



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN  
NICOLAS DE HIDALGO

---

INSTITUTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

CONDENSADO DE BOSE ROTANTE COMO SOLUCIÓN  
AL PROBLEMA DE LAS CURVAS DE ROTACIÓN  
GALÁCTICA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**Maestro en ciencias en el área de Física**

PRESENTA:

**Francisco Javier Rivera Paleo**

DIRECTOR DE TESIS:

Doctor en ciencias en el área de Física Francisco Siddhartha Guzmán  
Murillo



Enero 2014

*A mis padres*

# Agradecimientos

Antes que nada, les quiero agradecer a mis papás, Javier y Rosa, y a mi hermano Victor, por su amor incondicional, comprensión, y constante apoyo durante toda mi vida. A mis abuelos y a todos mis tíos por ayudarnos en momentos difíciles.

De igual forma, le estoy muy agradecido al doctor Francisco S. Guzmán, por haber aceptado dirigirme esta tesis, por su paciencia, amistad, confianza y apoyo en todo momento del desarrollo de mi trabajo.

A mis amigos del grupo de relatividad numérica, Alan, José Juan, Miguel, Alex y Fabio, por las importantes y provechosas discusiones de física y métodos numéricos, particularmente sobre el modelo de materia oscura desarrollado en esta tesis. El doctor Fabio merece mención especial por las mejoras que le hizo a mi trabajo.

A mis sinodales, los doctores Jose Antonio González y Luis Arturo Ureña, por haber leído la tesis en poco tiempo y por sus respectivas contribuciones.

A Nancy, por estar siempre a mi lado, aguantarme, compartir su vida conmigo y seguirme aguantando.

A mis compañeros y amigos: Mauricio, Juan Pablo, Alan y Bedolla, por su afecto, amistad y por compartir muchas vivencias y anécdotas de todo tipo.

Al Instituto de Física y Matemáticas, a todo su cuerpo académico y administrativo por haber sido de gran importancia en mi formación.

A mi perro loky, por siempre recibirme alegre cuando llego a casa.

Nada de esto hubiera sido posible sin la ayuda económica, en mi maestría, recibida de CONACyT. Mi sincera gratitud a todos ellos.

# Índice general

Resumen . . . . .	4
Abstract . . . . .	5
<b>1. Introducción</b>	<b>6</b>
<b>2. Condensado de Bose-Einstein rotante</b>	<b>12</b>
2.1. El sistema Gross-Pitaevskii-Poisson . . . . .	12
2.2. GPP con rotación . . . . .	15
2.2.1. Agregando rotación a configuraciones esféricas . . . . .	18
<b>3. Métodos numéricos</b>	<b>20</b>
3.1. El sistema GPP en 3D: variables adimensionales . . . . .	20
3.2. Métodos numéricos . . . . .	21
3.2.1. Implementación del método de diferencias finitas . . . . .	21
3.2.2. La evolución según el Método de Líneas . . . . .	22
3.2.3. La ecuación de Poisson . . . . .	25
3.3. Observables . . . . .	29
<b>4. Resultados</b>	<b>33</b>
4.1. Pruebas del código . . . . .	33
4.2. Estructura de las simulaciones . . . . .	35
4.2.1. Rotación sin autointeracción . . . . .	35
4.2.2. Rotación con autointeracción . . . . .	44
<b>5. Conclusiones y comentarios finales</b>	<b>48</b>

## **Resumen**

Se presenta la dinámica de un condensado de Bose rotante que funge como halos de materia oscura, hechos de un bosón ultraligero sin espín. Nos restringimos al caso de adición de rotación rígida y diferencial con simetría axial a estructuras que inicialmente presentan una simetría esférica, y mostramos que existen tres regímenes: i) momento angular pequeño, básicamente mantiene los inconvenientes de halos con simetría esférica relacionados con la compacticidad y el fracaso para explicar las curvas de rotación galácticas, ii) un rango intermedio de valores de momento angular que permite la existencia de estructuras con largos periodos de vida y con perfiles de curvas de rotación aceptables, y iii) momento angular grande, en el cual las estructuras son dispersadas por la rotación. También se presenta en detalle un nuevo código usado para resolver el sistema de ecuaciones Gross-Pitaevskii Poisson en tres dimensiones.

*Palabras clave: curvas de rotación, condensado de Bose, momento angular, Gross-Pitaevskii Poisson.*

## Abstract

We present the dynamics of rotating Bose Condensate galactic dark matter halos, made of an ultralight spinless boson. We restrict to the case of adding axisymmetric rigid rotation to initially spherically symmetric structures and show there are three regimes: i) small angular momentum, that basically retains the drawbacks of spherically symmetric halos related to compactness and failure at explaining galactic rotation curves, ii) an intermediate range of values of angular momentum that allow the existence of long-lived structures with acceptable rotation curve profiles, and iii) high angular momentum, in which the structure is dispersed away by rotation. We also present in detail the new code used to solve the Gross-Pitaevskii Poisson system of equations in three dimensions.

*Keywords: rotation curves, Bose Condensate, angular momentum, Gross-Pitaevskii Poisson.*

# Capítulo 1

## Introducción

Los trabajos de las curvas de rotación galácticas tienen ya más de 80 años, y hablan de la existencia de un tipo de materia no visible, la Materia Oscura, que es necesaria para explicar la dinámica de las galaxias. Uno de los primeros trabajos que sugieren la existencia de materia no visible es el trabajo del holandés J.H. Oort en 1932; él estudió los movimientos verticales de las estrellas cerca del plano galáctico de la Vía Láctea y encontró que las estrellas se deberían estar moviendo lo suficientemente rápido para escapar de la fuerza gravitacional generada por la masa luminosa de la galaxia. De esta forma Oort postuló que debía haber más masa presente para mantener a las estrellas en las trayectorias observadas [1].

Un año después, en 1933, F. Zwicky [2] estudió las galaxias del cúmulo de Coma, y utilizando el teorema del virial encontró que la masa promedio de estas galaxias era unas 100 veces más grande que la esperada utilizando solamente su luminosidad. El teorema del virial establece que en sistemas galácticos gravitacionalmente estacionarios se cumple  $K = W/2$  donde  $K$  es la energía cinética total del sistema y  $W$  la energía gravitacional. Utilizando este resultado es posible tener una estimación de la masa total del cúmulo  $M = \frac{\langle v^2 \rangle r}{\alpha G}$ , donde  $r$  es el radio del cúmulo,  $\langle v^2 \rangle$  es la velocidad promedio y  $\alpha$  un factor numérico característico del tipo de cúmulo. Una vez que estos parámetros se conocen, es posible estimar la masa total del cúmulo de Coma, siendo ésta aproximadamente  $2 \times 10^{15} M_{\odot}$ . Por otro lado, la masa del mismo cúmulo, calculada a partir de la luminosidad de las estrellas es  $3 \times 10^{13} M_{\odot}$  de materia estelar y  $2 \times 10^{14} M_{\odot}$  de gas interestelar, dando un total de  $2,3 \times 10^{14} M_{\odot}$ . De esto se puede ver que menos del quince por ciento de la masa estimada mediante el teorema del virial, es materia visible. Así encontró pues que las velocidades orbitales eran casi un factor de diez veces mayor que las esperadas usando la masa de las galaxias del cúmulo, entonces, concluyó que para mantener a las galaxias juntas en el cúmulo, este debía contener una gran cantidad de Materia Oscura.

Sin embargo, esto no tuvo mucha relevancia en ese tiempo y no fue sino hasta 1970 cuando Ford y Vera Rubin [3] midieron la luz visible de algunas galaxias, y pudieron calcular la velocidad de rotación (curvas de rotación) de las estrellas hasta distancias del orden

de hasta 50 kpc para el gas interestelar. Ellos encontraron que dichas curvas son aproximadamente “planas” para una muestra apropiada de galaxias de disco, o sea, las velocidades de los cuerpos celestes continúan incrementándose con la distancia respecto al centro galáctico hasta llegar a un límite del orden de 5 kpc y luego de este límite la velocidad se mantiene aproximadamente constante. Esto está en contra de lo que se esperaría cuando se considera que la única materia que genera el campo gravitacional galáctico es la luminosa, porque en tal caso, debido a que la materia luminosa se encuentra concentrada en una región pequeña, lo que se esperaría es que las velocidades de rotación tuvieran el comportamiento Kepleroiano después de algunos kpc. Una explicación simple del comportamiento observado en las galaxias es que contengan más masa de la que se puede medir, al igual que en caso del Cúmulo de Coma descrito anteriormente.

La evidencia de la falta de masa en el universo obtenida por las curvas de rotación tiene sus limitaciones, pues solamente es posible observar hasta donde haya estrellas o hidrógeno neutro que es a una distancia del orden de decenas de kpc (escala galáctica). Otra manera útil de observar distribuciones de esta materia no visible, a escalas de cúmulos, es a través de lentes gravitacionales. La idea se basa en una de las consecuencias de la teoría de la Relatividad General: los rayos de luz se ven afectados por los campos gravitacionales, curvándose cuando pasan cerca de masas suficientemente grandes. Así pues, si la Materia Oscura existe, la luz se verá afectada por su presencia. A partir de las propiedades de la lente gravitacional, se reconstruye el campo responsable de la distorsión gravitacional y se infiere la distribución de materia que lo genera. Los análisis de este tipo muestran que hay grandes cantidades de materia oscura en los cúmulos.

En otro contexto, en el cosmológico, las observaciones recientes del fondo cósmico de radiación han confirmado que el universo es espacialmente plano, es decir, que tiene la densidad crítica. Estas observaciones, combinadas con las de la expansión acelerada del cosmos, basadas en el corrimiento al rojo de Supernovas lejanas, llevan a la cada vez mejor confirmada hipótesis de que el universo tiene tres principales ingredientes: 4 % de materia bariónica y radiación, 23 % de materia oscura y 73 % de energía oscura. Se entiende pues que el material que forma las estructuras visibles contribuye solamente con el 27 % [4, 5, 6]. La diferencia más importante entre los dos ingredientes oscuros es que la materia oscura interactúa gravitacionalmente con el resto de la materia, mientras que la energía oscura se comporta como una componente repulsiva que acelera la expansión del universo.

Debido a ésta distinción entre materia y energía oscuras, naturalmente entendemos que, debido a que gravita, la materia oscura es la que debiera asociarse con el fenómeno que se ha venido describiendo de las curvas de rotación y el estado virial de galaxias y otras estructuras. También es por ello que se entiende el proceso de formación de estructuras en el universo, es decir, la materia oscura, casi diez veces mas abundante que la bariónica, eventualmente generó los pozos de potencial gravitacional en los que posteriormente se acumuló la materia luminosa que ha dado origen a las estrellas y demás.

El problema más atractivo es el de la naturaleza de la materia oscura. Tal naturaleza debe estar restringida por las observaciones, y una de las más importantes es precisamente

la del fondo cósmico de radiación. La amplitud de las anisotropías observadas en el universo indican que la materia oscura no puede ser bariónica, de lo contrario tales anisotropías serían dos órdenes de magnitud mayores a las observadas. Esta es la restricción más importante sobre la naturaleza de la materia oscura que ha motivado la aparición de varias propuestas.

En general, el modelo que engloba las propiedades de la materia y energía oscuras, y es el modelo estándar de la actualidad y en el que se basa este trabajo, es el conocido  $\Lambda$ CDM, es decir, un modelo cosmológico que considera que la energía oscura es una constante cosmológica y la materia oscura es una partícula desconocida cuyas propiedades son que interactúa débilmente con la radiación y materia conocida.

Estas condiciones sobre la materia oscura han propiciado el estudio de todo tipo de partículas que cumplen estas propiedades. De entre los candidatos mejor estudiados se encuentran los WIMPs (weakly interacting massive particles), que son partículas hipotéticas, cuya existencia se propone en extensiones del modelo estándar de partículas. Entre los candidatos más populares se encuentran los fotinos y los gravitinos. Otros candidatos son los axiones, que son partículas bosónicas que aparecen una vez más como propuestas en extensiones al modelo estándar para explicar la preservación de la simetría CP.

Retomando la conexión que debe haber entre la materia oscura que contemplan las observaciones cosmológicas con las observaciones galácticas y de cúmulos de galaxias, es importante mencionar que, con toda la riqueza que ofrece el modelo de materia oscura fría [6], éste no está exento de problemas. Los estudios numéricos que se han llevado a cabo, especialmente las simulaciones de formación de estructura presentan algunas inconsistencias interesantes: 1) el análisis de tales resultados numéricos revela una inconsistencia en el espectro de potencias de masas, específicamente, la abundancia de estructuras pequeñas (que corresponden a potencias altas en el espectro de perturbaciones) es mayor a la observada [7] y 2) también el análisis de dichos resultados numéricos indica que la densidad central de las estructuras de tamaño galáctico presentan un perfil distinto del que se observa en las regiones centrales, es decir, las simulaciones numéricas predicen un perfil de densidad picudo (generalmente un perfil Navarro-Frenk-White) en los centros galácticos, mientras las observaciones de los centros galácticos favorecen a perfiles de densidad suaves [9, 10], este problema es conocido como *cusp-core*. Estos dos problemas de la CDM dan lugar a la especulación, por una parte de cómo será posible resolver esos problemas, o si es posible evitarlos.

Para resolver el primero de los problemas, en el 2001, Matos & Ureña propusieron un candidato de materia oscura nuevo, un campo escalar que representa una partícula de espín cero. A partir del análisis de las fluctuaciones llegaron a la conclusión de que basta con fijar la masa de dicho bosón a una magnitud de  $10^{-23} - 10^{-22}$ eV, para que el espectro de potencias de masas fuera consistente con las observaciones [11]. De esta manera, no solamente se propone un candidato a materia oscura fría explícitamente, sino que se resuelve uno de los problemas de la CDM. Para una masa tan ligera de un bosón se estima que la temperatura crítica de condensación es del orden de TeV, es decir a unos  $10^{-10}$ s después del

Big Bang. Esta propiedad es muy atractiva y permite elaborar un modelo de materia oscura que formó fluctuaciones desde tales épocas.

Al igual que CDM, la conexión del modelo con las observaciones a escala galáctica presentan varios problemas. En la actualidad, comúnmente se asume que el bosón ultraligero condensado es descrito en la teoría de campo medio por la ecuación de Gross-Pitaevskii [12], que es una ecuación de Schrödinger para una función de onda que describe a todos los bosones del sistema en conjunto. Al tratarse de un condensado con masas del orden de masas galácticas, es necesario que tal descripción incluya el potencial gravitacional autogenerado por el condensado. El sistema queda entonces descrito por el sistema acoplado de Gross-Pitaevskii-Poisson (GPP).

El sistema GPP ha sido resuelto numéricamente en simetría esférica para modelar halos galácticos, esto se hizo bajo la suposición de una dependencia armónica en el tiempo (configuraciones de equilibrio). El sistema GPP acepta dos tipos de solución, una con estados excitados que eventualmente decaen al estado base, esta solución se debe descartar por ser inestable, la segunda solución se da con estados base, estas son soluciones atractoras en el tiempo y conservan su forma aún con diferentes perfiles de densidad, es decir, en la simulaciones numéricas se pueden poner diferentes perfiles como dato inicial y la solución sigue siendo atractora en el tiempo [17, 18]. Por lo tanto, la que se interpreta como posible solución al problema de la materia oscura son las configuraciones en el estado base. Dichas soluciones presentan un perfil de densidad suave en el centro de la galaxia, lo cual es halagador y motiva a seguir por este camino en la búsqueda de la solución al problema de la materia oscura. Sin embargo, continuando con esta línea de investigación sale a la luz un problema. Debido a que son configuraciones demasiado compactas, su perfil de densidad decae exponencialmente, a distancias cortas, lo que implica que presenta un decaimiento Kepleriano y por tanto son incapaces de explicar la parte de la curva de rotación galáctica en las regiones externas.

Varios autores han tratado de rescatar este modelo proponiendo distintas ideas. Una de las propuestas consiste en suponer que los halos galácticos son la superposición de tanto estados base como de estados excitados. Los resultados indican que tales configuraciones son estables y además presentan curvas de rotación mucho mejores que las de las configuraciones en estado base [19].

Otra propuesta fue presentada por Böehmer & Harko [12], quienes usando una versión hidrodinámica del sistema GPP en simetría esférica, bajo la hipótesis de equilibrio hidrostático y el límite de Tomas-Fermi, los autores obtuvieron una ecuación tipo Lane-Emden. La solución a tal ecuación es el siguiente perfil de densidad:  $\rho_{BEC}(r) = \rho_{BEC}^c \frac{\sin(\pi r/R)}{\pi r/R}$ , con  $R = \pi \sqrt{\frac{\hbar^2 a}{Gm^3}}$  es el radio de la galaxia donde se cumple  $\rho_{BEC}(R) = 0$ , de esta manera  $R$  define el tamaño de la galaxia. Por otra parte  $\rho_{BEC}^c$  es la densidad central de la materia oscura. Con estos dos parámetros ( $R, \rho_{BEC}^c$ ), se ajustan una gran número de curvas de rotación galácticas [12]. Uno de los defectos de éste modelo es que la masa de los bosones es del orden de meV, y por ello, se pierde lo bueno del modelo a escala cosmológica, es

decir, la capacidad de explicar el espectro de potencias de las estructuras [11]. Para resolver tal contradicción, Robles & Matos construyeron modelos de halos galácticos basados en el modelo de Böehmer & Harko, pero suponiendo que la masa del bosón es ultraligera. Con ello, se mostró que no solamente se puede explicar las curvas de rotación galácticas, sino que además se mostró que el modelo resuelve con precisión aceptable el problema del *cusp-core* con el modelo del boson ultraligero.

Hasta este punto, el modelo de Böehmer & Harko, combinado con la hipótesis de bosón ultraligero parecía haber solucionado el problema de las curvas de rotación y del centro galáctico, sin embargo en este año en [20] se mostró que el perfil de densidad que describe este modelo es inestable. Se encontró que los halos pierden la mitad de la masa inicial en una escala de tiempo de decenas de millones de años. Tiempo suficiente para considerar que estos halos son inestables y por ello parece además poco factible que se hayan formado. Por tanto todos los que parecían ser buenos resultados en este modelo ahora no lo son y es necesaria otra propuesta si se desea rescatar el modelo de bosón ultraligero que a escala cosmológica es prometedor.

En este trabajo se propone estudiar la evolución del Condensado, que obedece al sistema GPP, manteniendo la naturaleza ultraligera del bosón, pero agregando un ingrediente capaz de redistribuir la densidad de materia oscura a escala galáctica. Tal ingrediente es la rotación. Se agrega de ésta manera un parámetro libre, el momento angular, esto es físicamente aceptable pues cada galaxia puede, sin pérdida de generalidad, tener una rotación diferente, ya sea rígida o diferencial y por ende tener diferentes curvas de rotación.

Al igual que en los casos más simples en simetría esférica, no se conocen soluciones exactas al sistema GPP generales con rotación. Por ello se utilizan métodos numéricos para estudiar las soluciones del sistema GPP correspondientes a sistemas con rotación. Para lograrlo, como motivo principal de este trabajo de tesis, se desarrolló un código en tres dimensiones, capaz de resolver el sistema GPP en coordenadas cartesianas para sistemas axialmente simétricos. Dicho código se desarrolló para resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, en general para potenciales dependientes del tiempo en 3D. Debido a que tal ecuación está acoplada a la de Poisson, es necesario resolver ésta, y se implementó un resolvidor elíptico para configuraciones axialmente simétricas dentro del dominio 3D general. Esta herramienta resulta suficiente para estudiar el caso del sistema GPP con simetría axial.

El resto de la tesis está separado en cuatro partes. En el capítulo 2, se describe el condensado de Bose rotante en 3D, es decir, se presentan las ecuaciones que gobiernan al sistema GPP; y luego se construye nuestra propuesta que consiste en agregar momento angular a configuraciones esféricas para analizar las curvas de rotación y tiempo de vida de las configuraciones. En el capítulo 3 se resuelve numéricamente el sistema de ecuaciones GPP, dichas ecuaciones se encuentran en coordenadas cartesianas con simetría axial. Se presentan los observables que pueden ser calculados: la energía total, la masa, el momento angular y curvas de rotación. En el capítulo 4 se pone a prueba nuestro código al evolucionar una configuración de equilibrio. Se presentan los resultados que se obtuvieron del

modelo rotante. Finalmente se presentan las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 2

## Condensado de Bose-Einstein rotante

Este capítulo está destinado describir el formalismo que da lugar al sistema GPP rotante. En la primera sección se explica bajo qué condiciones se obtiene el sistema GPP, y en la segunda sección se presentan dos modelos de rotación, rígida y diferencial, con los cuales se espera obtener curvas de rotación que esten en concordancia con las observadas a escala galáctica.

### 2.1. El sistema Gross-Pitaevskii-Poisson

El presente es un sistema cuántico de  $N$  bosones condensados que interactúan entre ellos, donde todos se encuentra en el estado base. Para un sistema que consiste de un gran número de partículas, el cálculo del estado base del sistema con el uso directo del Hamiltoniano es casi imposible, debido a su alto costo computacional. Sin embargo, el uso de métodos aproximados puede simplificar la tarea. Una aproximación que ayuda a resolver nuestro problema es la descripción de campo medio del condensado, formulada en 1947 por Bogoliubov, la cual se basa en la idea de separar la contribución del condensado del operador de campo bosónico. El Hamiltoniano que describe a  $N$  bosones interactuando entre ellos y confinados por un potencial externo  $V_{ext}$  es dado, en la segunda cuantización, por

$$\begin{aligned}\widehat{H} = & \int \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left[ -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t) d\vec{r} \\ & + \frac{1}{2} \int d\vec{r} d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}', t) \hat{\psi}(\vec{r}, t),\end{aligned}\quad (2.1)$$

donde  $m$  es la masa de los bosones,  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$  representan la posición de dos diferentes bosones,  $V_{ext}$  es el pozo de potencial externo usado para confinar los bosones y  $V(\vec{r} - \vec{r}')$  es el potencial de interacción de dos cuerpos, en este caso entre dos bosones. En general, el operador de campo se escribe como  $\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\vec{r}) a_\alpha(t)$  y  $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\vec{r}) a_\alpha^\dagger(t)$ , donde

$\psi_\alpha(\vec{r})$  son funciones de onda de las partículas y  $a_\alpha(t)$ ,  $a_\alpha^\dagger(t)$  son los operadores de creación y aniquilación en la posición  $\vec{r}$  respectivamente, y son definidos a través de las relaciones

$$\begin{aligned} a_\alpha^\dagger |n_0, n_1 \cdots, n_\alpha, \cdots\rangle &= \sqrt{n_\alpha + 1} |n_0, n_1 \cdots, n_\alpha + 1, \cdots\rangle, \\ a_\alpha(t) |n_0, n_1 \cdots, n_\alpha, \cdots\rangle &= \sqrt{n_\alpha} |n_0, n_1 \cdots, n_\alpha - 1, \cdots\rangle, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde  $n_\alpha$  son los eigenvalores del operador número  $\hat{N}_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha$ , cuyos eigenvalores son el número de bosones en cada estado  $\alpha$ . Estos operadores de creación y aniquilación obedecen las reglas de conmutación

$$[a_\alpha, a_\beta^\dagger] = \delta_{\alpha\beta}, \quad [a_\alpha^\dagger, a_\beta^\dagger] = 0, \quad [a_\alpha, a_\beta] = 0, \quad (2.3)$$

con  $\delta_{\alpha\beta}$  una delta de Kronecker. En particular

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)] = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.4)$$

donde  $\delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$  es la delta de Dirac. Ahora, se puede escribir la evolución en el tiempo para  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  usando la representación de Heisenberg con el Hamiltoniano (2.1)

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}], \quad (2.5)$$

y usando la regla de conmutación (2.4) se tiene

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + \int d\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t) V(\vec{r} - \vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}', t) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (2.6)$$

Para seguir con el desarrollo de esta ecuación se usa la aproximación de campo medio, la cual consiste en separar el operador de campo bosónico  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  en una contribución de estados coherentes  $\psi(\vec{r}, t)$  más estados excitados  $\delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ :

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) + \delta\hat{\psi}(\vec{r}, t), \quad (2.7)$$

donde  $\psi(\vec{r}, t) = \langle \hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle$  es la función de onda del condensado. Este es un campo clásico y su módulo al cuadrado determina la distribución de densidad de masa del condensado a través de  $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ , y la condición de normalización como  $M = \int \rho(\vec{r}, t) d^3\vec{r}$ , donde  $M$  es la masa total de las partículas en el condensado. Note que ésta aproximación tiene sentido pues la mayoría de los bosones deben estar en el estado base después de haberse condensado por debajo de la temperatura crítica  $T_c$ <sup>1</sup>.

Ahora, se hace la suposición de que el gas de Bose en cuestión es diluido, es decir,

---

<sup>1</sup>En el caso de sistemas ideales todos los átomos deben estar en el estado base para  $T < T_c$ , para sistemas reales esto no ocurre.

que el radio de interacción entre dos bosones es mucho menor a la distancia entre ellos, por tanto sólo las colisiones binarias de baja energía son relevantes y esas colisiones son caracterizadas por la longitud de dispersión  $a$ . Entonces reemplazando  $V(\vec{r} - \vec{r}')$  con una interacción efectiva que representa la interacción entre dos partículas puntuales

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = g\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (2.8)$$

donde  $g$  es la constante de acoplamiento que está relacionada con la longitud de dispersión  $a$  a través de  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$ .

Sustituyendo (2.7) y (2.8) en (2.6) encontramos la Ec. de Gross-Pitaevskii para  $\psi(\vec{r}, t)$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[ -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + \frac{g}{2m} |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}, t), \quad (2.9)$$

esta ecuación fue derivada independientemente por Gross y Pitaevskii en 1961 [13, 14, 15, 16].

La Ec.(2.9) da lugar al sistema GPP cuando  $V_{ext}(\vec{r})$  corresponde al potencial gravitacional  $U(\vec{r})$  generado por la densidad del gas. De ésta manera, la trampa con la que se confina al gas es el campo gravitacional generado por éste. Esta propiedad se supone en los modelos de formación de estructura de materia oscura en el modelo estándar y es adecuada también en el presente caso. Así, el sistema GPP es

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} &= \left[ -\frac{\hbar}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r}) + \frac{g}{2m} |\psi(\vec{r})|^2 \right] \psi(\vec{r}, t), \\ \nabla^2 U &= 4\pi G m |\psi(\vec{r})|^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación. Este sistema de ecuaciones representa las propiedades macroscópicas de un sistema mecánico-cuántico de muchos bosones, en una descripción semiclásica. Finalmente, con los resultados obtenidos en [11], la masa del bosón asociado al condensado debe ser ultraligera en un intervalo  $10^{-23} < m < 10^{-22} \text{eV}$ , siendo ésta y la longitud de dispersión los únicos parámetros libres a fijar. Así, una vez fijada la masa  $m$  debe ser posible explicar los fenómenos astrofísicos tanto a escalas galácticas como cosmológicas. Sin embargo no es así, pues no ajusta con las observaciones a escalas galácticas, en particular, si se resuelve el problema del cusp-core, las curvas de rotación no están en concordancia con lo observado; y aún cuando se logran ajustar bien las curvas de rotación lo hacen con un perfil de densidad tipo  $\sin(r)/r$  el cual es inestable[20].

## 2.2. GPP con rotación

La propuesta de este trabajo consiste en evolucionar el sistema GPP para configuraciones esféricamente simétricas a las que se aplica una rotación inicialmente, con la finalidad de saber si la rotación redistribuye la densidad de bosones de modo tal que las curvas de rotación corresponden a las galácticas.

Se presentan dos modelos de rotación, uno con rotación rígida y otro con rotación diferencial (ver Fig. 2.2 y 2.3), pero antes vamos a introducir el tema de las rotaciones, considerando la generalización de la acción de las rotaciones sobre la función de onda de una distribución sin rotación.

Consideremos una rotación en  $\mathbb{R}^3$ [citar]

$$\vec{r} \rightarrow R_{\vec{\phi}} \vec{r} = \vec{r}', \quad (2.11)$$

aquí  $\vec{\phi} = \phi \hat{n}$ , donde  $\phi = |\vec{\phi}|$  indica la magnitud de la rotación,  $\hat{n}$  es un vector unitario que apunta a lo largo del eje de rotación como se muestra en la Figura 2.1a, y  $R_{\vec{\phi}}$  es una transformación lineal asociada a la rotación. Para una rotación infinitesimal  $\delta\phi$  como en la Figura 2.1 b tenemos

$$\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \delta\vec{r} = \vec{r} + \delta\phi \hat{n} \times \vec{r} = (I + \delta\phi \mathbf{M}) \vec{r}, \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{M}$  es una matriz asociada a algún eje de rotación. De aquí se puede ver igualando las Ecs. (2.11) y (2.12) que

$$R_{\delta\vec{\phi}} = I + \delta\phi \mathbf{M}. \quad (2.13)$$

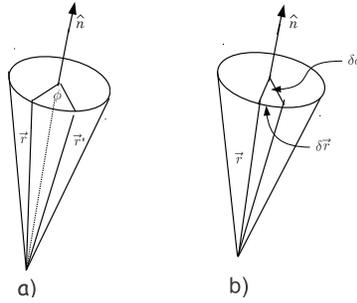


Figura 2.1: a) Rotación del vector posición  $\vec{r}$ . b) Rotación infinitesimal del vector posición  $\vec{r}$ .

La acción del operador de rotaciones sobre una función de onda está definida en la siguiente forma

$$R_{\vec{\phi}} \psi(\vec{r}, t) = \psi(R_{\vec{\phi}} \vec{r}, t). \quad (2.14)$$

La variación de la función de onda bajo rotaciones infinitesimales está dada por

$$\delta\psi(\vec{r}, t) = R_{\vec{\phi}} \psi(\vec{r}, t) - \psi(\vec{r}, t). \quad (2.15)$$

En este momento es importante aclarar que la variación  $\delta\psi$  es totalmente diferente a la variación  $\delta\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  que se hizo en la aproximación de campo medio (Ec. 2.7), pues esta última es sobre el operador de campo bosónico y no sobre la función de onda.

Al considerar una rotación de ángulo infinitesimal ( $\delta\phi$ ), en torno al eje  $z$ , el operador de rotaciones transforma a la función de onda en  $R_{\vec{\phi}} \psi(\vec{r}, t) = \psi(x + \delta x, y + \delta y, z, t)$ , entonces la variación de la función de onda queda como

$$\begin{aligned} \delta\psi(\vec{r}, t) &= \psi(x + \delta x, y + \delta y, z, t) - \psi(x, y, z, t) \\ &\approx \delta\phi(y\partial_x - x\partial_y)\psi(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

En este punto es conveniente recordar la definición de los operadores de momento lineal y momento angular en coordenadas cartesianas,  $\mathbf{p} = i\hbar\nabla$ ,  $\mathbf{L}_z = x\mathbf{p}_y - y\mathbf{p}_x$ , con esto la Ec.(2.16) se escribe como

$$\delta\psi(\vec{r}, t) = \frac{i\delta\phi}{\hbar} \mathbf{L}_z \psi(x, y, z, t), \quad (2.17)$$

de esta forma, el operador de rotaciones infinitesimales está dado por

$$R_{\delta\phi} \approx I + \frac{i\delta\phi}{\hbar} \mathbf{L}_z. \quad (2.18)$$

Al estudiar una rotación infinitesimal general podemos utilizar un argumento análogo al que acabamos de ver para exhibir que, el operador que representa a una rotación infinitesimal arbitraria es simplemente

$$R_{\delta\vec{\phi}} \approx I + \frac{i\delta\phi}{\hbar} \hat{n} \cdot \mathbf{L}, \quad (2.19)$$

esto expresa que las rotaciones son generadas por el operador de momento angular  $\mathbf{L}$ . Lo que a su vez implica que una rotación finita (rotaciones sobre el mismo eje, por ejemplo, dos rotaciones se expresan como  $R_{\phi\hat{n}} \cdot R_{\theta\hat{n}} = R_{(\phi+\theta)\hat{n}}$ ) se escribe como

$$R_{\vec{\phi}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( I + \frac{i\phi}{\hbar N} \hat{n} \cdot \mathbf{L} \right)^N = e^{-i\phi\hat{n}\cdot\mathbf{L}/\hbar}. \quad (2.20)$$

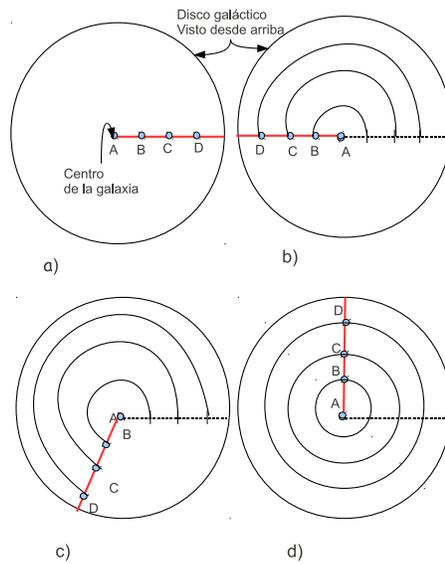


Figura 2.2: En éste, el esquema de rotación rígida; los bosones (A,B,C,D) que se encuentran más cerca del centro galáctico completan sus órbitas en igual tiempo que los que se encuentran más hacia fuera. Por lo tanto, los bosones cerca de la perifería tendrán una mayor velocidad que los que se encuentran cerca del centro.

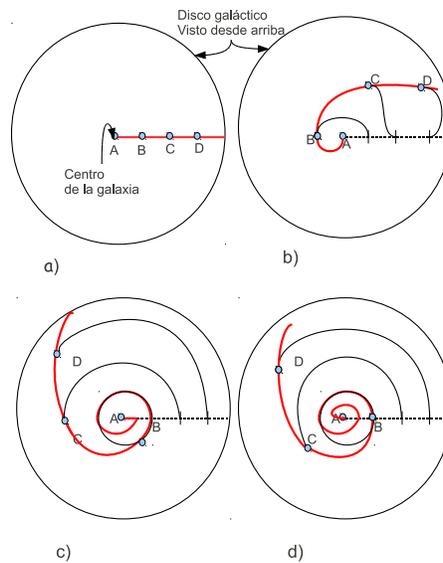


Figura 2.3: En éste, el esquema de rotación diferencial, los bosones (A,B,C,D) que se encuentran más cerca del centro galáctico completan sus órbitas en menos tiempo que las que se encuentran más hacia fuera.

### 2.2.1. Agregando rotación a configuraciones esféricas

La manera de agregar rotación al sistema GPP consiste en usar el operador de rotación (2.20) y aplicarlo a una configuración esférica  $\psi_0(\vec{r}, t)$ . Pudiendo elegir cualquier configuración esférica (por ejemplo una gaussiana), en este trabajo se elige considerar que  $\psi_0(\vec{r}, t)$  es la función de onda solución correspondiente al estado base en simetría esférica [18]. Entonces la rotación se aplica de la siguiente manera

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow e^{-i\phi\hat{n}\cdot\mathbf{L}/\hbar}\psi_0(\vec{r}, t). \quad (2.21)$$

El ángulo  $\phi$  está dado por  $\arctan(y/x)$ , y el eje de rotación está a lo largo de  $z$ . Suponiendo que el eje de rotación del condensado está en el centro de la configuración esférica, la rotación le producirá una redistribución de materia causada por la fuerza centrífuga. La consecuencia de este nuevo efecto trae consigo que el perfil de densidad inicialmente exponencial, característica de las configuraciones de equilibrio esféricas, se redistribuye. Ante tal redistribución se analiza la consecuencia en la curva de rotación, cuya forma debe cambiar.

Se consideran dos modelos, la aplicación de rotación rígida y la aplicación de rotación diferencial. Como ya se mencionó antes, las coordenadas que se utilizarán para resolver este problema son cartesianas. La manera de parametrizar la componente  $z$  del operador de momento angular  $\mathbf{L}_z = x\mathbf{p}_y - y\mathbf{p}_x$  para las rotaciones rígida y diferencial es la siguiente:

- **Rotación rígida.** La manera de asignar valores a los parámetros para este tipo de rotación es tomar  $\mathbf{p}_y = L_z/x + y\mathbf{p}_x/x$ , con  $L_z$  el parámetro libre que dicta la magnitud de la rotación, un esquema de este modelo se presenta en la Fig. 2.2. Se explorará numéricamente el valor para ese parámetro libre, tal que, con esos valores las curvas de rotación sean planas a distancias adecuadas del centro galáctico, y las configuraciones resultantes tengan largo tiempo de vida. Por tanto el perfil inicial de la función de onda del condensado queda como

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow e^{-i(xp_y - yp_x)\arctan(y/x)/\hbar}\psi_0(\vec{r}, t) = e^{-iL_z\arctan(y/x)/\hbar}\psi_0(\vec{r}, t). \quad (2.22)$$

Este tipo de rotación es muy bueno pues sólo tiene un único parámetro libre, y si con ese parámetro libre se pueden ajustar las curvas de rotación galácticas, se estaría dando un paso enorme a la solución del problema de la materia oscura. Por supuesto faltaría detectar un bosón ultraligero de masa  $10^{-23} eV$ .

- **Rotación diferencial.** Aquí la parametrización se se hace tomando los valores  $\mathbf{p}_y = L_z f(r)/x + y\mathbf{p}_x/x$ , nuevamente con  $L_z$  un parámetro libre, un esquema de este modelo se presenta en la Fig. 2.3. A diferencia de la rotación rígida, ahora  $L_z$  es multiplicado por una función  $f(r)$  que depende del radio axial  $r_{axi} = \sqrt{x^2 + y^2}$ , esta función puede tomarse como otro parámetro libre. En este trabajo la función  $f(r)$  se tomará proporcional a  $\sqrt{r_{axi}}$ . Entonces la función de onda del condensado es inicialmente

$$\psi(\vec{r}, t) \rightarrow e^{-i(xp_y - yp_x) \arctan(y/x) f(r)/\hbar} \psi_0(\vec{r}, t) = e^{-iL_z \arctan(y/x) f(r)/\hbar} \psi_0(\vec{r}, t), \quad (2.23)$$

donde  $f(r) = \sqrt{r_{axi}}$ . De manera análoga a la rotación rígida, en este caso se explorará los valores adecuados de  $L_z$  para mantener curvas de rotación planas y estables lejos del centro galáctico. Sobra decir que la función  $f(r)$  es completamente arbitraria y que en este trabajo se maneja la función  $f(r) = \sqrt{r_{axi}}$  porque tiene la morfología de las curvas de rotación.

En este capítulo se ha sentado la base de nuestro trabajo, pues se ha expuesto el formalismo matemático para describir la evolución en el tiempo de un sistema de N bosones condensados de espín cero, dicha evolución está dictada por el sistema GPP. Aunado a la descripción del sistema GPP, se ha agregado momento angular a configuraciones esféricas, esperando así obtener curvas de rotación aceptables. Para saber si nuestro modelo rotante presenta (o no) buenas curvas de rotación, en el siguiente capítulo se resolverá numéricamente el sistema GPP en coordenadas cartesianas con simetría axial, calculando con esto observables como: momento angular, masa, energía y la velocidad de rotación. Antes de resolver numéricamente el sistema GPP se dará una descripción de todos los métodos numéricos que fueron necesarios para la resolución de dicho sistema.

# Capítulo 3

## Métodos numéricos

Este capítulo está enfocado a describir los métodos usados para resolver el sistema GPP en 3D. En la primera sección de este capítulo se describirá el sistema de ecuaciones en unidades adimensionales, que gobierna la dinámica de nuestro modelo de materia oscura galáctica. En la segunda sección se resolverá el sistema de ecuaciones con la aproximación en diferencias finitas adoptando el método de líneas como esquema de evolución. La ecuación de Poisson se resolverá en cada instante con un algoritmo de sobrerelajación sucesiva (S.O.R).

### 3.1. El sistema GPP en 3D: variables adimensionales

Para fines de cálculo computacional, el sistema GPP descrito por las Ecs.(2.10), es conveniente remover los coeficientes que contienen constantes con órdenes de magnitud muy grandes o muy pequeñas. Esto se logra haciendo el siguiente cambio de variables

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \frac{mc}{\hbar} \tilde{r}, & \hat{t} &= \frac{mc^2}{\hbar} \tilde{t}, & \hat{U} &= \frac{\tilde{U}}{mc^2} \\ \hat{\psi} &= \frac{(4\pi G)^{1/2} \hbar}{mc^2} \tilde{\psi}, & \hat{a} &= \frac{c^2}{2mG} \tilde{a}, & \hat{L}_z &= \frac{\tilde{L}_z}{\hbar}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde las variables con tilde representan las variables en unidades físicas. Otra propiedad del sistema GPP es que es invariante ante un escalamiento del tipo

$$r = \lambda \hat{r}, \quad t = \lambda^2 \hat{t}, \quad U = \lambda^{-2} \hat{U}, \quad \psi = \lambda^{-2} \hat{\psi}, \quad a = \lambda^2 \hat{a}, \quad (3.2)$$

con  $\lambda$  una constante arbitraria. Lo que implica entonces es que, una vez encontrada una solución para el sistema GPP, se tiene una familia entera de soluciones, las cuales están

relacionadas por una transformación de escala. Así el sistema GPP se escribe como

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} &= \left[ -\frac{1}{2} \nabla^2 + U(x, y, z, t) + a |\psi(x, y, z, t)|^2 \right] \psi(x, y, z, t), \\ \nabla^2 U(x, y, z, t) &= |\psi(x, y, z, t)|^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Es posible elegir el parámetro  $\lambda$  de modo que las constantes y funciones involucradas en el sistema de ecuaciones sean del orden de la unidad, y así evitar la acumulación de errores de redondeo durante los cálculos.

## 3.2. Métodos numéricos

El sistema de ecuaciones diferenciales a resolver numéricamente es (3.3). Dicho sistema se resolverá en el volumen  $V = \{(x, y, z, t) \mid x, y, z \in [x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]\}$  con condiciones iniciales correspondientes a una configuración de equilibrio con simetría esférica cuya función de onda está dada por  $\psi_0(r, t) = e^{i\omega t} \phi(r)$ , donde  $\omega$  es el valor de su eigenenergía [18]. Las soluciones de equilibrio esféricamente simétricas son calculadas con un código ajeno a este trabajo, de donde se extrae el valor de la función de onda  $\phi(r)$  en coordenadas esféricas. Para evolucionar el sistema se necesita conocer  $\psi(r, 0)$  en coordenadas cartesianas, entonces se hace una interpolación de los datos iniciales  $\phi(r)$  a todo el dominio 3D, y es posible i) aplicar momento angular  $L_z$ , ii) resolver la ecuación de Poisson e iii) iniciar la evolución.

### 3.2.1. Implementación del método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas es uno de los métodos más usuales para la resolución aproximada de problemas de valores iniciales con condiciones de frontera asociados a ecuaciones diferenciales parciales (EDP). La esencia de este método consiste en lo siguiente. El dominio continuo de la EDP se sustituye por un conjunto finito (discreto) de puntos que definen una malla discreta; con esto, en lugar de funciones de un argumento continuo se analizan funciones con un argumento discreto definidas en los puntos del dominio discreto. Las derivadas que forman parte de la ecuación diferencial y de las condiciones de frontera se aproximan por combinaciones lineales de los valores de la función aproximada en ciertos puntos de la malla; en tal caso el problema de la EDP se sustituye por un sistema de ecuaciones algebraicas.

En el problema de éste trabajo, se comienza por discretizar el volumen  $V$ , en nuestro caso se utilizará una discretización uniformemente espaciada, ver Fig. 3.1. Se asume que las variables y la función de onda de las Ecs.(3.3) están bien definidas en un conjunto de puntos tanto en el espacio  $x_i = x_{min} + i\Delta x$ ,  $y_j = y_{min} + j\Delta y$ ,  $z_k = z_{min} + k\Delta z$  como en el tiempo

$t^n = n\Delta t$ , donde  $i, j, k, n$  son números enteros que corren desde 0 hasta  $N_x, N_y, N_z$  y  $N_t$  respectivamente. Las cantidades  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ ,  $\Delta y = y_{j+1} - y_j$ ,  $\Delta z = z_{k+1} - z_k$  son la resolución espacial en cada dirección (en este trabajo son todas iguales), y  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  es la temporal. Así la función de onda  $\psi$  queda definida solamente en los puntos  $(x_i, y_j, z_k, t^n)$ , donde se escribe  $\psi_{i,j,k}^n$ .

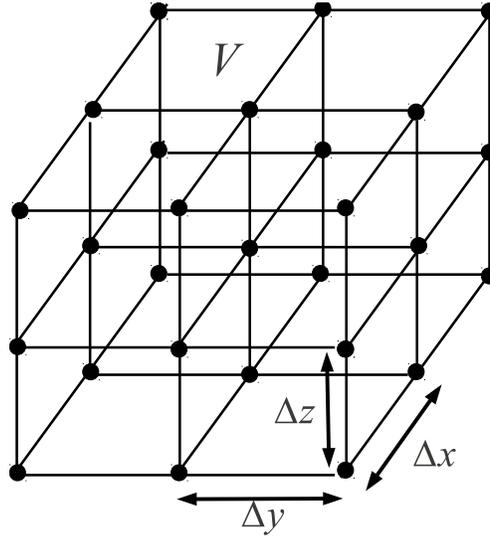


Figura 3.1: Dominio espacial  $[x_{min}, x_{max}] \times [y_{min}, y_{max}] \times [z_{min}, z_{max}]$  en coordenadas cartesianas y uniformemente discretizado, que define una malla cúbica sobre la cual queda bien definida la función de onda que entra en el sistema GPP.

Las aproximaciones en diferencias finitas que se usan para  $\partial_{xx}\psi$ ,  $\partial_{yy}\psi$ ,  $\partial_{zz}\psi$  [22] son, respectivamente al tiempo  $t^n$

$$\begin{aligned}\partial_{xx}\psi(x, y, z, t) &= \frac{\psi_{i-1,j,k}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \psi_{i+1,j,k}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \\ \partial_{yy}\psi(x, y, z, t) &= \frac{\psi_{i,j-1,k}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \psi_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \\ \partial_{zz}\psi(x, y, z, t) &= \frac{\psi_{i,j,k-1}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \psi_{i,j,k+1}^n}{\Delta z^2} + O(\Delta z^2).\end{aligned}\tag{3.4}$$

### 3.2.2. La evolución según el Método de Líneas

El Método de Líneas (MOL) consiste en un procedimiento general para la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) dependientes del tiempo. La idea básica del

MOL es reemplazar las derivadas espaciales en la EDP con aproximaciones en diferencias finitas. Una vez hecho esto, la ecuación tiene una variable independiente, la variable temporal  $t$  para cada punto en el dominio, y el resultado es la versión semidiscreta de la EDP. Ahora, el problema original de la EDP se transforma en un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en cada punto donde está definida  $\psi_{i,j,k}^n$ . En este caso sólo se necesita aproximar la parte derecha de la ecuación de Schrödinger (3.3) con diferencias finitas, una vez hecho esto, podemos aplicar cualquier algoritmo de integración para EDOs y así calcular una solución numérica aproximada de la EDP al tiempo  $t^{n+1}$  en el punto  $i, j, k$ .

La versión semidiscreta de la Ec.(3.3) es entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} = & \frac{i}{2} \left( \frac{\psi_{i-1,j,k}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \psi_{i+1,j,k}^n}{\Delta x^2} + \frac{\psi_{i,j-1,k}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \psi_{i,j+1,k}^n}{\Delta y^2} + \right. \\ & \left. \frac{\psi_{i,j,k-1}^n - 2\psi_{i,j,k}^n + \psi_{i,j,k+1}^n}{\Delta z^2} \right) - i(U_{i,j,k} + a|\psi_{i,j,k}|^2)\psi_{i,j,k}^n + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde el potencial gravitacional satisface la versión totalmente discreta de la ecuación de Poisson:

$$\begin{aligned} |\psi_{i,j,k}|^2 = & \frac{U_{i-1,j,k} - 2U_{i,j,k} + U_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1,k} - 2U_{i,j,k} + U_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \\ & \frac{U_{i,j,k-1} - 2U_{i,j,k} + U_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para ilustrar el método, en la Fig.3.2 se muestra el elemento contenido en la expresión (3.5), llamado molécula del algoritmo de evolución. En tal diagrama aparece como un círculo negro la posición del dominio discreto  $(x_i, y_j, z_k, t^{n+1})$  donde se puede calcular  $\psi^{n+1}$  en términos de los valores de  $\psi^n$  en las posiciones indicadas con círculos blancos. Así, se supone que para cada  $i, j, k$ , la función  $\psi$  satisface un sistema de EDOs a lo largo de las líneas en la dirección temporal del dominio.

Ahora, lo que queda por hacer es integrar (3.5) en el tiempo para obtener la solución aproximada para  $\psi_{i,j,k}^{n+1}$ . Entonces basta con elegir un buen integrador de EDO, el cual es seleccionado de acuerdo a su precisión y propiedades de estabilidad que dependen del factor  $\Delta t/\Delta x^2$ . En este trabajo se usó el integrador iterativo Crank-Nicholson (ICN), con tres iteraciones y precisión de segundo orden [21]. El algoritmo ICN se puede ilustrar como sigue: sea  $f$  una función arbitraria que depende del tiempo y de una variable espacial discreta con etiqueta  $i, j, k$  tal que  $\partial_t f = S$ , donde  $S$  puede ser, por ahora, el lado derecho en (3.5), y  $f = \psi_{i,j,k}$ , entonces el ICN está dado por

$$\begin{aligned}
f^{(1)} &= f^n + (\Delta t/3)S^n, \\
f^{(2)} &= f^n + (\Delta t/2)S^1, \\
f^{(n+1)} &= f^n + \Delta t S^2,
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

donde  $n$  etiqueta los pasos en el tiempo.

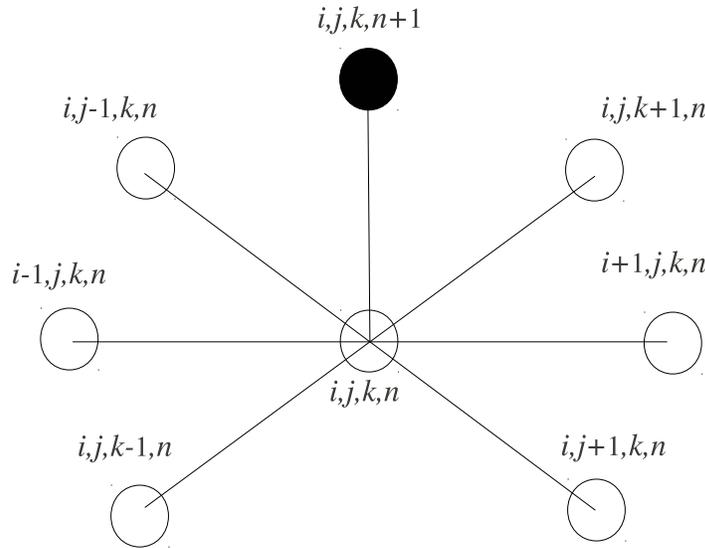


Figura 3.2: Molécula correspondiente al algoritmo de evolución para la construcción de  $\psi_{i,j,k}^{n+1}$  a partir de los valores de  $\psi_{i,j,k}^n$  en puntos vecinos. El círculo negro indica el lugar donde se desea encontrar la función de onda, y los círculos vacíos indican el lugar donde se conoce la función de onda.

En la figura 3.2 se ilustra la necesidad de conocer el valor de la función de onda en todos los puntos del espacio para  $t^n$ , y en particular para los valores en las fronteras  $((x_0, y, z, t^n), (x_{N_x}, y, z, t^n), (x, y_0, z, t^n), (x, y_{N_y}, z, t^n), (x, y, z_0, t^n)$  y  $(x, y, z_{N_z}, t^n))$  se necesita saber los valores de la función de onda en las posiciones  $(x_{-1}, y, z, t^n), (x_{N_x+1}, y, z, t^n), (x, y_{-1}, z, t^n), (x, y_{N_y+1}, z, t^n), (x, y, z_{-1}, t^n)$  y  $(x, y, z_{N_z+1}, t^n)$  que no están definidas en la región  $V$ . Afortunadamente los valores de la frontera pueden ser calculados imponiendo condiciones a la función de onda en esta región. La condiciones que se imponen en este caso son: copiar en los puntos de la frontera los valores de sus puntos vecinos, es decir,  $(x_0, y, z, t^n) = (x_1, y, z, t^n)$ ,  $(x_{N_x}, y, z, t^n) = (x_{N_x-1}, y, z, t^n)$ ,  $(x, y_0, z, t^n) = (x, y_1, z, t^n)$ ,  $(x, y_{N_y}, z, t^n) = (x, y_{N_y-1}, z, t^n)$ ,  $(x, y, z_0, t^n) = (x, y, z_1, t^n)$  y  $(x, y, z_{N_z}, t^n) = (x, y, z_{N_z-1}, t^n)$ .

Con el fin de impedir que el exceso de materia sea reflejada de las fronteras y pudie-

ra eventualmente contaminar los cálculos, se ha usado un artificio matemático que simula fronteras abiertas en el dominio numérico. Esto consiste en agragar una “esponja” en la región más lejana del dominio, con el propósito de que actúe como un sumidero de partículas e impida la reflexión y propagación de los errores numéricos hacia el interior del dominio de integración. Esta técnica consiste en sumar un potencial imaginario al potencial gravitacional, o sea, redefinir el potencial en la ecuación de Schrödinger añadiendo una parte imaginaria como  $U = U + iV_{im}$ . El resultado de suponer un potencial imaginario hace que la ecuación de continuidad, se escriba como  $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot [i/2(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)] = 2V_{im}|\Psi|^2$ , la cual se interpreta como fuente o sumidero de partículas dependiendo de si  $V_{im}$  tiene signo positivo o negativo respectivamente. El perfil elegido para  $V_{im}$  es

$$V_{im} = -\frac{1}{2}V_0\{2 + \tanh[(r - r_c)/\delta] - \tanh(r_c/\delta)\}, \quad (3.8)$$

que es una versión suave de una función escalón donde  $V_0$  es la amplitud del potencial imaginario,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  es la coordenada radial,  $r_c$  es la distancia a la cual el potencial es centrado y  $\delta$  es el ancho del potencial. Este perfil se ha usado satisfactoriamente en [17, 18, 23, 24] para los casos con simetrías esférica y axial. En la Fig. 3.3 se muestra una proyección en el plano  $xy$  del potencial esponja.

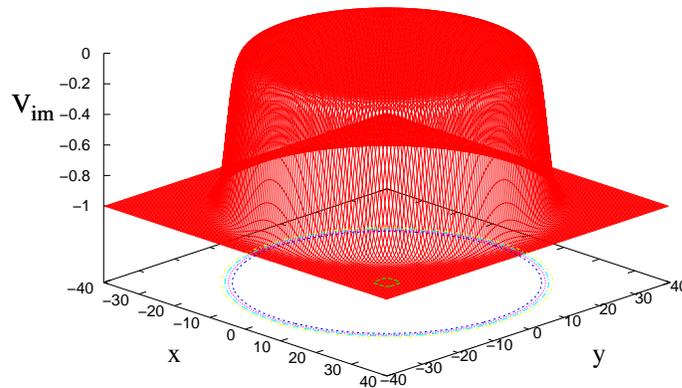


Figura 3.3: Proyección en el plano  $xy$  de  $V_{im}$  con  $V_0 = 1$ . La región donde  $V_{im}$  es diferente de cero es donde la esponja captura la densidad de materia que se acerca a la frontera.

### 3.2.3. La ecuación de Poisson

Para integrar la ecuación de Schrödinger es necesario conocer el potencial gravitacional  $U$ , en todo tiempo  $t^n$  e incluso en los tiempos intermedios del integrador ICN. En esta

sección, aunque se trabaja en un dominio en 3D, sólo se tomará en cuenta los casos axialmente simétricos. En este caso, no es necesario resolver la ecuación (3.6) sin simetrías, sino una versión axialmente simétrica, que reduciría el problema a uno de 2D. Debido a que es necesario integrar la ecuación de Poisson en cada paso de tiempo y los tiempos intermedios del integrador ICN, la reducción a un problema de 2D ayuda a calcular en menor tiempo computacional el potencial gravitacional.

Debido a que se estudiarán problemas con simetría axial, la ecuación de Poisson sólo se resuelve en el plano diagonal del dominio 3D con normal en la dirección  $(\hat{x} + \hat{y})$ . El dominio de integración de la ecuación de Poisson se muestra en la Fig. 3.4, en el plano  $r_{axi} \in [0, \sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2}] \times z \in [z_{min}, z_{max}]$ , con resoluciones  $\Delta r_{axi} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  y  $\Delta z$ .

Para resolverla sobre  $r_{axi} \times z$ , se escribe la Ec. de Poisson en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial^2 U_{axi}}{\partial r_{axi}^2} + \frac{1}{r_{axi}} \frac{\partial U_{axi}}{\partial r_{axi}} + \frac{\partial^2 U_{axi}}{\partial z^2} = |\psi_{axi}|^2 = \rho_{axi}. \quad (3.9)$$

El dominio discreto sobre el plano se define por la coordenada radial  $r_{axi(i,k)} = \sqrt{x_{i,i,k}^2 + y_{i,i,k}^2}$  y la coordenada axial  $z$  heredada de la malla 3D. La fuente de la ecuación dada por la función de onda se hereda del dominio 3D al plano como  $\psi_{axi(i,k)} = \psi_{i,i,k}$ .

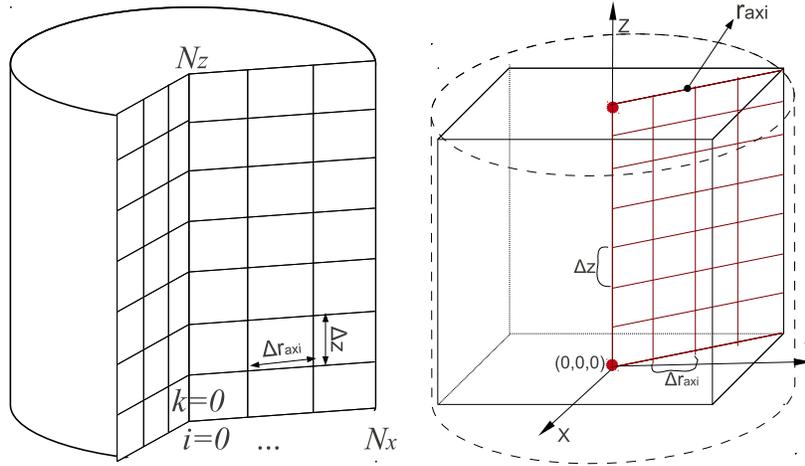


Figura 3.4: Izquierda: El cilindro uniformemente discretizado, cuyo radio es el plano  $r_{axi} \in [0, \sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2}] \times z \in [z_{min}, z_{max}]$  es donde se define y resuelve la Ec. de Poisson axialmente simétrica. Derecha: El cubo circunscrito en el cilindro representa el dominio numérico donde se lleva a cabo la evolución del sistema GPP.

Antes de discretizar la ecuación de Poisson axial (3.9) se usa la regla de la cadena para sustituir  $\frac{1}{r_{axi}} \frac{\partial U_{axi}}{\partial r_{axi}}$  por  $2 \frac{\partial U_{axi}}{\partial r_{axi}^2}$  y así evitar la singularidad en el eje  $r_{axi} = 0$ , por lo tanto la

Ec.(3.9) discretiza como

$$\frac{U_{axi(i+1,k)}^n - 2U_{axi(i,k)}^n + U_{axi(i-1,k)}^n}{\Delta r_{axi}^2} + \frac{2U_{axi(i+1,k)}^n - 2U_{axi(i-1,k)}^n}{r_{axi(i+1,k)}^2 - r_{axi(i+1,k)}^2} + \frac{U_{axi(i+1,k+1)}^n - 2U_{axi(i,k)}^n + U_{axi(i,k-1)}^n}{\Delta z^2} = \rho_{axi(i,k)} + O(\Delta r_{axi}^2, \Delta z^2) \quad (3.10)$$

Para resolver ésta ecuación se usa el método SOR, un método iterativo basado en la discretización en diferencias finitas como (3.10). Este método consiste en utilizar tantas iteraciones como sean necesarias para obtener una solución con un error acotado. Este procedimiento se dice convergente cuando las diferencias del cálculo de la parte izquierda y derecha de (3.10) tienden a cero cuando el número de iteraciones aumenta.

El algoritmo SOR usa condiciones de frontera tipo Dirichlet, dadas por una expansión monopolar del potencial gravitacional axial

$$U_{axi(i,k)} = -M/r_{i,k}, \quad (3.11)$$

donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . La expresión 3.11 sólo tiene sentido en la frontera exterior  $r_{axi} = [\sqrt{x_{max}^2 + y_{max}^2}, z] \cup [r_{axi}, z_{max}] \cup [r_{axi}, z_{min}]$ . Mientras tanto en el eje de simetría, el potencial cumple con la condición  $U_{axi(N_x/2,k)} = U_{axi(N_x/2+1,k)}$ . Finalmente, la ecuación de Poisson escrita de manera adecuada para iterar en los puntos interiores del cilindro es

$$U_{axi(i,k)}^{l+1} = U_{axi(i,k)}^l + \alpha R_{i,k}, \quad (3.12)$$

donde

$$R_{i,k}^l = \frac{U_{axi(i+1,k)}^l - 2U_{axi(i,k)}^l + U_{axi(i-1,k)}^l}{\Delta r_{axi}^2} + \frac{2U_{axi(i+1,k)}^l - 2U_{axi(i-1,k)}^l}{r_{axi(i+1,k)}^2 - r_{axi(i+1,k)}^2} + \frac{U_{axi(i+1,k+1)}^l - 2U_{axi(i,k)}^l + U_{axi(i,k-1)}^l}{\Delta z^2} - \rho_{axi(i,k)} \quad (3.13)$$

es el residuo de la Ec.(3.10) en la  $l$ -ésima iteración y puede tomarse como una medida de la cercanía de  $U_{axi}^l$  a la solución  $U_{axi}$ . Si el valor de  $R_{i,k}^l$  es grande, se dice que  $U_{axi}^l$  no es una buena aproximación de  $U_{axi}$  y por lo tanto es necesario calcular más iteraciones. Por otra parte  $M = \int \rho(x, y, z) dx dy dz$  es la masa total del sistema, y  $\alpha$  es una constante positiva que acelera la convergencia de SOR, su valor está acotado entre 1/4 y 1/2 y su valor óptimo está dado por ([29])

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{1}{N_x^2} + \frac{1}{N_z^2} \right]^{1/2}. \quad (3.14)$$

En resumen, este método comienza con una aproximación inicial para  $U_{axi}$ , y después,

cada iteración consiste en hacer un barrido de todo el plano  $r_{axi} \times z$  con la fórmula recursiva (3.12). Luego de esto, el valor de  $U_{axi}$  se va actualizando, la idea es que cada vez que se tenga un nuevo valor para  $U_{axi(i,k)}$ , se use para obtener un valor refinado de la siguiente iteración. Las iteraciones terminan hasta que se tenga  $|R_{i,k}^l| < \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon$  una tolerancia prefijada.

Una vez encontrado  $U_{axi}$  se quiere estimar, el valor del potencial gravitacional  $U(x, y, z) = U_{i,j,k}$  en todo el dominio 3D, y de esta manera sea utilizado como fuente en la ecuación de Schrödinger. Entonces, el primer paso para aproximar el potencial gravitacional en todo el dominio 3D es calcular los puntos  $r_{axi(i,k)} = \sqrt{x_{i,i,k}^2 + y_{i,i,k}^2}$ . Después, localizar los puntos  $\zeta = \text{int}(r_{axi(i,k)}/\Delta r_{axi})$  y  $\eta = \zeta + 1$  que están antes y después de  $r_{axi(i,k)}$ , donde  $\text{int}(*)$  significa: valor entero del argumento “\*”. Con esta información se puede hacer una interpolación de regreso a la malla 3D, y así encontrar el valor del potencial gravitacional en algún punto arbitrario  $(i, j, k)$  de esta malla. Como el menor grado de un polinomio que pasa por dos puntos (en este caso  $\zeta$  y  $\eta$ ) es uno, la interpolación se que utiliza para calcular  $U_{i,j,k}$  es lineal, así que para hallar esta aproximación se debe seguir la ecuación de la línea recta

$$U_{i,j,k} = \frac{U_{axi(\zeta,k)} - U_{axi(\eta,k)}}{\Delta r} (r_{i,j,k} - r_{axi(\zeta,k)}) + U_{axi(\zeta,k)}, \quad (3.15)$$

donde se asume que  $\zeta\Delta r < r_{i,j,k} < \eta\Delta r$ , este proceso es para cada plano de  $z = cte$ . En la Fig.3.5 se muestra el plano  $z = k$  del cubo, donde se puede ver la interpolación lineal. La diagonal, donde se localizan los puntos  $\zeta$  y  $\eta$ , barre e interpola la solución del potencial gravitacional con simetría axial en todo el cubo.

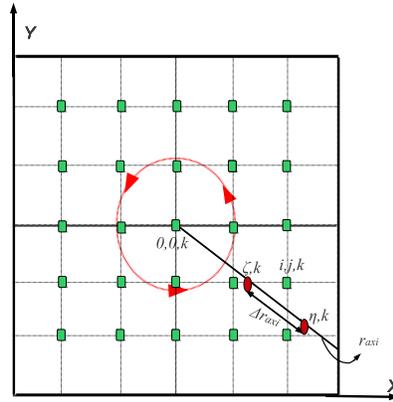


Figura 3.5: Vista superior del plano  $z = k$ . Se muestran los puntos  $\zeta$  y  $\eta$ , los cuales, en general no corresponden a puntos definidos en la malla 3D. Por lo que el valor de  $U_{axi(i,k)}$  sobre los puntos del dominio discreto (cuadritos verdes) necesita ser interpolado con los puntos localizados sobre la diagonal  $r_{axi}$  y así obtener el valor de  $U_{i,j,k}$  en todo el volumen. El círculo rojo representa el barrido de la interpolación lineal en todo el cubo.

En la Fig. 3.6 se muestra el diagrama de flujo de todos los métodos numéricos que fueron necesarios para resolver el sistema GPP. Dichos métodos están descritos en los siguientes puntos:

- **Datos iniciales y evolución.** Para comenzar a estudiar los efectos producidos por la rotación se puede elegir cualquier perfil inicial para la función de onda y aplicarle el operador de momento angular para ponerlo a rotar. Sin embargo, en el presente trabajo se eligió iniciar las simulaciones con una función de onda correspondiente a una configuración de equilibrio en el estado base ( $\psi_0$ ) [17, 18], y después agregarle la rotación ( $\psi = \exp(-i\phi L \cdot \hat{n})\psi_0$ ). En el esquema de evolución cada paso de tiempo está etiquetado por  $t^0, \dots, t^n, t^{n+1}, \dots$ .
- **Primer paso de tiempo.** Se muestra el primer paso de tiempo y las tres iteraciones del integrador ICN, la primera entre  $t^0$  y  $dt/3$ , la segunda entre  $dt/3$  y  $dt/2$ , al final entre  $dt/2$  y  $dt$ , donde  $dt = t^1 - t^0$ . En cada uno de estos pasos intermedios la Ec. de Poisson se está resolviendo en el plano  $r_{axi} \times z$  e interpolando a la malla 3D.
- **Ecuación de Poisson.** En esta etapa se muestran en acción el algoritmo SOR para resolver la ecuación de Poisson, esta ecuación se resuelve a cada instante de cada paso de tiempo comenzando desde  $t^0$ . Dicha solución sólo es válida en el plano  $r_{axi} \times z$ . En la Fig. 3.6 se muestran las iteraciones arbitrarias  $l$  y  $l + 1$  del algoritmo SOR, que son calculadas en el mismo instante de tiempo ( $t^0$ ). Entre estas iteraciones se mide un error que es igual al residuo de la Ec. (3.10), cuando este error es menor a una tolerancia prefijada (en este trabajo la tolerancia fue de  $10^{-7}$ ) se suspenden las iteraciones, de manera que la calidad de la aproximación obtenida dependerá de la tolerancia que se haya definido.
- **Interpolación.** En esta etapa se interpola linealmente el potencial gravitacional  $U_{axi}$  a toda la malla 3D usando 3.15.
- **Sistema GPP.** Una vez interpolado  $U_{axi}$  en todo el dominio 3D las ecuaciones de Schrödinger y Poisson quedan totalmente acopladas y forman el sistema GPP en  $t^0$ . Después viene el primer paso intermedio del ICN ( $dt/3$ ) donde se vuelve a integrar la ecuación de Poisson en simetría axial para después ser interpolada a toda la malla 3D. Ocurre lo mismo para los pasos intermedios restantes.

Estas etapas se repiten en cada paso de tiempo y sus iteraciones intermedias durante toda la evolución.

### 3.3. Observables

Para obtener la información física hay que relacionar  $\psi(\vec{r}, t)$  con las variables dinámicas interesantes y medibles. A continuación se describen las relevantes en este trabajo.

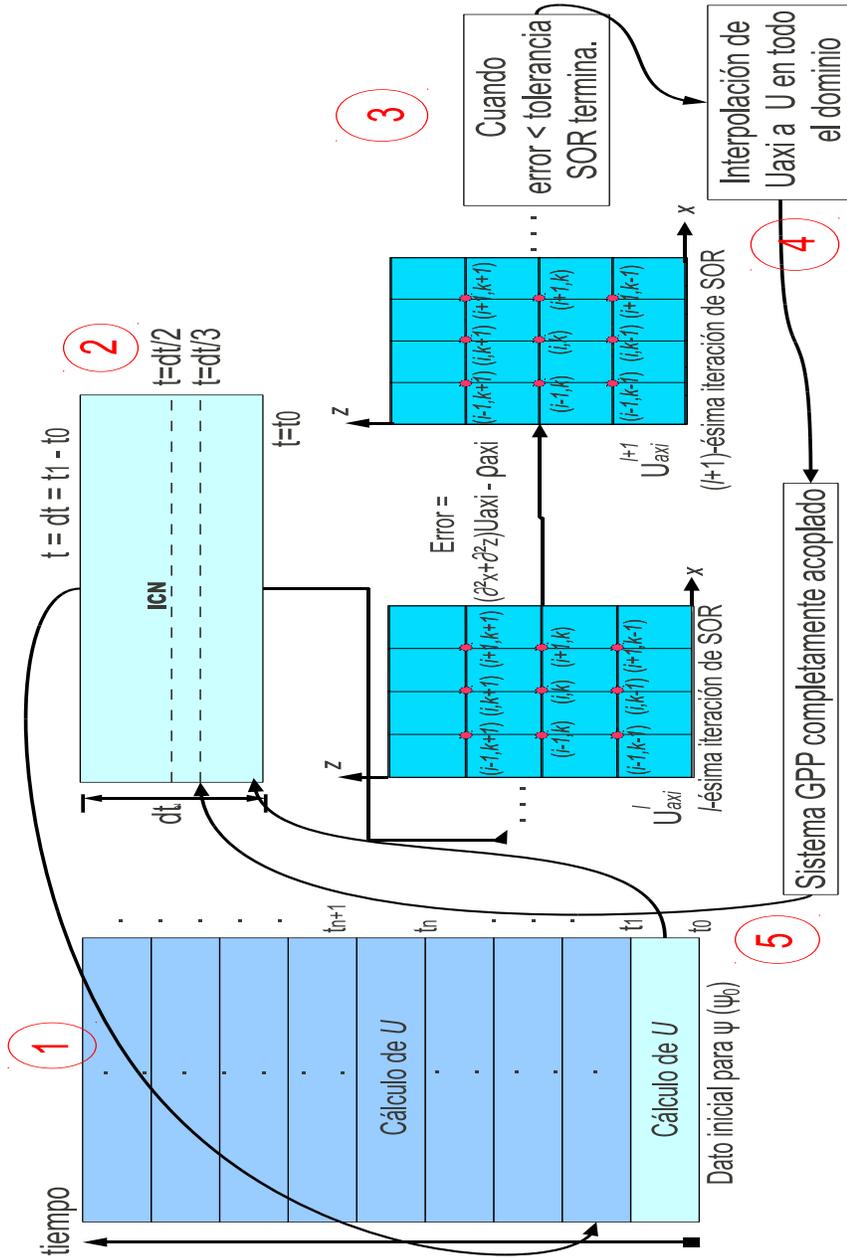


Figura 3.6: Diagrama de flujo del código. En la primera etapa se muestra el esquema de evolución temporal, donde cada paso de tiempo está etiquetado por  $t^n$ . En la segunda etapa se presenta sólo el primer paso de tiempo donde se dejan ver las tres iteraciones del integrador ICN. Dentro del primer paso de tiempo (tercera etapa) se resuelve con el algoritmo SOR la Ec. de Poisson (con simetría axial) en cada una de las iteraciones intermedias, el algoritmo termina cuando el residuo de la Ec. de Poisson es menor que una tolerancia prefijada. En la cuarta etapa se lleva a cabo la interpolación de  $U_{axi}$  a  $U$  cartesiano. En la última etapa, el sistema GPP queda acoplado en coordenadas cartesianas y la función de onda resultante sirve como dato inicial para la siguiente iteración, donde se vuelve a integrar Poisson en simetría axial para después ser interpolada a todo el dominio 3D.

*Energía total.* La cual dá cuenta de la estabilidad de un sistema, por ejemplo, si la energía total es positiva el sistema no está acotado. Entonces el monitorear la evolución de la energía total del sistema es de crucial importancia. El cálculo está dado en términos de los valores de expectación de las contribuciones a la energía cinética ( $K$ ), gravitacional ( $W$ ) y de autointeracción ( $I$ ). Los cuales se calculan como

$$K = -\frac{1}{2} \int \psi^*(\vec{r}, t) \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) dx dy dz, \quad (3.16)$$

$$W = \frac{1}{2} \int \psi^*(\vec{r}, t) U \psi(\vec{r}, t) dx dy dz, \quad (3.17)$$

$$I = a \int |\psi|^4 dx dy dz \quad (3.18)$$

estas integrales son calculadas numéricamente en todo el dominio numérico. La energía total del sistema es entonces  $E = K + W + I$ .

*Momento angular.* El valor de expectación del momento angular  $L_z$  también ayuda a monitorear si su valor se ha estabilizado en torno a un valor asintótico o no. El valor de expectación está dado por

$$L_z = -i \int \psi^*(\vec{r}, t) \left( x \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial y} - y \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial x} \right) dx dy dz, \quad (3.19)$$

esta cantidad también se calculó numéricamente.

*Masa.* A pesar de que la integral de la densidad de probabilidad se conserva durante la evolución en todo el espacio, se calcula la solución del sistema de GPP en un dominio finito que permite a las partículas ser absorbidas por una esponja una vez que están cerca de las fronteras artificiales de nuestro dominio numérico. La estimación de la masa resultante será la integral de la densidad de probabilidad en el dominio numérico

$$M = \int |\psi|^2 dx dy dz, \quad (3.20)$$

de esta manera, se dice que la configuración pierde masa cuando parte de la densidad de la probabilidad ha salido del dominio numérico.

*Curva de rotación.* El cálculo de esta cantidad se hizo sobre el plano ecuatorial  $z = 0$  asumiendo que las partículas de prueba siguen trayectorias circulares, por lo tanto, igualando la fuerza centrífuga con la fuerza gravitacional, la velocidad de rotación de una partícula

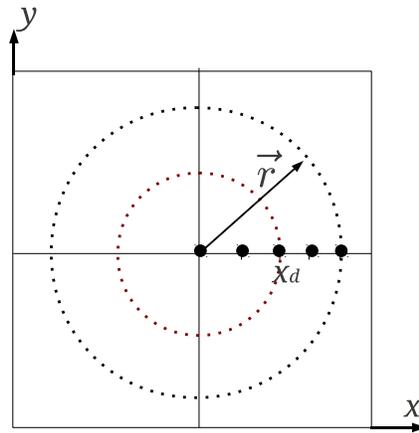


Figura 3.7: Órbitas circulares de las partículas de prueba en el plano ecuatorial, los puntos negros son los detectores de tales partículas.

de prueba es

$$v(r) = \sqrt{G \frac{M(r)}{r}}, \quad (3.21)$$

donde  $r$  es la distancia del origen al detector y  $M(r)$  es la masa contenida dentro de una esfera de radio  $r$ . Para calcular esta cantidad (numéricamente) se colocaron varios detectores que miden la velocidad tangencial  $v$  de las partículas de prueba. Los detectores están colocados en diferentes puntos del eje  $x$  como se muestra en la Figura 3.7, y en cada uno de ellos se estima la velocidad de tales partículas. Explícitamente, si un detector está colocado en  $(x, y, z) = (x_d, 0, 0)$ , la velocidad de rotación de una partícula de prueba en la posición del detector es

$$v^2(x_d) = \frac{2G}{|x_d|} \int \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad (3.22)$$

donde la integral de volumen es calculada en una esfera de radio  $x_d$  en la malla 3D.

Estas cantidades son muy importantes porque permiten conocer el estado del sistema en cualquier instante de tiempo durante la evolución. En particular, el cálculo de la curva de rotación permite saber si el halo es consistente o no con las observaciones.

Ahora ya se tienen las herramientas necesarias para estudiar los efectos que trae consigo el sistema GPP al agregarle rotación. Los efectos de esta rotación se verán reflejados en los observables que se describieron en este capítulo. En el siguiente capítulo se presentan los resultados numéricos que se obtuvieron al implementar los métodos numéricos ya descritos, y donde la principal contribución son las curvas de rotación obtenidas.

# Capítulo 4

## Resultados

En esta tesis se propuso la hipótesis que la materia oscura es un condensado de Bose-Einstein rotante, cuyo bosón asociado tiene una masa ultraligera  $m \sim 10^{23}$  eV. Para estudiar el efecto de aplicar rotación inicialmente se hicieron los experimentos numéricos descritos a continuación.

### 4.1. Pruebas del código

Para validar la normalización y precisión del código, se verifica que la evolución de una configuración de equilibrio en el estado base sea la correcta, es decir, que la densidad de probabilidad permanezca constante en el tiempo. Esta evolución incorpora la ecuación de Poisson y por lo tanto abarca la precisión del resolutor elíptico que se implementó. De acuerdo a la normalización que se usó en [17, 18] el valor del máximo de la densidad es  $\rho(r) = 1$ . En la Fig. 4.1 se muestra la evolución del valor central de la densidad de probabilidad en el dominio 3D. Este valor equivale a la norma infinito  $L_\infty(\rho)$  de la densidad de probabilidad, con el fin verificar que la convergencia en el límite continuo es de segundo orden, se muestran dos distintas resoluciones, una de  $\Delta\xi_1 = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,2$  y otra  $\Delta\xi_2 = \Delta\xi_1/2$ , se puede observar que conforme aumenta la resolución, el máximo de la densidad tiende a 1 con un factor  $2^2$ , lo cual es consistente con la discretización a segundo orden que se usó. Para mostrar que el sistema es considerablemente dinámico, en esta misma figura se muestra la parte real de la función de onda a distintos valores del tiempo.

En la figura 4.2 se muestra que  $2K + W + 3I$  converge a cero para el caso de  $a = 0$ , el cual indica que el sistema permanece virializado durante toda la evolución. Esta prueba confirma que el resolutor elíptico usado resolver la ecuación de Poisson y el algoritmo de evolución trabajan a la perfección.

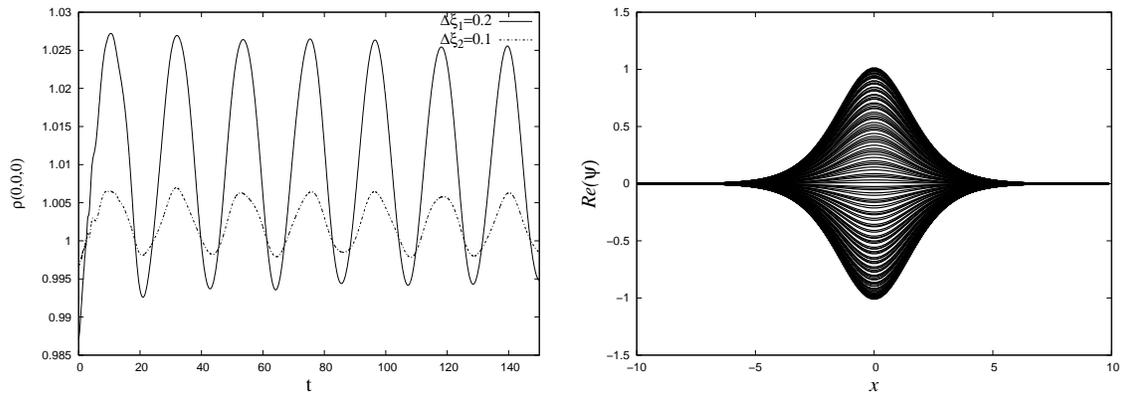


Figura 4.1: Izquierda: se muestra la norma infinito  $L_\infty(\rho)$  de la densidad de probabilidad correspondiente a una configuración de equilibrio para dos resoluciones distintas,  $\Delta\xi_1 = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0,1$  y  $\Delta\xi_2 = \Delta\xi_1/2$ . Se observa que conforme se aumenta la resolución, el máximo de  $\rho$  converge a 1 con un factor  $2^2$  que indica convergencia de segundo orden. Derecha: se muestra snapshots de la parte real de la función de onda y su considerable dinámica, mientras la densidad de probabilidad se mantendrá inmóvil en el límite continuo.

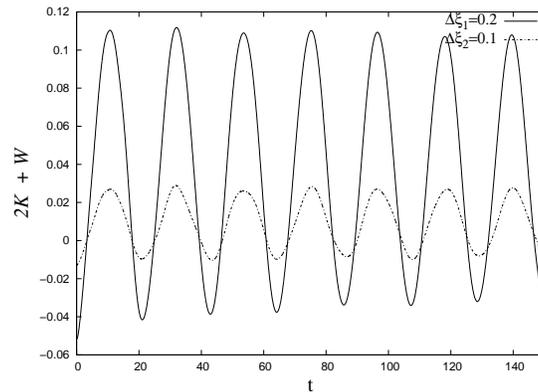


Figura 4.2: Se muestra la relación  $2K + W + 3I$  para una configuración en el estado base esféricamente simétrica. El cálculo está hecho para  $a = 0$  con dos diferentes resoluciones, se observa que la convergencia a cero se da segundo orden, lo cual indican que la configuración permanece virializada en el límite continuo.

## 4.2. Estructura de las simulaciones

En el caso ideal se tendría un dominio numérico de tamaño infinito, sin embargo en la práctica el dominio es finito y la resolución usada en las simulaciones también lo es. En el problema de esta tesis, se desea que la frontera se encuentre lejos para que el sistema tenga espacio para relajarse sin que los errores de la frontera se reflejen y contaminen los resultados. El código no es paralelizado y por tanto el dominio y la resolución se ven restringidos a valores modestos. Los experimentos numéricos se hicieron en un dominio numérico de  $x_{min} = y_{min} = z_{min} = -40$  y  $x_{max} = y_{max} = z_{max} = 40$ , con una resolución espacial de 180 puntos por cada dirección. Se trata de la mejor resolución que se pudo usar, capaz de resolver el perfil de densidad.

Respecto a las unidades físicas que se deben elegir para representar los observables, es necesario fijar el valor de  $\lambda$ . Una forma de hacerlo consiste en resolver para  $\lambda$  una de las igualdades mostradas en las Ecs. (3.1) y (3.2), por ejemplo, si se fija el radio de la galaxia  $\tilde{r}$  y el dominio numérico  $r$  implica que  $\lambda = \frac{\hbar}{mc} \frac{r}{\tilde{r}}$ , para este trabajo se tomó un radio de  $80kpc$ , y una masa de  $m = 10^{-23} eV/c^2$ , para estos valores  $\lambda = 0,00031974$ . Una vez que se fijó  $\lambda$  se pueden recuperar el valor de la masa física  $\tilde{M} = \frac{\hbar c}{mG} \lambda M$  en  $M_{\odot}$ , la velocidad de rotación  $\tilde{v} = c\lambda v$  en  $Km/s$ , el momento angular  $\tilde{L}_z = \frac{\hbar c}{4\pi G m^2} L_z$  en unidades de  $\hbar$ , la energía total  $\tilde{E} = \frac{\hbar c^3}{4\pi G m} \lambda^3 E$  y el potencial gravitacional  $\tilde{U} = mc^2 \lambda^2 U$  en *joules*.

A continuación se mostrará la evolución del sistema GPP, que tiene como datos iniciales una configuración de equilibrio esféricamente simétrica, esta evolución se presenta para varios valores de  $L_z$  en unidades de código. También se exploran dos valores de  $a = 0$  y  $a = 0,5$  y se mostrará que el comportamiento es muy similar en los dos casos.

Si bien, estas configuraciones de equilibrio esféricas tienen energía total negativa y son estables [17, 18], la adición de momento angular cambia todas las propiedades del sistema a partir el tiempo inicial, incluida la energía total, la cual puede ser negativa, positiva ó que tenga un comienzo en un valor positivo pero con el paso del tiempo se estabilice en torno a un valor negativo. Después de explorar con varios valores de momento angular se encontraron tres escenarios posibles que resultan de agregar rotación (rígida o diferencial) al sistema GPP. Estos caso son: 1) estable con curvas de rotación keplerianas, 2) con tiempo de vida largo y con curvas de rotación planas y 3) inestable. Que tenga largo tiempo de vida significa que el sistema se estaciona en una escala de tiempo de gigaños, que es la escala que se puede cubrir con precisión.

### 4.2.1. Rotación sin autointeracción

Este es el caso de  $a = 0$ , en el cual los bosones no interactúan y por lo tanto su energía de autointeracción  $I$  es cero. En este apartado se muestran los resultados obtenidos al aplicar rotación rígida y diferencial a una configuración de equilibrio esféricamente simétrica.

En el caso de *rotación rígida*, se presentan resultados para  $L_z = 0,6$ ,  $L_z = 0,9$  y  $L_z = 1$ , los cuales son representativos de tres diferentes respuestas del sistema. En el caso de *rotación*

diferencial, estas tres diferentes respuestas se dan con  $L_z = 0,4 \sqrt{r_{axi}}$ ,  $L_z = 0,7 \sqrt{r_{axi}}$  y  $L_z = 0,75 \sqrt{r_{axi}}$ . Todas las curvas de rotación que se mostrarán a continuación, tienen un radio de  $30 \text{ kpc}$  y sólo se muestran hasta un tiempo final del orden de  $1 \text{ Gyr}$ , después de esto vienen a contaminar las simulaciones los errores numéricos que se reflejan en las fronteras.

#### Casos con rotación rígida:

- **Resultados con un perfil inicial**  $e^{-i0,6 \arctan(y/x)} \psi(x, y, z, t)$ . En este caso la magnitud de momento angular que se le aplica a la configuración esférica no es suficiente para redistribuir toda la densidad de bosones y por lo tanto la curva de rotación sigue mostrando una morfología Kepleriana, como ocurría en la solución del sistema GPP con simetría esférica en el estado base. En la Fig. 4.3 se muestra que la energía total cambia de signo, lo cual indica que se trata de un sistema acotado. En la gráfica del mínimo del potencial se puede observar además, de que la región de confinamiento es muy pequeña, que después de  $1 \text{ Gyr}$  las oscilaciones tienen un comportamiento errático, esto se debe al problema de las fronteras que se mencionó arriba. La masa tiende a estabilizarse en torno a  $8,4 \times 10^{10} M_\odot$  y de manera análoga el momento angular se estabilizará.
- **Resultados con un perfil inicial**  $e^{-i0,9 \arctan(y/x)} \psi(x, y, z, t)$ . En este caso las propiedades del sistema se ven más favorables que en el caso anterior, pues el tener un momento angular más grande, implica la existencia de una fuerza centrífuga más grande, la cual redistribuye mejor la densidad de bosones. A consecuencia de esto, se tendrá una mejor curva de rotación, o sea, cada vez más plana cerca de la periferia galáctica. En la Fig. 4.4 se muestran los resultados de explorar las propiedades del sistema, nuevamente la energía pasa de positiva a negativa, lo que indica que el sistema es acotado. Como era de esperarse la masa se estabiliza en torno a un valor menor que en el caso anterior, ahora lo hace en torno a  $5 \times 10^{10} M_\odot$ , de la misma forma el momento angular es mayor que en el caso anterior, y de igual forma se estabiliza. Nuevamente el mínimo de potencial muestra el comportamiento errático para tiempo después de  $1 \text{ Gyr}$ . La curva de rotación ahora esta en concordancia con las observadas en las galaxias dominadas por materia oscura.
- **Resultados con un perfil inicial**  $e^{-i \arctan(y/x)} \psi(x, y, z, t)$ . Resulta obvio que entre mayor sea en momento angular mayor será la dinámica del sistema, es decir, crecen las magnitudes de la energía total y del momento angular. Este caso está ilustrado en la Fig. 4.5, donde se puede ver que el sistema se volvió tan dinámico que el signo de la energía total permanece positivo, lo cual implica un sistema no acotado. Cualitativamente se puede decir que: el tener un momento angular tan alto trae consigo una fuerza centrífuga muy de grande, que eventualmente arrojará la densidad de bosones hacia las fronteras y será absorbida por la esponja hasta quedar nada en el sistema. El sistema se diluye tanto que la curva de rotación para este caso deja de tener sentido físico.

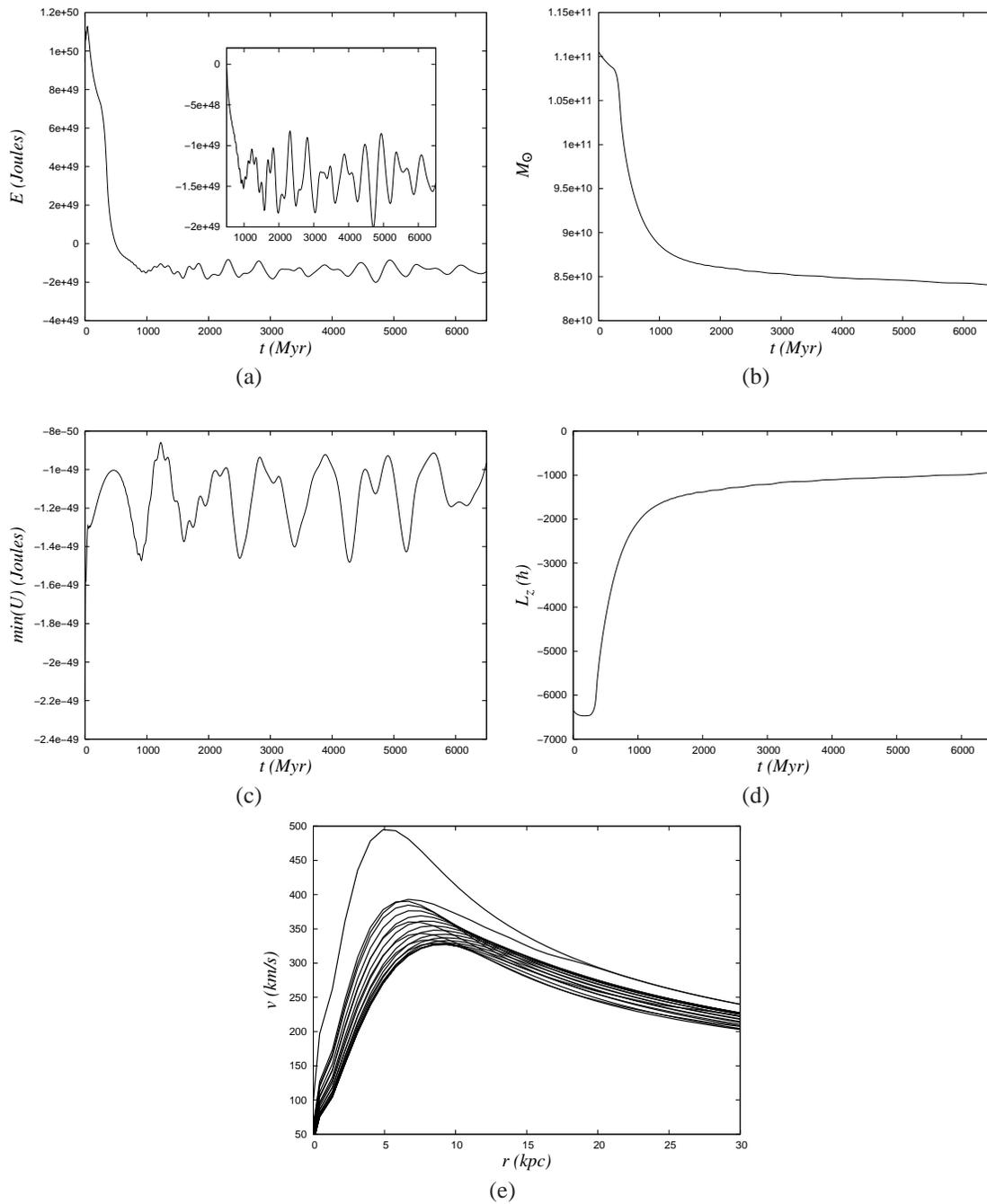


Figura 4.3: Se muestran las propiedades de la configuración para  $a = 0$  y rotación rígida con  $L_z = 0,6$ . (a) La energía total indica que el sistema es acotado. (b) La masa se estabiliza en torno a un valor del orden de  $10^{10} M_\odot$ . (c) El mínimo del potencial gravitacional oscila, lo cual indica que los bosones están confinados en una región pequeña. (d) El valor del momento angular tiende a estabilizarse. (e) La curva de rotación mantiene su perfil Kepleriano después de unos pocos kpc. Es preciso notar que la curva de Rotación, al igual que el mínimo del potencial, se mantiene oscilando todo el tiempo (0 – 1 Gyr). El comportamiento es muy similar al de una configuración en el estado base perturbada.

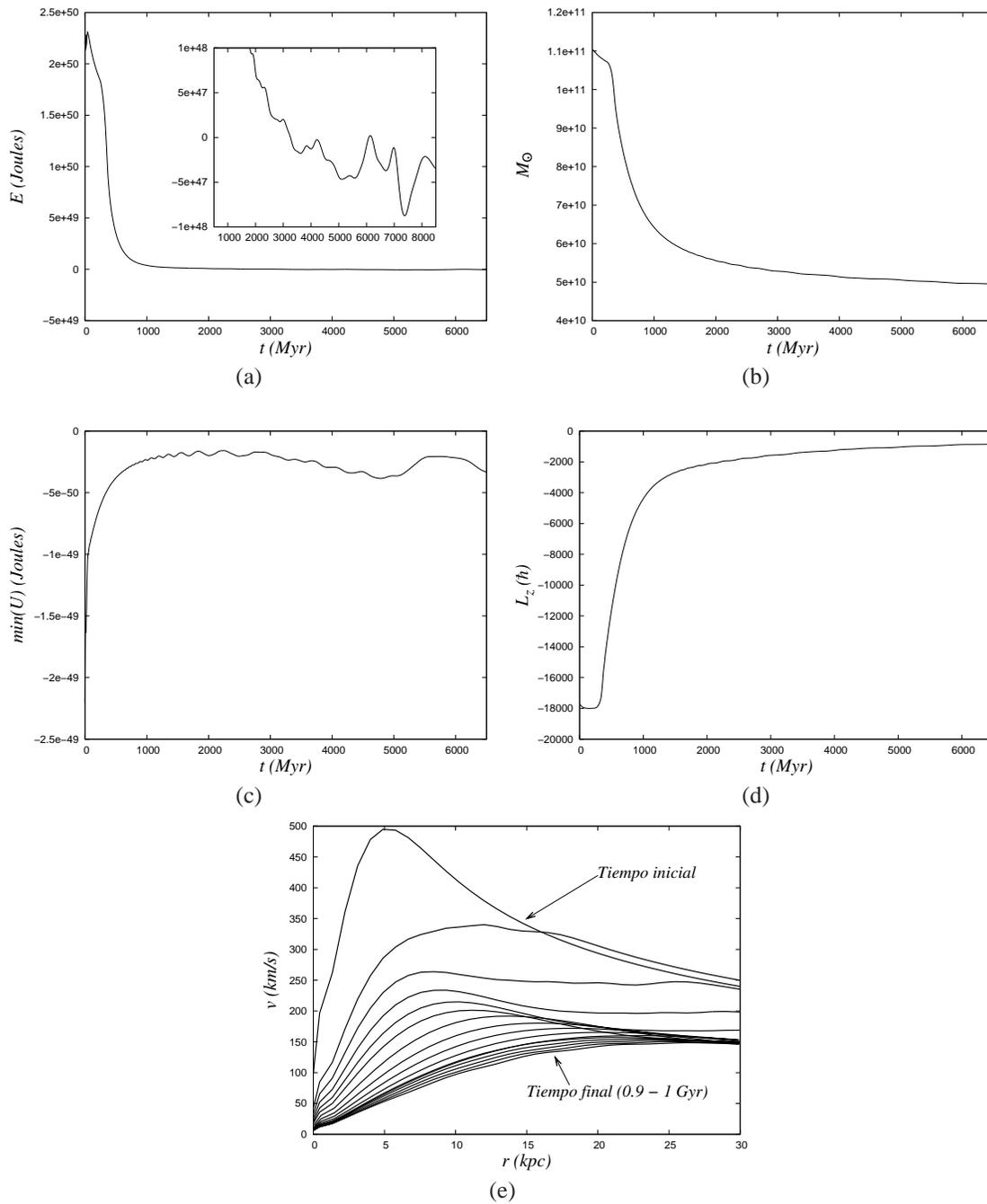


Figura 4.4: Se muestran las propiedades de la configuración para  $a = 0$  y rotación rígida con  $L_z = 0,9$ . (a) La energía total cambia de signo y se estabiliza alrededor de un valor negativo, lo cual indica que se trata de un sistema acotado. (b) La masa se aproxima a un valor estable, el cual puede ser comparado con el valor de la masa de galaxias enanas. (c) El mínimo del potencial deja ver los errores numérico reflejados de las fronteras. (d) El momento angular tiende a estabilizarse. (e) La curva de rotación, inicialmente Kepleriana, tiende a un perfil de planitud a distancias grandes del centro galáctico. Este perfil se estabiliza en un periodo de  $0,9 - 1 \text{ Gyr}$  adoptando en este periodo la forma típica de una galaxia dominada por materia oscura.

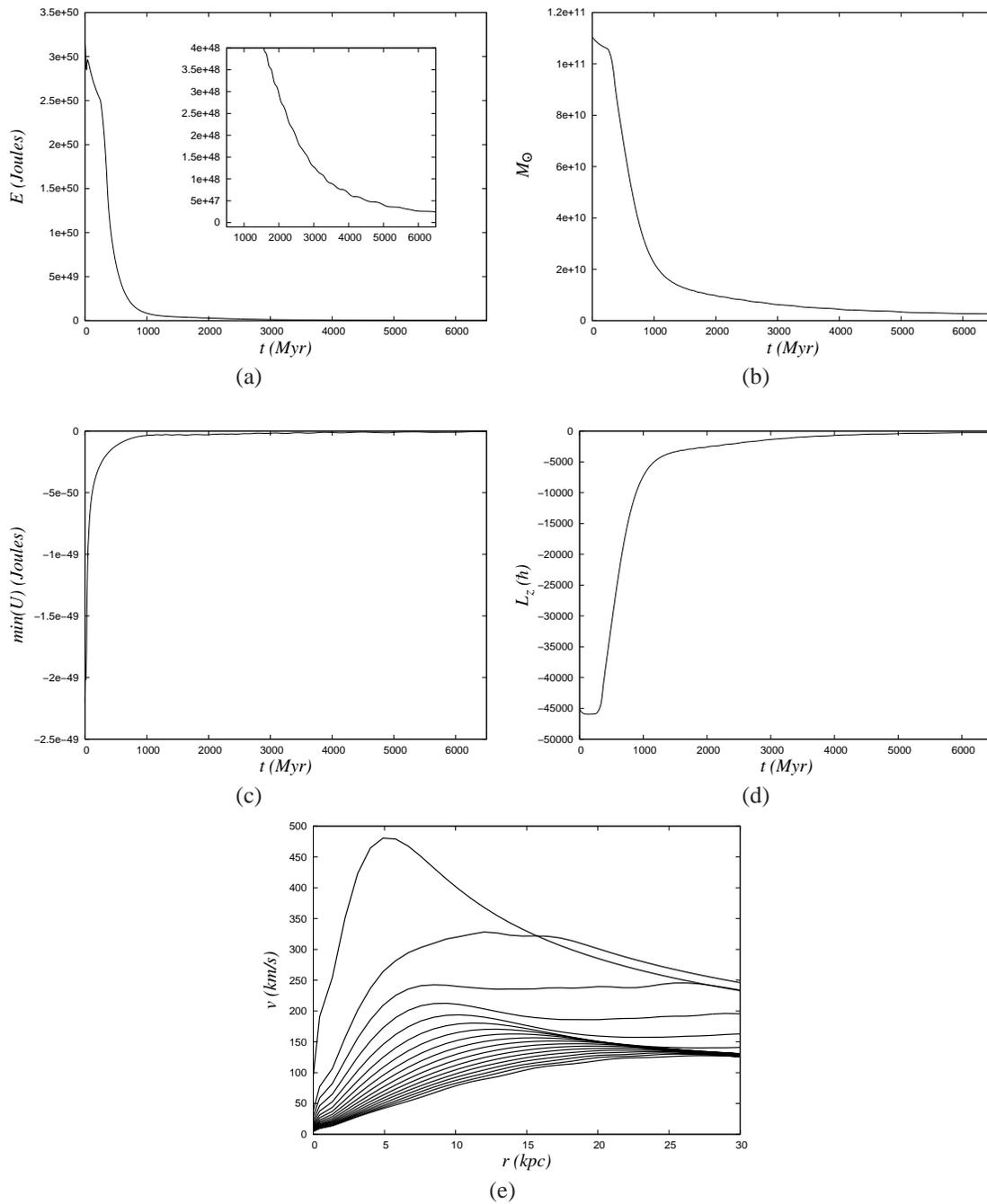


Figura 4.5: Se muestran las propiedades de la configuración para  $a = 0$  y rotación rígida con  $L_z = 1$ . (a) La energía total se mantiene positiva, lo cual implica que este sistema no está acotado. (b) La masa eventualmente será absorbida por la esponja. (c) El mínimo de potencial tiende a cero. (d) El momento angular es tan grande que redistribuye la densidad de bosones hasta que estos eventualmente abandonan el dominio numérico y la configuración se va diluyendo. (e) La curva de rotación tiende a cero, pues se está tratando con una configuración donde su masa tiende a cero.

### Casos con rotación diferencial:

Recordando, este tipo de rotación se obtiene multiplicando el momento angular  $L_z$  con una función  $f(r)$  y en este trabajo  $f(r) = \sqrt{r_{axi}}$ , donde  $r_{axi} = \sqrt{x^2 + y^2}$  es el radio axial. Las magnitudes de momento angular que son representativas de las tres respuestas del sistema son  $L_z = 0,4 \sqrt{r_{axi}}$ ,  $L_z = 0,7 \sqrt{r_{axi}}$  y  $L_z = 0,75 \sqrt{r_{axi}}$  y están descritas a continuación.

- **Resultados con un perfil inicial**  $e^{-i0,4 \sqrt{r_{axi}} \arctan(y/x)} \psi(x, y, z, t)$ . En este caso gran parte de la energía total es negativa, lo que implica un sistema acotado. Sin embargo, el momento angular que se le aplica a la configuración esférica no es suficiente para redistribuir la densidad de bosones, de modo que se observan curvas de rotación totalmente Keplerianas. En la Fig. 4.6 se muestran los resultados de esta simulación, nuevamente se puede observar que el potencial gravitacional confina a la densidad de bosones en una región muy pequeña.
- **Resultados con un perfil inicial**  $e^{-i0,7 \sqrt{r_{axi}} \arctan(y/x)} \psi(x, y, z, t)$ . En este caso la magnitud del momento angular aplicado a la configuración esférica es adecuada para obtener resultados favorables, es decir, con la redistribución de la densidad de bosones necesaria para tener: un sistema acotado, con una masa de unas  $3,6 \times 10^{10} M_\odot$ , una curva de rotación con una planitud a distancias grandes del centro galáctico con una estabilidad del orden de  $0,79 - 1 \text{ Gyr}$ . estos resultados nuevamente son comparables con los datos observacionales de galaxias dominadas por materia oscura. En la Fig. 4.7 se muestran estos resultados.
- **Resultados con un perfil inicial**  $e^{-i0,75 \sqrt{r_{axi}} \arctan(y/x)} \psi(x, y, z, t)$ . En este caso se muestra una inestabilidad del sistema, debido a una magnitud de momento angular relativamente alto. En la Fig. 4.8 se muestran los resultados de esta simulación, donde es evidente que la energía total se mantiene positiva y que la densidad de bosones eventualmente será expulsada del sistema, lo cual implica que la masa total y la curva de rotación gradualmente desaparezcan. Por lo tanto configuraciones con magnitud igual o mayor que en este caso quedan descartadas como posibles casos favorables.

Como resumen de la rotación sin autointeracción se puede decir que: los tipos de rotación (rígida o diferencial) muestran comportamientos similares con distintas magnitudes de momento angular  $L_z$ , con valores relativamente bajos el sistema se mantiene estable pero con curvas Keplerianas. Por el contrario, con magnitudes de  $L_z$  relativamente altos el sistema se vuelve inestable, y en un rango acotado por estos dos extremos se encuentra un sistema que es estable intervalo de tiempo, donde las curvas de rotación son comparables con las observadas en galaxias dominadas por materia oscura.

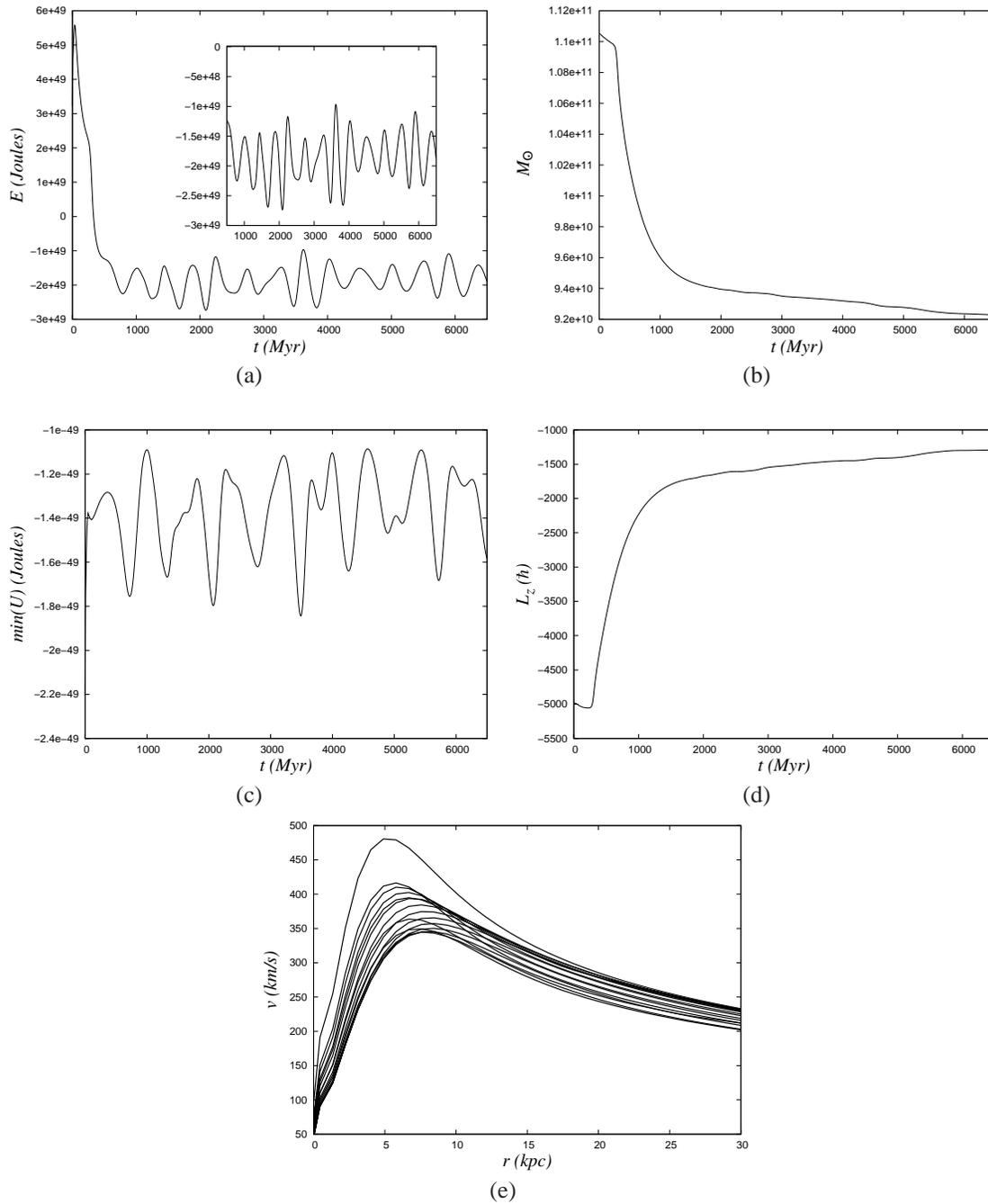


Figura 4.6: Se muestran las propiedades de la configuración para  $a = 0$  y  $L_z = 0,4 \sqrt{r_{axi}}$ . (a) La energía total tiene claramente a un valor negativo, por lo tanto se trata de un sistema acotado. (b) La masa se estabiliza, lo cual indica que el sistema está relajado. (c) Las oscilaciones del mínimo de potencial son indicación de que los bosones están confinados en pequeñas regiones, y como consecuencia se tiene curvas de rotación Keplerianas. (d) El momento angular se estabiliza en torno a un valor relativamente chico, el cual no es suficiente para redistribuir de manera adecuada la densidad de bosones. (e) Las curvas de rotación se mantienen oscilando durante toda la evolución. El comportamiento es muy similar al de una configuración con el estado base perturbado.

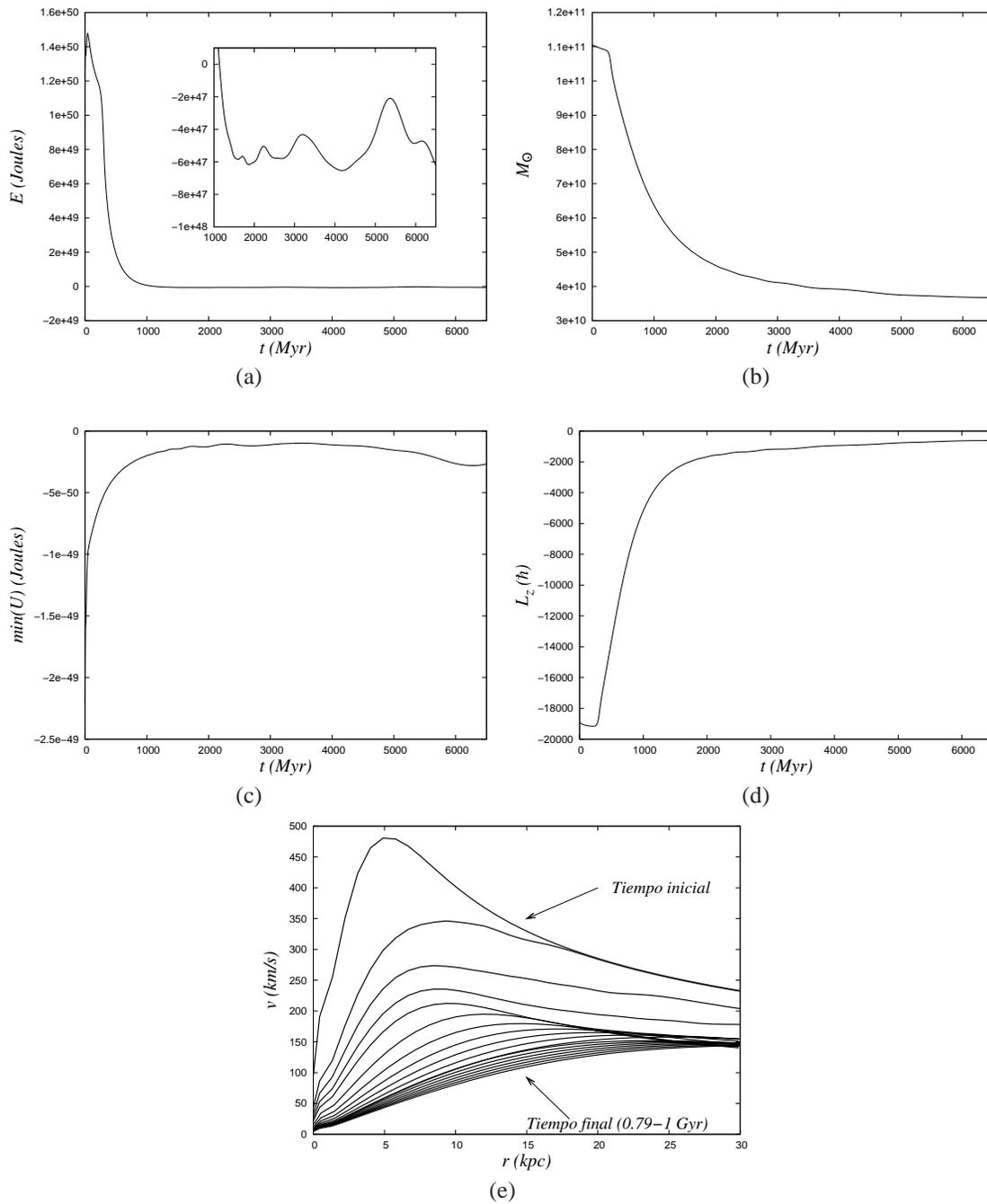


Figura 4.7: Se muestran las propiedades de la configuración para  $L_z = 0,7 \sqrt{r_{axi}}$ . (a) La energía total presenta un cambio de signo, con lo cual se tiene un sistema acotado. (b) La masa se estabiliza en un valor que contrasta con una galaxia enana. (c) El mínimo del potencial también tienden a un valor estable cerca de 1 Gyr, después de este tiempo se presentan oscilaciones debidas a los errores reflejados de las fronteras numéricas. (d) El momento angular se estabiliza. (e) La curva de rotación es inicialmente Kepleriana y al paso del tiempo se estabiliza en un perfil de planitud típico de una galaxia dominada por materia oscura, el periodo de tiempo donde se estabiliza es 0,79 – 1 Gyr.

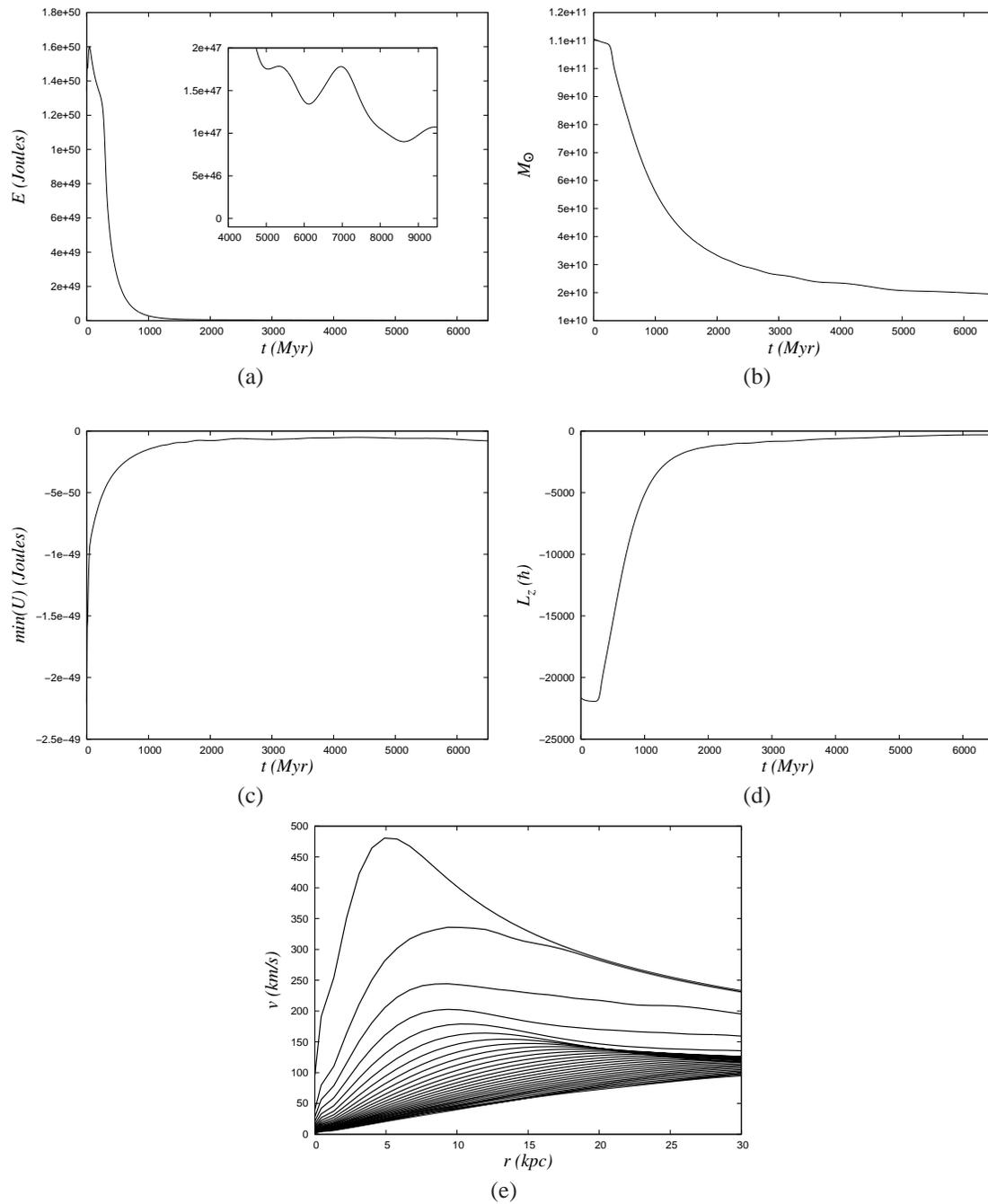


Figura 4.8: Se muestran las propiedades de la configuración para  $L_z = 0,75 \sqrt{r_{axi}}$ . (a) La energía total permanece positiva, síntoma de un sistema que no está acotado. Por otro lado, tanto el incremento del potencial gravitacional (figura c), como el del momento angular (figura d) y el decaimiento de la masa dentro del dominio numérico (figura b), indican que la materia está siendo expulsada por la semejante rotación y por ende la curva de rotación tenderá a desaparecer (figura e).

### 4.2.2. Rotación con autointeracción

En este caso sólo se exploró con un valor positivo el parámetro de autointeracción, dicho valor está dado en unidades de código por  $a = 0,5$ . Este tipo de autointeracción contribuye con un término repulsivo entre bosones y cambia la interacción entre los términos cinético y gravitacional. Este efecto ya es conocido en configuraciones esféricamente simétricas en el estado base, en el cual se puede permitir más masa cuando la autointeracción es más fuerte [17]. En este apartado se muestran los mismos tres regímenes que en el caso de un campo libre.

En el caso de *rotación rígida*, los valores del momento angular son  $L_z = 0,4$ ,  $L_z = 0,85$  y  $L_z = 0,95$ , los cuales son representativos de las tres diferentes respuestas del sistema. En la figura 4.9 se presentan las simulaciones para este tipo de rotación, y ya que los resultados son muy similares al caso del campo libre, sólo se muestran las gráficas para la energía total y para la curva de rotación en los tres casos. El primer caso es con  $L_z = 0,4$ , con este valor se obtiene un sistema acotado, con la energía total  $E$  fluctuando en torno a un valor negativo. Sin embargo, este valor de momento angular es insuficiente para redistribuir la densidad de bosones y por lo tanto curvas de rotación se mantienen, con su forma Keple- riana, oscilado durante toda la evolución. En el caso para  $L_z = 0,85$  se obtuvieron buenos resultados, o sea, un sistema acotado con  $E < 0$  y con curvas de rotación planas que se mantienen estables en un intervalo de  $0,9 - 1Gyr$ . En el caso de  $L_z = 0,95$  se muestra un sistema que no está acotado, donde  $E > 0$  y curvas de rotación que tienden a desaparecer conforme aumenta el tiempo de la evolución, esto es una consecuencia de una rotación relativamente grande, la cual eventualmente expulsará del dominio la densidad de bosones.

En el caso de *rotación diferencial*, las tres diferentes respuestas del sistema se dan con  $L_z = 0,25 \sqrt{r_{axi}}$ ,  $L_z = 0,6 \sqrt{r_{axi}}$ ,  $L_z = 0,7 \sqrt{r_{axi}}$ . Nuevamente sólo se presentarán las gráficas para la energía total y para la curva de rotación en los tres casos, ya que los resultados continúan siendo muy similares al caso del campo libre. En la figura 4.10 se muestran estos resultados. El caso con  $L_z = 0,25 \sqrt{r_{axi}}$  muestra un sistema acotado, la característica principal de pequeñas rotaciones es que la energía total se mantiene oscilando alrededor de un valor negativo, por otro lado que la curva de rotación también se mantiene oscilado durante toda la evolución pero sin perder su forma Keple riana. En el caso de  $L_z = 0,6 \sqrt{r_{axi}}$  se obtiene curvas de rotación planas con un intervalo de estabilidad del orden de  $0,87 - 1Gyr$ , en este caso la energía total tiende a estabilizarse en un valor negativo, lo que indica que se trata de un sistema acotado. Por último, el caso de  $L_z = 0,7 \sqrt{r_{axi}}$ , en este caso el sistema no está acotado y las curvas de rotación tienden a cero junto con las otras observables, pues la rotación tan alta expulsará eventualmente toda la materia.

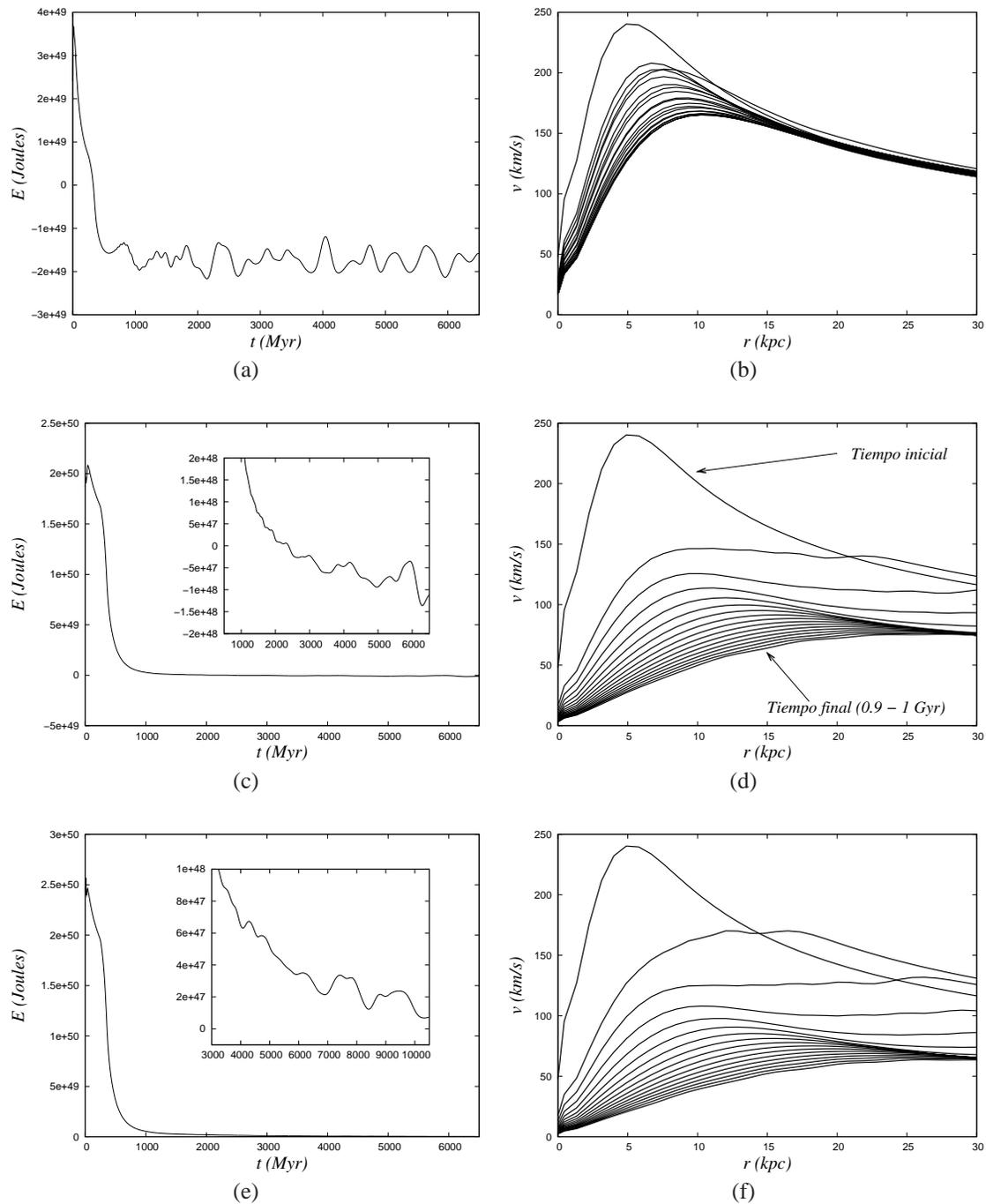


Figura 4.9: Se muestran las propiedades de la configuración para rotación rígida con un parámetro de autointeracción dado por  $a = 0,5$ . (a) y (b): muestran los resultados para  $L_z = 0,4$ , en donde, la energía tiende claramente a un valor negativo y la curva de rotación se mantiene oscilando durante toda la evolución. (c) y (d): muestran los resultados para  $L_z = 0,85$ , este caso total puede ser comparable galaxias dominada por materia oscura, la curva de rotación se estabiliza en un periodo de tiempo de 0,9 - 1 Gyr. (e) y (f): los resultados para este caso se obtuvieron para  $L_z = 0,95$ , los cuales corresponden a un configuración que será eventualmente destruida por la rotación.

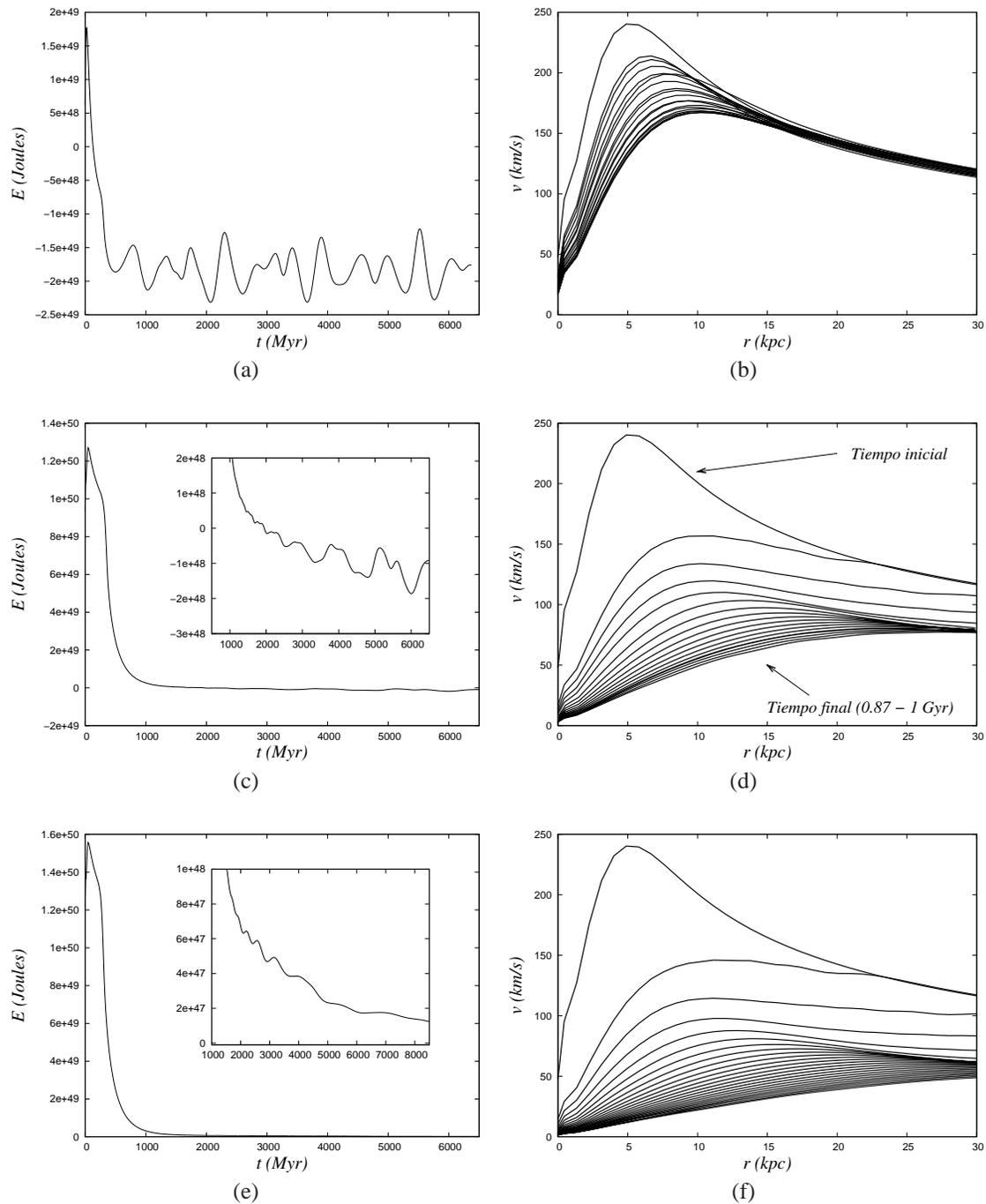


Figura 4.10: Se muestran las propiedades de la configuración para rotación diferencial con un parámetro de auto interacción dado por  $a = 0,5$ . (a) y (b): muestran el caso con  $L_z = 0,25 \sqrt{r_{axi}}$ , con el cual la curva de rotación se mantendrá oscilando. (c) y (d): presentan el caso con  $L_z = 0,6 \sqrt{r_{axi}}$ , el cual puede ser comparable con galaxias dominadas con materia oscura, la curva de rotación se estabiliza en un periodo de tiempo de 0,87 – 1 Gyr. (e) y (f): en este caso se utilizó  $L_z = 0,7 \sqrt{r_{axi}}$ , para este valor, la configuración muestra características de un sistema arruinado por la rotación.

Las simulaciones posiblemente parecen pobres por la falta de optimización de los métodos implementados, en especial la falta de paralelización o falta de refinamiento de la malla. Sin embargo, es un primer paso que motiva aprender a implementar algoritmos de evolución con varios niveles de refinamiento como los utilizados en [25], donde se resolvió este mismo problema con cinco distintos niveles de refinamiento, y donde las fronteras se colocaron en  $x_{min} = y_{min} = z_{min} = -160$  y  $x_{max} = y_{max} = z_{max} = 160$ , es decir, un dominio numérico cuatro veces más grande y por lo tanto los resultados resultan ser mejores durante más tiempo que los obtenidos en esta tesis. Comparando los resultados obtenidos en [25] con los obtenidos en esta tesis, se puede decir que estos últimos resultan ser muy confiables para decir que el código que se implementó en esta tesis es adecuado y seguro para evolucionar el sistema de ecuaciones GPP, en un dominio de tiempo aceptable y aportando resultados consistentes con los de [25].

Con estos resultados se da por terminado el trabajo de esta tesis.

# Capítulo 5

## Conclusiones y comentarios finales

Este trabajo se centra en la solución del sistema GPP dependiente del tiempo, el cual describe la dinámica de un condensado de Bose sometido a la trampa del campo gravitacional generado por él mismo. El objetivo de resolver dicho sistema ha sido estudiar la conjetura de que un condensado de Bose Einstein hecho de bosones ultraligeros, puede formar halos galácticos, en particular que cumpla con la mínima propiedad de tener curvas de rotación como las observadas en las galaxias. Para conseguirlo ha sido necesario desarrollar un nuevo código que resuelve este sistema de ecuaciones en 3D, restringido a configuraciones con simetría axial. Con éste código se exploraron los efectos de la rotación rígida y diferencial de estructuras formadas por dicho condensado.

En este trabajo, las configuraciones en escalas galácticas son parametrizadas por: la masa del bosón, el tipo y magnitud del momento angular aplicado inicialmente a una configuración esférica, y por la autointeracción del gas de Bose. Se monitorean los observables del sistema con el fin de interpretar las propiedades de estabilidad, tendencia de la masa de un halo y su momento angular.

Los resultados que se obtuvieron muestran el impacto que produce la aplicación de distintos valores de momento angular  $L_z$ . Explorando la evolución del sistema con varios valores de  $L_z$ , se encontraron tres diferentes regímenes:

- uno que corresponde a un momento angular insuficiente para modificar la distribución de bosones significativamente, y sus propiedades se parecen a una pequeña perturbación a la configuración esférica, y por lo tanto este régimen no proporciona curvas de rotación galácticas parecidas a las de una galaxia dominada por materia oscura, en un rango de  $5 - 20 \text{ kpc}$ .
- un segundo régimen, en el que el momento angular es capaz de redistribuir la densidad de bosones de tal forma que las curvas de rotación galácticas obtenidas son comparables con las observadas en galaxias dominadas por materia oscura en un rango del orden de  $10 \text{ kpc}$ , donde las configuraciones se estabilizan durante escalas de tiempo largas y permanecen acotadas.

- un tercer régimen, en el cual la rotación es tan fuerte que eventualmente dispersará toda la densidad de bosones hacia fuera del dominio numérico hasta destruir la configuración. El tiempo en que se muestra en todos estos regímenes es del orden de 1 *Gyr*.

Existe mucha semejanza entre la rotación de BEC con y sin autointeracción, es decir, en los dos casos se obtienen los tres regímenes, simplemente cambia el valor del momento angular aplicado. La diferencia entre ellos es que en el caso de un BEC autointeractuante se necesitan magnitudes más pequeñas de  $L_z$  para obtener curvas de rotación comparables con galaxias dominadas por materia oscura.

Sobra decir que diferentes valores de  $L_z$  implican diferentes curvas de rotación, esto implicaría que las diferentes curvas de rotación galácticas observadas corresponden a galaxias con diferente momento angular, esto es posible pues no hay una razón física que lo impida. Finalmente, se concluye que el modelo de BEC rotante es plausible para respaldar al bosón ultraligero como la materia oscura a escala galáctica, pues proporciona curvas de rotación adecuadas a distancias grandes del centro galáctico y masas del orden de galaxias enanas, y en el caso de rotación rígida de un BEC sin autointeracción, sólo se necesita un parámetro libre, el momento angular  $L_z$ .

En un futuro trabajo se podría explorar la extensión del modelo a 3D sin simetrías, resolviendo la ecuación de Poisson sin simetrías, utilizando por ejemplo, métodos espectrales. De la misma manera se puede explorar la evolución del sistema GPP con condiciones diferentes a las expuestas aquí.

# Bibliografía

- [1] R. H. Sanders, *The Dark Matter Problem: A Historical Perspective*, Cambridge University Press 2010.
- [2] F. Zwicky, *ApJ* 86 (1933) 217.
- [3] V.C. Rubin y W.K. Ford, *Astrophys. J* 379 (1970).
- [4] P.J.E. Peebles, *ApJ* 263 (1982) L1.
- [5] G.R. Blumenthal, S.M. Faber, J.R. Primack y M.J. Rees, *Nature* 311 (1084) 517.
- [6] G. Bertone, J. Silk, *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*, Cambridge University Press 2010.
- [7] A.A. Klypin, A.V. Kravtsov, O. Valenzuela and F. Prada, *ApJ* 522 (1999).
- [8] C. Skordis, D. F. Mota, P. G. Ferreira, C. Boehm, arXiv:0505519 [astro-ph].
- [9] J. F. Navarro, C. S. Frenk and S. D. M. White, *Astrophys. J.* 490 (1997) 493.
- [10] Se-Heon Oh, C. Brook, F. Governato, E. Brinks, L. Mayer, W.J.G. de Blok, A. Brooks, F. Walter, arXiv:1011.2777 [astro-ph.CO].
- [11] T. Matos and L. A. Urena-Lopez, *Phys. Rev. D* 63, 063506 (2001).
- [12] C. G. Boehmer and T. Harko, *JCAP* 07 (2007) 025.
- [13] R. L. Guenther, *A numerical study of the time-dependent Schrödinger equation coupled with Newtonian gravity*. PhD Thesis, The University of Texas at Austin 1995.
- [14] D-I Choi, PhD Thesis, *Numerical Studies of Nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon Systems: Techniques and Applications*, 1998.
- [15] C-W. Lai, *A numerical study of boson star*. PhD Thesis, The University of British Columbia.

- [16] A. Bernal, Dynamical studies of self-gravitating scalar field. PhD Thesis. CINVESTAV-IPN.
- [17] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López, ApJ. 645 (2006) 814-819
- [18] F. S. Guzmán and L. A. Ureña-López, Phys. Rev. D 69 (2004) 124033.
- [19] L. A. Ureña-López and Argelia Bernal, arXiv:1008.1231 [gr-qc].
- [20] F. S. Guzmán, F. D. Lora-Clavijo, J. J. González-Avilés, F. J. Rivera-Paleo, JCAP 09 (2013) 034.
- [21] M. Alcubierre, R. Becerril, F. S. Guzmán, T. Matos, D. Núñez, L. A. Ureña-López, arXiv:0301105 [gr-qc] (2003).
- [22] F. S. Guzmán, Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas, Rev. mex. de física 56 (1) 51-68.
- [23] A. Bernal and F. S. Guzmán, Phys. Rev. D **74** (2006) 063504.
- [24] A. Bernal and F. S. Guzman, Phys. Rev. D 74, 103002 (2006).
- [25] F. S. Guzmán, F. D. Lora-Clavijo, J. J. González-Avilés, F. J. Rivera-Paleo, arXiv:1310.3909.
- [26] M. Milgrom, ApJ 270 (1983) 365-370. M. Milgrom, ApJ 270 (1983) 371-383. M. Milgrom, ApJ 270 (1983) 384-389.
- [27] J.R. Primack, arXiv:0112336 [astro-ph] (2001).
- [28] C.Boehm, P. Fayet and R. Schaeffer, astro-ph, 0012404.
- [29] Gordon, D. Smith, Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite difference Methods, Oxford University Press, 3rd Edition, 1985.
- [30] T. Matos, J. A. Vazquez and J. Magana, arXiv:0806.0683 [astro-ph].
- [31] S.-J. Sin, Phys. Rev. D50, 3650 (1994).
- [32] Miguel Alcubierre. Introduction to 3+1 Numerical Relativity Oxford Science Publications Phys, 2008.