un problema y corresponden a las preguntas que propone Polya: *Mira atentamente la incógnita, ¿Conoces algún teorema relacionado?, dibuja una figura, ¿Qué trazo auxiliar es conveniente?*

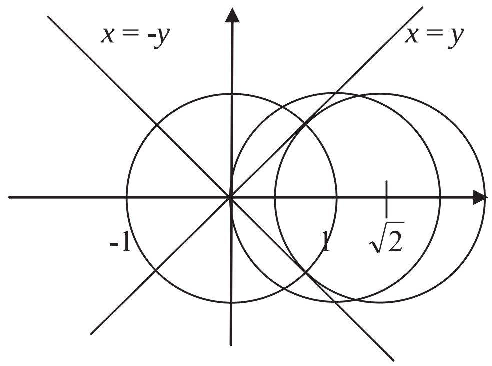
Veamos cómo hacer un dibujo, puede ahorrarnos una gran cantidad de trabajo.

Problema 9. ¿Para qué valores de *a* el sistema de ecuaciones

$$x^2 - y^2 = 0 \ \& \ (x - a)^2 + y^2 = 1$$

tiene cero, una, dos, tres, cuatro o cinco soluciones?

Solución: En este problema vemos un claro ejemplo de cómo el trazo de una figura, la gráfica de las ecuaciones facilita y sobre todo enriquece la solución del problema.



La ecuación $x^2 - y^2 = 0$ representa las rectas $x = y$ & $x = -y$. La ecuación $(x - a)^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia de radio 1 y tiene un centro en $(a, 0)$ que puede moverse sobre el eje X y esa movilidad nos permite visualizar que:

Para $a = \pm\sqrt{2}$ existen 2 soluciones.

Para $|a| > \sqrt{2}$ el sistema no tiene solución.

Para $a = \pm 1$ el sistema tiene 3 soluciones.

Para $-1 < a < 1$, existen 4 soluciones, y

en ningún caso existen cinco soluciones.■

Una habilidad importante y bastante difícil de desarrollar es la capacidad de ***generalización.*** Si observamos que alguna propiedad se satisface en unos casos, por ejemplo, el centro de gravedad de un segmento homogéneo corresponde al centro de gravedad de sus extremos: el punto medio; análogamente, el centro de gravedad de un triángulo homogéneo corresponde al centro de gravedad de sus tres vértices, parece natural suponer que el centro de gravedad de un tetraedro homogéneo deba ser el de sus cuatro vértices, ya que el segmento es la configuración más simple con dos puntos, con tres puntos lo es el triángulo y con cuatro el tetraedro. Empleamos la analogía para atrevernos a lanzar ésta conjetura. Pero ¿cómo probar que podemos hacer ésta generalización? Más adelante, podemos escribir el número de puntos, lados, caras y espacios en cada uno de los objetos: segmento, triángulo y tetraedro y verlos de la siguiente manera

2	1		
3	3	1	
4	6	4	1

Esto nos permite notar que corresponden a los números del triángulo de pascal en el desarrollo del binomio. Aunque, geométricamente no tendría sentido continuar la anterior lista, el triángulo de pascal se completa inductivamente y el teorema del binomio se prueba usando la *inducción matemática.* Éste es un método muy útil para hacer algunas demostraciones, que parte de probar la veracidad de una(s) primera(s) afirmación(es), y lo que se quiere es concluir que, suponiendo que todas las afirmaciones anteriores a una dada son verdaderas, también lo es la propia afirmación.

Otra estrategia heurística general es considerar sub metas que incluyan condiciones parciales. La solución de las sub metas puede servir de base para construir la solución requerida.

Problema 10. Se tiene una cuadrícula de 17×31. ¿Cuántos rectángulos diferentes se pueden dibujar si los lados del rectángulo deben ser líneas de la cuadrícula?

Solución: En este caso conviene resolver el problema general, para una cuadrícula de $m \times n$.

Para $n = 1$, en una cuadricula de $m \times 1$ hay m cuadraditos de 1×1, $m - 1$ rectángulos de 1×2, ..., 1 rectángulo de $1 \times m$, entonces hay $1 + 2 + ... + m = m(m + 1)/2$ rectángulos en total. (Fórmula de Gauss para la suma de los primeros m naturales).

Consideremos ahora una cuadricula de $m \times n$. Esta cuadricula está dividida en n rectángulos de $1 \times n$, así que análogamente al razonamiento de arriba, sabemos que hay $m(m + 1)/2$ rectángulos que se pueden formar con 1, 2, ..., m rectángulos de $1 \times n$. Pero cada rectángulo de $1 \times n$ tiene $n(n + 1)/2$ rectángulos en total, así que el número total de rectángulos debe ser: $\frac{m(m+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{mn(m+1)(n+1)}{4}$. ■

A veces de una simple observación se puede extraer información vital para la solución del problema. Comúnmente se dice que una solución es “bonita” o elegante cuando precisamente se basa en una observación simple que la hace sencilla, pero la cual no tiene una regla que la genere.

Vamos a comentar algunas tácticas cuya aplicación puede ser crucial en la resolución de un problema. Una táctica es un método matemático que tiene una amplia aplicabilidad, pero cuya aplicación es muy específica.

Principio de las casillas. También conocido como principio del palomar. Se basa en el hecho trivial de que si se tiene un número fijo de habitaciones y tenemos más invitados que habitaciones, entonces forzosamente alguno de ellos tendrá que compartir cuarto.

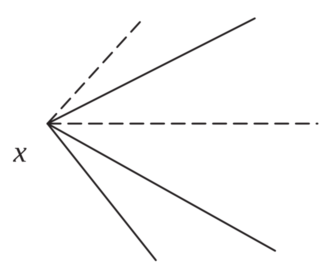
En otras palabras, si se quieren distribuir n objetos en m casillas, con $n > m$, forzosamente habrá al menos una casilla con más de un objeto.

Esta inocente afirmación puede ser de vital importancia para encontrar una solución fuerte.

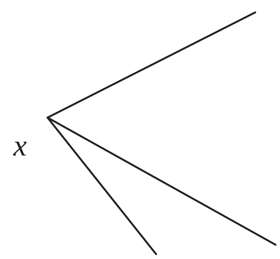
Problema 11. Probar que en cualquier conjunto de 6 personas siempre hay 3 que se conocen todas entre sí o tres tales que ninguna conoce a las otras dos.

Solución: Hagamos un dibujo. Pongamos un punto por cada persona, una línea continua entre dos puntos para indicar que se conocen y una punteada si no se conocen.

Tomemos un punto x y analicemos qué puede pasar con él.



De x deben salir 5 líneas. Una a cada una de las otras personas. Por el principio de las casillas 3 deben ser del mismo tipo (al menos). Sin pérdida de generalidad, supongamos que esas líneas son continuas; es decir, x conoce a otras tres personas.



Si cualesquiera dos de esas tres personas se conocen entre sí, habremos terminado, pues con x tenemos a 3 personas que se conocen entre sí.

Si no, entonces esas tres personas son tales que ninguna conoce a las otras dos. ■

Problema 12. Todos los puntos del plano se colorean de rojo o azul. Probar que hay un segmento unitario cuyos extremos son del mismo color.

Solución. Considérese un triángulo equilátero de lado 1 y nótese que por el principio de las casillas, debe haber un segmento cuyos extremos son del mismo color. ■

El principio extremo. Consiste, como su nombre lo indica, en considerar los casos extremos de una situación, como tomar el punto más cercano, más alejado, o considerar valores máximos o mínimos para alguna variable, o más concretamente considerando elementos x con mayor o menor $p(x)$, donde p suele ser una propiedad cuantificable de x tal como distancia, grado de un polinomio, etc. Centrar la atención en éstos elementos puede permitirnos hacer alguna observación importante para resolver el problema.

Problema 13. Probar que cualquier poliedro tiene al menos dos caras con el mismo número de lados.

Solución: Consideremos la cara con mayor número de lados (principio extremo), digamos n. Esa cara tiene n caras adyacentes y las posibilidades para el número de lados de esas caras son 3, 4, …, n. Por el principio de las casillas hay dos con el mismo número de lados.■

Reducción al absurdo y demostración indirecta. El primero se basa en suponer que un resultado es falso, llegando después a una contradicción. El segundo es simplemente la reformulación de una implicación en términos de su contrarrecíproca.

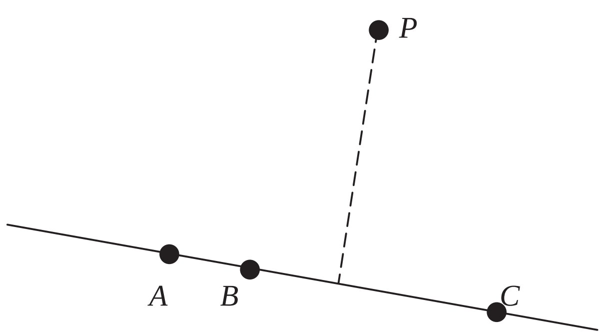
Problema 14. Probar que existe una infinidad de números primos.

Solución: Supongamos que es falso el resultado, es decir que existe una cantidad finita de primos $p_1, \ldots p_k$. Observemos que el número $n = p_1 p_2 \ldots p_k + 1$, por el teorema fundamental de la aritmética, se escribe en forma única como producto de primos. Sea p un primo que divide a n. Por la forma en que hemos construido a n, veamos que p no puede ser ninguno de los primos $p_1, \ldots p_k$, por lo que p es un primo que no está en la lista, contradiciendo el hecho de que solo había k primos.■

En el siguiente problema se aplican el principio extremo y el principio de las casillas en una demostración indirecta.

Problema 15. Problema de Sylvester. Sea S un conjunto finito de puntos tales que para cualesquiera dos siempre existe un tercero alineado con ellos. Probar que todos los puntos son colineales.

Solución: Supongamos que no todos son colineales. De todas las parejas (P, l) donde P es un punto de S y l es una recta formada por otros dos puntos cualesquiera A y B, consideremos una pareja de menor distancia $d(P, l)$.



Sea P' la proyección de P sobre la recta l. Por nuestra hipótesis, sabemos que existe un tercer punto C del conjunto S, que está sobre la línea AB y por el *principio de las casillas* observamos que dos de esos tres puntos, digamos A y B, están del mismo lado de P' y sin pérdida de generalidad, suponemos a B más cerca de P' que A, como se muestra en la figura.

Notemos que de este modo, B es un punto cuya distancia a la recta AP es menor que la distancia de P a l, contradiciendo nuestra suposición de que ésta última era menor. ■

Problema 16. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $n(n+1)(n+2) = (2^p)(3^q)$, donde n, p y q son números naturales?

Solución: Nuevamente comenzamos analizando algunos casos sencillos y observamos que:

i) Para $n = 1$ se tienen los números 1, 2 y 3. Son dos potencias de tres: 3^0 y 3 que encierran una de 2.

ii) Para $n = 2$ se tienen los números 2, 3 y 4. Son dos potencias de 2: 2 y 2^2 que encierran una de 3.

Además de esos dos casos es fácil ver que no hay otro en el que n y $n + 2$ sean ambos potencias de 2 o ambos potencia de 3. Las demás potencias ya están más distantes. Por lo tanto solo hay dos soluciones que se obtienen para $n = 1$ y $n = 2$. ■

Problema 17. ¿Cuál es el coeficiente de a^4b^3c en el desarrollo de $(a + 2b - 11c + 9d)^8$?

Solución: ¿Qué pasa por ejemplo en $(a + b + c)^3$?. ¿Cuál será el coeficiente de a^2b? Veamos que $(a + b + c)^3 = (a + b + c)\,(a + b + c)\,(a + b + c)$. El desarrollo de éste producto será una expresión en la que cada sumando se obtuvo de multiplicar un término de cada uno de los tres factores que tenemos. Aquí estamos *reformulando el problema*, ya que hallar el coeficiente de a^2b se traduce en escoger dos a y una b. Como tenemos tres factores, podemos escoger dos a's de $\binom{3}{2}$ maneras. De éste modo habremos escogido ya término en dos de los factores, por lo que queda uno para escoger a la b. Es decir, hay $\binom{1}{1}$ manera de escoger a la b.

Análogamente, para saber el coeficiente de x^4y^3z en $(x + y + z + w)^8$, tendremos:

Maneras de escoger x^4: $\binom{8}{4}$

Maneras de escoger y^3: $\binom{4}{3}$

Maneras de escoger z: $\binom{1}{1}$.

Por tanto hay $\binom{8}{4}\binom{4}{3}\binom{1}{1} = 280$ maneras de formar el producto x^4y^3z. Si hacemos $x = a$, $y = 2b$, $z = -11c$, tendremos $280a^4(2b)^3(-11c) = 24{,}640a^4b^3c$.■

Problema 18. Probar que el producto de cuatro números naturales consecutivos no puede ser el cuadrado de un entero.

Solución: Observemos que nos piden probar que algo no pasa. Dividiremos el problema en: **hipótesis** y **conclusión.** La hipótesis es: Sea n un número natural. La conclusión es $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ no puede ser el cuadrado de un entero.

Tomemos algunos casos particulares. ¿Qué pasa si n =1, 2, 3?

Llamemos $f(n) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

Para $n = 1$, $f(n) = 24$

Para $n = 2$, $f(n) = 120$

Para $n = 3$, $f(n) = 360$

Para $n = 4$, $f(n) = 840$

Para $n = 5$, $f(n) = 1680$

Para $n = 10$, $f(n) = 17\ 160$

¿Hay algún patrón? Notemos que, al menos en estos casos, $f(n)$ parece ser el cuadrado de un entero disminuido en una unidad.

Tenemos entonces una conjetura que, de ser cierta implica la finalización de nuestra prueba ya que si analizamos la secuencia de enteros 1, 4, 9, 16, 25, … es fácil ver que no hay números que difieran en una unidad, en otras palabras, no hay consecutivos.

A este tipo de observaciones en una prueba les conocemos como penúltimo paso. Consiste en observar un hecho anterior al que se quiere probar que implique inmediatamente la prueba que queremos.

Procedamos entonces a probar que $n(n+1)(n+2)(n+3)$ es el cuadrado de un entero disminuido en una unidad. En otras palabras, $n(n+1)(n+2)(n+3)+1$ es el cuadrado de un entero.

¿Qué pasa si desarrollamos?

Veamos que si agrupamos los factores como sigue, obtenemos una cierta "simetría".

$$[n(n+3)][(n+2)(n+1)]+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$$

Para ayudar un poco a esa simetría escribamos:

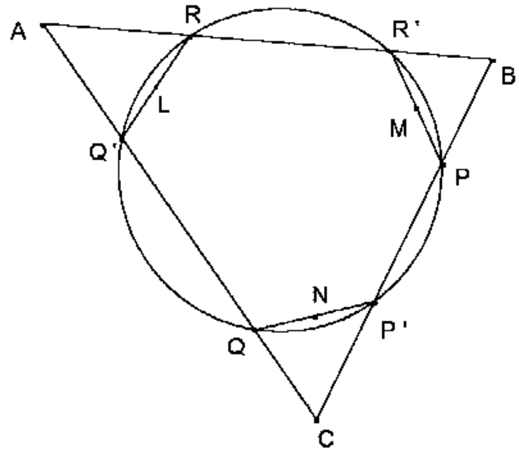
$$[(n^2+3n+1)-1][(n^2+3n+1)+1]+1$$

De ese modo podemos escribir esto como una diferencia de cuadrados:

$$(n^2+3n+1)^2-1+1=(n^2+3n+1)^2. \blacksquare$$

El siguiente problema fue propuesto en la etapa final de la XXIII Olimpiada Mexicana de Matemáticas en el Estado de Michoacán. Discutiremos dos alternativas de solución ya que en éstas expondremos distintas heurísticas.

Problema 19. En la figura, ABC es un triángulo y un círculo corta a los lados en los puntos P, P', Q, Q', R y R'. Se tiene además que $|P'Q|=|Q'R|=|R'P|$ y que L, M y N son los puntos medios de los segmentos $Q'R$, $R'P$ y $P'Q$, respectivamente. Probar que las rectas AL, BM y CN son concurrentes.



Primera solución: Probaremos que LM es paralela a AB, del mismo modo que MN con BC y que LN con AC. Así, tendremos que los triángulos ABC y LMN son semejantes con lados paralelos y por tanto las rectas que unen vértices correspondientes son concurrentes.

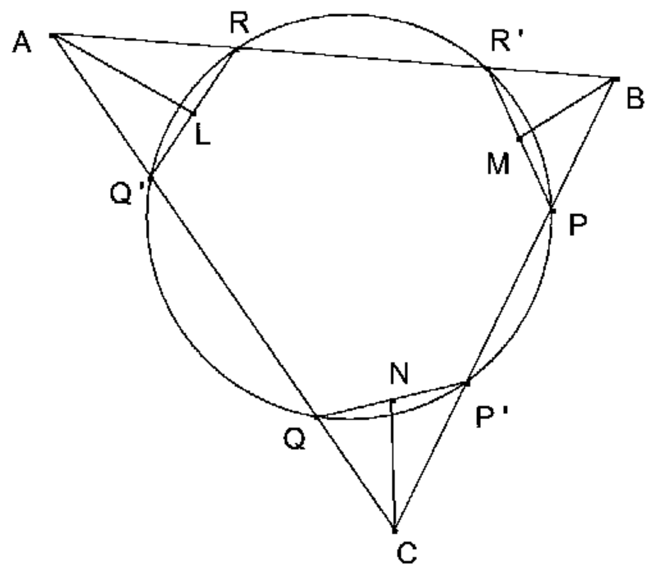
Pongamos de manifiesto que esta manera de atacar este problema es identificando una sub meta, a saber, probar la semejanza de dos triángulos basta para hacer evidente el aserto que queremos.

Para esto tracemos las rectas $Q'P$ y PR. Tenemos entonces que $<Q'PR = <R'RP$ por subtender el mismo arco de circunferencia. Así, $Q'P$ es paralela a AB y dado que L y M son puntos medios de segmentos entre paralelas, también LM es paralela a ellas.

Análogamente se concluye el paralelismo de MN con BC y de LN con AC.■

A continuación se expone otra alternativa de solución que se vale de algunos resultados importantes de la geometría euclidiana y moderna.

Segunda solución: Tracemos las rectas AL, BM y CN y consideremos los ángulos $\alpha_1 = <Q'AL$, $\alpha_2 = <LAR$, $a_1 = <LQ'A$, $a_2 = <ARL$, $\beta_1 = <R'BM$, $\beta_2 = <MBP$, $b_1 = <MR'B$, $b_2 = <BPM$, $\delta_1 = <P'CN$, $\delta_2 = <NCQ$, $c_1 = <NP'C$ y $c_2 = <CQN$ que se forman como se muestra en la figura.



1er paso. Utilizando un teorema de la Geometría Euclidiana que afirma que la medida de un ángulo formado por dos cuerdas de una circunferencia es igual a la semisuma de los arcos subtendidos por dichas cuerdas tenemos que:

$$<a_1 = \frac{\overset{\frown}{Q'R} + \overset{\frown}{QQ'}}{2}$$

y también

$$<c_2 = \frac{\overset{\frown}{P'Q} + \overset{\frown}{QQ'}}{2}$$

Pero al ser iguales $Q'R$ y $P'Q$ se tiene que $<a_1 = <c_2$ y por tanto sen a_1 = sen c_2

Similarmente se tiene $<b_1 = <a_2$ y $<c_1 = <b_2$ y por tanto sen b_1 = sen a_2 y también sen c_1 = sen b_2.

2do paso. Empleando la Ley de los Senos en el triángulo $AQ'L$ observamos que

$$\frac{AL}{sen a_1} = \frac{Q'L}{sen \alpha_1}$$

En el triángulo ALR,

$$\frac{AL}{sen a_2} = \frac{LR}{sen \alpha_2}$$

Por lo que

$$\frac{AL}{Q'L} = \frac{sen a_1}{sen \alpha_1} \quad \text{y} \quad \frac{AL}{LR} = \frac{sen a_2}{sen \alpha_2}$$

Entonces,

$$\frac{sen a_1}{sen a_2} = \frac{sen \alpha_1}{sen \alpha_2} \qquad (1)$$

Similarmente se tiene

$$\frac{sen b_1}{sen b_2} = \frac{sen \beta_1}{sen \beta_2} \quad (2) \qquad \text{y} \qquad \frac{sen c_1}{sen c_2} = \frac{sen \delta_1}{sen \delta_2} \quad (3)$$

3er paso. Multiplicamos (1), (2) y (3)

$$\frac{sen a_1}{sen a_2} \frac{sen b_1}{sen b_2} \frac{sen c_1}{sen c_2} = \frac{sen \alpha_1}{sen \alpha_2} \frac{sen \beta_1}{sen \beta_2} \frac{sen \delta_1}{sen \delta_2}$$

En virtud de las igualdades obtenidas en el 1er paso, el primer lado de la igualdad vale 1

$$\frac{sen \alpha_1}{sen \alpha_2} \frac{sen \beta_1}{sen \beta_2} \frac{sen \delta_1}{sen \delta_2} = 1$$

Y por el Teorema de Ceva en su forma trigonométrica, la igualdad anterior implica que

AL, *BM* y *CN* son concurrentes. ■

Problema 20. Encontrar todos los números enteros con la propiedad de que tengan al menos un múltiplo cuyo primer dígito es 1. Por ejemplo, el 37 cumple la propiedad porque 148 es múltiplo de 37 y comienza con 1.

Solución: Veamos que todos los números enteros distintos de 0 cumplen la propiedad. Será suficiente probarlo para los positivos. Sea k cualquier número entero positivo.

Si $k < 10^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ consideremos $r \in \mathbb{Q}$ tal que $kr = 10^n$. Veamos que $r = [r] + \alpha$, donde $0 < \alpha < 1$ y $[r]$ es la parte entera de r. Entonces $k([r] + \alpha) = 10^n$ y por tanto $k[r] < 10^n$.

Como $k < 10^n$, se tiene que

$$k([r]+ \alpha) = 10^n < k([r] + 1) < 2(10^n)$$

por lo que $k([r] + 1)$ es un múltiplo de k que comienza con 1.

Si $k = 10^n$ entonces k mismo es un múltiplo de k que comienza con 1. También $10k = 10^{n+1}$ también lo es. Por lo tanto cualquier k positivo cumple la propiedad. ■

En el problema anterior hemos dado la prueba del caso general ya terminada. Pero para llegar a construirla, quizá sea necesario comenzar explorando unos casos particulares y así darnos una idea de la dirección que se debe seguir.

Problema 21. ¿Cuántos cuadrados perfectos menores o iguales que 1000 tienen exactamente 15 divisores?

Solución: Si factorizamos cualquier número como producto de potencias de primos podemos observar que la cantidad de divisores es el producto de los sucesores de cada exponente. Por ejemplo, 12 es igual a $2^2 \times 3$. En un divisor de 12 el 2 puede aparecer elevado a las potencias 0, 1 o 2 (tres posibilidades), y el 3 puede aparecer elevado a las potencias 0 o 1 (dos posibilidades). Los posibles divisores de 12 se obtienen al combinar las posibles potencias para formar el producto de una potencia de 2 por una de 3.

Si no se conoce o no se puede observar este resultado, puede llegar a construirse después de examinar algunos casos particulares:

Veamos que hay 31 números cuadrados perfectos entre 1 y 1000, ya que $31^2 = 961$ y $32^2 = 1024 > 1000$.

$961 = 31^2$, de modo que solo existen tres divisores de 961: 1, 31 y 31^2.

$900 = 30^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$.

Al preguntarnos por la cantidad de divisores del número anterior, podríamos empezar a conjeturar el resultado que ya mencionamos: el número de divisores es igual al producto de los sucesores de cada exponente. Esto puede se puede probar generalizando el mismo argumento de conteo que usamos con el 12.

Por lo anterior, si un número tiene 15 divisores puede ser de la forma p^0q^{14} ó bien p^2q^4, donde p y q son primos. La primera posibilidad se descarta fácilmente por lo que el número debe ser de la forma p^2q^4. Esto nos dice que si un número tiene 15 divisores también es cuadrado, entonces basta con contar los números con 15 divisores que son menores que 1000.

Examinando se obtiene que la q no puede ser un número mayor que 3 y que p no puede ser mayor que 7. Por tanto las soluciones posibles son $3^2\times2^4$, $5^2\times2^4$, $7^2\times2^4$ y $2^2\times3^4$. Concluimos que hay 4 números menores o iguales que 1000 que tienen exactamente 15 divisores. ■

Problema 22. Sean z, w dos números complejos de norma 1. Probar que $(z + w)/(1 + zw)$ es un numero real.

Solución: Denotaremos por $\overline{z}$ al conjugado de z. Al multiplicar numerador y denominador por el conjugado de $1 + zw$ que es $\overline{zw} + 1$ el denominador se convierte en un número real.

Así que sólo hay que probar que el numerador $(z + w)(\overline{zw} + 1)$ es un numero real.

Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned}(z + w)(\overline{zw} + 1) &= z\,\overline{zw} + z + w\,\overline{zw} + w\\ &= z\,\overline{z}\,\overline{w} + z + w\,\overline{w}\,\overline{z} + w\\ &= |z|^2\,\overline{w} + z + |w|^2\,\overline{z} + w,\end{aligned}$$

Como z, w son de norma 1 se tiene:

$$= \overline{w} + z + \overline{z} + w = w + \overline{w} + z + \overline{z}$$

y esto último es real dado que un complejo sumado con su conjugado siempre es un número real. ■

En el problema anterior la táctica empleada es la multiplicación por 1 al momento de multiplicar numerador y denominador por el conjugado del número complejo $1 + zw$. Se hace uso del recurso del conjugado de un número complejo y las propiedades que tiene, como son: el conjugado de una suma o producto, es la suma o producto de los conjugados, y el conjugado de un número real es el mismo número real. Una vez que se identifican estas estrategias, la solución del problema se vuelve un ejercicio rutinario.

En los siguientes dos problemas, la estrategia seguida es estudiar las relaciones dadas en unos casos particulares sencillos y después tratar de generalizar ese comportamiento.

Problema 23. Definimos la función φ de Euler en el conjunto de números positivos como:
$\varphi(n) = \#\ \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq n, \text{mcd}\ (i, n) = 1\}$. Determinar el valor de $\varphi(p^m)$ donde p es un primo y m un entero positivo cualquiera.

Solución: Analicemos un caso particular que no sea tan grande, pero que nos permita buscar y establecer relaciones.

Sea $p = 3$ y $m = 3$. Para hallar $\varphi(3^3)$ observemos, los no primos relativos con 3^3 son claramente los múltiplos de 3, así que hay que contar el número de múltiplos de 3 que son menores o iguales que 27 y restarlo de 27. Como 27 es él mismo un múltiplo de 3, hay $27/3 = 9$ múltiplos de 3 que son menores o iguales que 27. Así, $\varphi(3^3) = 27 - 9 = 18$.

Una vez entendido esto podemos usar el mismo argumento para trabajar el caso general.

Sea $\Delta(n) = \#\{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq i \leq n, \text{mcd}\ (i, n) \neq 1\}$. Los que no son primos relativos con p^m son $p, 2p, 3p, \dots, (p^{m-1})p$, que son de la forma rp con $1 \leq r \leq p^{m-1}$, es decir mcd(rp, p^m) $\neq 1$. Así que $\Delta(p^m) = p^{m-1}$. Entonces $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1}$.■

Problema 24. Considérense los números naturales desde 10^k hasta $10^{k+1} - 1$. Si se escriben estos números uno continuación del otro se forma el numero $N(k) = 10^k\ (10^k + 1) \dots 10^{k+1} - 1$. Así,

$N(0) = 123456789$

$N(1) = 101112131415....9899$

$N(2) = 100101102...998999$

¿Cuántos ceros tiene $N(k)$?

Solución: El plan a seguir será contar los ceros dependiendo de la posición que ocupan en el número al que pertenecen (unidades, decenas, etc.). Nuevamente analicemos primero qué pasa en los casos $k = 1$ y $k = 2$.

En $N(1)$ hay 9 ceros, solo en las unidades de los números originales: 10, 20, … , 90. Veamos qué pasa en $N(2)$. Para ceros en las unidades buscamos números de la forma AB0. A tiene 9 valores posibles y B tiene 10, así que hay 90 posibilidades, es decir 90 ceros.

Para ceros en las decenas buscamos números de la forma A0B. A tiene otra vez 9 posibilidades y B tiene 10), así que hay otros 90 ceros. N(2) tiene 180 ceros.

En $N(k)$: Para ceros en las unidades buscamos números de la forma ABC...Z0. A tiene 9 posibilidades y el resto tiene 10, así que; como son k cifras, hay $9\times10^{k-2}$ ceros. Lo mismo para ceros en las $k - 1$ posiciones restantes.

En total hay: $(k - 1) \times 9 \times 10^{k-2}$ ceros.■

El siguiente problema ilustra cómo usar adecuadamente la hipótesis de un problema y “jugar” con las propiedades algebraicas sencillas nos arroja la solución.

Problema 25. Sea G un grupo en el que todo elemento es igual a su propio inverso (en otras palabras $x^{-1} = x$ para todo x en G). Probar que G es abeliano (conmutativo).

Demostración: Para cualesquiera x, y elementos de G se cumple que por hipótesis:

$(x\,y)^2 = (y\,x)^2 = 1$ ……………………. Hipótesis.

$(x\,y)(x\,y) = (y\,x)(y\,x)$ …………………….. Descomponiendo los cuadrados.

$(x\,y)(x\,y)^2 = (y\,x)(y\,x)(x\,y)$ .... Multiplicando por $(x\,y)$ por la derecha.

$x\,y = (y\,x)\,y\,(x\,x)\,y$ .... Asociando y usando que $(x\,y)^2 = 1$

$x\,y = (y\,x)\,y\,(1)\,y = (y\,x)(y\,y) = y\,x$ .... Usando nuevamente la hipótesis.■

Problema 26. ¿Cuántos términos tiene $(a + b + c + d + e)^{15}$?

Solución: Cada término es de la forma $a^r b^s c^t d^u e^v$ donde $r + s + t + u + v = 15$. Entonces el problema equivale a contar los conjuntos de cinco elementos enteros mayores o iguales que cero, cuya suma sea igual a 15; esto, a su vez puede reformularse en términos de colocar 4 separadores para separar 15 casillas. Lo cual puede hacerse de $\binom{19}{4}$ maneras posibles. Entonces el número de términos es $\binom{19}{4}$. ■

Aquí hemos reformulado el problema en términos de separadores y casillas.

Problema 27. Hallar todos los z enteros, tales que 92 divide a $z^{23} + 68z$.

Solución: Como $92 = 2 \times 2 \times 23$, entonces basta ver que 4 y 23 dividan a $z^{23} + 68z$. Como 4 divide a 68, también debe dividir a z^{23}; y para ello es suficiente con que z sea par. Ahora bien, aquí es conveniente trabajar con congruencias.

Veamos que $z^{23} + 68z$ debe ser congruente con 0 módulo 23. Pero 68 es congruente con –1 módulo 23, entonces podemos remplazar esa congruencia con: $z^{23} - z$ congruente con 0 módulo 23. Por el Pequeño Teorema de Fermat sabemos que esa congruencia se cumple para cualquier entero. Entonces basta con que z sea par. La solución es $z = 2a$, para cualquier a entero. ■

En el problema anterior hacemos uso de un recurso poderoso: el pequeño teorema de Fermat. Hagamos también énfasis en la conveniencia de reformular la divisibilidad en términos de congruencias.

En los siguientes dos problemas ilustramos ejemplos de demostración que se reducen a hacer una construcción de un elemento que satisfaga las propiedades necesarias para probar la afirmación. Esto puede ser más o menos difícil y requerir de ingenio, creatividad y uso de recursos.

Problema 28. Probar que existen números primos seguidos tan distantes como se quiera. Por ejemplo, es posible encontrar una sucesión de un millón de números consecutivos que sean todos compuestos.

Solución: Queremos construir una sucesión finita de números consecutivos garantizando que sean compuestos. ¿Hay alguna manera de garantizar que sean todos compuestos? Observemos que $n! + 2$, $n! + 3$, … , $n! + n$ son $n - 1$ números consecutivos que son todos compuestos. Por lo que la distancia entre el primo anterior a $n! + 2$ y el primo que le sigue es por lo menos n. Como n es tan grande como se quiera entonces hay huecos entre primos tan grandes como se desee. ($n!$ es el factorial de n). ■

Aquí el elemento clave fue el factorial de n para garantizar que todos los elementos de la sucesión finita fueran compuestos.

Problema 29. Un campo F es algebraicamente cerrado si todo polinomio con coeficientes en F tiene al menos una raíz en F. El ejemplo más conocido de campo algebraicamente cerrado es el campo de los números complejos. Probar que un campo finito no puede ser algebraicamente cerrado.

Solución: Sea $K = \{a_1, a_2, \ldots ,a_r\}$ un campo finito. Podemos suponer $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Queremos construir un polinomio con coeficientes en K que no tenga ninguna raíz en K. Observemos que el polinomio

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_r) + a_1$$

cumple que $P(a_j) = a_1 \neq 0$, por tanto no tiene raíces. ■

Finalmente hemos de concluir con un problema de sucesiones en el que destacamos la aplicación de varias de las estrategias, tácticas y herramientas que se han comentado en este trabajo.

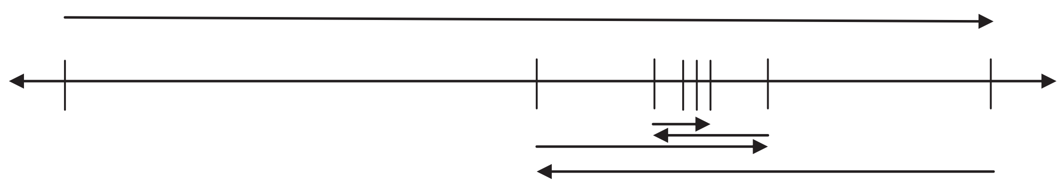
Problema 30. Sean a_0 y a_1 dos números reales dados. Definamos la sucesión $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-2} + a_{n-1}\right)$, con $n \geq 2$. ¿Esta sucesión es convergente? ¿Cuál es su límite?

Solución: Vamos a ilustrar aquí el uso de varias de las heurísticas que hemos comentado, guiadas por una serie preguntas que dirigen el proceso metacognitivo de quien resuelve el problema.

Casos particulares. Sea por ejemplo $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Esto nos permitirá ver lo que pasa para esta particular sucesión, ya que con estos valores, la sucesión se transforma en 0, 1, ½, ¾, 5/8, 11/16, 21/32, etc.

¿Observas algún patrón? Cada término de la sucesión es el promedio de los dos anteriores y, se va alternando la posición con respecto al término anterior: primero 1 está a la derecha de 0, ½ está a la izquierda de 1, ¾ está a la derecha de ½, etcétera.

¿Qué pasa gráficamente? Si reformulamos gráficamente vemos que: El primer término es 0, luego avanzamos 1 hacia la derecha, ½ hacia la izquierda, ¼ hacia la derecha, 1/8 hacia la izquierda



Esta reformulación nos sugiere intuitivamente que sí existe el límite, ya que los términos se van acotando por la derecha y por la izquierda. De hecho podemos reformular nuevamente el problema y notar que el límite, en caso de existir, sería igual a la suma 0 + 1 – ½ + ¼ - 1/8 + 1/16 – 1/32 + …

Hagamos un reacomodo: La anterior es una suma infinita de términos positivos y negativos. Si separamos los positivos y los negativos tendremos que la suma puede escribirse como:

0 + 1 – ½ + ¼ - 1/8 + 1/16 – 1/32 + … = 0 + (2/2 – ½) + (2/8 - 1/8) + (2/32 – 1/32) + …

Que equivale a 0 + ½ + 1/8 + 1/32 + … . Que es una suma de potencias impares de ½.

¿Conoces algún problema parecido? Ya vimos en uno de los ejemplos que pusimos al principio del capítulo, que la suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica es $S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^{n-1} = \dfrac{a_1 - a_1 r^n}{1-r}$.

Aquí, $a_1 = 1$ y la razón común es r = ½ < 1, de donde se ve que al crecer la potencia *n*, decrece indefinidamente r^n de modo que al tener una infinidad de términos la suma es $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$.

¿Se puede generalizar esto? De hecho vemos que la reformulación en la recta real es la misma para cualesquiera a_0 y a_1. La única variación es que a_0 podría estar a la izquierda o a la derecha de a_1, siendo en cada caso la respuesta $a_0 + \frac{2}{3}(a_1 - a_0)$ ó $a_1 + \frac{2}{3}(a_0 - a_1)$. ■

Capítulo 4.

Conclusiones.

Las matemáticas ocupan una parte importante del currículum escolar en los diferentes sistemas educativos. La mayoría de las personas que acudieron a la escuela, hayan terminado o no una carrera profesional, tuvieron la necesidad de estudiar varios temas de matemáticas en las distintas materias o asignaturas que aparecen, prácticamente, en todos los grados escolares de los niveles básicos y medio superior; en el nivel superior sólo algunas pocas carreras las excluyen de su plan de estudios. De ahí que resulte razonable esperar un cierto nivel en el manejo de argumentos matemáticos por parte de las personas; pero, ¿cómo lograr un mejor aprendizaje de los estudiantes?

Durante muchos años, instituciones y profesores de matemáticas han realizado acciones por atender esta pregunta; sin embargo, resulta evidente que en la mayoría de los casos el aprendizaje de los estudiantes se ha ido por un solo rumbo: es de carácter memorístico, repetitivo y basado en problemas rutinarios. Desde luego, este tipo de aprendizaje no se da por sí solo, es resultado de un proceso de enseñanza.

Por ello, si las matemáticas juegan un papel fundamental en la formación de las personas, la enseñanza debe proporcionar al estudiante oportunidades para que desarrolle su pensamiento matemático (Schoenfeld, 1994), encauzando la enseñanza más hacia actividades de resolución de problemas, en lugar de solamente hacia la memorización de conceptos y algoritmos. Sin duda, este proceso le permite al estudiante adquirir una visión mucho más rica e interesante de las matemáticas, permitiendo robustecer su conocimiento matemático.

Así, en relación a la pregunta planteada, podemos decir que un mejor aprendizaje de las matemáticas se logra mediante la combinación adecuada de estrategias heurísticas, el uso de recursos matemáticos y el desarrollo de una actitud inquisitiva, por parte del estudiante, hacia las matemáticas. Las preguntas planteadas por Polya (1945) constituyen una buena guía para el desarrollo de esa combinación de la que se habla y de la actitud inquisitiva, con preguntas como ¿qué pasa si …?, ¿qué problemas similares he resuelto antes?, ¿qué es lo que me preguntan?, ¿puedo subdividir el problema en varios más simples?, etc.

Es conveniente que quienes imparten clases conozcan los aspectos fundamentales de la resolución de problemas y los beneficios que trae consigo para el aprendizaje; para así orientar la instrucción, dando a los estudiantes la oportunidad de tener un contacto real con las matemáticas.

Asimismo, quizá también sea importante que los contenidos curriculares sean organizados de manera tal que se puedan abordar mediante resolución de problemas. Lo fundamental es que el profesor de matemáticas aproveche cualquier situación para problematizar la enseñanza; es decir, ir cubriendo los contenidos resolviendo problemas que involucren los conceptos fundamentales asociados. Este es un camino a lograr un aprendizaje con entendimiento, que se caracteriza por ser rico en relaciones y bien estructurado (Hiebert y Carpenter, 1992), ingredientes fundamentales para una comprensión profunda de las matemáticas.

Los problemas que se aborden en clase deben ser atractivos para los estudiantes, que puedan resolverse mediante diferentes acercamientos, que permitan revelar lo que lo que ya saben y los aliente a investigar lo que desconocen, mediante el estudio, la discusión y el intercambio de experiencias. Deben seleccionarse (o diseñarse) cuidadosamente para que no involucren conceptos y procedimientos muy sofisticados, a los que recurre un experto; es deseable que el enunciado sea interesante y que invite a los estudiantes a invertir tiempo y esfuerzo para resolverlos, ya sea de manera individual o colectiva. Se trata de que estos problemas, derivado de un proceso de exploración, alienten la aplicación de estrategias heurística y el uso de recursos matemáticos y, en su caso, apropiarse de los recursos y estrategias con los que no cuentan.

Podemos decir, de acuerdo con los estándares establecidos por la NCTM (2000), que los estudiantes irán aprendiendo matemáticas en la medida que sean capaces de resolver problemas rutinarios y, cada vez más, problemas no rutinarios, que incluyan conceptos fundamentales del currículo, desarrollando sus habilidades de resolución de problemas, de argumentación, de comunicación y justificación de resultados, estableciendo conexiones entre varios conceptos y temas, así como el uso de distintas representaciones.

En este tenor, vale mucho la pena concentrar esfuerzos para seleccionar y diseñar actividades y problemas que rompan con las antiguas concepciones rígidas y frías de las matemáticas, que robustezcan la comprensión matemáticas de los estudiantes que tienen facilidad para resolver problemas, pero que también ayuden a los estudiantes "promedio" a desarrollar un pensamiento creativo, proporcionándoles las herramientas necesarias para que los estudiantes sean competentes en la resolución de problemas y, posiblemente, los invite a seguir avanzando en la aventura del estudio y aprendizaje de las matemáticas.

Referencias

Benacerraf, P., Putnam, H. (1964). *Philosophy of mathematics*. Prentice-Hall, Inc., Engle- wood Cliffs, New Jersey.

Fredericksen, N. (1984). *The real test bias: Influences on teaching and learning*. American Psychologist, 39, 193-202.

Hiebert, J., Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co.

Kilpatrick, J. (1985). *Academic preparation in mathematics: teaching for transition from high school to college*. College Entrance Examination Board, New York.

Kitcher, P. (1984). *Species*. Philosophy of Science 51 (2), pp. 308-333.

Kuhn, T. S. (1962). *Segundos pensamientos sobre paradigmas*. Editorial Tecnos S.A., Madrid, España.

Lakatos, I. (1987). *Historia de la Ciencia y sus Reconstrucciones Racionales*. Editorial Tecnos S.A., Madrid, España.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Desing in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Mahwa, NJ: Laurence Erlbaum Associates, Inc. Publishers.

Munkres, J.R. (2000). *Topology,* Massachusetts Institute of Technology, 2ª edición.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards in School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Pérez, S. M.L. (2009). *Combinatoria,* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 3ª edición.

Pérez, S. M.L. (2009). *Teoría de Números,* Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas, Instituto de Matemáticas, UNAM, 2ª edición.

Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

Popper, K. (1972). *Conjeturas y Refutaciones*. Ediciones PAIDOS, Barcelona, España.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Santos, T., L.M. (2007). La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos. Editorial Trillas. México.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando, Fla.: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp.1-13). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouwns (Ed.), *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co.

Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1998). Reflections on a course in mathematical problem solving. *Research in Collegiate Mathematics Education III*., pp. 81-113.

Silver, E. A. (1982). *Thinking about problem solving: Toward understanding of metacognitive aspects of problem solving*. Paper presented at the conference on thinking, Suva, Fiji. January.

Steen, L. A. (Ed.). (1990). *On the shoulders of giants. New approaches to numeracy*. Washington, D. C.: National Research Council.

Zeitz, P. (1999). *The Art and Craft of Problem Solving.* New York: John Wiley & Sons, Inc.