Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

El Operador de Dirac en $\mathbb{S}^2$ en coordenadas locales

TESIS

Para obtener el título de

Licenciado en ciencias físico matemáticas

Presenta

Alfonso Ortiz Ávila

asesor

Dr. Elmar Wagner

Instituto de Física y Matemáticas UMSNH

Morelia, Michoacán, enero de 2012

Introducción

Como se puede ver en [4] y en [2], el operador de Dirac en variedades Riemannianas es bien conocido desde hace tiempo. El principal objetivo de esta tesis es presentar de manera explícita el operador de Dirac en la 2-esfera ($\mathbb{S}^2$), lo cual quiere decir que todas las construcciones hechas enfocadas a esto, serán en términos de un atlas para la esfera tomado de manera apropiada. Este resultado, si bien se puede consultar en la bibliografía antes citada, difiere del ahí presentado en el sentido de que, con nuestro operador de Dirac es posible hacer cálculos con secciones específicas del haz espinorial de $\mathbb{S}^2$.

Una de las motivaciones de estudiar el operador de Dirac es dar un significado a la raíz cuadrada del Laplaciano. En $\mathbb{R}^2$, el Laplaciano es definido por

$$\Delta = -(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}),$$

proponiendo el operador

$$D = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

obtenemos

$$D^2 = (\gamma_1)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (\gamma_2)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Entonces γ_1 y γ_2 tienen que satisfacer $(\gamma_1)^2 = (\gamma_2)^2 = -\mathrm{I}$ y $\gamma_2\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 = 0$. De donde evidentemente γ_1 y γ_2 no pueden ser números complejos. Si definimos

$$\gamma_1 := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y el operador

$$P = \gamma_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma_2 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

podemos observar que $\gamma_1^2 = -\mathrm{I} = \gamma_2^2$, $\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2\gamma_1 = 0$ y que

$$P^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_2} = \Delta,$$

entonces P es una raíz cuadrada del operador de Laplace en $\mathbb{R}^2$.

Dado que $\mathbb{S}^2$, es una variedad diferenciable de dos dimensiones que no es difeomorfa a $\mathbb{R}^2$, la definición del operador de Dirac en $\mathbb{S}^2$ debe ser compatible con el cambio entre cartas, con lo cual definiremos de manera global al operador de Dirac en $\mathbb{S}^2$. El operador de Dirac en $\mathbb{S}^2$ actúa en un haz lineal de fibra $\mathbb{C}^2$, al que llamaremos haz espinorial denotado por S, el cual es la suma directa de dos haces lineales complejos no triviales S^+ y S^-, construidos a partir del haz tangente de $\mathbb{S}^2$.

En el primer capítulo de esta tesis tratamos el material requerido para hacer la discusión acerca de haces vectoriales para una variedad, así como las herramientas necesarias para realizar construcciones posteriores, en las que daremos de manera explícita el haz tangente de $\mathbb{S}^2$ (capítulo 2) y los haces S^+, S^- y S (capítulo 4). El capítulo 3 trata acerca de la derivada covariante y del transporte paralelo, el cual es de suma importancia en el capítulo final, en el que se define una derivada covariante para el haz espinorial y es con esto que finalmente definimos el operador de Dirac para secciones del haz espinorial de $\mathbb{S}^2$ en coordenadas locales.

En esta tesis no revisamos las teorías correspondiente a haces principales y Álgebras de Clifford, que es con lo cual se define usualmente al operador de Dirac en una variedad de espín, esto con la finalidad de minimizar la cantidad de material teórico incluído en la presente tésis.

Índice general

Capítulo 1

Variedades diferenciables

1.1. Variedades

Definición 1.1.1 *Una variedad M es un espacio topológico Hausdorff conexo, tal que para cada $x \in M$ existe una vecindad abierta de x homeomorfa a un abierto de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 1.1.2 *Para $p \in \mathbb{N}$ y M variedad, un atlas de clase C^p es una familia de parejas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ tal que los U_i forman una cubierta abierta para M, cada $\phi_i : U_i \to \Omega_i$ es un homeomorfismo entre U_i y Ω_i, donde Ω_i es subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, y tal que cada vez que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se tiene que*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$$

es un difeomorfismo de clase C^p.

A la pareja (U_i, ϕ_i) se le llama carta para M y a las funciones $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ se les llama funciones de cambio de carta.

Decimos que M tiene la estructura de una variedad diferenciable de clase C^p si existe un atlas tal que toda función de cambio de carta es de clase C^p. Si las funciones de cambio de carta son de clase C^∞ diremos que M es suave o, simplemente, que M es diferenciable. En lo sucesivo, todas las variedades que consideraremos serán variedades diferenciables.

Definición 1.1.3 *Sean M, N variedades diferenciables, $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$, $\{(V_i, \psi_i)\}_{j \in J}$ atlas para M y N respectivamente, decimos que la función $f : N \to M$ es diferenciable si*

$$\phi_i \circ f \circ \psi_j^{-1} \text{ (cada vez que la composición tenga sentido)}$$

es diferenciable como función de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ para todo $i \in I$ y $j \in J$, donde $n = dim(N)$ y $m = dim(M)$.

Denotamos por $C^\infty(M)$ el conjunto de todas las funciones de clase C^∞ definidas en M con valores en $\mathbb{R}$.

1.2. Haz tangente de una variedad.

Definición 1.2.1 *Una curva diferenciable c en la variedad M es una función*

$$c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$$

que es diferenciable en el sentido de la definición 1.1.3.

Definición 1.2.2 *Dada la carta* (U, ϕ) *para* M*, un vector tangente a* M *en el punto* $p \in M$ *es una clase de equivalencia de curvas diferenciables en* M*, con la propiedad* $c(0) = p$*, definida por:*

$$c \sim \gamma \iff (\phi \circ c)'(0) = (\phi \circ \gamma)'(0)$$

para alguna carta (U, ϕ) *con* $p \in U$*.*

Observación 1.2.3 *La definición previa no depende de la elección de carta para* p*.*

Demostración Sean (U_1, ϕ_1) y (U_2, ϕ_2) cartas de M que contienen a p. Sean c, γ dos curvas diferenciables equivalentes según la definición 1.2.2 en la carta (U_1, ϕ_1), entonces

$$\begin{aligned}
(\phi_2 \circ \gamma)'(0) &= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ \gamma)'(0) \\
&= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1(p))(\phi_1 \circ \gamma)'(0) \\
&= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1})'(\phi_1(p))(\phi_1 \circ c)'(0) \\
&= (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi_1 \circ c)'(0) \\
&= (\phi_2 \circ c)'(0).
\end{aligned}$$

■

Definición 1.2.4 *El espacio tangente a* M *en* p*, denotado por* T_pM*, es el conjunto de clases de equivalencia de curvas tangentes a* M *por* p*.*

Observación 1.2.5 *Observemos que el espacio tangente* T_pM *tiene estructura de espacio vectorial real de dimensión* $dim(M)$*.*

Demostración Definamos $\Xi : \mathbb{R}^n \to T_pM$ por $\Xi(v) = [c_v] := [\phi^{-1}(\phi(p) + tv)]$, donde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, dicho épsilon, que depende de v existe por la continuidad de ϕ. Observemos que Ξ está bien definida, falta mostrar que es biyectiva, para lo cual es suficiente dar la inversa de Ξ, la cual está dada por:

$$\Xi^{-1}([c]) := \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi \circ c(t)$$

para $[c] \in T_pM$, lo cual no depende de la elección del representante por un argumento similar al usado en la demostración de 1.2.3, observemos que en efecto esta es la inversa de Ξ:

$$\begin{aligned}
\Xi^{-1} \circ \Xi(v) &= \Xi^{-1}[\phi^{-1}(\phi(p) + tv)] \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi(\phi^{-1}(\phi(p) + tv)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\phi(p) + tv) \\
&= v,
\end{aligned}$$

$$\Xi \circ \Xi^{-1}([c]) = \Xi(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ c(t)) = [\phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(0))]$$

y $[c] = [\phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(0))]$ pues

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \phi \circ \phi^{-1}(\phi(p) + t(\phi \circ c)'(0)) = (\phi \circ)'(0).$$

Resta definir la estructura de espacio vectorial en T_pM, esto lo hacemos usando Ξ. Para $[c_v]$, $[c_w] \in T_pM$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definimos $\alpha[c_v] + \beta[c_w] = \Xi(\alpha\Xi^{-1}([c_v]) + \beta\Xi^{-1}([c_w])) = \Xi(\alpha v + \beta w) = [c_{\alpha v + \beta w}]$. $\blacksquare$

Definición 1.2.6 *Sea M una variedad de dimensión n con atlas diferenciable $\{(U_i, \phi_i)\}$, definimos el haz tangente de M, denotado TM por $TM = (\coprod_{i \in I} U_i \times \mathbb{R}^n)/\sim$, donde $\coprod$ denota la unión disjunta y la relación de equivalencia está dada por:*

$$(p, v) \sim (q, w)$$

si y sólo si, para $(p, v) \in U_i \times \mathbb{R}^n$ y $(q, w) \in U_j \times \mathbb{R}^n$ se tiene que:

$$p = q \text{ y } w = \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(\phi_j \circ \phi_i^{-1}(\phi_i(p) + tv)) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1})'(\phi_i(p)) \cdot v.$$

Teorema 1.2.7 *Si M es una variedad n-dimensional de clase C^∞, entonces su haz tangente TM puede dotarse de una estructura de variedad $2n$-dimensional de clase C^∞.*

Demostración En la prueba del teorema 1.3.4, se demuestra un caso más general de el teorema antes enunciado. $\blacksquare$

1.3. Haces vectoriales

En la definición 1.2.6 se habló de la equivalencia de dos vectores en espacios tangentes correspondientes a diferentes cartas, la cual está dada por la multiplicación por la matriz $(\phi_j \circ \phi_i^{-1})'(\phi_i(p)) \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$. Podemos generalizar esta idea de la siguiente forma: dado un abierto de M, que pertenece a un atlas diferenciable para M, asignamos a cada punto del abierto un espacio vectorial de dimensión m, y cada vez que exista el traslape de dos cartas para M identificamos los vectores que se han asignado en una carta con los vectores asignados en la otra carta por una función lineal llamada función de transición, la cual puede ser distinta a la utilizada en la definición de TM.

Definición 1.3.1 *Sean M y E variedades diferenciables, y π una función diferenciable y suprayectiva $\pi : E \to M$. Diremos que la tercia ordenada (E, π, M) es un* Haz Vectorial real de rango m y base M *si las siguientes condiciones se cumplen:*

1. *$\pi^{-1}(x)$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión m, para cada $x \in M$.*

2. *Para cada $x \in M$ existen una vecindad abierta $U \subset M$ de x y un difeomorfismo $\Psi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$ con la propiedad de que $\Psi|_{\pi^{-1}(y)} : \pi^{-1}(y) \to \{y\} \times \mathbb{R}^m (\approx \mathbb{R}^m)$ es un isomorfismo de espacios vectoriales para todo $y \in U$.*

La pareja $(\pi^{-1}(U), \Psi)$ y a $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{R}^m$ se les llama carta del haz *y* fibra de p *respectivamente .*

Observación 1.3.2 *Sea (E, π, M) un haz vectorial, M una variedad con atlas $\{(V_i, \phi_i)\}$ y podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\{(\pi^{-1}(V_i), \psi_i)\}$ son una familia de abiertos que cubren a E con sus respectivas funciones de trivialización, entonces para $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ obtenemos las funciones que llamaremos "funciones de transición del haz":*

$$t_{ji} : V_i \cap V_j \to \mathrm{Gl(m,\mathbb{R})}$$

dadas por:

$$\psi_j \circ \psi_i^{-1}(\phi_i(x), v) = (\phi_j(x), t_{ji}(x)v) \tag{1.1}$$

para toda $x \in V_i \cap V_j$ y $v \in \mathbb{R}^m$. Si $G \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo y $t_{ij} \in G$ para todo i, j, decimos que el haz vectorial tiene estructura de grupo G.

De la ecuación (1.1) se sigue lo siguiente.

Proposición 1.3.3 *Para las funciones de transición se cumple que:*

$$\begin{aligned} t_{ii}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,, & x &\in V_i\,, \\ t_{ji}(x) \circ t_{ij}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,, & x &\in V_i \cap V_j\,, \\ t_{ki}(x) \circ t_{ij}(x) \circ t_{jk}(x) &= \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,, & x &\in V_i \cap V_j \cap V_k\,. \end{aligned}$$

A continuación veremos que basta conocer las funciones de transición descritas en la observación 1.3.2, tales que cumplan con la proposición 1.3.3 para obtener un haz vectorial para la variedad M en cuestión, cuyo espacio total sea $\mathrm{E} = \coprod_{i \in I} (V_i \times \mathbb{R}^m)/\sim$, donde la relación de equivalencia está dada precisamente por: $(p, v) \sim (q, w) \iff q = p$ y $w = t_{ji}(p)v$, donde $(p, v) \in (V_i \times \mathbb{R}^m)$ y $(q, w) \in (V_j \times \mathbb{R}^m)$.

Teorema 1.3.4 *Sea M una variedad diferenciable con atlas diferenciable $\{(U_i, \phi_i)\}$. Sea $\{t_{ij}\}$ un conjunto de funciones $t_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{GL(m,\mathbb{R})}$ cada vez que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, tales que*

$$t_{ii}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,, \qquad x \in U_i\,, \tag{1.2}$$

$$t_{ji}(x) \circ t_{ij}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,, \qquad x \in U_i \cap U_j\,, \tag{1.3}$$

$$t_{ki}(x) \circ t_{ij}(x) \circ t_{jk}(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,, \qquad x \in U_i \cap U_j \cap U_k\,. \tag{1.4}$$

Entonces $(\mathrm{E}, \pi, \mathrm{M})$ *es un haz vectorial real de rango* m *con base M, donde*

$$\mathrm{E} = \coprod_{i \in I} (U_i \times \mathbb{R}^m)/\sim$$

con

$$U_i \times \mathbb{R}^m \ni (p, v) \sim (q, w) \in U_j \times \mathbb{R}^m \quad \Longleftrightarrow \quad q = p \;\; y \;\; w = t_{ji}(p)v$$

y con $\pi : E \to M$ *dada por* $\pi([(p, v)]) = p$.

Demostración Necesitamos probar que la definición anterior nos da como resultado un haz vectorial con base M, espacio total E y proyección π que cumplan con la definición 1.3.1: Comenzamos por dotar de la topología cociente a E. Con esta topología E es por si mismo una variedad diferenciable de dimensión n+m. Definimos el atlas diferenciable para E, $\{[U_i \times \mathbb{R}^m], \psi_i\}$, donde

$$\psi_i([(p_j, v_j)]) = (\phi_i(p_j), t_{ij}v_j) \in \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{n+m}, \quad (p_j, v_j) \in U_j \times \mathbb{R}^m \quad \text{y} \quad p_j \in U_i \cap U_j.$$

Observemos que ψ_i está bien definida: suponiendo que $[(q_j, w_j)] = [(r_k, u_k)]$, entonces $q_j = r_k$, $u_k = t_{kj}w_j$ y

$$\begin{aligned} \psi_i([(r_k, u_k)]) &= (\phi_i(r_k), t_{ik}u_k) = (\phi_i(q_j), t_{ik}t_{kj}w_j) \\ &= (\phi_i(q_j), t_{ij}w_j) \\ &= \psi_i([(q_i, w_j)]). \end{aligned}$$

Obsérvese que ψ_i es un difeomorfismo entre $[U_i \times \mathbb{R}^m]$ y $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$:

- $\psi_i^{-1}(x, v) = [(\phi_i^{-1}(x), v)]$, entonces ψ_i es biyectiva.
- Suponiendo que U y V son abiertos de $\phi_i(U_i)$ y de $\mathbb{R}^m$, respectivamente, tenemos $\psi_i^{-1}(U \times V) = [\phi_i^{-1}(U) \times V]$ es un abierto en E, entonces ψ_i es continua.
- Sean $B \subset U_i$ y $W \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, luego $\psi_i([B \times W]) = (\phi_i(B) \times W) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ es abierto, por lo tanto ψ_i^{-1} es continua.
- $\psi_i \circ \psi_j^{-1}$ es diferenciable:

  $$\psi_i \circ \psi_j^{-1}(x, v) = (\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x), t_{ij}v)$$

  y $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ y t_{ij} son diferenciables.

Ahora pasaremos a mostrar que E cumple con la definición 1.3.1:

1. $\pi^{-1}(p) = \{[(p, v)] : v \in \mathbb{R}^m\} \approx \mathbb{R}^m$.
2. Dado $p \in$ M, existe $U_i \subset M$ con $p \in U_i$, entonces $\pi^{-1}(U_i)$ es abierto, además

   $$\Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^m$$

   dado por $\Psi_i([(p, v)]) = (p, t_{ij}v)$ para $(p, v) \in U_j \times \mathbb{R}^m$ y $p \in U_i \cap U_j$, está bien definido y es un difeomorfismo entre $\pi^{-1}(U_i)$ y $U_i \times \mathbb{R}^m$.

Definiendo en $\pi^{-1}(U_i)$ la operación $\alpha[(p,v)]+\beta[(p,w)] = [(p,\alpha v+\beta w)]$, donde (p,v), $(p,w) \in U_i \times \mathbb{R}^m$, vemos que $\pi^{-1}(\{p\})$ tiene estructura de espacio vectorial, además

$$(\Psi_i)_p := \Psi_i|_{\pi^{-1}(p)} : \pi^{-1}(p) \to \{p\} \times \mathbb{R}^m \approx \mathbb{R}^m$$

resulta ser un isomorfismo entre espacios vectoriales: Sean $(p,v_j) \in U_j \times \mathbb{R}^m, (p,w_k) \in U_k \times \mathbb{R}^m$, donde $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$, entonces

$$\begin{aligned}(\Psi_i)_p(\alpha[(p,v_j)]+\beta[(p,w_k)]) &= (\Psi_i)_p(\alpha[(p,t_{ij}v_j)]+\beta[(p,t_{ik}w_k)]) \\ &= (\Psi_i)_p([(p,\alpha t_{ij}v_j+\beta t_{ik}w_k)]) \\ &= (p,\alpha t_{ij}v_j+\beta t_{ik}w_k) \\ &= \alpha(p,t_{ij}v_j)+\beta(p,t_{ik}w_k) \\ &= \alpha(\Psi_i)_p([(p,v_j)])+\beta(\Psi_i)_p([p,w_k]).\end{aligned}$$

Por último, es fácil ver que $(\Psi_i)_p^{-1}(p,v) := [(p,v)]$ es el inverso de $(\Psi_i)_p$. ∎

Ejemplo 1.3.5 *El haz tangente, TM, junto con la función que manda al espacio tangente T_pM a p, es un haz vectorial real de rango n y con base M:*

Demostración Observemos que la función π que manda a cada espacio tangente T_pM a p es una función diferenciable y suprayectiva, pues si $(\bigcup_{p\in U} T_pM, \psi)$ es una carta para TM que contiene a p, donde U es la primer entrada del par (U,ϕ), carta para M que contiene a p, obsérvese que $\phi\circ\pi\circ\psi^{-1} : \phi(U)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable, pues $\phi\circ\pi\circ\psi^{-1}(\phi(p),v) = \phi\circ\pi(p,[c_v]) = \phi(p)$. Observemos que también se cumplen las condiciones para que (TM,π) sea un haz vectorial para M:

a) $\pi^{-1}(p) = \{p\}\times T_pM \approx \mathbb{R}^n$ por construcción del espacio tangente.

b) Dado $p \in M$ tomamos un abierto U del atlas para M que tiene a p, para el cual $\pi^{-1}(U)$ es un abierto de TM difeomorfo precisamente a $\bigcup_{p\in U}\{p\}\times T_pM \approx U\times\mathbb{R}^n$ y el difeomorfismo está dado por $(p,[c_v]) \to (p,v)$. ∎

Definición 1.3.6 *Una sección de un haz vectorial (E,π,M) es una función diferenciable $s : M \to E$ tal que $\pi\circ s = \mathrm{id}_M$. Al conjunto de todas la secciones del haz vectorial (E,M,π) se denota por $\Gamma(E)$.*

Definición 1.3.7 *Una sección del haz tangente se llama Campo vectorial.*

Definición 1.3.8 *Una* métrica riemanniana *para una variedad M es un conjunto de funciones diferenciables*

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$$

tales que para cada $p \in M$:

- *g_p es bilineal, simétrica y definida positiva.*
- *La función definida por $M \ni p \to g_p(X(p),Y(p)) \in \mathbb{R}$ es diferenciable para todo $X,Y \in \Gamma(TM)$.*

Capítulo 2

La esfera

Definición 2.0.9 *Denotamos por* $\mathbb{S}^2$ *el siguiente subespacio topológico de* $\mathbb{R}^3$ *:*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

y le llamamos **la esfera**. *A los puntos* $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$ *en la esfera les llamamos polo norte y polo sur y los denotamos* N *y* S *respectivamente.*

2.1. Proyección esterográfica en $\mathbb{S}^2$

Definición 2.1.1 *Definimos las funciones*

$$\phi_N : \mathbb{S}^2 \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{1 + x_3}(x_1, x_2),$$

$$\phi_S : \mathbb{S}^2 \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2, x_3) \longmapsto \frac{1}{1 - x_3}(x_1, -x_2),$$

a las cuales les llamaremos proyección estereográfica norte y proyección estereográfica sur. Denotaremos por U_N *al dominio de* ϕ_N *y* U_S *al dominio de* ϕ_S.

Proposición 2.1.2 $\mathbb{S}^2$ *junto con el atlas* $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ *es una variedad diferenciable de dimensión 2.*

Demostración Es claro que todo punto en $\mathbb{S}^2$ está en al menos uno de los subconjuntos $\{\mathbb{S}^2 \backslash S\}$ o $\{\mathbb{S}^2 \backslash N\}$ los cuales son abiertos en $\mathbb{S}^2$ y son tales que cada uno de ellos es aplicado homeomorficamente en $\mathbb{R}^2$ mediante la respectiva proyección estereográfica. Resta mostrar que el atlas que proponemos es de clase C^∞, para esto consideremos las funciones inversas de las proyecciones estereográficas:

$$\phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to U_N, \quad \phi_N^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2}{x_1^2 + x_2^2 + 1} - 1 \right), \quad (2.1)$$

$$\phi_S^{-1} : \mathbb{R}^2 \to U_S, \quad \phi_S^{-1}(y_1, y_2) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{-2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, 1 - \frac{2}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right). \quad (2.2)$$

Consideremos la función de cambio de carta $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$:

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1} : \phi_S(\mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\}) = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \phi_N(\mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\}) = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\},$$

$$\begin{aligned}
\phi_N \circ \phi_S^{-1}(y_1, y_2) &= \left(\phi_N((\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{-2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, 1 - \frac{2}{y_1^2 + y_2^2 + 1})) \right) \\
&= \frac{1}{1 + 1 - \frac{2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}} \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{-2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right) \\
&= \frac{1}{y_1^2 + y_2^2}(y_1, -y_2).
\end{aligned}$$

La cual es una función de clase C^∞ ya que todas sus derivadas parciales de cualquier orden existen y son continuas. Lo mismo ocurre para:

$$\phi_S \circ \phi_N^{-1} : \phi_N(\mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\}) \to \phi_S(\mathbb{S}^2 \backslash \{S, N\}), \quad \phi_S \circ \phi_N^{-1}(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(x_1, -x_2).$$

$\blacksquare$

Debido a la identificación entre $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{C}$, podemos considerar las funciones de cambio de carta como funciones complejas, escribiendo $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ y $\zeta = y_1 + \mathrm{i}y_2$:

$$\phi_N \circ \phi_S^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \qquad \phi_S \circ \phi_N^{-1}(z) = \frac{1}{z}. \tag{2.3}$$

2.2. El haz tangente de $\mathbb{S}^2$

Dado que $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ es un atlas diferenciable para $\mathbb{S}^2$, podemos, según la definición 1.2.6, construir el haz tangente de $\mathbb{S}^2$ de manera explícita. Además, lo construiremos considerando cada espacio tangente como subespacio (vectorial) de $\mathbb{R}^3$. Dado $p \in \mathbb{S}^2$, un vector tangente a $\mathbb{S}^2$ en p es una clase de equivalencia de curvas de la cual es representante $[c_{e_i}] = [\phi^{-1}(\phi_N(p) + te_i)]$, al que denotaremos por $\frac{\partial}{\partial x_i}$ cuando no exista riesgo de confusión, ya que se debe recordar la dependencia del punto en cuestión, por lo que será necesario en ocasiones escribir $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ o $\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1, x_2)$, donde $p = \phi_N^{-1}(p)(x_1, x_2)$. $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ resultará ser una base para $T_p\mathbb{S}^2$ ya que $\{e_1, e_2\}$ (la base canónica de $\mathbb{R}^2$) son dos vectores linealmente independientes. A continuación definimos el isomorfismo de espacios vectoriales que nos permitirá tratar a cada espacio tangente de $\mathbb{S}^2$ como subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Proposición 2.2.1 *Sean $p \in \mathbb{S}^2$ y $[c] \in T_p\mathbb{S}^2$, entonces*

$$\Upsilon : T_p\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{definida} \quad \text{por} \quad \Upsilon([c]) = c'(0)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales entre $T_p\mathbb{S}^2$ y $\Upsilon(T_p\mathbb{S}^2)$.

Demostración Por la manera en la que hemos definido a Υ necesitamos mostrar que no depende del representante que elijamos. Sea $[\gamma] \sim [c]$, lo cual ocurre si y sólo si $(\phi_j \circ \gamma)'(0) = (\phi_j \circ c)'(0), j \in \{N, S\}$. Dado que $\ker(\phi_j^{-1})' = \{0\}$, tenemos que $[\gamma] \sim [c]$ si y sólo si $(\phi_j^{-1})' \circ (\phi_j \circ \gamma)'(0) = (\phi_j^{-1}) \circ (\phi_j \circ c)'(0)$, entonces $\gamma'(0) = (\phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ \gamma)'(0) = (\phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ c)'(0) = c'(0)$, por lo tanto $\Upsilon([\gamma]) = \Upsilon([c])$.

Además Υ es lineal:

$$\begin{aligned}
\Upsilon([c_{\alpha v+\beta w}]) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_j^{-1}(\phi_j(p) + t(\alpha v + \beta w)) \\
&= (\phi_j^{-1})'(\phi_j(p)) \cdot (\alpha v + \beta w) \\
&= \alpha(\phi_j^{-1})'(\phi_j(p)) \cdot v + \beta(\phi_j^{-1})'(\phi_j(p)) \cdot w \\
&= \alpha\frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_j^{-1}(\phi_j(p) + tv) + \beta\frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_j^{-1}(\phi_j(p) + tw) \\
&= \alpha\Upsilon([c_v]) + \beta\Upsilon([c_w]).
\end{aligned}$$

Dado que $\ker((\phi_j^{-1})') = \{0\}$ tenemos que $\Upsilon([c_v]) = (\phi_j^{-1})'(\phi_j(p)) \cdot v = 0$ si y sólo si $v = 0$, es decir $[c_v] = 0$. Entonces Υ es un isomorfismo entre $T_p\mathbb{S}^2$ y $\Upsilon(T_p\mathbb{S}^2) \subset \mathbb{R}^3$. ∎

Definición 2.2.2 *Para cada $p \in \mathbb{S}^2$ definimos*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}(p) &:= \Upsilon([\phi_N^{-1}(\phi_N(p) + te_i)]) = \frac{\partial \phi_N^{-1}}{\partial x_i}(p), \quad i \in \{1, 2\}, \\
\frac{\partial}{\partial y_i}(p) &:= \Upsilon([\phi_S^{-1}(\phi_S(p) + te_i)]) = \frac{\partial \phi_S^{-1}}{\partial y_i}(p), \quad i \in \{1, 2\}.
\end{aligned}$$

y escribiremos $\frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\frac{\partial}{\partial y_i}$ si no hay riesgo de confusión, ya que debemos recordar la dependencia del punto en cuestión.

Entonces, por ecuaciones (2.1) y (2.2),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 +)^2}\left(2(x_2^2 - x_1^2 + 1), -4x_1x_2, -4x_1\right), \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}\left(-4x_1x_2, 2(x_1^2 - x_2^2 + 1), -4x_2\right), \\
\frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + 1)^2}\left(2(y_2^2 - y_1^2 + 1), 4y_1y_2, 4y_1\right), \\
\partial y_2 &= \frac{1}{(y_1^2 + y_2^2 + 1)^2}\left(-4y_1y_2, -2(y_1^2 - y_2^2 + 1), 4y_2\right).
\end{aligned}$$

Dado que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\} \subset \mathbb{R}^3$ y $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\} \subset \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes y que $\dim\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}=\dim\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}=2=\dim(T_p\mathbb{S}^2)$, tenemos que $T_pU_N \cong \text{gen}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ y $T_pU_S \cong \text{gen}\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, donde el isomorfismo está dado por Υ antes definido.

La identificación entre vectores tangentes en T_pU_N con sus equivalentes en T_pU_S se hace, de acuerdo a la definición 1.2.6, mediante la multiplicación por la matriz $(\phi_S \circ \phi_N^{-1})'(\phi_N(p))$, donde $\phi_N(p) = (x_1, x_2)$ y $(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = \phi_S \circ \phi_N^{-1}(x_1, x_2) = (\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2+x_2})$:

$$\left(\phi_S \circ \phi_N^{-1}\right)'(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \\ \\ \frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \phi_N(p) = (x_1, x_2)$$

Si escribimos para cada $(x_1, x_2) \in \phi_N(U_N)$

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) = &\ r(cos\theta, sen\theta) \\ \simeq &\ re^{i\theta} \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{-r^2(\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta))}{r^2} = \operatorname{sen}^2(\theta) - \cos^2(\theta) = -\cos(2\theta),$$

$$\frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{r^2(2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta))}{r^2} = 2\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}(2\theta),$$

con lo cual podemos escribir la matriz anterior como:

$$(\phi_S \circ \phi_N^{-1})'(r, \theta) = \frac{1}{r^2}\begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Definición 2.2.3 *Para cada $p \in \mathbb{S}^2$ definimos:*

$$g_p : T_p\mathbb{S}^2 \times T_p\mathbb{S}^2 \to \mathbb{R},$$

por

$$g_p([c], [\gamma]) := \langle \Upsilon([c]), \Upsilon([\gamma]) \rangle$$

donde $\langle , \rangle$ es el producto punto canónico de $\mathbb{R}^3$.

Proposición 2.2.4 *La definición anterior nos da una métrica riemanniana para $\mathbb{S}^2$ y por lo tanto, $\mathbb{S}^2$ es una variedad diferenciable Riemanniana. La métrica está definida en coordenadas locales por*

$$(g_{ij}(x_1, x_2))^2_{i,j=1} = \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(g_{ij}(y_1, y_2))^2_{i,j=1} = \frac{4}{(1 + x_1^2 + x_2^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $g_{i,j}(x_1, x_2) := g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p))$ y $g_{i,j}(y_i, y_j) := g_p(\frac{\partial}{\partial y_i}(p), \frac{\partial}{\partial y_j}(p))$.

Demostración Obsérvese que g_p es bilineal y simétrica porque $\langle , \rangle$ lo es, y es definida positiva debido a que $\langle , \rangle$ es definida positiva y $\ker(\Upsilon) = \{0\}$.

Ahora:

$$\begin{aligned} g_{1,1}(x_1,x_2) =& \left\langle \left(\frac{2-2x_1^2+2x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{2-2x_1^2+2x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ =& \frac{4}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{2,1}(x_1,x_2) =& \left\langle \left(\frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{2-2x_2^2+2x_1^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{2-2x_1^2+2x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ =& 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{1,2}(x_1,x_2) =& \left\langle \left(\frac{2-2x_1^2+2x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_1}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{2-2x_2^2+2x_1^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ =& 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{2,2}(x_1,x_2) =& \left\langle \left(\frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{2-2x_2^2+2x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right), \right. \\ & \left. \left(\frac{-4x_1x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{2-2x_2^2+2x_1^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}, \frac{-4x_2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \right) \right\rangle \\ =& \frac{4}{(1+x_1^2+x_2^2)^2} \end{aligned}$$

Análogamente calculamos

$$g_{1,1}(y_1,y_2) = \frac{4}{(y_1^2+y_2^2+1)^2}, \quad g_{1,2}(y_1,y_2) = 0, \quad g_{2,1}(y_1,y_2) = 0, \quad g_{2,2}(y_1,y_2) = \frac{4}{(y_1^2+y_2^2+1)^2}.$$

Dados $X, Y, V, W \in \Gamma(T\mathbb{S}^2)$, tenemos que en la carta (U_N, ϕ_N)

$$\begin{aligned} g_p(X(x_1,x_2), Y(x_1,x_2)) &= g_p\left(\sum_{i=1}^{2} X^i(x_1,x_2) \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{2} Y^j(x_1,x_2) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} X^i(x_1,x_2) Y^j(x_1,x_2) g_{i,j}(x_1,x_2), \end{aligned}$$

y en la carta (U_S, ϕ_S)

$$\begin{aligned} g_p(V(y_1,y_2), W(y_1,y_2)) &= g_p\left(\sum_{i=1}^{2} V^i(y_1,y_2)\frac{\partial}{\partial y_i}, \sum_{j=1}^{2} W^j(y_1,y_2)\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} V^i(y_1,y_2)W^j(y_1,y_2)g_{i,j}(y_1,y_2). \end{aligned}$$

Dado que X, Y, V, W y $g_{i,j}(x_1,x_2)$, $g_{i,j}(y_1,y_2)$ son diferenciables, entonces g_p es diferenciable. $\blacksquare$

Dado que la manera en que identificamos vectores equivalentes en distintas coordenadas locales es mediante la multiplicación por la derivada de $\phi_N \circ \phi_S^{-1}$ o de $\phi_S \circ \phi_N^{-1}$, evaluadas en un punto (lo cual nos da una aplicación lineal), basta conocer la manera en que dichas aplicaciones identifican a una base en el espacio tangente, definido en una carta, con los respectivos vectores en el espacio tangente definido en la otra carta. En la discusión anterior hemos identificado la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ del haz tangente definido en la carta norte con $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, una de las propiedades de estas bases es que sus elementos no tienen norma uno, el considerar bases ortonormales para cada espacio tangente será muy importante en posteriores construcciones.

Definición 2.2.5 *Dada la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$, definimos la base ortonormal $\{e_1^N, e_2^N\}$ por:*

$$e_1^N := \|\frac{\partial}{\partial x_1}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}$$

$$e_2^N := \|\frac{\partial}{\partial x_2}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

donde $\|X(p)\| = \sqrt{g_p(X(p),X(p))}$ para todo $X(p) \in T_p\mathbb{S}^2$. De manera análoga, definimos $\{e_1^S, e_2^S\}$:

$$e_1^S := \|\frac{\partial}{\partial y_1}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{1+y_1^2+y_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$e_2^S := \|\frac{\partial}{\partial y_2}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{1+y_1^2+y_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Proposición 2.2.6 *Las funciones de transición del haz tangente de $\mathbb{S}^2$ con respecto a las bases $\{e_1^N, e_2^N\}$ y $\{e_1^S, e_2^S\}$ están dadas por*

$$t_{SN}(p) = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

donde $p = \phi_N^{-1}(re^{i\theta})$ y

$$t_{NS}(p) = t_{SN}(p)^{-1} = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ -\operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

donde $p = \phi_N^{-1}(re^{i\theta})$.

Demostración Según 1.3.5, podemos construir al haz tangente de $\mathbb{S}^2$ como un haz vectorial real de dimensión 2, por lo cual debemos indicar las funciones de transición de haz que usaremos para identificar vectores equivalentes en los espacios tangentes, definidos de manera local en cada una de las dos cartas dadas por la proyección estereográfica en $\mathbb{S}^2$; para esto, es suficiente definir la función de transición de haz en una base del espacio tangente que deseamos identificar con su respectivo espacio tangente equivalente, definido en la otra carta. De la definición de haz tangente de $\mathbb{S}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

donde $\frac{\partial y_j}{\partial x_i}$ es la entrada (j, i) de la matriz

$$(\phi_S \circ \phi_N^{-1})'(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{2}$$

la cual es la derivada de la función de cambio de carta

$$(y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) := (\phi_N \circ \phi_S^{-1})(x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \right).$$

Luego

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\|\frac{\partial}{\partial y_j}\|}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial y_j}\|} \frac{\partial}{\partial y_j}$$

de donde

$$e_i^N = \sum_{j=1}^{2} \frac{\|\frac{\partial}{\partial y_j}\|}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} e_j^S$$

de lo cual tenemos que la matriz que identifica $\{e_1^N, e_2^N\}$ con $\{e_1^S, e_2^S\}$ es la misma matriz que se había obtenido en la construcción previa del haz tangente de $\mathbb{S}^2$ salvo por la multiplicación del factor $\frac{\|\frac{\partial}{\partial y_j}\|}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|}$, este factor que no depende de j ni de i es igual a:

$$\frac{\frac{2}{1+y_1^2+y_2^2}}{\frac{2}{1+x_1^2+x_2^2}} = \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + \frac{x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}} = \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 + \frac{1}{x_1^2+x_2^2}} = x_1^2 + x_2^2.$$

Haciendo la sustitución $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, obtenemos de la ecuación (2.4) que la matriz que identifica vectores de un espacio tangente definido localmente en la carta U_N con vectores del respectivo espacio tangente definido localmente en la carta U_S, es de la forma:

$$t_{SN}(p) = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

la cual es un elemento de SO(2). Ver [5].

Podemos verificar que la inversa de t_{SN} es la siguiente matriz

$$t_{NS}(p) = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ -\operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

Comentario 2.2.7 *Inicialmente sabíamos que las funciones de transición de haz para $T\mathbb{S}^2$ eran elementos de GL(n,$\mathbb{R}$), pero luego de la proposición anterior, observamos que existe una base para cada $T_p\mathbb{S}^2$ de tal manera que t_{ij} $\in$SO(2). Al hecho de que hayamos cambiado el grupo de estructura del haz tangente se le llama reducción de grupo de estructura. Véase observación 1.3.2.*

Lemma 2.2.8 *$T\mathbb{S}^2$ es un haz vectorial con fibra $\mathbb{C}$ con funciones de transición $t_{SN}(p) = -e^{-2\mathrm{i}\theta}$ y $t_{NS}(p) = -e^{2\mathrm{i}\theta}$, donde $p = \phi_N^{-1}(re^{\mathrm{i}\theta})$.*

Demostración De la proposición anterior, tenemos que las funciones de transición de haz para el haz tangente se pueden escribir de la siguiente manera:

$$t_{SN}(p) = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\operatorname{sen}(2\theta) \\ \operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

esta función de transición, que es una matriz con coeficientes reales, se puede identificar con la multiplicación por el número complejo $-\cos(2\theta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta)$, para el cual se cumple que, escribiendo $z = re^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\begin{aligned} -\cos(2\theta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta) &= -(\cos(-2\theta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(-2\theta)) \\ &= -e^{-2\mathrm{i}\theta} \\ &= -\frac{|z|^2}{z^2} \\ &= -\frac{\bar{z}}{z}. \end{aligned}$$

Análogamente podemos obtener una expresión similar para la otra función de transición:

$$t_{NS}(p) = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & \operatorname{sen}(2\theta) \\ -\operatorname{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix},$$

esta matriz la identificamos con la transformación dada por multiplicación con el número complejo $-\cos(2\theta)-\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta)$, para $\zeta = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{\mathrm{i}\theta}}$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} -\cos(2\theta)-\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta) &= -(\cos(2\theta)+\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta)) \\ &= -e^{2\mathrm{i}\theta} \\ &= -\frac{\zeta^2}{\|\zeta\|^2} \\ &= -\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}. \end{aligned}$$

Comentario 2.2.9 *De aquí en adelante nos referiremos a los haces vectoriales de fibra $\mathbb{C}^m$ como haces vectoriales complejos.*

Capítulo 3

La derivada covariante

3.1. El Corchete de Lie

Definición 3.1.1 *Sea M una variedad diferenciable con atlas $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$, $f \in C^\infty(M)$ y $X \in \Gamma(TM)$, definimos la derivada de Lie de f en la dirección de X por:*

$$X.f := \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial(f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x_i}$$

para algún α, donde $\frac{\partial}{\partial x_i} = [\phi_\alpha^{-1}(\phi_\alpha(p) + te_i)]$ y $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Proposición 3.1.2 *La definición anterior no depende de la carta que se escoja.*

Demostración Supongamos que (U_α, ϕ_α), (U_β, ϕ_β) son dos cartas tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Denotando por x_i las coordenadas en $\phi_\alpha(U_\alpha)$ y por y_j las de $\phi_\beta(U_\beta)$ podemos escribir

$$(y_1(x), ..., y_n(x)) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x).$$

Sea $X \in \Gamma(T(U_\alpha \cap U_\beta))$, entonces $X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} X^i \frac{\partial y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j})$, de donde $Y^j = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial y^j}{\partial x_i}$. Por definición de derivada de Lie en coordenadas de U_α:

$$X.f = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial(f \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x_i},$$

del hecho de que $f \circ \phi_\alpha^{-1} = f \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ tenemos

$$
\begin{aligned}
X.f &= \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1} \circ \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_j} \frac{\partial (\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})_j}{\partial x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} X^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial y_j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial (f \circ \phi_\beta^{-1})}{\partial y_j}.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Definición 3.1.3 *Dados $X, Y \in \Gamma(TM)$ y $f \in C^\infty(M)$, definimos el Corchete de X y Y aplicado a f por*

$$[X, Y].f := X.(Y.f) - Y.(X.f).$$

Proposición 3.1.4 *Dados $X, Y \in \Gamma(TM)$, existe un único $Z \in \Gamma(TM)$ tal que*

$$[X, Y].f = Z.f$$

Demostración Sean X, $Y \in \Gamma(TM)$, en la carta (U_α, ϕ_α) podemos escribir:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^{n} Y^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Entonces por definición de Corchete de X y Y aplicado a f:

$$
\begin{aligned}
[X, Y].f &= \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} Y^j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}) f,
\end{aligned}
$$

tenemos que Z está determinado de manera única en la carta (U_α, ϕ_α) por: $Z = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} (X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x_i}) \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Suponiendo que exista (U_β, ϕ_β) con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ podemos escribir:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad Y = \sum_{k=1}^{n} Y^k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_l},$$

donde $y(x) = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(x)$.

De la definición de Corchete de X y Y aplicado a f en la carta (U_β, ϕ_β) :

$$
\begin{aligned}
[X,Y].f &= \sum_{i=1}^{n} X^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\sum_{k=1}^{n} Y^k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial y_l}\right) - \sum_{k=1}^{n} Y^k \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial y_l}\left(\sum_{i=1}^{n} X^i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\left(\frac{\partial Y^k}{\partial y_j}\frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial y_l} + Y^k \frac{\partial^2 y_l}{\partial y_j \partial x_k}\frac{\partial f}{\partial y_l} + Y^k \frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial^2 f}{\partial y_j \partial y_l}\right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y^k \frac{\partial y_l}{\partial x_k}\left(\frac{\partial X^i}{\partial y_l}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j} + X^i \frac{\partial^2 y_j}{\partial y_l \partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j} + X^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 f}{\partial y_l \partial y_j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X^i \frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial Y^k}{\partial y_j}\frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial y_l} - \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} Y^k \frac{\partial y_l}{\partial x_k}\frac{\partial X^i}{\partial y_l}\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial y_j} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k} - \sum_{k=1} Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} (X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_k}\right) f.
\end{aligned}
$$

Así entonces en $U_\alpha \cap U_\beta$ las definiciones del Corchete de X y Y aplicado a f coinciden, con lo cual, en coordenadas locales

$$
Z = [X,Y] = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(X^i \frac{\partial Y^k}{\partial x_i} - Y^i \frac{\partial X^k}{\partial x_i}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \tag{3.1}
$$

está bien definido. ∎

Las siguientes propiedades del Corchete de Lie se prueban directamente de la definición usando coordenadas locales:

Lemma 3.1.5 *Dados $V, W, Z \in \Gamma(TM)$ y $f \in C^\infty(M)$ se tiene que*

$$[V + W, Z] = [V, Z] + [W, Z].$$

$$[V, W] = -[W, V]$$

$$[V, fW] = f[V, W] + (V.f)W.$$

3.2. La derivada covariante en haces vectoriales

Definición 3.2.1 *Una derivada covariante para el haz vectorial (E,π,M) de fibra $\mathbb{R}^m$ es una función $\mathbb{R}$-bilineal de $\Gamma(TM) \times \Gamma(E)$ en $\Gamma(E)$, que cumple las siguientes condiciones para $X, X_1, X_2, Y, Z \in \Gamma(E)$ y $f \in C^\infty(\mathrm{M})$:*

1. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y, \quad \nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y.$

2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z, \quad \nabla_X(fY) = X.fY + f\nabla_X Y.$

Sean $X \in \Gamma(TM)$ y $Y \in \Gamma(E)$, en coordenadas locales, digamos para la carta (U_α, ϕ_α), podemos escribir

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{j=1}^{m} Y^j s_j,$$

donde las secciones locales $\{s_1(p), ..., s_m(p)\}$ forman una base de $\pi^{-1}(p)$, para todo $p \in U_\alpha$. Si

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

es una derivada covariante, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{j=1}^{m} Y^j s_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(Y^j s_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} s_j + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} s_j + Y^j \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k s_k\right), \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{ij}^k s_k$, $\Gamma_{ij}^k \in \mathbb{R}$.

Definición 3.2.2 *Definimos los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k asociados a la conexión ∇, relativos a la carta (U_α, ϕ_α), por la expresión*

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} s_j = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k s_k.$$

En ocasiones será conveniente considerar los símbolos de Christoffel como las entradas de una matriz $m \times m$ para cada i.

Definición 3.2.3 *Definimos la matriz de los símbolos de Christoffel asociados a la conexión ∇, relativos a la carta (U_α, ϕ_α), por*

$$A_i := ((A_i)_j^k)_{k,j=1}^m = (\Gamma_{ij}^k)_{i,j=1}^m. \tag{3.3}$$

Observemos que según (3.2) basta conocer los coeficientes Γ_{ij}^k para derterminar completamente, de manera local, a ∇.

3.3. Transformación de los símbolos de Christoffel bajo cambio de coordenadas.

Sean $\{e_1^\alpha, ..., e_n^\alpha\}$ y $\{e_1^\beta, ..., e_n^\beta\}$ bases para el haz tangente definido localmente en las cartas (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β), respectivamente, entonces podemos escribir:

$$e_i^\alpha = \sum_{k=1}^{n} (t_{\alpha\beta})_i^k e_k^\beta \tag{3.4}$$

$$e_j^\beta = \sum_{k=1}^{n} (t_{\beta\alpha})_j^k e_k^\alpha \tag{3.5}$$

con $t_{\beta\alpha}$, $t_{\alpha\beta}$ funciones de transición en $U_\alpha \cap U_\beta$.

Dado (E, π, M) haz vectorial de fibra $\mathbb{R}^m$, si U_α, U_β son dos abiertos en M con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, considerando las bases locales $\{S_1^\alpha(p), ..., S_m^\alpha(p)\}$, $\{S_1^\beta(q), ..., S_m^\beta(q)\}$ para todo $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$ respectivamente, tenemos que

$$S_i^\alpha(p) = \sum_{k=1}^{m} (\Phi_{\alpha\beta})_i^k S_k^\beta(p),$$

$$S_i^\beta(q) = \sum_{k=1}^{m} (\Phi_{\beta\alpha})_i^k S_k^\alpha(q).$$

Sea ∇ una derivada covariante en el haz (E, π, M) de fibra $\mathbb{R}^m$, sean $\{S_1^\alpha(p), ..., S_m^\alpha(p)\}$, $\{S_1^\beta(q), ..., S_m^\beta(q)\}$ bases en $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$ para $p \in U_\alpha$ y $q \in U_\beta$, podemos escribir entonces:

$$\nabla_{e_j^\alpha}\left(\sum_{k=1}^{m} Y_\alpha^k S_k^\alpha\right) = \sum_{k=1}^{m} (e_j^\alpha . Y_\alpha^k) S_k^\alpha + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} Y_\alpha^k (A_j^\alpha)_k^l S_l^\alpha \tag{3.6}$$

$$\nabla_{e_i^\beta}\left(\sum_{k=1}^{m} Y_\beta^k S_k^\beta\right) = \sum_{k=1}^{m} (e_i^\beta . Y_\beta^k) S_k^\beta + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} Y_\beta^k (A_i^\beta)_k^l S_l^\beta \tag{3.7}$$

Las matrices $(A_i^\alpha)_{l=1}^m$ y $(A_i^\beta)_{l=1}^m$ contienen los símbolos de Christoffel en las cartas U_α y U_β respectivamente, véase (3.3). Ahora determinaremos la manera en la que se transforman los símbolos de Christoffel con respecto a $t_{\alpha\beta}$ y $\phi_{\beta\alpha}$, para lo cual reescribimos (3.6) considerando (3.4):

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_j^\alpha}(\sum_{k=1}^m Y_\alpha^k S_k^\alpha) &= \nabla_{\sum_{i=1}^n((t_{\alpha\beta})_j^i e_i^\beta)}(\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m Y_\alpha^k(\phi_{\alpha\beta})_k^l S_l^\beta) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m (t_{\alpha\beta})_j^i \nabla_{e_i^\beta}(Y_\alpha^k(\phi_{\alpha\beta})_k^l S_l^\beta) \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m \Big((t_{\alpha\beta})_j^i(e_i^\beta.Y_\alpha^k)(\phi_{\alpha\beta})_k^l + (t_{\alpha\beta})_j^i Y_\alpha^k(e_i^\beta.\phi_{\alpha\beta})_k^l S_l^\beta\Big) \\
&+ \quad \sum_{i=1}^n\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m (t_{\alpha\beta})_j^i Y_\alpha^k(\phi_{\alpha\beta})_k^l(\nabla_{e_i^\beta} S_l^\beta) \\
&= \sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (t_{\alpha\beta})_j^i(e_i^\beta.Y_\alpha^k)\right)(\phi_{\alpha\beta})_k^l S_l^\beta + \sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m Y_\alpha^k\left(\sum_{i=1}^n (t_{\alpha\beta})_j^i(e_i^\beta.\phi_{\alpha\beta})_n^l S_j^\beta\right) \\
&+ \quad \sum_{i=1}^n\sum_{h=1}^m\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m (t_{\alpha\beta})_j^i Y_\alpha^k(\phi_{\alpha\beta})_k^l(A_i^\beta)_l^h S_h^\beta \\
&= \sum_{k=1}^m (e_j^\alpha.Y_\alpha^k)S_k^\alpha + \sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m\sum_{h=1}^m Y_\alpha^k\left(e_j^\alpha.(\phi_{\alpha\beta})_k^l\right)(\phi_{\beta\alpha})_l^h S_h^\alpha \\
&+ \quad \sum_{r=1}^m\sum_{h=1}^m\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n (t_{\alpha\beta})_j^i Y_\alpha^k(\phi_{\alpha\beta})_k^l(A_i^\beta)_l^h(\phi_{\beta\alpha})_h^r S_r^\alpha
\end{aligned}$$

Ahora, dado que la última expresión obtenida y la ecuación (3.6) son iguales:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m (e_j^\alpha.Y_\alpha^k)S_k^\alpha + \sum_{k=1}^m\sum_{r=1}^m Y_\alpha^k(A_j^\alpha)_k^r S_r^\alpha = &\sum_{k=1}^m (e_j^\alpha.Y_\alpha^k)S_k^\alpha \\
&+ \sum_{r=1}^m\sum_{h=1}^m Y_\alpha^k \sum_{l=1}^m (e_j^\alpha.(\phi_{\alpha\beta})_k^l)(\phi_{\beta\alpha})_l^r S_r^\alpha \\
&+ \sum_{r=1}^m\sum_{h=1}^m\sum_{l=1}^m\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n (t_{\alpha\beta})_j^i Y_\alpha^k(\phi_{\alpha\beta})_k^l(A_i^\beta)_l^h(\phi_{\beta\alpha})_h^r S_r^\alpha
\end{aligned}$$

de donde:

$$(A_j^\alpha)_k^r = \sum_{l=1}^m (e_j^\alpha.(\phi_{\alpha\beta})_k^l)(\phi_{\beta\alpha})_l^r + \sum_{h=1}^m\sum_{l=1}^m\sum_{i=1}^n (t_{\alpha\beta})_j^i(\phi_{\alpha\beta})_k^l(A_i^\beta)_l^h(\phi_{\beta\alpha})_h^r \tag{3.8}$$

De lo anterior se sigue la siguiente proposición:

Proposición 3.3.1 *Sea M una variedad diferenciable con atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ y (E, π, M) un haz vectorial de fibra $\mathbb{R}^m$. Dada una derivada covariante ∇ los símbolos de Christoffel se transforman de U_α a U_β según (3.8) y viceversa, si las matrices $(A_l^\alpha)_{l=1}^m$, $(A_l^\beta)_{l=1}^m$ se transforman según (3.8) entonces la ecuación (3.2) no depende de la carta y define una derivada covariante para (E, π, M).*

3.4. La derivada de Levi-Civita

En esta sección trataremos con el problema de definir una derivada covariante en el haz tangente de una variedad Riemanniana. Además requeriremos que esta derivada cumpla con dos condiciones adicionales a la definición de derivada covariante, en este sentido hacemos las siguientes definiciones:

Definición 3.4.1 *Sea M una variedad Riemanniana, diremos que una derivada covariante ∇ es Riemanniana o compatible con la métrica, si para X, Y, $Z \in \Gamma(TM)$ se cumple que:*

- $X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$.

Definición 3.4.2 *Si para $X, Y \in \Gamma(TM)$ se cumple la siguiente propiedad:*

- $(\nabla_X Y - \nabla_Y X) - [X,Y] = 0$,

diremos que ∇ es simétrica.

Teorema 3.4.3 *Para el haz tangente de una variedad Riemanniana, existe una única derivada covariante compatible con la métrica y simétrica.*

Demostración Sean $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, suponiendo la existencia de ∇ tenemos que:

$$X.g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \tag{3.9}$$
$$Y.g(Z,X) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X), \tag{3.10}$$
$$Z.g(X,Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y). \tag{3.11}$$

Sumando (3.9) y (3.10) y restando (3.11), tenemos que, haciendo uso de la simetría de ∇

$$X.g(Y,Z)+Y.g(Z,X)-Z.g(X,Y) = g([X,Z],Y)+g([Y,Z],X)+g([X,Y],Z)+2g(Z,\nabla_Y X).$$

De donde

$$\begin{aligned} g(Z, \nabla_Y X) = {} & \frac{1}{2}\left(X.g(Y,Z) + Y.g(Z,X) - Z.g(X,Y) - g([X,Z],Y)\right) \\ & - \frac{1}{2}\left(g([Y,Z],X) - g([X,Y],Z)\right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

La expresión (3.12) muestra que ∇ queda determinada de manera única por g, así que de existir ∇ ésta debe ser única.

Para probar la existencia, definamos ∇ por (3.12). Como g es no degenerada, tenemos que ∇ está bien definida; por las propiedades del Corchete de Lie se prueba que la definición de ∇ nos da una derivada covariante. Luego, es fácil probar que ∇ es Riemanniana y simétrica. ∎

Definición 3.4.4 *A la derivada covariante que el teorema anterior asegura que existe, le llamamos la derivada covariante de Levi-Civita.*

Proposición 3.4.5 *Sea ∇ la derivada covariante de Levi-Civita. Si denotamos por g_{ij} a $g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})$, entonces los símbolos de Christoffel asociados a ∇ se pueden calcular explícitamente según la expresión:*

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_l}) \tag{3.13}$$

donde g^{ij} es la entrada i, j de la inversa de la matriz $(g_{ij})_{i,j=1}^n$.

Además ∇ queda determinada de manera única por la ecuación 3.13.

Demostración De la definición 3.2.3,

$$\begin{aligned} g(\frac{\partial}{\partial x_k}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) &= g(\frac{\partial}{\partial x_k}, \sum_{m=1}^n \Gamma_{ij}^m \frac{\partial}{\partial x_m}) \\ &= \sum_{m=1}^n g_{km}\Gamma_{ij}^m, \end{aligned}$$

entonces,

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \sum_{l=1}^n \sum_{m=1}^n g^{kl} g_{lm} \Gamma_{ij}^m \\ &= \sum_{l=1}^n g^{kl} g(\frac{\partial}{\partial x_l}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{kl}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} + \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij}\right), \end{aligned}$$

donde hemos usado (3.12) y el hecho de que $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$. ∎

Definición 3.4.6 *Dados una curva $c(t)$ en M de clase C^1 y $X \in \Gamma(TM)$, decimos que X se transporta de manera paralela a través de c si:*

$$\nabla_{\dot{c}(t)} X(c(t)) = 0,$$

donde $\dot{c}(t)$ es el vector tangente en $T_{c(t)}M$ definido por c.

Proposición 3.4.7 *Dados curva $c(t)$ en M de clase C^1 y $v \in T_{c(0)}M$, existe un único $Y(c(t)) \in T_{\dot{c}(t)}M$ tal que $Y(c(0)) = v$ y $\nabla_{\dot{c}(t)} Y(c(t)) = 0$.*

Demostración Sea (U, ϕ) una carta tal que $U \cap c(t) \neq \emptyset$, denotemos con $(c^1(t), \ldots, c^n(t)) := \phi \circ c(t) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\dot{c}(t) = [c(t_0 + t)] = [\phi^{-1}\left(\phi(c(t_0)) + t(\dot{c}^1(t_0), \ldots, \dot{c}^n(t_0))\right)] = \sum_{j=1}^n \dot{c}^j(t_0) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde $\dot{c}^j(t_0) = \frac{dc^j}{dt}(t_0)$. Por la definición 3.1.1

$$\dot{c}(t).f(c(t)) = \sum_{j=1}^{n} \dot{c}^j(t) \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t))$$

De las propiedades de la de derivada covariante y de la condición de transporte paralelo:

$$\begin{aligned}
0 = \quad & \nabla_{\dot{c}(t)} Y(c(t)) \\
= \quad & \nabla_{\dot{c}(t)} \sum_{i=1}^{n} Y^i(c(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{c}(t).Y^i(c(t)) \frac{\partial}{\partial x_i} + Y^i(c(t)) \nabla_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dY^i(c(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} Y^i(c(t)) \nabla_{\dot{c}^j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dY^i(c(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} Y^i(c(t)) \dot{c}^j(t) \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dY^i(c(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} Y^i(c(t)) \dot{c}^j(t) \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{dY^k(c(t))}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y^i(c(t)) \dot{c}^j(t) \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dY^k(c(t))}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y^i(c(t)) \dot{c}^j(t) \Gamma_{ij}^k = 0, \qquad k = 1, ..., n,$$

con la condición inicial $Y(c(0)) = v$. Este sistema con condició inicial tiene una única solución por el teorema de Picard-Lindelöf. Véase [1]. ∎

Capítulo 4

El haz espinorial de $\mathbb{S}^2$

4.1. Definiciones

Recordemos que un cubriente para un espacio topológico X es un espacio topológico Y, junto con una función continua $\rho : Y \to X$, llamada proyección cubriente, tal que para cada $x \in X$ existe un abierto U_x tal que ρ restringida a cada componente conexa de $\rho^{-1}(U_x)$ es un homeomorfismo.

Como hemos visto, el espacio tangente de $\mathbb{S}^2$ es un haz vectorial con estructura de grupo SO(2), entonces, por analogía con la construcción del Operador de Dirac en dimensiones pares mayores a 2, definiremos el Haz Espinorial en $\mathbb{S}^2$ — dos cubrientes $2:1$ de SO(2) esto es, dos cubrientes de SO(2) tales que la imagen inversa de cada punto tiene cardinalidad 2, de tal manera que las funciones de transición de haz para el haz espinorial serán levantamientos de las funciones de transición de las respectivas funciones de transición del haz tangente de $\mathbb{S}^2$.

Considerando al grupo SO(2) representado por:

$$\mathrm{SO}(2) = \{e^{\mathrm{i}\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\},$$

dos posibles cubrientes $2:1$ para este espacio son:

1. $\mathrm{Spin}(2) = \{e^{\mathrm{i}\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ con la proyección ρ_1 dada por:
$$\rho_1(e^{\mathrm{i}\theta}) = e^{2\mathrm{i}\theta}.$$
2. $\mathrm{Spin}(2) = \{e^{\mathrm{i}\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ con la proyección ρ_2 dada por:
$$\rho_2(e^{\mathrm{i}\theta}) = e^{-2\mathrm{i}\theta}.$$

Definición 4.1.1 *Llamamos* "haz de espín +" *al haz vectorial:*

$$S^+ = (\bigsqcup_{i \in \{N,S\}} U_i \times \mathbb{C})/\sim$$

con funciones de transición

$$\tilde{t}^{+}_{SN}(p) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ \textit{donde } \theta \textit{ está dada por } \phi_N(p) = re^{\mathrm{i}\theta} \textit{ y } \phi_S(p) = re^{-\mathrm{i}\theta},$$

$$\tilde{t}^{+}_{NS}(p) = \tilde{t}^{+}_{SN}(p)^{-1} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

$$\tilde{t}^{+}_{NN}(p) = \tilde{t}^{+}_{SS}(p) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}.$$

Definición 4.1.2 *Análogamente definimos el* “haz de espín $-$”*por:*

$$S^{-} = (\bigsqcup_{i\in\{N,S\}} U_i \times \mathbb{C})/\sim$$

con funciones de transición

$$\tilde{t}^{-}_{SN}(p) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \textit{donde } \theta \textit{ está dada por } \phi_N(p) = re^{\mathrm{i}\theta}$$

$$\tilde{t}^{-}_{NS}(p) = \tilde{t}^{-}_{SN}(p)^{-1} = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},$$

$$\tilde{t}^{-}_{NN}(p) = \tilde{t}^{-}_{SS}(p) = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}.$$

Teorema 4.1.3 *Las definiciones anteriores dan como resultado dos haces vectoriales con fibra* $\mathbb{C}$*.*

Demostración Para mostrar esto basta hacer notar que las definiciones del *haz de espín* $+$ y del *haz de espín* $-$ satisfacen 1.3.4. Obviamente tanto $\tilde{t}^{+}_{ij}(p)$ como $\tilde{t}^{-}_{ij}(p)$ satisfacen (1.2) y (1.3), para $i, j \in \{\mathrm{N}, \mathrm{S}\}$. Para demostrar que se cumple (1.4) basta observar que si $p \in U_i \cap U_j \cap U_k$, al ser $i, j, k \in \{\mathrm{N}, \mathrm{S}\}$ siempre hay dos índices iguales. Entonces a lo menos una función de transición en $\tilde{t}_{ij}\tilde{t}_{jk}\tilde{t}_{ki}$ es la identidad y las otras dos son mutuamente inversas. ∎

Proposición 4.1.4 *Las funciones de transición de haz para* S^{+} *y* S^{-} *son levantamientos de las fuciones de transición del Haz Tangente a los cubrientes* $(Spin(2), \rho_1)$ *y* $(Spin(2), \rho_2)$ *respectivamete. De donde los siguientes diagramas son conmutativos:*

$$\begin{tikzcd} U_N \cap U_S \arrow[r, "\tilde{t}^{+}_{NS}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Spin}(2) \arrow[d, "\rho_1"] \\ U_N \cap U_S \arrow[r, "t_{NS}"'] & \mathrm{SO}(2) \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} U_N \cap U_S \arrow[r, "\tilde{t}^{+}_{SN}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Spin}(2) \arrow[d, "\rho_1"] \\ U_N \cap U_S \arrow[r, "t_{SN}"'] & \mathrm{SO}(2) \end{tikzcd},$$

$$\begin{tikzcd} U_N \cap U_S \arrow[r, "\tilde{t}^{-}_{NS}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Spin}(2) \arrow[d, "\rho_2"] \\ U_N \cap U_S \arrow[r, "t_{NS}"'] & \mathrm{SO}(2) \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} U_N \cap U_S \arrow[r, "\tilde{t}^{-}_{SN}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Spin}(2) \arrow[d, "\rho_2"] \\ U_N \cap U_S \arrow[r, "t_{SN}"'] & \mathrm{SO}(2) \end{tikzcd}.$$

Demostración Por la proposición 2.2.8, podemos escribir las funciones de transición no triviales del haz tangente $T\mathbb{S}^2$ de la siguiente manera

$$t_{SN}(p) = -e^{-2\mathrm{i}\theta} \quad \text{y} \quad t_{NS}(p) = -e^{2\mathrm{i}\theta}, \text{con } \ p = \phi_N^{-1}(re^{\mathrm{i}\theta}).$$

Tenemos entonces que

$$\rho_1(\tilde{t}^+_{SN}(p)) = \rho_1(-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}) = -e^{-2\mathrm{i}\theta} = t_{SN}(p),$$

$$\rho_1(\tilde{t}^+_{NS}(p)) = \rho_1(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}) = -e^{2\mathrm{i}\theta} = t_{NS}(p),$$

$$\rho_2(\tilde{t}^-_{SN}(p)) = \rho_2(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}) = \rho_2(e^{\mathrm{i}\theta+\frac{\pi}{2}}) = e^{-2\mathrm{i}\theta-\pi} = -e^{-2\mathrm{i}\theta} = t_{SN}(p),$$

$$\rho_2(\tilde{t}^-_{NS}(p)) = \rho_2(-\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}) = \rho_2(e^{-\mathrm{i}\theta-\frac{\pi}{2}}) = e^{2\mathrm{i}\theta-\pi} = -e^{2\mathrm{i}\theta} = t_{NS}(p),$$

de donde se sigue que los diagramas anteriores son conmutativos. ∎

Definición 4.1.5 *El* haz espinorial *es un haz vectorial con fibra* $\mathbb{C}^2$ *definido por:*

$$S = S^+ \oplus S^- = (\bigsqcup_{i\in\{N,S\}} U_i \times \mathbb{C}^2)/\sim$$

donde la relación de equivalencia está dada en la segunda y tercera entrada siguiendo las relaciones de equivalencia para S^+ *y* S^- *respectivamente.*

Hasta este momento, hemos construido haces vectoriales definiendo una relación de equivalencia en la unión disjunta de haces triviales sobre abiertos de la variedad en cuestión, a continuación utilizamos un enfoque un poco distinto.

Proposición 4.1.6 *Sea* $\{(U_N, \phi_N), (U_S, \phi_S)\}$ *el atlas para* $\mathbb{S}^2$ *dado por la proyección estereográfica. Entonces*

$$S \cong \left(\bigsqcup_{i\in\{N,S\}} \phi_i(U_i) \times \mathbb{C}^2 \right) \Big/ \sim$$

donde la relación de equivalencia está dada por:

$$(z, v, w) \sim (\zeta, \nu, \omega)$$

si y sólo si:

- $z = \frac{1}{\zeta}, \quad \nu = \tilde{t}^+_{ij} v, \quad \omega = \tilde{t}^-_{ij} w$ *si* $(z, v, w) \in \phi_i(U_i) \times \mathbb{C}^2$, $(\zeta, \nu, \omega) \in \phi_j(U_j) \times \mathbb{C}^2$, $i \neq j$.
- $z = \zeta$, $\omega = w$ *y* $\nu = v$, *si* $(z, v, w), (\zeta, \nu, \omega) \in \phi_i(U_i) \times \mathbb{C}^2$, $i = j$.

Demostración Esto es claro del hecho de que

$$\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$$

es un difeomorfismo, para $i \in \{N, S\}$. ∎

En lo anterior, hemos considerado a cada punto de $\phi_i(U_i)$ como un número complejo, debido al isomorfismo obvio entre $\phi_i(U_i)$ y $\mathbb{C}$.

Observación 4.1.7 *Consideremos nuevamente a las funciones de transición de $T\mathbb{S}^2$ como las funciones dadas por la multiplicación por números complejos, dadas en la proposición 2.2.8. Tomando sus raíces cuadradas podemos escribir para $z = |z|e^{\mathrm{i}\theta}$*

$$\tilde{t}^{+}_{SN}(z) = -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta} = -\mathrm{i}\sqrt{e^{-2\mathrm{i}\theta}} = -\mathrm{i}\sqrt{-t_{SN}(\phi_N^{-1}(z))} = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z}},$$

$$\tilde{t}^{-}_{SN}(z) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i}\sqrt{e^{2\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\sqrt{-t_{SN}(\phi_N^{-1}(z))} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z}},$$

donde localmente siempre es posible elegir la rama de "$\sqrt{\ }$"tal que $z \to \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}$ y $z \to \sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}$ son diferenciables para $z = 0$. Además, usando el hecho de que $\tilde{t}^{\pm}_{NS}(z) = \left(t^{\pm}_{SN}(z)\right)^{-1}$ y $\zeta = \frac{1}{z}$, tenemos

$$\tilde{t}^{+}_{NS}(z) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}, \tilde{t}^{+}_{SN}(\zeta) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}}, \tilde{t}^{+}_{NS}(\zeta) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}},$$

$$\tilde{t}^{-}_{NS}(z) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}, \tilde{t}^{-}_{SN}(\zeta) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}}, \tilde{t}^{-}_{NS}(\zeta) = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}}.$$

4.2. Secciones del haz espinorial

Ahora nos ocuparemos de definir secciones de S, pero dado que conocemos la manera de identificar elementos de $\phi_N(U_N) \times \mathbb{C}^2$ con elementos de $\phi_S(U_S) \times \mathbb{C}^2$, basta hacer las definiciones localmente y luego extender de manera diferenciable la sección a toda $\mathbb{S}^2$, lo cual se puede hacer aprovechando el hecho de que cualquiera de las cartas del atlas dado por la proyección estereográfica contiene a $\mathbb{S}^2$ salvo por un punto.

Definición 4.2.1 *Una* sección local *para S es una función diferenciable*

$$\sigma_i : \phi_i U_i \to (\phi_i(U_i) \times \mathbb{C}^2)$$

tal que $\pi \circ \sigma_i = \mathrm{id}_{\phi(U_i)}$, donde $\pi(z, \begin{pmatrix} v^+ \\ v^- \end{pmatrix}) = z$.

Observemos que toda sección local $\sigma_i : \phi_i(U_i) \to (\phi_i(U_i) \times \mathbb{C}^2)$ se puede escribir como:

$$\sigma_i(z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \sigma_i^+(z, \bar{z}) \\ \sigma_i^-(z, \bar{z}) \end{pmatrix}, i \in \{S, N\}.$$

donde $z \in \mathbb{C}$, $\begin{pmatrix} \sigma_i^+(z, \bar{z}) \\ \sigma_i^-(z, \bar{z}) \end{pmatrix} \in \pi^{-1}(z)$ y $\sigma_i^+(z)$, $\sigma_i^-(z)$ son funciones complejas $\mathbb{R}$-diferenciables. Entonces, si una sección local σ_N está definida en U_N, podemos extenderla a todo $\mathbb{S}^2$, como mencionábamos antes, si el siguiente límite existe:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|z\|\to\infty} \sigma_N(z,\bar{z}) &= \lim_{\|z\|\to\infty} (\tilde{t}^{+}_{SN}\sigma^{+}_{S}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}}), \tilde{t}^{-}_{SN}\sigma^{-}_{S}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}})) \\
&= \lim_{\|z\|\to\infty} (-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}\sigma^{+}_{S}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}}), \mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}\sigma^{-}_{S}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}})).
\end{aligned}
$$

Capítulo 5

El Operador de Dirac en $\mathbb{S}^2$

5.1. La derivada covariante de Levi-Civita en $\mathbb{S}^2$

Recordemos que para $\mathbb{S}^2$ en la carta (U_N, ϕ_N) cada espacio tangente de $\mathbb{S}^2$ tiene como base a $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$, donde

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi_N^{-1}}{\partial x_1} = \begin{pmatrix} \frac{-2(x^2+y^2+1)}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{-4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{-4x_1}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi_N^{-1}}{\partial x_2} = \begin{pmatrix} \frac{-4x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{2(x_1^2-x_2^2+1)}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \\ \\ \frac{-4x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \end{pmatrix}.$$

Tomando como métrica para cada $T_p\mathbb{S}^2$ la métrica inducida de $\mathbb{R}^3$, podemos calcular los símbolos de Christoffel asociados a la conexión de Levi-Civita según la relación (3.13):

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_{l}^{2} g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}g_{kl} + \frac{\partial}{\partial x_k}g_{jl} - \frac{\partial}{\partial x_l}g_{jk}\right)$$

donde $g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}) = \langle \frac{\partial \phi_N^{-1}}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi_N^{-1}}{\partial x_2} \rangle$ y la matriz $(g^{ij})^2_{i,j=1}$ es la inversa de $(g_{ij})^2_{i,j=1}$. De nuestros cálculos realizados en la sección 2.2 tenemos

$$(g_{ij})^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(x_1^2+x_2^2+1)^2} \end{pmatrix}, \quad (g^{ij})^2_{i,j=1} = \begin{pmatrix} \frac{(x_1^2+x_2^2+1)^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{(x_1^2+x_2^2+1)^2}{4} \end{pmatrix}.$$

Calculemos Γ_{11}^1 y Γ_{12}^1 :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{(x_1^2+x_2^2+1)^2}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{4}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}+\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{4}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{4}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(x_1^2+x_2^2+1)^2}{4}\left(\frac{-16x_1}{(x_1^2+x_2^2+1)^3}\right)\right)\\
&= \frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\\
\Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}\frac{(x_1^2+x_2^2+1)^2}{4}(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{4}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}-\frac{\partial}{\partial x_1}0)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(x_1^2+x_2^2+1)^2}{4}\left(\frac{-16x_2}{(x_1^2+x_2^2+1)^3}\right)\right)\\
&= \frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}.
\end{aligned}$$

Análogamente podemos calcular los demás símbolos de Christoffel y obtener:

$$\Gamma_{11}^1=\frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\qquad \Gamma_{12}^1=\frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1},\qquad \Gamma_{21}^1=\frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1},\qquad \Gamma_{22}^1=\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1},\qquad \Gamma_{12}^2=\frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\qquad \Gamma_{21}^2=\frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1},\qquad \Gamma_{22}^2=\frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}.$$

Ahora calcularemos los símbolos de Christoffel en la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, donde $e_i = \|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}$, los cuales escribiremos en la matriz $((B_i)_j^k)_{j,k=1}^2$ en el mismo sentido que se hizo en la definición 3.2.3 para los símbolos Christoffel en la base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$. Esto lo hacemos considerando lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^2 (B_j)_i^k e_k :=& \nabla_{e_j} e_i\\
=& \nabla_{\frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x_j}\|}\frac{\partial}{\partial x_j}}\left(\frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
=& \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x_j}\|}\left(\frac{\partial\big(\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^{-1}\big)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
=& \frac{1}{\|\frac{\partial}{\partial x_j}\|}\sum_{k=1}^2\left(\frac{\partial\big(\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^{-1}\big)}{\partial x_j}\delta_{ik}+\|\frac{\partial}{\partial x_i}\|^{-1}\Gamma_{ji}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\\
=& \frac{x_1^2+x_2^2+1}{2}\sum_{k=1}^2\left(x_j\delta_{ik}+\frac{x_1^2+x_2^2+1}{2}\Gamma_{ji}^k\right)\frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_1 &= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(\frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\\
&= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&= x_2\frac{x_1^2+x_2^2+1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\\
&= x_2 e_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} e_2 &= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(\frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\\
&= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&= -x_1\frac{x_1^2+x_2^2+1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\\
&= -x_1 e_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_2} e_1 &= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(\frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{-2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\\
&= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&= -x_2\frac{x_1^2+x_2^2+1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&= -x_2 e_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_2} e_2 &= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(\frac{2x_1}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{-2x_2}{x_1^2+x_2^2+1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\right)\\
&= \frac{(x_1^2+x_2^2+1)}{2}\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\\
&= x_1\frac{x_1^2+x_2^2+1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\\
&= x_1 e_1,
\end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\nabla_{e_1} e_1 = 0e_1 + x_2 e_2 = (B_1)_1^1 e_1 + (B_1)_2^1 e_2, \quad \nabla_{e_1} e_2 = -x_2 e_1 + 0e_2 = (B_1)_2^1 e_1 + (B_1)_2^2 e_2$$

$$\nabla_{e_2} e_1 = 0e_1 + (-x_1) e_2 = (B_2)_1^1 e_1 + (B_2)_2^1 e_2, \quad \nabla_{e_2} e_2 = x_1 e_1 + 0e_2 = (B_2)_1^2 e_1 + (B_2)_2^2 e_2$$

de donde $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ -x_2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 \\ x_1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.2. Derivada covariante espinorial

En este capítulo nos ocuparemos de definir una derivada covariante para el haz vectorial $(S, \pi, \mathbb{S}^2)$, que en cierto sentido será el "levantamiento"de la derivada covariante de Levi-Civita para $(T\mathbb{S}^2, \pi, \mathbb{S}^2)$. Esto lo lograremos definiendo matrices que se transformen según la proposición 3.3.1 con lo que garantizaremos que hemos definido en efecto una derivada covariante. La manera en que motivamos la definición de dichas matrices será usando el concepto de transporte paralelo que se introdujo en la sección 3.4.6.

Lemma 5.2.1 *Sea ∇ la derivada de Levi-Civita en la variedad Riemanniana M, sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormal para T_pM, sea $c : (a, b) \to M$ una curva diferenciable en M tal que $c(0) = p$, si $\{e_i^{||}(c(t))\}_{i=1}^n$ es la base obtenida por transporte paralelo de $\{e_i\}_{i=1}^n$ a lo largo de c, entonces $\{e_i^{||}(c(t))\}_{i=1}^n$ es ortonormal para toda $t \in (a, b)$.*

Demostración Consideremos $\nabla_{\dot{c}(t)} g(e_j^{||}(c(t)), e_k^{||}(c(t)))$, por ser ∇ compatible con la métrica, tenemos por definición 3.4.6

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} g\left(e_j^{||}(c(t)), e_k^{||}(c(t))\right) &= \dot{c}(t).g(e_j^{||}(c(t)), e_k^{||}(c(t))) \\
&= g\left(\nabla_{\dot{c}(t)} e_j^{||}(c(t)), e_k^{||}(c(t))\right) + g\left(e_j^{||}(c(t)), \nabla_{\dot{c}(t)} e_k^{||}(c(t))\right) \\
&= g\left(0, e_k^{||}(c(t))\right) + g\left(e_j^{||}(c(t)), 0\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

entonces $g(e_j^{||}(c(t)), e_k^{||}(c(t)))$ es constante, luego, dado que $g(e_k^{||}(c(0)), e_j^{||}(c(0))) = \delta_{kj}$ entonces $g(e_j^{||}(c(t)), e_k^{||}(c(t))) = \delta_{kj}$ para todo t. ∎

Recordemos que $e_i = [c_i]$, de donde $c_i : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una curva diferenciable en M. Tenemos entonces que $\{e_1(c_i(t)), ..., e_n(c_i(t))\}$ y $\{e_1^{||}(c_i(t)), ..., e_n^{||}(c_i(t))\}$ son bases ortonormales, por lo tanto, existe matriz $E_i(t) = (E_i(c_i(t))_k^l)_{k,l=1}^n \in O(n)$, con $E_i(0) = \mathrm{I}$ tal que

$$e_k(c_i(t)) = \sum_{l=1}^n E_i(c_i(t))_k^l e_l^{||}(c_i(t)).$$

Si $X \in \Gamma(\mathrm{TM})$, en coordenadas locales podemos escribir $X = \sum_{j=1}^n X^j e_j$ y calcular $\nabla_{e_i} X$ como:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} X &= \sum_{j=1}^n e_i.(X^j)e_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n X^j B_{ij}^k e_k \\
&= \sum_{k=1}^n \left(e_i.(X^k) + \sum_{j=1}^n X^j B_{ij}^k\right) e_k. \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
\nabla_{e_i}X(c_i(0)) &= \nabla_{e_i}(\sum_{j=1}^{n} X^j(c_i(t)))e_j(c_i(t)) \\
&= \nabla_{e_i}\left(\sum_{j=1}^{n} X^j(c_i(t))\sum_{l=1}^{n} E_i(c_i(t))^l_j e^{||}_l(c_i(t))\right)_{t=0} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} e_i.\left(X^j(c_i(t))E_i(c_i(t))^l_j\right) e^{||}_l(c_i(t))\right)_{t=0} \\
&+ \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} X^j(c_i(t))E_i(c_i(t))^l_j \nabla_{e_i} e^{||}_l(c_i(t))\right)_{t=0} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(e_i.\left(X^j(c_i(t))\right)E_i(c_i(0))^l_j + X^j(c_i(0))e_i.E_i(c_i(t))^l_j\right) e^{||}_l(c_i(0)) \\
&= \sum_{l=1}^{n}\left(e_i.X^l(c_i(0)) + \sum_{j=1}^{n} X^j(c_i(0))\frac{d}{dt}|_{t=0}E_i(c_i(t))^l_j\right) e_l(c_i(0)). \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Dado que la expresión en (5.1) es igual a la obtenida en (5.2) en el punto $c_i(0)$, entonces:

$$B^k_{ij} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} E_i(c_i(t))^k_j. \tag{5.3}$$

Tenemos que $B_i = \frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{G}_i(t)$ con $G_i : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathrm{O(n)}$ definida por

$$G_i := E_i \circ c_i,$$

la cual cumple que $\mathrm{G}_i(0) = \mathrm{I} \in \mathrm{SO(n)}$ y es continua, por lo tanto $\mathrm{G}_i(t) \in \mathrm{SO(n)}$ para toda $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

De cálculos previos tenemos que, para el caso particular de $\mathbb{S}^2$, las matrices de los símbolos de Christoffel en la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ para la carta norte (U_N) son:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & -x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

las cuales, de acuerdo con (5.3), provienen de la derivada de una función con elementos en SO(2), por ejemplo

$$
\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -x_2 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix} \cos(tx_2) & -\operatorname{sen}(tx_2) \\ \operatorname{sen}(tx_2) & \cos(tx_2) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G_1(t), \\
B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ -x_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\begin{pmatrix} \cos(tx_1) & \operatorname{sen}(tx_1) \\ -\operatorname{sen}(tx_1) & \cos(tx_1) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} G_2(t).
\end{aligned}
$$

Dado que $\mathrm{G}_i(0)$ = id, podemos levantar las matrices $\mathrm{G}_i(\mathrm{t})$ de manera única a los cubrientes Spin(2), tal que el levantamiento de $\tilde{G}_i(0)$ =id es también id en Spin(2). Para ρ_1 obtenemos

$$\tilde{G}_1(t) = e^{\frac{tix_2}{2}} \in \mathrm{Spin}(2), \quad \tilde{G}_2(t) = e^{\frac{-tix_1}{2}} \in \mathrm{Spin}(2).$$

Definimos:

$$\tilde{B}_1^{N+} := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{G}_1(t) = \frac{\mathrm{i}x_2}{2}, \qquad \tilde{B}_2^{N+} := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \tilde{G}_2(t) = \frac{-\mathrm{i}x_1}{2}. \tag{5.4}$$

Análogamente, considerando el cubriente $\rho_2 : \mathrm{Spin}(2) \to \mathrm{SO}(2)$:

$$\tilde{B}_1^{N-} := \frac{-\mathrm{i}x_2}{2}, \qquad \tilde{B}_2^{N-} := \frac{\mathrm{i}x_1}{2}. \tag{5.5}$$

Ahora bien, aplicando la discusión anterior para las matrices de los símbolos de Christoffel en la base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ la carta U_S, podemos tomar de manera análoga los levantamientos de estas matrices para definir:

$$\tilde{B}_1^{S+} := \frac{\mathrm{i}y_2}{2}, \qquad \tilde{B}_2^{S+} := \frac{-\mathrm{i}y_1}{2}, \qquad \tilde{B}_1^{S-} := \frac{-\mathrm{i}y_2}{2}, \qquad \tilde{B}_2^{S-} := \frac{\mathrm{i}y_1}{2}. \tag{5.6}$$

Con las definiciones (5.4) a (5.6) se pretende definir una conexión de manera global para secciones del haz espinorial de $\mathbb{S}^2$. En este sentido la derivada que definiremos para el haz $(S, \pi, \mathbb{S}^2)$ es un "levantamiento"de la derivada de Levi-Civita para $(T\mathbb{S}^2, \pi, \mathbb{S}^2)$. Valiéndonos de (3.8) mostraremos que en efecto podemos definir una conexión global de esta manera.

Teorema 5.2.2 *Dada* $\begin{pmatrix} \sigma_i^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_i^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix} \in \Gamma(S)$, *las fórmulas siguientes definen una derivada covariante para el haz* $(S, \pi, \mathbb{S}^2)$.

$$\nabla^{\mathrm{Spin}}_{e_i^N} \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^{\mathrm{Spin}+}_{e_i^N} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \\ \nabla^{\mathrm{Spin}-}_{e_i^N} \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_i^N.\sigma_N^+)(z,\bar{z}) + \sigma_N^+(z,\bar{z})\tilde{B}_i^{N+} \\ \\ (e_i^N.\sigma_N^-)(z,\bar{z}) + \sigma_N^-(z,\bar{z})\tilde{B}_i^{N-} \end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

$$\nabla^{\mathrm{Spin}}_{e_i^S} \begin{pmatrix} \sigma_S^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_S^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla^{\mathrm{Spin}+}_{e_i^S} \sigma_S^+(z,\bar{z}) \\ \\ \nabla^{\mathrm{Spin}-}_{e_i^S} \sigma_S^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_i^S.\sigma_S^+)(z,\bar{z}) + \sigma_S^+(z,\bar{z})\tilde{B}_i^{S+} \\ \\ (e_i^S.\sigma_S^-)(z,\bar{z}) + \sigma_S^-(z,\bar{z})\tilde{B}_i^{S-} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Demostración Para establecer este resultado, lo que haremos será mostrar que las matrices $\tilde{B}_i^{j\pm}$ satisfacen la proposición 3.3.1. Considerando que, por la definición del ángulo θ, $\cos(\theta(y_1, y_2)) = \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$, de donde $\frac{\partial}{\partial y_1}\theta(y_1, y_2) = \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2}$. Observemos que se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
(e_1^y.\tilde{t}_{NS}^+)(\tilde{t}_{NS}^+)^{-1} + \sum_{k=1}^{2}(t_{NS})_1^k(\tilde{t}_{NS}^+)\tilde{B}_k^{N+}(\tilde{t}_{NS}^+)^{-1}& \\
&= \|\frac{\partial}{\partial y_1}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial y_1}(e^{\mathrm{i}\theta(y_1,y_2)})e^{-\mathrm{i}\theta(y_1,y_2)} + \frac{y_2^2-y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}x_2}{2} - \frac{2y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}x_1}{2} \\
&= (\|\frac{\partial}{\partial y_1}\|^{-1}e^{\mathrm{i}\theta(y_1,y_2)}\frac{\partial}{\partial y_1}(\mathrm{i}\theta(y_1,y_2))e^{-\mathrm{i}\theta(y_1,y_2)} + \frac{y_2^2-y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}x_2}{2} - \frac{2y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}x_1}{2} \\
&= \mathrm{i}\frac{(1+y_1^2+y_2^2)}{2}\frac{y_2}{y_1^2+y_2^2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{y_1^2y_2-y_2^3-2y_1^2y_2}{(y_1^2+y_2^2)^2} \\
&= \frac{1+y_1^2+y_2^2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}y_2}{2} - \frac{1}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}y_2}{2} \\
&= \frac{\mathrm{i}y_2}{2} \\
&= \tilde{B}_1^{S+}.
\end{aligned}
$$

en lo anterior hemos usado que $(x_1,x_2)=(\frac{y_1}{y_1^2+y_2^2},-\frac{y_2}{y_1^2+y_2^2})$.

Análogamente lo siguiente prueba que la definición de $\tilde{B}_2^{S+}$ es consistente:

$$
\begin{aligned}
(e_2^y.\tilde{t}_{NS}^+)(\tilde{t}_{NS}^+)^{-1} + \sum_{k=1}^{2}(t_{NS})_2^k(\tilde{t}_{NS}^+)\tilde{B}_k^{N+}(\tilde{t}_{NS}^+)^{-1}& \\
&= \|\frac{\partial}{\partial y_2}\|^{-1}\frac{\partial}{\partial y_2}(e^{\mathrm{i}\theta(y_1,y_2)})e^{-\mathrm{i}\theta(y_1,y_2)} - \frac{2y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}x_2}{2} - \frac{y_2^2-y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}x_1}{2} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{(1+y_1^2+y_2^2)y_1}{y_1^2+y_2^2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{2y_1y_2}{y_1^2+y_2^2}\frac{y_2}{y_1^2+y_2^2} - \frac{y_2^2-y_1^2}{y_1^2+y_2^2}\frac{y_1}{y_1^2+y_2^2}\right) \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2}\frac{(1+y_1^2+y_2^2)y_1}{y_1^2+y_2^2} + \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2}\frac{\mathrm{i}}{2} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}y_1}{y_1^2+y_2^2} - \frac{\mathrm{i}y_1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}y_1}{y_1^2+y_2^2} \\
&= -\frac{\mathrm{i}y_1}{2} \\
&= \tilde{B}_2^{S+}.
\end{aligned}
$$

El cálculo para mostrar que se han escogido correctamente los B_i^{N+} se hace de manera análoga, sustituyendo x_i por y_i en el cálculo anterior. Para mostrar que los B_j^{S-} y los B_i^{N-} también cumplen con la relación (3.8), basta observar que en la primera parte de la suma en (3.8) el signo al momento de derivar cambia, así como en la segunda parte de la suma, debido a que el signo de los B_i^{J-} es el contrario al de los B_i^{J+}, $J\in\{N,S\}$. Entonces por la proposición 3.3.1, las ecuaciones 5.7 y 5.8 definen una derivada covariante para el haz $(S,\pi,\mathbb{S}^2)$. ∎

5.3. Álgebra de Clifford

Como se comentó en la introducción, necesitamos encontrar matrices para cada vector tangente que cumplan con ciertas condiciones, en orden de definir satisfactoriamente el operador de Dirac de manera global para secciones del haz de espín en $\mathbb{S}^2$. Lo cual lograremos definiendo la función:

$$\gamma : T_p\mathbb{S}^2 \to \mathrm{End}(\pi^{-1}(p)) = \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

donde $(S, \pi, \mathbb{S}^2)$ es el haz espinorial para $\mathbb{S}^2$, que sea lineal, por lo cual basta definir a γ en una base de $T_p\mathbb{S}^2$, y por conveniencia escogemos a $\{e_1^i, e_2^i\}_{\{i=N,S\}}$, dado que hemos fijado anteriormente esta base para cuando tratamos con la derivada covariante espinorial y para la definición de las funciones de transición en el haz Espinorial.

Recordemos que según se mencionó en la introducción, las relaciones que dichas matrices deben satisfacer son:

$$\gamma(e_i^k)\gamma(e_j^k) + \gamma(e_j^k)\gamma(e_i^k) = -2\delta_{ij}\mathrm{I},$$

para $k \in \{N, S\}$. El álgebra generada multiplicativamente por las matrices $\gamma(e_1^k)$ y $\gamma(e_2^k)$ es llamada el Álgebra de Clifford asociada a la métrica inducida por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ahora bien, las matrices que proponemos son:

$$\gamma(e_1^k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma(e_2^k) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

Para mostrar que dicha asignación se puede hacer de manera global a todo $T\mathbb{S}^2$, bastará definirla en U_N y U_S y mostrar que ambas definiciones son compatibles bajo transformación de coordenadas.

Definición 5.3.1 *Sean $\{e_1^N, e_2^N\}$ y $\{e_1^S, e_2^S\}$ las bases ortonormales dadas en la definición 2.2.5, definimos una aplicación lineal:*

$$\gamma : T_pU_N \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

por

$$\gamma(e_1^N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(e_2^N) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Análogamente definimos:

$$\gamma : T_pU_S \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$$

por

$$\gamma(e_1^S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(e_2^S) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 5.3.2 *La definición anterior de γ no depende de la carta en la que se hace.*

Demostración Necesitamos mostrar que la definición hecha en una carta es compatible con la que hicimos en la otra, en esto, usaremos la transformación de las bases ortonormales $\{e_1^N, e_2^N\}$, $\{e_1^S, e_2^S\}$ que aparece en la proposición 2.2.6 y la representación de las funciones de transición del haz espinorial dada en términos del ángulo θ, que se mencionan en la observación 4.1.7:

$$\begin{aligned}
\gamma(e_1^N)\begin{pmatrix}\sigma_N^+(z,\bar z)\\ \sigma_N^-(z,\bar z)\end{pmatrix} &= \gamma(-\cos(2\theta)e_1^S - \operatorname{sen}(2\theta)e_2^S)\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & -\cos(2\theta)-\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta)\\ \cos(2\theta)-\mathrm{i}\operatorname{sen}(2\theta) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & -e^{2\mathrm{i}\theta}\\ e^{-2\mathrm{i}\theta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\sigma_N^-(z,\bar z)\\ -\sigma_N^+(z,\bar z)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_N^+(z,\bar z)\\ \sigma_N^-(z,\bar z)\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma(e_2^N)\begin{pmatrix}\sigma_N^+(z,\bar z)\\ \sigma_N^-(z,\bar z)\end{pmatrix} &= \gamma(\operatorname{sen}(2\theta)e_1^S - \cos(2\theta)e_2^S)\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & \operatorname{sen}(2\theta)-\mathrm{i}\cos(2\theta)\\ -\operatorname{sen}(2\theta)-\mathrm{i}\cos(2\theta) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}e^{2\mathrm{i}\theta}\\ -\mathrm{i}e^{-2\mathrm{i}\theta} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ -\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-e^{\mathrm{i}\theta}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\\ e^{-\mathrm{i}\theta}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\mathrm{i}\sigma_N^-(z,\bar z)\\ \mathrm{i}\sigma_N^+(z,\bar z)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0 & \mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_S^+(z,\bar z)\\ \sigma_S^-(z,\bar z)\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tenemos entonces que no importa si primero aplicamos la función γ a $\{e_i^N\}$ y después tomamos el cambio de cartas o viceversa, de manera análoga podemos verificar que γ aplicada a $\{e_j^S\}$ se transforma correctamente, por lo cual, la definición de γ está bien hecha. ∎

5.4. El operador de Dirac

Definición 5.4.1 *Definimos el operador de Dirac en la carta U_N por:*

$$D_N = \gamma(e_1^N)\nabla^{spin}_{e_1^N} + \gamma(e_2^N)\nabla^{spin}_{e_2^N}$$

donde $\gamma(e_1^N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *y* $\quad \gamma(e_2^N) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

De manera análoga, definimos el operador de Dirac en la carta U_S por:

$$D_S = \gamma(e_1^S)\nabla^{spin}_{e_1^S} + \gamma(e_2^S)\nabla^{spin}_{e_2^S}$$

donde $\gamma(e_1^S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *y* $\quad \gamma(e_2^S) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

Para la definición del Operador de Dirac hemos escogido la base $\{e_1, e_2\}$ ya sea en una carta o en otra, mostraremos a continuación que la definición del operador de Dirac no depende de la base ortonormal que se haya escogido.

Proposición 5.4.2 *La definición del Operador de Dirac no depende de la base ortonormal que se escoja.*

Demostración Sea $\{b_1, b_2\}$ una base ortonormal para T_pU_N. Por ser $\{e_1, e_2\}$ y $\{b_1, b_2\}$ bases ortonormales, existe $(\mathcal{O}_i^j)_{i,j=1}^2$ tal que $e_j = \sum_{i=1}^2 \mathcal{O}_j^i b_i$, con $(\mathcal{O}_i^j)_{i,j=1}^2$ matriz ortogonal, es decir $\sum_{k=1}^2 \mathcal{O}_k^m \mathcal{O}_k^2 = \delta_{mn} = \sum_{k=1}^n \mathcal{O}_m^k \mathcal{O}_n^k$. De la definición del operador de Dirac para la carta norte:

$$\begin{aligned}
D_N &= \sum_{i=1}^2 \gamma(e_i)\nabla^{spin}_{e_i} \\
&= \sum_{i=1}^2 \gamma(\sum_{j=1}^2 \mathcal{O}_i^j b_j)\nabla^{spin}_{\sum_{k=1}^2 \mathcal{O}_i^k b_k} \\
&= \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^2\sum_{i=1}^2 \mathcal{O}_i^j \mathcal{O}_i^k \gamma(b_j)\nabla^{spin}_{b_k} \\
&= \sum_{k=1}^2\sum_{j=1}^2 \delta_{kj}\gamma(b_j)\nabla^{spin}_{b_k} \\
&= \sum_{j=1}^2 \gamma(b_j)\nabla^{spin}_{b_j}.
\end{aligned}$$

Análogamente se muestra que se cumple para D_S. ∎

Teorema 5.4.3 *En coordenadas locales $z = x_1 + \mathrm{i}x_2 \in \phi_N(U_N) = \mathbb{C}$,*

$$D_N = \begin{pmatrix} 0 & (1+z\bar{z})\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2}z \\ -(1+z\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\bar{z} & 0 \end{pmatrix}$$

y en las coordenadas locales $\zeta = y_1 + \mathrm{i}y_2 \in \phi_S(U_S) = \mathbb{C}$,

$$D_S := \begin{pmatrix} 0 & (1+\zeta\bar{\zeta})\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} - \frac{1}{2}z \\ -(1+\zeta\bar{\zeta})\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{2}\bar{\zeta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración De la definición anterior, de las definiciones de $\nabla^{spin}_{e_i^N}$ y de la definición 5.3.1 obtenemos:

$$D_N \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^{spin+}_{e_1^N} & 0 \\ 0 & \nabla^{spin-}_{e_1^N} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^{spin+}_{e_2^N} & 0 \\ 0 & \nabla^{spin-}_{e_2^N} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & e_1^N - \mathrm{i}\frac{x_2}{2} + \mathrm{i}e_2^N - \frac{x_1}{2} \\ -e_1^N - \mathrm{i}\frac{x_2}{2} + \mathrm{i}e_2^N + \frac{x_1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e_1^N.\sigma_N^-(z,\bar{z}) - \mathrm{i}\frac{x_2}{2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) + \mathrm{i}e_2^N.\sigma_N^-(z,\bar{z}) - \frac{x_1}{2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) \\ \\ \mathrm{i}e_2^N.\sigma_N^+(z,\bar{z}) + \mathrm{i}\frac{x_1}{2}\sigma_N^+(z,\bar{z}) - e_1^N.\sigma_N^-(z,\bar{z}) - \mathrm{i}\frac{x_2}{2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_N^-(z,\bar{z}) - \mathrm{i}\frac{x_2}{2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) + \mathrm{i}\frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) - \frac{x_1}{2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) \\ \\ \mathrm{i}\frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_N^+(z,\bar{z}) + \frac{x_1}{2}\sigma_N^+(z,\bar{z}) - \frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_N^-(z,\bar{z}) - \mathrm{i}\frac{x_2}{2}\sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}) - \frac{1}{2}(x_1 + \mathrm{i}x_2) \\ -\frac{1+x_1^2+x_2^2}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x_2}) + \frac{1}{2}(x_1 - \mathrm{i}x_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (1+z\bar{z})\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \frac{1}{2}z \\ -(1+z\bar{z})\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\bar{z} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar{z}) \\ \sigma_N^-(z,\bar{z}) \end{pmatrix}$$

donde $z = x_1 + \mathrm{i}x_2$.

De manera análoga para el Operador de Dirac en la carta $U_S \subset \mathbb{S}^2$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
D_S &= \gamma(e_1^S)\nabla^{spin}_{e_1^S} + \gamma(e_2^S)\nabla^{spin}_{e_2^S} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^{spin+}_{e_1^S} & 0 \\ 0 & \nabla^{spin-}_{e_1^S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla^{spin+}_{e_2^S} & 0 \\ 0 & \nabla^{spin-}_{e_2^S} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (1+\zeta\bar{\zeta})\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} - \frac{1}{2}\zeta \\ -(1+\zeta\bar{\zeta})\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{1}{2}\bar{\zeta} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Ahora pasaremos a mostrar, a posteriori, que el operador de Dirac está bien definido, bastará demostrar que se transforma correctamente bajo cambio de coordenadas, esto lo hacemos en el siguiente teorema:

Teorema 5.4.4 *Las fórmulas de los operadores D_N y D_S coinciden en la intersección de sus dominios.*

Demostración Sea $\sigma_N = \sigma \circ \phi_N^{-1}$ la restricción de la sección $\sigma \in \Gamma(S^+ \oplus S^-)$ definida en $\phi(U_N \cap U_S)$, a esta sección le corresponde la sección $\sigma_S = \sigma \circ \phi_S^{-1}$ la cual obtenemos por multiplicación de σ_N con las funciones de transición de haz:

$$
\sigma_N(z,\bar{z}) = (\sigma_N^+(z,\bar{z}), \sigma_N^-(z,\bar{z})) = \left(\mathrm{i}\sqrt{\frac{z}{\bar{z}}}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}}), -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar{z}}) \right)
$$

que a su vez le podemos hacer corresponder una sección definida localmente en el abierto norte, obteniendo la sección original, mendiante la multiplicación con la funcion de transición de haz inversa:

$$
\sigma_S(\zeta,\bar{\zeta}) = (\sigma_S^+(\zeta,\bar{\zeta}), \sigma_S^-(\zeta,\bar{\zeta})) = \left(-\mathrm{i}\sqrt{\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}}\sigma_N^+(\frac{1}{\zeta},\frac{1}{\bar{\zeta}}), +\mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar{\zeta}}{\zeta}}\sigma_N^-(\frac{1}{\zeta},\frac{1}{\bar{\zeta}}) \right)
$$

donde $\zeta = \frac{1}{z}$. Observemos además que

$$
\frac{\partial}{\partial z}\sigma^{\pm}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{\bar{z}}) = \frac{\partial\sigma_S^{\pm}}{\partial\zeta}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{\bar{z}})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{\partial\sigma_S^{\pm}}{\partial\bar{\zeta}}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{\bar{z}})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial\sigma_S^{\pm}}{\partial\zeta}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{\bar{z}})
$$

y análogamente

$$
\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\sigma_S^{\pm}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{\bar{z}}) = -\frac{1}{\bar{z}^2}\frac{\partial\sigma_S^{\pm}}{\partial\bar{\zeta}}(\tfrac{1}{z},\tfrac{1}{\bar{z}}).
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
D_N \begin{pmatrix} \sigma_N^+(z,\bar z) \\ \sigma_N^-(z,\bar z) \end{pmatrix} &= D_N \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{\frac{z}{\bar z}}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \\ -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar z}{z}}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{i}((1+z\bar z)\frac{\partial}{\partial \bar z} - \frac{1}{2}z)\sqrt{\frac{\bar z}{z}}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \\ \mathrm{i}(-(1+z\bar z)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2}\bar z)\sqrt{\frac{z}{\bar z}}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{i}\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{\bar z}{z}}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) - \mathrm{i}(1+z\bar z)\frac{1}{2\sqrt{z\bar z}}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) + \mathrm{i}(1+z\bar z)\frac{1}{\bar z^2}\sqrt{\frac{\bar z}{z}}\frac{\partial \sigma_S^-}{\partial \bar\zeta}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \\ \\ \mathrm{i}\frac{1}{2}\bar z\sqrt{\frac{z}{\bar z}}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) - \mathrm{i}(1+z\bar z)\frac{1}{2\sqrt{z\bar z}}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) + \mathrm{i}(1+z\bar z)\sqrt{\frac{z}{\bar z}}\frac{1}{z^2}\frac{\partial \sigma_S^+}{\partial \zeta}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{z\bar z} - \frac{\mathrm{i}}{2}(\frac{1}{\sqrt{z\bar z}} + \sqrt{z\bar z})\right)\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) + \mathrm{i}(1+z\bar z)\frac{1}{\bar z^2}\sqrt{\frac{\bar z}{z}}\frac{\partial \sigma_S^-}{\partial \bar\zeta}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \\ \\ \left(\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{z\bar z} - \frac{\mathrm{i}}{2}(\frac{1}{\sqrt{z\bar z}} + \sqrt{z\bar z})\right)\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) + \mathrm{i}(1+z\bar z)\frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{z}{\bar z}}\frac{\partial \sigma_S^+}{\partial \zeta}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z\bar z}}\sigma_S^-(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\right) + \mathrm{i}(1+\frac{1}{z\bar z})\sqrt{\frac{\bar z}{z}}\frac{\partial \sigma_S^-}{\partial \bar\zeta}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \\ \\ -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{z\bar z}}\sigma_S^+(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z})\right) + \mathrm{i}(1+\frac{1}{z\bar z})\sqrt{\frac{z}{\bar z}}\frac{\partial \sigma_S^+}{\partial \zeta}(\frac{1}{z},\frac{1}{\bar z}) \\ \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{\frac{\zeta}{\bar\zeta}}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\zeta\bar\zeta}\sigma_S^-(\zeta,\bar\zeta) + \mathrm{i}(1+\zeta\bar\zeta)\sqrt{\frac{\bar\zeta}{\zeta}}\frac{\partial \sigma_S^-}{\partial \bar\zeta}(\zeta,\bar\zeta)\right) \\ \\ \mathrm{i}\sqrt{\frac{\bar\zeta}{\zeta}}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\zeta\bar\zeta}\sigma_S^+(\zeta,\bar\zeta) + \mathrm{i}(1+\zeta\bar\zeta)\sqrt{\frac{\zeta}{\bar\zeta}}\frac{\partial \sigma_S^+}{\partial \zeta}(\zeta,\bar\zeta)\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\zeta\sigma_S^-(\zeta,\bar\zeta) + (1+\zeta\bar\zeta)\frac{\partial \sigma_S^-}{\partial \bar\zeta}(\zeta,\bar\zeta) \\ \\ \frac{1}{2}\bar\zeta\sigma_S^+(\zeta,\bar\zeta) - (1+\zeta\bar\zeta)\frac{\partial \sigma_S^+}{\partial \zeta}(\zeta,\bar\zeta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & (1+\zeta\bar\zeta)\frac{\partial}{\partial \bar\zeta} - \frac{1}{2}\zeta \\ \\ -(1+\zeta\bar\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\bar\zeta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_S^+(\zeta,\bar\zeta) \\ \\ \sigma_S^-(\zeta,\bar\zeta) \end{pmatrix} \\
&= D_S \begin{pmatrix} \sigma_S^+(\zeta,\bar\zeta) \\ \sigma_S^-(\zeta,\bar\zeta) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

con lo cual queda establecido que nuestro operador de Dirac está bien definido. ∎

Bibliografía

[1] E. A. Coddington: *An introduction to ordinary differential equations*. Dover Publications, New York, 1989.

[2] T. Friedrich: *Dirac Operators in Riemannian Geometry*. American Mathematical Society, Providence, 2000.

[3] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine: *Riemannian Geometry*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] J. Jost: *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[5] M. R. Sepanski: *Compact Lie Groups*. Graduated Texts in Mathematics 235, Springer, New York, 2007.