UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

TEORIA NO CONMUTATIVA DE CARACTERES DEL GRUPO SIMÉTRICO: LA BIÁLGEBRA DE PERMUTACIONES

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS QUE

PRESENTA:

JAIME ZIRATE ARZATE

ASESOR DE TESIS:

DR. ERNESTO VALLEJO RUIZ

MORELIA, MICHOACAN, MEXICO.

JUNIO DEL 2012

FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICO MATEMÁTICAS

Dedicado a:

Mi asesor de tesis, el Dr. Ernesto Vallejo Ruiz

A Krishna

A mis hermanos espirituales

AGRADECIMIENTOS

Primeramente, quiero agradecer y dedicar este trabajo de tesis al Dr. Ernesto Vallejo Ruiz, asesor de tesis. Su apoyo, confianza, paciencia y conocimiento están presentes en todo este trabajo, del cual aprendí mucho y me preparó para el avance en el conocimiento de las matemáticas.

Agradezco también a mis sinodales de tesis, el Dr. Luis Valero Elizondo, la Dra. María Luisa Pérez Segui, el Dr. Rigoberto Vera Mendoza y el Dr. Francisco Domínguez Mota. Su apoyo fue muy importante para poder concluir este trabajo.

Agradezco también a la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la UNAM por la beca otorgada para concluir mi tesis de licenciatura a través del proyecto de investigación "Combinatoria algebraica y álgebra lineal" número IN103508. Su ayuda fue básica para que este trabajo se haya concluido de manera satisfactoria.

También quiero agradecer en especial a la iglesia de Sri Chaitanya Saraswat Math, por abrirme las puertas a la Conciencia del Supremo.

Agradezco todo el apoyo que me han dado mis familiares y amigos. En especial agradezco a mis padres Jaime y María, por haberme dado la oportunidad de ser libre. Agradezco a mis amigos y hermanos espirituales Marilú, Marisol, José Luis, Fernando, Prahbú Suhrid y Deva Priya, por ser apoyo y consorte incondicionales. Agradezco también a Raquel por su apoyo y amor en las etapas de escritura de tesis.

Este trabajo está dedicado a todas las personas que han estado presentes conmigo en todo este tiempo y que me han enseñado a vivir, lo que es la amistad, la hermandad, el conocimiento, el amor e incluso la desilusión. Agradezco a Dios por darme la existencia y por amarme incondicional e infinitamente.

Nitai goura hari bol

Indice General

Capítulo 1

Introducción

La teoría de representaciones de un grupo G es el estudio de homomorfismos

$$\phi : G \longrightarrow Gl_K(M),$$

donde $Gl_K(M)$ es el grupo de endomorfismos invertibles de V para un espacio vectorial V sobre un campo K. El homomorfismo ϕ es llamado una *representación* de G. En este caso tenemos una *acción lineal* de G sobre M, dada por

$$g.x = \phi(g)(x) \text{ para todo } g \in G,\ x \in M.$$

Recíprocamente, sea M un K- espacio vectorial y $. : G \times M \longrightarrow M$ una acción lineal del grupo G sobre M. Entonces tenemos un homomorfismo

$$\phi : G \longrightarrow Gl_K(M),$$

$$g \mapsto (x \mapsto g.x \text{ para todo } x \in V), \text{ para todo } g \in G.$$

Decimos que M es un $K[G]$- *módulo*. También decimos que ϕ es la *representación de G inducida por M*.

Ejemplo (La representación regular) Sea G un grupo y K un campo. Denotamos por KG al K- módulo libre generado por K. Dado $g \in G$ y $v = \sum_{x\in G} c_x x \in KG$, definimos

$$g.v = \textstyle\sum_{x\in G} c_x(g.x).$$

Es decir, la acción lineal de G sobre KG es la extensión lineal del producto en G. La representación inducida es llamada la *representación regular* de G. Denotamos al módulo correspondiente por $K[G]$.

Dado V un $K[G]$- módulo y W un subespacio de V, decimos que W es un $K[G]-$ *submódulo* de V si W es invariante bajo la acción de G. Para los subsecuente utilizaremos el siguiente teorema, que se prueba en teoría clásica de representaciones (ver)

Teorema (Teorema de Maschke)
Sea G un grupo finito y K un campo cuya característica no divide al orden de G. Sea M un $K[G]$- módulo de dimensión finita. Entonces todo $K[G]$- submódulo N de M es un sumando directo de M, es decir, existe un $K[G]$- submódulo N' tal que

$$M = N \oplus N'.$$

En el resto de este capítulo supondremos que K es un campo de característica 0 y G un grupo finito. Por tanto podemos aplicar el teorema de Maschke a todos los $K[G]$-módulos de dimensión finita.

Definición. Sea M un $K[G]$- módulo, $M \neq \{0\}$. Decimos que M es *irreducible* si no tiene $K[G]$- submódulos no triviales, es decir, distintos de $\{0\}$ y M. Decimos que M es *semisimple* si se puede escribir como suma directa de $K[G]$-submódulos irreducibles.

Sea M un $K[G]$- módulo. Por el teorema de Maschke todo $K[G]$- submódulo es un sumando directo. Por inducción sobre dim$M$ podemos concluir que M *es semisimple.* Por tanto M *es semisimple si y sólo si todo* $K[G]$- *submódulo de* M *es un sumando directo.* Por tanto, si la característica de K es 0 y $|G| < +\infty$, se sigue que *todo* $K[G]$-*módulo de dimensión finita es semisimple.*

Definición. Sea M un $K[G]$- módulo y $\phi : G \longrightarrow Gl_K(M)$ la representación inducida. El mapeo

$$\chi_M : G \longrightarrow K,$$

$$g \mapsto tr(\phi(g)) \text{ para todo } g \in G,$$

donde $tr : Gl_K(M) \longrightarrow K$ denota la función traza, es llamado el *carácter de* G *correspondiente a* M. Observemos que χ_M es constante en las clases de conjugación de G, es decir, χ_M es una *función de clase* de G. Denotamos a las funciones de clase de G para un campo dado K por $C\ell_K(G)$. Esto es,

$$C\ell_K(G) = \{f : G \longrightarrow K | f \text{ es constante en clases de conjugación de } G\}.$$

Dado χ_M un carácter de G, definimos el *grado* de χ_M como

$$gr(\chi_M) = \chi_M(1_G),$$

donde 1_G es el elemento neutro de G. Observemos que $gr(\chi_M)$ =dim$M$. Observemos que dos $K[G]$- módulos son isomorfos si y sólo si los caracteres correspodientes son iguales. Decimos que χ_M es *irreducible* si M es irreducible. Luego todo carácter de G se puede escribir como combinación lineal de caracteres irreducibles con coeficientes enteros no negativos, y éstos coeficientes determinan el módulo correspondiente, salvo isomorfismo. Además, si G es finito y K es un campo algebraicamente cerrado, se tiene la fórmula explícita

$$\alpha = \textstyle\sum_{\chi} (\alpha, \chi)_G \, \chi \text{ para todo } \alpha \in C\ell_K(G),$$

donde la suma corre por los caracteres irreducibles χ de G, y $(.,.)_G$ denota el producto escalar en $C\ell_K(G)$, dado por

$$(\alpha, \beta)_G = \tfrac{1}{|G|} \textstyle\sum_{g \in G} \alpha(g)\beta(g^{-1}).$$

Por lo tanto, todo $K[G]$- módulo M es isomorfo a una suma directa

$$M \cong_G \textstyle\bigoplus_{\chi} (\chi_M, \chi)_G M_{\chi},$$

donde la suma corre por los caracteres irreducibles χ de G y M_χ es un $K[G]$- módulo irreducible que corresponde al carácter χ.

Estamos interesados en representaciones del grupo simétrico. Denotamos por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ al conjunto de los enteros positivos y por $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ al conjunto de los enteros no negativos. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $[n] = \{1, ..., n\}$. También denotamos $[0] = \emptyset$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. El *grupo simétrico de orden* n, denotado por S_n, es el conjunto de todas las biyecciones de $[n]$ en $[n]$. Escribimos a cada $\pi \in S_n$ en la forma

$$\pi = \pi_1 ... \pi_n, \text{ donde } \pi_i = \pi(i) \text{ para todo } i \in [n].$$

Por el teorema de Maschke, podemos descomponer todo $K[S_n]$- módulo M como suma directa de submódulos irreducibles con multiplicidad dada por los productos escalares (χ_M, χ) para todo carácter irreducible χ. En teoría de representaciones del grupo simétrico se tienen los siguientes problemas fundamentales:

(i) Determinar los caracteres irreducibles de S_n.
(ii) Determinar los productos escalares $(\alpha, \chi)_{S_n}$, donde α es un carácter arbitrario de S_n y χ es un carácter irreducible de S_n.

Nuestra aproximación a (i) y (ii) consiste en la *teoría no conmutativa de caracteres del grupo simétrico*. Trabajaremos con biálgebras $(\mathcal{A}, \bullet, \delta)$ de la forma

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A_n,$$

donde la multiplicación y la comultiplicación en $\mathcal{A}$ son *graduadas*, es decir

$$A_n \bullet A_m \subseteq A_{n+m} \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}_0, \text{ y}$$

$$\delta(A_n) \subseteq \bigoplus_{k+l=n} A_k \otimes A_l \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Además $A_0 \cong K$ (decimos que $\mathcal{A}$ es *conexa*). Sean

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} KS_n, \text{ y}$$

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} C\ell_K(S_n).$$

Definiremos una estructura de biálgebra graduada conexa en $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$, y relacionaremos estas estructuras mediante un *epimorfismo graduado de biálgebras*

$$c : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

Utilizaremos la combinatoria de los diagramas de Young y la correspondencia RSK (ver 5.3), para definir una *sub-biálgebra* $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{P}$, llamada la *biálgebra copláctica*, tal que $c|_{\mathcal{Q}}$ es un epimorfismo de biálgebras que respeta las formas bilineales $(,)_{\mathcal{P}}$ y $(,)_{\mathcal{C}}$, que se definirán más adelante.

El capítulo 4 trata de la estructura de biálgebra en $\mathcal{P}$, llamada la *biálgebra de permutaciones*. La biálgebra de permutaciones fue estudiada primeramente por Malvenuto y Reutenauer (ver [1, pág. 9]). La estructura de álgebra en $\mathcal{P}$ se puede definir como sigue: sean $m, n \in \mathbb{N}_0$ y $\alpha \in S_n$, $\beta \in S_m$. Definimos

$$\alpha \star \beta = \sum_\gamma \gamma,$$

donde la suma corre por todas las permutaciones $\gamma \in S_{n+m}$ tales que

$$\gamma(i) < \gamma(j) \text{ si y sólo si } \alpha(i) < \alpha(j) \text{ para todo } i, j \in [n], \text{ y}$$

$$\gamma(i) < \gamma(j) \text{ si y sólo si } \beta(i-n) < \beta(j-n) \text{ para todo } j \in [n+m] \setminus [n].$$

Por ejemplo

$$12 \star 21 = 1243 + 1342 + 1432 + 2341 + 2431 + 3421.$$

Habiendo definido la multiplicación para cada par de permutaciones α, β, podemos extender linealmente para obtener un *producto graduado*

$$\star : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}.$$

Sea $1_{\mathcal{P}} = id_{\emptyset}$, el único elemento de S_0. Entonces $1_{\mathcal{P}}$ es neutro con respecto a $\star$, y $(\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}})$ es un *álgebra graduada*.

Para construir la estructura de *coálgebra* en $\mathcal{P}$, sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\pi \in S_n$. Definimos

$$\Delta(\pi) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \otimes \beta_k,$$

donde, para todo $k \in [n] \cup \{0\}$, $\alpha_k \in S_k$, $\beta_k \in S_{n-k}$ están determinados por las condiciones

$$\alpha_k^{-1}(i) < \alpha_k^{-1}(j) \text{ si y sólo si } \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j) \text{ para todo } i, j \in [k], \text{ y}$$

$$\beta_k^{-1}(i) < \beta_k^{-1}(j) \text{ si y sólo si } \pi^{-1}(i+n) < \pi^{-1}(j+n) \text{ para todo } i, j \in [m].$$

Por ejemplo, sea $\pi = 4132 \in S_4$. Entonces

$$\Delta(\pi) = id_{\emptyset} \otimes 4132 + 1 \otimes 321 + 12 \otimes 21 + 132 \otimes 1 + 4132 \otimes id_{\emptyset}.$$

La counidad $\epsilon_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \longrightarrow K$ en $\mathcal{P}$ está caracterizada por

$$\epsilon_{\mathcal{P}}(\alpha) = 0 \text{ para todo } \alpha \in S_n,\ n > 0, \text{ y } \epsilon_{\mathcal{P}}(id_{\emptyset}) = 1.$$

Resulta que $(\mathcal{P}, \Delta, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una *coálgebra graduada*. La graduación se sigue de que

$$\Delta(KS_n) \subseteq \textstyle\bigoplus_{k=0}^{n} KS_k \otimes KS_{n-k} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Resulta que $(\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}}, \Delta, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una *biálgebra*, es decir, las aplicacioes

$$\Delta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}, \text{ y}$$

$$\epsilon : \mathcal{P} \longrightarrow K,$$

son homomorfismos de álgebras. La multiplicación $\bullet_{\otimes}$ en $A \otimes A$ para un álgebra $(A, \bullet)$ está dada por

$$(a \otimes b) \bullet_{\otimes} (c \otimes d) = (a \bullet c) \otimes (b \bullet d) \text{ para todo } a, b, c, d \in A.$$

Es conveniente definir la *delta de Kronecker*, que asocia a dos símbolos dados a y b el valor 0 si $a \neq b$ y 1 si $a = b$. Esto es,

$$\delta_{ab} = 0 \text{ si } a \neq b \text{ y } \delta_{ab} = 1 \text{ si } a = b.$$

Definimos una forma bilineal

$$(\,,\,)_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow K, \text{ por}$$

$$(\alpha, \beta)_{\mathcal{P}} = \delta_{\alpha\beta^{-1}} \text{ para todo } \alpha, \beta \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n.$$

En 4.5 se demuestra que $\mathcal{P}$ es *auto-dual* con respecto a $(\,,\,)_{\mathcal{P}}$, es decir, se tiene

$$(\alpha \bullet \beta, \gamma)_{\mathcal{P}} = (\alpha \otimes \beta, \delta(\gamma))_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}},$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{P}$, donde $(\,,\,)_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}}$ es la única forma bilineal en $\mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ tal que

$$(\alpha_1 \otimes \alpha_2, \beta_1 \otimes \beta_2)_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = (\alpha_1, \beta_1)_{\mathcal{P}}(\alpha_2, \beta_2)_{\mathcal{P}},$$

para todo $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathcal{P}$.

En el capítulo 9 utilizamos el *método inductivo* para definir una estructura de biálgebra en $\mathcal{C}$. Sea G un grupo finito, H un subgrupo de G, y

$$\alpha : H \longrightarrow K$$

una función, le asociamos la *función inducida por* α,

$$\alpha^G : G \longrightarrow K,$$

$$g \mapsto \tfrac{1}{|H|} \textstyle\sum_{x\in G, xgx^{-1}\in H} \alpha(xgx^{-1}) \text{ para todo } g \in G.$$

Es claro que $\alpha^G \in C\ell_K(G)$ para toda función $\alpha : H \longrightarrow K$. Similarmente, si tenemos $\varphi \in C\ell_K(G)$, entonces la restricción

$$\varphi|_H : H \longrightarrow K$$

es una función de clase de H en K. Para definir la multiplicación en $\mathcal{C}$, sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Existe un isomorfismo natural (ver 9.2)

$$i_{n,m} : C\ell_K(S_n) \otimes C\ell_K(S_m) \longrightarrow C\ell_K(S_n \times S_m),$$

$$\alpha \otimes \beta \mapsto \alpha \sharp \beta \text{ para todo } \alpha \in C\ell_K(S_n),\ \beta \in C\ell_K(S_m).$$

Sean $\alpha \in C\ell_K(S_n)$, $\beta \in C\ell_K(S_m)$. Definimos

$$\alpha \bullet \beta = (\alpha \sharp \beta)^{S_{n+m}}.$$

Extendiendo linealmente, obtenemos el *producto exterior* en $\mathcal{C}$

$$\bullet : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}.$$

El elemento unidad en $\mathcal{C}$ es la única función

$$1_{\mathcal{C}} : S_0 \longrightarrow K,$$

$$id_{\emptyset} \mapsto 1_K.$$

La comultiplicación se define como

$$\delta(\alpha) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} i_{k,n-k}^{-1}(\alpha|_{S_k\times S_{n-k}}),$$

$$\text{para todo } \alpha \in C\ell_K(S_n),\ n \in \mathbb{N}_0.$$

La counidad $\epsilon_{\mathcal{C}}$ se define, para $\alpha \in C\ell_K(S_n)$, por

$$\epsilon_{\mathcal{C}}(\alpha) = 0 \text{ si } n > 0 \text{ y } \epsilon_{\mathcal{C}}(id_{\emptyset}) = 1.$$

Se prueba en el capítulo 9 que $(\mathcal{C}, \bullet, 1_{\mathcal{C}}, \delta, \epsilon_{\mathcal{C}})$ es una biálgebra graduada conexa. Definimos una forma bilineal

$$(\,,\,)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow K, \text{ dada por}$$

$$(\alpha, \beta)_{\mathcal{C}} = (\alpha, \beta)_{S_n} \text{ si } n = m \text{ y } (\alpha, \beta)_{\mathcal{C}} = 0 \text{ si } n \neq m$$

$$\text{para todo } \alpha \in C\ell_K(S_n),\ \beta \in C\ell_K(S_m).$$

Observemos que $(\,,\,)_{\mathcal{C}}$ es la *extensión ortogonal* a $\mathcal{C}$ de los productos escalares $(\,,\,)_{S_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. En 9.3 se prueba que $\mathcal{C}$ es auto-dual con respecto a $(\,,\,)_{\mathcal{C}}$, es decir, se tiene .

Denotamos por $\mathbb{N}^*$ al *monoide libre de base* $\mathbb{N}$. Es decir, $\mathbb{N}^*$ consta de todas las sucesiones finitas de la forma

$$q = q_1 ... q_r, \text{ con } q_i \in \mathbb{N}^* \text{ para todo } i \in [r].$$

La multiplicación en $\mathbb{N}^*$ es la *concatenación*, y el elemento neutro es la sucesión vacía, $\emptyset$. Dado $q = q_1...q_r \in \mathbb{N}^*$ y $n \in \mathbb{N}_0$, decimos que q es una *composición* de n, denotado por $q \models n$ si $n = \sum_{i=1}^{r} q_i$. Observemos que $\emptyset \models 0$. Si además se cumple que $q_1 \geq ... \geq q_r$, decimos que q es una *partición* de n y se denota por $q \vdash n$. Denotamos por

$$\wp = \{p \in \mathbb{N}^* : p \vdash n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$$

al conjunto de todas las particiones. En el capítulo 8 se demuestra que $K\mathbb{N}^*$, el $K-$módulo libre generado por $\mathbb{N}^*$, tiene estructura de biálgebra, donde la multiplicación μ en $\mathbb{N}^*$ es la extensión lineal de la concatenación, el elemento unidad es la sucesión vacía, $1_{K\mathbb{N}^*} = \emptyset$. Para definir la comultiplicación en $K\mathbb{N}^*$, sea $k \in \mathbb{N}_0$. Para cada $J = \{j_1, ..., j_l\} \subseteq [k]$ con $j_1 < ... < j_l$ definimos

$$q_J = q_{j_1} ... q_{j_l}.$$

También definimos $CJ = [k] \setminus J$. La comultiplicación está dada en la base $\mathbb{N}^*$ por

$$\delta_{\mathbb{N}^*}(q) = \textstyle\sum_{J \subseteq [k]} q_J \otimes q_{CJ} \text{ para todo } q = q_1 ... q_k \in \mathbb{N}^*,$$

La counidad $\varepsilon_{\mathbb{N}^*} : K\mathbb{N}^* \longrightarrow K$ está dada por

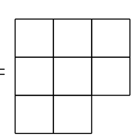
$$\varepsilon_{\mathbb{N}^*}(q) = \delta_{\emptyset q} \text{ para todo } q \in \mathbb{N}^*.$$

En 8.4 se demuestra que $(K\mathbb{N}^*, \mu, 1_{K\mathbb{N}^*}, \delta_{\mathbb{N}^*}, \varepsilon_{\mathbb{N}^*})$ es una biálgebra, llamada la *biálgebra de composiciones.* También se demuestra que la biálgebra de composiciones es isomorfa a una sub-biálgebra $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$, llamada la *biálgebra de descenso*, que se definirá más adelante.

En los capítulos 5 y 6, utilizaremos los conceptos de *Diagrama de Young* y *Tabla de Young estándar* para definir una sub-biálgebra graduada de $\mathcal{P}$, llamada la *biálgebra copláctica*, y denotada por $\mathcal{Q}$. Trabajaremos con subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la forma

$$F(p) = \cup_{i=1}^{r} \{i\} \times [p_i],$$

para toda partición $p = p_1 ... p_r \in \wp$. Por ejemplo, si $p = 3.3.2$ entonces

$F(p) =$ 

Un *diagrama de Young* es un conjunto de la forma $D = F(p)$ para alguna $p \in \wp$. Sea D un diagrama de Young y $n = |D|$. A cada permutación $\pi \in S_n$ le asociamos un arreglo determinado por el diagrama de Young. Lo ilustraremos con el ejemplo anterior en que $n = 8$. A cada $\pi = \pi_1 ... \pi_8 \in S_8$ le asociamos el arreglo

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \pi_6 & \pi_7 & \pi_8 \\ \hline \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 \\ \hline \pi_1 & \pi_2 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

Es decir, escribimos los elementos de π en $F(p)$ de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Decimos que π es una *tabla de Young estándar de forma* p si el arreglo anterior es creciente en filas y columnas (de izquierda a derecha y de arriba a abajo). Por ejemplo, si $n = 8$, entonces $\pi = 57268134 \in S_8$ es una tabla de Young estándar de forma $p = 3.3.2$, ya que el diagrama

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 6 & 8 \\ \hline 5 & 7 \\ \cline{1-2} \end{array}$$

es creciente en filas y columnas. Denotamos por TYE^p al conjunto de tablas de Young estándar de forma p y por $tye^p = |TYE^p|$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Denotamos por $p \vdash n$ si p es partición de n. Definiremos una relación de equivalencia en S_n utilizando un resultado de Robinson, Schnested y Knuth (llamado la *correspondencia RSK*) (ver 5.3), el cual establece una biyección

$$\varphi : S_n \longrightarrow \bigcup_{p \vdash n} TYE^p \times TYE^p$$

$$\pi \mapsto (P(\pi), Q(\pi))$$

$P(\pi)$ y $Q(\pi)$ son llamados el *P-símbolo de* π y el *Q-símbolo de* π, respectivamente. Definimos una relación de equivalencia en S_n dada por

$$\alpha \sim \beta \text{ si y sólo si } Q(\alpha) = Q(\beta) \text{ para todo } \alpha, \beta \in S_n.$$

Esto define claramente una relación de equivalencia. Por tanto tenemos una partición de S_n en *clases coplácticas*

$$A_\sigma = \{\pi \in S_n : Q(\pi) = \sigma\} \text{ para todo } \sigma \in \bigcup_{p \vdash n} TYE^p.$$

Para cada $A \subseteq S_n$ denotamos por $\sum A = \sum_{\pi \in A} \pi$. Sea

$$Q_n = < \sum A_\sigma : \sigma \in \cup_{p \vdash n} TYE^p >, \text{ y}$$

$$\mathcal{Q} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} Q_n.$$

Resulta que $\mathcal{Q}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{P}$, llamada la *biálgebra copláctica.* Para cada $p \vdash n$ definimos la *celda de Green asociada a* p como

$$\varsigma^p = \{\pi \in S_n : Q(\pi) \in TYE^p\}.$$

Es importante establecer las relaciones de ortogonalidad en $\mathcal{Q}$ que se prueban en 6.3

Teorema (Relaciones de ortogonalidad no conmutativas)
Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Sean $p, q \vdash n$ y $A_\pi \in \varsigma^p$, $A(\sigma) \in \varsigma^q$ clases coplácticas. Entonces

$$(\sum A_\pi, \sum A_\sigma)_{\mathcal{P}} = \delta_{pq}.$$

Podemos generalizar el concepto de *tabla de Young estándar*, asociando permutaciones a subconjuntos finitos arbitrarios de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ o incluso a cualquier conjunto parcialmente ordenado que además tenga un orden total (ver 3.2). Tales conjuntos se llaman *formas* (ver 3.1) Dada F una forma, $n = |F|$, denotamos por

$$TYE^F = \{\pi \in S_n : \pi \text{ es una tabla de Young estándar de forma } F\}, \text{ y}$$

$$Z^F = \sum_{\pi \in TYE^F} \pi$$

En el capítulo 7 generalizamos la noción de diagrama de Young para definir una sub-biálgebra de $\mathcal{P}$, generada por los elementos de la forma Z^F, donde F es un conjunto de la forma

$$F = F(p) \setminus F(q),$$

para $p, q \in \wp$. Decimos que F es un *marco* o un *diagrama sesgado.* Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ denotamos por

$$F_n =< Z^F : F \text{ es un marco y } |F| = n >.$$

Sea

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} F_n.$$

En el capítulo 7 se demuestra que $\mathcal{F}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{P}$. De hecho, $\mathcal{F}$ *es una sub-biálgebra de* $\mathcal{Q}$. En particular, se demuestra que, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $p \vdash n$, se tiene que TYE^p *es una clase copláctica en* S_n. En particular, las relaciones de ortogonalidad no conmutativas implican que, para todo $p, q \vdash n$, se tiene

$$(Z^p, Z^q)_{\mathcal{P}} = \delta_{pq}. \tag{1.1}$$

En el capítulo 8 definimos la *biálgebra de descenso.* Sea $n \in \mathbb{N}_0$ y $q = q_1 ... q_r \models n$. Denotamos por $P^q = (P_1^q, ..., P^q)$ la partición de $[n]$ que consta de los bloques sucesivos de tamaño q_i para todo $i \in [r]$. Por ejemplo, si $n = 6$ y $q = 2.3.1 \models 6$, entonces

$$P^q = (\{1,2\}, \{3,4,5\}, \{6\}).$$

El *subgrupo de Young de tipo* q, denotado por S_q, está dado por

$$S_q = \{\pi \in S_n : \pi|_{P_i^q} = P_i^q \text{ para todo } i \in [r]\}.$$

El *carácter de Young asociado a* q es el carácter inducido

$$\xi^q = (1_{S_q})^{S_n}.$$

En el capítulo 9 se demuestra que los caracteres de Young

$$\{\xi^q : q \models n\}$$

forman un *conjunto generador* de $C\ell_K(S_n)$.
También definimos

$$S^q = \{v \in S_n : v|_{P_i^q} \text{ es creciente para todo } i \in [r]\}.$$

Sea

$$\Xi^q = \sum_{v \in S^q} v, \text{ y}$$

$$D_n =< \Xi^q : q \models n >.$$

En [1, Apéndice B] se demuestran las siguientes relaciones, llamadas las *fórmulas de Mackey y Solomon*, válidas para todo $q, r \models n$.

$$\Xi^q \Xi^r = \sum_{s \models n} m_q^r(s) \Xi^s, \text{ y}$$

$$\xi^q \xi^r = \sum_{s \models n} m_q^r(s) \xi^s,$$

para ciertos enteros no negativos $m_q^r(s)$. Recordemos que KS_n tiene estructura de álgebra, llamada el *álgebra de grupo*, dada por la extensión lineal de la composición de permutaciones. También $C\ell_K(S_n)$ tiene estructura de álgebra, dada por la multiplicacón puntual de funciones de clase. Las fórmulas de Mackey y Solomon implican que

Teorema (Solomon). Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces D_n es una subálgebra del álgebra de grupo KS_n. Además la aplicación lineal

$$c_n : D_n \longrightarrow C\ell_K(S_n), \text{ dada por}$$

$$\Xi^q \mapsto \xi^q \text{ para todo } q \models n,$$

es un epimorfismo de álgebras. El epimorfismo c_n es conocido como el *homomorfismo de Solomon.*

Sea

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} D_n.$$

En el capítulo 8 se demuestra que $\mathcal{D}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{F}$. En particular, $\mathcal{D}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{P}$. $\mathcal{D}$ es llamada la *biálgebra de descenso de Solomon.* También se demuestra que $\mathcal{D}$ es isomorfa a la biálgebra de composiciones, y que $\mathcal{D}$ es *auto-dual* con respecto a $(,)_{\mathcal{D}} = (,)_{\mathcal{P}}|_{\mathcal{D}\times\mathcal{D}}$.

En el capítulo 10, nos proponemos construir un homomorfismo de álgebras

$$c : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C},$$

tal que $c|_{\mathcal{Q}}$ es un epimorfismo de biálgebras que respeta las formas bilineales $(,)_{\mathcal{P}}$ y $(,)_{\mathcal{C}}$. Primero necesitamos definir el concepto de *elemento primitivo.*
Sea $(\mathcal{A}, \bullet, 1_{\mathcal{A}}, \Delta_{\mathcal{A}}, \epsilon_{\mathcal{A}})$ una biálgebra, decimos que $a \in \mathcal{A}$ es *primitivo* si

$$\Delta(a) = a \otimes 1_{\mathcal{A}} + 1_{\mathcal{A}} \otimes a.$$

Sea

$$\omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\},$$

tal que $\omega_n \in KS_n$ es primitivo para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada sucesión

$$q = q_1...q_r \in \mathbb{N}^*, \ q \neq \emptyset, \text{ definimos}$$

$$\omega_q = \omega_{q_1} \star ... \star \omega_{q_r}.$$

También definimos $\omega_\emptyset = id_\emptyset \in KS_0$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\pi \in S_n$. Recordemos que el *tipo cíclico de* π es la partición $p = p_1 ... p_s \vdash n$ tal que π se escribe de manera única como producto de ciclos ajenos de longitud p_i para todo $i \in [s]$. Recordemos también que dos permutaciones son conjugadas si y sólo si tienen el mismo tipo cíclico. Dada $p \vdash n$, denotamos por C_p a la clase de conjugación de las permutaciones de tipo cíclico p. Dada $\alpha \in C\ell_K(S_n)$, denotamos por $\alpha(C_p) = \alpha(\pi)$ para cualquier $\pi \in C_p$. Es claro entonces que α está determinada por $\alpha(C_p)$ para todo $p \vdash n$. Definimos

$$c_\omega(\varphi)(C_p) = (\varphi, \omega_p)_{\mathcal{P}} \text{ para todo } \varphi \in KS_n,\ p \vdash n.$$

Es claro que

$$c_\omega : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C}$$

es un homomorfismo lineal. En 10.2 se demuestra que c_ω es un homomorfismo de álgebras. En 10.3 se demuestra que, con las hipótesis de que $(\omega_n, id_{[n]}) = 1$, $(\omega_n, \omega_n) = n$ y $\omega_n \in Q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$c_\omega(\omega_q) = ch_q \text{ para todo } q \in \mathbb{N}^*,$$

donde, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y $q \models n$ se tiene que

$$ch_q(C_p) = \tfrac{n!}{|C_q|}\delta_{pq} \text{ para todo } p \vdash n.$$

Se sigue fácilmente que $\{ch_q : q \models n\}$ es un conjunto generador de $C\ell_K(S_n)$, y que

$$ch_q(C_r) = (ch_q, ch_r)_{\mathcal{C}} \text{ para todo } q, r \in \mathbb{N}^*.$$

En particular, c_ω es sobreyectiva. También se demuestra que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ *sólo depende de sus valores en el espacio generado por* ω_q, $q \in \mathbb{N}^*$ (ver 10.3). Se sigue fácilmente que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es un homomorfismo de álgebras y de coálgebras. Luego $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es un *epimorfismo de biálgebras*. También se sigue que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ respeta las formas bilineales $(,)_{\mathcal{P}}$ y $(,)_{\mathcal{C}}$, ya que

$$(\omega_q, \omega_r)_{\mathcal{P}} = c_\omega(\omega_q)(C_r) = ch_q(C_r) =$$

$$= (chq, chr)_{\mathcal{C}} = (c_\omega)(\omega_q, c_\omega(\omega_r))_{\mathcal{C}} \text{ para todo } q, r \in \mathbb{N}^*.$$

Por tanto se tiene el

Teorema principal. Sea $\omega_n \in KS_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ una sucesión de elementos primitivos tales que $(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1$, $(\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n$ y $\omega_n \in Q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $c_\omega|_Q$ es un epimorfismo de biálgebras que respeta las formas bilineales $(,)_{\mathcal{P}}$ y $(,)_{\mathcal{C}}$.

En 10.4, definimos una sucesión ω_n de elementos primitivos en KS_n para todo $n \in \mathbb{N}$ que cumpla con

$$\omega_n \in D_n,\ (\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1\ (\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = 1.$$

El epimorfismo c_ω correspondiente es llamado el *epimorfsimo de Jölenbeck* y se denota por c. En 10.2 se demuestra que $c|_{D_n} = c_n$, el homomorfismo de Solomon.

En el capítulo 11 se termina el trabajo con algunas aplicaciones de la teoría no conmutativa desarrollada. Decimos que $\alpha \in \mathcal{P}$ es un *carácter no conmutativo* si $c(\alpha)$ es un carácter en $\mathcal{C}$. Demostraremos que los elementos Z^p, para $p \vdash n$, $n \in \mathbb{N}_0$ son caracteres no conmutativos. De hecho, las relaciones de ortogonalidad (1.1) implican que los elementos

$\zeta^p = c(Z^p)$, $p \vdash n$, forman una *base ortonormal* de $C\ell_K(S_n)$. De hecho, los elementos ζ_p, $p \vdash n$, *constituyen el conjunto de caracteres irreducibles de* S_n.

Ahora podemos dar una descripción combinatoria de caracteres de S_n. Dado χ un carácter, utilizamos una "buena" preimagen α bajo c de tal forma que podamos calcular en forma combinatoria los productos escalares (α, Z^p), $p \vdash n$. Por ejemplo , sea χ un carácter de S_n tal que $c(\gamma) = \chi$, y

$$\gamma = \textstyle\sum_{\pi \in D} \pi \subseteq KS_n$$

es una suma de permutaciones. Entonces la multiplicidad de ζ_p en χ está dada por

$$(\chi, \zeta^p)_{S_n} = (\gamma, Z^p)_{\mathcal{P}} = (\textstyle\sum_{\pi \in D} \pi, \sum_{\sigma \in TYE^p} \sigma)_{\mathcal{P}} =$$

$$= |D^{-1} \cap TYE^p|.$$

Por tanto podemos encontrar una descripción combinatoria de la descomposición del $K[S_n]-$ módulo M correspondiente a χ

$$M \cong_{S_n} \textstyle\bigoplus_{p \vdash n} M_p^{c_p},$$

donde M_p es el $K[S_n]$- módulo irreducible correspondiente a ζ_p y c_p es el número de tablas de Young estándar π de forma p tales que $\pi^{-1} \in D$. Por ejemplo, tenemos que

$$c(\textstyle\sum S_n) = \chi_{K[S_n]},$$

el carácter del módulo regular. Por tanto la multiplicidad de ζ_p en $\chi_{K[S_n]}$ para todo $p \vdash n$ está dada por

$$(\chi_{K[S_n]}, \zeta_p)_{\mathcal{C}} = |(\textstyle\sum S_n, \sum TYE^p)_{\mathcal{P}}| = |TYE^p| = tye^p.$$

Por tanto tenemos la descomposición del $K[S_n]-$ módulo regular

$$K[S_n] \cong_{S_n} \textstyle\bigoplus_{p \vdash n} M_p^{tye^p}.$$

Más aún, la dimensión de M_p está dada por

$$\dim M_p = gr(\zeta_p) = \zeta_p(id_n) = (\textstyle\sum S_n, Z^p)_{\mathcal{P}} = tye^p.$$

También demostraremos que los elementos $\sum Y = \sum_{\pi \in Y} \pi \subseteq KS_n$, donde $Y \subseteq S_n$ es unión de clases coplácticas son caracteres no conmutativos para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Además podemos escribir

$$c(\textstyle\sum Y) = \sum_{p \vdash n} m_p \zeta_p,$$

donde $m_p = |Y^{-1} \cap TYE^p|$ para todo $p \vdash n$. Además, todo $K[S_n]$- submódulo M del módulo regular tiene como carácter correspondiente

$$\chi_M = c(\textstyle\sum Y),$$

donde $Y \subseteq S_n$ es unión de clases coplácticas.

Terminamos el trabajo con algunos ejemplos de caracteres no conmutativos. Por ejemplo, sea $Y = \{id_{[n]}\}$, entonces $\sum Y = id_{[n]} = Z^n$ es un carácter no conmutativo de grado 1. De hecho. ζ^n es el *carácter trivial* de S_n, esto es,

$$\zeta^n(\pi) = 1 \text{ para todo } \pi \in S_n.$$

Otro ejemplo importante es $Y = \{\rho_n\}$, donde $\rho_n = n.(n-1)...1$, es decir, $\rho(i) = n - i + 1$ para todo $i \in [n]$. Entonces $Y = TYE^{1^n}$ y el correspondiente carácter no conmutativo es $\sum Y = Z^{1^n}$. Demostraremos que el carácter correspondiente en S_n es

$$\zeta^{1^n} = sgn_{S_n},$$

donde sgn_{S_n}, llamada la *función signo* de S_n está dada por (recordemos que una permutación π es *par* si es producto de un número par de transposiciones e *impar* si es producto de un número impar de transposiciones)

$$sgn_{S_n}(\pi) = 1 \text{ si } \pi \text{ es par, y } sgn_{S_n} = -1 \text{ si } \pi \text{ es impar para todo } \pi \in S_n.$$

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo introduciremos los conceptos básicos que se utilizarán en el resto de este trabajo. Daremos su definición, ilustraremos con algunos ejemplos y desarrollaremos algunos resultados importantes sobre ellos. Suponemos que la noción de producto tensorial de módulos es ya familiar para el lector. En el resto de este capítulo supondremos que K es un anillo conmutativo con unidad, a menos que se indique lo contrario.

2.1 Algebras y coálgebras

Definición

Sea A un $K-$ módulo, $m : A \otimes A \longrightarrow A$ y $u : K \longrightarrow A$ aplicaciones lineales tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

$$\begin{tikzcd} K \otimes A \arrow[r, "u\otimes id"] \arrow[dr, "g_1"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "id\otimes u"] \arrow[dr, "g_2"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ & A \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

conmutan. Aqui, $g_1 : K \otimes A \longrightarrow A$ y $g_2 : A \otimes K \longrightarrow A$ denotan la acción de K en A (multiplicación por escalar). El diagrama (2.1) corresponde al axioma de *asociatividad*, mientras que los diagramas (2.2) y (2.3) corresponden a los axiomas de *unidad*.
Decimos que la terna (A, m, u) es un *álgebra*, que m es la *multiplicación* del álgebra y u la unidad.

Proposición

Sea A un $K-$ módulo tal que la aplicación lineal

$$m : A \otimes A \longrightarrow A$$

satisface (2.1). Escribimos

$$a \bullet b = m(a \otimes b) \text{ para todo } a{,}b \in A$$

Supóngase que existe $1_A \in A$ tal que

$$a \bullet 1_A = a = 1_A \bullet a \text{ para todo } a \in A$$

Entonces $\exists!\ u : K \longrightarrow A$ que satisface (2.2) y (2.3), es decir, tal que (A, m, u) es un álgebra.
Demostración. Denotamos

$$k \cdot a = g_1(k \otimes a) \text{ para todo } k \in K,\ a \in A,$$

es decir, al producto por escalar de k con a. Sea

$$u : K \longrightarrow A$$

dada por $u(k) = k \cdot 1_A$ para todo $k \in K$ Entonces u es claramente lineal y para todo $k \in K$, $a \in A$ se tiene

$$m((u \otimes id)(k \otimes a)) = m[(k \cdot 1_A) \otimes a] = k.m(1_A \otimes a) = k.(1_A \bullet a) = k.a = k_1(k \otimes a)),$$

que es (2.2). Similarmente se demuestra (2.3).
Para probar la unicidad, si $u' : K \longrightarrow A$ satisface (2.2), entonces para todo $k \in K$ se tiene

$$u'(k) = u'(k) \bullet 1_A = m(u'(k) \otimes 1_A) = k_1(k \otimes 1_A) = k \cdot 1_A.\ \diamondsuit$$

Observación

Sea (A, m, u) un álgebra. Sea $1_A = u(1_K)$. Entonces 1_A es neutro multiplicativo. Decimos que 1_A es el *elemento unidad* de A. $\diamondsuit$

Notación

Debido a la proposición y observación anteriores,para definir un álgebra basta que tengamos un $K-$ módulo A con una aplicación lineal

$$m_A : A \otimes A \longrightarrow A$$

que satisfaga la ecuación (1.1), y un elemento $1_A \in A$ que sea neutro con el producto. Por esta razón escribimos $(A, m_A, 1_A)$ o $(A, \bullet_A, 1_A)$ para referirnos al álgebra (A, m, u) de la proposición anterior.
Tambien escribimos $a \bullet_A b$ para denotar al elemento $m_A(a \otimes b) \in A$, para todo a, $b \in A$.

Ejemplo

Sea G un grupo y KG el $K-$ módulo libre generado por G. Definimos para todo $g, h \in G$

$$g \bullet_{KG} h := g \circ_G h.$$

Aquí, $\circ_G$ denota la multiplicación en G. Por extensión lineal obtenemos que $(KG, \bullet_{KG}, 1_{KG})$ es un álgebra con neutro $1_{KG} = 1_G$. Llamamos a KG con esta estructura el *álgebra del grupo* G.

Ejemplo

Sea K un anillo conmutativo con unidad. Entonces K es un álgebra con la multiplicación m_K de K y elemento unidad 1_K, la unidad de K.

En este trabajo utilizaremos el concepto de *coálgebra*, que es la noción dual categórica de álgebra. Más precisamente tenemos la siguiente

Definición

Sea C un $K-$ módulo. Decimos que la terna (C, Δ, ϵ) es una *coálgebra* si las aplicaciones lineales $\Delta : C \longrightarrow C \otimes C$ y $\epsilon : C \longrightarrow K$ satisfacen

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes id"] \\ C \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "1\otimes"] & C \otimes C \arrow[d, "\epsilon\otimes id"] \\ & K \otimes C \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\otimes 1"] & C \otimes C \arrow[d, "id\otimes\epsilon"] \\ & C \otimes K \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Aqui $1\otimes : C \longrightarrow K \otimes C$ y $\otimes 1 : C \longrightarrow C \otimes K$ estan dados por $(1\otimes)(c) = 1 \otimes c$ y $(\otimes 1)(c) = c \otimes 1$ para todo $c \in C$. El diagrama (2.4) corresponde al axioma de *coasociatividad*, mientras que los diagramas (2.5) y (2.6) corresponde a los axiomas de *counidad*.
Decimos que Δ es la *comultiplicación* de C y que ϵ es la *counidad* de C.

Ejemplo

Sea G un grupo. Definimos

$$\Delta g = g \otimes g \text{ para todo } g \in G$$

Extendiendo linealmente obtenemos una aplicación $\Delta : KG \longrightarrow KG \otimes KG$ tal que

$$(\Delta \otimes id_{KG}) \circ \Delta g = (\Delta \otimes id_{KG})(g \otimes g) = g \otimes g \otimes g \text{ para todo } g \in G.$$

Similarmente

$$(id \otimes \Delta)\Delta g = g \otimes g \otimes g \text{ para todo } g \in G.$$

Sea

$$\epsilon : KG \longrightarrow K$$

la aplicación lineal definida en la base G por $\epsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. Entonces ϵ cumple claramente los axiomas de counidad. Por tanto (KG, Δ, ϵ) es una coálgebra.

Observación

Sea K un anillo conmutativo con unidad. Entonces

$$K \cong K \otimes K \text{ (como } K- \text{ módulos)}$$

Explícitamente, la multiplicación de K

$$m_K : K \otimes K \longrightarrow K$$

es un isomorfismo. $\diamondsuit$

Ejemplo

Sea K un anillo conmutativo con unidad. Dualizando el ejemplo 2.1 obtenemos que K es una coálgebra con comultiplicación

$$\Delta_K = m_K^{-1}$$

y counidad

$$\epsilon_K = id_K.$$

Aquí,

$$m_K : K \otimes K \longrightarrow K$$

es la multiplicación en K.

Notación

Sean A y B $K-$ módulos. Denotamos por $\tau_{A,B}$ a la unica aplicación lineal de $A \otimes B$ en $B \otimes A$ que satisface

$$\tau_{A,B}(a \otimes b) = b \otimes a \text{ para todo } (a, b) \in A \times B$$

Definición

Decimos que el álgebra (A, m) es *conmutativa* si $m = m \circ \tau_{A,A}$.

Dualizando de nuevo, obtenemos

Definición

Sea (C, Δ) una coálgebra. Decimos que C es *coconmutativa* si $\Delta = \tau_{C.C} \circ \Delta$.

A continuación se presenta el importante concepto de homomorfismo de álgebras, y su dual, el concepto de homomorfismo de coálgebras.

Definición

Sean (A, m_A, u_A) y (B, m_B, u_B) $K-$álgebras, y $f : A \longrightarrow B$ aplicación lineal. Decimos que f es un *homomorfismo de álgebras* si

$f \circ m_A = m_B \circ (f \otimes f)$, y
$f \circ u_A = u_B$.

Definición

La aplicación lineal $g : C \longrightarrow D$, donde $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$,$(D, \Delta_D, \epsilon_D)$ son coálgebras es un *homomorfismo de coálgebras* si

$\Delta_D \circ g = (g \otimes g) \circ \Delta_C$, y
$\epsilon_C = \epsilon_D \circ g$.

Definición

Como es natural, diremos que las álgebras A y B son *isomorfas* si existe un homomorfismo (de álgebras) biyectivo

$$f : A \longrightarrow B.$$

Análogamente, las coálgebras C y D son *isomorfas* si existe un homomorfismo (de coálgebras) biyectivo

$$g : C \longrightarrow D.$$

Proposición (Producto tensorial de álgebras)

Sean (A, m_A, u_A) y (B, m_B, u_B) $K-$ álgebras. Entonces $(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ es una $K-$álgebra, donde

$$m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (id_B \otimes \tau_{B,A} \otimes id_A)$$

y

$$u_{A\otimes B} = (u_A \otimes u_B) \circ m_K^{-1}$$

Demostración Escribimos

$$(a \otimes b) \bullet_{\otimes} (c \otimes d) = m_{A\otimes B}[(a \otimes b) \otimes (c \otimes d)] \text{ para todo } a, c \in A,\ b, d \in B$$

Observemos que

$$(a \otimes b) \bullet_{\otimes} (c \otimes d) = (a \bullet_A c) \otimes (b \bullet_B d) \text{ para todo } a, c \in A, b, d \in B$$

De donde la asociatividad de $m_{A\otimes B}$ se sigue aplicando la definición y la asociatividad de m_A y m_B.
Tenemos que $1_{A\otimes B} = u_{A\otimes B}(1_K) = 1_A \otimes 1_B$. Entonces es claro que $1_{A\otimes B}$ funciona como neutro con respecto a $\bullet_{\otimes}$. Por tanto $(A \otimes B, m_{A\otimes B}, u_{A\otimes B})$ es una $K-$ álgebra. $\diamondsuit$

La notación sigma

Sea (C,Δ) una coálgebra. Entonces $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{i1} \otimes c_{i2}$ para ciertos $c_{11},...,c_{n1}$, $c_{12},...,c_{n2} \in C$ para todo $c \in C$. Para evitar los subíndices simplemente escribimos

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \text{ para todo } c \in C$$

Así, por ejemplo, si

$$f : C \longrightarrow D$$

$$g : C \longrightarrow D$$

son aplicaciones lineales, y escribimos, para $c \in C$, $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{i1} \otimes c_{i2}$, donde $c_{ij} \in C$ para $(i,j) \in [n] \times [2]$ entonces $\sum f(c_{(1)}) \otimes g(c_{(2)})$ significa $(f \otimes g)\Delta c$. La coasociatividad (ec. 1.4) en notación sigma se ve

$$\sum c_{(1_1)} \otimes c_{(1_2)} \otimes c_{(2)} = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2_1)} \otimes c_{(2_2)}$$

Proposición (Producto tensorial de coálgebras)

Sean (C,Δ_C,ϵ_C) y (D,Δ_D,ϵ_D) $K-$ coálgebras. Entonces $(C \otimes D, \Delta_{C\otimes D}, \epsilon_{C\otimes D})$ es una $K-$ coálgebra, donde

$$\Delta_{C\otimes D} = (id_C \otimes \tau_{C,D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D), \text{ y}$$

$$\epsilon_{C\otimes D} = m_K \circ (\epsilon_C \otimes \epsilon_D).$$

Demostración. Sean $c \in C$, $d \in D$. Es claro que

$$\epsilon_{C\otimes D}(c \otimes d) = \epsilon_C(c)\epsilon_D(d)$$

Por otro lado tenemos

$$(\Delta_C \otimes \Delta_D)(c \otimes d) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(1)} \otimes d_{(2)}$$

Por tanto

$$\Delta_{C\otimes D}(c \otimes d) = (id_C \otimes \tau_{C,D} \otimes id_D)(\sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(1)} \otimes d_{(2)}) = \sum c_{(1)} \otimes d_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes d_{(2)},$$

Se sigue directamente de la definición que $\Delta_{C\otimes D}$ cumple con el axioma de coasociatividad y $\epsilon_{C\otimes D}$ cumple con los axiomas de counidad. $\diamondsuit$

2.2 Subálgebras y subcoálgebras

Definición

Sea $(A,m,1_A)$ un álgebra y B un $K-$ submódulo de A (denotado por $B \leq_K A$). Decimos que B es una *subálgebra* de A si $1_A \in B$ y

$$m(B \otimes B) \subseteq B$$

Observación

Sea $(A,m,1_A)$ un álgebra y $B \leq_K A$. Entonces B es una subálgebra de A si y sólo si $1_A \in B$ y $(B, m\mid_{B\otimes B}, 1_A)$ es un álgebra. Esto se sigue del hecho de que, por definición, B es una subálgebra de $A \Leftrightarrow 1_A \in B$ y $m\mid_{B\otimes B}: B \otimes B \longrightarrow B$ está bien definida $\diamondsuit$.

Ejemplo

Sea KG el álgebra del grupo G y sea $H \leq G$. Se sigue inmediatamente de la definición que KH, el álgebra del grupo H, es una subálgebra de KG.

Naturalmente obtenemos la parte dual de la noción de subálgebra, la subcoálgebra.

Definición

Sea (C, Δ, ϵ) una coálgebra, D un K-submódulo de C. Decimos que D es una *subcoálgebra* de C si

$$\Delta(D) \subseteq D \otimes D$$

Observación

Sea (C, Δ, ϵ) una coálgebra, D un $K-$ submódulo de C. Entonces D es una subcoálgebra de C si y sólo si $(D, \Delta\mid_D, \epsilon\mid_D)$ es una coálgebra $\diamondsuit$

Ejemplo

Sea G un grupo. Consideremos KG con la estructura de coálgebra definida en 1.1.8, sea H subgrupo de G. Se sigue de la definición que KH, con la misma estructura que 1.1.8, es una subcoálgebra de KG.

Ahora combinemos la estructura de álgebra con la de coálgebra para obtener el concepto de biálgebra, que es la estructura de los objetos que estudiaremos más adelante.

2.3 Biálgebras

Definición

Sea B un $K-$ módulo tal que $(B, \bullet, 1_B)$ es un álgebra y (B, Δ, ϵ) es una coálgebra. Consideremos el álgebra $(B \otimes B, \bullet_\otimes, 1_{B\otimes B})$ descrita en 2.1. Decimos que $(B, \bullet, 1_B, \Delta, \epsilon)$ es una *biálgebra* si

$$\Delta : B \longrightarrow B \otimes B \text{ y } \epsilon : B \longrightarrow K$$

son homomorfismos de álgebras.

Notación

Las siguientes expresiones denotan a la biálgebra $(B, \bullet, 1_B, \Delta, \epsilon)$: $(B, \bullet, \Delta)$ si la unidad y la counidad se sobreentienden o simplemente B si se sobeentienden las estructuras de álgebra y de coálgebra.

Ejemplo

Sea G un grupo y consideremos KG el álgebra del grupo G con la estructura de coálgebra dada en 1.1.8. Entonces, dados $g, h \in G$ tenemos

$$\Delta(g \bullet h) = g \bullet h \otimes g \bullet h = (g \otimes g) \bullet_\otimes (h \otimes h) = \Delta(g) \bullet_\otimes \Delta(h)$$

Por linealidad obtenemos que Δ es un homomorfismo de álgebras.
También $\epsilon(g \bullet h) = 1 = 1 \bullet_K 1 = \epsilon(g) \bullet_K \epsilon(h)$ para todo $g, h \in G$.
Por tanto ϵ es un homomorfismo de álgebras. Por lo tanto KG es una biálgebra.

Proposición

Sea (B, m, u) un álgebra y (B, Δ, ϵ) una coálgebra. Consideremos la estructura de coálgebra de $B \otimes B$ descrita en 2.1 y la estructura de coálgebra en K dada en 2.1. Entonces son equivalentes
(i) Δ y ϵ son homomorfismos de álgebras.
(ii) m y u son homomorfismos de coálgebras.
Demostración. Sea $id = id_B$, $\tau = \tau_{B,B}$. Recordemos que la multiplicación en $B \otimes B$ es $m_{B\otimes B} = (m \otimes m) \circ (id \otimes \tau \otimes id)$ y la comultiplicación está dada por $\Delta_{B\otimes B} = (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta)$, así como la comultiplicación en K es $\Delta_K = m_K^{-1}$. Tenemos que Δ es un homomorfismo de álgebras si y sólo si se cumplen las ecuaciones

$$\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta), \text{ y}$$

$$\Delta \circ u = (u \otimes u) \circ m_K^{-1}$$

Asimismo, ϵ es un homomorfismo de álgebras si y sólo si

$$\epsilon \circ m = m_K \circ (\epsilon \otimes \epsilon), \text{ y}$$

$$\epsilon \circ u = id_K$$

Por otro lado, m es un homomorfismo de coálgebras si y sólo si

$$\Delta \circ m = (m \otimes m) \circ (id \otimes \tau \otimes id) \circ (\Delta \otimes \Delta), \text{ y}$$

$$\epsilon \circ m = m_K \circ (\epsilon \otimes \epsilon)$$

Asimismo, u es un homomorfismo de coálgebras si y sólo si

$$\Delta \circ u = (u \otimes u) \circ m_K^{-1}, \text{ y}$$

$$\epsilon \circ u = id_K$$

Como vemos, las ecuaciones son las mismas, por tanto (i) y (ii) son equivalentes $\diamondsuit$

Como resultado inmediato de la proposición anterior obtenemos el siguiente

Corolario

$(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ es una biálgebra si y sólo si m y u son homomorfismos de coálgebras $\diamondsuit$

Definición

Como es natural, una aplicación lineal

$$f : B \longrightarrow B'$$

donde B y B' son biálgebras es un *homomorfismo de biálgebras* si f es un homomorfismo de álgebras y de coálgebras.
Dos biálgebras B y B' son *isomorfas* si existe un homomorfismo biyectivo de biálegbras

$$f : B \longrightarrow B'$$

Definición

Sea $(B, m, 1_B, \Delta, \epsilon)$ una $K-$ biálgebra. Un $K-$ submódulo A de B es una *sub-biálgebra* de B (denotado $A \leq_{m,\Delta} B$) si A es una subálgebra de $(B, m, 1_B)$ y una subcoálgebra de (B, Δ, ϵ).

Observación

Dados $K-$ espacios vectoriales A y B y $(.,.) : A \times B \longrightarrow K$ una forma bilineal, éstos determinan una única forma bilineal

$$(.,.)_\otimes : (A \otimes A) \times (B \otimes B) \longrightarrow K$$

tal que

$$\text{para todo } a, a' \in A, b, b' \in B,\ (a \otimes a', b \otimes b')_\otimes = (a, b)(a', b').$$

La demostración de la linealidad es directa aplicando la hipótesis. La unicidad es clara de la definición de $A \otimes B$ $\diamondsuit$

2.4 Graduación

En esta sección discutiremos los conceptos de álgebra y coálgebra graduadas, además del concepto de álgebra (coálgebra) conexa. Las biálgebras que son motivo del presente estudio presentan esta estructura, la cual nos ayuda a entender mejor las propiedades del álgebra (coálgebra) considerando su descomposición en espacios vectoriales más pequeños.

Definición

Denotamos por $\mathbb{N}_0$ a los enteros no negativos. Sea M un $K-$ módulo tal que existe una colección de $K-$ submódulos

$$\{M_n : n \in \mathbb{N}_0\}$$

tales que

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$$

Decimos que M es un $K-$ *módulo graduado.* Decimos que M_n es la *componente homogénea de grado* n de M, para $n \in \mathbb{N}_0$.

Definición

Sean

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M_n,\ N = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} N_n$$

$K-$ módulos graduados, $d \in \mathbb{N}_0$. Un *homomorfismo de $K-$ módulos graduados de grado* d es un homomorfismo de $K-$ módulos

$$f : M \longrightarrow N$$

tal que

$$f(M_n) \subseteq N_{n+d} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0$$

Ejemplo

Sea K un anillo. Entonces K es un $K-$ módulo graduado cuya componente homogénea de grado 0 es K y cuyas componentes de grado mayor que 0 son $\{0\}$, es decir,

$$K = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} K_n,$$

donde $K_0 = K$, $K_n = \{0\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Observación

Sean

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} A_n,\ N = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} B_n$$

$K-$ módulos graduados. Entonces $M \otimes N$ es un $K-$ módulo graduado. Esto se sigue de las siguientes afirmaciones fáciles de verificar.

$$M \otimes N = (\bigoplus_{m \in \mathbb{N}_0} A_m) \otimes (\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} B_n) \simeq_K \bigoplus_{m,n \in \mathbb{N}_0} A_m \otimes B_n =$$

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{N}_0} (\bigoplus_{m+n=k} A_m \otimes B_n)$$

Definición

Una $K-$ *álgebra graduada ($K-$ coálgebra graduada)* es una $K-$ álgebra (A, m, u) ($K-$ coálgebra (A, Δ, ϵ)) tal que A es un $K-$ módulo graduado y

$$m : A \otimes A \longrightarrow A\ (\Delta : A \longrightarrow A \otimes A) \text{ y}$$

$$u : K \longrightarrow A\ (\epsilon : A \longrightarrow K)$$

son homomorfismos de $K-$ módulos graduados de grado 0. Si adicionalmente se cumple que $A_0 \simeq K$, decimos que A es una $K-$ *álgebra graduada conexa ($K-$ coálgebra graduada conexa).*

Notación

Sea V un espacio vectorial, $v \in V$. Denotamos por $\bigotimes_v$ a la aplicación lineal

$$\bigotimes_v : V \longrightarrow V \otimes V \text{ tal que}$$

$$\bigotimes_v (a) = a \otimes v + v \otimes a \text{ para todo } a \in V$$

El concepto de elemento primitivo es importante en el presente estudio ya que se construirá una sucesión de elementos primitivos para obtener una sucesión de homomorfismos de álgebras indexados por tales elementos, guardando una relación importante con ellos.

Definición

Sea $(B, \bullet, 1_B, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra. Decimos que $b \in B$ es *primitivo* si

$$\Delta(b) = \bigotimes_{1_B} (b) = b \otimes 1_B + 1_B \otimes b$$

2.5 Biálgebra graduada dual

En esta sección definiremos el concepto de biálgebra graduada auto-dual, propiedad que satisfacen algunas de las biálgebras que estudiaremos. Esta propiedad nos permitirá demostrar algunos resultados de la teoría clásica de caracteres desde un punto de vista no conmutativo.

Definición

Una $K-$ *biálgebra graduada* es una biálgebra $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ tal que B es un $K-$ módulo graduado y el álgebra (B, m, u) y la coálgebra (B, Δ, ϵ) son graduadas (con la misma graduación).

Nota

Dado M un $K-$ módulo denotamos

$$M^* := Hom(M, K) = \{f : M \longrightarrow K \mid f \text{ es } K- \text{ lineal}\} \text{ (espacio dual de } M)$$

Es claro que M^* es un $K-$ módulo, donde la suma y la multiplicación por escalar están dadas puntualmente.

Proposición

Sea M $K-$ módulo libre de rango finito. Entonces

$$M \simeq_K M^*$$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $[n] = \{1, ..., n\}$. También definimos $[0] = \emptyset$ Sea m =rango M y $\{v_i : i \in [m]\}$ una base de M. Definimos las aplicaciones lineales v_j^* para $j \in [m]$ definidas en la base por

$$v_j^*(v_i) = \delta_{ij} \text{ para todo } i \in [m]$$

Por definición, $\{v_j^*\}_{j\in[m]} \subseteq M^*$. Es claro que los v_j^* son linealmente independientes. Además para cada $f \in M^*$ se tiene

$$f = \sum_{i\in[m]} f(v_i)v_i^*$$

Luego $\{v_i^*\}_{i\in[m]}$ es una base de M^*, llamada la *base dual* de $\{v_i : i \in [m]\}$. Por tanto $M \simeq_K M^*$. Un isomorfismo es

$$v_i \mapsto v_i^* \text{ para todo } i \in [m]$$

Proposición

Sean M y N $K-$ módulos libres de rango finito. Entonces

$$T_{M,N} : M^* \otimes N^* \longrightarrow (M \otimes N)^* \text{ dada por}$$

$$T_{M,N}(f \otimes g) = [a \otimes b \mapsto f(a)g(b)\ \forall a \in M, b \in N]$$

es un isomorfismo lineal.

Demostración. Es claro que $T_{M,N}$ es lineal. Si

$$M \simeq \bigoplus_{j\in[m]} K,\ N \simeq \bigoplus_{j\in[n]} K$$

Entonces

$$M\otimes N \simeq \bigoplus_{j\in[mn]} K\otimes K \simeq \bigoplus_{j\in[mn]} K$$

Por tanto $M\otimes N$ es libre de rango finito. Sean $\{v_i : i\in[m]\}$ y $\{w_j : j\in[n]\}$ bases de M y N, respectivamente. Consideremos sus respectivas bases duales $\{v_i^*\}_{i\in[m]}$ y $\{w_j^*\}_{j\in[n]}$. Entonces $\{v_i^*\otimes w_j^*\}_{(i,j)\in[m]\times[n]}$ es base de $M^*\otimes N^*$ (asimismo $\{v_i\otimes w_j\}_{(i,j)\in[m]\times[n]}$ es base de $M\otimes N$). Sean $(i,j),(k,l)\in[m]\times[n]$. Entonces

$$T_{M,N}(v_i^*\otimes w_j^*)(v_k\otimes w_l) = v_i^*(v_k)w_j^*(w_l) =$$

$$= \delta_{ik}\delta_{jl} = \delta_{(i,j)(k,l)}$$

Entonces, si definimos $u^*_{(i,j)} := T_{M,N}(v_i^*\otimes w_j^*)$, el conjunto $\{u^*_{(i,j)}\}_{(i,j)\in[m]\times[n]}$ es precisamente la base dual de $\{v_k\otimes w_l\}_{(k,l)\in[m]\times[n]}$. Por tanto $T_{M,N}$ manda bases en bases, luego es un isomorfismo. $\diamondsuit$

Si $M=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n$ es un $K-$ módulo graduado entonces

$$M^{*gr} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n^*$$

es un $K-$ submódulo de M^*. Llamamos a M^{*gr} el *dual graduado* de M. La igualdad se da si y sólo si

$$|\{M_n : M_n \neq \{0\}\}| < \infty.$$

Esto se sigue de la siguiente proposición.

Proposición

Sea

$$M = \bigoplus_{m\in\mathbb{N}_0} M_n$$

un $K-$ módulo graduado. Entonces

$$M^* = Hom(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n, K) \simeq \Pi_{n\in\mathbb{N}_0} M_n^*$$

Demostración. Sea

$$\varphi : M^* \longrightarrow \Pi_{n\in\mathbb{N}_0} M_n^*$$

dada por

$$\varphi(f) = (f\circ\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}_0},$$

donde

$$\alpha_i : M_i \hookrightarrow M$$

es la inclusión para todo $i\in\mathbb{N}_0$. Entonces φ es claramente lineal. Además, dadas $f,g\in M^*$, si $\varphi(f)=\varphi(g)$ entonces, dado $n\in\mathbb{N}_0$ y $m\in M_n$ tenemos

$$f(m) = (f\alpha_n)(m) = (g\alpha_n)(m) = g(m)$$

Por lo tanto

$$f|_{M_n} = g|_{M_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0$$

Como dom f =dom $g = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n \Rightarrow f = g$. Por tanto φ es inyectiva.
Resta probar que φ es sobreyectiva. Para ver esto, sea

$$g = (g_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in \Pi_{n\in\mathbb{N}_0} M_n^*$$

Definimos

$$\varphi^{-1}(g) = f,$$

donde $f \in Hom(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n, K)$ está dada por

$$f|_{M_i} = g_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}_0$$

Es claro que $\varphi^{-1}(g)$ está bien definida y que $\varphi(\varphi^{-1}(g)) = g$. Por tanto φ es una biyección, como se quería probar. $\diamondsuit$

Definición

Sean A y B (co) álgebras graduadas con componentes A_m, B_m, $m \in \mathbb{N}_0$, respectivamente. Un homomorfismo de (co)álgebras $f : A \longrightarrow B$ es *graduado* si

$$f(A_m) \subseteq B_m \text{ para todo } m \in \mathbb{N}_0$$

Es decir, si f es un homomorfismo de módulos de grado 0. Si A y B son biálgebras y f es un homomorfismo graduado de álgebras y de coálgebras decimos que f es un *homomorfismo graduado* de biálgebras.

Sea B una biálegbra graduada conexa con componentes B_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Resulta que si los B_m son libres de rango finito podemos dar una estructura de biálgebra graduada conexa en el dual graduado B^{*gr}. Para ello utilizaremos las estructuras de coálgebra y álgebra en B para dar estructuras de álgebra y coálgebra (graduadas) en B^{*gr}, respectivamente. Es de esperarse que la estructura de álgebra en B nos defina una estructura de coálgebra en B^{*gr} y que la estructura de coálgebra en B nos defina una estructura de álgebra en B^{*gr}. De hecho, si $(B, \Delta_B, \epsilon_B)$ es una coálgebra arbitraria podemos construir una estructura de álgebra en el dual B^* como sigue:

Definimos $m_{B^*} : B^* \otimes B^* \longrightarrow B^*$ dada por $m_{B^*}(f \otimes g) = m_K \circ (f \otimes g) \circ \Delta_B$ y escribimos $f * g = m_{B^*}(f \otimes g)$. Observemos que en notación sigma, la ecuación anterior se escribe

$$(f * g)(c) = m_K(f \otimes g)(\sum c_{(1)}c_{(2)}) = \sum f(c_{(1)})g(c_{(2)})$$

También definimos $1_{B^*} = \epsilon_B$. Se tiene la siguiente

Proposición

Sea (B, Δ, ϵ) una coálgebra. Entonces $(B^*, \Delta^*, 1_{B^*})$ es un álgebra.

Demostración. Para probar la asociatividad, sean $f, g, h \in B^*$, $c \in B$. Entonces

$$((f * g) * h)(c) = \sum (f * g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) = \sum (\sum f(c_{(1_1)})g(c_{(1_2)}))h(c_{(2)}) =$$

$$= \sum f(c_{(1_1)})g(c_{(1_2)})h(c_{(2)})$$

Similarmente

$$(f*(g*h))(c)=\sum f(c_{(1)})g(c_{(2_1)})h(c_{(2_2)})$$

Aplicamos coasociatividad de Δ. Recordemos que en notación sigma se ve

$$\sum c_{(1_1)}\otimes c_{(1_2)}\otimes c_{(2)}=\sum c_{(1)}\otimes c_{(2_1)}\otimes c_{(2_2)}$$

Aplicando $f\otimes g\otimes h$ a la ecuación anterior tenemos

$$\sum f(c_{(1_1)})\otimes g(c_{(1_2)})\otimes h(c_{(2)})=\sum f(c_{(1)})\otimes g(c_{(2_1)})\otimes h(c_{(2_2)})$$

Aplicamos $m_K(m_K\otimes id)$ a la ecuación anterior. Entonces

$$\sum f(c_{(1_1)})g(c_{(1_2)})h(c_{(2)})=\sum f(c_{(1)})g(c_{(2_1)})h(c_{(2_2)})$$

Extendiendo linealmente obtenemos la asociatividad de Δ^*.
Para probar que ϵ es neutro con respecto a Δ^*, sea $f\in B^*$. Entonces

$$\text{para todo } c\in B,\ 1\otimes c=1\bigotimes(c)=(\epsilon\otimes id_B)(\Delta(c))=\sum\epsilon(c_1)\otimes c_2$$

Por tanto

$$1\otimes f(c)=(id_K\otimes f)(1\otimes c)=\sum\epsilon(c_1)\otimes f(c_2),\text{ y aplicando } m_K \text{ obtenemos}$$

$$f(c)=\sum\epsilon(c_1)f(c_2)=(\epsilon*f)(c)\Rightarrow\epsilon*f=f$$

Similarmente se prueba que $f*\epsilon=f$. $\diamondsuit$

Si (B,Δ_B,ϵ_B) es una coálgebra graduada con componentes M_n, $n\in\mathbb{N}_0$, escribimos $m_{B^{*gr}}=m_{B^*}|_{B^{*gr}\otimes B^{*gr}}$ y $1_{B^{*gr}}=1_{B^*}=\epsilon$. Entonces, para $m,n\in\mathbb{N}_0$ tenemos

$$m_{B^{*gr}}(B^*_m\otimes B^*_n)\subseteq B^*_{m+n}$$

También $1_{B^{*gr}}=1_{B^*}=\epsilon\in B^{*gr}$, ya que $\epsilon(B_m)=0$ para $m\geq 1$ (ver definición de coálgebra graduada). Por tanto $m_{B^{*gr}}$ y $u_{B^{*gr}}=k\mapsto k.1_{B^{*gr}}$ son homomorfismos de módulos de grado 0. Por tanto $(B^{*gr},m_{B^{*gr}},u_{B^{*gr}})$ es un álgebra graduada (con componentes B^*_m, $m\in\mathbb{N}_0$). Si B es conexa entonces

$$B_0\simeq K\Rightarrow B^*_0\simeq K^*\simeq K$$

Se sigue que B^{*gr} es conexa. Por tanto tenemos la siguiente

Proposición

Sea (B,Δ_B,ϵ_B) una coálgebra graduada con componentes B_m, $m\in\mathbb{N}_0$. Entonces $(B^{*gr},m_{B^{*gr}},1_{B^{*gr}})$ es un álgebra graduada con componentes B^*_m, $m\in\mathbb{N}_0$. Si B es conexa entonces B^{*gr} es conexa. $\diamondsuit$

Si (B,m,u) es un álgebra arbitraria en general no es cierto que B^* tenga naturalmente una estructura de coálgebra. Sin embargo, si suponemos que B es libre de rango finito podemos dar una estructura de álgebra en B^* como sigue:

Primero recordemos que, si M y N son $K-$ módulos y $h:M\longrightarrow N$ es una aplicación lineal entonces $h^*:N^*\longrightarrow M^*$ está dada por $h^*(f)=f\circ h$. Observemos que, si $h:M\longrightarrow N$ y $k:N\longrightarrow P$ son aplicaciones lineales de K- módulos entonces $(kh)^*=k^*h^*$ y $id^*_M=id_{M^*}$. Sea (B,m,u) un álgebra con B libre de rango finito. Escribimos $T=T_{B,B}$ (la aplicación lineal definida en 2.5). Definimos

$$\Delta_B^* = T^{-1} \circ m^* : B^* \longrightarrow B^* \otimes B^*$$

Definimos también

$$\epsilon_{B^*} : B^* \longrightarrow K$$

$$f \mapsto f(1_B)$$

Proposición

Sea (B, m, u) un álgebra con B libre de rango finito. Entonces $(B^*, \Delta_B^*, \epsilon_{B^*})$ es una coálgebra.

Demostración. Utilizaremos el hecho de que T es *natural*, es decir, si M, N, P y Q son módulos libres de rango finito y $f : M \longrightarrow P$ y $g : N \longrightarrow Q$ son aplicaciones lineales entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^* \otimes N^* \arrow[r, "T_{M,N}"] & (M \otimes N)^* \\ P^* \otimes Q^* \arrow[u, "f^* \otimes g^*"] \arrow[r, "T_{P,Q}"] & (P \otimes Q)^* \arrow[u, "(f \otimes g)^*"'] \end{tikzcd} \tag{2.7}$$

Escribiendo T^{-1} en vez de T en el diagrama anterior obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M^* \otimes N^* & (M \otimes N)^* \arrow[l, "T_{M,N}^{-1}"'] \\ P^* \otimes Q^* \arrow[u, "f^* \otimes g^*"] & (P \otimes Q)^* \arrow[l, "T_{P,Q}^{-1}"'] \arrow[u, "(f \otimes g)^*"'] \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

conmuta. Vemos que se cumple el axioma de coasociatividad para Δ_{B^*}. Denotamos $T = T_{B,B}$, $T_1 = T_{B,B\otimes B}$, $T_2 = T_{B\otimes B,B}$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"'] & (B \otimes B)^* \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "(m \otimes id)^*"'] & B^* \otimes B^* \arrow[d, "m^* \otimes id"] \\ (B \otimes B)^* \arrow[r, "(id \otimes m)^*"] \arrow[d, "T^{-1}"'] & (B \otimes B \otimes B)^* \arrow[r, "T_1^{-1}"] \arrow[d, "T_2^{-1}"'] & (B \otimes B)^* \otimes B^* \arrow[d, "T^{-1} \otimes id"] \\ B^* \otimes B^* \arrow[r, "id \otimes m^*"] & B^* \otimes (B \otimes B)^* \arrow[r, "id \otimes T^{-1}"] & B^* \otimes B^* \otimes B^* \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

Dualizando el diagrama de asociatividad para m se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "m^*"] \arrow[d, "m^*"] & (B \otimes B)^* \arrow[d, "(m \otimes id)^*"] \\ (B \otimes B) \arrow[r, "(id \otimes m)^*"] & (B \otimes B \otimes B)^* \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

conmuta. Recordemos que $id_B^* = id_{B^*}$. Por tanto, utilizando la naturalidad de T, obtenemos que los diagramas

$$\begin{tikzcd} (B\otimes B)^* \arrow[r, "(id\otimes m)^*"] \arrow[d, "T^{-1}"'] & (B\otimes B\otimes B)^* \arrow[d, "T_2^{-1}"] \\ B^*\otimes B^* \arrow[r, "id\otimes m^*"] & B^*\otimes (B\otimes B)^* \end{tikzcd} \tag{2.11}$$

$$\begin{tikzcd} (B\otimes B)^* \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "(m\otimes id)^*"'] & B^*\otimes B^* \arrow[d, "m^*\otimes id"] \\ (B\otimes B\otimes B)^* \arrow[r, "T_2^{-1}"] & (B\otimes B)^*\otimes B^* \end{tikzcd} \tag{2.12}$$

conmutan. Por otro lado, un cálculo directo implica que el diagrama

$$\begin{tikzcd} (B\otimes B\otimes B)^* \arrow[r, "T_1^{-1}"] \arrow[d, "T_1^{-1}"'] & (B\otimes B)^*\otimes B^* \arrow[d, "T^{-1}\otimes id"] \\ B^*\otimes (B\otimes B)^* \arrow[r, "id\otimes T^{-1}"] & B^*\otimes B^*\otimes B^* \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

conmuta. Por tanto, los diagramas (2.10)-(2.13) implican que el diagrama (2.9) conmuta. Por tanto se cumple la coasociatividad para Δ_{B^*}.
Ahora probemos el primer axioma de coasociatividad para ϵ_{B^*}. Dualizando el diagrama de unidad para B obtenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} B^* \arrow[r, "m^*"] \arrow[dr, "g_1^*"'] & (B\otimes B)^* \arrow[d, "(u\otimes id)^*"] \\ & (K\otimes A)^* \end{tikzcd} \tag{2.14}$$

Utilizando naturalidad de T obtenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} (B\otimes B)^* \arrow[r, "T^{-1}"] \arrow[d, "(u\otimes id)^*"] & B^*\otimes B^* \arrow[d, "u^*\otimes id"] \\ (K\otimes A)^* \arrow[r, "T_{K,A}^{-1}"] & K^*\otimes A^* \end{tikzcd} \tag{2.15}$$

conmuta. Finalmente definimos un homomorfismo de K- módulos

$$\varphi : K^* \longrightarrow K$$

$$g \mapsto g(1_K)$$

Entonces, dada $f \in B^*$ se tiene

$$(\varphi \circ u^*)(f) = \varphi(f \circ u) = f(u(1_K)) = f(1_B) = \epsilon_{B^*}(f),$$

de donde el diagrama

$$\begin{tikzcd} B^* \otimes B^* \arrow[d, "u^*\otimes id"'] \arrow[dr, "\epsilon_{B^*}\otimes id"] & \\ K^* \otimes A^* \arrow[r, "\varphi\otimes id"] & K \otimes A^* \end{tikzcd} \tag{2.16}$$

conmuta. Juntando estos tres diagramas obtenemos que

$$(\epsilon_{B^*} \otimes id)\Delta_{B^*} = (\varphi \otimes id)T_{K,B}^{-1}g_1^*$$

Por tanto, para probar el promer axioma de counidad, será suficiente probar que

$$1_K \otimes f = (\varphi \otimes id)T_{K,B}^{-1}g_1^*(f) \text{ para todo } f \in B^*$$

Sea $f \in B^*$, $k \in K$, $a \in B$, entonces

$$g_1^*(f)(k \otimes a) = f(g_1(k \otimes a)) = f(k.a) = kf(a) = T_{K,B}(id_K \otimes f)(k \otimes a)$$

Por tanto

$$T_{K,B}^{-1}g_1^*(f) = id_K \otimes f,$$

pero $\varphi(id_K) = id_K(1_K) = 1_K$. Por tanto

$$1_K \otimes f = (\varphi \otimes id)T_{K,B}^{-1}g_1^*(f),$$

como se quería probar. El otro axioma de counidad se demuestra análogamente. Por tanto $(B^*, \Delta_{B^*}, \epsilon_{B^*})$ es una coálgebra. $\diamondsuit$

Si (B, m, u) es un álgebra graduada con componentes B_n libres de rango finito podemos construir una estructura de coálgebra en el dual graduado B^{*gr} como sigue:
Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $k + l = n$ tenemos un isomorfismo

$$T_{B_k,B_l} : B_k^* \otimes B_l^* \longrightarrow (B_k, B_l)^*$$

Por tanto, por extensión lineal podemos definir un isomorfismo

$$T_n : \oplus_{k+l=n} B_k^* \otimes B_l^* \longrightarrow \oplus_{k+l=n}(B_k, B_l)^*$$

Por otro lado

$$m^*|_{B_n^*} : B_n^* \longrightarrow (\oplus_{k+l=n} B_k \otimes B_l)^* \simeq \oplus_{k+l=n}(B_k \otimes B_l)^*$$

Por tanto podemos hacer abuso de notación y definir

$$\Delta_n = T_n^{-1}m^*|_{B_m^*} : B_n^* \longrightarrow \oplus_{k+l=n} B_k^* \otimes B_l^*,$$

Definimos $\Delta_{B^{*gr}}$ como la extensión lineal a B^{*gr} de los Δ_n. Entonces, por la demostración anterior, se satisface el diagrama de coasociatividad para cada Δ_n, por tanto se satisface el axioma de coasociatividad para $\Delta_{B^{*gr}}$. Similarmente, si definimos $\epsilon_{B^{*gr}}(f) = f(1_{B^{*gr}})$ para todo $f \in B^{*gr}$, entonces, por la demostración anterior, se cumplen los axiomas de counidad para cada componente B_n^*, por tanto se cumplen los axiomas de counidad para $\epsilon_{B^{*gr}}$. Por tanto hemos probado la

Proposición

Sea (B, m, u) un álgebra graduada con componentes B_n libres de rango finito. Entonces $(B^{*gr}, \Delta_{B^{*gr}}, \epsilon_{B^{*gr}})$ es una coálgebra graduada con componentes B_n^*, $n \in \mathbb{N}_0$. $\diamondsuit$

Ahora consideremos el caso en que B es una biálgebra. Sea $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra con B libre de rango finito. Las proposiciones anteriores implican que $(B^*, m_{B^*}, 1_{B^*})$ tiene estructura de álgebra y $(B^*, \Delta B^*, \epsilon_{B^*})$ tiene estructura de coálgebra graduada. Parece natural pensar que B^* tenga estructura de biálgebra. Esto es lo que afirma la siguiente

Proposición

Sea $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra con B libre de rango finito. Entonces $(B^*, m_{B^*}, 1_{B^*}, \Delta_{B^*}, \epsilon_{B^*})$ es una biálgebra.

Demostración. Tenemos que probar que m^* y u^* son homomorfismos de álgebras. Primero observemos que, dados $a, b, c, d \in K$, las propiedades del producto tensorial implican que

$$ab \otimes cd = b(a \otimes cd) = bc(a \otimes d) = c(a \otimes bd) = ac \otimes bd,$$

Además, como Δ es un homomorfismo de álgebras, entonces, para $a, b \in B$ se tiene

$$\sum (a \bullet b)_{(1)} \otimes (a \bullet b)_{(2)} = \Delta(a \bullet b) = \Delta(a) \bullet_{\otimes} \Delta(b) =$$

$$= (\sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \bullet_{\otimes} (\sum b_{(1)} \otimes b_{(2)}) = \sum a_{(1)} \bullet b_{(1)} \otimes a_{(2)} \bullet b_{(2)}$$

Para ver que Δ_{B^*} es un homomorfismo de álgebras tenemos que probar que

$$\Delta_{B^*} \circ m_{B^*} = m_{B^* \otimes}(\Delta_{B^*} \otimes \Delta_{B^*}), \text{ y}$$

$$\Delta_{B^*}(1_{B^*}) = 1_{B^* \otimes B^*}$$

donde $m_{B^*\otimes}$ es el producto en $B^* \otimes B^*$ descrito en 2.1, $1_{B^*} = \epsilon$ (el elemento unidad en B^*), $1_{B^* \otimes B^*} = \epsilon \otimes \epsilon$ (el elemento unidad en $B^* \otimes B^*$). Sean $f, g \in B^*$, entonces

$$(\Delta_{B^*} \circ m_{B^*})(f \otimes g) = T^{-1} m^*(m_K(f \otimes g)\Delta) =$$

$$= T^{-1}(m_K(f \otimes g)(\Delta \circ m))$$

Sean $a, b \in B$, entonces

$$m_K(f \otimes g)(\Delta \circ m)(a \otimes b) = m_K(f \otimes g) \sum (a \bullet b)_{(1)} (a \bullet b)_{(2)} =$$

$$= \sum f(a \bullet b)_{(1)} g(a \bullet b)_{(2)}$$

Entonces, si escribimos

$$T^{-1} m^*(m_K(f \otimes g)\Delta) = \sum f_s \otimes g_s, \text{ con } f_s, g_s \in B^*,$$

se puede ver fácilmente que

$$\sum f_s(a) g_s(b) = \sum f(a \bullet b)_{(1)} g(a \bullet b)_{(2)}$$

Para evaluar el lado derecho de la ecuación de homomorfismo, escribimos

$$T^{-1}(f \circ m) = \sum_s u_s \otimes v_s, \text{ y}$$

$$T^{-1}(g \circ m) = \sum_s x_s \otimes y_s,$$

con $u_s, v_s, x_s, y_s \in B^*$. Entonces, dados $a, b \in B$ se tiene

$$\sum_s u_s(a) g_s(b) = (f \circ m)(a \otimes b) = f(a \bullet b), \text{ y}$$

$$\sum_s x_s(a) y_s(b) = g(a \bullet b)$$

Por tanto

$$m_{B^*\otimes}(\Delta_{B^*} \otimes \Delta_{B^*})(f \otimes g) = m_{B^*\otimes}(T^{-1}(f \circ m) \otimes T^{-1}(g \circ m)) =$$

$$= m_{B^*\otimes}(\sum_s u_s \otimes v_s \otimes \sum_s x_s \otimes y_s) = \sum_s (m_K(u_s \otimes x_s)\Delta) \otimes (m_K(v_s \otimes y_s)\Delta).$$

Entonces, dados $a, b \in B$ tenemos

$$\sum_s [(m_K(u_s \otimes x_s)\Delta) \otimes (m_K(v_s \otimes y_s)\Delta)](a \otimes b) =$$

$$= \sum_s (\sum u_s(a_{(1)}) x_s(a_{(2)})) \otimes (\sum v_s(b_{(1)}) y_s(b_{(2)})) =$$

$$= \sum_s (\sum u_s(a_{(1)}) v_s(b_{(1)})) \otimes (\sum x_s(a_{(2)}) y_s(b_{(2)})) =$$

$$= \sum (\sum_s u_s(a_{(1)}) v_s(b_{(1)})) \otimes (\sum_s x_s(a_{(2)}) y_s(b_{(2)})) = \sum f(a_{(1)} \bullet b_{(1)}) \otimes g(a_{(2)} \bullet b_{(2)}) =$$

$$= \sum f(a \bullet b)_{(1)} \otimes g(a \bullet b)_{(2)} = \sum (f_s \otimes g_s)(a \otimes b)$$

Por tanto

$$T^{-1} m^*(m_K(f \otimes g)\Delta) = m_{B^*\otimes}(\Delta_{B^*} \otimes \Delta_{B^*})(f \otimes g),$$

que es exactamente la primera ecuación de homomorfismo para Δ_{B^*}

Veamos que Δ_{B^*} respeta unidades. Recordemos que $1_{B^*} = \epsilon$, $1_{B^* \otimes B^*} = \epsilon \otimes \epsilon$. Como ϵ es un homomorfismo de álgebras tenemos que

$$T(\epsilon \otimes \epsilon)(a \otimes b) = \epsilon(a)\epsilon(b) = \epsilon(a \bullet b) = (\epsilon \circ m)(a \otimes b)$$

Por tanto $T(\epsilon \otimes \epsilon) = \epsilon \circ m$. Por otro lado tenemos

$$\Delta_{B^*}(1_{B^*}) = \Delta_{B^*}(\epsilon) = T^{-1}(\epsilon \circ m)$$

Luego

$$1_{B^* \otimes B^*} = \epsilon \otimes \epsilon = T^{-1}(\epsilon \circ m) = \Delta_{B^*}(1_{B^*}),$$

por tanto Δ_{B^*} respeta unidades. Luego Δ_{B^*} es un homomorfismo de álgebras.
Para ver que ϵ_{B^*} es un homomorfismo de álgebras, debemos probar que

$$\epsilon_{B^*} \circ m_{B^*} = m_K(m_{B^*} \otimes m_{B^*})$$

$$\epsilon_{B^*}(1_{B^*}) = 1_K$$

Como Δ y ϵ son homomorfismos de álgebras entonces $\Delta(1_B) = 1_B \otimes 1_B$ y $\epsilon(1_B) = 1_K$. Por tanto, dadas $f, g \in B^*$, tenemos

$$\epsilon_{B^*}(f * g) = \epsilon_{B^*}(m_K(f \otimes g)\Delta) =$$

$$= m_K(f \otimes g)(\Delta(1_B)) = m_K(f \otimes g)(1_B \otimes 1_B) = f(1_B) \otimes g(1_B) = \epsilon_{B^*}(f)\epsilon_{B^*}(g)$$

La otra ecuación es clara, ya que

$$\epsilon_{B^*}(1_{B^*}) = \epsilon_{B^*}(\epsilon) = \epsilon(1_B) = 1_K$$

Por tanto ϵ_{B^*} es un homomorfismo de álgebras $\diamondsuit$

Ahora consideraremos el caso graduado. Sea $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra graduada conexa con componentes B_n libres de rango finito. Hemos probado anteriormente que $(B^{*gr}, m_{B^{*gr}}, u_{B^{*gr}})$ tiene estructura de álgebra graduada conexa y $(B^{*gr}, \Delta_{B^{*gr}}, \epsilon_{B^{*gr}})$ tiene estructura de coálgebra graduada conexa, ambas de componentes B_n^*. Queremos ver que B^{*gr} tiene estructura de biálgebra graduada conexa. Para ello es suficiente probar que $\Delta_{B^{*gr}}$ y ϵ_{B^*} son homomorfismos de álgebras. Pero por la demostración de la proposición anterior se cumplen las ecuaciones de homomorfismo en cada componente de B^{*gr} y de $B^{*gr} \otimes B^{*gr}$. Por tanto se cumplen las ecuaciones de homomorfismo en todo B^{*gr} y $B^{*gr} \otimes B^{*gr}$. Por tanto se tiene la siguiente

Proposición

Sea $(B, m, u, \Delta, \epsilon)$ una biálgebra graduada conexa con componentes B_n, $n \in \mathbb{N}_0$ libres de rango finito. Entonces $(B^{*gr}, m_{B^{*gr}}, u_{B^{*gr}}, \Delta_{B^{*gr}}, \epsilon_{B^{*gr}})$ es una biálgebra graduada conexa con componentes B_n^*, $n \in \mathbb{N}_0$

Dada una biálgebra graduada conexa B con componentes libres de rango finito hemos dado una estructura de biálgebra graduada conexa en el dual graduado B^{*gr}. Parece natural preguntarnos acerca de la relación entre B y B^{*gr}, si es que la hay, o buscar condiciones necesarias y suficientes para que exista alguna relación, digamos, por ejenplo, la existencia de un isomorfismo graduado.

Definición

Sea B una biálgebra graduada con componentes libres de rango finito. Decimos que B es *autodual* si existe un isomorfismo graduado de biálgebras

$$\phi : B \longrightarrow B^{*gr}$$

El concepto de biálgebra autodual está estrechamente relacionado con el concepto de biálgebra autodual con respecto a una forma bilineal. A continuación daremos una breve exposición sobre formas bilineales.

2.6 Formas bilineales

Sean M, N, P tres $K-$ módulos y $\beta : M \times N \longrightarrow P$ una aplicación. Para cada $m \in M$ tenemos una aplicación

$$\phi_m : N \longrightarrow P,$$

$$x \mapsto \beta(m, x) \text{ para todo } x \in N.$$

Similarmente, cada $n \in N$ determina una aplicación

$$\varphi_n : M \longrightarrow P,$$

$$y \mapsto \beta(y, n) \text{ para todo } m \in M.$$

Decimos que β es una *aplicación bilineal* si ϕ_m y φ_n son aplicaciones lineales para todo $(m, n) \in M \times N$. Dada β una aplicación bilineal determina dos aplicaciones lineales

$$\phi : M \longrightarrow Hom(N, P),$$

$$m \mapsto \phi_m \text{ para todo } m \in M, \text{ y}$$

$$\varphi : N \longrightarrow Hom(M, P),$$

$$n \mapsto \varphi_n \text{ para todo } n \in N.$$

Si $P = K$ decimos que β es una *forma bilineal*. En este caso es conveniente denotar a β por $(.,.)$, a ϕ_m por $(m,.)$, y a φ_n por $(., n)$ para todo $(m, n) \in M \times N$. Denotamos por $Bil_K(M, N)$ al conjunto de formas bilineales de $M \times N$ en K. Tenemos las aplicaciones lineales inducidas

$$\phi : M \longrightarrow N^*,$$

$$\varphi : N \longrightarrow M^*.$$

Definición

Sean M, N dos $K-$ módulos y $(.,.) : M \times N \longrightarrow K$ una forma bilineal. Consideremos las aplicaciones lineales inducidas ϕ y φ definidas anteriormente. Decimos que $(.,.)$ es *no degenerada* si ϕ y φ son inyectivas, que $(.,.)$ es *regular* si ϕ y φ son biyectivas y que $(.,.)$ es *simétrica* si $M = N$ y se tiene

$$(x, y) = (y, x) \text{ para todo } x, y \in M.$$

Sean M y N dos $K-$ módulos. Para cada aplicación lineal $\phi : M \longrightarrow N^*$ tenemos una forma bilineal $(.,.)_\phi : M \times N \longrightarrow K$ definida por la ecuación

$$(x, y)_\phi = \phi(x)(y), \tag{2.17}$$

para todo $(x, y) \in M \times N$. Similarmente, para cada aplicación lineal $\varphi : N \longrightarrow M^*$ tenemos una forma bilineal $(.,.)_\varphi : M \times N \longrightarrow K$, definida por

$$(x, y)_\varphi = \varphi(y)(x), \tag{2.18}$$

No es difícil ver que

Proposición

Sean M y N dos $K-$ módulos. Entonces las aplicaciones

$$\psi : Hom(M, N^*) \longrightarrow Bil_K(M, N),$$

$$\phi \mapsto (.,.)_\phi \text{ para todo } \phi \in Hom(M, N^*), \text{ y}$$

$$\psi' : Hom(N, M^*) \longrightarrow Bil_K(M, N),$$

$$\varphi \mapsto (.,.)_\varphi$$

son biyectivas. $\diamondsuit$

El siguiente resultado no es difícil de probar y omitimos la prueba.

Proposición

Sean M y N dos $K-$ módulos libres de rango finito y $(.,.) : M \times N \longrightarrow K$ una forma bilineal. Sean ϕ y φ las aplicaciones lineales inducidas dadas por las ecuaciones (2.17) y (2.18). Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes
(i) ϕ es isomorfismo.
(ii) φ es isomorfismo.
(iii) $(.,.)$ es regular. $\diamondsuit$

Tampoco es difiícil de probar que

Proposición

Sean M y N dos $K-$ módulos y $\phi : M \longrightarrow N^*$ un isomorfismo lineal. Si N es libre, entonces la forma bilineal $(.,.)_\phi$ definida en la ecuación (2.17) es no degenerada. $\diamondsuit$

Definición (Producto tensorial de formas bilineales)

Sean M_i, N_i, $i = 1, 2$ cuatro $K-$ módulos y $(.,.)_i : M_i \times N_i \longrightarrow K$, $i = 1, 2$ dos formas bilineales. Definimos una forma bilineal

$$(.,.)_\otimes : (M_1 \otimes M_2) \times (N_1 \otimes N_2) \longrightarrow K, \text{ dada por}$$

$$(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2)_\otimes = (x_1, y_1)_1 (x_2, y_2)_2$$

$$\text{para todo } (x_1, y_1) \in M_1 \times N_1,\ (x_2, y_2) \in M_2 \times N_2.$$

Definición

Sean $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n$ y $N = \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} N_n$ dos $K-$ módulos graduados y $(.,.) : M \times N \longrightarrow K$ una forma bilineal. Decimos que $(.,.)$ es *compatible con la graduación* si para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$, $n \neq m$ se tiene que $(M_n, N_m) = 0$, es decir, se tiene que $(x, y) = 0$ para todo $x \in M_n$, $y \in N_m$.

Sean $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} M_n$ y $N = \oplus_{n\in\mathbb{N}_0} N_n$ dos $K-$ módulos graduados y $(.,.) : M \times N \longrightarrow K$ una forma bilineal compatible con la graduación. Para cada $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos una forma bilineal inducida

$$(.,.)_m : M_m \times N_m \longrightarrow K, \text{ dada por}$$

$$(.,.)_m = (.,.)|_{M_m \times N_m}.$$

En este caso las aplicaciones lineales inducidas $\phi : M \longrightarrow N^*$ y $\varphi : N \longrightarrow M^*$ relacionadas con $(.,.)$ por las ecuaciones (2.17) y (2.18) satisfacen $Im(\phi) \subseteq N^{*gr}$, y $Im(\varphi) \subseteq M^{*gr}$. Además es claro que ϕ y φ son homomorfismos de módulos graduados. De hecho. *hay una biyección entre el conjunto de formas bilineales compatibles con la graduación $(.,.) : M \times N \longrightarrow K$ y el conjunto de homomorfismos graduados $\phi : M \longrightarrow N^{*gr}$*. Similarmente, hay una biyección entre el conjunto de formas bilineales compatibles con la graduación $(.,.) : M \times N \longrightarrow K$ y el conjunto de homomorfismos graduados $\varphi : N \longrightarrow M^{*gr}$.

2.7 Biálgebras autoduales

Definición

Sean $\mathfrak{B} = (B, \bullet_B, 1_B, \Delta_B, \epsilon_B)$, $\mathfrak{D} = (D, \bullet_D, 1_D, \Delta_D, \epsilon_D)$ $K-$ biálgebras graduadas y

$$(.,.) : B \times D \longrightarrow K$$

una forma bilineal compatible con la graduación. Decimos que $\mathfrak{B}$ y $\mathfrak{D}$ *son duales con respecto a* $(.,.)$ si, para todo $a, b \in B$, $c, d \in D$ se tiene que

$$(a \bullet_B b, c) = (a \otimes b, \Delta_D(c))_\otimes \tag{2.19}$$

$$(b, c \bullet_D) = (\Delta_B(b), c \otimes d)_\otimes. \tag{2.20}$$

En particular, si $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$ se dice que $\mathfrak{B}$ *es autodual con respecto a* $(.,.)$.

Nos proponemos ahora probar que los conceptos de biálgebra autodual definido en 2.5 y el concepto de biálgebra autodual con respecto a una forma bilineal son equivalentes si la forma bilineal es regular y las componentes homogéneas de la biálgebra son libres de rango finito. Para ello necesitamos los siguientes lemas.

Lema

Sean $\mathfrak{B} = (B, \bullet_B, 1_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ y $\mathfrak{D} = (D, \bullet_D, 1_D, \Delta_D, \epsilon_D)$ dos $K-$ biálgebras graduadas. Supongamos que cada componente homogénea de D es libre de rango finito (por tanto D^{*gr} tiene estructura de biálgebra). Sea $\phi : B \longrightarrow D^{*gr}$ un homomorfismo de módulos graduados. Sea $(.,.) : B \times D \longrightarrow K$ la forma bilineal relacionada con ϕ por (2.17). Entonces
(i) ϕ respeta la multiplicación si y sólo si para todo $a, b \in B$, $c \in D$ se satisface la ecuación (2.19).
(ii) ϕ respeta la comultiplicación si y sólo si para todo $b \in B$, $c, d \in D$ se satisface la ecuación (2.20).

Demostración (i) Denotamos por $*$ a la convolución en D^*. Sean $a, b \in B$, $c \in D$. Entonces

$$(\phi(a) * \phi(b))(c) = \sum \phi(a)(c_{(1)})\phi(b)(c_{(2)}) = \sum (a, c_{(1)})(b, c_{(2)}) =$$

$$= \sum (a \otimes b, c_{(1)} \otimes c_{(2)})_\otimes = (a \otimes b, \Delta_D(c))_\otimes.$$

Por otro lado tenemos

$$(a \bullet_B b, c) = \phi(a \bullet_B b)(c).$$

Por tanto ϕ respeta la multiplicación si y sólo si para todo $a, b \in B$, $c \in D$ se tiene que

$$(a \bullet_B, c) = (a \otimes b, \Delta_D(c))_\otimes,$$

que es la ecuación (2.19).

(ii) Supongamos que ϕ respeta la comultiplicación. Sean $b \in B$, $c, d \in D$. Entonces

$$(\Delta_B(b), c \otimes d)_\otimes = \sum (b_{(1)} \otimes b_{(2)}, c \otimes d)_\otimes =$$

$$= \sum (b_{(1)}, c)(b_{(2)}, d) = \sum m_K[(\phi \otimes \phi)(b_{(1)} \otimes b_{(2)})](c \otimes d).$$

Por otro lado (recordemos que T denota a la aplicación lineal definida en 2.5)

$$(b, c \bullet_D d) = (\phi(b) \circ m_D)(c \otimes d) = m_D^*(\phi(b))(c \otimes d) =$$

$$= T[(T^{-1} \circ m_D^*)(\phi(b))](c \otimes d) = T[(\Delta_{D^{*gr}} \circ \phi)(b)](c \otimes d).$$

Como ϕ respeta la comultiplicación se tiene $\Delta_{D^{*gr}} \circ \phi = (\phi \otimes \phi) \circ \Delta_B$. Por tanto

$$(b, c \bullet_D d) = T[(\phi \otimes \phi) \circ \Delta_B](b)(c \otimes d) = \sum T(\phi(b_{(1)}) \otimes \phi(b_{(2)}))(c \otimes d) =$$

$$= \sum m_K(\phi(b_{(1)}) \otimes \phi(b_{(2)}))(c \otimes d) = (\Delta_B(b), c \otimes d)_{\otimes},$$

que es la ecuación (2.20). El regreso es similar. $\diamondsuit$

Lema

Sean $\mathfrak{B} = (B, \bullet_B, 1_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ y $\mathfrak{D} = (D, \bullet_D, 1_D, \Delta_D, \epsilon_D)$ $K-$ biálgebras graduadas. Supongamos que las componentes homogéneas de D son libres de rango finito. Sea $\phi : B \longrightarrow D^{*gr}$ un homomorfismo de módulos graduados. Sea $(.,.)_\phi$ la forma bilineal relacionada con ϕ por (2.17). Entonces
(i) ϕ preserva la unidad si y sólo si $\epsilon_D = (1_B, .)_\phi$.
(ii) ϕ preserva la counidad si y sólo si $\epsilon_B = (., 1_D)_\phi$.

Demostración. (i) Recordemos que el elemento unidad en D^* es ϵ_D. Por tanto ϕ preserva la unidad si y sólo si $\phi(1_B) = 1_{D^*} = \epsilon_D$, es decir, si y sólo si $\epsilon_D = (1_B, .)_\phi$.

(ii) Recordemos que la counidad en el dual graduado D^{*gr} está dada por

$$\epsilon_{D^{*gr}}(\varphi) = \varphi(1_D) \text{ para todo } \varphi \in D^{*gr}.$$

Por tanto ϕ preserva la counidad si y sólo si $\epsilon_{D^{*gr}} \circ \phi = \epsilon_B$, si y sólo si para todo $b \in B$ se tiene que

$$(1_D, b)_\phi = \phi(b)(1_D) = \epsilon_{D^{*gr}}(\phi(b)) = \epsilon_B(b).$$

Por tanto ϕ preserva la counidad si y sólo si $\epsilon_B = (., 1_D)_\phi$. $\diamondsuit$
Ahora tenemos prácticamente demostrado el teorema principal de esta sección.

Teorema

Sean B y D biálgebras graduadas. Supongamos que cada componente homogénea de D es libre de rango finito (por tanto D^{*gr} tiene estructura de biálgebra). Sea $\phi : B \longrightarrow D^{*gr}$ un homomorfismo de módulos graduados. Sea $(.,.) : B \times D \longrightarrow K$ la forma bilineal relacionada con ϕ por (2.17). Entonces ϕ es un isomorfismo de biálgebras graduadas si y sólo si $(.,.)$ es regular y B y D son duales con respecto a $(.,.)$.

Demostración. Supongamos que ϕ es un isomorfismo de módulos graduados. Por la proposición 2.6, la forma bilineal $(.,.)$ es regular. Como ϕ es isomorfismo de álgebras y de coálgebras, en particular respeta la multiplicación y la comultiplicación. El lema 2.7 implica que B y D son duales con respecto a $(.,.)$.

Conversamente, si $(.,.)$ es regular y B y D son duales con respecto a $(.,.)$, entonces ϕ respeta la multiplicación y la comultiplicación. Además, el lema 2.6 implica que ϕ es un isomorfismo de módulos graduados. Sólo falta probar que ϕ respeta unidades y counidades. Por el lema anterior, esto es equivalente a probar que $\epsilon_D = (1_B, .)$, $\epsilon_B = (., 1_D)$.
Como ϕ es sobreyectiva existe $b \in B$ tal que $\epsilon_D = (b, .)$. Por tanto, para todo $y \in D$ se tiene que (recordemos que $*$ denota la multiplicación en D^*)

$$[(1_B, .) * \epsilon_D](y) = [(1_B, .) * (b, .)](y) =$$

$$= m_K \circ [(1_B, .) \otimes (b, .)] \circ \Delta_D(y) = \sum (1_B, .)(y_{(1)}) \otimes (b, .)(y_{(2)}) =$$

$$= \sum (1_B, y_{(1)})(b, y_{(2)}) = \sum (1_B \otimes b, y_{(1)} \otimes y_{(2)})_\otimes =$$

$$= (1_B \otimes b, \Delta_D(y))_\otimes = (1_B \bullet_B b, y) = (b, y) = (b, .)(y).$$

Por tanto $(1_B, .) * \epsilon_D = (b, .) = \epsilon_D$. Como ϵ_D es el elemento unidad en el álgebra dual D^* (ver 2.5), se tiene que

$$(1_B, .) = (1_B, .) * \epsilon_D = \epsilon_D.$$

Similarmente se prueba que $\epsilon_B = (., 1_D)$. $\diamondsuit$

Corolario (Autodualidad)

Sea B una $K-$ biálgebra graduada con componentes homogéneas libres de rango finito. Entonces B es autodual si y sólo si existe una forma bilineal regular $(.,.) : B \times B \longrightarrow K$ compatible con la graduación tal que B es autodual con respecto a $(.,.)$. $\diamondsuit$

Capítulo 3

Formas

3.1 Definiciones elementales y ejemplos

Definición

Sea $(S, \preceq_S)$ un conjunto finito parcialmente ordenado y $f : [n] \longrightarrow S$ una biyección, donde $n = |S|$. Decimos que la terna $\varsigma = (S, \preceq_S, f)$ es una *forma* de orden n. Una *forma* es una forma de orden n para algún $n \in N$. Acordamos que $\emptyset$ es una forma, *la forma de orden* 0. También decimos que f es una *etiquetación* de S. Si no hay peligro de confusión denotaremos a la forma $(S, \preceq_S, f)$ por S.

Observación

Sea $(S, \preceq_S, f)$ una forma de orden n. Entonces podemos definir un orden total $\leftharpoonup_S$ en S dado por

$$x \leftharpoonup_S y \Leftrightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y) \text{ para todo } x, y \in S.$$

Decimos que $\leftharpoonup_S$ es el *orden total inducido por* f. Recíprocamente, si $(S, \preceq_S)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado de cardinalidad n con un orden total $\leftharpoonup_S$, y si $f : [n] \longrightarrow S$ está dada por

$$f(1) \leftharpoonup_S f(2) ... \leftharpoonup_S f(n)$$

Entonces $(S, \preceq_S, f)$ es una forma de orden n. Decimos que f es la *etiquetación correspondiente a* $\leftharpoonup_S$. $\diamondsuit$

Debido a la observación anterior, una terna $\varsigma = (S, \preceq_S, \leftharpoonup_S)$, donde S es un conjunto finito, $\preceq_S$ es un orden parcial en S, y $\leftharpoonup_S$ es un orden total en S es llamado una *forma*. Diremos que las formas $\varsigma = (S, \preceq_S, \leftharpoonup_S)$ y $\tau = (T, \preceq_T, \leftharpoonup_T)$ son *isomorfas* (denotado $\varsigma \simeq \tau$) si existe un isomorfismo $\phi : S \longrightarrow T$ de ordenes parciales $\preceq_S$ y $\preceq_T$ y de órdenes totales $\leftharpoonup_S$ y $\leftharpoonup_T$. Observemos que, si $(S, \preceq_S, f)$ y $(T, \preceq_T, g)$ son formas y $\phi : S \longrightarrow T$ es un isomorfismo de formas entonces $\phi \circ f = g$.

Observación

Sean $(S, \preceq_S, \leftharpoonup_S)$ una forma y $R \subseteq S$ tal que $|R| = m$. Entonces $(R, \preceq_S |_{R\times R}, \leftharpoonup_S |_{R\times R})$ es una forma. Decimos que R es una *subforma* de S. Observemos que la etiquetación de R correspondiente a $\leftharpoonup_S |_{R\times R}$ es

$$e_R = e_S|_{e_S^{-1}(R)} \circ \gamma,$$

donde $\gamma : [m] \longrightarrow e_S^{-1}(R)$ es la única biyección de $[m]$ en $e_S^{-1}(R)$ que respeta el orden usual en $\mathbb{N}$ y e_S es la etiquetación de S correspondiente a $\leftharpoonup_S$. $\diamondsuit$

Ejemplo

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Recordemos que el *grupo simétrico de orden* n, denotado por S_n, es el conjunto de todas las biyecciones de $[n]$ en $[n]$, esto es,

$$S_n = \{\sigma : [n] \longrightarrow [n] | \sigma \text{ es una biyección}\}$$

Sea $\pi \in S_n$. Definimos la π *forma*, $S(\pi) = ([n], \preceq_\pi, \leftharpoonup_\pi)$, con órdenes parcial y total dados por

$$i \preceq_\pi j \Leftrightarrow \pi(i) \leq \pi(j),$$

$$i \leftharpoonup_\pi j \Leftrightarrow i < j$$

para todo $i, j \in [n]$. Es fácil ver que $S(\pi)$ es una forma.

Observación

Sea $\varsigma = (S, \preceq_S, f)$ una forma de orden n tal que $\preceq_S$ es un orden total sobre S. Escribimos $S = \{s_1, ..., s_n\}$ con

$$s_1 \preceq_S ... \preceq_S s_n$$

Si definimos

$$\phi : (S, \preceq_S) \longrightarrow ([n], \leq), \text{ dada por } \phi(s_i) = i \text{ para todo } i \in [n],$$

donde $\leq$ denota el orden usual en $[n]$, entonces ϕ es un isomorfismo de conjuntos ordenados. Sea $\pi = \phi f$. Entonces $\varsigma \simeq S(\pi)$. $\diamondsuit$

Ejemplo

Definimos un orden parcial $\leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dado por

$$(i, j) \leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (k, l) \Leftrightarrow i \leq k \text{ y } j \leq l \text{ para todo } i, j, k, l \in \mathbb{N}$$

Definimos también un orden total $\longrightarrow_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ en $N \times N$ dado por

$$(i, j) \longrightarrow_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (k, l) \Leftrightarrow i > k \text{ o } (i = k \text{ y } j \leq l) \text{ para todo } i, j, k, l \in \mathbb{N}$$

Los axiomas para conjuntos parcial y totalmente ordenados son directos de la definición.

Ejemplo

Sea $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Entonces $(S, \leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |_{S\times S}, \longrightarrow_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |_{S\times S})$ es una forma. Estamos interesados especialmente en subconjutos finitos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Podemos ilustrar un subconjunto finito S de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por un diagrama

En este caso $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2)\}$. Decimos que $(x,y) \in S$ está en la fila x y la columna y.
Observemos que $(x,y) \leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} (w,z)$ si y sólo si (x,y) está más "a la izquierda" y "arriba" que (w,z). Además, los elementos de S están ordenados (respecto al orden $\longrightarrow_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$) en orden creciente de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. En este ejemplo, si ponemos el número m que le corresponde a la coordenada (x,y) bajo la etiquetación correspondiente a $\longrightarrow_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, obtenemos

6	7	8	9
3	4	5	
1	2		

Observación

Sea $S \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con los órdenes total y parcial definidos anteriormente. Sea $(h,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Definimos la *forma transladada*, denotada por $S + (h,k)$, por

$$S + (h,k) = \{s + (h,k) : s \in S\},$$

con los mismos órdenes total y parcial. Entonces claramente

$$\phi : S \longrightarrow S + (h,k), \text{ dada por } \phi(s) = s + (h,k) \text{ para todo } s \in S,$$

es un isomorfismo de formas. $\diamondsuit$

3.2 Tablas de Young estándar

El concepto de tabla de Young estándar, que definiremos a continuación, es el pumto de partida para la construcción de las biálgebras que son el objeto de nuestro estudio. Aunque al principio la definición parecerá poco intuitiva, al avanzar en la exposición este concepto aparecerá de forma natural.

Definición

Sea $n \in N$ y $(S, \preceq_S, f)$ una forma de orden n. Decimos que $\pi \in S_n$ es una *tabla de Young estándar de forma S* si

$$\alpha = \pi f^{-1} : (S, \preceq_S) \longrightarrow ([n], \leq)$$

es una función creciente de conjuntos parcialmente ordenados. Una *tabla de Young estándar* es una tabla de Young estándar de forma S para alguna forma S.

Definición

Sea S una forma de orden n, definimos

$TYE^S = \{\pi \in S_n : \pi$ es una tabla de Young estándar de forma $S\}$
$Z^S = \sum_{\pi \in TYE^S} \pi$

Observemos que, si $(S, \preceq_S, f)$ y $(T, \preceq_T, g)$ son formas de orden n y $\phi : S \longrightarrow T$ es un isomorfismo de formas, entonces, como observamos anteriormente, se tiene $\phi \circ f = g$. Por tamto. dada $\pi \in S_n$ se tiene $\alpha = \pi f^{-1} = \pi \circ g^{-1} \circ \phi$. Luego α es creciente con respecto a $\preceq_S$ si y sólo si $\beta = \pi \circ g^{-1}$ es creciente con respecto a $\preceq_T$, es decir, se tiene $TYE^S = TYE^T$.

Observación

Sean $\pi, \sigma \in S_n$. Si se tiene que

$$(\text{para todo } (i,j) \in [n] \times [n])(\pi(i) < \pi(j) \Leftrightarrow \sigma(i) < \sigma(j))$$

entonces $\sigma = \pi$. Para ver esto, observemos que la propiedad anterior es equivalente a

$$i < j \Leftrightarrow (\pi\sigma^{-1})(i) < (\pi\sigma^{-1})(j) \text{ para todo } (i,j) \in [n] \times [n]$$

Por lo tanto

$$(\pi\sigma^{-1})(1) < (\pi\sigma^{-1})(2) < ... < (\pi\sigma^{-1})(n),$$

por tanto $\pi\sigma^{-1} = id_{S_n}$, como se quería probar. $\diamondsuit$

Observación

Sea $\pi \in S_n$, entonces $TYE^{S(\pi)} = \pi$. Para ver esto, observemos que la etiquetación correspondiente al orden total en $S(\pi)$ es id_{S_n}. Por tanto,

$$\sigma \in TYE^{S(\pi)} \Leftrightarrow \sigma : (S(\pi), <_\pi) \longrightarrow ([n], <)$$

es monótona, lo cual ocurre si y sólo si

$$[(\text{para todo } (i,j) \in [n] \times [n])(\sigma(i) < \sigma(j) \Leftrightarrow \pi(i) < \pi(j))] \Leftrightarrow \sigma = \pi \; \diamondsuit$$

Definición

Sea $(S, \preceq_S, \leftharpoonup_S)$ una forma y sean $x, y \in S$ incomparables con respecto a $\preceq_S$. Definimos la forma $(S(x,y), \preceq_{S(x,y)}, \leftharpoonup_{S(x,y)})$ por

$$S(x,y) = S,$$

$$a \preceq_{S(x,y)} b \Leftrightarrow (a \preceq_S b \text{ o } (a \preceq_S x \text{ y } y \preceq_S b)),$$

$$\leftharpoonup_{S(x,y)} = \leftharpoonup_S$$

Observemos que $\preceq_{S(x,y)}$ es el refinamiento más pequeño de $\preceq_S$ tal que
$x \preceq_{S(x,y)} y$.

Proposición

Sea $(S, \preceq_S, f)$ una forma y $x, y \in S$ incomparables con respecto a $\preceq_S$. Consideremos las formas $S(x,y)$ y $S(y,x)$ definidas anteriormente. Entonces

$$TYE^S = TYE^{S(x,y)} \sqcup TYE^{S(y,x)},$$

donde $\sqcup$ denota unión ajena
Demostración. Ya que $\preceq_{S(x,y)}$ y $\preceq_{S(y,x)}$ son refinamientos de $\preceq_S$, entonces

$$TYE^{S(x,y)} \subseteq TYE^S$$

$$TYE^{S(y,x)} \subseteq TYE^S$$

Sea $\pi \in TYE^S$. Observemos que, por definición, $\pi \in TYE^{S(x,y)} \Leftrightarrow \alpha(x) < \alpha(y)$, donde $\alpha = \pi f^{-1}$. Por lo tanto es claro que la unión es ajena. La inyectividad de α implica que $\alpha(x) < \alpha(y)$ o $\alpha(y) < \alpha(x)$, es decir, $\pi \in TYE^{S(x,y)} \cup TYE^{S(y,x)}$ $\diamondsuit$

Como resultado inmediato de la proposición anterior, tenemos el siguiente

Corolario

Con la notación de la proposición anterior, se tiene

$$Z^S = Z^{S(x,y)} + Z^{S(y,x)} \ \diamondsuit$$

3.3 Unión semidirecta de formas

A continuación definiremos el concepto de unión semidirecta de dos formas dadas S y T. Esta construcción resulta muy natural y nos servirá para dar una interpretación combinatoria del producto de las álgebras que estudiaremos más adelante.

Definición

Sean $\varsigma = (S, \preceq_S, e_S)$ y $\tau = (T, \preceq_T, e_T)$ formas de órdenes n y m, respectivamente. Decimos que la forma $\upsilon = (U, \preceq_U, e_U)$ es una *unión semidirecta de* ς *con* τ si existen formas $\varsigma' = (S', \preceq_{S'}, e_{S'})$ y $\tau' = (T', \preceq_{T'}, e_{T'})$ tales que $\varsigma' \simeq \varsigma$, $\tau' \simeq \tau$, $U = S' \cup T'$, $S' \cap T' = \emptyset$, y

$$\preceq_U = \preceq_{S'} \cup \preceq_{T'},$$

$$e_U(i) = e_{S'}(i) \text{ para todo } i \in [n],\ e_U(j) = e_{T'}(j-n) \text{ para todo } j \in [n+m] \setminus [n]$$

Observación

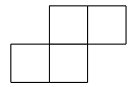
Sean $\varsigma = (S, \preceq_S, \leftharpoonup_S)$ y $\tau = (T, \preceq_T, \leftharpoonup_T)$ formas. Entonces $\upsilon = (U, \preceq_U, \leftharpoonup_U)$ es una unión semidirecta de ς con τ si y sólo si existen formas ajenas $\varsigma' \simeq \varsigma$, $\tau' \simeq \tau$ tales que $U = S' \cup T'$, y

$$\preceq_U = \preceq_{S'} \cup \preceq_{T'},\ \leftharpoonup_U = \leftharpoonup_{S'} \cup \leftharpoonup_{T'} \cup (S' \times T'),$$

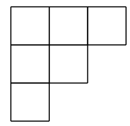
Si υ y υ' son uniones semidirectas de ς con τ, entonces $\upsilon \simeq \upsilon'$.
Todas estas afirmaciones se siguen directamente de la definición $\diamondsuit$

Ejemplo

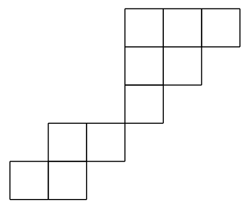
Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:
$S \simeq$



$T \simeq$



Si U es una unión semidirecta de S con T, entonces
$U \simeq$



Notación

Sean ς y τ formas, denotamos por $\varsigma \cup_\sim \tau$ a la clase de las uniones semidirectas de ς con τ. El objetivo de esta notación es hacerla operativa, es decir, podemos hacer abuso de notación y tomar $\varsigma \cup_\sim \tau$ como una unión semidirecta arbitraria de ς con τ, si no tenemos dada ninguna. En algunos casos especiales con los que trabajaremos frecuentemente, podremos construir una unión semidirecta "canónica" de las formas dadas. Cuando sea dada esta construcción, escribimos $\varsigma \cup^\sim \tau$ para denotar a este elemento particular de $\varsigma \cup_\sim \tau$.
La siguiente proposición, que será útil en el próximo capítulo, establece que la unión semidirecta de formas es asociativa salvo isomorfía.

Proposición

Sean $\varsigma = (S, \preceq_S, \leftharpoonup_S)$, $\tau = (T, \preceq_T, \leftharpoonup_T)$ y $\rho = (R, \preceq_R, \leftharpoonup_R)$ formas. Entonces

$$(\varsigma \cup_\sim \tau) \cup_\sim \rho \simeq \varsigma \cup_\sim (\tau \cup_\sim \rho)$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S \cap T = S \cap R = T \cap R = \emptyset$. Sean $U = S \cup T$, $V = T \cup R$. Entonces, con órdenes apropiados, $U \in S \cup_\sim T$, $V \in T \cup_\sim R$. También es claro que $W = U \cup R \in U \cup_\sim R$. Basta probar que $W \in S \cup_\sim V$. Esto se sigue de que

$$\preceq_W = \preceq_U \cup \preceq_R = \preceq_S \cup \preceq_T \cup \preceq_R = \preceq_S \cup \preceq_V, \text{ y}$$

$$\leftharpoonup_W = \leftharpoonup_U \cup \leftharpoonup_R \cup (U \times R) =$$

$$= \leftharpoonup_S \cup \leftharpoonup_T \cup \leftharpoonup_R \cup (S \times T) \cup (S \times R) \cup (T \times R) = \leftharpoonup_S \cup \leftharpoonup_V \cup (S \times V). \ \diamondsuit$$

3.4 Ideales de formas

El concepto de ideal de una forma nos servirá para encontrar descripciones combinatorias de los productos y coproductos del álgebra de permutaciones, a definir en el siguiente capítulo. Intuitivamente, en este contexto, los ideales son los intervalos "izquierdos" de los conjuntos parcialmente ordenados.

Definición

Sea $(S, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un subconjunto $I \subseteq S$ es un *ideal* de S (denotado $I \lhd S$) si

$$(\text{para todo } x \in I)\ (y \preceq x \Rightarrow y \in I).$$

Un *ideal* de una forma $(S, \preceq_S, f)$ es un ideal de $(S, \preceq_S)$. Observemos que $\emptyset \lhd S$ para cualquier forma S.

Notación

Sea S una forma. Denotamos

$$I(S) = \{I \subseteq S : I \lhd S\}.$$

Observación

Sea $(S, \leq_S)$ un conjunto finito totalmente ordenado. Para $y \in S$ sea

$$I_y = \{x \in S : x \leq_S y\}.$$

Entonces

$$\emptyset \neq I \lhd S \Leftrightarrow \exists y \in S \text{ tal que } I = I_y.$$

Es claro por definición que $I_y \lhd S$ para todo $y \in S$.
Ahora, sea $I \lhd S$ y sea $y = max\ I$. Por definición $I_y \subseteq I$. Además, si $x \in I$, por hipótesis $y <_S x$ o $x \leq_S y$, pero la primera alternativa contradice la maximalidad de y. Por tanto $x \in I_y$, por tanto $I \subseteq I_y$ $\diamondsuit$

La siguiente proposición, con la que finaliza el capítulo, caracteriza los ideales de las formas $S(\pi)$ definidas anteriormente.

Proposición

Sea $n \in N$, $\pi \in S_n$. Entonces

$$I(S(\pi)) = \{\emptyset\} \cup \{\pi^{-1}([k]) : k \in [n]\}$$

Demostración. Observemos que $\leq_\pi$ es un orden total sobre $S(\pi)$. Entonces, debido a la observación anterior,

$$I(S(\pi)) = \{\emptyset\} \cup \{I_k : k \in [n]\},$$

donde

$$I_k = \{l \in [n] : l \leq_\pi k\} = \{l \in [n] : \pi(l) \leq \pi(k)\} =$$
$$= \{\pi^{-1}(s) : s \leq \pi(k)\} = \{\pi^{-1}(s) : s \in [\pi(k)]\} = \pi^{-1}([\pi(k)]) \text{ para todo } k \in [n]\ \diamondsuit$$

Capítulo 4

La biálgebra de permutaciones

4.1 Composiciones, particiones y subgrupos de Young

Recordemos que, dado un conjunto X, el *monoide libre de base* X, denotado X^*, es el conjunto de todas las sucesiones finitas de la forma

$$x_1...x_n,$$

con $n \in \mathbb{N}_0$, $x_i \in X$ para todo $i \in [n]$. La multiplicación en X^* está dada por *concatenación*, es decir, si $x = x_1...x_n$, $y = y_1...y_m \in X^*$, entonces $x.y = x_1...x_n y_1...y_m$. El neutro de X^* es la sucesión vacía, es decir, $\emptyset$.
Si $x = x_1...x_n \in X^*$, decimos que x es de *longitud* n, y denotamos $\ell(x) = n$.

Definición

Consideremos $\mathbb{N}^*$, el monoide libre de base $\mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Decimos que $q = q_1...q_s \in N^*$ es una *composición* de n (denotado $q \models n$) si $n = \sum_{i=1}^{s} q_i$. Además acordamos que $\emptyset \models 0$.
Si además se cumple que $q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_s$ decimos que q es una *partición* de n y lo denotamos $q \vdash n$.
Dada $q = q_1...q_s \models n$ definimos

$$P^q = (P_1^q, ..., P_s^q),$$

la sucesión de bloques sucesivos de tamaño q_i en $[n]$.
Por ejemplo, si $n = 5$, $q = 2.1.2$, entonces $P^q = (\{1,2\},\{3\},\{4,5\})$.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos una relación $\simeq$ en

$$\{q \in \mathbb{N}^* : q \models n\}$$

dada por

$$q = q_1...q_s \simeq r = r_1...r_t \Leftrightarrow s = t \text{ y } \exists \sigma \in S_t \text{ tal que } r = q_{\sigma_1}...q_{\sigma_t}$$

Observación

La relación definida anteriormente es una relación de equivalencia. Además $\{p \in \mathbb{N}^* : p \vdash n\}$ es una *transversal* de las clases de equivalencia en $\{q \models n\}$, es decir, para cada $q \models n$ existe una única partición p_q tal que $q \simeq p_q$ $\diamondsuit$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$, $q \models n$ de longitud s. El *subgrupo de Young de tipo* q es

$$S_q = \{\pi \in S_n : \pi(P_i^q) = P_i^q \text{ para todo } i \in [s]\} \leq S_n$$

Observemos de teoría elemental de grupos que, dado $q = q_1 ... q_s \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$S_q \cong S_{q_1} \times S_{q_2} \times ... \times S_{q_s}.$$

Observación

Recordemos que, dado un grupo G y H un subgrupo de G, entonces las *clases laterales izquierdas* de H en G, denotadas por $G/H = \{xH : x \in G\}$ están dadas por

$$xH = \{xh : h \in H\} \text{ para todo } x \in G$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, $q \models n$. Entonces para todos $\pi, \sigma \in S_n$ se tiene

$$\pi S_q = \sigma S_q \Leftrightarrow \pi(P_i^q) = \sigma(P_i^q) \text{ para todo } i \in [s]. \ \diamondsuit$$

Sea $q \models n$ de longitud s y tomemos $\pi S_q \in S_n/S_q$. Usando la observación anterior, podemos encontrar una única $\sigma \in S_n$ creciente en los bloques sucesivos P_i^q, tal que $\sigma S_q = \pi S_q$. Por tanto

$$S^q = \{\sigma \in S_n : \sigma\mid_{P_i^q} \text{ es creciente para todo } i \in [s]\}$$

es un conjunto de representantes de las clases izquierdas de S_q en S_n, es decir, S^q es una *transversal* de las clases izquierdas del subgrupo de Young de tipo q en S_n.

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$. Definimos

$$\Xi^q = \textstyle\sum_{v \in S^q} v$$

Observemos que $\Xi^q \in KS_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$. Recordemos que $S_0 = \{id_\emptyset\}$. Así, tenemos $\Xi^\emptyset = id_\emptyset$

Notación

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Para todo $(\pi, \sigma) \in S_n \times S_m$ definimos $\pi\sharp\sigma \in S_{n+m}$ por

$$(\pi\sharp\sigma)(i) = \pi(i) \text{ para todo } i \in [n] \text{ y } (\pi\sharp\sigma)(i+n) = \sigma(i) + n \text{ para todo } i \in [m]$$

Observemos que $\pi\sharp id_\emptyset = \pi$, $id_\emptyset\sharp\sigma = \sigma$. Denotamos por

$$S_n\sharp S_m = \{\pi\sharp\sigma : (\pi, \sigma) \in S_n \times S_m\}.$$

Entonces $S_{n.m} = S_n\sharp S_m$, $S_n = S_n\sharp S_0 = S_0\sharp S_n$.

4.2 La biálgebra $\mathcal{P}$

En las siguientes secciones dotaremos de una estructura de biálgebra graduada conexa al $K-$ módulo

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} KS_n$$

Además demostraremos que $\mathcal{P}$ es una biálgebra autodual.
La construcción de la multiplicación y la comultiplicación en $\mathcal{P}$ está fuertemente ligada a los conceptos de tabla de Young standard e ideal de una forma. Las formas "básicas" con las que trabajaremos son de la forma $S(\alpha)$ para $\alpha \in S_n$. Comenzaremos con una construcción canónica de $S(\alpha) \cup_{\sim} S(\beta)$ para todo $(\alpha, \beta) \in (\cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n) \times (\cup_{m\in\mathbb{N}_0} S_m)$, que anteriormente acordamos con denotarla $S(\alpha) \cup^{\sim} S(\beta)$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$. Sea $S' = S(\alpha)$, $T' = [n+m] \setminus [n]$ con órdenes parcial $\preceq_{T'}$ y total $\leftharpoonup_{T'}$ dados por

$$(a \preceq_{T'} b \Leftrightarrow a - n \leq_\beta b - n) \text{ (para todo } a, b \in [n+m] \setminus [n]),$$

$$\leftharpoonup_{T'} = \leq \text{ (orden usual en } N),$$

Denotamos por

$$\preceq_{\alpha,\beta} = \preceq_{S'} \cup \preceq_{T'}$$

La siguiente proposición no es difícil de probar y se sigue directamente de la definición. Probaremos únicamente la parte (ii).

Proposición

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$. Entonces

(i) $([n+m], \preceq_{\alpha,\beta,\leq})$ es una unión semidirecta de $S(\alpha)$ con $S(\beta)$ para todo $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$
(ii) Para todo $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$ se tiene que $\pi \in TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)}$ si y sólo si existe $v \in S^{n.m}$ tal que $\pi = v(\alpha\sharp\beta)$

Demostración. Sean $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$, $\pi \in TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)}$. Observemos que el orden parcial en $U = S(\alpha) \cup^{\sim} S(\beta)$ se caracteriza por la condición

$$i \preceq_U j \Leftrightarrow (((i,j) \in [n] \times [n] \text{ y } \alpha(i) < \alpha(j)) \text{ ó}$$

$$((i,j) \in ([n+m] \setminus [n]) \times ([n+m] \setminus [n]) \text{ y } \beta(i-n) < \beta(j-n)))$$

Sea $v \in S^{n.m}$. Observemos que una etiquetación de U es $id_{[n+m]}$. Tenemos que

$$\alpha(i) < \alpha(j) \text{ implica } (v\alpha)(i) < (v\alpha)(j) \text{ para todo } i, j \in [n], \text{ y}$$

$$\beta(i-n) < \beta(j-n) \text{ implica } (v(\alpha\sharp\beta))(i) < (v(\alpha\sharp\beta))(j) \text{ para todo } i, j \in [n+m] \setminus [n].$$

Por lo tanto se tiene que $v(\alpha\sharp\beta) \in TYE^U$ para todo $v \in S^{n.m}$. Conversamente, sea $\pi \in TYE^U$. Sea $v \in S^{n.m}$ tal que $\pi S_{n.m} = vS_{n.m}$. Entonces

$$\alpha(i) < \alpha(j) \text{ si y sólo si } (v\alpha)(i) < (v\alpha)(j) \text{ para todo } i, j \in [n].$$

Como $\pi \in TYE^U$ entonces

$$\alpha(i) < \alpha(j) \text{ implica } \pi(i) < \pi(j) \text{ para todo } i, j \in [n].$$

Entonces, como $\pi([n]) = (v\alpha)([n])$, se tiene que $\pi|_{[n]} = v\alpha|_{[n]}$. Similarmente tenemos que $\pi|_{[n+m]\setminus[n]} = v(\beta|_{[m]+n})$. Por tanto $\pi = v(\alpha\sharp\beta)$ $\diamondsuit$

4.3 Estructura de álgebra en $\mathcal{P}$

Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$, $(\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$, definimos

$$\alpha \star \beta = Z^{S(\alpha) \cup_{\sim} S(\beta)}$$

Extendiendo linealmente, obtenemos una aplicación lineal

$$\star : \mathcal{P} \bigotimes \mathcal{P} \longrightarrow P$$

Definimos también $1_{\mathcal{P}} = id_{\emptyset} \in S_0$. Nuestro objetivo es ahora mostrar que $(\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra graduada conexa.
La conexidad es clara, ya que $KS_0 = \{k.id_{\emptyset}\}_{k \in K} \simeq K$. También observemos que

$$\alpha \star id_{\emptyset} = Z^{S(\alpha) \cup_{\sim} \emptyset} = Z^{S(\alpha)} = \alpha = Z^{\emptyset \cup_{\sim} S(\alpha)} = id_{\emptyset} \star \alpha$$

Por tanto $id_{\emptyset}$ es el elemento unidad con respecto a $\star$. Además se sigue de la definición de $\star$ que

$$KS_n \star KS_m \subseteq KS_{n+m} \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}$$

Por tanto la parte de la unidad, la graduación y la conexidad están claras. Sólo falta probar la asociatividad. Antes daremos una caracterizacíon del producto que será muy útil.
Primero observemos que como corolario de la proposición anterior obtenemos

Corolario

Sea $(k, l) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, $(\alpha, \beta) \in S_k \times S_l$. Entonces

$$\alpha \star \beta = \Xi^{k.l}(\alpha \sharp \beta) = \textstyle\sum_{v \in S^{k.l}} v(\alpha \sharp \beta). \ \diamondsuit$$

Recordemos del capítulo anterior que $Z^{S(\alpha)} = \alpha$ para todo $\alpha \in \cup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$. Por tanto la definición del producto en $\mathcal{P}$ en la base $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$ puede escribirse

$$Z^{S(\sigma)} \star Z^{S(\pi)} = Z^{S(\sigma) \cup^{\sim} S(\pi)}$$

$$\text{para todo } \sigma, \pi \in \cup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$$

La llamada "Regla de inducción", que probaremos a continuación, generaliza la ecuación anterior para cualesquiera formas S y T.

Teorema (Regla de inducción)

Sean $(S, \preceq_S, e_S)$ y $(T, \preceq_T, e_T)$ formas. Entonces

$$Z^S \star Z^T = Z^{S \cup_{\sim} T}$$

Demostración. Primero observemos que, dados $n, m \in \mathbb{N}_0$, como $S^{n.m}$ es una transversal de las clases izquierdas de $S_{n.m}$ en S_{n+m}, entonces

$$\pi \in S_{n+m} \Rightarrow \exists! v \in S^{n.m}, (\alpha, \beta) \in S_n \times S_m \text{ tales que } \pi = v(\alpha \sharp \beta).$$

Por lo tanto, dada la caracterización de $TYE^{S(\alpha) \cup^{\sim} S(\beta)}$ mostrada en la proposición anterior, entonces

$$(\text{para todo } \alpha, \alpha' \in S_n, \beta, \beta' \in S_m)((\alpha, \beta) \neq (\alpha', \beta'))$$

$$\Rightarrow TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)} \cap TYE^{S(\alpha')\cup^{\sim} S(\beta')} = \emptyset$$

Por lo tanto, la unión

$$\Re = \cup_{(\alpha,\beta)\in TYE^S \times TYE^T}\ TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)}$$

es ajena y así

$$Z^{\Re} = \sum_{(\alpha,\beta)\in TYE^S \times TYE^T} Z^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)} = \sum_{(\alpha,\beta)\in TYE^S \times TYE^T} Z^{S(\alpha)} \star Z^{S(\beta)} =$$

$$= \sum_{\alpha\in TYE^S} Z^{S(\alpha)} \star \sum_{\beta\in TYE^T} Z^{S(\beta)} = Z^S \star Z^T.$$

Por lo tanto sólo basta probar la igualdad

$$\Re = TYE^{S\cup_{\sim} T}.$$

Supongamos que S es de orden n y T de orden m. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $S \cap T = \emptyset$. Entonces $U = S \cup T$ es una unión semidirecta de S con T. Denotamos $[m] + n = \{k + n : k \in [m]\}$. Sea

$$\eta : [m] \longrightarrow [m] + n \text{ dada por } \eta(k) = k + n \text{ para todo } k \in [m].$$

Entonces η es claramente una biyección. Observemos que una etiquetación e_U de U está dada por

$$e_U|_{[n]} = e_S,$$

$$e_U|_{[m]+n} = e_T \circ \eta^{-1}.$$

Recordemos que una permutación $\sigma \in S_n$ puede definirse mediante el orden de su imagen, es decir, basta definir el orden $\leq_\sigma$ en $[n]$ para definir a σ.
Definimos $\alpha \in S_n$ por

$$\alpha(i) < \alpha(j) \Leftrightarrow \pi(i) < \pi(j) \text{ para todo } i, j \in [n].$$

Definimos $\beta \in S_m$ por

$$\beta(i) < \beta(j) \Leftrightarrow \pi(i+n) < \pi(j+n)) \text{ para todo } i, j \in [m].$$

De esta definición se sigue que $\pi \in TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)}$.
Para esta contención ($\supseteq$) resta probar que

$$(\alpha, \beta) \in TYE^S \times TYE^T$$

Como $\pi \in TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)}$ entonces existe $v \in S^{n.m}$ tal que $\pi = v(\alpha\sharp\beta)$.

Supóngase que $a \preceq_S b$, entonces $\pi e_S^{-1}(a) < \pi e_S^{-1}(b)$ luego $\alpha e_S^{-1}(a) < \alpha e_S^{-1}(b)$, por tanto $\alpha \in TYE^S$.
Supongamos ahora que $x \preceq_T y$, entonces $x \preceq_U y$. Por tanto

$$\pi e_U^{-1}(x) < \pi e_U^{-1}(y).$$

Pero $e_U^{-1} = \eta \circ e_T^{-1}$. Por tanto

$$\pi(e_T^{-1}(x) + n) =< \pi(e_T^{-1}(y) + n)$$

Luego $\beta e_T^{-1}(x) < \beta e_T^{-1}(y)$, es decir, $\beta \in TYE^T$. Por tanto se tiene la contención

$$TYE^{S\cup_{\sim}T} \subseteq \Re.$$

Para la otra contención, sea $\pi \in TYE^{S(\alpha)\cup^{\sim} S(\beta)}$, para $(\alpha,\beta) \in TYE^S \times TYE^T$. Entonces, si $x \preceq_S y$, se tiene $\alpha e_S^{-1}(x) < \alpha e_S^{-1}(y)$ por hipótesis, por tanto

$$\pi e_S^{-1}(x) < \pi e_S^{-1}(y)$$

Sean ahora $x, y \in T$ tales que $x \preceq_T y$, entonces $\beta e_T^{-1}(x) < \beta e_T^{-1}(y)$, por tanto se tiene

$$\pi(e_T^{-1}(x) + n) < \pi(e_T^{-1}(y) + n)$$

Es decir,

$$\pi e_U^{-1}(x) < \pi e_U^{-1}(y)$$

Por tanto $x \preceq_U y$ implica $\pi e_U^{-1}(x) < \pi e_U^{-1}(y)$ para todo $x, y \in U$, es decir, $\pi \in TYE^U$. Luego se tiene

$$\Re \subseteq TYE^{S\cup_{\sim}T}.$$

Como se quería probar. $\diamondsuit$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior, obtenemos la asociativividad de $\star$, y, por tanto, que $(\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra.

Corolario

$(\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra graduada conexa
Demostración. Como se observó antes, sólo falta probar la asociatividad. Sean S, T, R formas, $U \in S \cup_{\sim} T$, $V \in T \cup_{\sim} R$ y $W \in U \cup_{\sim} R$. Aplicamos la proposición (2.3.5) y el teorema anterior para obtener

$$(Z^S \star Z^T) \star Z^R = Z^U \star Z^R = Z^W = Z^S \star Z^V = Z^S \star (Z^R \star Z^T)$$

Como $Z^{S(\pi)} = \pi$ para todo $\pi \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$, se tiene

$$(\alpha \star \beta) \star \gamma = \alpha \star (\beta \star \gamma) \text{ para todo } \alpha, \beta, \gamma \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n.$$

El resultado se sigue por linealidad $\diamondsuit$

Ahora veamos una descripción combinatoria de la multiplicación $\alpha\star\beta$ en $\mathcal{P}$ para $\alpha \in S_n$, $\beta \in S_m$, cuya ventaja consiste en facilitar los cálculos. Sin embargo, esto es sólo a nivel computacional, ya que si $n+m$ es grande se vuelve poco práctico realizarlos a mano (aunque esto es razonable, ya que si $n+m$ es grande, entonces $\mid S^{n.m} \mid$ es grande, a saber, del orden de $\binom{n+m}{m}$).
Primero observemos que, si $q = q_1...q_n \in \mathbb{N}^*$ y $[n] = \{q_1, ..., q_n\}$, entonces $q \in S_n$, de hecho, ésta es la notación que utlizamos para escribir una permutación $\pi \in S_n$ como "palabra", es decir, escribimos $\pi = \pi_1...\pi_n$, donde $\pi_i = \pi(i)$ para todo $i \in [n]$.

Definición

Sean $n \in \mathbb{N}$, $k \in [n] \cup \{0\}$ y $\alpha \in S_n$. Para cada subconjunto $D \subseteq [n]$ de cardinalidad k, definimos su *palabra* α*- estándar* por

$$st_D^{\alpha} = d_1...d_k \in N^*,$$

donde $D = \{d_1, ..., d_k\}$ y (para todo $(i,j) \in [k]^2)(d_i < d_j \Leftrightarrow \alpha_i < \alpha_j)$

Notación

Sea X un conjunto, $k \leq |X|$. Denotamos

$$\binom{X}{k} = \{Y \subseteq X : |Y| = k\}$$

Con estas notaciones, estamos en condiciones de formular y probar el siguiente

Teorema

Sean $n, m \in N$, $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$. Entonces

$$\alpha \star \beta = \sum_{D \in P([n+m])^n} st^{\alpha}_{D}.st^{\beta}_{[n+m]\setminus D}.$$

Demostración. Recordemos que $v \in S^{n.m}$ está determinado por $v([n])$ y $v([n+m]\setminus[n])$, y que

$$\alpha \star \beta = \sum_{v \in S^{n.m}} v(\alpha \sharp \beta)$$

Observemos que, dada $v \in S^{n.m}$, entonces

$$v(\alpha\sharp\beta) = v_{\alpha_1}...v_{\alpha_n}.v_{(\beta_1+n)}...v_{(\beta_m+n)},$$

además (para todo $(i,j) \in [n]^2$)$(v_{\alpha_i} < v_{\alpha_j} \Leftrightarrow \alpha_i < \alpha_j)$, por tanto

$$v_{\alpha_1}...v_{\alpha_n} = st^{\alpha}_{v([n])},$$

similarmente

$$v_{(\beta_1+n)}...v_{(\beta_m+n)} = st^{\beta}_{v([n+m]\setminus[n])}$$

La demostración concluye después de demostrar que

$$\{v([n]) : v \in S^{n.m}\} = \{D \subseteq [n+m] : |D| = n\} = P([n+m])^n$$

La contención $\subseteq$ está clara.
Para la otra contención, sea $D \in P([n+m])^n$. Escribimos

$$D = \{d_1, ..., d_n\}, \text{ con } d_1 < ... < d_n, \text{ y}$$

$$[n+m] \setminus D = \{e_1, ..., e_m\}, \text{ con } e_1 < ... < e_m$$

Definimos $v \in S_{n+m}$ por

$$v_i = d_i \text{ para todo } i \in [n], \text{ y } v_{j+n} = e_j \text{ para todo } j \in [m]$$

Entonces es claro que $v \in S^{n.m}$ y que $v([n]) = D$ $\diamondsuit$

Ejemplo

Sean $n = m = 2$, $\alpha = 21$, $\beta = 12$. Hacemos los cálculos correspondientes para los subconjuntos de $[n+m] = [4]$ de cardinalidad 2:
$D_1 = \{1,2\}$, $st^{\alpha}_{D_1} = 21$, $st^{\beta}_{[4]-D_1} = 34$; $D_2 = \{1,3\}$, $st^{\alpha}_{D_2} = 31$, $st^{\beta}_{[4]-D_2} = 24$; $D_3 = \{1,4\}$, $st^{\alpha}_{D_3} = 41$, $st^{\beta}_{[4]-D_3} = 23$; $D_4 = \{2,3\}$, $st^{\alpha}_{D_4} = 32$, $st^{\beta}_{[4]-D_4} = 14$; $D_5 = \{2,4\}$, $st^{\alpha}_{D_5} = 42$, $st^{\beta}_{[4]-D_5} = 13$;$D_6 = \{3,4\}$, $st^{\alpha}_{D_6} = 43$, $st^{\beta}_{[4]-D_6} = 12$.
Entonces

$$\alpha \star \beta = 2134 + 3124 + 4123 + 3214 + 4213 + 4312$$

4.4 La comultiplicación en $\mathcal{P}$

En esta sección daremos una estructura de coálgebra graduada en $\mathcal{P}$. La definición de la comultiplicación es sencilla y se puede describir de una forma combinatoria fácil de calcular.
Antes de definir la comultiplicación hacemos la siguiente

Observación

Sean $n \in \mathbb{N}_0, \pi \in S_n$. Entonces

para todo $k \in [n] \cup \{0\}$ $\exists!(\alpha_k^\pi, \beta_k^\pi) \in S_k \times S_{n-k}, v_k \in S^{k.(n-k)}$ tales que $\pi = (\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi) v_k^{-1}$

Esto se sigue del hecho de que, como $S^{k.(n-k)}$ es un conjunto de representantes de las clases izquierdas de $S_{k.(n-k)}$ en S_n, entonces

$$[S^{k.(n-k)}]^{-1} = \{v^{-1} : v \in S^{k.(n-k)}\}$$

es un conjunto de representantes de las clases derechas de $S_{k.(n-k)}$ en S_n $\diamondsuit$

Definición

Sean $n \in \mathbb{N}_0, \pi \in S_n$. Para todo $k \in [n] \cup \{0\}$, sean $\alpha_k = \alpha_k^\pi \in S_k, \beta_k = \beta_k^\pi \in S_{n-k}$, como en la observación anterior. Definimos

$$\Delta(\pi) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \otimes \beta_k$$

Extendiendo linealmente obtenemos una aplicaciôn lineal

$$\Delta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \bigotimes \mathcal{P},$$

tal que

$$\Delta(KS_n) \subseteq \bigoplus_{k=0}^n KS_k \otimes KS_{n-k} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0$$

Recordemos que la *delta de Kronecker* asocia a dos símbolos dados a y b el valor 1 si $a = b$ y 0 si $a \neq b$. Esto es,

$$\delta_{ab} = 1 \text{ si } a = b \text{ y } 0 \text{ si } a \neq b$$

Definimos la aplicación lineal

$$\epsilon : \mathcal{P} \longrightarrow K,$$

definida en la base $\cup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$ por

$$\epsilon(\alpha_n) = \delta_{0n} \text{ para todo } \alpha_n \in S_n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $\pi \in S_n$. Entonces, con la notación anterior, al aplicar $\epsilon \otimes id$ a $\Delta(\pi)$ el único término distinto de 0 es cuando $k = 0$, en este caso $\alpha_0 = 1_{\mathcal{P}}$, $\beta_0 = \pi$. Por tanto

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(\pi) = \epsilon(1_{\mathcal{P}}) \otimes \pi = 1_K \otimes \pi.$$

Por linealidad obtenemos que

$$(\epsilon \otimes id)\Delta(c) = (1 \otimes)(c) \text{ para todo } c \in \mathcal{P},$$

que es el primer axioma de counidad. El otro axioma se demuestra análogamente. Por tanto, para probar que $(\mathcal{P}, \Delta, \epsilon)$ es una coálgebra graduada conexa, sólo resta probar la coasociatividad de Δ. Primero veamos una forma de calcular $\Delta(\pi)$ para $\pi \in S_n$.

Proposición

Sea $n \in \mathbb{N}$, $\pi = \pi_1...\pi_n \in S_n$. Para todo $k \in [n] \cup \{0\}$, escribimos

$$\pi = (\alpha_k \sharp \beta_k) v_k^{-1}, \text{ para algunos } (\alpha_k, \beta_k) \in S_k \times S_{n-k},\ v_k \in S^{k.(n-k)}.$$

Entonces α_k se obtiene de $\pi_1...\pi_n$ al eliminar los elementos π_i con $\pi_i > k$
Similarmente, β_k se obtiene de $\pi_1...\pi_n$ al eliminar los elementos π_s con $\pi_s \leq k$, y restar k a los elementos restantes.
Antes de demostrar la proposición, la ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo

Sea $n = 6, \pi = 315642 \in S_6$. Entonces, siguiendo la fórmula de la proposición obtenemos

$$\alpha_0 = \emptyset, \beta_0 = \pi;\ \alpha_1 = 1, \beta_1 = 24531;\ \alpha_2 = 12, \beta_2 = 1342;\ \alpha_3 = 312, \beta_3 = 231;$$
$$\alpha_4 = 3142, \beta_4 = 12;\ \alpha_5 = 31542, \beta_5 = 1;\ \alpha_6 = \pi, \beta_6 = \emptyset. \text{ Entonces}$$

$$\Delta(\pi) = \textstyle\sum_{i=0}^{6} \alpha_i \otimes \beta_i$$

Demostración de la proposición. Sea $k \in [n] \cup \{0\}$, y escribimos

$$\pi = (\alpha_k \sharp \beta_k) v_k^{-1}, \text{ con } \alpha_k, \beta_k \in S_k \times S_{n-k},\ v_k \in S^{k.(n-k)}.$$

Entonces

$$\pi^{-1} = v_k(\alpha_k \sharp \beta_k)^{-1} = v_k(\alpha_k^{-1} \sharp \beta_k^{-1})$$

Por tanto

$$\alpha_k^{-1}(i) < \alpha_k^{-1}(j) \Leftrightarrow \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(j) \text{ para todo } (i,j) \in [k], \text{ y}$$

$$\beta_k^{-1}(i) < \beta_k^{-1}(j) \Leftrightarrow \pi^{-1}(i+k) < \pi^{-1}(j+k) \text{ para todo } (i,j) \in [n-k].$$

Supóngase que $\pi^{-1}(s_1) < \pi^{-1}(s_2) < ... < \pi^{-1}(s_k)$ y $[k] = \{s_1, ..., s_k\}$.
Entonces la permutación obtenida de π al eliminar π_i con $\pi_i > k$ es

$$\tau_k = s_1...s_k.$$

Por lo anterior tenemos

$$\alpha_k^{-1}(s_1) < ... < \alpha_k^{-1}(s_k).$$

Por tanto $j = \alpha_k^{-1}(s_j)$ para todo $j \in [k]$, es decir $s_j = \alpha_k(j)$ para todo $j \in [k]$. Entonces $\alpha_k = s_1...s_k = \tau_k$, como se quería probar. Similarmente se prueba el resultado para β_k. $\diamondsuit$

Ahora veamos una caracterización de $\Delta(\pi)$ para todo $\pi \in \cup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n$.

Proposición

Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $\pi \in S_n$ y $S = S(\pi)$. Entonces

$$\Delta(\pi) = \textstyle\sum_{I \triangleleft S} Z^I \otimes Z^{S \setminus I}$$

Demostración. Sea J una subforma de S. Como $\leq_\pi$ es un orden total sobre S entonces $\leq_\pi |_{J \times J}$ es un orden total sobre J. Por tanto $|TYE^J| = 1$. Recordemos que el conjunto de ideales de $S(\pi)$ (ver (2.4.4)) es

$$I(S(\pi)) = \{\emptyset\} \cup \{\pi^{-1}([k]) : k \in [n]\}.$$

Sean

$$I_k = \pi^{-1}([k]) \text{ para todo } k \in [n],\ I_0 = \{\emptyset\}$$

Luego sólo basta probar que

$$\alpha_k \in TYE^{I_k},\ \beta_k \in TYE^{S\setminus I_k} \text{ para todo } k \in [n] \cup \{0\},$$

donde α_k, β_k son como en 4.4.
Sea $k \in [n] \cup \{0\}$. Sea e_{I_k} la etiquetación de I_k correspondiente a $\leq |_{I_k \times I_k}$. Observemos que

$$\pi|_{I_k} = (\pi e_{I_k})e_{I_k}^{-1} : (I_k, \leq_\pi) \longrightarrow ([k], \leq)$$

por definición es creciente. Por tanto

$$TYE^{I_k} = \{\pi e_{I_k}\},$$

Sea $v_k \in S^{k.(n-k)}$ tal que

$$\pi = (\alpha_k \sharp \beta_k)v_k^{-1}$$

Entonces para todo $i, j \in [k]$, con $i < j$ se tiene

$$(\pi^{-1}\alpha_k)(i) = \pi^{-1}(\alpha_k\sharp\beta_k)(i) = v_k(\alpha_k\sharp\beta_k)^{-1}(\alpha_k\sharp\beta_k)(i) = v_k(i) < v_k(j) =$$
$$= \pi^{-1}(\alpha_k\sharp\beta_k)(j) = (\pi^{-1}\alpha_k)(j).$$

Por lo tanto

$$\pi^{-1}\alpha_k : [k] \to I_k$$

respeta el orden usual en $[k]$, es decir, $\pi^{-1}\alpha_k = e_{I_k}$, de donde

$$\alpha_k = \pi e_{I_k} \in TYE^{I_k}.$$

Para probar que $\beta_k \in TYE^{S\setminus I_k}$, primero observemos que

$$S \setminus I_k = \pi^{-1}([n-k] + k).$$

Denotamos por

$$\beta_k + k : [n-k] \longrightarrow [n-k] + k \text{ dada por } (\beta_k + k)(i) = \beta_k(i) + k \text{ para todo } i \in [n-k].$$

Observemos que, dados $i, j \in [n-k]$ con $i < j$ se tiene

$$\pi^{-1}(\beta_k(i) + k) = \pi^{-1}(\alpha_k\sharp\beta_k)(i + k) = v_k(i + k) < v_k(j + k)$$
$$= \pi^{-1}(\alpha_k\sharp\beta_k)(j + k) = \pi^{-1}(\beta_k(j) + k).$$

Por tanto

$$\pi^{-1}(\beta_k + k) : ([n-k], \leq) \longrightarrow S \setminus I_k$$

respeta el orden usual. Luego, si $e_{S\setminus I_k}$ es la etiquetación de $S \setminus I_k$ correspondiente a $\leq |_{(S\setminus I_k)\times(S\setminus I_k)}$, se tiene que $\pi^{-1}(\beta_k + k) = e_{S\setminus I_k}$. Luego $\beta_k + k = \pi e_{S\setminus I_k}$. Por tanto

$$\beta_k \in TYE^{S\setminus I_k},$$

como se quería probar. $\diamondsuit$

El teorema que probaremos a continuación, llamado "regla de restricción", generaliza la proposición anterior para cualquier forma S, y nos permitirá demostrar la coasociatividad de Δ.

Teorema (Regla de restricción)

Ses $(S, \preceq_S, e_S)$ una forma. Entonces

$$\Delta(Z^S) = \sum_{I \triangleleft S} Z^I \otimes Z^{S\setminus I}$$

Demostración. El lado derecho de la ecuación anterior es

$$\sum_{I \triangleleft S} Z^I \otimes Z^{S\setminus I} = \sum_{I \triangleleft S} \sum_{(\sigma,\tau)\in TYE^I \times TYE^{S\setminus I}} \sigma \otimes \tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{I \in I_k(S)} \sum_{(\sigma,\tau)\in TYE^I \times TYE^{S\setminus I}} \sigma \otimes \tau,$$

donde $n = |S|$ y $I_k(S) = \{I \triangleleft S : |I| = k\}$ para cualquier forma S, $k \in \mathbb{N}_0$. Usamos la misma notación que en 4.4. Entonces tenemos

$$\Delta(Z^S) = \sum_{\pi \in TYE^S} \Delta(\pi) = \sum_{\pi \in TYE^S} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k^\pi \otimes \beta_k^\pi =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\pi \in TYE^S} \alpha_k^\pi \otimes \beta_k^\pi.$$

Por tanto basta probar que

$$A_k = B_k \text{ para todo } k \in [n] \cup \{0\},$$

donde

$$A_k = \{(\sigma,\tau) \in S_k \times S_{n-k} : \exists I \in I_k(S) \text{ tal que } (\sigma,\tau) \in TYE^I \times TYE^{S\setminus I}\}, \text{ y}$$

$$B_k = \{(\alpha_k^\pi, \beta_k^\pi) : \pi \in TYE^S\}$$

Si $k = 0$ se tiene

$$A_0 = \{(id_\emptyset, \pi) : \pi \in TYE^S\} = B_0.$$

Supongamos que $k \in [n]$. Tomemos $(\sigma,\tau) \in A_k$. Sea $I \in I_k(S)$ tal que $(\sigma,\tau) \in TYE^I \times TYE^{S\setminus I}$.
Sea $v_k \in S^{k.(n-k)}$ definido por

$$v_k([k]) = e_S^{-1}(I), \text{ y sea}$$

$$\pi = (\sigma \sharp \tau) v_k^{-1}.$$

Entonces

$$\sigma = \alpha_k^\pi \text{ y } \tau = \beta_k^\pi$$

Queremos ver que $\pi \in TYE^S$. Observemos que $v_k|_{[k]}$ es la única biyección de $[k]$ en $e_S^{-1}(I)$ que respeta el orden usual en $\mathbb{N}$. Por tanto la etiquetación en I correpondiente a $\leftharpoonup_S |_{I\times I}$ es $e_I = e_S|_{e_S^{-1}(I)} \circ v_k$ (ver 2.1.3). Observemos también que $v_k([n-k]+k) = e_S^{-1}(S \setminus I)$. Denotamos por

$$\eta_k : [n-k] \longrightarrow [n-k]+k \text{ dada por } \eta_k(l) = l+k \text{ para todo } l \in [n-k].$$

Entonces $v_k \circ \eta_k : [n-k] \longrightarrow e_S^{-1}(S\setminus I)$ es una biyección que respeta el orden usual. Por tanto la etiquetación en $S\setminus I$ correspondiente a $\leftharpoonup_S |_{(S\setminus I)\times(S\setminus I)}$ es $e_{S\setminus I} = e_S|_{S\setminus I} \circ v_k \circ \eta_k$
Sean $a, b \in S$ tales que $a \preceq_S b$. Si $b \in I$ entonces $a \in I$. Por tanto existen $i, j \in [k]$ tales que

$$a = e_I(i) \text{ y } b = e_I(j).$$

Luego $e_S^{-1}(a) = (e_S^{-1} \circ e_I)(i) = v_k(i)$. Análogamente $e_S^{-1}(b) = v_k(j)$. Por tanto, como $\sigma \in TYE^I$ y $\pi v_k = \sigma \sharp \tau$, se tiene

$$\pi e_S^{-1}(a) = \pi v_k(i) = \sigma(i) =$$

$$= \sigma e_I^{-1}(a) < \sigma e_I^{-1}(b) = \pi e_S^{-1}(b).$$

Supongamos que $b \notin I$. Entonces, si $a \in I$, existen $i \in [k]$, $j \in [n-k]$ tales que

$$a = e_I(i),\ b = e_{S\setminus I}(j)$$

Luego

$$e_S^{-1}(a) = v_k(i),\ e_S^{-1}(b) = v_k(j+k),$$

de donde

$$\pi e_S^{-1}(a) = (\pi v_k)(i) = \sigma(i) < \tau(j) + k = (\pi v_k)(j+k) = \pi e_S^{-1}(b).$$

Si $a \notin I$, podemos escribir

$$a = e_{S\setminus I}(i),\ b = e_{S\setminus I}(j), \text{ con } i, j \in [n-k].$$

Entonces

$$\pi e_S^{-1}(a) = \tau(i) + k, \text{ y}$$

$$\pi e_S^{-1}(b) = \tau(j) + k$$

Por tanto

$$\tau e_{S\setminus I}^{-1}(a) = \tau \eta_k^{-1} v_k^{-1} e_S^{-1}(a) = \tau(i) = \pi e_S^{-1}(a) - k.$$

Similarmente

$$\tau l_{S\setminus I}^{-1}(b) = \pi l_S^{-1}(b) - k.$$

Como $\tau \in TYE^{S\setminus I}$, entonces

$$\tau e_{S\setminus I}^{-1}(a) \leq \tau e_{S\setminus I}^{-1}(b),$$

de donde la desigualdad

$$\pi l_S^{-1}(a) \leq \pi l_S^{-1}(b)$$

se sigue. Concluimos que $\pi \in TYE^S$. Por tanto

$$A_k \subseteq B_k$$

Para probar la otra contención, sea $\pi \in TYE^S$. Escribimos

$$\pi = (\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi) v_k^{-1}, \text{ con}$$

$$v_k \in S^{k.(n-k)},\ \alpha_k \in S_k,\ \beta_k \in S_{n-k}.$$

Sea $I = e_S v_k([k])$. Queremos probar que

$$I \lhd S \text{ y } (\alpha_k^\pi \beta_k^\pi) \in TYE^I \times TYE^{S\setminus I}.$$

Sea $y \in I$, $x \preceq_S y$. Podemos escribir

$$y = e_S v_k(j),\ x = e_S v_k(i), \text{ con } i \in [n],\ j \in [k].$$

Como $\pi \in TYE^S$ entonces

$$\pi e_S^{-1}(x) \leq \pi e_S^{-1}(y), \text{ es decir}$$

$$(\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi)(i) \leq (\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi)(j) = \alpha_k^\pi(j).$$

Luego $i \in [k]$, entonces $x \in I$. Por tanto $I \lhd S$.
Resta probar que $(\alpha_k^\pi, \beta_k^\pi) \in TYE^I \times TYE^{S\setminus I}$. Sean $a, b \in I$ tales que $a \preceq_I b$. Entonces $a \preceq_S b$. Sean

$$i = (e_S v_k)^{-1}(a),\ j = (e_S v_k)^{-1}(b) \in [k]$$

Entonces

$$\alpha_k^\pi(i) = (\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi)(i) =$$

$$= \pi e_S^{-1}(a) \leq \pi e_S^{-1}(b) = (\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi)(j) = \alpha_k^\pi(j).$$

Observemos que $e_S v_k : [k] \longrightarrow I$ respeta los órdenes totales. Por tanto la etiquetación en I correspondiente a $\leftharpoondown_S |_{I\times I}$ es $e_I = e_S v_k$. Entonces

$$i = e_I^{-1}(a),\ j = e_I^{-1}(b), \text{ por tanto}$$

$$\alpha_k^\pi e_I^{-1}(a) \leq \alpha_k^\pi e_I^{-1}(b).$$

Por tanto $\alpha_k^\pi \in TYE^I$. Argumentando de forma análoga obtenemos que

$$\beta_k^\pi \in TYE^{S\setminus I}. \ \diamondsuit$$

Ahora tenemos las herramientas para probar la coasociatividad de Δ, lo que es suficiente para probar

Teorema

$(\mathcal{P}, \Delta, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una coálgebra graduada conexa

Demostración. Como vimos, basta probar la coasociatividad de Δ.
Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in S_n$, $S = S(\alpha)$. Escribimos $[n] = \{a_1, ..., a_n\}$, donde

$$a_1 <_\alpha ... <_\alpha a_n$$

Sean $p, q, r \in [n] \cup \{0\}$. Definimos

$$I_p = \{a_1, ..., a_p\},\ M_{p,q} = \{a_{p+1}, ..., a_{p+q}\},\ F_r = \{a_{n-r+1}, ..., a_n\}.$$

Observemos que $I_0 = M_{p,0} = F_0 = \emptyset$ para todo $p \in [n] \cup \{0\}$. Entonces, de acuerdo a la caracterización de los ideales en conjuntos totalmente ordenados vista en (2.4.4), tenemos que, para $k \in [n] \cup \{0\}$, se tiene

$$I(S) = \{I_p : 0 \leq p \leq n\},\ I(I_k) = \{I_p : 0 \leq p \leq k\}, \text{ y}$$

$$I(S \setminus I_k) = \{M_{k,q} : 0 \leq q \leq n-k\}.$$

Tenemos que

$$\Delta(\alpha) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} Z^{I_k} \otimes Z^{S\setminus I_k}.$$

Por tanto

$$(\Delta \otimes id)\Delta\alpha = \textstyle\sum_{k=0}^{n}(\sum_{p=0}^{k} Z^{I_p} \otimes Z^{I_k \setminus I_p}) \otimes Z^{S\setminus I_k} =$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n}(\sum_{p+q=k} Z^{I_p} \otimes Z^{M_{p,q}}) \otimes Z^{F_{n-k}} =$$

$$= \textstyle\sum_{r,s,t\in[n]\cup\{0\}, r+s+t=n} Z^{I_r} \otimes Z^{M_{r,s}} \otimes Z^{F_t}.$$

Por otro lado, dada la caracterización de los ideales de $S \setminus I_k$, $k \in [n] \cup \{0\}$, podemos proceder de forma análoga para obtener

$$(id \otimes \Delta)\Delta\alpha = \textstyle\sum_{k,r,t\in[n]\cup\{0\}, k+r+t=n} Z^{I_k} \otimes Z^{M_{k,r}} \otimes Z^{F_t}$$

Luego $(\Delta \otimes id)\Delta\alpha = (id \otimes \Delta)\Delta\alpha$ para todo $\alpha \in S_n$. Por linealidad obtenemos la coasociatividad para Δ. $\diamondsuit$

Naturalmente llegamos al teorema base de este capítulo

Teorema

$(\mathcal{P}, \star, \Delta, 1_{\mathcal{P}}, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una biálgebra graduada conexa.
Demostración. Queremos ver que Δ y $\epsilon_{\mathcal{P}}$ son homomorfismos de álgebras.
Para ver que $\epsilon_{\mathcal{P}}$ es un homomorfismo de álgebras, observemos que, dados $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in S_n$, $\beta \in S_m$, se tiene

$$\epsilon_{\mathcal{P}}(\alpha \star \beta) = 0 = \epsilon_{\mathcal{P}}(\alpha)\epsilon_{\mathcal{P}}(\beta)$$

a menos que $n = 0$ y $m = 0$. En tal caso $\alpha = \beta = 1_{\mathcal{P}}$, y

$$\epsilon_{\mathcal{P}}(1_{\mathcal{P}} \star 1_{\mathcal{P}}) = \epsilon_{\mathcal{P}}(1_{\mathcal{P}}) = 1 = \epsilon_{\mathcal{P}}(1_{\mathcal{P}})\epsilon_{\mathcal{P}}(1_{\mathcal{P}}).$$

Por tanto $\epsilon_{\mathcal{P}}$ es un homomorfismo de álgebras.
Por otro lado, es claro que Δ respeta unidades, ya que

$$\Delta(1_{\mathcal{P}}) = 1_{\mathcal{P}} \otimes 1_{\mathcal{P}} = 1_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}}.$$

Sólo resta probar que Δ respeta productos. Por linealidad, bastará probar la
Afirmación. Sean $m, n \in \mathbb{N}, (\alpha, \beta) \in S_m \times S_n$. Entonces

$$\Delta(\alpha \star \beta) = \Delta(\alpha) \star_{\otimes} \Delta(\beta) \ (*)$$

Prueba. El lado izquierdo de $(*)$ es, de acuerdo con 4.4

$$\Delta(\alpha \star \beta) = \Delta(Z^S) = \textstyle\sum_{I \triangleleft S} Z^I \otimes Z^{S\setminus I},$$

donde $S = S(\alpha) \cup^{\sim} S(\beta)$.

No es difícil ver que

$$I(S) = \{I_\alpha \cup^{\sim} I_\beta : I_\alpha \triangleleft S(\alpha) \text{ y } I_\beta \triangleleft S(\beta)\}.$$

Además, si $I = I_\alpha \cup^\sim I_\beta \in I(S)$, entonces

$$S \setminus I = (S(\alpha) \setminus I_\alpha) \cup^\sim (S(\beta) \setminus I_\beta).$$

Por tanto, el lado derecho de $(*)$ es

$$\Delta(\alpha) \star_\otimes \Delta(\beta) = (\textstyle\sum_{I \triangleleft S(\alpha)} Z^1 \otimes Z^{S(\alpha)\setminus I}) \star_\otimes (\sum_{J \triangleleft S(\beta)} Z^J \otimes Z^{S(\beta)\setminus J}) =$$

$$= \textstyle\sum_{(I,J)\in I(S(\alpha))\times I(S(\beta))} (Z^I \star Z^J) \otimes (Z^{S(\alpha)\setminus I} \star Z^{S(\beta)\setminus J})$$

$$= \textstyle\sum_{(I,J)\in I(S(\alpha))\times I(S(\beta))} Z^{I\cup_\sim J} \otimes Z^{S\setminus(I\cup_\sim J)}$$

$$= \textstyle\sum_{K\triangleleft S} Z^K \otimes Z^{S\setminus K} = \Delta(\alpha \star \beta),$$

como se quería probar. $\diamondsuit$

4.5 Autodualidad de $\mathcal{P}$

Definición

Definimos una forma bilineal

$$(.,.)_\mathcal{P} : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \longrightarrow K, \text{ por}$$

$$(\sigma, \tau)_\mathcal{P} = \delta_{\sigma\tau^{-1}} \text{ para todo } \sigma, \tau \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n.$$

Observemos que $(.,.)_\mathcal{P}$ es compatible con la graduación y que $(.,.)_\mathcal{P}$ es simétrica y regular. Sea

$$(.,.)_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} : (\mathcal{P} \otimes \mathcal{P})^2 \longrightarrow K$$

la forma bilineal determinada por $(.,.)_\mathcal{P}$ ver (1.5.14). En esta sección probaremos que $\mathcal{P}$ es autodual con respecto a $(.,.)_\mathcal{P}$.

Teorema (Reciprocidad)

$(\mathcal{P}, \star, \Delta)$ es auto-dual con respecto a $(.,.)_\mathcal{P}$.

Demostración. Sean $n, m, p \in \mathbb{N}_0$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in S_n \times S_m \times S_p$. Como $(.,.)_\mathcal{P}$ es simétrica es suficiente probar que

$$(\alpha \star \beta, \gamma)_\mathcal{P} = (\alpha \otimes \beta, \Delta\gamma)_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}}.$$

Ambos lados de la ecuación son 0 a menos que $p = n + m$. En este caso

$$(\alpha \star \beta, \gamma)_P = (\textstyle\sum_{\pi \in TYE^{S(\alpha)\cup^\sim S(\beta)}} \pi, \gamma)_P =$$

$$= \{1 \text{ si } \gamma^{-1} \in TYE^{S(\alpha)\cup^\sim S(\beta)} \text{ y 0 en otro caso } \}.$$

Por otro lado, usando la notación de 4.4, tenemos que

$$(\alpha \otimes \beta, \Delta\gamma)_{P\otimes P} = (\alpha \otimes \beta, \textstyle\sum_{k=0}^p \alpha_k^\gamma \otimes \beta_k^\gamma)_{P\otimes P} =$$

$$= \{1 \text{ si } \gamma = (\alpha^{-1} \sharp \beta^{-1}) v_{n,m}^{-1} \text{ para algún } v_{n,m} \in S^{n.m} \text{ y 0 en otro caso } \} =$$

$$= \{1 \text{ si } \exists v \in S^{n.m} \text{ tal que } \gamma^{-1} = v(\alpha \sharp \beta) \text{ y 0 en otro caso } \} =$$

$$= \{1 \text{ si } \gamma^{-1} \in TYE^{S(\alpha)\cup^\sim S(\beta)} \text{ y 0 en otro caso } \} \text{ (para la última igualdad ver 4.2). } \diamondsuit$$

Corolario

$(\mathcal{P}, \star, \Delta)$ es una biálgebra autodual.

Demostración. Se sigue del teorema anterior y del teorema 2.7. $\diamondsuit$

4.6 La biálgebra de permutaciones de Malvenuto y Reutenauer

Introducción

La biálgebra de permutaciones fue introducida por Malvenuto y Reutenauer (ver [1]). Sin embargo, la estructura de biálgebra que ellos presentan es ligeramente diferente a la definición presentada aquí.
En esta sección probaremos que existen una multiplicación $\bullet$ y una comultiplicación δ en $\mathcal{P}$ tales que $(\mathcal{P}, \bullet, \delta, 1_{\mathcal{P}}, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una biálgebra graduada tal que la aplicación lineal

$$\varphi : (\mathcal{P}, \star, \Delta, 1_{\mathcal{P}}, \epsilon_{\mathcal{P}}) \longrightarrow (\mathcal{P}, \bullet, \delta, 1_{\mathcal{P}}, \epsilon_{\mathcal{P}}),$$

dada en la base $\cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$ por $\varphi(\pi) = \pi^{-1}$ para todo $\pi \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$, es un isomorfismo graduado de biálgebras.

Definición

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$. Definimos

$$\alpha \bullet \beta = \Sigma_{v\in S^{n.m}} (\alpha \sharp \beta) v^{-1}.$$

Lema

Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_m$. Entonces

$$\varphi(\alpha \star \beta) = \varphi(\alpha) \bullet \varphi(\beta).$$

Demostración. Recordemos que la proposición 4.2 implica que

$$\alpha \star \beta = \Sigma_{v\in S^{n.m}}\ v(\alpha \sharp \beta).$$

Por tanto

$$\varphi(\alpha \star \beta) = \Sigma_{v\in S^{n.m}} \varphi(v(\alpha \sharp \beta)) =$$
$$= \Sigma_{v\in S^{n.m}} (\alpha \sharp \beta)^{-1} v^{-1}$$
$$= \Sigma_{v\in S^{n.m}} (\alpha^{-1} \sharp \beta^{-1}) v^{-1} = \varphi(\alpha) \bullet \varphi(\beta). \ \diamondsuit$$

Por el lema anterior, obtenemos una aplicación lineal

$$\bullet : \mathcal{P} \bigotimes \mathcal{P} \longrightarrow P$$

tal que

$$\varphi(a \star b) = \varphi(a) \bullet \varphi(b) \text{ para todo } a, b \in \mathcal{P},$$

y, por supuesto

$$\varphi(1_{\mathcal{P}}) = 1_{\mathcal{P}}.$$

Para probar que $(P, \bullet, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra graduada isomorfa a $(\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}})$, necesitamos el siguiente

Lema

Sean A y B $K-$ módulos, $m_A : A \otimes A \longrightarrow A$, $m_B : B \otimes B \longrightarrow B$ aplicaciones lineales y $\phi : A \longrightarrow B$ aplicación lineal sobreyectiva tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, "\phi\otimes\phi"] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \otimes B \arrow[r, "m_B"] & B \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

conmuta. Si m_A es asociativa entonces m_B es asociativa.

Demostración. Dados $x, y \in A$, $a, b \in B$, escribimos

$$x \bullet_A y = m_A(x \otimes y), \text{ y } a \bullet_B b = m_B(a \otimes b)$$

Por tanto, el diagrama (4.1) implica que

$$\phi(x \bullet_A y) = \phi(x) \bullet_B \phi(y).$$

Sean $a, b, c \in B$. Como ϕ es sobreyectiva existen $x, y, z \in A$ tales que $a = \phi(x)$, $b = \phi(y)$, $c = \phi(z)$. Entonces

$$(a \bullet_B b) \bullet_B c = (\phi(x) \bullet_B \phi(y)) \bullet_B \phi(z) = \phi(x \bullet_A y) \bullet_B \phi(z) =$$

$$= \phi((x \bullet_A y) \bullet_A z).$$

Análogamente

$$a \bullet_B (b \bullet_B c) = \phi(x \bullet_A (y \bullet_A z)).$$

Como m_A es asociativa entonces

$$(x \bullet_A y) \bullet_A z = x \bullet_A (y \bullet_A z).$$

Por tanto

$$(a \bullet_B b) \bullet_B c = a \bullet_B (b \bullet_B c).$$

Por tanto m_B es asociativa, como se quería probar. $\diamondsuit$

El siguiente teorema es prácticamente un corolario de los lemas anteriores.

Teorema

$(\mathcal{P}, \bullet, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra graduada y

$$\varphi : (\mathcal{P}, \star, 1_{\mathcal{P}}) \longrightarrow (\mathcal{P}, \bullet, 1_{\mathcal{P}})$$

es un isomorfismo graduado de álgebras.

Demostración. El axioma de asociatividad para $\bullet$ se sigue de los lemas anteriores. Es claro que $1_{\mathcal{P}}$ es neutro con respecto a $\bullet$. Por tanto $(\mathcal{P}, \bullet, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra. La parte de la graduación es clara, ya que

$$KS_n \bullet KS_m \subseteq KS_{n+m} \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}_0, \text{ y}$$

Para la otra parte, es claro que φ es un isomorfismo lineal. Además φ manda unidades en unidades y respeta productos. Por tanto φ es un isomorfismo de álgebras. Es claro que φ es un isomorfismo graduado, ya que

$$\phi(KS_n) = KS_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

El teorema está demostrado. $\diamondsuit$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\pi \in S_n$. Para cada $k \in [n] \cup \{0\}$ escribimos

$$\pi = v_k(\sigma_k^\pi \sharp \tau_k^\pi),$$

donde $(\sigma_k^\pi, \tau_k^\pi) \in S_k \times S_{n-k}$ y $v_k \in S^{k.(n-k)}$.

Definimos

$$\delta(\pi) = \Sigma_{k=0}^n \sigma_k^\pi \otimes \tau_k^\pi$$

Observemos que $\delta(1_{\mathcal{P}}) = \delta(id_\emptyset) = id_\emptyset \otimes id_\emptyset = 1_{\mathcal{P}} \otimes 1_{\mathcal{P}}$, y que

$$\delta(KS_n) \subseteq \oplus_{p+q=n} KS_p \otimes KS_q.$$

Queremos probar que φ es compatible con las comultiplicaciones Δ y δ. Por linealidad es suficiente probar la

Proposición

Sea $n \in \mathbb{N}_0, \pi \in S_n$. Entonces

$$(\delta\varphi)(\pi) = (\varphi \otimes \varphi)\Delta\pi$$

Demostración. Sea $k \in [n] \cup \{0\}$. Entonces tenemos

$$\pi = (\alpha_k^\pi \sharp \beta_k^\pi) v_k^{-1},$$

$$\text{con } (\alpha_k^\pi, \beta_k^\pi, v_k) \in S_k \times S_{n-k} \times S^{k.(n-k)}.$$

Entonces

$$\pi^{-1} = v_k[(\alpha_k^\pi)^{-1} \sharp (\beta_k^\pi)^{-1}]$$

Por tanto

$$\begin{aligned}(\delta\varphi)(\pi) = \delta(\pi^{-1}) &= \Sigma_{k=0}^n (\alpha_k^\pi)^{-1} \otimes (\beta_k^\pi)^{-1} \\ &= \Sigma_{k=0}^n (\varphi \otimes \varphi)(\alpha_k^\pi \otimes \beta_k^\pi) \\ &= (\varphi \otimes \varphi)(\Sigma_{k=0}^n \alpha_k^\pi \otimes \beta_k^\pi) \\ &= (\varphi \otimes \varphi)\Delta\pi. \ \diamondsuit\end{aligned}$$

De la proposición anterior se sigue que existe una aplicación lineal

$$\delta : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \bigotimes \mathcal{P}$$

tal que

$$\delta\varphi = (\varphi \otimes \varphi)\Delta$$

El siguiente lema general implica la coasociatividad de δ.

Lema

Sean C y D $K-$ módulos, $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes C$, $\Delta_D : D \longrightarrow D \otimes D$ aplicaciones lineales y $\theta : C \longrightarrow D$ aplicación lineal sobreyectiva tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "\theta\otimes\theta"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

conmuta. Si Δ_D es coasociativa entonces Δ_D es coasociativa.

Demostración. Sea $d \in D$. Entonces existe $c \in C$ tal que $\theta(c) = d$. Por hipótesis tenemos

$$(\Delta_D \circ \theta)(c) = (\theta \otimes \theta) \circ \Delta_C(c)$$

Luego

$$(id \otimes \Delta_D) \circ \Delta_D(d) = (id \otimes \Delta_D) \circ (\Delta_D \circ \theta)(c) =$$

$$= (id \otimes \Delta_D) \circ ((\theta \otimes \theta) \circ \Delta_C(c)) = (\theta \otimes (\Delta_D \circ \theta)) \circ \Delta_C(c) =$$

$$= [\theta \otimes ((\theta \otimes \theta) \circ \Delta_C)] \circ \Delta_C(c) = (\theta \otimes \theta \otimes \theta) \circ (id \otimes \Delta_C) \circ \Delta_C(c)$$

Similarmente

$$(\Delta_D \otimes id) \circ \Delta_D(d) = (\theta \otimes \theta \otimes \theta) \circ (\Delta_C \otimes id) \circ \Delta_C(c).$$

El resultado se sigue aplicando coasociatividad de Δ_C. $\diamondsuit$

Teorema

$(\mathcal{P}, \delta, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una coálgebra graduada, y

$$\varphi : (\mathcal{P}, \Delta, \epsilon_{\mathcal{P}}) \longrightarrow (\mathcal{P}, \delta, \epsilon_{\mathcal{P}})$$

es un isomorfismo graduado de coálgebras.

Demostración. El lema anterior implica la coasociatividad de δ. Como $\epsilon_P(\alpha) = \epsilon(\alpha^{-1}) = \delta_{1n}$ para todo $\alpha \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$, entonces $\epsilon_{\mathcal{P}}$ cumple con los axiomas de counidad para δ. Por tanto $(\mathcal{P}, \delta, \epsilon_{\mathcal{P}})$ es una coálgebra. La parte de la graduación se observó en 4.6.
Ya se observó que φ es un isomorfismo lineal. Además, la proposición 4.6 implica que φ respeta comultiplicaciones. Además claramente $\epsilon_{\mathcal{P}} \circ \varphi = \epsilon_{\mathcal{P}}$. Por tanto φ es un isomorfismo graduado de coálgebras. $\diamondsuit$

En resumen, hasta ahora hemos probado que $(\mathcal{P}, \bullet, 1_{\mathcal{P}})$ es un álgebra graduada, que $(\mathcal{P}, \delta, \epsilon_P)$ es una coálgebra graduada y que

$$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$$

es un isomorfismo graduado tanto de álgebras como de coálgebras. Además observemos que

$$(\varphi\sigma, \varphi\tau)_{\mathcal{P}} = (\sigma^{-1}, \tau^{-1})_{\mathcal{P}} = \delta_{\sigma^{-1}\tau^{-1}} = \delta_{\sigma\tau} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{P}}$$

$$\text{para todo } \sigma, \tau \in \cup_{n\in\mathbb{N}_0} S_n$$

Por tanto φ preserva la forma $(.,.)_{\mathcal{P}}$, es decir, φ es una *isometría.* Antes de presentar el resultado final de este capítulo, recordemos la siguiente definición de álgebra lineal.

Definición

Sean V, W $K-$ módulos y

$$(.,.)_V : V \times V \longrightarrow K,\ (.,.)_W : W \times W \longrightarrow K$$

formas bilineales. Decimos que V es *isométricamente isomorfo* a W si existe un isomorfismo lineal

$$\varphi : V \longrightarrow W, \text{ tal que}$$

$$(u, v)_V = (\varphi u, \varphi v)_W \text{ para todo } (u, v) \in V \times V.$$

El siguiente lema implica que $(\mathcal{P}, \bullet, \delta)$ es una biálgebra.

Lema

Sea B un $K-$ módulo tal que $(B, m, 1_B)$ es un álgebra y (B, Δ, ϵ) es una coálgebra. Supongamos que existe una biálgebra $(A, \mu, 1_A, \delta, \upsilon)$ y una aplicación lineal sobreyectiva

$$\psi : A \longrightarrow B,$$

tal que ψ es un homomorfismo de álgebras y de coálgebras. Entonces $(B, m, 1_B, \Delta, \epsilon_B)$ es una biálgebra.

Demostración. Probaremos que Δ y ϵ son homomorfismos de álgebras. Escribimos

$$a \bullet b = m(a \otimes b) \text{ para todo } a, b \in B, \text{ y}$$

$$x * y = \mu(x \otimes y) \text{ para todo } x, y \in A.$$

Denotamos también por $\bullet_\otimes$ y $*_\otimes$ a las multiplicaciones en $B \otimes B$ y $A \otimes A$, respectivamente. Sean $a, b \in B$. Entonces existen $x, y \in A$ tales que $a = \psi(x)$, $b = \psi(y)$. Luego

$$\Delta(a \bullet b) = (\Delta \circ \psi)(x * y) = ((\psi \otimes \psi) \circ \delta)(x * y) =$$

$$= (\psi \otimes \psi)(\delta(x) *_\otimes \delta(y)) = (\psi \otimes \psi)(\textstyle\sum(x_{(1)} * y_{(1)}) \otimes (x_{(2)} * y_{(2)})) =$$

$$= \textstyle\sum(\psi(x_{(1)}) \bullet \psi(y_{(1)})) \otimes (\psi(x_{(2)}) \bullet \psi(y_{(2)})).$$

Por otro lado, tenemos

$$\Delta(a) \bullet_\otimes \Delta(b) = [(\psi \otimes \psi)\delta(x)] \bullet_\otimes [(\psi \otimes \psi)\delta(y)] =$$

$$= (\textstyle\sum \psi(x_{(1)}) \otimes \psi(x_{(2)})) \bullet_\otimes (\textstyle\sum \psi(y_{(1)}) \otimes \psi(y_{(2)})) =$$

$$= \textstyle\sum(\psi(x_{(1)}) \bullet \psi(y_{(1)})) \otimes (\psi(x_{(2)}) \bullet \psi(y_{(2)})).$$

Por tanto $\Delta(a \bullet b) = \Delta(a) \bullet_\otimes \Delta(b)$. Para ver que Δ respeta unidades, observemos que

$$\Delta(1_B) = \Delta\psi(1_A) = (\psi \otimes \psi)\delta(1_A) =$$

$$= (\psi \otimes \psi)(1_{A\otimes A}) = (\psi \otimes \psi)(1_A \otimes 1_A) = \psi(1_A) \otimes \psi(1_A) =$$

$$= 1_B \otimes 1_B = 1_{B\otimes B}.$$

Por tanto Δ es un homomorfismo de álgebras. Veamos que ϵ respeta productos. Sean $a, b \in B$, $x, y \in A$ tales que $a = \psi(x)$, $b = \psi(y)$. Entonces

$$\epsilon(a \bullet b) = (\epsilon \circ \psi)(x * y) = \upsilon(x * y) = \upsilon(x)\upsilon(y) =$$

$$= (\epsilon \circ \psi)(x)(\epsilon \circ \psi)(y) = \epsilon(a)\epsilon(b).$$

Por tanto ϵ respeta productos. Además

$$\epsilon(1_B) = (\epsilon \circ \psi)(1_A) = \upsilon(1_A) = 1_K.$$

Por tanto ϵ respeta unidades, luego ϵ es un homomorfismo de álgebras. $\diamondsuit$

Como corolario del lema anterior tenemos el siguiente teorema, con el que terminamos el capítulo.

Teorema

$(\mathcal{P}, \bullet, \delta)$ es una biálgebra graduada isométricamente isomorfa a $(\mathcal{P}, \star, \Delta)$, y la aplicación lineal

$$\varphi : (\mathcal{P}, \star, \Delta) \longrightarrow (\mathcal{P}, \bullet, \delta)$$

es un isomorfismo graduado de biálgebras. $\diamondsuit$

Capítulo 5

Tablas de Young

5.1 Particiones y diagramas de Young

En este capítulo trabajaremos con familias de subconjuntos de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, indexadas por particiones. Dado $D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entenderemos que estamos trabajando con la forma $(D, \leq_D, \leftharpoonup_D) = (D, \leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |_{D\times D}, \leftharpoonup_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |_{D\times D})$, con los órdenes parcial y total de $\mathbb{N} \otimes \mathbb{N}$ definidos en el capítulo 2.

Sea $\wp = \{p \in \mathbb{N}^* : p \vdash n \text{ para algún } n \in \mathbb{N}_0\}$ el conjunto de todas las particiones. Nótese que estamos considerando a $\emptyset$ como una partición. Para cada $p = p_1...p_s \in \wp$ definimos la forma $F(p) \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, como

$$F(p) := \cup_{i=1}^{s} \{i\} \times [p_i].$$

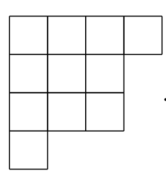
Definición

Sea $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ finito. Entonces S es un *diagrama de Young* si existe $p \in \wp$ tal que

$$S = F(p).$$

Ejemplo

Consideremos $p = 4.3.3.1 \in \wp$. Entonces $F(p)$ se puede representar como

$F(p) =$  .

Definición

Sea $D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Un *llenado* de D es una función $T : D \longrightarrow \mathbb{N}$. Decimos que T *tiene forma* D. Si D es un diagrama de Young, y se cumple que T es una función creciente de conjuntos parcialmente ordenados, decimos que T es una *tabla de Young*. Si D es de orden n y $T : D \longrightarrow [n]$ es una biyección, decimos que T es una *tabla de Young estándar en el sentido clásico*. Si $D = F(p)$ para $p \in \wp$ decimos que T es una *tabla de Youn* *estándar de forma p.*

Observemos que $T : D \longrightarrow \mathbb{N}$ es una tabla de Young si y sólo si, para todo $i, j, i', j' \in \mathbb{N}$ tales que $(i, j), (i', j), (i, j') \in D$, se tiene que $T(i, j) \leq T(i, j')$ siempre que $j \leq j'$ y $T(i, j) < T(i', j)$ siempre que $i < i'$.

Definición

Sea $D \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de orden n y $T : D \longrightarrow \mathbb{N}$ un llenado de D. Entonces la *palabra asociada a* T, denotada por $w(T)$, es la sucesión

$$w(T) = q_1 ... q_n \in \mathbb{N}^*,$$

donde, para todo $i \in [n]$, $q_i = T(x_i)$ y x_i es el i-ésimo elemento de D, de acuerdo al orden total en D. Observemos que $w(T)$ se forma al "leer" las entradas de D de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba. Esto lo ilustraremos con un ejemplo.

Ejemplo

Sea D como en el ejemplo anterior. Un llenado de D se puede ver así:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \cline{1-3} 3 & 3 & 3 & \\ \cline{1-3} 4 & & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Aquí, $T : D \longrightarrow \mathbb{N}$ está dada por $T(\{i\} \times [p_i]) = i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, y la palabra asociada a T es $w(T) = 4.3.3.3.2.2.2.1.1.1.1$. De hecho, T es una tabla, lo cual es claro de la definición.

Recordemos que una *tabla de Young estándar de forma* ς para una forma $\varsigma = (S, \preceq_S, e_S)$ de orden n es un elemento $\pi \in S_n$ tal que

$$\pi \circ e_S^{-1} : (S, \preceq) \longrightarrow ([n], \preceq)$$

es una función creciente de conjuntos parcialmente ordenados. Sea D un diagrama de Young de orden n, e_D la etiquetación en D correspondiente a $\leftharpoonup_D$ y $T : D \longrightarrow [n]$ una biyección. Entonces $w(T) = T \circ e_D$. Por tanto

$$T = w_T \circ e_D^{-1}.$$

Luego T es una tabla de Young estándar en el sentido clásico si y sólo si

$$T : (D, \preceq_D) \longrightarrow ([n], \leq)$$

es creciente, es decir, si y sólo si $w(T) \circ e_D^{-1}$ es una función creciente de conjuntos parcialmente ordenados, si y sólo si $w(T)$ es una tabla de Young estándar de forma T. En este sentido decimos que *los conceptos de tabla de Young estándar y tabla de Young estándar en el sentido clásico son equivalentes.*

5.2 El algoritmo de inserción

Dados $i, n \in \mathbb{N}$ sea $D = \{(i,j) : j \in [n]\}$ una fila y $T : D \longrightarrow [n]$ una tabla de Young. El *algoritmo simplificado de inserción para* T *y* x consiste en:

Sea $x_j = T(i,j)$ para $j \in [n]$. Si $\max_{j\in[n]}\{x_j\} \leq x$ sea $D' = D \cup \{(i, n+1)\}$, y

$$T \leftarrow x : D' \longrightarrow [n+1], \text{ dada por}$$

$(T \leftarrow x)(i,j) = x_j$ para $j \in [n]$, y $T(i, n+1) = x$. En otro caso sea $k = \min\{j \in [n] : x_j > x\}$ y sea

$$T \leftarrow x : D \longrightarrow [n],$$

dada por $(T \leftarrow x)(i,j) = x_j$ para $j \neq k$ y $(T \leftarrow x)(i,k) = x$. En este caso decimos que x *bota* a x_k. En general, si tenemos $T : D \longrightarrow \mathbb{N}$ una tabla de Young y $x \in \mathbb{N}$, al hablar de "filas de T", entenderemos que hablamos de las filas de D con el llenado T. El algoritmo de inserción para T y x consiste en:

Sea k el orden de la primera fila de D y l el número de filas de D. Aplicamos el algoritmo simplificado de inserción para x y la primera fila de T. Si ningún elemento de esta fila es mayor que x, termina el proceso y definimos $D' = D \cup_{(1,k+1)}$, y

$$(T \leftarrow x)|_D = T, \; (T \leftarrow x)(1, k+1) = x.$$

En otro caso supongamos que x bota a x_1. Aplicamos el algoritmo simplificado de inserción para x_1 y la segunda fila de T. Como T es una tabla de Young se sigue que al menos un elemento de esta fila es mayor que x. Por tanto x bota a, digamos, x_2. Continuamos este proceso aplicando el algoritmo simplificado de inserción a x_2 y la tercera fila de T. De esta forma obtenemos una sucesión $x_0 = x, x_1, ..., x_l$ tal que, en cada paso, x_{i-1} bota a x_i. Terminamos el proceso definiendo $D' = D \cup \{(l+1, 1)\}$, y

$$(T \leftarrow x)|_{D_i} = T|_{D_i} \leftarrow x_{i-1} \text{ para } i \in [l], \text{ y}$$

$$(T \leftarrow x)(l+1, 1) = x_l,$$

donde D_i es la iésima fila de D para todo $i \in [l]$. Ilustraremos este concepto con un ejemplo.

Ejemplo

Sea $x = 3$, T la tabla

2	4	4	5
3	5	6	
6	6		

Aplicando los pasos del algoritmo de inserción a T y x obtenemos
Paso 1 Insertamos 3 en la primera fila de T, y obtenemos

2	3	4	5
3	5	6	
6	6		

Aquí, 3 bota a 4, de modo que seguimos con el
Paso 2 Insertamos 4 en la segunda fila de T, y obtenemos

2	3	4	5
3	4	6	
6	6		

Aquí, 4 bota a 5, así seguimos
Paso 3 Insertamos 5 en la tercer fila de T,

2	3	4	5
3	4	6	
5	6		

Aquí, 5 bota a 6, de modo que pasamos al último paso de este procedimiento y obtenemos

$T \leftarrow x$:

2	3	4	5
3	4	6	
5	6		
6			

La siguiente propiedad básica de la operación anterior se prueba en [2, pág. 8].

Proposición

Sea T una tabla de Young y $x \in \mathbb{N}$. Entonces $T \leftarrow x$ es una tabla de Young. $\diamondsuit$

Corolario

Sea T una tabla y $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$, entonces

$$(...((T \leftarrow x_1) \leftarrow x_2)... \leftarrow x_n)$$

es una tabla. $\diamondsuit$

Para la siguiente definición, observemos que $T = \emptyset : \emptyset \longrightarrow \mathbb{N}$ es una tabla de Young. Al aplicar el algoritmo de inserción a x y T nos queda la tabla

$$\boxed{x}$$

Definición

Sea $n \in \mathbb{N}$, $\pi = \pi_1 ... \pi_n \in S_n$. Definimos la tabla de Young $P(\pi)$ por

$$P(\pi) = (((\emptyset \leftarrow \pi_1) \leftarrow \pi_2)...) \leftarrow \pi_n.$$

Del corolario anterior se sigue que $P(\pi)$ es una tabla de Young. De hecho, como π es una biyección, se sigue que $P(\pi)$ es una tabla de Young estándar el sentido clásico.

Ejemplo

Sea $n = 4$, $\pi = 3421 \in S_4$. Entonces

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array} \leftarrow 4 = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4\\\hline\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 4\\\hline\end{array} \leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4\\\hline 3 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 4\\\hline 3 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array} \leftarrow 1 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\\hline 2 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}.$$

Entonces

$$P(\pi) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\\hline 2 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{}\\\cline{1-1}\end{array}.$$

A continuación definiremos una relación de equivalencia en $\mathbb{N}$ que está estrechamente relacionada con el algortimo de inserción. Definiremos primero un conjunto de transformaciones, llamadas las *transformaciones elementales de Knuth*, que se aplican a palabras de la forma xyz, con $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Definición

Las *transformaciones elementales de Knuth* están definidas por

$$xyz \mapsto xzy \text{ siempre que } (z < x \leq y) \text{ ó } (y < x \leq z)\ (*), \text{ y}$$

$$xyz \mapsto yxz \text{ siempre que } (x \leq z < y) \text{ ó } (y \leq z < x)\ (*'),$$

para $x, y, z \in \mathbb{N}$. Una *transformación elemental de Knuth* sobre una palabra $w = w_1...w_s \in N^*$ es una transformación elemental de Knuth aplicada a alguna de las sucesiones $w_i w_{i+1} w_{i+2}$, con $i + 2 \leq s$.

Definición

Definimos una relación $\equiv_K$ sobre $\mathbb{N}^*$ como sigue

$w \equiv_K w'$ si y sólo si w' se obtiene de w al aplicar un número finito (puede ser 0) de transformaciones elementales de Knuth.

Decimos que las palabras w y w' son *Knuth equivalentes* si $w \equiv_K w'$

Observación

La relación $\equiv_K$ sobre $\mathbb{N}^*$ es de equivalencia. Esto se sigue inmediatamente de la definición. $\diamondsuit$

Ahora veremos la relación entre la equivalencia de Knuth y el algoritmo de inserción. La demostración de la siguiente proposición es algo elaborada y se prueba en [2, pág. 19].

Proposición

Sea T una tabla de Young y $x \in \mathbb{N}$. Entonces

$$w(T).x \equiv_K w(T \leftarrow x). \ \diamondsuit$$

Corolario

Sea $n \in \mathbb{N}$, $\pi = \pi_1 ... \pi_n \in S_n$. Entonces

$$\pi \equiv_K w(P(\pi)).$$

Demostración. Tomando $T = \emptyset$ obtenemos, aplicando repetidas veces la proposición anterior, que

$$\pi \equiv_K (\emptyset.\pi_1).\pi_2...\pi_n \equiv_K w((((\emptyset \leftarrow \pi_1) \leftarrow \pi_2)...) \leftarrow \pi_n) = w(P(\pi)). \ \diamondsuit$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $\pi, \sigma \in S_n$. Si $P(\pi) = P(\sigma)$, entonces, aplicando el corolario anterior, tenemos que

$$\pi \equiv_K w(P(\pi)) = w(P(\sigma)) \equiv_K \sigma.$$

Resulta que vale el enunciado converso, es decir, si $\pi \equiv_K \sigma$ entonces $P(\pi) = P(\sigma)$. La demostración de este resultado requiere trabajo previo y la omitimos. La podemos encontrar en [2]. Aquí lo enunciamos como un teorema.

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces para todo $\pi, \sigma \in S_n$ se tiene que

$$\pi \equiv_K \sigma \text{ si y sólo si } P(\pi) = P(\sigma). \ \diamondsuit$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $\pi \in S_n$, hemos construido una tabla de Young estándar $P(\pi)$ al aplicar el algoritmo de inserción repetidas veces. Ahora daremos la construcción de una tabla de Young estándar asociada a π, denotada $Q(\pi)$, de la misma forma que $P(\pi)$. Resultará que la asociación $\pi \mapsto (P(\pi), Q(\pi))$ nos dará una biyección entre S_n y las tablas de Young estándar de forma p para algún $p \vdash n$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $\pi = \pi_1 ... \pi_n \in S_n$. Sea $P_1 = \emptyset \leftarrow \pi_1$, esto es,

$$P_1 = \boxed{\pi_1}\ .$$

Sea

$$Q(1) = \boxed{1}\ .$$

Ahora, sea $P_2 = P_1 \leftarrow \pi_2$. Entonces el diagrama correspondiente a P_2 se obtiene al agregar un cuadro (ya sea a la derecha o hacia abajo) al diagrama $\{(1,1)\}$. Sea (i,j) este cuadro (aquí hay dos posibilidades: $i = 1$ y $j = 2$ ó $i = 2$ y $j = 1$). Definimos

$$Q_2 : \{(1,1)\} \cup \{i,j\} \longrightarrow \{1,2\},$$

por $Q_2(1,1) = 1$ y $Q_2(i,j) = 2$. Esto es, Q_2 se obtiene de Q_1 al agregar (i,j) al diagrama correspondiente a Q_1 y "llenarlo" con 2. Al seguir insertando los elementos de π, vamos obteniendo nuevos diagramas al insertar un cuadro en cada paso al diagrama anterior. Si en el $i-$ ésimo paso insertamos el cuadro (k,l), podemos definir inductivamente la tabla Q_i obtenida de Q_{i-1} al agregar (k,l) al diagrama D_{i-1} de Q_{i-1} y definir $Q_i|_{D_{i-1}} = Q_{i-1}$, $Q_i(k,l) = i$. Este proceso termina en n pasos (la longitud de π). Definimos

$$Q(\pi) = Q_n.$$

Observemos que $Q(\pi)$ y $P(\pi)$ tienen la misma forma. Ilustraremos esta construcción con un ejemplo.

Ejemplo

Sea $n = 5$, $\pi = 53124 \in S_5$. Entonces

$$\emptyset \leftarrow 5 = \begin{array}{|c|}\hline 5 \\ \hline\end{array} \quad , Q_1 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline\end{array} \quad ;$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 5 \\ \hline\end{array} \leftarrow 3 = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline\end{array} \quad , Q_2 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline\end{array} \quad ;$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline\end{array} \leftarrow 1 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline\end{array} \quad , Q_3 = \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline\end{array} \quad ;$$

$$\begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 5 \\ \hline\end{array} \leftarrow 2 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad , Q_4 = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad ;$$

$$P(\pi) = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \leftarrow 4 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad ,$$

$$Q(\pi) = Q_5 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad .$$

En este caso $w(P(\pi)) = 53124$, $w(Q(\pi)) = 32145$. $\diamondsuit$

5.3 La correspondencia RSK

Sea $n \in \mathbb{N}$. Dada $p \vdash n$ denotamos por

$$TYE^p = \{T : F(p) \longrightarrow [n] | T \text{ es una tabla de Young estándar de forma } p\}.$$

Denotamos $tye^p = |TYE^p|$ para todo $p \vdash n$. Observemos que $TYE^p \cap TYE^q = \emptyset$ si $p \neq q$. El teorema de correspondencia RSK establece una biyección entre S_n y las tablas de Young estándar de forma p para $p \vdash n$. Fue establecido independientemente por Robinson y Scnested, y estudiada posteriormente por Knuth. Esta biyección tiene propiedades sorprendentes, y es el punto de partida para estudiar la biálgebra copláctica, que trataremos en el siguiente capítulo. Podemos encontrar una demostración en [2, cap.4].

Teorema (Correspondencia RSK)

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos la aplicación

$$\varphi : S_n \longrightarrow \sqcup p \vdash n \; TYE^p \times TYE^p$$

$$\pi \mapsto (P(\pi), Q(\pi)) \text{ para todo } \pi \in S_n,$$

donde $\sqcup$ denota unión ajena. Entonces φ es una biyección, y

$$\varphi(\pi^{-1}) = (Q(\pi), P(\pi)) \text{ para todo } \pi \in S_n. \ \diamondsuit$$

Ahora daremos otra relación de equivalencia $\sim_K$ en S_n como sigue:

$$\alpha \sim_K \beta \Leftrightarrow \alpha^{-1} \equiv_K \beta^{-1}.$$

Observemos que $\sim_K$ es de equivalencia. Para $\pi \in S_n$ definimos

$$A_\pi := \{\sigma \in S_n : \sigma \sim_K \pi\}.$$

Llamamos a A_π la *clase de equivalencia copláctica* de π.

Capítulo 6

La biálgebra copláctica

6.1 Introducción

En este capítulo utilizaremos las notaciones y conceptos estudiados en el capítulo anterior para definir una sub-biálgebra graduada de $\mathcal{P}$, la *biálgebra copláctica*, $\mathcal{Q}$, la cual está generada por las clases coplácticas en S_n para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Consideremos el $K-$ submódulo de KS_n

$$\mathcal{Q}_n :=< \sum A_\pi : \pi \in S_n >,$$

donde $\sum A_\pi = \sum_{\sigma \in A_\pi} \sigma$ para todo $\pi \in S_n$. Sea

$$\mathcal{Q} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{Q}_n$$

En este capítulo demostraremos que $\mathcal{Q}$ es una sub-biálgebra graduada de $\mathcal{P}$. La clave de la demostración está en entender los productos $A_\pi \star A_\sigma$ y los coprodutos $\Delta(A_\pi)$ de una forma combinatoria. Para ello utilizaremos los conceptos estudiados en el capítulo anterior.

6.2 $\mathcal{Q}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{P}$

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Observemos que las clases de equivalencia coplácticas están caracterizadas por

$$A_\pi = \{\sigma \in S_n : \pi^{-1} \equiv_K \sigma^{-1}\} =$$

$$= \{\sigma \in S_n : Q(\pi) = Q(\sigma)\} \text{ para todo } \pi \in S_n.$$

Por tanto el número de clases coplácticas en S_n está dado por el número de Q símbolos diferentes en S_n, esto es,

$$|\text{clases coplácticas en } S_n| = |\{Q(\pi) : \pi \in S_n\}| = |\bigcup_{p \vdash n} TYE^p|.$$

En esta sección probaremos que $(\mathcal{Q}, \star|_\mathcal{Q}, \Delta|_\mathcal{Q})$ es una sub- biálgebra graduada conexa de $(\mathcal{P}, \star, \Delta)$. Recordemos que esto se denota por

$$\mathcal{Q} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{P}.$$

La parte de la conexidad es clara, ya que

$$\mathcal{Q}_0 =< id_\emptyset >= \mathcal{P}_0.$$

Luego para probar que $\mathcal{Q}$ es una subálgebra graduada de $\mathcal{P}$, basta probar que

$$\mathcal{Q}_n \star \mathcal{Q}_m \subseteq \mathcal{Q}_{n+m} \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Teorema

$\mathcal{Q}$ es una subálgebra graduada de $\mathcal{P}$.
Demostración. Es claro que

$$\mathcal{Q}_n \star \mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}_n = \mathcal{Q}_0 \star \mathcal{Q}_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $(\pi, \sigma) \in S_n \times S_m$.
Entonces

$$\Sigma A_\pi \star \Sigma A_\sigma = \Sigma_{Q(\tau)=Q(\pi)} \ \tau \star \Sigma_{Q(\gamma)=Q(\sigma)} \ \gamma$$

$$= \Sigma_{Q(\tau)=Q(\pi)} \ \Sigma_{Q(\gamma)=Q(\sigma)} \ \tau \star \gamma.$$

Recordemos que

$$\tau \star \gamma = \Sigma_{v \in S^{n.m}} \ v(\tau \sharp \gamma).$$

Será suficiente probar que

$$\Im = \{v(\tau \sharp \gamma) : (\tau, \gamma, v) \in A_\pi \times A_\sigma \times S^{n.m}\}$$

es unión de clases coplácticas en S_{n+m}. Para ello basta ver que

$$\alpha \in \Im \Rightarrow A_\alpha \subseteq \Im.$$

Sea $\alpha = v(\tau \sharp \gamma) \in \Im$. Si $n + m < 3$ entonces, por la definición de equivalencia copláctica se tiene que $A_\alpha = \{\alpha\}$, de donde la afirmación se sigue. Por tanto podemos suponer que $n + m \geq 3$. Sea $\beta \in S_{n+m}$ tal que β^{-1} se obtiene de α^{-1} al aplicar una transformación elemental de Knuth (decimos que β es *vecino copláctico* de α). Supongamos que la transformación es

$$\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}^{-1}\alpha_{i+2}^{-1} \mapsto \alpha_i^{-1}\alpha_{i+2}^{-1}\alpha_{i+1}^{-1}, \text{ con } \alpha_{i+1}^{-1} < \alpha_i^{-1} < \alpha_{i+2}^{-1}$$

$$\text{para algún } i \in [n+m].$$

Dado $x \in [n-1]$, denotamos por $\varsigma_{n,x} = (x \ x+1) \in S_n$

$$\text{Supongamos que } |\{i+1, i+2\} \cap \ v([n])| = 1.$$

Observemos que, en este caso, $\varsigma_{n,i+1} v \in S^{n.m}$, por tanto

$$\beta^{-1} = \alpha^{-1}\varsigma_{n,i+1} = (\tau^{-1} \sharp \gamma^{-1}) v^{-1} \varsigma_{n,i+1}^{-1} =$$

$$= (\tau^{-1} \sharp \gamma^{-1}) \ (\varsigma_{n,i+1} v)^{-1}.$$

Por tanto

$$\beta = \tau_{n,i+1} v \ (\tau \sharp \gamma) \in \Im.$$

Supongamos que

$$|\{i+1,i+2\}\cap\ v([n])| = 2.$$

Entonces $\exists k \in [n-1]$ tal que

$$k = v^{-1}(i+1),\ k+1 = v^{-1}(i+2).$$

Luego

$$\beta^{-1} = (\tau^{-1}\sharp\gamma^{-1})\ v^{-1}\varsigma_{n,i+1}$$

$$= (\tau^{-1}\varsigma_{n,k}\sharp\gamma^{-1})v^{-1}.$$

Además, $\tau^{-1}\varsigma_{n,k}$ se obtiene de τ^{-1} al efectuar la transformación

$$\tau_{k-1}^{-1}\tau_k^{-1}\tau_{k+1}^{-1} \mapsto \tau_{k-1}^{-1}\tau_{k+1}^{-1}\tau_k^{-1},$$

$$\text{y } \tau_k^{-1} = \beta^{-1}(i+2),\ \tau_{k+1}^{-1} = \beta^{-1}(i+1).$$

Como $\beta_{i+2}^{-1} = \alpha_{i+1}^{-1}$, $\beta_{i+1}^{-1} = \alpha_{i+2}^{-1}$, y

$$\alpha_{i+1}^{-1} < \alpha_i^{-1} < \alpha_{i+2}^{-1},$$

por tanto

$$\tau_k^{-1} < \beta_i^{-1} < \tau_{k+1}^{-1},\ \text{es decir}$$

$$\tau_k^{-1} < (\tau^{-1}\varsigma_{n,k}\sharp\gamma^{-1})v^{-1}(i) < \tau_{k+1}^{-1}.$$

Por tanto $v^{-1}(i) \in [n]$. Luego $v^{-1}(i) < v^{-1}(i+1) = k$.
Por otro lado, sea $j \in [n+m]$ tal que $k-1 = v^{-1}(j)$. Entonces $i \leq j$, pero

$$j \geq i+1 \text{ si y sólo si } v(k-1) \geq v(k).$$

Por tanto $k-1 \geq k$, lo cual es una contradicción, por tanto

$$i = j \text{ implica } k-1 = v^{-1}(i), \text{ luego}$$

$$\beta^{-1}(i) = (\tau^{-1}\varsigma_{n,k})(k-1) =$$

$$= \tau^{-1}(k-1).$$

Entonces

$$\tau_k^{-1} < \tau_{k-1}^{-1} < \tau_{k+1}^{-1}.\ \text{Por tanto}$$

$$\tau^{-1}\varsigma_{n,k} \equiv_K \tau^{-1} \equiv_K \pi^{-1}.$$

Entonces

$$\beta = v(\varsigma_{n,k}\tau\sharp\gamma) \in \Im.$$

Los casos en que

$$|\{i+1,i+2\}\cap v([n+m]\setminus[n])| = 1, \text{ y}$$

$$|\{i+1,i+2\}\cap v([n+m]\setminus[n])| = 2$$

son análogos.

Un argumento análogo se aplica cuando la transformación aplicada sea del tipo

$$abc \mapsto bac \text{ si } a < c < b.$$

La simetría de la relación $\sim_K$ demuestra los casos en que las transformaciones aplicadas sean las inversas de las anteriores. Por tanto, en cualquier caso,

$$(\alpha \in \Im \text{ y } \beta \text{ vecino copláctico de } \alpha) \text{ implica } \beta \in \Im, \text{ por tanto}$$

$$\alpha \in \Im \text{ implica } A_\alpha \subseteq \Im. \ \diamondsuit$$

Ahora veamos que $\mathcal{Q}$ es una subcoálgebra graduada de $\mathcal{P}$. Para ello basta ver que

$$\Delta(\mathcal{Q}_n) \subseteq \bigoplus_{k+l=n} \mathcal{Q}_k \otimes \mathcal{Q}_l \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0$$

Teorema

$\mathcal{Q}$ es una subcoálgebra graduada de $\mathcal{P}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $\pi \in S_n$. Entonces

$$\Delta(\sum A_\pi) = \sum c_{\alpha,\beta} \alpha \otimes \beta,$$

donde la suma corre por todos los $\alpha \in S_k$, $\beta \in S_{n-k}$ para algún $k \in [n] \cup \{0\}$ tales que $\sigma = (\alpha \sharp \beta) v^{-1}$ para algún $v \in S^{k.(n-k)}$ y $\sigma \in A_\pi$ (ver 4.4). Queremos probar que, siempre que $\alpha' \in A_\alpha$ y $\beta' \in A_\beta$ entonces $c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha',\beta'}$. Para ello es suficiente probar que, si α' es vecino copláctico de α entonces $c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha',\beta}$ y si β' es vecino copláctico de β entonces $c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta'}$.
Sea $k \in [n] \cup \{0\}$, $\alpha \in S_k$, $\beta \in S_{n-k}$. Observemos que los coeficientes $c_{\alpha,\beta}$ están dados por

$$c_{\alpha,\beta} = |A_{\alpha,\beta}|,$$

donde $A_{\alpha,\beta} = \{\sigma \in S_n : \exists v \in S^{k.(n-k)} \text{ tal que } \sigma = (\alpha \sharp \beta) v^{-1}\}$. Sea α' vecino copláctico de α. Entonces

$$\alpha'^{-1} = \alpha^{-1} \varsigma_{k,x} \text{ para algún } x \in [k-1].$$

Por tanto $\alpha' = \varsigma_{k,x} \alpha$. Entonces para todo $\sigma = (\alpha \sharp \beta) v^{-1} \in A_{\alpha,\beta}$ se tiene que $\varsigma_{n,x} \sigma = (\alpha' \sharp \beta) v^{-1}$. Por tanto el mapa $\sigma \mapsto \varsigma_{n,x} \sigma$ es una biyección de $A_{\alpha,\beta}$ en $A_{\alpha',\beta}$. Luego $c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha',\beta}$.
Similarmente el mapa $\sigma \mapsto \varsigma_{n,x+k}$ es una biyección de $A_{\alpha,\beta}$ en $A_{\alpha,\beta'}$ para todo vecino copláctico $\beta' = \varsigma_{n-k,x}$ de β. Por tanto $c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta'}$, como se quería probar. $\diamondsuit$

Como consecuencia inmediata de los teoremas anteriores obtenemos el

Corolario. $\mathcal{Q}$ es una sub-biálgebra graduada de $\mathcal{P}$. $\diamondsuit$

Terminamos esta sección con algunas observaciones

Observación

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces

$$\{\sum A_\pi : \pi \in S_n\} \text{ es una base de } \mathcal{Q}_n.$$

Por lo tanto

$$rango\mathcal{Q}_n = \sum_{p\vdash n} |TYE^p|.$$

La primera afirmación se sigue del hecho de que dos clases coplácticas son iguales o disjuntas. De aquí que

$$rango\mathcal{Q}_n = |\ \{\sum A_\pi : \pi \in S_n\}\ | = |\ \{A_\pi : \pi \in S_n\}\ | =$$

$$= |\ \{Q(\pi) : \pi \in S_n\}\ | =$$

$$= |\ \bigcup_{p\vdash n} TYE^p\ | =$$

$$= \sum_{p\vdash n} |\ TYE^p\ |.\ \diamondsuit$$

6.3 Comportamiento de $(.,.)_{\mathcal{P}}|_{\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}}$

Por restricción, la forma bilineal $(.,.)_{\mathcal{P}}$, definida anteriormente determina una forma bilineal

$$(.,.)_{\mathcal{Q}} := (.,.)_{\mathcal{P}}|_{\mathcal{Q}\times\mathcal{Q}}.$$

En esta sección analizaremos el comportamienmto de $(.,.)_{\mathcal{Q}}$. Antes de dar el resultado final de este capítulo daremos una definición.

Definición

Sea $n \in N$. Para $p \vdash n$ definimos

$$\varsigma_p := \{\pi \in S_n : P(\pi) \in TYE^p\}.$$

Llamamos a ς_p la *celda de Green asociada a p*. Observemos que

$$\varsigma_p = \{\pi \in S_n : Q(\pi) \in TYE^p\}.$$

Por tanto ς_p es unión de clases coplácticas. El número de clases coplácticas en ς_p es la cardinalidad de Q símbolos diferentes en TYE^p, esto es,

$$|\text{clases coplácticas en } \varsigma_p| = |\{Q(\pi) : \pi \in S_n\} \cap TYE^p| = |TYE^p| = tye^p.$$

Teorema (Relaciones de ortogonalidad no conmutativas)

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $p, q \vdash n$, $(\pi, \sigma) \in \varsigma_p \times \varsigma_q$. Entonces

$$(\sum A_\pi, \sum A_\sigma)_{\mathcal{Q}} = \delta_{pq}.$$

Demostración. Tenemos

$$(\sum A_\pi, \sum A_\sigma)_{\mathcal{Q}} = |A_\pi \cap A_\sigma^{-1}| =$$

$$= |\{\tau \in A_\pi : \tau^{-1} \in A_\sigma\}| = |\{\tau \in A_\pi : Q(\tau^{-1}) = Q(\sigma)\}|.$$

Si $\tau \in A_\pi \Rightarrow Q(\tau) = Q(\pi) \in TYE^p$. Asimismo,

$$\tau^{-1} \in A_\sigma \text{ implica } P(\tau) = Q(\tau^{-1}) = Q(\sum) \in TYE^q.$$

Además se tiene que

$$p \neq q \text{ implica } TYE^p \cap TYE^q = \emptyset.$$

Por lo tanto

$$p \neq q \text{ implica } (\sum A_\pi, \sum A_\sigma)_{\mathcal{Q}} = 0.$$

Por otro lado, si $p = q$ entonces existe una única $\tau \in S_n$ tal que

$$(P(\tau), Q(\tau)) = \varphi(\tau) = (Q(\sigma), Q(\pi)).$$

Es decir, existe un único $\tau \in S_n$ tal que

$$Q(\tau^{-1}) = P(\tau) = Q(\sum), \text{ y}$$

$$Q(\tau) = Q(\pi).$$

Luego

$$(\sum A_\pi, \sum A_{\sum})_{\mathcal{Q}} = |\{\tau \in S_n : Q(\tau) = Q(\pi) \text{ y } Q(\tau^{-1}) = Q(\sigma)\}| = 1. \ \diamondsuit$$

Capítulo 7

La biálgebra de marcos

7.1 Marcos

Definimos un orden parcial $\leq^*$ en el conjunto $\wp$ de todas las particiones por

$$q \leq^* p \Leftrightarrow F(q) \subseteq F(p) \text{ para todo } p, q \in \wp.$$

Observación

$q = q_1...q_s \leq^* p_1...p_t = p \Leftrightarrow s \leq t$ y $q_i \leq p_i$ para todo $i \in [s]$. Esto se sigue observando que $q \leq^* p$ si y sólo si

$$\cup_{i=i}^{s} \{i\} \times [q_i] \subseteq \cup_{i=1}^{t} \{i\} \times [p_i]. \ \diamondsuit$$

Definición

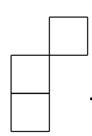
Decimos que $T \subseteq N \times N$ es un *marco* si existen $p, q \in \wp$ con $q \leq^* p$ tales que

$$T = F(p) \setminus F(q).$$

Ejemplo

Sean $p = 3.2.2$, $q = 2.1.1$, entonces $q \leq^* p$, y

$$F(p) \setminus F(q) \simeq$$



.

Observación

Decimos que un subconjunto F de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es *convexo* si, siempre que $x, y \in F$ y $z \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es tal que

$$x \leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} z \leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} y,$$

entonces $z \in F$. Es fácil ver que $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es un marco si y sólo si F es convexo. $\diamondsuit$

Notación

Sean $p, q \in \wp$, $q \leq^* p$. Denotamos por

$$Z^{p\setminus q} = Z^{F(p)\setminus F(q)}.$$

Para $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$F_n =< Z^{p\setminus q} : |F(p) \setminus F(q)| = n >.$$

. Como $F(p)$ es un marco para todo $p \in \wp$ se sigue que

$$F_n \neq \emptyset \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0, \text{ y que}$$

$$F_0 =< Z^{\emptyset} >=< id_{\emptyset} >=< 1_{\mathcal{P}} >.$$

Sea

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} F_n.$$

En las siguientes secciones probaremos que $\mathcal{F}$ es una sub-biálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$. Al igual que en el caso de la biálgebra $\mathcal{Q}$, basta probar que

$$F_n \star F_m \subseteq F_{n+m} \text{ para todo } m, n \in \mathbb{N}_0, \text{ y}$$

$$\Delta(F_n) \subseteq \bigoplus_{k+l=n} F_k \otimes F_l \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

7.2 $\mathcal{F}$ es una subálgebra de $\mathcal{P}$

Dado $F \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, denotamos los órdenes total y parcial en F heredados de $\longrightarrow_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y $\leq_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ por $\longrightarrow_F$ y $\leq_F$, respectivamente. Sean $F = F(p) \setminus F(q), G = F(r) \setminus F(s)$ marcos. Sea $l = l(r)$ la longitud de r. Sean

$$F' = F + (l, 0),\ G' = G + (0, p_1).$$

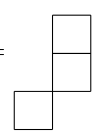
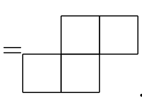
Entonces G' está más "a la derecha" y más "arriba" que F', es decir, si

$$\alpha_{F'} = \max\nolimits_{\longrightarrow_{F'}} F',\ \beta_{G'} = \min\nolimits_{\longrightarrow_{G'}} G'$$

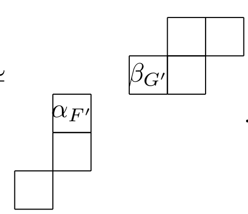
entonces $\alpha_{F'} \longrightarrow_{F'\cup G'} \beta_{G'}$. Por tanto $F' \cup G'$ es una unión semidirecta de F con G.

Ejemplo

Sean $p = 3.2.2.1$, $q = 3.1.1$, $r = 3.2$, $s = 1$, $F = F(p) \setminus F(q)$, $G = F(r) \setminus F(s)$. Entonces

$F =$  $, G =$  .

Luego

$F' \cup G' \simeq$ 

.

Debe ser claro ahora que la unión semidirecta de dos marcos es un marco, lo cual es suficiente para probar que $\mathcal{F}$ es una subálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$.

Teorema

$\mathcal{F}$ es una subálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$.

Demostración. Sean $F = F(p) \setminus F(q)$, $G = F(r) \setminus F(s)$ marcos. Recordemos que $l(w)$ denota la longitud de una palabra $w \in \mathbb{N}^*$. Si $l(r) > l(s)$ definimos $s_{l(s)+1} = ... = s_{l(r)} = 0$. Sean

$$\alpha = (s_1 + p_1)...(s_{l(r)} + p_1).q_1...q_{l(q)},$$

$$\beta = (r_1 + p_1)...(r_{l(r)} + p_1).p_1...p_{l(p)}.$$

Sean F' y G' como anteriormente, es decir, $F' = F+(l(r), 0)$ y $G' = G+(0, p_1)$. Entonces no es difícil demostrar que $F' \cup G' = F(\beta) \setminus F(\alpha)$. Entonces $F' \cup G'$ es un marco. Como $F' \cup G'$ es una unión semidirecta de F con G, la demostración está completa. $\diamondsuit$

7.3 $\mathcal{F}$ es una subcoálgebra de $\mathcal{P}$

Para probar que $\mathcal{F}$ es una subcoálgebra graduada de $\mathcal{P}$, primero veamos una caracterización de los ideales de marcos.

Lema

Sea $F = F(p) \setminus F(q)$ marco, $I \subseteq F$. Entonces

$$I \triangleleft F \text{ si y sólo si existe } r \in \wp \text{ con } q \leq^* r \leq^* p \text{ tal que } I = F(r) \setminus F(q).$$

Demostración. Supongamos que $I \triangleleft F$.
Si $I = \emptyset$ tomamos $r = q$. Supongamos que $I \neq \emptyset$. Sea $l = l(p)$. Para $i \in [l]$ sea

$$d_i = \max[\{j : (i, j) \in I\} \cup \{q_i\}].$$

Entonces de la definición de ideal se sigue que

$$d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_l.$$

Sea $r = d_1...d_l$. Entonces es claro que $F(q) \subseteq F(r) \subseteq F(p)$, es decir,

$$q \leq^* r \leq^* p.$$

Observemos que cada renglón de $F(r) \setminus F(q)$ tiene un elemento de I al final del lado derecho. Por tanto todo el renglón está en I. Por tanto

$$F(r) \setminus F(q) \subseteq I.$$

Por otro lado, por definición, el $i-$ ésimo renglón de I está más a la derecha que q_i y más a la izquierda que p_i. Por tanto

$$I \subseteq F(r) \setminus F(q).$$

Luego $I = F(r) \setminus F(q)$. Conversamente, supongamos que

$$I = F(r) \setminus F(q), \text{ con } q \leq^* r \leq^* p$$

Sea $(i, j) \in I$, $(k, l) \in F$ tal que

$$(k,l) \leq_F (i,j).$$

Entonces

$$k \leq i \leq l(r) \text{ y } l \leq j \leq r_i \leq r_k.$$

Por tanto $(k,l) \in F(r)$.
Ya que $(k,l) \in F$ entonces $(k,l) \notin F(q))$. Por tanto

$$(k,l) \in F(r) \setminus F(q) = I.$$

Luego $I \triangleleft F$. $\diamondsuit$

Observación

Sea $F = F(p) \setminus F(q)$ marco, $I = F(r) \setminus F(q)$ ideal de F, con $q \leq^* r \leq^* p$. Entonces

$$F \setminus I = F(p) \setminus F(r).$$

Esto se sigue de teoría elemental de conjuntos. $\diamondsuit$
Como corolario del lema y la observación anteriores tenemos

Teorema

$\mathcal{F}$ es una subcoálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $F = F(p) \setminus F(q)$ un marco de orden n. Aplicando la regla de restricción a Z^F (ver 4.4) obtenemos

$$\Delta(Z^F) = \sum_{I \triangleleft F} Z^I \otimes Z^{F \setminus I} = \sum_{q \leq^* r \leq^* p} Z^{r \setminus q} \otimes Z^{p \setminus r}$$

Por tanto $\Delta(F_n) \subseteq \bigoplus_{k+l=n} F_k \otimes F_l$. Luego $\mathcal{F}$ es subcoálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$. $\diamondsuit$

Como $\mathcal{F}$ es una subálgebra y subcoálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$, se sigue el

Teorema

$\mathcal{F}$ es una sub-biálgebra graduada conexa de $\mathcal{P}$. $\diamondsuit$

7.4 Una fórmula útil

Ahora construiremos un unión semidirecta canónica de dos marcos que nos permitirá derivar una fórmula que utilizaremos más adelante en este trabajo. Sean F y G marcos no vacíos. Sean

$$\alpha_F = \max_{\longrightarrow_F} F, \; \beta_G = \max_{\longrightarrow_G} G.$$

Escribimos $\alpha_F = (i,j)$, $\beta_G = (k,l)$. Sean

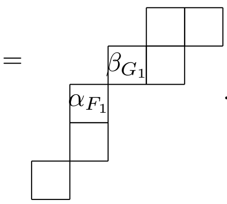
$$F_1 = F + (k,0) \text{ y } G_1 = G + (0,j).$$

Entonces $F_1 \cup G_1$ es una unión semidirecta de F con G, escribimos $F \cup^\sim G$ para esta unión semidirecta canónica de F con G. Llamamos a $F \cup^\sim G$ el *acoplamiento* de F con G. También denotamos $\alpha_{F_1} = \max_{\longrightarrow_\mathcal{F}} F$, $\beta_{G_1} = \min_{\longrightarrow_\mathcal{F}}$. Es claro que α_{F_1} y β_{G_1} son incomparables con respecto a $\leq_F$.

Ejemplo

Sean p, q, r, s como en el ejemplo 7.2. Sean $p_1 = 2.2.1$, $q_1 = 2.2$, $r_1 = 3.2$, $s_1 = 1$. Entonces $F_1 = F(p_1) \setminus F(q_1)$, $G_1 = F(r_1) \setminus F(s_1)$. Luego

$F \cup^{\sim} G =$



.

Recordemos que (ver 3.2), dada una forma $\mu = (U, \leq, \longrightarrow)$ y x, y incomparables con respecto a $\leq$, se tiene una forma $\mu(x, y) = (\mu, \leq', \longrightarrow)$, donde $\leq'$ es el *mínimo refinamiento de* $\leq$ tal que $x \leq' y$.

Proposición

Sean

$$F = F(p) \setminus F(q),\, G = F(r) \setminus F(s)$$

marcos no vaciós y sean $F_1, G_1, \alpha = \alpha_{F_1}$ y $\beta = \beta_{G_1}$ como anteriormente. Sea $U = F \cup^{\sim} G$ el acoplamiento de F con G. Entonces

$$U(\alpha, \beta) \simeq F_1 \cup (G_1 + (1, 0)),$$

$$U(\beta, \alpha) \simeq F_1 \cup (G_1 - (0, 1)).$$

Demostración. Sea $U_1 = F_1 \cup (G_1 + (1, 0))$. Consideremos la aplicación

$$\varphi : U(\alpha, \beta) \longrightarrow U_1,$$

dada por

$$\varphi|_{F_1} = id_{F_1},\, \varphi\,|_{G_1} = (g \mapsto g + (1, 0)).$$

Entonces φ es claramente una biyección. Además claramente

$$\varphi|_{F_1} : F_1 \to F_1 \text{ y } \varphi|_{G_1} : G_1 \to G_1 + (1, 0)$$

son isomorfismos de formas.
Entonces, ya que (ver 3.2)

$$\longrightarrow_{U(\alpha,\beta)} = \longrightarrow_U = \longrightarrow_{F_1} \cup \longrightarrow_{G_1} \cup (F_1 \times G_1),$$

se tiene que φ es un isomorfismo de conjuntos totalmente ordenados.
Supóngase ahora que $x \leq_{U(\alpha,\beta)} y$. Entonces

$$(x \leq_{F_1 \cup G_1} y) \text{ ó } (x \leq_{F_1 \cup G_1} \alpha \text{ y } \beta \leq_{F_1 \cup G_1} y).$$

Recordemos que $\leq_{F_1 \cup G_1} = \leq_{F_1} \cup \leq_{G_1}$, es decir, para todo $a, b \in F_1 \cup G_1$ se tiene que

$$a \leq_{F_1 \cup G_1} b \text{ si y sólo si } (a \leq_{F'} b \text{ ó } a \leq_{G'} b),$$

$$\text{si y sólo si } \varphi(a) \leq_{U_1} \varphi(b).$$

Por otro lado, como $\alpha \in F_1$ y $\beta \in G_1$, entonces

$$x \leq_{F_1 \cup G_1} \alpha \text{ y } \beta \leq_{F_1 \cup G_1} y \text{ implica } x \in F_1,\ y \in G_1.$$

Por la elección de α y β se tiene que

$$\alpha \leq_{U_1} \beta + (1,0).$$

Por tanto

$$\varphi(x) =\leq_{U_1} \alpha \leq_{U_1} (\beta + (1,0)) \leq_{U_1} (y + (1,0)) = \varphi(y).$$

Por tanto

$$\varphi : (U, \leq_{U(\alpha,\beta)}) \longrightarrow (U_1, \leq_{F_1 \cup (G_1 + (1,0))})$$

es un isomorfismo de conjuntos parcialmente ordenados. Por tanto φ es un isomorfismo de formas.
Para probar la otra propiedad

$$\cup(\beta,\alpha) \simeq F_1 \cup (G_1 - (0,1))$$

se procede de forma análoga. Aquí un isomorfismo es

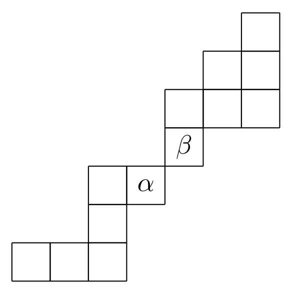
$$\phi : U(\beta,\alpha) \longrightarrow F_1 \cup (G_1 - (0,1)), \text{ dado por}$$

$$\phi|_{F_1} = id_{F_1},\ \phi|_{G_1} = (g \mapsto g - (0,1)).\ \diamondsuit$$

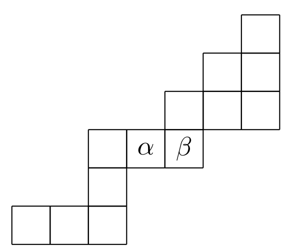
Nota

Ls proposición anterior se puede ilustrar como

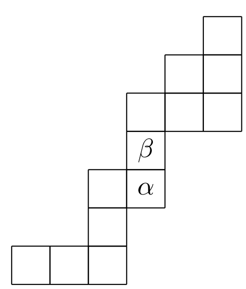
$F \cup^{\sim} G =$



$U(\alpha,\beta) \simeq$



$U(\beta,\alpha) \simeq$



En particular, sean $k, m \in \mathbb{N}$, y

$$F = F(1^k),\; G = F(m).$$

Utilizamos la notación de la proposición anterior. Entonces

$$U(\alpha,\beta) \simeq F_1 \cup (G_1 + (1,0)) \simeq F((m+1).1^{k-1}),$$

$$U(\beta,\alpha) \simeq F_1 \cup (G_1 - (1,0)) \simeq F(m.1^k).$$

Recordemos que (ver 3.2)

$$Z^U = Z^{U(\alpha,\beta)} + Z^{U(\beta,\alpha)}.$$

Por otro lado tenemos

$$Z^U = Z^{F\cup\sim G} = Z^F \star Z^G = Z^{1^k} \star Z^m.$$

por lo tanto

$$Z^{1^k} \star Z^m = Z^U = Z^{m.1^k} + Z^{(m+1).1^{k-1}}.$$

De la fórmula anterior se sigue la

Proposición

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k Z^{1^k} \star Z^{n-k} = 0$$

Demostración. Tenemos

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k Z^{1^k} \star Z^{n-k} = Z^n - (Z^1 \star Z^{n-1}) + (Z^{1^2} \star Z^{n-2}) - ... + (-1)^n Z^{1^n} =$$

$$=$$

$$Z^n - (Z^n + Z^{(n-1).1}) + (Z^{(n-1).1} + Z^{(n-2).1^2}) - ... + (-1)^{n-1}(Z^{2.1^{n-2}} + Z^{1.1^{n-1}}) + (-1)^n Z^{1^n}.$$

Como vemos, todos los términos se cancelan a pares, por tanto

$$\textstyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k Z^{1^k} \star Z^{n-k} = 0.\ \diamondsuit$$

7.5 $\mathcal{F}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{Q}$. Comportamiento de $(.,.)_{\mathcal{Q}}\,|_{\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$

En esta sección probaremos que $\mathcal{F}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{Q}$, para lo cual será suficiente probar que

$$F_n \subseteq Q_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0,$$

ya que $\mathcal{F}$ es una sub-biálgebra de $\mathcal{P}$.
Recordemos que

$$F_n = < Z^F : F \text{ es marco y } |F| = n >, \text{ y}$$

$$Q_n = < \Sigma A_\pi : \pi \in S_n > \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0,$$

Por tanto el resultado se seguirá del

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, F un marco de orden n. Entonces

$$TYE^F = \cup_{\sigma \in \tau} A_\sigma,$$

donde τ es un conjunto de representantes de clases copláctícas en S_n
Demostración. Basta probar que

$$\pi \in TYE^F \Rightarrow A_\pi \subseteq TYE^F.$$

Si $n < 3$ el resultado se sigue trivialmente, ya que, en este caso $\{\pi\} = A_\pi$ para todo $\pi \in S_n$. Podemos suponer entonces que $n \geq 3$. Sea $\pi \in TYE^F$, e_F la etiquetación en F correspondiente a $\leq_{\mathcal{F}} |_{F\times F}$. Entonces

$$\alpha = \pi e_F^{-1} : (F, \leq_F) \longrightarrow ([n], \leq)$$

es creciente. Sea $\sigma = \varsigma_{n,i}\pi$ vecino copláctico de π. Sean $x = \alpha^{-1}(i)$, $y = \alpha^{-1}(i+1)$. Supongamos que $\sigma \notin TYE^F$. Entonces

$$\overline{\alpha} = \sigma e_F^{-1} : (F, \leq_F) \longrightarrow ([n], \leq)$$

no es creciente. Se sigue que x, y son comparables con respecto a $\leq_F$. Como $i < i+1$ entonces $x \leq_F y$. Supongamos que existe $z \in F$, $z \notin \{x, y\}$ tal que $x \leq_F z \leq_F y$. Entonces

$$i = \alpha(x) < \alpha(z) < \alpha(y) = i+1,$$

lo cual es imposible. Por tanto x y y son *vecinos* horizontales o vericales en F, es decir, si $x = (r, c)$, entonces $y = (r, c+1)$ ó $y = (r+1, c)$. Si $y = (r, c+1)$ entonces $x \longrightarrow_F y$ y no existe z tal que $x \longrightarrow_F z \longrightarrow_F y$. Esto contradice que σ es vecino copláctico de π, ya que, por definición, se tiene que

$$\pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i-1) < \pi^{-1}(i+1) \text{ ó } \pi^{-1}(i) < \pi^{-1}(i+2) < \pi^{-1}(i+1),$$

de donde al aplicar e_F se tiene que $x \longrightarrow_F \alpha^{-1}(j) \longrightarrow_F y$, donde $j \in \{i-1, i+2\}$. Supongamos ahora que $y = (r+1, c)$. Entonces $y \longrightarrow_F x$. Supongamos que existe $j \in [n]$ tal que

$$y \longrightarrow_F \alpha^{-1}(j) \longrightarrow_F x.$$

Bastará demostrar que $j < i-1$ ó $j > i+2$, ya que, como vimos arriba, esto contradice que σ es vecino copláctico de π. Escribimos $\alpha^{-1}(j) = (u, v)$. Entonces $u = r$ y $v < c$ ó $u = r+1$ y $c < v$. En el primer caso se tiene que

$$\alpha^{-1}(j) = (r, v) \leq_F (r+1, v) \leq_F (r+1, c) = y.$$

Como F es convexo (ver 7.1) se tiene que $(r+1, v) \in F$. Aplicando α a la desigualdad anterior obtenemos

$$j < \alpha(r+1, v) < \alpha(y) = i+1.$$

Como $(r+1, v) \neq x$ entonces $\alpha(r+1, v) < i$. Por tanto $j < i-1$. En el otro caso ($u = r+1$ y $c < v$), se tiene que

$$x \leq_F (r, v) \leq_F (r+1, v) = \alpha^{-1}(j).$$

Por tanto $(r, v) \in F$, y $i = \alpha(x) < \alpha(r+1, v) < j$. Como $(r+1, v) \neq y$, entonces $\alpha(r+1, v) > i+1$, luego $j > i+2$, como se quería probar. $\diamondsuit$

Corolario

F es una sub - biálgebra graduada conexa de Q $\diamondsuit$

Corolario

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $p \vdash n$. Entonces TYE^p es una clase copláctica en S_n.
Demostración. Del teorema se sigue que

$$TYE^p = \bigcup_{\sigma\in\tau} A_\sigma.$$

para algún conjunto τ de representantes de clases coplácticas.
Sea $\sigma \in \tau$. Entonces $Q(\sigma) \in TYE^p$. Por tanto

$$\varphi|_{A_\sigma} : A_\sigma \mapsto TYE^p \times \{Q(\sigma)\}$$

es inyectiva. Dado $P \in TYE^p$, del teorema de correspondencia RSK se sigue también que existe $\pi \in S_n$ tal que

$$(P(\pi), Q(\pi)) = \varphi(\pi) = (P, Q(\sigma)).$$

Por tanto $Q(\pi) = Q(\sigma)$, luego $\pi \in A_\sigma$, por tanto $\varphi|_{A_\sigma}$ es biyectiva, de donde

$$|TYE^p \times \{Q(\sigma)\}| = |TYE^p| = |A_\sigma|.$$

Luego

$$A_\sigma = TYE^p$$

Por tanto TYE^p es una clase copláctica, como se quería probar. $\diamondsuit$

Aplicando el corolario anterior y el teorema de relaciones de ortogonalidad (ver 6.3), se sigue el

Corolario

Sean $p, q \in \wp$. Entonces

$$(Z^p, Z^q)_P = \delta_{pq}. \ \diamondsuit$$

Definición

Sea V un $K-$ módulo y

$$(.,.)_V : V \times V \longrightarrow K$$

una forma bilineal. El *radical* de V con respecto a $(.,.)$ es

$$\text{rad}V = \{v \in V : (v,w)_V = 0 \text{ para todo } w \in V\}.$$

Corolario

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces los elementos Z^p, $p \vdash n$ forman un complemento lineal del radical de Q_n. En particular

$$\text{rango rad } Q_n + p(n) = \text{rango } Q_n,$$

donde $p(n) = |\{p \in \wp : p \vdash n\}|$.

Demostración. Sea $p \vdash n$, A una clase copláctica en la celda de Green ς^p, $A \neq TYE^p$. Entonces el teorema 6.3 implica que $Z^p - \sum A \in \text{rad} Q_n$, de donde la primera afirmación se sigue. La segunda afirmación se sigue de que los Z^p, $p \vdash n$ forman un conjunto ortonormal, por tanto son linealmente independientes y $\{Z^p : p \vdash n\} \cap \text{rad} Q_n = \{0\}$. $\diamondsuit$

Capítulo 8

La biálgebra de descenso de Solomon

8.1 Introducción

Hasta ahora hemos construido una cadena de biálgebras graduadas tales que

$$\mathcal{F} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{Q} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{P}$$

. Para completar la parte no conmutativa del diagrama que estamos estudiando, definiremos una biálgebra graduada

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} D_n,$$

tal que

$$\mathcal{D} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{F} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{Q} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{P}.$$

Históricamente, la llamada *biálgebra de descenso* $\mathcal{D}$ fue estudiada anteriormente que las biálgebras analizadas hasta ahora. Solomon (ver [1]) introdujo las "álgebras" de descenso D_n, como subálgebras del álgebra de grupo KS_n para $n \in \mathbb{N}_0$ con el objetivo de estudiar el comportamiento del producto de caracteres en el álgebra de funciones de clase $Cl_K(S_n)$ mediante un homomorfismo canónico

$$c_n : D_n \longrightarrow Cl_K(S_n),$$

llamado el *homomorfismo de Solomon.*

8.2 La biálgebra $\mathcal{D}$

Para definir la biálgebra de descenso, sea $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$. Recordemos que (ver 4.1)

$$\Xi^q = \sum_{v \in S^q} v.$$

Sea

$$D_n =< \Xi^q : q \models n >.$$

Sea

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} D_n$$

En esta sección probaremos que

$$\mathcal{D} \leq_{\star,\Delta} \mathcal{F}.$$

Para lo cual, como se ha visto, será suficiente probar que, para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$ se tiene

(i) $D_n \subseteq F_n$.
(ii) $D_n \star D_m \subseteq D_{n+m}$.
(iii) $\Delta(D_n) \subseteq \bigoplus_{k+l=n} D_k \otimes D_l$.

Para probar la parte (i), sea $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$, $l = l(q)$. Sea $s_i = q_1 + ... + q_i$ la $i-$ésima suma parcial de q para $i \in [l]$. Definimos las particiones $p(q)$, $p'(q)$ por

$$p(q) = s_l.s_{l-1}...s_1,$$

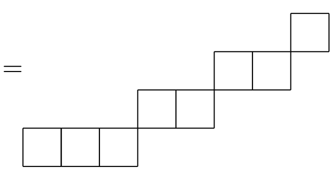
$$p'(q) = s_{l-1}...s_1.$$

Sea

$$HS(q) = F(p(q)) \setminus F(p'(q)) \in F_n.$$

Ejemplo

Sea $n = 8$, $q = 3.2.2.1$. Entonces

$HS(q) =$ 

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$. Observemos que los únicos elementos comparables respecto al orden parcial $\leq_{HS(q)}$ en $HS(q)$ son los que están en el mismo renglón. Por tanto un llenado $T : HS(q) \longrightarrow [n]$ es creciente (respecto a $\leq_{HS(q)}$ y $\leq$) si y sólo si T es creciente en los renglones de $HS(q)$. Observemos que los renglones de $HS(q)$ son bloques de tamaño q_1,...,q_l. Entonces $\pi \in TYE^{HS(q)}$ si y sólo si

$$\pi e_{HS(q)}^{-1} : HS(q) \longrightarrow [n]$$

es creciente ($e_{HS(q)}$ es la etiquetación en HS_q correspondiente al orden total usual), si y sólo si $\pi e_{HS(q)}^{-1}$ es creciente en los renglones de $HS(q)$, si y sólo si π es creciente en P_i^q para todo $i \in [l(q)]$, donde $P_i^q = \{q_{i-1} + 1, ..., q_i\}$ son los bloques sucesivos de tamaño q_i para todo $i \in [l(q)]$, es decir, si y sólo si $\pi \in S^q$ (ver 4.1). Por lo tanto se tiene que

$$TYE^{HS(q)} = S^q.$$

Por tanto $\Xi^q = Z^{HS(q)}$, luego $F_n \subseteq D_n$.

Para probar (ii), sean q, r composiciones. Entonces se tiene que $HS(q.r)$ se forma uniendo los bloques de tamaño $q_1, ..., q_{l(q)}, r_1, ..., r_{l(r)}$ como se vió en el ejemplo anterior. Por tanto es claro que $HS(q.r)$ es una unión semidirecta de $HS(q)$ con $HS(r)$. Por tanto

$$\Xi^q \star \Xi^r = Z^{HS(q)} \star Z^{HS(r)} = Z^{HS(q.r)} = \Xi^{q.r},$$

de donde la afirmación (ii) se sigue.

Finalmente, para la parte (iii), sea $n \in \mathbb{N}_0$, $q = q_1 ... q_s \models n$. Para $m \in \mathbb{N}_0$ tenemos

$$\Delta(\Xi^m) = \Delta(id_m) = \sum_{k+l=m} id_k \otimes id_{m-k} =$$

$$= \sum_{k+l=m} \Xi^k \otimes \Xi^{m-k}.$$

Por tanto, ya que Δ es un homomorfismo de álgebras, entonces

$$\Delta(\Xi^q) = \Delta(\Xi^{q_1} \star ... \star \Xi q_s) =$$

$$= \Delta(\Xi^{q_1}) \star_{\otimes} ... \star_{\otimes} \Delta(\Xi^{q_s}).$$

Entonces

$$\Delta(\Xi^q) \in [(\oplus_{k_1+l_1=q_1} D_{k_1} \otimes D_{l_1}) \otimes_{\star} ... \otimes_{\star} (\oplus_{k_s+l_s=q_s} D_{k_s} \otimes D_{l_s}]].$$

Para cada $(k_1, l_1, ..., l_s, k_s)$, con $k_i + l_i = q_i$ para todo $i \in [s]$ tenemos

$$(D_{k_1} \otimes D_{l_1}) \star_{\otimes} ... \star_{\otimes} (D_{k_s} \otimes D_{l_s}) \subseteq$$

$$\subseteq (D_{k_1} \star ... \star D_{k_s}) \otimes (D_{l_1} \star ... \star D_{l_s}) \subseteq D_{k_1+...+k_s} \otimes D_{l_1+...+l_s} \subseteq$$

$$\subseteq \bigoplus_{k+l=n} D_k \otimes D_l,$$

ya que $k_1 + ... + k_s + l_1 + ... + l_s = n$. Por tanto

$$[(\oplus_{k_1+l_1=q_1} D_{k_1} \otimes D_{l_1}) \otimes_{\star} ... \otimes_{\star} (\oplus_{k_s+l_s=q_s} D_{k_s} \otimes D_{l_s}]] \subseteq \bigoplus_{k+l=n} D_k \otimes D_l.$$

Luego

$$\Delta(\Xi^q) \in \bigoplus_{k+l=n} D_k \otimes D_l \Rightarrow \Delta(D_n) \subseteq \bigoplus_{k+l=n} D_k \otimes D_l.$$

Por tanto se tiene (iii). Como corolario de (i)-(iii) tenemos

Teorema

$\mathcal{D}$ es una sub-biálgebra graduada de $\mathcal{F}$. $\diamondsuit$

8.3 La base de descenso de D_n

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. En esta sección calcularemos la dimensión de D_n exhibiendo una base particular, la llamada *base de descenso* de D_n. Para definir esta base necesitamos una definición preliminar.

Definición

Sea $\pi \in S_n$. Definimos el *conjunto de descensos* de π por

$$Des(\pi) = \{i \in [n-1] : \pi(i) > \pi(i+1)\}.$$

Dado X un conjunto denotamos al *conjunto potencia* de X por $P(X)$, es decir, $P(X)$ es la familia de todos los subconjuntos de X. Para cada $J \in P([n-1])$ definimos

$$\Delta^J = \sum_{Des(\pi)=J} \pi.$$

Lema

$|\{q \in N^* : q \models n\}| = |P([n-1])|$

Demostración. Consideremos la función

$$f : \{q \in N^* : q \models n\} = P([n-1])$$
$$q_1 ... q_s \mapsto \{q_1, q_1 + q_2, ..., q_1 + q_2 + ... + q_{s-1}\}.$$

Es claro que f está bien definida. Sea

$$h : P([n-1]) \longrightarrow \{q \in N^* : q \models n\}$$
$$\{a_1, ..., a_r\} \mapsto a_1.(a_2 - a_1).(a_3 - a_2)....(n - a_{r-1}).$$

Entonces para todo $J = \{a_1, ..., a_t\}$ se tiene que $a_1 + a_2 - a_1 + ... + n - a_{t-1} = n$. Por tanto h está bien definida. Además

$$fh(\{a_1, ..., a_t\}) = f(a_1.(a_2 - a_1)...(n - a_{t-1})) = \{a_1, a_2, ..., a_t\} \text{ para todo } \{a_1, ..., a_t\} \subseteq [n-1].$$

Por tanto $fh = id$. También

$$hf(q_1, , , q_s) = h(\{q_1, q_1 + q_2, ..., q_1 + q_2 + ... + q_{s-1}\} = \{q_1 ... q_s\}.$$

Luego $hf = id$. Por tanto f es biyactiva, de donde se sigue el resultado. $\diamondsuit$

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $\{\Delta^J : J \subseteq [n-1]\}$ es una base de D_n.

Demostración. Sea $q \models n$, $l = l(q)$. Entonces

$$\pi \in S^q \text{ si y sólo si } \pi|_{P_i^q} \text{ es creciente para todo } i \in [l],$$
$$\text{si y sólo si } (\pi(i) > \pi(i+1) \text{ implica que } i \in \{q_1, q_1 + q_2, ..., q_1 + ... + q_{l-1}\}).$$

Por tanto

$$\Xi^q = \sum_{D \subseteq \{q_1, ..., q_1 + ... q_{l-1}\}} \Delta^D.$$

Luego $D_n =< \Xi^q : q \models n > \subseteq < \Delta^D : D \subseteq [n-1] >$. Además es fácil ver que los elementos

$$\{\Delta^J : J \in P([n-1])\}.$$

son linealmente independientes. Por tanto sólo falta probar que

$$\Delta^D \in D_n \text{ para todo } D \subseteq [n-1].$$

Procederemos por inducción sobre $m = |D|$.
La afirmación es clara para $m = 0$.
Supongamos que $m > 0$, y el resultado válido para todo $k < m$, es decir

$$\text{para todo } k < m \text{ y para todo } D \subseteq [m-1] \text{ con } |D| = k \text{ se tiene que } \Delta^D \in D_n.$$

Por el lema anterior existe $q = q_1 ... q_s \models n$ tal que $D = \{q_1, ..., q_1 + ... + q_{s-1}\}$. Por tanto

$$\Xi^q = \sum_{F \subseteq D} \Delta^F = \Delta^D + \sum_{F \subseteq D, F \neq D} \Delta^F.$$

Por hipótesis inductiva $\Delta^F \in D_n$ para todo $F \subseteq D$, $F \neq D$. Luego

$$\Delta^D = \Xi^q - \sum_{F \subseteq D, F \neq D} \Delta^F \in D_n.$$

La prueba está completa. $\diamondsuit$

8.4 La biálgebra de composiciones

En esta sección, con la que concluimos el capítulo, definiremos una estructura de biálgebra en $K\mathbb{N}^*$, el K- módulo libre generado por $\mathbb{N}^*$, la cual resulta ser isomorfa a la biálgebra de descenso $\mathcal{D}$ (ver [1]).

La multiplicación en KN^* es la aplicación lineal

$$\mu : KN^* \otimes KN^* \longrightarrow KN^*$$

dada en la base $q \otimes r$, $q, r \in \mathbb{N}^*$ por

$$q \otimes r \mapsto q.r \text{ para todo } q, r \in N^*.$$

Es decir, μ es la extensión lineal de la concatenación de composiciones. El elemento unidad en $K\mathbb{N}^*$ es la composición vacía, es decir, $1_{KN^*} = \emptyset$. Es claro que $(K\mathbb{N}^*, \mu, 1_{K\mathbb{N}^*})$ cumple con los axiomas de álgebra.
Para definir la comultiplicación δ en KN^*, definimos $\delta(\emptyset) = \emptyset \otimes \emptyset$. Sea $q = q_1...q_k \in N^*$, $q \neq \emptyset$. Para cada subconjunto $J = \{j_1, ..., j_r\} \subseteq [k]$ con $j_1 < ... < j_r$ sea $q_J = q_{j_1}...q_{j_r}$. También definimos $CJ = [k] \setminus J$. La comultiplicación $\delta : K\mathbb{N}^* \longrightarrow K\mathbb{N}^* \otimes K\mathbb{N}^*$ está dada como la aplicación lineal dada en la base $\mathbb{N}^*$ por

$$\delta(q) = \textstyle\sum_{J \subseteq [k]} q_J \otimes q_{CJ} \text{ para todo } q = q_1...q_k \in \mathbb{N}^*.$$

La counidad $\varepsilon : K\mathbb{N}^* \longrightarrow K$ está dada en la base $\mathbb{N}^*$ por

$$\varepsilon(q) = \delta_{\emptyset q} \text{ para todo } q \in N^*.$$

Es fácil ver que $(K\mathbb{N}^*, \delta, \varepsilon)$ es una coálgebra.

Teorema

$(K\mathbb{N}^*, \mu, \delta, 1_{K\mathbb{N}^*}, \varepsilon)$ es una biálgebra.

Demostración. Veamos que δ y ε son homomorfismos de álgebras. Sean $q = q_1...q_k$, $r = r_1...r_l \in N^*$ (si $q = \emptyset$ o $r = \emptyset$ el resultado es trivial). Observemos que

$$H \subseteq [k+l] \text{ si y sólo si } \exists J \subseteq [k],\ L \subseteq [l] \text{ tales que } H = J \cup (k + L).$$

En este caso $CH = CJ \cup (k + CL)$. Por tanto

$$\delta(q.r) = \textstyle\sum_{H \subseteq [k+l]} (q.r)_H \otimes (q.r)_{CH} =$$

$$= \textstyle\sum_{J \subseteq [k]} \sum_{L \subseteq [l]} q_J.r_L \otimes q_{CJ}.r_{CL} = \sum_{J \subseteq [k]} \sum_{L \subseteq [l]} (q_J \otimes q_{CJ})._{\otimes}(r_L \otimes r_{CL}) =$$

$$= (\textstyle\sum_{J \subseteq [k]} q_J \otimes q_{CJ})._{\otimes}(\sum_{L \subseteq [l]} r_L \otimes r_{CL}) = \delta(q)._{\otimes}\delta(r).$$

Por tanto δ es un homomorfismo de álgebras. Ahora veamos que ε es un homomorfismo de álgebras. Sean $q, r \in N^*$. Si $q \neq \emptyset$ o $r \neq \emptyset$ entonces $q.r \neq \emptyset$, por tanto

$$\varepsilon(q.r) = 0 = \varepsilon(q)\varepsilon(r)$$

Si $q = r = \emptyset$ entonces $\varepsilon(q.r) = 1 = \varepsilon(q)\varepsilon(r)$. Por tanto ε es un homomorfismo de álgebras. $\diamondsuit$

Capítulo 9

La biálgebra de funciones de clase

9.1 Funciones de clase. Inducción y restricción

En los capítulos restantes trabajaremos con un campo K de característica 0. Sea G un grupo. El *espacio de funciones de clase de* G *en* K es el $K-$ módulo

$$C\ell_K(G) = \{f : G \longrightarrow K | f \text{ es constante en clases de conjugación de } G\}.$$

La suma y acción de K en $C\ell_K(G)$ están dadas puntualmente.
Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $G = S_n$. Recordemos que cada π en S_n se escribe como producto de ciclos ajenos

$$\pi = \sigma_1 ... \sigma_l.$$

donde $q_i = longitud(\sigma_i) \in [n]$ y $q_1 + ... + q_l = n$. Nótese que estamos considerando los puntos fijos de π como $1-$ ciclos. Si reordenamos estos ciclos de manera que sus longitudes estén en orden débilmente decreciente, entonces podemos escribir a π de manera úbica en la forma

$$\pi = \tau_1 ... \tau_l,$$

donde $p_1 = longitud(\tau_1) \geq p_2 = longitud(\tau_2) \geq ... \geq p_l = longitud(\tau_l)$. Definimos la *el tipo cíclico de* π por $p_\pi = p_1 ... p_l$. Es claro que $p_\pi \vdash n$, y que $\sigma \in S_n$ es conjugado a π si y sólo si $p_\pi = p(\sigma)$. Recordemos que (ver), dadas p, q composiciones de n de la misma longitud, entonces $p \approx q$ significa que p es un "reordenamiento" de q. Definimos

$$C_q = \{\sigma \in S_n : p_\sigma \approx q\} \text{ para todo } q \models n.$$

Se sigue que la aplicación

$$\{p \in \wp : p \vdash n\} \longrightarrow \{ \text{ clases de conjugación de } S_n\}$$

$$p \mapsto C_p$$

es biyectiva. También tenemos una aplicación sobreyectiva

$$\{q \in \mathbb{N}^* : q \models n\} \longrightarrow \{ \text{ clases de conjugación de } S_n\}$$

$$q \mapsto C_q = C_{p^q},$$

donde p^q es la única partición de n tal que $q \approx p^q$.
Dado $\alpha \in Cl_K(S_n)$ denotamos

$$\alpha(C_q) = \alpha(\pi) \text{ para todo } q \models n,\, \pi \in C_q.$$

Sea $q \models n$. Definimos

$$char_q : S_n \longrightarrow K,$$

definida en las clases de conjugación C_p para $p \vdash n$ por

$$char_q(C_p) = \delta_{pp^q}.$$

Entonces

$$\{char_q : q \models n\}$$

es un conjunto generador de $C\ell_K(S_n)$, y el conjunto

$$\{char_p : p \vdash n\}$$

es una base de $C\ell_K(S_n)$. En particular, la dimensión de $C\ell_K(S_n)$ es $|\{p \in \wp : p \vdash n\}|$.
Ahora definiremos los conceptos de inducción y restricción de funciones de clase, los cuales serán útiles para la construcción de la multiplicación y la comultiplicación en el espacio de funciones de clase del grupo simétrico.

Observación

Sea G un grupo, U subgrupo de G y $f \in C\ell_K(G)$. Entonces la restricción de f a U

$$f\,|_U : U \longrightarrow K$$

es una función de clase de U en K. $\diamondsuit$

Definición

Sea G un grupo, U subgrupo de G y $h : U \longrightarrow K$. Definimos la *inducción de h a G* por

$$h^G : G \longrightarrow K$$

$$g \mapsto (1/|U|) \textstyle\sum_{x \in G, xgx^{-1} \in U} h(xgx^{-1}) \text{ para todo } g \in G.$$

Observemos que $h^G \in C\ell_K(G)$ para toda función $h : U \longrightarrow K$.

Proposición

Sea G un grupo, $\alpha \in C\ell_K(G)$. Entonces

$$\alpha^G = \alpha.$$

Demostración. Esto se sigue de que

$$\alpha^G(x) = (1/|G|) \textstyle\sum_{y \in G, yxy^{-1} \in G} \alpha(yxy^{-1}) = (1/|G|) \sum_{y \in G} \alpha(yxy^{-1}) =$$

$$= (1/|G|) \textstyle\sum_{y \in G} \alpha(x) = \alpha(x) \text{ para todo } x \in G. \ \diamondsuit$$

Lema

Sea G un grupo, U subgrupo de G y H subgrupo de U. Sea $f : H \longrightarrow K$. Entonces

$$f^G = (f^U)^G.$$

Demostración. Tenemos

$$(f^U)^G(x) = (1/|U|)\sum_{y\in G, yxy^{-1}\in U} f^U(yxy^{-1}) =$$

$$= (1/|U||H|)\sum_{y\in G, yxy^{-1}\in U}\sum_{z\in U,(zy)x(zy)^{-1}\in H} f((zy)x(zy)^{-1}).$$

Haciendo $l = zy$ y cambiando el orden de la suma tenemos

$$(f^U)^G(x) = (1/|U||H|)\sum_{l\in G, lxl^{-1}\in H}\sum_{z\in U,(z^{-1}l)x(z^{-1}l)^{-1}\in U} f(lxl^{-1}).$$

Como $z \in U$ y $lxl^{-1} \in H$ implican que $(z^{-1}l)x(z^{-1}l)^{-1} = z^{-1}(lxl^{-1})z \in U$, entonces

$$(f^U)^G(x) = (1/|U||H|)|U|\sum_{l\in G, lxl^{-1}\in H} f(lxl^{-1}) = f^G(x) \text{ para todo } x \in G. \ \diamondsuit$$

Ejemplo. Caracteres de Young

Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$. Sea S_q el subgrupo de Young de tipo q (ver 4.1). El *carácter de Young de tipo* q es

$$\xi^q = (1_{S_q})^{S_n},$$

donde 1_{S_q} es el carácter trivial en S_q, es decir, se tiene que $1_{S_q}(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in S_q$. Se demuestra en [1, pág.98] que los caracteres de Young forman un conjunto linealmente independiente. Por tanto los caracteres de Young forman una base de $C\ell_K(S_n)$.

9.2 La multiplicación y la comultiplicación en $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} C\ell_K S_n$

Sea

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} C\ell_K(S_n)$$

En esta sección definiremos una multiplicación y una comultiplicación en $\mathcal{C}$, demostraremos que $\mathcal{C}$ es una biálgebra graduada auto-dual respecto a estas operaciones y a la aplicación bilineal

$$(.,.)_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow K, \text{ dada por}$$

$$(\alpha,\beta)_{\mathcal{C}} = 0 \text{ si } \alpha \in C\ell_K(S_n),\ \beta \in C\ell_K(S_m),\ n \neq m, \text{ y}$$

$$(\alpha,\alpha')_{\mathcal{C}} = (\alpha,\alpha')_{S_n} \text{ para todo } \alpha,\alpha' \in C\ell_K(S_n),$$

donde $(.,.)_G$ es el producto interno en $C\ell_K(G)$ para todo grupo finito G, dado por

$$(\alpha,\beta)_G = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\alpha(x)\beta(x^{-1}) \text{ para todo } \alpha,\beta \in C\ell_K(G).$$

Definición

Sean $k, l \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in C\ell_K(S_k)$, $\beta \in C\ell_K(S_l)$. Definimos

$$\alpha\sharp\beta : S_{k.l} \longrightarrow K \text{ por } (\alpha\sharp\beta)(\pi\sharp\sigma) = \alpha(\pi)\beta(\sigma)$$
$$\text{para todo } (\pi, \sigma) \in S_k \times S_l.$$

Observemos que $\alpha\sharp\beta \in C\ell_K(S_{k.l})$.

Ahora tenemos las herramientas para definir la multiplicación en $\mathcal{C}$.

Definición

Definimos el *producto exterior* en $\mathcal{C}$ como la aplicación lineal

$$\bullet : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C},$$

definida en la base $\alpha \otimes \beta$, para α y β funciones de clase, por

$$\alpha \bullet \beta = (\alpha\sharp\beta)^{S_{k+l}} \text{ para todo } k, l \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in C\ell_K(S_k),\ \beta \in C\ell_K(S_l).$$

Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$ y $r \models m$. Notemos que $1_{S_q}\sharp 1_{S_r} = 1_{S_{q.r}}$. Además no es difícil ver que

$$(1_{S_q})^{S_n}\sharp(1_{S_r})^{S_m} = (1_{S_q}\sharp 1_{S_r})^{S_{n.m}}.$$

Aplicamos el lema 9.1 para obtener

$$\xi^{q.r} = (1_{S_{q.r}})^{S_{n+m}} = (1_{S_q}\sharp 1_{S_r})^{S_{n+m}} =$$
$$= [(1_{S_q}\sharp 1_{S_r})^{S_{n.m}}]^{S_{n+m}} =$$
$$= ((1_{S_q})^{S_n}\sharp(1_{S_r})^{S_m})^{S_{n+m}} = \xi^q \bullet \xi^r$$

Denotamos por

$$1_{\mathcal{C}} : S_0 \longrightarrow K$$
$$id_{\emptyset} \mapsto 1_K.$$

Entonces $C\ell_K(S_0) =< 1_{\mathcal{C}} >$, y

$$\alpha \bullet 1_{\mathcal{C}} = (\alpha\sharp 1_{\mathcal{C}})^{S_n} = \alpha^{S_n} = \alpha = (1_{\mathcal{C}}\sharp\alpha)^{S_n} = 1_{\mathcal{C}} \bullet \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in S_n.$$

Por tanto $1_{\mathcal{C}}$ es neutro con respecto a $\bullet$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, $q = q_1 ... q_l \models n$. Definimos

$$q? = (\Pi_{i=1}^{l} q_i) m_1! ... m_n!,$$

donde $m_i = |\{q_j : 1 \leq j \leq n \text{ y } q_j = i\}|$ para todo $i \in [n]$. También definimos

$$\emptyset? = 1.$$

Vemos en [1, pág.27] que, dados $n \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$ y $\pi \in C_q$, entonces $q?$ es el orden del centralizador $C_{S_n}(\pi)$ de π en S_n. Es decir,

$$q? = \tfrac{n!}{|C_q|}.$$

Dado $q \in \mathbb{N}^*$, definimos

$$ch_q = q?char_q.$$

Entonces $\{ch_q : q \in N^*\}$ es un conjunto generador de $\mathcal{C}$ con la siguiente propiedad

Teorema

Sean $q, r \in \mathbb{N}^*$. Entonces

$$ch_q \bullet ch_r = ch_{q.r}.$$

En particular, $\mathcal{C}$ es un álgebra graduada conmutativa conexa.
Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$, $q \models n$, $r \models m$. Entonces para todo $\pi \in S_{n+m}$ se tiene que

$$(ch_q \bullet ch_r)(\pi) = (ch_q \sharp ch_r)^{S_{n+m}}(\pi) =$$

$$= (1/|S_{n.m}|) \sum_{\alpha\in S_{n+m}, \alpha\pi\alpha^{-1}\in S_{n.m}} (ch_q \sharp ch_r)(\alpha\pi\alpha^{-1}) =$$

$$= \tfrac{1}{n!m!} q?r?|\{\alpha \in S_{n+m} : \alpha\pi\alpha^{-1} \in C_q \sharp C_r\}|. \ (*)$$

Como $C_q \sharp C_r \subseteq C_{q.r}$ entonces

$$\pi \notin C_{q.r} \text{ implica que } \{\alpha \in S_{n+m} : \alpha\pi\alpha^{-1} \in C_q \sharp C_r\} = \emptyset.$$

Por tanto, el lado derecho de $(*)$ es 0 a menos que $\pi \in C_{q.r}$. Luego

$$(ch_q \bullet ch_r)(\pi) = ch_{q.r}(\pi) = 0 \text{ para todo } \pi \in S_{n+m} \setminus C_{q.r}.$$

Sea $\pi \in C_{q.r}$. Consideremos la aplicación

$$\phi : \{\alpha \in S_{n+m} : \alpha\pi\alpha^{-1} \in C_q \sharp C_r\} \longrightarrow C_q \sharp C_r$$

$$\alpha \mapsto \alpha\pi\alpha^{-1}.$$

Todo elemento de $C_q \sharp C_r$ es conjugado a π, luego ϕ es sobreyectiva. Tenemos

$$\phi(\alpha) = \phi(\beta) \Leftrightarrow \alpha\beta^{-1} \in C_{S_{n+m}}(\pi).$$

Entonces se tiene

$$|\{\alpha \in S_{n+m} : \alpha\pi\alpha^{-1} \in C_q \sharp C_r\}| = |\bigcup_{\tau\in C_q\sharp C_r} \phi^{-1}(\{\tau\})| =$$

$$= \sum_{\tau\in C_q\sharp C_r} |C_{S_{n+m}}(\pi)| = |C_q \sharp C_r| \tfrac{(n+m)!}{|C_{q.r}|}.$$

Por tanto

$$(ch_q \bullet ch_r)(\pi) = \tfrac{1}{n!m!} q?r?|C_q||C_r| \tfrac{(n+m)!}{|C_{q.r}|} = \tfrac{(n+m)!}{|C_{q.r}|} = (q.r)? = ch_{q.r}(\pi),$$

de donde la primera afirmación del teorema se sigue. El hecho de que $\bullet$ se asociativa se sigue de la asociatividad de $\mathbb{N}$. Que $1_{\mathcal{C}}$ funciona como elemento unidad ya se observó anteriormente. Por tanto $(\mathcal{C}, \bullet, 1_{\mathcal{C}})$ es un álgebra. La parte de la conexidad y la graduación son claras. Finalmente, la conmutatividad de $\mathcal{C}$ se sigue de que

$$ch_q = ch_r \Leftrightarrow q \approx r \text{ para todo } q, r \in \mathbb{N}^*. \ \diamondsuit$$

Para definir la comultiplicación en $\mathcal{C}$, observemos que

$$\mathcal{C} \otimes \mathcal{C} = (\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} C\ell_K(S_n)) \otimes (\bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} C\ell_K(S_n))$$

$$\simeq_K \bigoplus_{k,l\in\mathbb{N}_0} C\ell_K(S_k) \otimes C\ell_K(S_l) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0} (\bigoplus_{k+l=n} C\ell_K(S_k) \otimes C\ell_K(S_l)).$$

Por tanto, definir una comultiplicación en $\mathcal{C}$ equivale a definir una aplicación lineal

$$\delta : \mathcal{C} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}(\bigoplus_{k+l=n} C\ell_K(S_k)\otimes C\ell_K(S_l)),$$

que cumpla con las ecuaciones (2.4)-(2-6), donde la counidad ε está definida como la aplicación lineal

$$\varepsilon : \mathcal{C} \longrightarrow K,$$

dada en la base $\cup_{n\in\mathbb{N}_0} C\ell_K(S_n)$ por

$$\varepsilon(1_C) = 1_K,\, \varepsilon(\alpha) = 0 \text{ para todo } \alpha \in C\ell_K(S_n),\, n > 0.$$

Dados $k, l \in \mathbb{N}_0$, existe un isomorfismo lineal natural

$$i_{k,l} : C\ell_K(S_k)\otimes C\ell_K(S_l) \longrightarrow C\ell_K(S_{k.l})$$

$$char_q \otimes char_r \mapsto char_q \sharp char_r \text{ para todo } q \models k, r \models l.$$

Definición

Definimos

$$\delta : \mathcal{C} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbb{N}_0}(\bigoplus k+l = nC\ell_K(S_k)\otimes C\ell_K(S_l))$$

como la extensión lineal de las aplicaciones

$$\delta_n : C\ell_K(S_n) \longrightarrow \bigoplus_{k+l=n} C\ell_K(S_k)\otimes C\ell_K(S_l)$$

$$\alpha \mapsto \sum_{k+l=n} i_{k,l}^{-1}(\alpha\mid_{S_{k.l}}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0,\, \alpha \in C\ell_K(S_n).$$

Sea $q \in \mathbb{N}^*$ y $k = l(q)$. Para $J = \{i_1, ..., i_r : i_1 < ... < i_r\} \subseteq [k]$ definimos

$$q_J = q_{i_1}...q_{i_r}.$$

Definimos también

$$CJ = [k]\setminus J.$$

El siguiente teorema implica que $(\mathbb{C}, \delta, \varepsilon)$ es una coálgebra graduada coconmutativa.

Teorema

Sea $q \in \mathbb{N}^*$, $k = l(q)$. Entonces

$$\delta(ch_q) = \sum_{J\subseteq[k]} ch_{q_J}\otimes ch_{q_{CJ}}.$$

Demostración. Sea $n = \sum_{i=1}^{k} q_i$. Entonces $q \models n$. Sean $a, b \in \mathbb{N}_0$ con $a + b = n$.
Afirmación. Tenemos

$$ch_q|_{S_{a.b}} = q? \sum_{r\vdash a, s\vdash b, r.s\approx q} char_r \sharp char_s$$

Prueba. Sean $r \vdash a$, $s \vdash b$ con $r.s \approx q$, $\alpha\sharp\beta \in S_{a.b}$. Recordemos que $p_\pi \vdash n$ denota al tipo cíclico de $\pi \in S_n$. Tenemos que

$$ch_q(\alpha\sharp\beta) = q?char_q(\alpha\sharp\beta) = 0 \text{ a menos que } p_{\alpha\sharp\beta} \approx q.$$

En ese caso

$$ch_q(\alpha\sharp\beta) = q?char_q(\alpha\sharp\beta) = q?.$$

Por otro lado

$$(char_r\sharp char_s)(\alpha\sharp\beta) = char_r(\alpha)char_s(\beta) = 0 \text{ a menos que } p_\alpha = r \text{ y } p_\beta = s.$$

Pero $p_\alpha = r$ y $p_\beta = s$ implica que $p_{\alpha\sharp\beta} \approx q$, como se puede verificar fácilmente. Por tanto

$$ch_q(\alpha\sharp\beta) = 0 = q?\sum_{r\vdash a,s\vdash b,r.s\approx q}(char_r\sharp char_s)(\alpha\sharp\beta) \text{ a menos que } p_{\alpha\sharp\beta} \approx q.$$

En ese caso

$$q?\sum_{r\vdash a,s\vdash b,r.s\approx q}(char_r\sharp char_s)(\alpha\sharp\beta) = q?(char_{p_\alpha}\sharp char_{p_\beta})(\alpha\sharp\beta) =$$

$$= q? = ch_q(\alpha\sharp\beta),$$

de donde la afirmación se sigue. ∇

Para la demostración del teorema, necesitamos el siguiente resultado, que se prueba en [1, pág.21]

$$\tfrac{(r.s)?}{r?s?} = |\{J \subseteq l(r.s) : (r.s)_J \approx r\}|.$$

De la ecuación anterior concluimos que, dados $r \vdash a,s \vdash b$ con $r.s \approx q$, entonces

$$\sum_{J\subseteq[k],q_J\approx r} ch_{q_J}\sharp ch_{q_{CJ}} = \tfrac{(r.s)?}{r?s?} ch_r\sharp ch_s =$$

$$= (r.s)?char_r\sharp char_s = q?char_r\sharp char_s$$

. Por tanto

$$\sum_{r\vdash a,s\vdash b,r.s\approx q} char_r\sharp char_s = 1/q?\sum_{J\subseteq[k],q_J\models a} ch_{q_J}\sharp ch_{q_{CJ}}.$$

Entonces

$$ch_q|_{S_{a.b}} = \sum_{J\subseteq[k],q_J\models a} ch_{q_J}\sharp ch_{q_J}.$$

Por tanto

$$\delta(ch_q) = \sum_{a+b=n} i^{-1}_{a,b}(ch_q|_{S_{a.b}}) = \sum_{a+b=n}\sum_{J\subseteq[k],q_J\models a} ch_{q_J}\otimes ch_{q_{CJ}} =$$

$$= \sum_{J\subseteq[k]} ch_{q_J}\otimes ch_{q_{CJ}},$$

como se quería probar. $\diamondsuit$

Corolario

$(\mathcal{C},\delta,\epsilon)$ es una coálgebra graduada conexa coconmutativa

Demostración. La graduación y la coconmutatividad se siguen claramente del teorema anterior. La conexidad ya se probó anteriormente.
Observemos que la counidad en $\mathcal{C}$ se puede caracterizar como

$$\varepsilon(char_q) = \delta_{\emptyset q} \text{ para todo } q \in \mathbb{N}^*.$$

Por lo tanto se tiene (recordemos que $1_\otimes : \mathcal{C} \longrightarrow K\otimes\mathcal{C}$ está dada por $1_\otimes(f) = 1\otimes f$ para todo $f \in \mathcal{C}$)

$$(\varepsilon \otimes id)\delta(ch_q) = \sum_{J \subseteq [l(q)]} \varepsilon(ch_{q_J}) \otimes ch_{q_{CJ}} =$$

$$= \varepsilon(ch_\emptyset) \otimes ch_q = 1 \otimes ch_q = 1_\otimes(ch_q)$$

Para la otra ecuación de counidad operamos análogamente.
Sólo falta verificar la coasociatividad. Sea $q \in \mathbb{N}^*$, $k = l(q)$. Entonces

$$(\delta \otimes id)\delta(ch_q) = \sum_{J \subseteq [l(q)]} \delta(ch_{q_J}) \otimes ch_{q_{CJ}} =$$

$$= \sum_{J \subseteq [k]} \sum_{H \subseteq [J]} ch_{q_H} \otimes ch_{q_{J \setminus H}} \otimes ch_{q_{CJ}} =$$

$$= \sum_{(J,K,L) \in \wp([k])} ch_{q_J} \otimes ch_{q_K} \otimes ch_{q_L},$$

donde $\wp([k]) = \{(J,K,L) \subseteq [n] : J \cap K = J \cap L = K \cap L = \emptyset$ y $J \cup K \cup L = [k]\}$. Similarmente

$$(id \otimes \delta)\delta(ch_q) = \sum_{(J,K,L) \in \wp([k])} ch_{q_J} \otimes ch_{q_K} \otimes ch_{q_L},$$

de donde la coasociatividad se sigue. $\diamondsuit$

De acuerdo a los teoremas 9.2 y 9.2 tenemos que la aplicación lineal

$$\phi : K\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$q \mapsto chq \text{ para todo } q \in N^*$$

es un isomorfismo de álgebras y coálgebras, respectivamente. Como KN^* es una biálgebra (ver 8.4), se tiene el siguiente

Teorema

$(C\ell_K, \bullet, \delta)$ es una biálgebra graduada conexa conmutativa. $\diamondsuit$

9.3 Autodualidad de $\mathcal{C}$. El homomorfismo de Solomon

Recordemos que, dado $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos una forma bilineal $(.,.)_{S_n}$ en $C\ell_K(S_n)$ dada por

$$(\alpha, \beta)_{S_n} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \alpha(\sigma)\beta(\sigma) \text{ para todo } \alpha, \beta \in C\ell_K(S_n).$$

Podemos poner σ en vez de σ^{-1} en $(\alpha, \beta)_{S_n}$ ya que σ^{-1} tiene el mismo tipo cíclico de σ, luego σ y σ^{-1} son conjugados. Por lo tanto existe una forma bilineal

$$(.,.)_\mathcal{C} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow K,$$

tal que

$$(C\ell_K(S_n), C\ell_K(S_m))_\mathcal{C} = 0 \text{ si } n \neq m, \text{ y}$$

$$(.,.)_\mathcal{C}|_{C\ell_K(S_n) \times C\ell_K(S_n)} = (.,.)_{S_n} \text{ para todo } n, m \in \mathbb{N}_0.$$

En esta sección demostraremos que $\mathcal{C}$ es auto-dual con respecto a $(.,.)_\mathcal{C}$. Esto implica, recordando el teorema de autodualidad 2.7 y verificando que $(.,.)_\mathcal{C}$ es regular, que $\mathcal{C}$ es una biálgebra auto-dual.
Es claro que la forma $(.,.)_\mathcal{C}$ es simétrica. Observemos que el conjunto

$$\{ch_q : q \in \mathbb{N}^*\}$$

es un conjunto generador orotgonal para $\mathcal{C}$, ya que

$$(ch_q, ch_r)_C = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} ch_q(\sigma)ch_r(\sigma) = 0 \text{ a menos que } q \approx r \text{ para todo } q, r \in \mathbb{N}^*.$$

Además

$$(ch_q, ch_q)_C = 1/n! \sum_{\sigma\in C_q} q?q? = \frac{|C_q|}{n!}(q?)^2 = q?$$

$$\text{para todo } q \in \mathbb{N}^*.$$

Por tanto la forma $(.,.)_{\mathcal{C}}$ es regular.

Teorema

Sean $q, r, s \in \mathbb{N}^*$. Entonces

$$(ch_q \bullet ch_r, ch_s)_{\mathcal{C}} = (ch_q \otimes ch_r, \delta(ch_s))_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}.$$

En particular, $\mathcal{C}$ es una biálgebra auto-dual.

Demostración. Ambos lados de la ecuación son 0 a menos que $q.r \approx s$. Si $q.r \approx s$, entonces

$$(ch_q \bullet ch_r, ch_s)_{\mathcal{C}} = (ch_{q.r}, ch_s)_{\mathcal{C}} = (q.r)?.$$

Por otro lado

$$(ch_q \otimes ch_r, \delta(ch_s))_{\mathcal{C}} = \sum_{J\subseteq[l(q.r)],(q.r)_J\approx q}(ch_q, ch_q)_{\mathcal{C}}(ch_r, ch_r)_{\mathcal{C}} =$$

$$= \frac{(q.r)?}{q?r?}q?r? = (q.r)?.$$

La auotdualidad de $\mathcal{C}$ se sigue por el teorema (2.7). $\diamondsuit$

En lo que resta de esta sección (con la que terminamos el capítulo) probaremos que la biálgebra de descenso $\mathcal{D}$ es autodual. Para ello utilizaremos el siguiente resultado, cuya prueba es directa y la omitimos, llamado la *ley de reciprocidad de Frobenius.*

Proposición (Ley de reciprocidad de Frobenius)

Sea G un grupo finito, U subgrupo de G, $\alpha \in C\ell_K(U)$ y $\beta \in C\ell_K(G)$. Entonces

$$(\alpha^G, \beta)_{S_n} = (\alpha, \beta|_U)_U. \ \diamondsuit$$

Definimos el *homomorfismo de Solomon* por

$$c : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C},$$

dado en la base Ξ^q, $q \in \mathbb{N}^*$ por

$$\Xi^q \mapsto \xi_q \text{ para todo } q \in \mathbb{N}^*.$$

Es claro que c es un homomorfismo de álgebras. Además, c manda bases en bases, luego c es un isomorfismo. Sea $(.,.)_{\mathcal{D}}$ la forma bilineal $(.,.)_{\mathcal{P}}$ restringida a $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$. Resulta que c aplica $(.,.)_{\mathcal{D}}$ en $(.,.)_{\mathcal{C}}$, es decir, tenemos el siguiente

Teorema

Sean $q, r \in \mathbb{N}^*$. Entonces

$$(\Xi^q, \Xi^r)_{\mathcal{D}} = (\xi^q, \xi^r)_{\mathcal{C}}.$$

En particular, $\mathcal{D}$ es una biálgebra autodual.

Demostración. Supongamos que $r \in \mathbb{N}_0$. Ambos lados de la ecuación son 0 a menos que $q \models r$. Si $q \models r$ tenemos, aplicando la ley de reciprocidad de Fröbenius

$$(\Xi^q, \Xi^r)_{\mathcal{D}} = 1 = (1_{S_q}, 1_{S_q})_{S_q} = (1_{S_q}, 1_{S_r}|_{S_q})_{S_q}$$

$$= ((1_{S_q})^{S_r}, 1_{S_r})_{S_r} = = (\xi^q, \xi^r)_C.$$

Ahora el caso general. Ambos lados de la ecuación son 0 a menos que $n = \sum q_i = \sum r_i$. En ese caso, tenemos las fórmulas de Mackey y Solomon para D_n y $C\ell_K(S_n)$ (ver [1, pág.7])

$$\Xi^q \Xi^r = \sum_{s \models n} m_q^r(s) \Xi^s, \tag{9.1}$$

$$\xi^q \xi^r = \sum_{s \models n} m_q^r(s) \xi^s. \tag{9.2}$$

Observemos que el coeficiente de $id_{[n]}$ en el lado izquierdo de la ecuación (9.1) es

$$|\{(\sigma, \pi) \in S^q \times S^r : \sigma = \pi^{-1}\}| = (\Xi^q, \Xi^r)_{\mathcal{D}} = \text{coeficiente de } id_{[n]} \text{ en el lado}$$

$$\text{derecho} = \textstyle\sum_{s \models n} m_q^r(s) |\{v \in S^s : v = id_{[n]}\}| = \sum_{s \models n} m_q^r(s).$$

Por otro lado

$$(\xi^q, \xi^r)_{\mathcal{C}} = 1/n! \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \xi^q(\sigma) \xi^r(\sigma) = 1/n! \sum_{\sigma \in S_n} (\xi^q \xi^r)(\sigma) \xi^n(\sigma) =$$

$$= (\xi^q \xi^r, \xi^n)_{\mathcal{C}}.$$

Observemos que, dado $s \models n$, la ley de reciprocidad de Frobenius nos da

$$(\xi^s, \xi^n)_{S_n} = (1_{S_s}, \xi^n|_{S_s})_{S_s} = (1_{S_s}, 1_{S_s})_{S_s} = 1.$$

Entonces

$$(\Xi^q, \Xi^r)_{\mathcal{D}} = \textstyle\sum_{s \models n} m_q^r(s) = \sum_{s \models n} m_q^r(s) (\xi^s, \xi^n)_{\mathcal{C}} = (\xi^q \xi^r, \xi^n) =$$

$$= (\xi^q, \xi^r)_{\mathcal{C}},$$

como se quería probar. $\diamondsuit$

Capítulo 10

Caracteres no conmutativos

10.1 Introducción

En este capítulo lograremos relacionar la teoría no conmutativa que hemos desarrollado hasta ahora con la biálgebra conmutativa de las funciones de clase. Consideraremos un homomorfismo graduado de K-álgebras

$$c_\omega : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C},$$

donde $\omega = \{\omega_n : n \in N\}$ es un conjunto de elementos primitivos $\omega_n \in KS_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con la elección apropiada de ω, c_ω resultará ser un epimorfismo de biálgebras que preserva las formas bilineales $(.,.)_\mathcal{P}$ y $(.,.)_\mathcal{C}$. Recordemos que estamos trabajando con un campo K de característica 0. Llamaremos un *carácter no conmutativo* a cualquier preimagen bajo c_ω de un carácter $\chi \in \mathcal{C}$. El estudio del homomorfismo c_ω nos permitirá avanzar en el conocimiento de los caracteres del grupo simétrico.

10.2 El homomorfismo c_ω

Recordemos que, dada $C = \bigoplus_{m \geq 0} C_m$ una biálgebra graduada con coproducto Δ y unidad 1_C, decimos que $c \in C$ es *primitivo* si

$$\Delta(c) = c \otimes 1_C + 1_C \otimes c.$$

Definición

Sea $\omega_n \in KS_n$, $n \in \mathbb{N}$ una sucesión de elementos primitivos y sea

$$\omega = \{\omega_n : n \in N\}.$$

Para cada $q = q_1 ... q_s \in \mathbb{N}^*$, $q \neq \emptyset$ definimos

$$\omega_q = \omega_{q_1} \star ... \star \omega_{q_s}.$$

Defininimos también $\omega_\emptyset = id_\emptyset$. Sea $q = q_1 ... q_s \in \mathbb{N}^*$, $q \neq \emptyset$. Entonces

$$\Delta(w_q) = \Delta(\omega_{q_1}) \star_\otimes ... \star_\otimes \Delta(\omega_{q_s}) =$$

$$= (\omega_{q_1} \otimes 1_\mathcal{P} + 1_\mathcal{P} \otimes \omega_{q_1}) \star_\otimes ... \star_\otimes (1_\mathcal{P} \otimes \omega_{q_s} + \omega_{q_s} \otimes 1_\mathcal{P}) =$$

$$= \sum_{J\subseteq[s]}(\omega_{q_J}\otimes\omega_{q_{CJ}}).$$

Si $q=\emptyset$ se cumple claramente la ecuación anterior.
Definimos la aplicación lineal

$$c_\omega : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C},$$

dada por

$$c_\omega(\varphi)(C_p) = (\varphi, \omega_p)_{\mathcal{P}} \text{ para todo } p\vdash n,\ \varphi\in KS_n \text{ y } n\in\mathbb{N}_0.$$

Observemos que $c_\omega|_{P_0}$ es el único isomorfismo de P_0 en C_0 que manda $1_{\mathcal{P}}$ en $1_{\mathcal{C}}$.

Proposición

c_ω es un homomorfismo graduado de K-álgebras.

Demostración. Es claro que c_ω es graduado. Sólo falta ver que c_ω es un homomorfismo de álgebras. Sean $n,m\in\mathbb{N}_0$, $(\alpha,\beta)\in S_n\times S_m$ y $p\vdash n+m$ de longitud l. Aplicando autodualidad de $\mathcal{P}$ obtenemos que

$$c_\omega(\alpha\star\beta)(C_p) = (\alpha\star\beta,\omega_p)_{\mathcal{P}} =$$
$$= (\alpha\otimes\beta, \Delta(\omega_p))_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$
$$= (\alpha\otimes\beta, \textstyle\sum_{J\subseteq[l]}\omega_{p_J}\otimes\omega_{p_{CJ}})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$
$$= \textstyle\sum_{J\subseteq[l]}(\alpha,\omega_{p_J})_{\mathcal{P}}(\beta,\omega_{p_{CJ}})_{\mathcal{P}} =$$
$$= \textstyle\sum_{J\subseteq[l]} c_\omega(\alpha)(C_{p_J})c_\omega(\beta)(C_{p_{CJ}}).$$

Por otro lado, observemos que, para todo $n\in\mathbb{N}_0$,$\chi\in C\ell_K(S_n)$ y $q\models n$ se tiene que

$$(\chi, ch_q)_{\mathcal{C}} = \tfrac{1}{|S_n|}\textstyle\sum_{x\in C_q}\chi(C_q)q? =$$
$$= \tfrac{q?|C_q|}{n!}\chi(C_q) = \chi(C_q).$$

Por tanto, aplicando la regla del coproducto para ch_p (ver 9.2) y autodualidad de $\mathcal{C}$ obtenemos

$$(c_\omega(\alpha)\bullet c_\omega(\beta))(C_p) = (c_\omega(\alpha)\bullet c_\omega(\beta), ch_p)_{\mathcal{C}} =$$
$$= (c_\omega(\alpha)\otimes c_\omega(\beta), \delta(ch_p))_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} =$$
$$= \textstyle\sum_{J\subseteq[l]}(c_\omega(\alpha), ch_{p_J})_{\mathcal{C}}(c_\omega(\beta), ch_{p_{CJ}})_{\mathcal{C}} =$$
$$= \textstyle\sum_{J\subseteq[l]} c_\omega(\alpha)(C_{p_J})c_\omega(\beta)(C_{p_{CJ}}).$$

Por tanto

$$c_\omega(\alpha\star\beta) = c_\omega(\alpha)\bullet c_\omega(\beta) \text{ para todo } \alpha,\beta\in\cup_{n\in\mathbb{N}_0}S_n.$$

Se sigue por linealidad que c_ω respeta productos. Ya se obsevó anteriormente que $c_\omega(1_{\mathcal{P}}) = 1_{\mathcal{C}}$. Por tanto c_ω respeta unidades. Por tanto c_ω es un homomorfismo de álgebras. $\diamondsuit$

Sea $n\in\mathbb{N}_0$. Denotamos por $id_{[n]} = id_{S_n}$. Al restringir c_ω al álgebra de descenso D_n obtenemos un homomorfismo de K-módulos

$$\overline{c_n} = c_\omega|_{D_n} : D_n \longrightarrow C\ell_K(S_n).$$

Demostraremos que $\overline{c_n}$ coincide con el homomorfismo de Solomon c_n con la hipótesis adicional de que $(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1$ para todo $n\in\mathbb{N}_0$.

Teorema

Supongamos que $(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$\overline{c_n} = c_\omega|_{D_n} = c_n$$

En particular, bajo esta hipóptesis, c_ω es un epimorfismo de K-álgebras.

Demostración. Es claro que $c_\omega|_{D_0} = c_0$. Sea $n \in \mathbb{N}$, $p = p_1...p_s \vdash n$. Sea $\overline{p} = p_1...p_{s-1}$. Por lo tanto

$$c_\omega(\Xi^n)(C_p) = (\Xi^n, \omega_p)_{\mathcal{P}} = (id_{[n]}, \omega_{\overline{p}} \star \omega_{p_s})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\Delta(id_{[n]}), \omega_{\overline{p}} \otimes \omega_{p_s})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (id_k \otimes id_{n-k}, \omega_{\overline{p}} \otimes \omega_{p_s})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n} (id_k, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}} (id_{n-k}, \omega_{p_s})_{\mathcal{P}}.$$

Por tanto

$$c_\omega(\Xi^n)(C_p) = (id_{n-p_s}, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}} (id_{p_s}, \omega_{p_s}).$$

Se sigue entonces por inducción sobre $\ell(p)$ e hipótesis que

$$c_\omega(\Xi_n)(C_p) = (id_{p_1}, \omega_{p_1})_{\mathcal{P}} ... (id_{p_s}, \omega_{p_s})_{\mathcal{P}} = 1.$$

Por tanto $c_\omega(\Xi_n)$ es el carácter trivial de S_n. Esto es

$$c_\omega(\Xi^n) = \xi^n.$$

Por tanto, dada $q = q_1...q_l \models n$, entonces

$$c_\omega(\Xi^q) = c_\omega(\Xi_{q_1} \star ... \star \Xi^{q_l}) =$$

$$= c_\omega(\Xi^{q_1}) \bullet ... \bullet c_\omega(\Xi^{q_l}) =$$

$$= \xi^{q_1} \bullet ... \bullet \xi^{q_l} = \xi^q.$$

Por tanto

$$c_\omega(\Xi^q) = \xi^q = c_n(\Xi^q) \text{ para todo } q \models n.$$

Luego $\overline{c_n} = c_n$. $\diamondsuit$

10.3 c_ω preserva las formas bilineales

Hasta ahora hemos demostrado que c_ω es un homomorfismo graduado de K-álgebras y que c_ω es un epimorfismo si $(\omega_n, id_{S_n})_{\mathcal{P}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Ahora demostraremos que c_ω, restringido a la biálgebra copláctica $\mathcal{Q}$, preserva las formas bilineales $(.,.)_{\mathcal{P}}$ y $(.,.)_{\mathcal{C}}$ con la hipótesis adicional de que $(\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n$ y $\omega_n \in Q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Para ello nos auxiliaremos del siguiente lema, que concierne a la imagen bajo c_ω de los elementos de la forma ω_q, $q \in \mathbb{N}^*$.

Lema

Sea $a_n = (\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}}/n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Para cada $q \in \mathbb{N}^*$ sea $a_q = a_{q_1}...a_{q_{l(q)}}$ si $q \neq \emptyset$ y $a_\emptyset = 1$. Entonces

$$c_\omega(\omega_q) = a_q ch_q \text{ para todo } q \in \mathbb{N}^*.$$

Demostración. El resultado es claro para $q = \emptyset$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$c_\omega(\omega_n)(C_n) = (\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = na_n char_n(C_n) = a_n(n?char_n(C_n)) = a_n ch_n(C_n).$$

Por tanto $c_\omega(\omega_n) = a_n ch_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $q = q_1...q_l \in N^*$, $q \neq \emptyset$. Entonces

$$c_\omega(\omega_q) = c_\omega(\omega_{q_1} \star ... \star \omega_{q_l}) =$$

$$= c_\omega(\omega_{q_1}) \bullet ... \bullet c_\omega(\omega_{q_l}) = a_{q_1}...a_{q_l} ch_{q_1} \bullet ... \bullet ch_{q_l} =$$

$$= a_{q_1}...a_{q_l} ch_{q_1...q_l} = a_q ch_q. \ \diamondsuit$$

En lo que sigue del capítulo supondremos que $(\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n$ y $\omega_n \in Q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Definimos

$$C_n =< \omega_p : p \vdash n >$$

El siguiente lema establece que C_n es un complemento lineal del radical de Q_n con respecto a $(.,.)_{\mathcal{P}}$.

Lema

Sean $n \in \mathbb{N}_0$, $R_n = \mathrm{rad} Q_n$, $K_n = \ker c_\omega|_{Q_n}$ y C_n como anteriormente. Entonces $R_n = K_n$ y

$$Q_n = C_n \oplus R_n.$$

Demostración. Como $(\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, el lema anterior implica que $c_\omega(\omega_q) = ch_q$ para todo $q \models n$. Por tanto $c_\omega \mid_{C_n}$ es sobreyectiva. En particular, $c_\omega|_{Q_n}$ es sobreyectiva. Luego la codimensión de K_n en Q_n es igual a $dim C\ell_K(S_n) = p(n)$, el número de particiones de n. Esto es

$$dim K_n + p(n) = dim Q_n$$

Por otro lado, la codimensión de R_n en Q_n también es igual a $p(n)$ (ver 7.5). Por tanto $dim R_n = dim K_n$. Además es claro que $R_n \subseteq K_n$. Por tanto $R_n = K_n$. Demostraremos que $Q_n = C_n \oplus K_n$. Sea $x \in Q_n$. Escribimos

$$c_\omega(x) = \textstyle\sum_{p \vdash n} t_p ch_p, \ t_p \in K \text{ para todo } p \vdash n.$$

Sea $y = \sum_{p \vdash n} t_p \omega_p$. Entonces $y \in C_n$, y

$$c_\omega(y) = \textstyle\sum_{p \vdash n} t_p c_\omega(\omega_p) = \sum_{p \vdash n} t_p ch_p = c_\omega(x).$$

Por tanto $x - y \in K_n$. Luego

$$Q_n = K_n + C_n.$$

Sólo falta probar que la suma es directa, es decir, que $K_n \cap C_n = \{0\}$. Sea $k = \sum_{p \vdash n} t_p \omega_p \in K_n \cap C_n$. Entonces

$$0 = c_\omega(k) = \textstyle\sum_{p \vdash n} t_p ch_p.$$

Como los elementos ch_p son linealmente independientes, entonces $t_p = 0$ para todo $p \vdash n$. Luego $k = 0$, como se quería probar. $\diamondsuit$

El siguiente teorema resume las propiedades esenciales de c_ω.

Teorema

Supongamos que $(\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n$ y $\omega_n \in Q_n$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es un epimorfismo de biálgebras que respeta las formas bilineales $(.,.)_{\mathcal{P}}$ y $(.,.)_{\mathcal{C}}$. Esto es,

$$(c_\omega(\alpha), c_\omega(\beta))_{\mathcal{C}} = (\alpha, \beta)_{\mathcal{P}} \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathcal{Q}.$$

Demostración. Primero probaremos que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ respeta las formas bilineales. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. El lema anterior establece que $Q_n = C_n \oplus \ker c_\omega|_{\mathcal{Q}}$. Dados $\alpha, \beta \in Q_n$ existen $\alpha_1, \beta_1 \in C_n$, $\alpha_2, \beta_2 \in \ker c_\omega|_{\mathcal{Q}} = \mathrm{rad} Q_n$ tales que

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta = \beta_1 + \beta_2$$

Entonces

$$(c_\omega(\alpha), c_\omega(\beta))_{\mathcal{C}} = (c_\omega(\alpha_1), c_\omega(\beta_1))_{\mathcal{C}}.$$

Dados $p, q \vdash n$, se tiene que

$$(c_\omega(\omega_p), c_\omega(\omega_q))_{\mathcal{C}} = (ch_p, ch_q)_{\mathcal{C}} = ch_p(C_q) = c_\omega(\omega_p)(C_q) = (\omega_p, \omega_q)_{\mathcal{P}}.$$

Por tanto

$$(c_\omega(\alpha_1), c_\omega(\beta_1))_{\mathcal{C}} = (\alpha_1, \beta_1)_{\mathcal{P}} \text{ para todo } \alpha_1, \beta_1 \in C_n.$$

Por otro lado

$$(\alpha, \beta)_{\mathcal{P}} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\alpha_1, \beta_1)_{\mathcal{P}} + (\alpha_1, \beta_2)_{\mathcal{P}} + (\alpha_2, \beta_1)_{\mathcal{P}} + (\alpha_2, \beta_2)_{\mathcal{P}} = (\alpha_1, \beta_1)_{\mathcal{P}},$$

ya que $\alpha_2, \beta_2 \in \mathrm{rad} Q_n$ y $(.,.)_{\mathcal{P}}$ es simétrica. Por tanto

$$(c_\omega(\alpha), c_\omega(\beta))_{\mathcal{C}} = (\alpha, \beta)_{\mathcal{P}} \text{ para todo } \alpha, \beta \in Q_n.$$

Por tanto $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ respeta las formas bilineales. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Por hipótesis y el lema 10.3 se tiene que

$$c_\omega(\omega_q) = ch_q \text{ para todo } q \models n.$$

Como $\{ch_q : q \models n\}$ generan $C\ell_K(S_n)$, se sigue que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es sobreyectiva. Ya se probó que c_ω es un homomorfismo de álgebras. Por tanto $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es un epimorfismo de álgebras. Sólo falta probar que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es un homomorfismo de coálgebras. Es fácil ver que c_ω respeta counidades. Para ver que $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ respeta compultiplicaciones, observemos que la forma $(.,.)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ determinada por $(.,.)_{\mathcal{C}}$ es regular. Para ver esto, observemos que los elementos $ch_p \otimes ch_q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ forman un conjunto generador ortogonal de $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$, ya que para todo $r, s \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$(ch_p \otimes ch_q, ch_r \otimes ch_s)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = (ch_p, ch_r)_{\mathcal{C}}(ch_q, ch_s)_{\mathcal{C}} =$$

$$= p?\delta_{pr} q?\delta_{qs} = p?q?\delta_{(p,q)(r,s)}.$$

Por tanto los elementos $ch_p \otimes ch(q)$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ forman un conjunto generador ortogonal de $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$. En particular la forma $(.,.)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ es regular. Además, como $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ respeta las formas bilineales $(.,.)_{\mathcal{P}}$ y $(.,.)_{\mathcal{Q}}$, entonces $(c_\omega \otimes c_\omega)|_{\mathcal{Q}\otimes\mathcal{Q}}$ respeta las formas bilineales $(.,.)_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}}$ y $(.,.)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$. Sea $\alpha \in \mathcal{Q}$, $f, g \in \mathcal{C}$. Como $c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es sobreyectiva, existen $\rho, \tau \in \mathcal{Q}$ tales que $f = c_\omega(\rho)$, $g = c_\omega(\tau)$. Escribimos $c = c_\omega|_{\mathcal{Q}}$. Aplicamos autodualidad de $(.,.)_{\mathcal{Q}}$ y $(.,.)_{\mathcal{C}}$ y el hecho de que $c \otimes c$ respeta las formas bilineales para obtener

$$([(c\otimes c)\circ\Delta](\alpha), f\otimes g)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = ((c\otimes c)(\Delta(\alpha)), (c\otimes c)(\rho\otimes\tau))_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} =$$

$$= (\Delta(\alpha), \rho\otimes\tau)_{\mathcal{Q}\otimes\mathcal{Q}} = (\alpha, \rho\star\tau)_{\mathcal{Q}} = (c(\alpha), c(\rho\star\tau))_{\mathcal{C}} =$$

$$= (c(\alpha), c(\rho)\bullet c(\tau))_{\mathcal{C}} = (\delta(c(\alpha)), c(\rho)\otimes c(\tau))_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}} = ((\delta\circ c)(\alpha), f\otimes g)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}.$$

Como $(.,.)_{\mathcal{C}\otimes\mathcal{C}}$ es regular, se sigue que $[(c\otimes c)\circ\Delta](\alpha) = (\delta\circ c)(\alpha)$. Por tanto c respeta comultiplicaciones, luego c es un homomorfismo de coálgebras. Por tanto $c = c_\omega|_{\mathcal{Q}}$ es un epimorfismo de biálgebras. $\diamondsuit$

10.4 Una elección adecuada para ω

En esta sección definiremos una sucesión de elementos primitivos

$$\omega = \{\omega_n : n\in\mathbb{N}\}$$

tal que, para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\omega_n \in D_n,\ (\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n \text{ y } (\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1.$$

Sea $n\in\mathbb{N}$ fijo. Recordemos que el *conjunto de descensos* de $\pi\in S_n$ está dado por

$$Des(\pi) = \{i\in[n-1] : \pi(i) > \pi(i+1)\},$$

y que los elementos

$$\Delta^J = \textstyle\sum_{Des(\pi)=J} \pi,\ J\subseteq[n-1]$$

constituyen una base de D_n.
Observemos que, dado $k\in[n-1]\cup\{0\}$, se tiene

$$Z^{(n-k).1^k} = \textstyle\sum_{\pi\in TYE^{F((n-k).1^k)}} \pi = \Delta^{[k]}.$$

Por tanto $Z^{(n-k).1^k}\in D_n$. Sea

$$\omega_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k Z^{(n-k).1^k}.$$

Entonces $\omega_n\in D_n$.
En 7.4 se demuestran las siguientes relaciones, válidas para todo $k,m,n\in\mathbb{N}$

$$Z^{1^k}\star Z^m = Z^{m.1^k} + Z^{(m+1).1^{k-1}}, \tag{10.1}$$

$$c_n = \sum_{s=0}^{n}(-1)^s Z^{1^s}\star Z^{n-s} = 0. \tag{10.2}$$

Definimos también $c_0 = id_\emptyset = 1_{\mathcal{P}}$.
Estas ecuaciones nos serán útiles en la prueba del siguiente

Lema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{1^k} \star Z^{n-k}.$$

Demostración. Sea $d_n = \omega_n - id_{[n]}$. Entonces

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k((n-k+1)-(n-k))Z^{(n-k).1^k}.$$

Aplicamos la ecuación (10.1) para obtener

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k+1)(Z^{1^k} \star Z^{n-k} - Z^{(n-k+1).1^{k-1}})$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{(n-k).1^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{1^k} \star Z^{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k Z^{1^k} \star Z^{n-k} +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(n-(k-1))Z^{(n-(k-1)).1^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{(n-k).1^k}.$$

Podemos escribir el tercer sumando como $\sum_{r=0}^{n-2}(-1)^r(n-r)Z^{n-r}.1^r$. Por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(n-(k-1))Z^{(n-(k-1)).1^{k-1}} - \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{(n-k).1^k} =$$

$$= nZ^n + (-1)^n Z^{1^n}.$$

Por otro lado, la ecuación (10.2) implica que

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k Z^{1^k} \star Z^{n-k} = (-1)^{n-1}Z^{1^n} - Z^n.$$

Por lo tanto

$$d_n = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{1^k} \star Z^{n-k} + (-1)^{n-1}Z^{1^n} - Z^n + nZ^n + (-1)^n Z^{1^n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{1^k} \star Z^{n-k} - Z^n.$$

Como $Z^n = id_{[n]}$ entonces

$$\omega_n = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-k)Z^{1^k} \star Z^{n-k}. \ \diamondsuit$$

Ahora veamos que ω cumple con el resto de las propiedades requeridas.

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces ω_n es primitivo y

$$\omega_n \in Q_n,\ (\omega_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = n,\ (\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1.$$

Demostración. Ya se observó anteriormente que $\omega_n \in D_n \subseteq Q_n$. Observemos también que $(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}}$ es el coeficiente de $id_{[n]}$ en ω_n. Luego $(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1$.
Sea $p \vdash n$. Recordemos la fórmula

$$\Delta(Z^p) = \sum_{r \leq^* p} Z^{p \setminus r} \otimes Z^r,$$

donde la suma corre por todas las particiones r tales que $F(r) \subseteq F(p)$ (ver 7.3). Por tanto, para cada $k \in [n] \cup \{0\}$, se tiene que

$$\Delta(Z^{1^k}) = \sum_{r\leq^* 1^k} Z^{1^k\setminus r}\otimes Z^r = \sum_{j=0}^k Z^{1^{k-j}}\otimes Z^{1^j} = \sum_{j=0}^k Z^{1^j}\otimes Z^{1^{k-j}}.$$

Asimismo

$$\Delta(Z^{n-k}) = \sum_{r\leq^* n-k} Z^{(n-k)\setminus r}\otimes Z^r = \sum_{j=0}^{n-k} Z^j\otimes Z^{n-k-j}.$$

Aplicamos el lema anterior para obtener

$$\Delta(\omega_n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k(n-k)\Delta(Z^{1^k}\star Z^{n-k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k(n-k)\Delta(Z^{1^k})\star_\otimes \Delta(Z^{n-k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k(n-k)(\sum_{i=0}^k Z^{1^i}\otimes Z^{1^{k-i}})\star_\otimes(\sum_{j=0}^{n-k} Z^j\otimes Z^{n-k-j}) =$$

$$= \sum_{k=0}^n\sum_{i=0}^k\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^k(n-k)(Z^{1^i}\star Z^j)\otimes(Z^{1^{k-i}}\star Z^{n-k-j}) =$$

$$= \sum_{i+j+k=n}(-1)^k(n-k)(Z^{1^i}\star Z^j)\otimes(Z^{1^{k-i}}\star Z^{n-k-j}).$$

Por otro lado, aplicamos la ecuación (9.2) para obtener

$$\omega_n\otimes 1_{\mathcal{P}} + 1_{\mathcal{P}}\otimes\omega_n = \sum_{l=0}^n(\omega_l\otimes c_{n-l} + c_l\otimes\omega_{n-l}) =$$

$$= \sum_{l=0}^n\sum_{i=0}^l\sum_{k=i}^{n-l+i}(-1)^k(n-k)(Z^{1^i}\star Z^{l-i})\otimes(Z^{1^{k-i}}\star Z^{n-k-l+i}) =$$

$$= \sum_{l=0}^n[\sum_{i=0}^l(-1)^i(l-i)(Z^{1^i}\star Z^{l-i})\otimes\sum_{m=0}^{n-l}(-1)^m(Z^{1^m}\star Z^{n-l-m})]+$$

$$+\sum_{l=0}^n[\sum_{i=0}^l(-1)^i(Z^{1^i}\star Z^{l-i})\otimes\sum_{m=0}^{n-l}(-1)^m(n-l-m)(Z^{1^m}\star Z^{n-l-m})] =$$

$$= \sum_{l=0}^n\sum_{i=0}^l(-1)^{m+i}(n-m-i)(Z^{1^i}\star Z^{l-i})\otimes(Z^{1^m}\star Z^{n-l-m})$$

Hacemos $j = l-i$, $k = m+i$ para obtener

$$\omega_n\otimes 1_{\mathcal{P}} + 1_{\mathcal{P}}\otimes\omega_n = \sum_{i+j+k=n}(-1)^k(n-k)(Z^{1^i}\star Z^j)\otimes(Z^{1^{k-i}}\star Z^{n-k-j}.$$

Por tanto

$$\Delta(\omega_n) = \omega_n\otimes 1_{\mathcal{P}} + 1_{\mathcal{P}}\otimes\omega_n.$$

Luego ω_n es primitivo.

Sólo falta probar que $(\omega_n,\omega_n)_{\mathcal{P}} = n$. Aplicamos el lema 10.4 y autodualidad de $\mathcal{P}$ para obtener

$$(\omega_n,\omega_n)_{\mathcal{P}} = \sum_{k=0}^n(-1)^k(n-k)(\omega_n, Z^{1^k}\star Z^{n-k})_{\mathcal{P}} =$$

$$= \sum_{k=0}^n(-1)^k(n-k)(\Delta(\omega_n), Z^{1^k}\otimes Z^{n-k})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= \sum_{k=0}^n(-1)^k(n-k)(\omega_n\otimes 1_{\mathcal{P}} + 1_{\mathcal{P}}\otimes\omega_n, Z^{1^k}\otimes Z^{n-k})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= \sum_{k=0}^n(-1)^k(n-k)[(\omega_n, Z^{1^k})_{\mathcal{P}}(1_{\mathcal{P}}, Z^{n-k})_{\mathcal{P}} + (1_{\mathcal{P}}, Z^{1^k})_{\mathcal{P}}(\omega_n, Z^{n-k})_{\mathcal{P}}].$$

Cada uno de los sumandos anteriores es 0 a menos que $k=0$. Por tanto

$$(\omega_n,\omega_n)_{\mathcal{P}} = n(1_{\mathcal{P}}, Z^{\emptyset})_{\mathcal{P}}(\omega_n, Z^n)_{\mathcal{P}} = n(1_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{P}})_{\mathcal{P}}(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = n. \ \diamondsuit$$

Ahora podemos aplicar el teorema 10.3 a la sucesión ω para obtener un epimorfismo de biálgebras

$$c = c_\omega : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{C},$$

$$c(\varphi)(C_p) = (\varphi, \omega_p)_{\mathcal{P}} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0,\ \varphi \in KS_n,\ p \vdash n.$$

El epimomorfismo c se conoce como el *epimorfismo de Jölenbeck*. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Como $(\omega_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1$ entonces $c\mid_{D_n} = c_n$, el epimorfismo de Solomon (ver 10.2). El siguiente teorema implica que todo homomorfismo de la forma c_Π, con las hipótesis adecuadas sobre Π, coincide con el epimorfismo de Jölenbeck c en $\mathcal{Q}$.

Teorema

Sea $\Pi = \{\Pi_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de elementos primitivos en $\mathcal{P}$ tales que $\Pi_n \in Q_n$, $(\Pi_n, \Pi_n)_{\mathcal{P}} = n$ y $(\Pi_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$c_\Pi|_{\mathcal{Q}} = c|_{\mathcal{Q}}.$$

Demostración. Es claro que $c|_{Q_0} = c_\Pi|_{Q_0}$. Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostramos en 10.3 que

$$\ker c|_{Q_n} = \ker c_\Pi|_{Q_n} = \text{rad } Q_n, \text{ y que}$$

$$Q_n = C'_n \oplus \text{rad } Q_n,$$

donde $C'_n = <\Pi_p : p \vdash n>$. El lema 10.3 implica que

$$c_\Pi(\Pi_q) = ch_q \text{ para todo } q \models n.$$

Sea $p = p_1 ... p_s \vdash n$ con $s > 1$. Sea $\overline{p} = p_1 ... p_{s-1}$. Como Π_n es primitivo entonces

$$c(\Pi_n)(C_p) = (\Pi_n, \omega_p)_{\mathcal{P}} = (\Pi_n, \omega_{\overline{p}} \star \omega_{p_s})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\Delta(\Pi_n), \omega_{\overline{p}} \otimes \omega_{p_s})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= (\Pi_n, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}} (1_{\mathcal{P}}, \omega_{p_s}) + (1_{\mathcal{P}}, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}} (\Pi_n, \omega_{p_s})_{\mathcal{P}} = 0 = ch_n(C_p).$$

Por otro lado, aplicamos el lema 10.4 para obtener

$$c(\Pi_n)(C_n) = (\Pi_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k)(\Pi_n, Z^{1_k} \star Z^{n-k})_{\mathcal{P}} =$$

$$= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} (n-k)[(\Pi_n, Z^{1^k})_{\mathcal{P}} (1_{\mathcal{P}}, Z^{n-k})_{\mathcal{P}} + (1_{\mathcal{P}}, Z^{1^k})_{\mathcal{P}} (\Pi_n, Z^{n-k})_{\mathcal{P}}].$$

Todos los sumandos son 0 excepto para $k = 0$. Por tanto

$$c(\Pi_n)(C_n) = n(\Pi_n, Z^n)_{\mathcal{P}} = n(\Pi_n, id_{[n]})_{\mathcal{P}} = n = ch_n(C_n).$$

Por tanto $c(\Pi_n) = ch_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $c(\Pi_q) = ch_q$ para todo $q \in \mathbb{N}^*$. Por tanto

$$c|_{C'_n} = c_\Pi|_{C'_n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Luego $c|_{\mathcal{Q}} = c_\Pi|_{\mathcal{Q}}$. $\diamondsuit$

Capítulo 11

Aplicaciones a la teoría clásica de caracteres del grupo simétrico

11.1 Definiciones preliminares

En esta sección, con la cual terminamos este trabajo, desarrollaremos algunas aplicaciones de la teoría no conmutativa que hemos trabajado a la teoría clásica de caracteres del grupo simétrico. Encontraremos un conjunto de caracteres no conmutativos que corresponden a los caracteres irreducibles de S_n, y demostraremos que las sumas de clases coplácticas $\sum Y \in \mathcal{Q}$, donde $Y \subseteq S_n$ es unión de clases coplácticas son caracteres no conmutativos, y daremos algunos ejemplos. Primero daremos algunas definiciones preliminares.

Sea G un grupo. Un $K[G]$- *módulo* es un $K-$ módulo A con una acción lineal de G en A. Un $K[G]$- *submódulo* de A es un $K-$ submódulo B de A tal que B es invariante bajo la acción de G. Decimos que A es *irreducible* si no existen $K[G]$- submódulos de A no triviales, es decir, distintos de $\{0\}$ y de A. Tenemos un homomorfismo de grupos

$$h : G \longrightarrow GL_K(A),$$

$$g \mapsto (a \mapsto g.a) \text{ para todo } g \in G,\ a \in A.$$

El *carácter asociado a* A está dado por

$$\chi_A : G \longrightarrow K,$$

$$g \mapsto tr(h(g)) \text{ para todo } g \in G.$$

Decimos que χ_A es *irreducible* si A es irreducible.

Ejemplo

Sea G un grupo. El $K[G]$- *módulo regular* (denotado por $K[G]$) es el K- módulo libre generado por G (denotado por KG) con acción lineal

$$g.(\textstyle\sum_{x\in G} c_x x) = \sum_{x\in G} c_x (g.x) \text{ para todo } g \in G,\ y = \sum_{x\in G} c_x x \in KG.$$

Es decir, la acción lineal de G en KG es la extensión lineal del producto en G.

11.2 Caracteres irreducibles

En el resto de este capítulo supondremos que $K = \mathbb{C}$. Recordemos algo de teoría de representaciones del grupo simétrico. Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $G = S_n$. Podemos descomponer al $K[S_n]$- módulo regular en una suma directa

$$K[S_n] = \bigoplus_{p \vdash n} M_p^{\alpha_p},$$

donde los M_p son los $K[S_n]$- submódulos irreducibles de $K[S_n]$ y el superíndice $\alpha_p \in \mathbb{N}$ indica la multiplicidad de M_p en esta suma. Más adelante probaremos que $\alpha^p = |TYE^p|$ para todo $p \vdash n$.
En términos de caracteres, esto implica que

$$\chi : S_n \to \mathbb{C}$$

es un carácter correspondiente a un submódulo de $K[S_n]$ si y sólo si existen enteros no negativos $m_p \leq \alpha_p$ para todo $p \vdash n$, tales que

$$\chi = \sum_{p \vdash n} m_p \chi^p,$$

donde χ^p es el caracter irreducible asociado al módulo M_p para todo $p \vdash n$ (ver [3]).
Más aún, el $K[S_n]$- módulo M es irreducible si y sólo si existe $p \vdash n$ tal que M es isomorfo a M_p como $K[S_n]$- módulos. Luego, todo $K[S_n]$- módulo M es isomorfo a una suma directa

$$M \cong_{K[S_n]} \bigoplus_{p \vdash n} M_p^{n_p}, \text{ con } n_p \in \mathbb{N}_0 \text{ para todo } p \vdash n.$$

Además, M es isomorfo a un $K[S_n]$- submódulo de $K[S_n]$ si y sólo si los enteros no negativos n_p que aparecen en la descomposición anterior satisfacen que $n_p \leq \alpha_p$ para todo $p \vdash n$. El carácter correspondiente a M es $\chi_M = \sum_{p \vdash n} n_p \chi^p$.
Por ejemplo, sea $M = KS_n$, entonces χ_M es el caracter de la representación regular. Como los χ_p forman una base ortonormal de KS_n (ver [3]) podemos escribir

$$\chi_{KS_n} = \sum_{p \vdash n} (\chi_{KS_n}, \chi^p)_{\mathcal{C}}\ \chi^p.$$

Luego

$$\chi = \chi_M \text{ para } M \text{ un } K[S_n]\text{- submódulo de } K[S_n] \text{ si y sólo si}$$

$$(\chi, \chi^p)_{\mathcal{C}} \leq (\chi_{KS_n}, \chi^p)_{\mathcal{C}} \text{ para todo } p \vdash n.$$

El siguiente lema caracteriza el valor de $(\Xi^q, Z^p)_{\mathcal{P}}$ para todo $p, q \vdash n$, $n \in \mathbb{N}_0$ en términos del orden lexicográfico en $\mathbb{N}^*$, que denotaremos por $\leq_{lex}$. Antes recordemos las siguientes relaciones de ortogonalidad, válidas para todo $n \in \mathbb{N}_0$ (ver 6.3)

$$(Z^p, Z^q) = \delta_{pq} \forall p, q \vdash n, n \in N \tag{11.1}$$

Lema

Sea $n \in \mathbb{N}_0$,$p, q \vdash n$. Entonces

(i) $(\Xi^p, Z^p)_{\mathcal{P}} = 1$.
(ii) $(\Xi^q, Z^p)_{\mathcal{P}} \neq 0 \Rightarrow q \leq_{lex} p$.

Demostración. (i) Procederemos por inducción sobre $l = l(p)$. Si $l = 0$ ó $l = 1$ entonces $Z^p = \Xi^p = id_{S_n}$. Por tanto, en este caso

$$(Z^p, \Xi^p)_{\mathcal{P}} = (id_{S_n}, id_{S_n})_{\mathcal{P}} = 1.$$

Supongamos que $l > 1$ y el resultado válido para todas las particiones de longitud $< l$. Dado $r = r_1 ... r_s \in \mathbb{N}^*$ de longitud > 1, sea $\widehat{r} = r_2 ... r_s$. Observemos que si $r \in \mathbb{N}$ entonces $Z^r = \Xi^r = id_r$. Aplicamos autodualidad de $\mathcal{P}$ y la fórmula de la comultiplicación para Z^p (ver 7.3) para obtener

$$(\Xi^p, Z^p)_{\mathcal{P}} = (\Xi^{p_1} \otimes \Xi^{\widehat{p}}, \Delta(Z^p))_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = \sum_{r \leq^* p} (\Xi^{p_1}, Z^r)_{\mathcal{P}} (\Xi^{\widehat{p}}, Z^{p\backslash r})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (Z^{p_1}, Z^{p_1})_{\mathcal{P}} (\Xi^{\widehat{p}}, Z^{p-p_1})_{\mathcal{P}} = (\Xi^{\widehat{p}}, Z^{\widehat{p}})_{\mathcal{P}}.$$

Por hipótesis de inducción se tiene que $(\Xi^{\widehat{p}}, Z^{\widehat{p}})_{\mathcal{P}} = 1$. Por tanto

$$(\Xi^p, Z^p)_{\mathcal{P}} = 1.$$

(ii) Procederemos por inducción sobre $l = l(q)$. Si $l = 1$ entonces $q = n$ y

$$(\Xi^n, Z^p)_{\mathcal{P}} = (Z^n, Z^p)_{\mathcal{P}} = 0 \text{ a menos que } p = n.$$

Si $p = n$ entonces claramente $n \leq_{lex} p$. Por tanto está probada la base de inducción. Supongamos que $l > 1$ y el resultado válido para toda partición r de longitud $< l$, es decir

$$(\Xi^r, Z^p) \neq 0 \text{ implica } r \leq_{lex} p \text{ para todo } r, p \text{ particiones con } l(r) < l.$$

Aplicamos autodualidad de $\mathcal{P}$ para obtener

$$(\Xi^q, Z^p)_{\mathcal{P}} = (\Xi^{q_1} \star \Xi^{\widehat{q}}, Z^p)_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\Xi^{q_1} \otimes \Xi^{\widehat{q}}, \Delta(Z^p))_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= \sum_{r \leq^* p} (\Xi^{q_1} \otimes \Xi^{\widehat{q}}, Z^r \otimes Z^{p\backslash r})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} =$$

$$= \sum_{r \leq^* p} (\Xi^{q_1}, Z^r)_{\mathcal{P}} (\Xi^{\widehat{q}}, Z^{p\backslash r})_{\mathcal{P}}.$$

Por lo tanto $(\Xi^q, Z^p) = 0$ a menos que $q_1 \leq^* p$, condición equivalente a $q_1 \leq p_1$. Por tanto

$$(\Xi^q, Z^p)_{\mathcal{P}} \neq 0 \text{ implica } q_1 < p_1 \text{ ó } q_1 = p_1.$$

Si $q_1 < p_1$ entonces $q \leq_{lex} p$. Si $q_1 = p_1$ entonces

$$(\Xi^q, Z^p)_{\mathcal{P}} = (\Xi^{q_1}, Z^{q_1})_{\mathcal{P}} (\Xi^{\widehat{q}}, Z^{\widehat{p}})_{\mathcal{P}} = (\Xi^{\widehat{q}}, Z^{\widehat{p}})_{\mathcal{P}}.$$

Por la hipótesis de inducción, $(\Xi^{\widehat{q}}, Z^{\widehat{p}})_{\mathcal{P}} \neq 0$ implica $\widehat{q} \leq_{lex} \widehat{p}$, por tanto $q \leq_{lex} p$. $\diamondsuit$

Ahora nos proponemos probar que los elementos Z^p, $p \vdash n$ son caracteres no conmutativos de S_n para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Dado $n \in \mathbb{N}_0$, $p \vdash n$ sea

$$\zeta^p = c(Z_p).$$

Queremos ver que los elementos ζ^p son caracteres. El siguiente teorema implica que, de hecho, los ζ^p *son* los caracteres irreducibles de S_n. Antes definiremos el grado de un carácter.

Definición

Sean $n \in \mathbb{N}_0$, χ un carácter de S_n. Definimos el *grado* de χ como

$$gr(\chi) = \chi(id_{[n]})$$

Observemos que, si M es un $\mathbb{C}[S_n]$- módulo de dimensión m, entonces

$$m = tr[id_{[n]}] = \chi_M(id_{[n]}) = gr(\chi_M),$$

donde

$$[\pi] : M \longrightarrow M$$

$$x \mapsto \pi.x \text{ para todo } x \in M$$

para todo $\pi \in S_n$. Es decir, $[\pi]$ es la aplicación lineal "multiplicación por π" para todo $\pi \in S_n$.
En particular, el grado de un carácter de S_n es un entero positivo.

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces los elementos ζ^p, $p \vdash n$ constituyen el conjunto de caracteres irreducibles de S_n. En particular, $\{\zeta^p : p \vdash n\}$ constituye una base ortonormal de $C\ell_{\mathbb{C}}(S_n)$. Más aún, el grado de ζ^p es $tye^p = |TYE^p|$.

Demostración. Las relaciones de ortogonalidad (11.1) implican que

$$(\zeta^p, \zeta^q)_{\mathcal{C}} = (c_\omega(Z^p), c_\omega(Z^q))_{\mathcal{C}} = (Z^p, Z^q)_{\mathcal{P}} = \delta_{pq}, \text{ para todo } p, q \vdash n.$$

En particular, los elementos $\{\zeta^p : p \vdash n\}$ constituyen un conjunto linealmente independiente (de hecho, ortonormal) de cardinalidad $|\{p \in \mathbb{N}^* : p \vdash n\}| = |dim(C\ell_{\mathbb{C}}(S_n))|$. De aquí se sigue que los ζ^p constituyen una base ortonormal de $C\ell_{\mathbb{C}}(S_n)$. Por lo tanto, sólo resta probar que los ζ^p son caracteres irreducibles de S_n y que $gr(\zeta^p) = tye^p$.
Escribimos los caracteres de Young de S_n en términos de la base $\{\zeta^p\}_{p \vdash n}$ como

$$\xi^q = \sum_{p \vdash n} k_{qp} \zeta^p \text{ para todo } q \vdash n.$$

Se sigue que

$$k_{qp} = (\xi^q, \zeta^p)_{\mathcal{C}} = (c_\omega(\Xi^q), c_\omega(Z^p))_{\mathcal{C}} = (\Xi^q, Z^p)_{\mathcal{P}}.$$

Como el orden lexicográfico es un orden total en $\mathbb{N}^*$, podemos ordenar las particiones de n en la forma $p_1, ..., p_m$, donde $m = |\{p \in \mathbb{N}^* : p \vdash n\}|$, y

$$p_1 \leq_{lex} ... \leq_{lex} p_m.$$

Ordenamos los coeficientes k_{qp} en una matriz $A = (a_{ij})$ de tamaño $m \times m$, donde

$$a_{i,j} = k_{p_i, p_j} \text{ para todo } i, j \in [m] \times [m].$$

Observemos que, para cada $i, j \in [m]$, si $i > j$ entonces $p_i >_{lex} p_j$. El lema anterior implica que $k_{p_i p_j} = (\Xi^{p_i}, Z^{p_j})_{\mathcal{P}} = 0$. Por tanto A es una matriz triangular superior y los elementos de la diagonal son

$$k_{p_i p_i} = (\Xi^{p_i}, Z^{p_i})_{\mathcal{P}} = 1.$$

Por tanto $\det(A) = 1$ Luego A es invertible sobre $\mathbb{Z}$ y por tanto podemos escribir a los elementos ζ^p como combinación lineal entera de caracteres de Young. Como los ξ^q son caracteres, se sigue que son combinación lineal entera de caracteres irreducibles de S_n. Por tanto podemos escribir, para todo $p \vdash n$,

$$\zeta^p = \sum_{q \vdash n} m_{pq} \chi^q, \text{ con } m_{pq} \in \mathbb{Z},$$

donde $\{\chi^q : q \vdash n\}$ son los caracteres irreducibles de S_n. Como $(\zeta^p, \zeta^p)_{\mathcal{C}} = 1$ para todo $p \vdash n$ entonces

$$1 = \sum_{q \vdash n} \sum_{r \vdash n} m_{pq} m_{pr} (\chi^q, \chi^r)_{\mathcal{C}} = \sum_{q \vdash n} m_{pq}^2 (\chi^q, \chi^q)_{\mathcal{C}} = \sum_{q \vdash n} m_{pq}^2.$$

Por tanto existen $\epsilon \in \{-1, 1\}$ y χ carácter irreducible de S_n tales que

$$\zeta^p = \epsilon \chi.$$

Observemos que, por definición,

$$\zeta^p(id_{[n]}) = c_\omega(Z^p)(id_{[n]}) = (Z^p, \omega_{1^n})_{\mathcal{P}} = (Z^p, \Xi^{1^n})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (Z^p, \sum_{\pi \in S_n} \pi)_{\mathcal{P}} = (\sum_{\sigma \in TYE^p} \sigma, \sum_{\pi \in S_n} \pi)_{\mathcal{P}} = tye^p.$$

Por tanto $\epsilon\chi(id_{[n]}) > 0$. Como χ es un carácter entonces $\chi(id_{[n]}) = gr(\chi) > 0$. Por tanto $\epsilon > 0$. Luego $\epsilon = 1$, por tanto ζ^p es un carácter irreducible para todo $p \vdash n$, y

$$gr(\zeta^p) = \zeta^p(id_{[n]}) = tye^p. \ \diamondsuit$$

Como observamos al inicio de este capítulo , el teorema anterior implica que podemos escribir

$$K[S_n] = \bigoplus_{p \vdash n} M_p^{tye^p},$$

donde M_p es el $K[S_n]$- módulo irreducible asociado al carácter ζ^p. Además

$$\chi : S_n \longrightarrow K$$

es el carácter correspondiente a un submódulo de $K[S_n]$ si y sólo si existen enteros no negativos $n_p \leq tye^p$, para todo $p \vdash n$, tales que

$$\chi = \sum_{p \vdash n} n_p \zeta^p.$$

A continuación demostraremos que los generadores del álgebra copláctica son caracteres no conmutativos.

Teorema

Sea $n \in \mathbb{N}_0$, $Y \subseteq S_n$ tal que Y es unión de clases coplácticas. Entonces existe un submódulo M de $K[S_n]$ tal que $c(\sum Y)$ es el carácter correspondiente a M. Más aún, $gr(c(\sum Y)) = |Y|$. Además podemos escribir

$$c(\sum Y) = \sum_{p \vdash n} m_p \zeta^p,$$

donde $m_p = |Y^{-1} \cap TYE^p|$ para todo $p \vdash n$.
Recíprocamente, dado M un $K[S_n]$- submódulo del módulo regular existe $Y \subseteq S_n$ tal que Y es unión de clases coplácticas, y

$$c(\sum Y) = \chi_M,$$

el carácter correspondiente a M.

Demostración. Como $\{\zeta^p : p \vdash n\}$ es una base ortonormal de $C\ell_K(S_n)$, podemos escribir

$$c(\sum Y) = \sum_{p\vdash n}(c(\sum Y), \zeta^p)_{\mathcal{C}}\ \zeta^p.$$

Sea $p \vdash n$. Entonces

$$(c(\sum Y), \zeta^p)_{\mathcal{C}} = (c(\sum Y), c(Z^p))_{\mathcal{C}} = (\sum Y, Z^p)_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\sum_{\sigma\in Y} \sigma, \sum_{\tau\in TYE^p} \tau)_{\mathcal{P}} = |TYE^p \cap Y^{-1}|.$$

De donde $0 \leq (c(\sum Y), \zeta^p)_{\mathcal{C}} \leq tye^p$ para todo $p \vdash n$. Por tanto $c(\sum Y)$ es el carácter correspondiente a un submódulo de $K[S_n]$. Se puede probar inductivamente que

$$\omega_{1^n} = \sum_{\pi\in S_n} \pi = \sum S_n.$$

Por tanto

$$gr(c(\sum Y)) = c(\sum Y)(id_{[n]}) = (\sum Y, \omega_{1^n})_{\mathcal{P}} = (\sum Y, \sum S_n)_{\mathcal{P}} = |Y|.$$

Recíprocamente, dado M un $K[S_n]-$ submódulo de $K[S_n]$ y $p \vdash n$, el coeficiente

$$m_p = (\chi_M, \zeta^p) \leq (\chi_{KS_n}, \zeta^p) = tye^p.$$

En 6.3 vemos que hay tye^p clases coplácticas en la celda de Green ς^p. Sea $Y_p \subseteq S_n$ tal que Y_p es unión de exactamente m_p clases coplácticas en la celda de Green ς^p. Dado $q \vdash n$, tenemos

$$(c(\sum Y_p), \zeta^q)_{\mathcal{C}} = |TYE^q \cap Y_p^{-1}| = 0 \text{ a menos que } p = q.$$

Si $p = q$ entonces

$$(c(\sum Y_p), \zeta^p)_{\mathcal{C}} = |TYE^p \cap Y_p^{-1}| = m_p.$$

Sea

$$Y = \cup_{p\vdash n} Y_p.$$

Entonces $Y \subseteq S_n$ es unión de clases coplácticas y

$$(c(\sum Y), \zeta_p)_{\mathcal{C}} = \sum_{q\vdash n}(c(\sum Y_q), \zeta^p)_{\mathcal{C}} = (c(\sum Y_p), \zeta^p)_{\mathcal{C}} = m_p$$

$$\text{para todo } p \vdash n.$$

Por tanto

$$c(\sum Y) = \sum_{p\vdash n}(c(\sum Y), \zeta^p)_{\mathcal{C}}\zeta^p = \sum_{p\vdash n} m_p\zeta^p = \chi_M,$$

como se quería demostrar. $\diamondsuit$

Como caso particular del teorema anterior, sea $F \approx F(p) \setminus F(q)$ un marco de orden n. Sea

$$Y = TYE^F = TYE^{p\setminus q}.$$

Entonces $Y \subseteq S_n$ es unión de clases coplácticas (ver 7.5) y, por tanto

$$\zeta^F = c(\sum Y) = c(Z^F)$$

es un carácter de S_n. Decimos que ζ^F es un *carácter sesgado*. Denotamos por $\zeta^{p\setminus q} = \zeta^F$.

11.3 Ejemplos de caracteres no conmutativos

Concluiremos este capítulo con algunos casos particulares de caracteres sesgados, siendo esta la última aplicación que veremos por cuestiones de alcance de este trabajo, pero dejando claro que podemos seguir aplicando la teoría no conmutativa desarrollada a la teoría clásica de caracteres del grupo simétrico.

Ejemplos

Sea $n \in \mathbb{N}_0$.
(i) Sea $Y = S_n$. Entonces $Y = TYE^{HS_n}$ y

$$\sum Y = \sum_{\sigma\in\tau} \sum A_\sigma,$$

donde τ es un conjunto de representantes de las clases coplácticas de S_n. Por tanto

$$\sum Y = \sum_{p\vdash n} \sum_{A\subseteq\varsigma^p} \sum A,$$

donde la suma anterior se toma sobre las tye^p clases coplácticas en la celda de Green ς^p para todo $p \vdash n$. Luego el carácter correspondiente es

$$\zeta^{HS_n} = c(\sum Y) = \sum_{p\vdash n} tye^p\zeta^p = \chi_{KS_n},$$

el carácter del módulo regular.

(ii) Sea $Y = \{id_{[n]}\} = TYE^n$. Entonces $\sum Y = id_{[n]} = Z^n$ y $\zeta^n = c(id_{[n]})$ es un caracter lineal de S_n (es decir, de grado 1).

Afirmación
ζ^n es el carácter trivial de S_n, es decir,

$$\zeta^n(C_p) = 1 \text{ para todo } p \vdash n.$$

Prueba. Como $(id_{[n]}, \sigma)_{\mathcal{P}} = \delta_{id_{[n]}\sigma} \forall\sigma \in S_n$, el valor de $(id_{[n]}, \omega_q)_{\mathcal{P}}$ es el coeficiente de $id_{[n]}$ en ω_q para todo $q \vdash n$.
Sea $p = p_1...p_l \vdash n$. Lo demostraremos por inducción sobre $l = l(p)$. Para $l(p) = 0$ o $l(p) = 1$, el coeficiente de $id_{[n]}$ en ω_n es 1, por definición. Supongamos que $l > 1$ y el resultado es válido para toda partición q con $l(q) < l$. Aplicamos autodualidad de $\mathcal{P}$ y la regla de la comultiplicación para $id_{[n]} = Z^n$ para obtener (recordemos que $\overline{p} = p_1...p_{l-1}$)

$$\zeta^n(C_p) = c(id_{[n]})(C_p) = (id_{[n]}, \omega_p)_{\mathcal{P}} = (id_{[n]}, \omega_{\overline{p}} \star \omega_{p_l})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\Delta(id_{[n]}), \omega_{\overline{p}} \otimes \omega_{p_l})_{\mathcal{P}\otimes\mathcal{P}} = \sum_{k=0}^{n} (id_{[k]}, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}} (id_{[n-k]}, \omega_{p_l})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (id_{[n-p_l]}, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}} (id_{[p_l]}, \omega_{p_l})_{\mathcal{P}}.$$

El resultado se sigue por la hipótesis de inducción. ∇

(iii) Sea $Y = \{\rho_n\}$, donde $\rho_n = n(n-1)...21$. Entonces $Y = TYE^{1^n}$, y

$$sgn_n = \zeta^{1^n} = c(\sum Y) = c(\rho_n)$$

es un carácter lineal que llamamos el *signo* de S_n. Recordemos que una permutación $\pi \in S_n$ es *par* si π es un producto de un número par de transposiciones e *impar* si es el producto de un número impar de transposiciones. Un r-ciclo (es decir, un ciclo de longitud r) es par si r es impar e impar si r es par. Por tanto, dada $q = q_1...q_l \models n$, $\pi \in C_q$, la paridad de π la podemos expresar como

$$\text{paridad } \pi = (-1)^{q_1-1}(-1)^{q_2-1}...(-1)^{q_l-1} = (-1)^{\sum q_i - l} = (-1)^{n-l(q)}.$$

Es decir, $\pi \in C_q$ es par si $2 \mid n-l(q)$ e impar si $2 \nmid n-l(q)$.

Afirmación

$$sgn_n(C_p) = (-1)^{n-l(p)} \text{ para todo } p \vdash n.$$

Es decir, el valor de $sgn_n(\pi)$ es 1 si π es par y -1 si π es impar.

Prueba. Observemos que $\rho_n = Z^{1^n}$. Aplicando la regla de la comultiplicación para marcos (ver 7.3) obtenemos

$$\Delta(\rho_n) = \sum_{r \leq^* 1^n} Z^r \otimes Z^{1^n \setminus r} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} Z^{1^k} \otimes Z^{1^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \rho_k \otimes \rho_{n-k}.$$

La prueba es por inducción sobre $l = l(p)$. Si $l = 1$ entonces $p = n$. Aplicamos el lema 10.4 y autodualidad de $\mathcal{P}$ para obtener

$$sgn_n(C_p) = sgn_n(C_n) = c(\rho_n)(C_n) = (\rho_n, \omega_n)_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\rho_n, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)Z^{1^k} \star Z^{n-k})_{\mathcal{P}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)\sum_{s=0}^{n}(\rho_s, Z^{1_k})_{\mathcal{P}}(\rho_{n-s}, Z^{n-k})_{\mathcal{P}}.$$

Ya que $\rho_t = Z^{1^t}$ para todo $t \in \mathbb{N}$, los sumandos en la ecuación anterior se anulan excepto para $s = k$ y $n - k = 1$. Por tanto

$$sgn_n(C_n) = (-1)^{n-1},$$

lo que completa la base de inducción. Supongamos que $l > 1$ y el resultado válido para todas las particiones $r \vdash n$ de longitud $< l$. Aplicamos la regla de la comultiplicación para ρ_n y autodualidad de $\mathcal{P}$ y obtenemos

$$sgn_n(C_p) = (\rho_n, \omega_p)_{\mathcal{P}} = (\rho_n, \omega_{\overline{p}} \star \omega_{p_l})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\Delta(\rho_n), \omega_{\overline{p}} \otimes \omega_{p_l})_{\mathcal{P}} = \sum_{k=0}^{n}(\rho_k, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}}(\rho_{n-k}, \omega_{p_l})_{\mathcal{P}} =$$

$$= (\rho_{n-p_l}, \omega_{\overline{p}})_{\mathcal{P}}(\rho_{p_l}, \omega_{p_l})_{\mathcal{P}} = (-1)^{n-p_l-l(\overline{p})}(-1)^{p_l-1} =$$

$$= (-1)^{n-l(\overline{p})-1} = (-1)^{n-l(p)},$$

lo que completa la inducción. ∇

Bibliografía

[1] BLEESENOHL, Dieter. SCHOCKER, Manfred. *Noncommutative character theory of the symmetric group.* Imperial College Press. 2005.

[2] FULTON, Wiliam. *Young tableaux.* Cambridge University Press. 1997.

[3] JAMES, Gordon. LIEBECK, Martin. *Representations and characters of groups.* Cambridge University Press. 1993.

[4] MONTGOMERY, Susan. *Hopf Algebras and their actions on rings.* Regional Conference Series in Mathematics. Número 62. 1992.

[5] ABE, Eiichi. *Hopf Algebras.* Cambridge University Press. 2004.