



**UNIVERSIDAD MICHOCANA DE
SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez**

**“ EL USO DE MODELOS EN LA GEOMETRÍA
DE LOBACHEVSKI ”**

TESIS

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS**

PRESENTA

JOSÉ LUIS ÁLVAREZ REBOLLAR

ASESOR

DR. ARMANDO SEPÚLVEDA LÓPEZ

MORELIA, MICHOCÁN, JUNIO DE 2012.



Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a mis padres, por todo su amor y apoyo incondicional, especialmente, en los momentos difíciles.

Agradezco a mi hermano por saber escucharme y darme sus valiosos consejos como hermano mayor.

También a mi asesor por haberme aceptado para realizar este trabajo, por toda su paciencia y su apoyo, que fueron indispensables para la realización del mismo.

Agradezco a mis revisores, por haber aceptado leer mi trabajo y hacerme sus valiosas observaciones.

Además, agradezco a mis maestros por su paciencia y sus invaluable enseñanzas, y a mis compañeros y amigos por la bonita y sana convivencia que tuve con ellos, aunque no haya sido mucha.

Por último, quiero agradecer a la Facultad de Ciencias Físico Matemáticas de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo por ser el lugar donde obtuve mi formación profesional.

Índice

1. Introducción	3
2. Breve historia de la Geometría hiperbólica	8
2.1. Algunos argumentos de Euclides sobre la Teoría de las paralelas	8
2.2. Algunos intentos de demostrar el quinto postulado	10
2.3. Trabajos de Saccheri y Lambert	17
2.4. Descubrimiento de la Geometría no euclidiana	21
2.5. Modelos geométricos	23
2.6. Fundamentación de la geometría	24
3. Geometría de Lobachevski	26
3.1. Geometría absoluta	26
3.2. Propiedades de las rectas paralelas	32
3.3. Suma de ángulos en un triángulo	36
3.4. Más propiedades de las rectas paralelas	40
3.5. Triángulos esféricos	44
3.6. Propiedades de los triángulos rectilíneos	46
3.7. Líneas límite y equidistante	49
3.8. Trigonometría hiperbólica	55
3.9. Área en la Geometría de Lobachevski	72
4. Modelos de la Geometría hiperbólica	77
4.1. Primeros modelos	77
4.1.1. Modelo de la pseudoesfera	77

4.1.2.	Modelo de Klein	78
4.1.3.	Modelo del hiperboloide	79
4.2.	Modelo del semiplano superior	79
4.2.1.	Medición de longitudes	80
4.2.2.	Movimientos hiperbólicos	82
4.2.3.	Rectas y circunferencias hiperbólicas	83
4.2.4.	Cumplimiento de los axiomas de la Geometría de Lobachevski	88
4.2.5.	Líneas equidistantes y líneas límite	89
4.2.6.	Algunos teoremas de la Geometría de Lobachevski	91
4.2.7.	Medición de segmentos de rectas hiperbólicas	93
4.3.	Modelo del disco unitario	95
4.3.1.	Puntos, rectas y ángulos	96
4.3.2.	Movimientos hiperbólicos	97
4.3.3.	Cumplimiento de los axiomas de la Geometría de Lobachevski	99
4.3.4.	Algunos teoremas de la Geometría de Lobachevski	101
4.4.	Algunas proposiciones equivalentes al quinto postulado vistas con los modelos	103
5.	Conclusiones	106

1. Introducción

La geometría y la aritmética son las ramas más antiguas de las matemáticas. El origen de ambas disciplinas se remonta a las antiguas civilizaciones de Egipto y Mesopotamia; surgieron por la necesidad que tenían los habitantes de estas regiones por resolver problemas prácticos.

Desde el principio y hasta alrededor del año 800 a.C., los conocimientos adquiridos en estas regiones se obtenían mediante la experiencia y se comprobaban por medio de la experimentación. Esto satisfacía las necesidades prácticas de esa población y, quizás, por este motivo no se había intentado dar un tratamiento más formal a la matemática.

Los griegos fueron los primeros en intentar formalizar las matemáticas. Siendo herederos de gran parte del conocimiento que los egipcios y babilonios habían adquirido, y debido a su afición y capacidad por elaborar teorías para explicar el universo, en matemáticas quisieron llegar a un nivel de abstracción mayor. Su estructura social les permitía lograr este propósito, pues tenían gente dedicada solamente a ello.

En Grecia, hubo varios matemáticos que descubrieron teoremas importantes usando un tipo de razonamiento que permitiera introducir argumentos que justifiquen lo que se afirmaba. Sin duda, para los propósitos de este trabajo, el más importante es Euclides de Alejandría, quien vivió alrededor del año 300 a.C.. Euclides compiló todo el conocimiento matemático de su tiempo, en trece libros conocidos como *Los Elementos*.

En *Los Elementos*, Euclides comienza dando definiciones de los términos más elementales y hace afirmaciones que relacionan estos términos, los cuales se llaman postulados. Además, Euclides da algunas nociones comunes conocidas como axiomas. A partir de esto, desarrolla toda la matemática conocida demostrando las demás afirmaciones, llamadas teoremas. Para hacerlo, cuida que en la demostración de un teorema sólo se usen definiciones, teoremas probados previamente, postulados y nociones comunes.

El tratamiento que Euclides da a las matemáticas en *Los Elementos* se conoce como *método axiomático*. El método axiomático es muy importante ya que permite desarrollar teorías matemáticas siguiendo un orden definido; éste es el método que actualmente se utiliza.

Los Elementos de Euclides fueron criticados desde su publicación, lo cual ocurrió porque cometió algunos errores lógicos, como dar por hecho afirmaciones que no habían sido establecidas como axiomas o postulados y tampoco eran teoremas probados con anterioridad. Sin embargo, la parte más cuestionada fue la correspondiente al quinto postulado. A continuación explicamos brevemente en qué consistía el problema que se advertía sobre el quinto postulado.

Para los griegos, un postulado debía ser evidente por sí mismo. Los primeros cuatro postulados cumplían evidentemente este ideal. A continuación enunciamos los cuatro postulados:

1. Dados dos puntos P y Q del plano, existe una única línea recta que pasa por P y Q .

2. Dado cualquier segmento AB , es posible prolongarlo en ambos sentidos tanto como sea necesario.
3. Dados dos puntos C y A , existe una circunferencia de centro C y radio $r = CA$.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Sin embargo, el quinto postulado no es tan evidente como los demás. El postulado es el siguiente:

5. Si una recta al incidir sobre otras dos rectas, hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

La figura siguiente, donde $\alpha + \beta < 180^\circ$, muestra la interpretación del postulado.

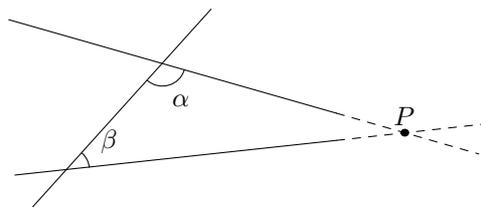


Figura 1. Quinto postulado de Euclides.

Los primeros cuatro postulados son fácilmente comprobables por medio de la experimentación. Sin embargo, el quinto no lo es, pues no es posible determinar si dos rectas en toda su extensión se cortan, ya que sólo se pueden trazar segmentos finitos de recta. Además, hay que destacar que Euclides no usa el quinto postulado desde el principio, sino que trata de desarrollar lo más posible sin él. Esto hizo pensar que Euclides tampoco estaba satisfecho clasificándolo como postulado. Por lo que debería ser un teorema y, como tal, se tenía que demostrar.

Durante aproximadamente dos milenios, muchos matemáticos trataron de demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro. Se dieron varias supuestas demostraciones, pero en todas ellas había un error. El error siempre consistía en dar por hecho una afirmación equivalente al postulado. De esta manera, surgieron variadas proposiciones equivalentes al postulado, las cuales dieron algunas ideas para solucionar el problema. Entre ellas está el postulado de John Playfair (1748-1819) que se muestra en la Figura 2.

5. Dada una recta l y un punto P que no esté sobre la recta l , existe una única recta m que pasa por P y que es paralela a l .

El postulado de Playfair fue sumamente importante para resolver el problema del quinto postulado, pues su negación dio origen a una nueva geometría, llamada *Geometría hiperbólica*.

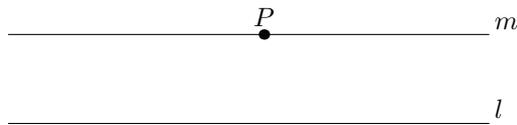


Figura 2. Postulado de Playfair.

El matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) fue uno de los primeros en darse cuenta de que la clasificación del quinto postulado era correcta. Lo que hizo fue negar el postulado de Playfair y mostró que no había ninguna contradicción con los demás postulados. También los matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y János Bolyai (1802-1860) se dieron cuenta de esto, pero Lobachevski fue el primero en hacer públicos sus resultados.

Lobachevski desarrolló la Geometría hiperbólica aceptando los primeros cuatro postulados de Euclides y las primeras 28 proposiciones de *Los Elementos*, que son independientes del quinto postulado; en lugar del quinto postulado, Lobachevski usa la siguiente afirmación (Figura 3), conocida como postulado de Lobachevski:

5. Si P es un punto que no está en la recta AB y si Q es el pie de la perpendicular desde P hasta AB , hay desde P dos rayos, PX , PY , que no coinciden en la misma recta y no cortan a AB , y tales que cualquier rayo PZ desde P y que quede dentro del $\angle XPY$ que contiene a PQ , cortará a AB .

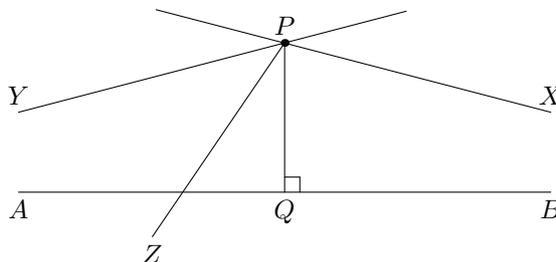


Figura 3. Postulado lobachevskiano de las paralelas.

Lamentablemente, este desarrollo de la Geometría hiperbólica de Lobachevski implica dificultades para entender su contenido, debido a que va en contra de la intuición y la percepción sensorial. Por ello, Lobachevski recibió varias críticas e insultos por parte de algunos de sus compañeros rusos, que fueron los primeros en leer su trabajo. Esas críticas eran hirientes y expresaban que el trabajo de Lobachevski sólo contenía ideas absurdas e inútiles, escritas de la manera más incomprensible. Esto quiere decir que sus compañeros no entendieron lo que Lobachevski quería expresar en su libro acerca de la nueva geometría.

Sin embargo, la realidad es que las primeras personas que leyeron el trabajo de Lobachevski no eran competentes para hacerlo, pues eran ideas completamente nuevas que no cualquiera podía asimilar. Cuando Gauss se enteró del trabajo de Lobachevski, lo leyó y fue el primero en entenderlo. Finalmente, Gauss hizo que se reconociera el trabajo de Lobachevski.

Aunque ya se habían obtenido una buena cantidad de resultados de la Geometría hiperbólica, a partir de los axiomas, aun quedaba pendiente verificar que en realidad se trataba de una teoría consistente; es decir, asegurar que no se encontraría ninguna contradicción al seguir desarrollándola. Para ello, varios matemáticos buscaron una manera de ver la Geometría hiperbólica dentro de la Geometría euclidiana; es decir, estaban buscando un modelo de la Geometría de Lobachevski. Así, la Geometría hiperbólica iba a ser tan consistente como la Geometría euclidiana e iba a ser más fácil de entender, aplicar y desarrollar, puesto que la Geometría euclidiana se corresponde más con nuestra intuición.

Surgieron varios modelos, pero los dos más importantes para nuestro propósito son llamados comúnmente modelos de Henri Poincaré (1854-1912). El primero de ellos, consiste en ver el plano como los puntos internos del círculo unitario centrado en el origen de \mathbb{R}^2 y las rectas como circunferencias ortogonales a la circunferencia unitaria y diámetros de ésta (Figura 4). En el segundo, el plano es el semiplano superior de \mathbb{R}^2 , donde las rectas son circunferencias ortogonales al eje x y las rectas perpendiculares a dicho eje (Figura 5). Estos dos modelos facilitan enormemente la asimilación de la Geometría hiperbólica y proporcionan una buena guía intuitiva de ella.

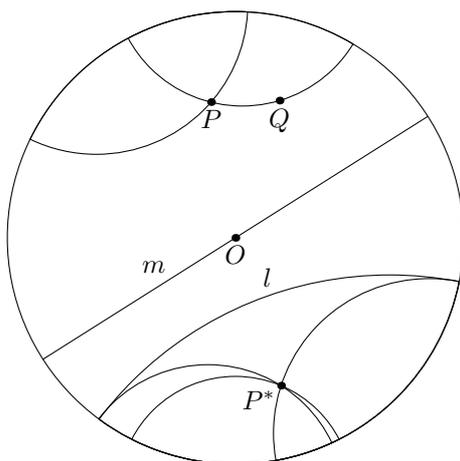


Figura 4. Modelo del disco unitario de Poincaré.

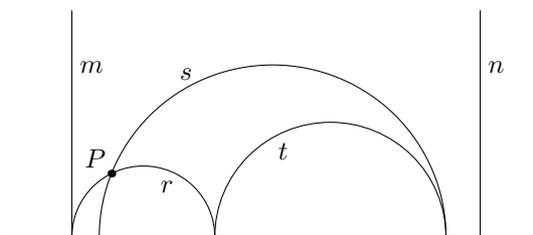


Figura 5. Modelo del semiplano superior de Poincaré.

El uso de los modelos fue muy importante ya que, además de adquirir una mejor idea intuitiva de la nueva geometría, permitió entender sus aplicaciones a otras ramas de las matemáticas o de la física. Desde entonces, las matemáticas adquirieron mayor rigor y formalidad. Conocer

estos modelos ayuda, significativamente, a la comprensión de la Geometría hiperbólica; conviene estudiarlos con detenimiento y tener la mente abierta para aprender algo diferente a lo que comúnmente dice la intuición.

El propósito de este trabajo es dar a conocer, esperamos que en la forma más entendible posible, cómo fue que se descubrió y desarrolló la Geometría hiperbólica; cuál fue el primer desarrollo de Lobachevski y qué beneficios trae el uso de los modelos. Describiremos en detalle los modelos de Poincaré y probaremos los resultados referentes a la Trigonometría de Lobachevski; así mismo, la contrastaremos con la Trigonometría euclidiana.

Así, considerando nuestro problema de investigación, las preguntas que guían el desarrollo de este trabajo son las siguientes:

1. ¿Cuáles fueron los factores que influyeron, principalmente, en el descubrimiento de la Geometría hiperbólica?
2. ¿Cómo fue el primer desarrollo de la Geometría de Lobachevski y qué dificultades tuvo para dar conocer su teoría?
3. ¿Esencialmente, en qué se diferencian la Geometría hiperbólica y la Geometría euclidiana?
4. ¿Cómo es el tratamiento de la Geometría hiperbólica a través de modelos y cómo contribuye esto en el desarrollo de la intuición?
5. ¿Qué ventajas ofrece el tratamiento con modelos respecto al tratamiento axiomático de la Geometría hiperbólica?

Los intentos por solucionar el problema del quinto postulado de Euclides serán abordados en el Capítulo 2. También ahí veremos cómo se descubrió la Geometría hiperbólica y cuáles fueron las primeras dificultades que trajo la aceptación de la misma.

En el Capítulo 3 desarrollaremos la Geometría hiperbólica de la manera axiomática usando, esencialmente, las ideas de Lobachevski, con el propósito de mostrar en qué consiste este desarrollo; esto puede ayudar a entender por qué va en contra de la intuición.

Finalmente, en el Capítulo 4, mostraremos el desarrollo de la Geometría de Lobachevski mediante diversos modelos para mostrar las ventajas de su uso. Además, haremos ver que también se pueden usar herramientas de álgebra y otras ramas de las matemáticas para estudiar esta geometría.

2. Breve historia de la Geometría hiperbólica

En esta sección vamos a explicar el proceso que llevó a la solución del problema de las paralelas. Mostramos algunos trabajos que destacados matemáticos hicieron para intentar demostrar el quinto postulado, así como las circunstancias que llevaron al descubrimiento de la nueva geometría.

Al final de la sección, vamos a mostrar algunas consecuencias importantes de dicho descubrimiento, sin ahondar mucho en detalles, ya que no es el propósito del presente trabajo.

2.1. Algunos argumentos de Euclides sobre la Teoría de las paralelas

Primeramente, vamos a describir el desarrollo inicial de la teoría de las paralelas dado en *Los Elementos*. Nos centraremos solamente en el primer libro, porque es donde Euclides establece sus postulados y empieza a desarrollar la geometría; en particular, la teoría de las paralelas.

Euclides empieza a desarrollar su teoría de las paralelas a partir de la proposición 16 (Figura 6). Esta proposición dice lo siguiente:

“En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es mayor que cada uno de los ángulos internos y opuestos”.

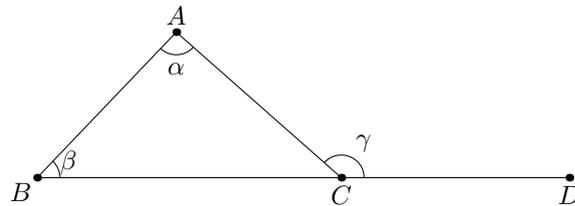


Figura 6. Proposición 16.

Si tenemos dos rectas en un mismo plano cortadas por una tercera recta, obtenemos ocho ángulos en los que pueden suceder los siguientes casos (Figura 7).

1. $\chi = \phi$ o $\delta = \varepsilon$ (Los ángulos alternos internos son iguales).
2. $\beta = \gamma$ o $\alpha = \eta$ (Los ángulos alternos externos son iguales).
3. $\beta = \phi$, $\alpha = \varepsilon$, $\delta = \eta$ o $\chi = \gamma$ (Los ángulos correspondientes son iguales).
4. $\varepsilon + \chi = 180^\circ$ o $\phi + \delta = 180^\circ$ (La suma de los ángulos conjugados internos es igual a dos rectos).

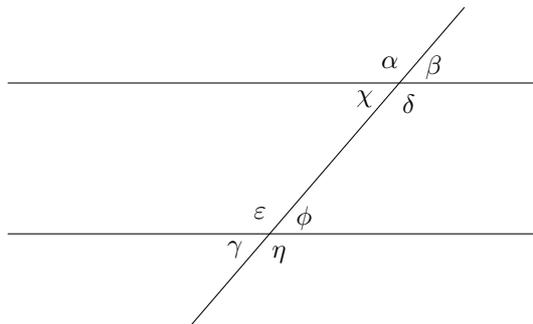


Figura 7. Ángulos entre paralelas cortadas por una secante.

De cualquiera de estas situaciones se desprende que las rectas son paralelas haciendo uso de la proposición 16. Haremos la deducción en el caso 1, los demás son similares.

Si las rectas se cortaran, se formaría un triángulo ABC (Figura 8) en el que el ángulo exterior sería igual a un ángulo interior. Esto contradice la proposición 16; por lo tanto, las rectas son paralelas.

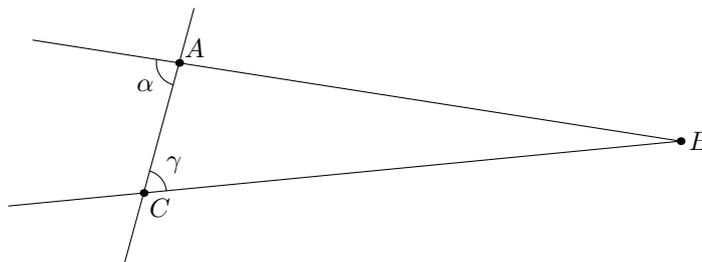


Figura 8. Demostración en el caso 1.

De aquí se sigue a la siguiente proposición:

“Si dos rectas en un mismo plano son cortadas formando ángulos iguales, entonces estas dos rectas son paralelas”.

Es natural preguntarse si el recíproco es cierto. Parece evidente que sí, por nuestra experiencia con líneas paralelas. Además, por la manera en como ordenó el material del libro, se sabe que Euclides intentó demostrar dicho recíproco porque parecía que trató de desarrollar lo más posible sin él. Quizás pensaba que era un teorema pero no logró demostrarlo; y resolvió la situación añadiéndolo como un postulado.

Por primera vez Euclides usa el quinto postulado en la proposición 29. Podremos comprender la redacción final, si seguimos los siguientes razonamientos. Primero notemos que se cumplen las siguientes dos afirmaciones:

1. Si la suma de ángulos conjugados es 180° entonces las rectas son paralelas; de lo contrario, las rectas no lo son y deberán encontrarse en un punto.

2. De la proposición 16 se puede deducir que dos ángulos internos de un triángulo jamás pueden exceder 180° ; ésta es la proposición 17.

La afirmación 1 se deriva del caso 4 en el que los ángulos conjugados internos suman 180° . Enseguida demostramos la afirmación 2:

Consideramos un triángulo ABC y sean α y β los ángulos exteriores correspondientes a $\angle BAC$ y $\angle ABC$ (Figura 9). Entonces, $\alpha + \angle BAC + \beta + \angle ABC = 360^\circ$ y de la proposición 16, tenemos que $\angle BAC < \beta$ y $\angle ABC < \alpha$. Sumando ambas desigualdades obtenemos que $\angle BAC + \angle ABC < \alpha + \beta$ y esto nos implica que $\angle BAC + \angle ABC < 180^\circ < \alpha + \beta$, pues la suma total es de 360° .

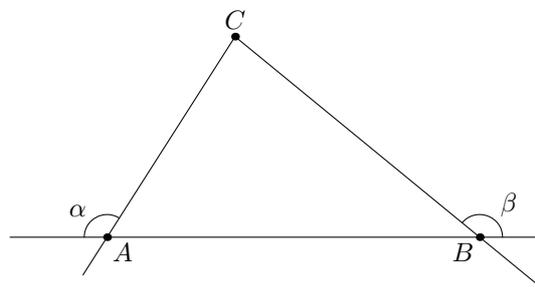


Figura 9. Demostración de la proposición 17.

Combinando estas dos observaciones, Euclides enunció su quinto postulado como sigue:

“Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos”.

De aquí vemos que el quinto postulado era, en cierta manera, el recíproco de la proposición 17 y no se creía posible que la negación de una proposición fuera un postulado. Esto fue un argumento más para la sospecha de que se trataba en realidad de un teorema. Fue entonces que diversos geómetras se dieron a la tarea de probarlo y resolver esta situación. Veremos en las siguientes páginas los intentos más importantes que se hicieron para conseguir ese fin.

2.2. Algunos intentos de demostrar el quinto postulado

Analicemos algunos intentos realizados para resolver el problema de las paralelas, por parte de los sucesores de Euclides. Es importante notar que si bien, estos intentos fueron infructuosos, sirvieron enormemente para la solución del problema, pues dieron variadas proposiciones equivalentes al quinto postulado. En el siguiente capítulo vamos a ver que la negación de tales proposiciones, no implican contradicción con los demás postulados de Euclides.

Primero revisaremos el intento de Proclo (410-485), también llamado “El sucesor” o “Diádoco”, quien fue uno de los últimos grandes filósofos griegos. Proclo se dio cuenta que el quinto postulado quedaría demostrado si primero demostraba lo siguiente (Figura 10).

“Dadas dos rectas paralelas l y m cualesquiera y r otra recta distinta a l y que la corta, entonces r también corta a m ”.

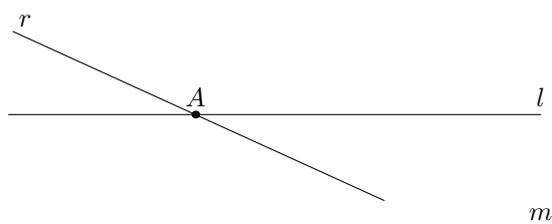


Figura 10. Intento de Proclo.

Proclo demuestra esta afirmación de la siguiente manera:

Si l y r se cortan en A , al prolongar dichas rectas indefinidamente la distancia entre ellas es mayor que cualquier longitud. Así que en algún momento será mayor que la distancia entre las paralelas y así, necesariamente la recta r tiene que cortar a la recta m .

Esta demostración es muy visual y puede parecer, a primera vista, muy convincente. Sin embargo, hay dos detalles que se necesitan explicar:

1. Habla de una distancia entre rectas paralelas.
2. Comenta que la distancia entre dos rectas no paralelas, al prolongarse indefinidamente se tiene una distancia mayor que cualquier magnitud.

Ambos detalles no son tratados por Euclides como postulados ni como teoremas y, por esto, Proclo debió demostrarlos. Proclo atribuyó la segunda afirmación a Aristóteles, mientras que la primera es equivalente al quinto postulado, pero este es un hecho que Proclo desconocía.

Ahora veremos la demostración de John Wallis (1616-1703), quien era profesor de la Universidad de Oxford; en 1663 la dio a conocer en una conferencia. La demostración es la siguiente:

Tenemos que demostrar que la perpendicular AB y la oblicua CD a la recta AC se tienen que cruzar del lado del ángulo agudo $\angle ACD$ (Figura 11). Bajamos del punto F en CD , una perpendicular a CA y sea G , el punto de intersección con CA . Construimos el triángulo $C'A'E'$ semejante al triángulo CGF por la relación de los lados homólogos $CA : GC$. Así que el lado $C'A'$ es igual al CA y $\angle A'C'E' = \angle ACD$. Si ponemos el triángulo $A'C'E'$ de manera que el segmento $A'C'$ coincida con el segmento AC , entonces las rectas $A'E'$ y $C'E'$ coincidirán

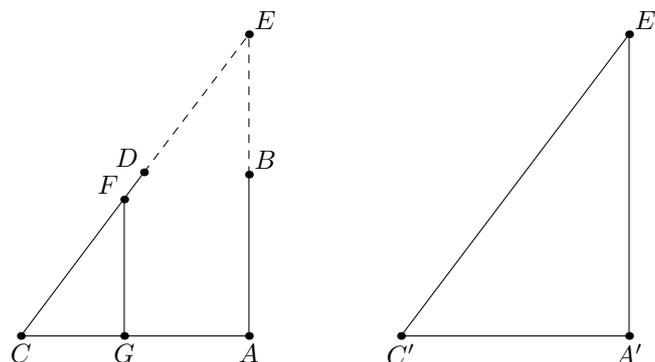


Figura 11. Prueba de Wallis.

respectivamente con las rectas AB y CD , donde el punto E' estará sobre el punto E , que será necesariamente la intersección de AB y CD .

El argumento parece a simple vista irreprochable, pero en realidad supone que a cada triángulo le corresponde un triángulo semejante para cualquier razón entre los lados. Esto no sólo es equivalente al quinto postulado de Euclides sino que es superfluo; es decir, basta con admitir la existencia de dos triángulos semejantes cualesquiera para poder probar el quinto postulado de Euclides.

Ahora revisaremos la “Prueba de rotación” debida al matemático alemán Bernhard Friedrich Thibaut (1775-1832). Esta prueba dice lo siguiente:

Consideremos una regla, donde su orilla coincide con el lado AC de un triángulo y es rotada sucesivamente a través de los tres vértices A, B, C , en la dirección ABC , tal que coincida en su respectivo turno con los lados AB, BC y CA . Cuando la regla regrese a su posición original, ésta debió haber rotado cuatro ángulos rectos y debió hacerlo sobre los ángulos externos del triángulo. Como sabemos que la suma de los ángulos internos y externos de un triángulo es seis rectos, entonces la suma de los ángulos internos es dos rectos.

La falla en esta supuesta demostración, es que las tres sucesivas rotaciones no son equivalentes a una única rotación de cuatro ángulos rectos alrededor de un punto, sino que es equivalente a una traslación a una distancia igual al perímetro del triángulo a lo largo de uno de sus lados.

Este procedimiento también puede realizarse bien sobre una esfera tomando como regla un círculo máximo y se tiene que la suma de los ángulos externos de un triángulo es menor que cuatro rectos.

También hubo falacias obtenidas por tratar con áreas infinitas, como la prueba de Louis Bertrand (1731-1812), profesor de matemáticas en Génova, que enunciamos a continuación:

Sea AX una línea infinitamente alargada en la dirección de X que es dividida en partes

iguales AB, BC, \dots y sean las líneas AA', BB', \dots infinitas cuyos ángulos con AX son iguales (Figura 12). Así que las infinitas tiras $A'ABB', B'BCC', \dots$ pueden ser superpuestas y tener áreas iguales. Pero se requieren infinitas tiras para cubrir el área $A'AX$, contenida entre las líneas AA' y AX . También, podemos dividir el ángulo $A'AX$ en partes iguales $A'AP, PAQ, \dots$. Entonces estos sectores pueden ser superpuestos y tener áreas iguales, pero se requiere sólo una cantidad finita para cubrir el área $A'AX$.

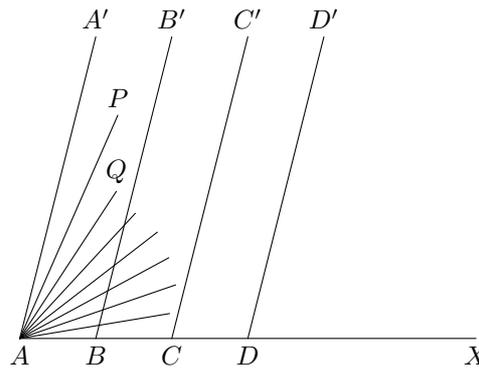


Figura 12. Prueba de Bertrand.

Así tenemos que por más pequeño que el ángulo $A'AP$ pueda ser, siempre su área es mayor que $A'ABB'$. Esto quiere decir que no está contenido el ángulo en la tira y, eventualmente, AP debe cortar a BB' . Es evidente que este resultado es equivalente al quinto postulado.

El problema aquí consiste en aplicar el principio de superposición para áreas infinitas como si fuesen magnitudes finitas. Mostraremos el error con un ejemplo.

Sean $A'ABB'$ y $C'CDD'$ dos tiras infinitas con $AB \neq CD$ (Figura 13). Marcamos AA_1, A_1A_2, \dots a lo largo de AA' cada una igual a CD , marcamos CC_1, C_1C_2, \dots en CC' todas iguales a AB y dividimos las tiras en rectángulos por estos puntos. Así, todos estos rectángulos son iguales en área y si los numeramos consecutivamente, entonces a cada rectángulo en una tira le corresponde el rectángulo con el mismo número en la otra tira. Si admitimos los teoremas de congruencia e igualdad de áreas, tenemos que admitir que las dos tiras tienen la misma área y así, el área es independiente de la longitud de AB . Estas deducciones son tan válidas como las utilizadas anteriormente para deducir el quinto postulado de Euclides.

Veamos ahora el postulado del matemático escocés John Playfair, el cual es equivalente al quinto postulado de Euclides; el cual, como ya mencionamos, considerando su negación como válida, Lobachevski desarrolló la nueva geometría.

El postulado de Playfair es el siguiente:

“Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella”.

Veremos a continuación que es equivalente al quinto postulado.

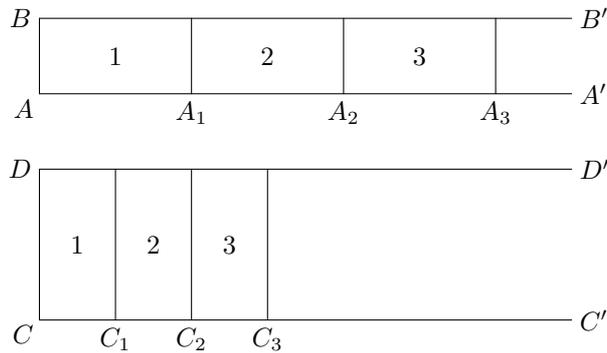


Figura 13. Ejemplo de falacia.

Sin usar el quinto postulado se puede probar que existe una recta r' paralela a r que pasa por M . Esto se consigue trazando la recta perpendicular MN a r que pasa por M y después de esto, se traza la recta perpendicular r' a MN que pasa por M (Figura 14). Las rectas r y r' son paralelas pues de lo contrario, si P es su punto de intersección, el triángulo MNP tendría dos ángulos que suman 180° . Esto, como ya vimos, es imposible.

Ahora, usando el quinto postulado veamos que la paralela es única.

Si existiera otra recta r'' paralela a r que pase por M , por ser diferente de r' se tendría que uno de los ángulos con MN sería agudo. Por el quinto postulado r y r'' se cortarían del lado donde está el ángulo agudo, haciendo imposible la existencia de tal paralela.

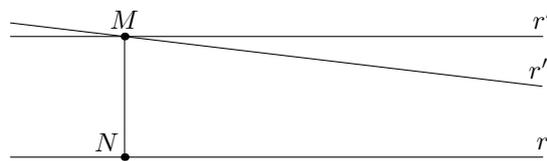


Figura 14. El postulado de Euclides implica el de Playfair.

Para concluir, expondremos cómo se obtiene el quinto postulado a partir del postulado de Playfair.

Sean l y m rectas cortadas por una recta secante r que forman a un mismo lado ángulos internos cuya suma es menor que 180° (Figura 15), y trazamos la recta m' tal que los ángulos α y δ sean iguales y alternos internos. De esta manera l y m' son paralelas.

Por el postulado de Playfair las rectas m y l se tienen que cortar. Sólo falta verificar que lo hacen en las prolongaciones de los ángulos que suman menos de 180° . Si χ es el ángulo suplementario de β , tenemos que $\chi + \beta = 180^\circ$ y $\alpha + \beta < 180^\circ$, y por tanto $\chi > \alpha$. Para que se cumpla la proposición 16, la intersección debe estar en el lado que queremos.

Por último, revisaremos una supuesta demostración del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Primeramente demostró, sin recurrir al quinto postulado, las siguientes

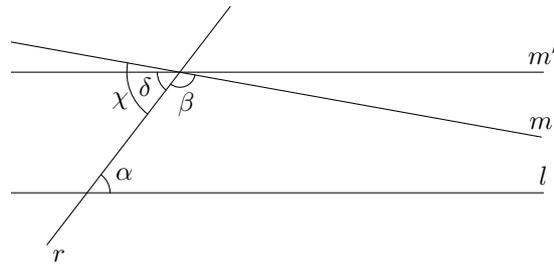


Figura 15. El postulado de Playfair implica el de Euclides.

tres afirmaciones:

1. La suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos.
2. Si la suma de los ángulos es igual a dos rectos en un triángulo cualquiera, también es igual a dos rectos en cualquier otro triángulo.
3. Si la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, el postulado de las paralelas es válido.

A partir de estas proposiciones podemos afirmar que:

“El quinto postulado de Euclides equivale a admitir que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos”.

Entonces Legendre se concentró en probar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos. Veamos la demostración que propuso.

Primeramente realiza la siguiente construcción (Figura 16).

1. Se construye el triángulo ABC .
2. A su lado se construye un triángulo igual al ABC pero de vértices BCD ($AB = CD$, $BD = AC$ y con el lado común BC).
3. Se construye un triángulo AEF tal que sus lados AF y AE contengan, respectivamente, los segmentos AB y AC , y de tal manera que el punto D esté situado sobre el segmento EF . Como es fácil observar, los puntos E y F no están unívocamente determinados.

A continuación, supone que no se cumple que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, y por sus afirmaciones, la suma tiene que ser menor que dos rectos.

Entonces, la suma de los ángulos del triángulo ABC es $180^\circ - \alpha$ con $\alpha > 0$, y la suma de los ángulos del $\triangle BCD$ es también $180^\circ - \alpha$ por ser congruente con el triángulo ABC . También

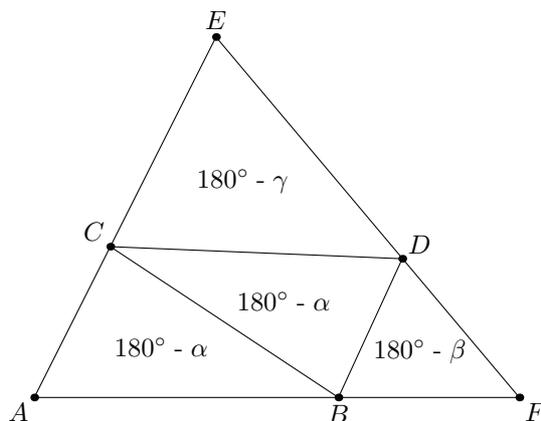


Figura 16. Demostración de Legendre.

tenemos que la suma de los ángulos del $\triangle BDF$ es $180^\circ - \beta$ y la del $\triangle CED$ es $180^\circ - \gamma$ donde $\beta > 0$ y $\gamma > 0$.

Sumando todos los ángulos interiores de los cuatro triángulos obtenemos:

$$2 \times (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + (180^\circ - \gamma) = 4 \times 180 - 2\alpha - \beta - \gamma$$

Pero al restar tres veces 180° , obtenemos la suma de los ángulos internos del triángulo EAF , que es igual a $4 \times 180 - 2\alpha - \beta - \gamma - 3 \times 180 = 180 - 2\alpha - \beta - \gamma < 180 - 2\alpha$.

Así, hemos dado un procedimiento para que a partir de un triángulo, cuya suma de ángulos es $180^\circ - \alpha$, podamos construir triángulos cuya suma de ángulos sea menor que $180^\circ - 2\alpha$, $180^\circ - 4\alpha$, ..., $180^\circ - 2^n\alpha$, Eventualmente, vamos a obtener un triángulo cuya suma de ángulos internos sea menor que 0° , lo cual es absurdo. Por lo tanto no puede ocurrir que la suma de los ángulos internos de un triángulo sea menor que 180° .

A pesar de que es muy ingeniosa, la demostración de Legendre no es correcta, ya que supone que por el punto D situado en el interior del ángulo $\angle BAC$, siempre se puede trazar una recta FE que se encuentre con ambos lados del ángulo. Esta aseveración es equivalente al quinto postulado de Euclides.

De los intentos que acabamos de mencionar obtenemos varias proposiciones equivalentes al quinto postulado de Euclides. Estas proposiciones son las siguientes:

1. Dos rectas paralelas entre sí están a distancia finita (acotada).
2. Existen triángulos semejantes (pero no iguales).
3. Por un punto exterior a una recta dada pasa una única recta paralela a ella.
4. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

5. Por un punto dentro de un ángulo siempre es posible trazar una recta que se corte con los lados del ángulo.

En el capítulo siguiente veremos porqué son equivalentes; y al final del trabajo, en la parte correspondiente de los modelos, veremos porqué los intentos expuestos anteriormente son fallidos.

2.3. Trabajos de Saccheri y Lambert

Los intentos por resolver el problema de las paralelas se habían concentrado en demostrar el quinto postulado a partir de los primeros cuatro. En todos estos intentos se habían dado supuestas demostraciones, pero en cada una de ellas, se encontró que usaban una afirmación equivalente al quinto postulado.

Sin embargo, el monje jesuita de origen italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), mientras era profesor de matemáticas en la Universidad de Pavía, publicó la primera investigación realmente científica sobre el problema de las paralelas. Su trabajo lo tituló *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides liberado de toda falla).

Saccheri también fue profesor de lógica en Turín y estaba fascinado por el método de reducción al absurdo; por ello, intentó aplicar este método al problema de las paralelas. Los intentos anteriores de otros matemáticos, habían consistido en probar directamente el postulado, mientras que Saccheri intentó una prueba negándolo.

Saccheri quería encontrar una contradicción resultante de negar el quinto postulado; es decir, Saccheri intentaba encontrar un teorema que tanto él como su negación, se dedujeran de los cuatro primeros postulados y la negación del quinto.

Para su propósito, Saccheri razona sobre su cuadrilátero birrectángulo (cuadrilátero de Saccheri). El cuadrilátero de Saccheri se construye de la siguiente manera (Figura 17):

1. Se traza el segmento AB , que será la *base*.
2. Se levantan perpendiculares al segmento AB , en los puntos A y B .
3. Se dibujan los segmentos AD y BC de la misma longitud.
4. Se unen los puntos $ABCD$ para formar el cuadrilátero, donde el segmento CD será la *cima*.

Saccheri prueba que los ángulos interiores $\angle ADC$ y $\angle BCD$ son iguales (una demostración de esto la damos en el Capítulo 3); una vez hecho esto, Saccheri considera tres hipótesis:

1. $\angle BCD = \angle ADC = 90^\circ$.

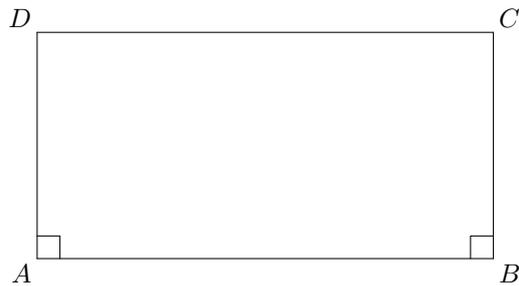


Figura 17. Cuadrilátero de Saccheri.

2. $\angle BCD = \angle ADC > 90^\circ$.
3. $\angle BCD = \angle ADC < 90^\circ$.

Saccheri las llama, hipótesis del ángulo recto, hipótesis del ángulo obtuso e hipótesis del ángulo agudo, respectivamente. De aquí, intenta probar que la única hipótesis aceptable es la del ángulo recto; para ello tiene que desechar las del ángulo obtuso y del ángulo agudo.

Primeramente, Saccheri demuestra algunas proposiciones importantes como las siguientes:

“Si en un solo triángulo, la suma de los ángulos es igual, mayor o menor que dos rectos, en todos los demás triángulos esta suma será respectivamente igual, mayor o menor que dos rectos (Prop. 8, Euclides ab omni nœvo vindicatus)”.

“Según que se verifique la hipótesis del ángulo recto, la hipótesis del ángulo obtuso o la hipótesis del ángulo agudo, la suma de los ángulos de un triángulo será respectivamente igual, mayor o menor que dos rectos (Prop. 9, Euclides ab omni nœvo vindicatus)”.

Saccheri no desarrolla la hipótesis del ángulo recto, pues ésta da como resultado la geometría de *Los Elementos*.

También desecha rápidamente la hipótesis del ángulo obtuso; Saccheri demuestra de una manera perfectamente rigurosa, que las rectas AB y CD se acercan una a la otra de tal forma, que deben cortarse a ambos lados del punto medio de AB , pero dos rectas no pueden cortarse en dos puntos distintos.

Saccheri desarrolla la hipótesis del ángulo agudo con una mayor profundidad, y obtiene varios teoremas geométricos derivados de la hipótesis del ángulo agudo con un rigor irreprochable. Sin embargo, interrumpe bruscamente este hilo de razonamientos en la proposición 33, donde Saccheri obtiene el siguiente resultado:

“Existen dos rectas p y q pasando por P , asintóticas a r y que dividen la familia de rectas que pasan por P en dos clases: la primera clase es la formada por aquellas rectas por P que cortan a r , y la segunda por aquellas que tienen una perpendicular común con r ”.

Esta afirmación lo hace decir:

Si la hipótesis del ángulo agudo es verdadera, las líneas p y r tendrían una perpendicular común en su punto al infinito, lo cual es contrario a la naturaleza de la línea recta (Bonola, p.43).

Y concluye:

La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta (Bonola, p. 43).

Pero esto no es una contradicción lógica, sino que Saccheri volvió a su concepción del mundo, que le hizo decir esta afirmación. A pesar de su error, el trabajo de Saccheri tiene mucho valor, pues es el primer tratado de Geometría hiperbólica. Sin embargo, no se le considera su descubridor ya que su intención no era desarrollar una nueva geometría, sino justificar a Euclides.

El matemático y filósofo alemán de origen francés Johann Heinrich Lambert (1728-1777) eligió un camino parecido al de Saccheri para tratar el problema de las paralelas. Lambert utiliza cuadriláteros trirectángulos para este fin y de hecho, un cuadrilátero de Lambert es la mitad de uno de Saccheri.

La construcción del cuadrilátero de Lambert es la siguiente (Figura 18):

1. Trazar la recta AB .
2. Dibujar la recta AD perpendicular a la recta AB en el vértice A .
3. Localizar un punto C ajeno a las rectas AB y AD .
4. Trazar las perpendiculares desde C a las rectas AB y AD .



Figura 18. Cuadrilátero trirectángulo de Lambert.

De esta forma, obtenemos un cuadrilátero con tres ángulos rectos. Lambert considera las siguientes tres posibilidades:

1. $\angle BCD = 90^\circ$.
2. $\angle BCD > 90^\circ$.
3. $\angle BCD < 90^\circ$.

Estas posibilidades se corresponden respectivamente con las hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso y del ángulo agudo de Saccheri. Lambert, al igual que Saccheri, intenta rechazar las hipótesis del ángulo agudo y del ángulo obtuso. Para rechazar la hipótesis del ángulo obtuso Lambert realiza lo siguiente:

Se trazan dos rectas perpendiculares a una tercera recta AB , y a partir de los puntos B_1, B_2, \dots, B_n , se bajan perpendiculares hasta intersectar la otra recta en los puntos homólogos A_1, A_2, \dots, A_n (Figura 19).

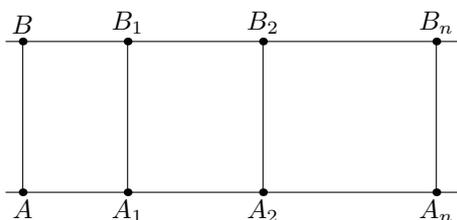


Figura 19. Construcción para desechar la hipótesis del ángulo obtuso.

En esta construcción, Lambert demuestra que los segmentos $AB, A_1B_1, \dots, A_nB_n$, van decreciendo progresivamente. Así se puede demostrar que $AB - A_nB_n > (AB - A_1B_1)n$. De aquí, vemos que el segundo miembro puede ser tan grande como se quiera (postulado de Arquímedes), mientras que el primero no es mayor que la medida de AB .

La contradicción anterior permite a Lambert declarar falsa la hipótesis del ángulo obtuso; sin embargo, Lambert indica que la hipótesis es válida en la esfera si tomamos por rectas los grandes círculos.

La hipótesis del ángulo agudo la trata con mucha mayor profundidad que Saccheri. En sus intentos por encontrar contradicciones, Lambert encuentra varios hechos notables. Por ejemplo, encuentra el siguiente resultado:

“Dado un triángulo cualquiera ABC , el área de dicho triángulo se obtiene mediante la fórmula $S = K(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C})$, donde K es una constante del plano”.

Esta fórmula indica que el área de un triángulo es proporcional a la diferencia de π y la suma de sus ángulos interiores. En este tiempo también se conocía la fórmula para la geometría esférica muy parecida a la anterior, que era $S = R^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)$.

Si en la fórmula anterior ponemos como radio $R \cdot i$, donde $i^2 = -1$, obtenemos la fórmula del área del triángulo en la geometría del ángulo agudo. Lambert se dio cuenta de esto y conje-

turó que “la hipótesis del ángulo agudo se verifica en una esfera de radio imaginario” (Bonola, p. 50).

El mayor mérito de Lambert fue que no se dejó inducir a el error, y no reconoció como satisfactoria ninguna de las demostraciones que refutaban la hipótesis del ángulo agudo. Incluso, llegó a considerar seriamente que, al menos desde el punto de vista lógico, la geometría del ángulo agudo era la verdadera geometría en nuestro mundo. Ejemplo de esto es su siguiente declaración:

Las demostraciones del postulado de Euclides pueden llevarse tan lejos, que parezca que no queda más que una minucia. Pero un análisis atento revela que es precisamente esa “minucia” la que constituye el problema; generalmente es la proposición que se pretende demostrar, o un postulado equivalente (Kagán, p. 305).

2.4. Descubrimiento de la Geometría no euclidiana

Desde el año de 1792 el matemático alemán Carl Friedrich Gauss estaba atraído por el problema de las paralelas (Kagán, p. 285). Seguramente sus primeros contactos con el problema, provienen de su maestro A. G. Kästner (1719-1800) quien, como Lambert, estaba convencido de que el quinto postulado no podía ser probado a partir de los otros cuatro (Sommerville, pp. 21-22).

A pesar de que no publicó nada al respecto, salvo algunas referencias, es claro de su correspondencia y fragmentos de sus notas que estaba muy interesado en ello. Se dice que Gauss no publicó esto, entre otras cosas, por temor a la crítica, esto último debido a lo que declara en una carta a su amigo Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846): “Es probable que no pueda preparar enseguida mis investigaciones extendidas a ese sujeto en forma que se puedan publicar. Pero hasta es posible que yo no me decida jamás, porque temo a los gritos que darán los beatos cuando yo enuncie mis puntos de vista por completo”. Sin embargo, Gauss fue probablemente el primero en tener una idea clara de la posibilidad de una geometría diferente a la de Euclides (Kagán, p.288).

En 1818 Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859), quien era profesor de leyes en Marburg, envió a Gauss un escrito acerca de sus hallazgos de una geometría que él llamaba “Geometría astral”, para que éste le diera su opinión. Un año más tarde Gauss contestó la carta de una manera muy elogiosa, diciéndole que él también había desarrollado una geometría astral muy similar (Kagán, pp. 288-291).

En su obra, Schweikart admite que hay dos tipos de geometría, la euclidiana y la astral. En la Geometría astral la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos. La altura de un triángulo rectángulo isósceles, cuando crecen los lados, no puede superar un determinado segmento, que llama la constante. Sólo cuando esa constante es infinitamente grande, la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos rectos.

Schweikart indujo a su sobrino Franz Adolph Taurinus (1794-1874), a abordar el problema de las paralelas. Taurinus, después de conseguir la aprobación de Gauss, publicó dos libros, uno en 1825 titulado *Theorie der Parallellinien*, y el otro en 1826 con el título *Geometricae prima elementa*. En el primero sigue las tesis de Saccheri y Lambert, y dice que la Geometría no euclidiana “repugna a toda intuición” (Bonola, p. 78). En el segundo, habla de una *geometría logarítmica-esférica*. La llama así porque la obtiene de la Trigonometría esférica y las funciones pertinentes que utiliza son logaritmos (Bonola, pp. 81-82). Taurinus fue capaz de transformar las fórmulas trigonométricas esféricas en otras, que le sirven para obtener importantes resultados, considerando para esto una esfera con radio imaginario. Un resultado notable que obtuvo es que si el radio K tiende a infinito, se verifica que la suma de los ángulos de un triángulo tiende a 180° y además, encontró el ángulo de paralelismo. El trabajo de Taurinus es importante porque es puramente algebraico; además, era la primera vez que se abordaba de esta manera el problema.

Farkas Bolyai (1802-1860) fue alumno y amigo de Gauss en Göttingen. Farkas estaba también muy interesado en la teoría de las paralelas desde joven; le mandó a Gauss un escrito en el que le informaba de sus hallazgos y lo cerca que estaba de la solución. Gauss le reveló las falacias que había cometido; también le explicó que él ya había obtenido resultados que algunos considerarían demostraciones, pero que no prueban nada. En particular, le comentó que a partir de la existencia de un triángulo cuya área superara cualquier cota dada, se puede probar toda la Geometría euclidiana. Después de esto, Farkas insistió y le mandó nuevos desarrollos de sus pruebas, pero esta vez, Gauss no contestó (Kagán, p. 292).

Farkas se dio cuenta que su hijo, János Bolyai, estaba intentando resolver el problema de las paralelas y le aconsejó no abordarlo, pues él había dedicado gran parte de su vida a ello y no consiguió ningún resultado favorable. Sin embargo, János no desistió y siguió trabajando en el problema. En 1826 presentó su trabajo a un profesor y tres años más tarde lo envió a su padre que, aunque no lo entendió por completo, lo añadió como apéndice de su *Testamen*. En 1832, Farkas mandó el apéndice de su hijo a Gauss para que le diera su opinión. Gauss le contestó que no podía elogiarlo demasiado porque los descubrimientos de su hijo ya los había hecho él con anterioridad; también le comentó que no los quiso publicar, pero estaba feliz por adelantarse a publicar ese trabajo y que fuera el hijo de su querido amigo. A János no le gustó esta respuesta pues sentía que Gauss minusvalidaba su trabajo (Kagán, pp. 292-295).

Mientras tanto, Nikolai Ivanovich Lobachevski, profesor de matemáticas de la Universidad de Kazán, también estaba interesado en la teoría de las paralelas desde hacía tiempo. Algunas notas de sus estudiantes nos indican que Lobachevski intentó de diversas maneras establecer la teoría de Euclides. Probó las proposiciones de Legendre y empleó las ideas de dirección y áreas infinitas (Kagán, p. 57). En 1823 preparó un manual de *geometría* para usarlo en su universidad, pero le negaron su publicación, debido a que el secretario de la Academia de Ciencias de San Petesburgo, N. Fuss (1755-1826), consideraba que no podía servir de manual y contestó con una severa crítica a Lobachevski (Kagán, pp. 82-84). Entre otras cosas, en ese libro Lobachevski establece que “una prueba rigurosa del postulado de Euclides no ha sido todavía descubierta; todas las que han sido dadas se podrían llamar explicaciones, y no merecen ser consideradas pruebas matemáticas en sentido estricto” (Kagán, p. 130).

Tres años después, exactamente el 11 de Febrero de 1826, envió a la sección de física y matemáticas de la Universidad de Kazán un trabajo titulado “Exposition succincte des principes de la géométrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles” (Exposición sucinta de los principios de la geometría con una demostración rigurosa del teorema de las paralelas) en el que exponía los principios de su “Geometría imaginaria”. Lobachevski solicitó que se evaluara este trabajo y, de ser posible, se publicara. Los profesores encargados de revisar el trabajo eran Simonov, Kupfer y Braschmann, quienes no estaban actualizados de las cuestiones relativas a la geometría, por lo que no entendieron el trabajo de Lobachevski y desaprobaron su publicación (Kagán, pp. 131-132).

El 3 de Mayo de 1827 fue nombrado rector de la Universidad de Kazán (Kagán, p. 156). A pesar de que Lobachevski tenía una vida muy ocupada por su cargo de rector, siguió escribiendo más documentos para exponer la nueva geometría. En Febrero de 1829, apareció en el *Mensajero de Kazán* su libro *Acerca de los principios de geometría*, donde expone su *Exposición sucinta*, en la que dedica muchas páginas a estudiar y obtener su función de paralelismo $\Pi(x)$ (Kagán, p. 133). Después de esta publicación recibió críticas hirientes por parte de un personaje anónimo de iniciales S. S., donde se burla de ella diciendo que contiene sólo ideas absurdas escritas de una manera incomprensible (Kagán, pp. 187-192).

Sin embargo, Lobachevski no desistió y en 1840 trató de aumentar la divulgación de sus ideas con su pequeño libro en alemán titulado *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* (Investigaciones geométricas sobre la teoría de las paralelas) (Kagán, p. 230). El orden seguido en este libro es el orden que seguiremos en el siguiente capítulo para desarrollar la Geometría hiperbólica, por lo que no comentaremos su contenido. Sólo diremos que este libro permitió que la comunidad matemática tuviera contacto con las ideas de Lobachevski. Gauss leyó este trabajo y debió impresionarlo, ya que en Noviembre de 1842 propuso la candidatura de Lobachevski como “uno de los excelentes matemáticos del Estado ruso”, para que fuera miembro de la sociedad Científica de Göttingen (Kagán, p. 231). Este libro también llegó a manos de János Bolyai en 1841, quien se sorprendió al ver en la introducción, que un tal Lobachevski había publicado una geometría similar a la suya, tres años antes que él; esta situación debió causarle una gran decepción (Kagán, p. 297).

Finalmente, antes de morir, Lobachevski escribió en 1855 un sumario de sus descubrimientos titulado *Pangeometry*, escrito en francés, contribuyendo así al memorial de su universidad. Lo escribió por motivo del cincuentenario de la fundación de la Universidad de Kazán. Esta obra, que también escribió en ruso, no contiene nada nuevo que no se hubiera publicado antes y no contenía ningún dibujo, tal vez porque Lobachevski ya estaba prácticamente ciego (Kagán, pp. 272-274).

2.5. Modelos geométricos

Después de 75 años del nacimiento de Lobachevski sus ideas fueron, al fin, aceptadas. Sin embargo, la cuestión que ocupó a Lobachevski gran parte de su vida aún quedaba sin resolver;

es decir, demostrar que la nueva geometría no tenía contradicción alguna. Lobachevski pensaba haberlo logrado, pues las deducciones y conclusiones concordaban siempre. No obstante, en un sentido estricto, seguía siendo una teoría lógicamente injustificada; es decir, no se había demostrado con el mayor rigor que ningún desarrollo de la teoría podía conducir a contradicción (Kagán, p. 307).

Para solucionar la cuestión, se buscaba una superficie en la que, con la forma usual de medir, se cumplieran los axiomas de la Geometría hiperbólica. En 1868, el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) fue el primero en encontrar una superficie en la que se pudiera interpretar la Geometría de Lobachevski (Kagán, p. 311).

Beltrami propuso entonces su Modelo de la pseudoesfera. La pseudoesfera se genera a partir de la rotación de una curva llamada tractriz. En ella, un segmento que une dos puntos es la línea con distancia mínima que une los puntos y que está sobre la superficie. Dos figuras son iguales si se puede establecer una correspondencia entre sus puntos, de manera que la distancia entre puntos correspondientes sea la misma. Las longitudes, áreas y ángulos, se miden sobre la superficie.

Beltrami demostró que a cada proposición en la Geometría de Lobachevski, corresponde una situación en la pseudoesfera. Por lo que la Geometría de Lobachevski es sólo una exposición abstracta de la geometría de la pseudoesfera. Lamentablemente, este primer modelo no es completo, pues no siempre se puede alargar indefinidamente una recta (Kagán, p. 313).

Después de esto, el matemático alemán Felix Klein (1849-1925) terminó un modelo, que ya había sido concebido por Beltrami, para la Geometría de Lobachevski que resultaba ser completo (Kagán, p. 321). En este modelo, los puntos del plano de Lobachevski son los puntos interiores de un círculo y las rectas son cuerdas euclidianas de dicho círculo. Pero la manera de medir y calcular ángulos es diferente de la euclidiana.

Al modelo de Klein siguieron los dos modelos del matemático francés Henri Poincaré que ya hemos descrito en la introducción. Aquí solo añadiremos que los ángulos en ambos modelos se miden euclidianamente pero en las longitudes y áreas se hace de manera diferente.

Todos estos modelos se explican más en detalle en el Capítulo 4. Se hace especial énfasis en los modelos de Poincaré, ya que tienen la ventaja de que son completos y los ángulos entre líneas hiperbólicas, son los correspondientes ángulos euclidianos, características que los hacen más intuitivos.

2.6. Fundamentación de la geometría

El desarrollo de la Geometría de Lobachevski impulsó el trabajo de construir los postulados de Euclides de una forma exacta y completa. La Geometría de Lobachevski también provocó una tendencia general a hacer más rigurosos los fundamentos de las matemáticas

(Kagán, pp. 334-335).

En 1899, el matemático alemán David Hilbert (1862-1943) publicó sus *Fundamentos de la geometría*, que es considerada como una réplica moderna de Los Elementos de Euclides. En esta obra, Hilbert sistematiza, con rigor lógico formal, el saber geométrico anterior (Kagán, pp. 336-337).

3. Geometría de Lobachevski

Una vez que hemos esbozado la historia de la teoría de las paralelas en los capítulos anteriores y mencionado cuáles fueron las circunstancias del descubrimiento de la Geometría hiperbólica, vamos a describir el desarrollo axiomático de dicha geometría.

Para esto, se aceptan como válidos los primero cuatro postulados de Euclides y las primeras 28 proposiciones del libro I de *Los Elementos*, así como las primeras 5 proposiciones del libro XI, en las que Euclides tampoco utiliza el quinto postulado. También se aceptan como válidos los axiomas de incidencia, orden, congruencia y continuidad de Hilbert. Además, en lugar del quinto postulado de Euclides o el axioma de paralelismo de Hilbert, usaremos el postulado de Lobachevski. Vamos a seguir principalmente el orden que siguió Lobachevski para desarrollar su geometría en su libro *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien*. Se aceptará que podemos medir segmentos y ángulos tal como lo hacemos en la Geometría euclidiana y usaremos indistintamente las palabras segmento y ángulo, tanto para los conjuntos de puntos como para sus medidas, pues va a ser claro del contexto a qué nos referimos. Cabe mencionar que aquí usaremos indistintamente grados y radianes para medir ángulos.

3.1. Geometría absoluta

Empezaremos por recordar algunos resultados de la geometría absoluta; es decir, en la que no se utiliza el quinto postulado, ni su negación. Algunos de estos resultados los enunciamos sin demostración, pero argumentaremos por qué son independientes del quinto postulado, dando referencias a *Los Elementos* de Euclides y a *Los Fundamentos de la geometría* de Hilbert. Los teoremas aquí presentados que no son probados en esos libros o utilizan el quinto postulado para ello, los probaremos aquí sin hacer uso de dicho postulado. Todos ellos serán fundamentales para desarrollar la Geometría de Lobachevski, por lo que deberán tenerse siempre en mente.

En la Geometría de Lobachevski, los conceptos euclidianos tienen el mismo significado, salvo la idea de paralelismo; la cual, discutiremos en la siguiente sección.

El primer teorema es inmediato del Postulado 1 de Euclides, y es el Teorema 1 de Hilbert.

Teorema 1. Dos rectas no pueden intersectarse en dos puntos distintos.

El segundo teorema es consecuencia directa del llamado Axioma de Pasch, que es el axioma II,5 de Hilbert y dice lo siguiente: “Una recta que corte a un lado del triángulo pero no pase por ninguno de sus vértices deberá cortar también al otro lado del triángulo”.

Teorema 2. Una recta suficientemente alargada en ambas direcciones supera cualquier cota, y corta cualquier plano acotado en dos partes.

El siguiente, es el Teorema 5 de Hilbert y lo deduce solamente de sus axiomas de incidencia y de orden.

Teorema 3. En un plano, una recta siempre corta a cualquier otra que va desde un punto en un lado de ella a otro punto en el otro lado.

La primera parte del teorema que sigue es debida a las proposiciones 11, 12 y 13 del libro I de Los Elementos. En la segunda parte, las construcciones dadas por las Proposiciones 11 y 12 del Libro XI de Los Elementos sirven y se pueden argumentar por los Teoremas 12 y 13 que enunciamos más adelante, la unicidad es inmediata.

Teorema 4. En un plano, desde un punto dado, hay una y sólo una recta perpendicular a una recta dada. En el espacio, desde un punto dado, existe una y sólo una recta perpendicular a un plano dado.

El quinto teorema resulta de las proposiciones 27 y 28 del libro I de *Los Elementos*.

Teorema 5. Dos rectas no se pueden intersectar, si una tercera las corta en el mismo ángulo.

El sexto teorema es consecuencia inmediata del teorema anterior.

Teorema 6. Dos rectas perpendiculares a una tercera recta nunca se intersectan, por más que se alarguen en ambas direcciones.

El teorema que sigue es combinación de las proposiciones 5 y 6 del libro I.

Teorema 7. En un triángulo rectilíneo lados iguales son opuestos a ángulos iguales, e inversamente.

La primera parte del Teorema 8 es por las proposiciones 18 y 19 del libro I. Los ángulos adyacentes a los catetos en el triángulo rectángulo son agudos por la proposición 17 del libro I y de estas dos observaciones se obtiene que la hipotenusa es mayor que los catetos.

Teorema 8. En un triángulo rectilíneo, el lado de mayor magnitud es opuesto al ángulo de mayor magnitud. En un triángulo rectángulo la hipotenusa es más grande que cualquiera de los otros dos lados, y los dos ángulos adyacentes son agudos.

El siguiente teorema establece los criterios de congruencia entre dos triángulos rectilíneos. Los criterios ALA y LAA los establece la proposición 26, el criterio LAL es por la proposición 4 y el criterio LLL lo establece la proposición 8. Todas estas del libro I de *Los Elementos*. En el libro de Hilbert, el criterio ALA es el Teorema 11, el criterio LAL es por el Teorema 10 y el criterio LLL es establecido por el Teorema 16.

Teorema 9. Triángulos rectilíneos son congruentes si tienen un lado y los dos ángulos adyacentes iguales (ALA), o un lado, un ángulo adyacente y el ángulo opuesto iguales (LAA), o dos lados y el ángulo contenido entre ellos igual (LAL), o los tres lados iguales (LLL).

En el siguiente teorema, el caso para ángulos rectilíneos es la proposición 15 del libro I de *Los Elementos*. En el caso de ángulos diedros, éstos se miden con ángulos formados por rayos perpendiculares a la recta de intersección, lo cual quedará justificado en el teorema 11. De esta manera, tales rayos se pueden poner de tal forma que todas estén en el mismo plano y esto es el caso anterior.

Teorema 10. Ángulos opuestos por el vértice son iguales. Esto pasa tanto para ángulos rectilíneos como para ángulos diedros.

Los ángulos diedros entre dos planos que se cortan se miden en la manera usual por la magnitud de los ángulos con vértice en la línea de intersección y dos rayos, uno en cada plano, de tal manera que sean perpendiculares a la línea de intersección. El siguiente teorema justifica que se puede hacer esto. La demostración usual requiere del postulado de las paralelas, así que lo vamos a demostrar aquí sin utilizarlo.

Teorema 11. El ángulo diedro es independiente del punto elegido como vértice en la línea de intersección.

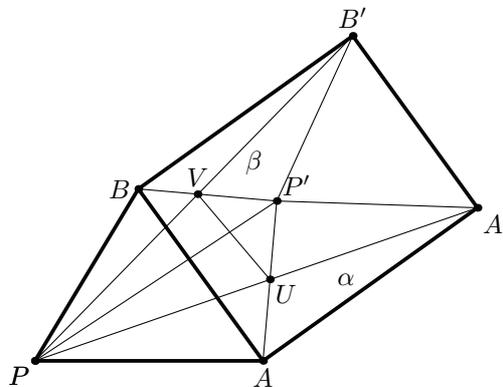


Figura 20. Ángulo diedro medido en P y P' .

Demostración. Tomamos dos puntos P, P' , cualesquiera en la línea de intersección de los planos α y β (Figura 20). Trazamos $PA = P'A' \perp PP'$ en el plano α y $PB = P'B' \perp PP'$ en el plano β . Unimos PA' y $P'A$ que se intersecan en U y PB' y $P'B$ que se intersecan en V . Los triángulos PAP' y $P'A'P$ son congruentes por el criterio LAL (Teorema 9), por lo que $PA' = P'A$ y $\angle PAU = \angle P'A'U$. Como $\angle PUA = \angle P'UA'$ por el Teorema 10 para ángulos rectilíneos, tenemos que $\triangle PAU \cong \triangle P'A'U$ por LAA (Teorema 9), así que $PU = P'U$. Similarmente $PB' = P'B$ y $PV = P'V$. De esta manera, comparando los triángulos $PUV, P'UV$, encontramos que son congruentes por LLL (Teorema 9) y por esto $\angle UPV = \angle UP'V$.

Entonces $\triangle PA'B' \cong \triangle P'AB$ por LAL (Teorema 9) y por esto $AB = A'B'$. Finalmente, de la congruencia de los triángulos APB y $A'P'B'$ que se cumple por LLL (Teorema 9), obtenemos $\angle APB = \angle A'P'B'$. ■

El siguiente teorema se sigue inmediatamente de la definición 4 del libro XI de *Los Elementos*. Esta es la definición de planos perpendiculares.

Teorema 12. Una recta que forma ángulos rectos con la intersección de dos planos perpendiculares y está en uno de ellos, es perpendicular con el otro.

El siguiente teorema se obtiene directamente de la proposición 4 del Libro XI de *Los Elementos*.

Teorema 13. Si una recta es perpendicular a dos que se cortan en su punto de intersección y no son coplanares con ella, es perpendicular a todas las rectas trazadas a través del punto de intersección y en el plano de las dos.

Los últimos teoremas no tienen una prueba en *Los Elementos* ni en *Los Fundamentos de la geometría*; aquí daremos su demostración.

No existe un criterio de congruencia LLA que sirva para cualquier triángulo; sin embargo, si el ángulo es recto sí se cumple dicho criterio. Eso es lo que establece el siguiente teorema.

Teorema 14. Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son congruentes con las partes correspondientes de un segundo triángulo rectángulo, entonces los triángulos son congruentes.

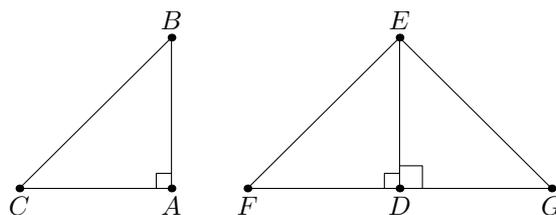


Figura 21. Triángulos rectángulos con la hipotenusa y un cateto congruentes.

Demostración. Sean ABC y DEF dos triángulos tales que $AB = DE$, $BC = EF$ y $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ$ (Figura 21). Prolongamos el rayo FD hasta el punto G tal que $DG = AC$, así que $\triangle DEG \cong \triangle ABC$ por LAL (Teorema 9). De aquí obtenemos que $EG = BC = EF$ por lo que el triángulo FEG es isósceles y consecuentemente $\angle EFD = \angle EGD$ (Teorema 7). Entonces los triángulos DEF y DEG son congruentes por LAA (Teorema 9). Finalmente, por transitividad llegamos a que $\triangle DEF \cong \triangle ABC$. ■

Teorema 15. La intersección de una esfera con un plano es un círculo.

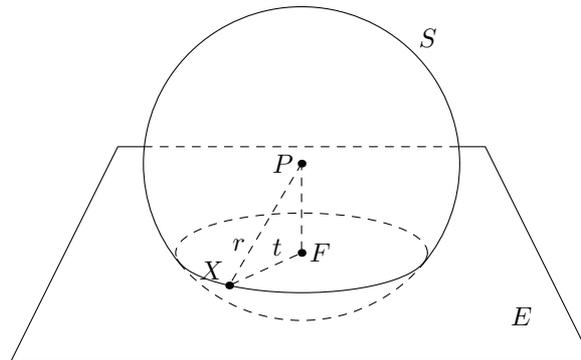


Figura 22. Intersección de una esfera con un plano.

Demostración. Sean S una esfera de radio r y E un plano que se intersecan (Figura 22). Sean F el pie de la perpendicular desde el centro de la esfera P a E (Teorema 4), X un punto cualquiera de la intersección entre E y S y $t = FX$. Si tomamos otro punto X' en la intersección, tenemos que $PX = PX' = r$, así que los triángulos rectángulos PXF y $PX'F$ tienen un cateto y la hipotenusa iguales, por lo que son congruentes (Teorema 14). De esta manera $FX' = FX = t$; esta distancia es la misma sin importar el punto de la intersección del que se trate y consecuentemente, los puntos de la intersección pertenecen a los de la circunferencia de centro F y radio t .

Ahora, sean X' un punto en la circunferencia en el plano E de centro F y radio t y X un punto en la intersección de S y E . Entonces $FX = FX' = t$ y por LAL se tiene que $\triangle PF X \cong \triangle PF X'$ (Teorema 9), por lo que $PX' = PX = r$ y consecuentemente, X' pertenece a la esfera. ■

En la prueba del siguiente teorema, vamos a hacer uso de los ángulos triedros. Los ángulos triedros están formados por tres rayos no coplanares que salen de un mismo punto llamado vértice. Un ángulo triedro determina tres ángulos planos, uno en cada plano determinado por dos de sus rayos y tres ángulos diedros; cada uno determinado por los dos planos adyacentes a cada rayo (Ver Figura 23). La intersección del ángulo triedro con la superficie de una esfera con centro en el vértice, será un triángulo esférico, donde los lados de dicho triángulo serán las correspondientes intersecciones de los ángulos planos con la superficie y sus ángulos las correspondientes intersecciones de la superficie con los ángulos diedros. Así, vamos a medir los lados del triángulo esférico por las magnitudes de los ángulos planos que los determinan y a los ángulos del triángulo esférico por las magnitudes de los ángulos diedros que los determinan.

Teorema 16. Triángulos esféricos son congruentes (o simétricos) si tienen los tres lados iguales, o dos lados y el ángulo incluido iguales, o un lado y los ángulos adyacentes iguales.

Demostración. Para probar las primeras dos partes del teorema nos vamos a auxiliar de la Figura 23, donde tenemos dos ángulos triedros $PABC$ y $QDEF$ con vértices P y Q ; además,

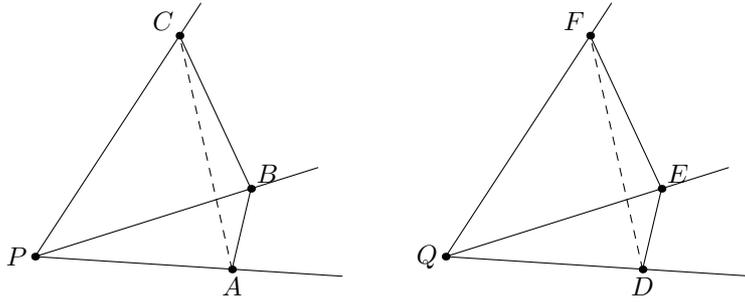


Figura 23. Ángulos triedros.

suponemos que $PA = QD$, $\angle PAB = \angle PAC = 90^\circ$ y $\angle QDE = \angle QDF = 90^\circ$. En esta demostración usaremos los criterios de congruencia del Teorema 9.

Para la primera parte supongamos que $\angle APB = \angle DQE$, $\angle APC = \angle DQF$, $\angle BPC = \angle EQF$. De esta manera, tenemos que $\triangle PAB \cong \triangle QDE$ por ALA, por lo que $PB = QE$ y $AB = DE$; $\triangle PAC \cong \triangle QDF$ por ALA y así, $PC = QF$ y $AC = DF$. Entonces, de las deducciones anteriores tenemos que $\triangle BPC \cong \triangle EQF$ por LAL y consecuentemente $BC = EF$. Por lo tanto, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ por LLL y así, $\angle BAC = \angle EDF$. De la misma manera se demuestra que los demás ángulos diedros son iguales y se obtiene la congruencia de los triángulos esféricos.

En la segunda parte supondremos que $\angle APB = \angle DQE$, $\angle APC = \angle DQF$ y $\angle BAC = \angle EDF$. Así tenemos que $\triangle PAB \cong \triangle QDE$ por ALA, por lo que $PB = QE$ y $AB = DE$; $\triangle PAC \cong \triangle QDF$ por ALA y así, $PC = QF$ y $AC = DF$. Entonces, por LAL $\triangle BAC \cong \triangle EDF$ y consecuentemente $BC = EF$. Por lo tanto, $\triangle PBC \cong \triangle QEF$ por LLL y así $\angle BPC = \angle EQF$. Así, ya estamos en el caso anterior y se cumple la congruencia de los triángulos esféricos.

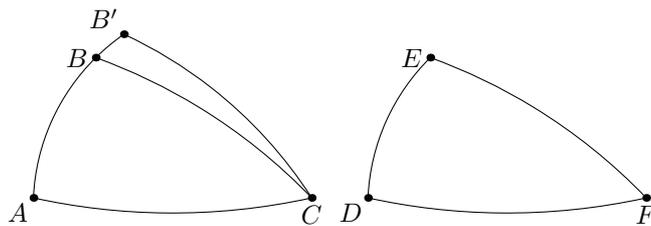


Figura 24. Ilustración de la prueba del criterio ALA para triángulos esféricos.

Para la tercera parte supongamos que tenemos dos triángulos esféricos ABC y DEF tales que $AC = DF$, $\angle BAC = \angle EDF$ y $\angle BCA = \angle EFD$ (Figura 24). Sea el punto B' en el rayo AB tal que $AB' = DE$, así que por la segunda parte los triángulos $AB'C$ y DEF son congruentes. De esta manera tenemos que $\angle B'CA = \angle EFD = \angle BCA$, por lo que BC y $B'C$ pertenecen a la misma recta esférica y consecuentemente $B = B'$. ■

Teorema 17. En un triángulo esférico lados iguales se oponen a ángulos iguales, e inversamente.

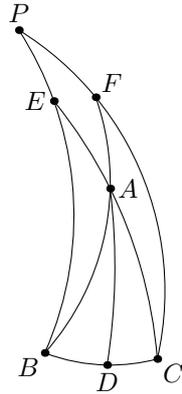


Figura 25. Triángulo esférico.

Demostración. Sea un triángulo esférico ABC tal que $AB = AC$ (Figura 25). Unimos el punto A con el punto medio D del arco BC . Entonces los triángulos esféricos ABD y ACD son congruentes por tener sus tres lados iguales (Teorema 16). De aquí se sigue que $\angle ABC = \angle ACB$.

Sea un triángulo ABC tal que $\angle ABC = \angle ACB$ (Figura 25). Sea P el polo de BC ; es decir, el punto tal que $\angle PBC = \angle PCB = 90^\circ$. Alargamos los arcos BA y CA hasta que intersequen a los arcos PB y PC en los puntos E y F , respectivamente. De esta manera, tenemos que $\angle PBF = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle ACB = \angle PCE$ y además $PB = PC = 90^\circ$; así que $\triangle PBF \cong \triangle PCE$ por tener también el ángulo en P común (Teorema 16). De la congruencia anterior obtenemos que $\angle PFB = \angle PEC$ y $PE = PF$, que implica que $\angle AFC = \angle AEB$ y $FC = EB$. Entonces, como también $\angle ACF = \angle ABE$, tenemos que $\triangle AEB \cong \triangle AFC$ (Teorema 16). Por lo tanto $AB = AC$. ■

3.2. Propiedades de las rectas paralelas

A continuación describiremos la teoría de las paralelas de Lobachevski. Aquí la noción de una recta paralela a otra, será un poco diferente a la definición usual de la Geometría euclidiana, podremos dar esta noción después del siguiente teorema.

Teorema 18. Por un punto pasan dos rectas que dividen al conjunto de rectas que pasan por él, en dos clases respecto a una recta en el mismo plano que no pasa por el punto. La primera está formada por aquellas que intersecan dicha recta y la segunda, es la formada por aquellas que no la intersecan.

Demostración. Del punto A bajamos la perpendicular AD a la recta BC (Teorema 4) y a su vez, trazamos la perpendicular AE a AD (Figura 26). Dentro del $\angle EAD$ habrá rectas que intersecan a DC , como lo hace AF y rectas que no, como AE (Teorema 6). Podría pasar que

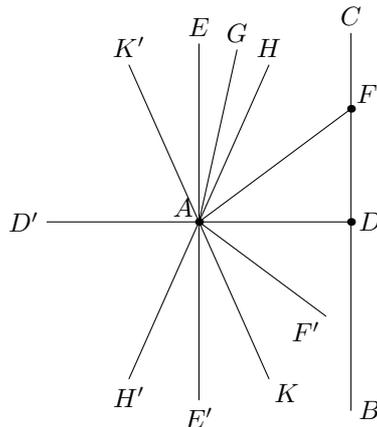


Figura 26. Rectas paralelas.

la recta AE fuera la única que no corta a DC pero, podemos suponer que existen otras rectas como AG que tampoco cortan a DC .

Si una recta corta a DC , los rayos que están entre ésta y la recta AD también lo harán (Teorema 2). Si alguna recta no corta a DC , las rectas que están entre ésta y AE tampoco la cortarán (Teorema 1). Así que para pasar de las rectas que cortan a DC a las rectas que no la cortan debe haber, por continuidad de las magnitudes de los ángulos, una única recta AH tal que todas las rectas dentro del ángulo HAD cortan a DC y todas las que están dentro del ángulo EAH no la cortan.

Del otro lado de la recta AD trazamos el ángulo $\angle DAK = \angle DAH$ en la recta AK . Si esta recta interseca a la recta DB por el criterio ALA (Teorema 9) resultaría que AH intersecaría a DC . Cualquier recta AF' dentro del ángulo DAK interseca a DB , lo cual se cumple porque al trazar AF del otro lado de AD haciendo $\angle DAF = \angle DAF'$, ésta interseca a DC y al aplicar el criterio ALA obtenemos el resultado (Teorema 9).

Todas las rectas pertenecen a aquellas que intersecan a BC si están dentro de $\angle HAK$, o a aquellas que no intersecan si están dentro de los ángulos $\angle EAH$ o $\angle E'AK$. En el otro lado de la perpendicular EE' , trazamos las prolongaciones AH' y AK' a los rayos AH y AK , respectivamente. Así las rectas pertenecen a las que intersecan si están dentro del $\angle K'AH'$, y a las que no intersecan si están dentro de $\angle K'AE$ o $\angle H'AE'$. ■

Entonces damos la definición de paralelismo para rayos.

Definición 19. Decimos que el rayo AH es *paralelo* al rayo DC cuando están en el mismo plano, no se intersecan por más que se alarguen y cada rayo dibujado a partir de A dentro del ángulo HAD interseca al rayo DC .

Así tenemos que en la Figura 26 el rayo AH es paralelo al DC y el rayo AK es paralelo al rayo DB . El rayo AG no es paralelo al DC porque cualquier rayo dentro de $\angle GAH$ no

interseca a DC .

Entonces, a partir de un punto A existen dos rayos AH y AK a una recta dada BC tal que AH es paralelo a DC y AK es paralelo a DB , donde D es un punto de BC tal que $\angle ADC$ es un ángulo recto (Figura 26). Los ángulos DAH y DAK son iguales como vimos en la demostración del Teorema 18 y dependen únicamente del segmento $AD = p$ ya que en D existe una única recta perpendicular al segmento. A partir de esta consideración podemos hacer la siguiente definición.

Definición 20. El *ángulo de paralelismo* $\Pi(p)$ de un segmento $p = AD$ es la magnitud del ángulo HAD tal que el rayo AH es paralelo al rayo DC perpendicular al segmento AD en el punto D y que está en el mismo lado que AD en el rayo AH (Ver Figura 26).

Finalmente, vamos a definir el paralelismo para rectas, en esta definición es importante el orden en como se cite la recta, pues se requiere indicar la dirección en la que es considerado el paralelismo.

Definición 21. Si A es un punto de la recta $H'H$, decimos que la recta $H'H$ es *paralela* a la BC en el punto A , si el rayo AH es paralelo al DC , donde D es el punto de BC tal que $\angle ADC$ es un ángulo recto (Ver Figura 26).

De esta manera, en la Figura 26, si $\Pi(p)$ es un ángulo recto, tendremos que el rayo AE es paralelo al rayo DC y que el rayo AE' es paralelo al DB , los cuales pertenecen a la misma recta. Así tendremos que cualquier otra recta por A , estará dentro de alguno de los ángulos DAH o DAK , por lo que deberá cortar a la recta BC . De aquí tenemos que las rectas por A sólo pueden intersecar a BC o ser paralelas a ella en A .

Si $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$, tendremos que el rayo AH es paralelo al DC y el AK es paralelo al DB , donde ambos no pertenecen a la misma recta, así que la recta $H'H$ es paralela a la BC en A y la $K'K$ es paralela a la CB en A . Así tendremos que distinguir las rectas restantes que pasan por A entre aquellas que intersecan a BC y aquellas que no.

Cabe destacar que para ambas suposiciones las rectas serán de las que intersecan la recta, por muy pequeño que sea el ángulo de desviación respecto de las rectas paralelas.

Nótese que sólo hemos definido paralelismo de una recta respecto a otra en un punto de la primera, así que debería poder obtenerse esta definición en cualquier otro punto de ella, esto es lo que afirma el teorema siguiente. Esta propiedad se llama transmisibilidad del paralelismo.

Teorema 22. Si una recta AB es paralela a otra CD en un punto A , la recta AB es paralela a la CD en cualquiera de sus puntos.

Demostración. Dadas la recta AB paralela a CD en A , y la recta AC perpendicular a CD , consideremos el punto E del lado de AC donde están los rayos AB y CD (Figura 27). Tracemos

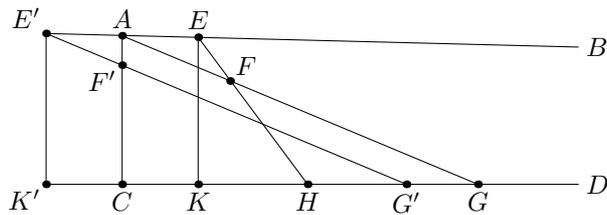


Figura 27. AB paralela a CD en cualquier punto.

desde E una perpendicular EK a CD , y dibujemos un rayo EF dentro del ángulo BEK . El rayo AF debe intersectar a CD (Teorema 18) en algún punto G . Así tenemos el triángulo ACG en el que el rayo EF entra. Por la construcción EF no puede intersectar a AC , y no corta a AG o EK por segunda vez (Teorema 1), así que debe cortar a CD en algún punto H (Teorema 2). Como EF tampoco puede cortar a EK (Teorema 1) tenemos que H debe estar en el rayo KD , así que el rayo EB es paralelo al KD .

Ahora, sean E' en la prolongación del rayo AB y $E'K'$ perpendicular a la recta CD . Trazamos la recta $E'F'$. Si $\angle AE'F'$ es lo suficientemente pequeño para que corte a AC en un punto F' , haciendo el mismo ángulo con AB , trazamos también desde A el rayo AF que cortará a CD en G (Teorema 18). Así tenemos un triángulo AGC , en el que entra la recta $E'F'$, como no puede cortar a AC por segunda vez y tampoco puede cortar a AG por ser $\angle BAG = \angle BE'G'$ (Teorema 5), tenemos que debe cortar a CD en algún punto G' (Teorema 2). Si $\angle AE'C \leq \angle AE'F' \leq \angle AE'K'$, tenemos que $E'F'$ debe cortar a $K'C$ en un punto G' (Teorema 2). De esta manera el rayo $E'B$ es paralelo al $K'D$.

Así que la recta AB es paralela a la CD en cualquier punto, no importa en qué lado respecto del punto A se ubique en la recta. ■

A partir del teorema anterior podemos simplemente decir que la recta AB es paralela a la recta CD sin especificar un punto en especial.

En el siguiente teorema probaremos lo que se conoce como propiedad de simetría del paralelismo y con la cual, podemos simplemente decir que las dos rectas son paralelas entre sí.

Teorema 23. Si una recta AB es paralela a otra CD entonces CD es paralela a AB .

Demostración. Sean AB una recta paralela a la recta CD y AC perpendicular a CD (Figura 28). Trazamos una recta CE que hace que el ángulo ECD sea agudo y bajamos la perpendicular AF a CE desde A formando el triángulo rectángulo ACF , donde AC que es la hipotenusa, es mayor que el lado AF (Teoremas 4 y 8).

Hacemos $AG = AF$, y giramos la figura $EFAB$ hasta que AF coincida con AG , cuando AB y FE toman las posiciones AK y GH se tiene que $\angle BAK = \angle FAC$ y consecuentemente, AK debe cortar a CD en algún punto K formando un triángulo AKC que es cortado por la recta GH en L (Teorema 2). El punto L determina la distancia de intersección de AB y FE en

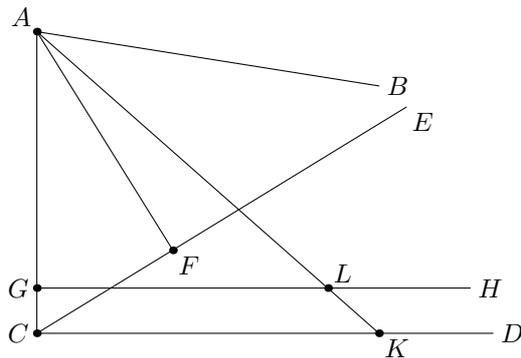


Figura 28. AB y CD son mutuamente paralelas.

la recta AB desde el punto A . De aquí se sigue que CE siempre cortará a AB por muy pequeño que sea el ángulo ECD . Y así, CD es paralela a AB (Teoremas 18 y 22). ■

3.3. Suma de ángulos en un triángulo

En esta sección, vamos a probar uno de los primeros resultados de la Geometría hiperbólica, que establece que la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que π . Más aún, vamos a probar que el quinto postulado es equivalente a que la suma de los ángulos de un triángulo sea π . Para esto, necesitamos varios resultados previos y seguiremos el camino que siguió Legendre.

Teorema 24. En un triángulo, la suma de los ángulos internos no puede ser mayor que dos ángulos rectos.

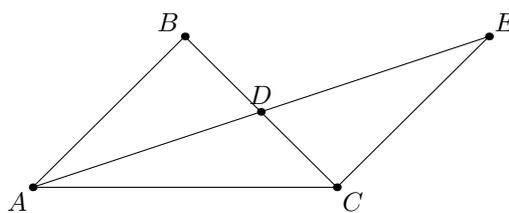


Figura 29. Prueba del Teorema 24.

Demostración. Supongamos que en $\triangle ABC$ la suma de los ángulos interiores es $\pi + \alpha$, donde $\alpha > 0$ (Figura 29). Entonces, elijamos el menor lado BC y sea D su punto medio. Dibujemos desde A la recta AD a través de D de tal manera que la prolongación de ésta, DE sea igual a AD y tracemos el segmento EC . Como $\triangle ADB \cong \triangle CDE$ por LAL, tenemos que $\angle ABD = \angle DCE$, y $\angle BAD = \angle DEC$ (Teoremas 10 y 9). De aquí se sigue que también en $\triangle ACE$ la suma de sus ángulos internos debe ser igual a $\pi + \alpha$ y así mismo, que el menor ángulo BAC de $\triangle ABC$ ha sido dividido en dos partes $\angle EAC$ y $\angle AEC$ en $\triangle ACE$ (Teorema 8).

Continuando este proceso, dividiendo a la mitad el lado opuesto al ángulo menor, llegaremos a un triángulo cuya suma de ángulos internos sea $\pi + \alpha$ pero donde dos de sus ángulos es cada uno menor que $\frac{1}{2}\alpha$; como el otro ángulo no puede ser mayor que π se sigue que α debe ser nulo o negativo. ■

Teorema 25. Si en un triángulo la suma de los ángulos internos es igual a dos ángulos rectos, entonces este debe ser el caso para cualquier otro triángulo.

Demostración. Sea ABC un triángulo tal que la suma de sus ángulos internos es π , entonces al menos dos de sus ángulos A y C son agudos. Trazamos la perpendicular a AC desde el vértice B correspondiente al ángulo restante. Esta recta divide al $\triangle ABC$ en dos triángulos rectángulos cuya suma de ángulos internos es π (Figura 30), esto sucede porque la suma de los ángulos internos de cada uno de estos triángulos no puede superar π y su suma en conjunto no puede ser menor que 2π . Así obtenemos un triángulo rectángulo con lados perpendiculares p y q , y de esto se puede construir un cuadrilátero cuyos lados opuestos son iguales y cuyos lados adyacentes p y q están en ángulo recto.

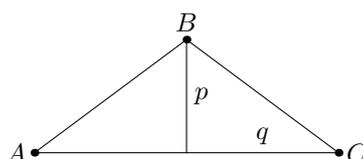


Figura 30. Triángulo dividido en dos triángulos rectángulos.

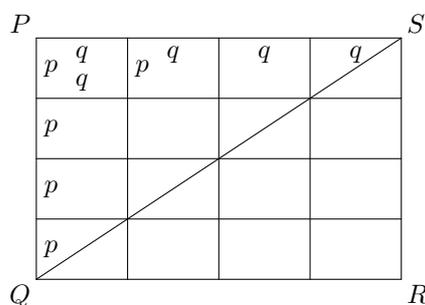


Figura 31. Cuadrilátero de lados np y mq .

Repetiendo el cuadrilátero podemos hacer otro con lados np y mq , y finalmente un cuadrilátero $PQRS$ con lados en ángulo recto, tal que $PQ = np$, $PS = mq$, $SR = np$, $QR = mq$ donde m y n son números enteros (Figura 31). Tal cuadrilátero es dividido por la diagonal QS en dos triángulos rectángulos congruentes, QPS y QRS , y en cada uno de ellos la suma de los ángulos internos es π .

Los números n y m pueden ser lo suficientemente grandes para que el triángulo PQR con lados perpendiculares $PQ = np$ y $QR = mq$ contenga a cualquier triángulo rectángulo dado QTU haciendo encajar el ángulo recto de ambos triángulos (Figura 32).

Trazamos la recta TR y así el $\triangle PQR$ es obtenido por la unión de los triángulos PRT y TRQ ; como en ninguno de ellos la suma de los ángulos internos es mayor que π , en ambos la suma tiene que ser igual a π pues en el triángulo compuesto los ángulos tienen que sumar π .

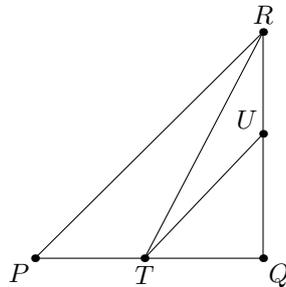


Figura 32. Triángulo rectángulo que contiene al triángulo rectángulo dado.

De la misma manera, el triángulo QTR está compuesto por $\triangle TUR$ y $\triangle TQU$, consecuentemente la suma de los ángulos internos del $\triangle TQU$ debe ser igual a π , y en general para cualquier otro triángulo, ya que se puede dividir en dos triángulos rectángulos como hicimos al principio de la demostración. ■

De los dos teoremas anteriores se sigue que sólo dos hipótesis son posibles. La suma de los ángulos internos de todos los triángulos es igual a π , o esta suma es en todos los triángulos menor que π .

Teorema 26. Por un punto dado siempre podemos trazar una recta que forme con una recta dada ángulos arbitrariamente pequeños.

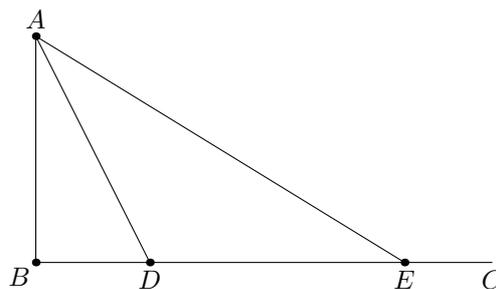


Figura 33. Cómo hacer un ángulo pequeño.

Demostración. Trazamos la perpendicular AB desde A hasta la recta BC (Teorema 4). Tomamos un punto D al azar de BC distinto de B y trazamos la recta AD (Figura 33). Hacemos $DE = AD$ y trazamos AE . En el triángulo rectángulo ABD sea $\angle ADB = \alpha$; entonces en el triángulo isósceles ADE el ángulo AED será $\frac{1}{2}\alpha$ o menos (Teoremas 7 y 24). Continuando este procedimiento llegamos a un ángulo AEB tan pequeño como cualquier ángulo dado. ■

Teorema 27. Dos perpendiculares a la misma recta son paralelas si y sólo si la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.

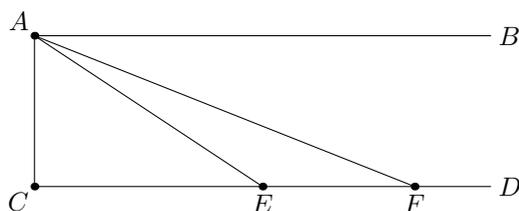


Figura 34. Ilustración de la demostración del Teorema 27.

Demostración. Sean AB y CD dos rectas paralelas y perpendiculares a la recta AC (Figura 34). Trazamos las rectas AE y AF a los puntos E y F , que están en la recta CD a distancias $FC > EC$ del punto C .

Supongamos que en el triángulo rectángulo ACE la suma de los ángulos internos es igual a $\pi - \alpha$ y en el $\triangle AEF$ igual a $\pi - \beta$, entonces la suma en $\triangle ACF$ debe ser igual a $\pi - \alpha - \beta$, donde α y β no pueden ser negativos.

Sean los ángulos $\angle BAF = a$, $\angle AFC = b$, y así $\alpha + \beta = a - b$ pues $\pi - \alpha - \beta = \pi - a + b$; ahora moviendo la recta AF lejos de la perpendicular AC , podemos hacer el ángulo a tan pequeño como queramos; así también se reduce el ángulo b y consecuentemente los ángulos α y β no podrán tener otra magnitud que $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Por lo que concluimos que la suma de los ángulos internos del $\triangle ACE$ es igual a dos rectos.

Ahora consideremos AB y CD dos rectas perpendiculares a la recta AC y supongamos que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es π (Figura 34). Sea a tal que $\pi - a$ es el ángulo de paralelismo del segmento AC . Trazamos la recta AE al punto E en la recta CD , es fácil ver que $\angle BAE = \angle AEC$ pues $\angle BAE + \angle EAC = \frac{1}{2}\pi = \angle AEC + \angle EAC$ ya que la suma de los ángulos internos de $\triangle AEC$ es π (Teorema 25). Alejando E de C podemos hacer el ángulo AEC tan pequeño como queramos (Teorema 26). Por otro lado tenemos que $\angle BAE > a$, así que a tiene que ser 0 pues es menor que cualquier cantidad positiva. Por lo tanto AB y CD son paralelas. ■

A partir del teorema anterior podemos decir lo siguiente.

Observación 28. La suma de los ángulos internos de todos los triángulos es igual a π y al mismo tiempo el ángulo de paralelismo $\Pi(p) = \frac{1}{2}\pi$ para todo segmento p , o para todos los triángulos esta suma es menor que π y al mismo tiempo $\Pi(p) < \frac{1}{2}\pi$.

La primera suposición sirve como *base de la Geometría euclidiana y la Trigonometría plana euclidiana*.

La segunda suposición puede ser admitida sin llegar a alguna contradicción en los resultados y encontrar una nueva geometría; a la que Lobachevski da el nombre de *Geometría imaginaria*, y que también se denomina Geometría hiperbólica. Más adelante la exponemos, con el desarrollo de las ecuaciones entre los lados y ángulos del triángulo rectilíneo y esférico.

3.4. Más propiedades de las rectas paralelas

A partir de aquí vamos a aceptar la segunda suposición de la Observación 28. En el siguiente teorema la distancia de un punto a una recta tiene el significado usual de la Geometría euclidiana; es decir, es la medida del segmento perpendicular del punto a la recta.

Teorema 29. Si la recta CG es paralela a la AB y C es un punto de CG , la distancia de cualquier punto G en el rayo CG a la recta AB es menor que la distancia del punto C a dicha recta.

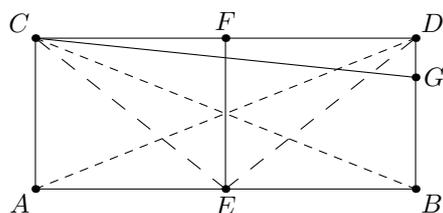


Figura 35. Acercamiento de las paralelas AB y CG .

Demostración. Si trazamos las rectas CA y GB perpendiculares a AB y localizamos el punto D en el rayo BG tal que $AC = BD$ (Figura 35), entonces el cuadrilátero $CABD$ es un cuadrilátero de Saccheri con base AB y cima CD .

Primeramente vamos a probar, como hizo Saccheri, que los ángulos en C y D son iguales. Para esto, trazamos las diagonales AD y BC . Tenemos que $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ por LAL (Teorema 9), y de aquí se deduce que $BC = AD$. Entonces, $\triangle BDC \cong \triangle ACD$ por LLL (Teorema 9). De esta última congruencia tenemos que $\angle BDC = \angle ACD$.

Vamos a probar que estos ángulos son agudos, con lo que tenemos que en la Geometría de Lobachevski se cumple la hipótesis del ángulo agudo. Si éstos ángulos no fueran agudos, tendríamos que en $ACDB$ los ángulos internos sumarían 360° o más, pero no es posible, pues al dividirlo en dos triángulos habría uno de ellos que sumaría π o más. Esto no es posible (Teorema 27).

Sean E y F los puntos medios de AB y CD , respectivamente. La recta EF debe ser perpendicular a AB y CD . Para probar esto, trazamos las diagonales EC y ED . Entonces $\triangle EAC \cong \triangle EBD$ por LAL y $\triangle EFC \cong \triangle EFD$ por LLL (Teorema 9). De aquí tenemos que $\angle EFC = \angle EFD$ y $\angle AEF = \angle AEC + \angle CEF = \angle BED + \angle DEF = \angle BEF$, por lo que EF es perpendicular a estas dos rectas.

Las rectas CD y AB son perpendiculares a la recta EF y no se intersecan (Teorema 6), pero no son paralelas (Teorema 27). Así que la paralela a AB por el punto C , llamada CG se debe inclinar hacia AB (Teorema 18) y como corta a la perpendicular BD en el punto G , se tiene que $BG < BD = AC$. ■

Ahora vamos a probar la transitividad de las rectas paralelas, que se cumple tanto para el caso en el que las tres rectas están en el mismo plano, como para el caso en que no.

Teorema 30. Si las rectas AB y CD son paralelas a EF , entonces AB y CD son paralelas entre sí.

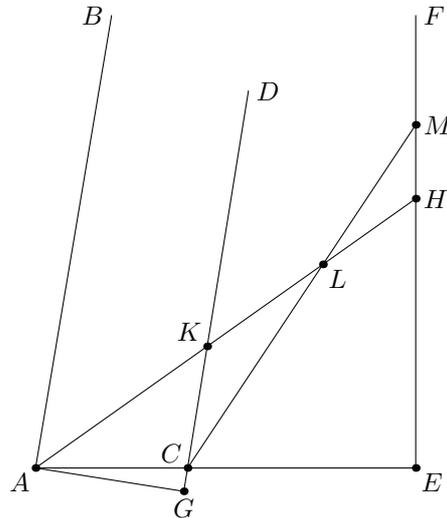


Figura 36. Dos paralelas a una tercera en un plano.

Demostración. Primero asumiremos que las tres rectas AB , CD , EF están en el mismo plano (Figura 36). Si AB y CD son paralelas a EF y ambas están del mismo lado que EF , y CD está entre las otras dos, AB y CD son paralelas entre sí. Para probar esto bajamos la perpendicular AE a EF , desde un punto A en la recta AB , así la perpendicular deberá cortar en un punto C a la recta CD porque está entre las dos (Teorema 2) y formará un ángulo agudo $\angle DCE < \frac{1}{2}\pi$. Ahora bajamos una perpendicular AG a CD desde A , que quedará dentro del ángulo agudo ACG (Teorema 8). Cualquier recta desde A dentro de $\angle BAC$ deberá cortar a EF en algún punto H (Teorema 18). Consecuentemente CD en $\triangle AEH$ cortará la recta AH en algún punto K , ya que es imposible que ésta corte a EF (Teorema 18). Así, tenemos que cualquier recta AH desde el punto A en $\angle CAB$ debe cortar a CD . Ahora, si la recta AH va desde el punto A dentro de $\angle CAG$, ésta deberá cortar a la prolongación de CD entre los puntos C y G en $\triangle CAG$. De aquí se sigue que AB y CD son paralelas (Teoremas 18 y 23).

Ahora, en la misma figura, suponiendo que las dos rectas AB y EF son paralelas a la recta de en medio CD , cada recta AK trazada desde A dentro del $\angle BAE$ cortará a la recta CD en algún punto K (Teorema 18). En la prolongación de AK tomamos un punto L y lo unimos con C por la recta CL , que deberá cortar a EF en algún punto M formando un triángulo MCE (Teorema 18). La prolongación de la recta AL dentro de $\triangle MCE$ no puede cortar a AC ni a CM por segunda vez, así que debe cortar a EF en algún punto H (Teorema 2). Así tenemos que AB y EF son paralelas entre sí.

Ahora consideremos que las rectas paralelas AB y CD están en dos planos cuya intersección es la recta EF (Figura 37). De un punto E de la recta EF trazamos la perpendicular a

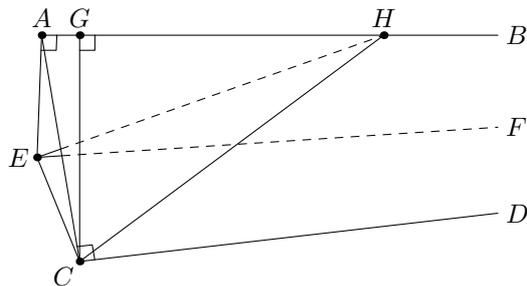


Figura 37. Dos paralelas a una tercera en planos distintos.

alguna de las paralelas, por ejemplo a AB (Teorema 4). Entonces de A , el pie de la perpendicular EA , trazamos la perpendicular a la otra paralela CD y juntamos los puntos finales E y C de las perpendiculares a modo de tener la recta EC . El ángulo BAC debe ser agudo (Teorema 27); consecuentemente, la perpendicular CG de C a la recta AB la interseca en el punto G en el rayo AB . Cada recta EH (en el plano $FEAB$ y dentro de $\angle FEA$), pertenece con la recta EC a un plano que debe cortar al plano de las dos paralelas AB y CD en alguna recta CH , esta recta corta a AB en el punto H (Teorema 18), que es común a los tres planos ($FEAB$, ECH y $BACD$). Consecuentemente EF es paralela a AB . De la misma manera podemos demostrar el paralelismo de EF y CD .

Si suponemos que EF es paralela a alguna de AB y CD , por ejemplo a AB , tendremos que EF está en el mismo plano que la otra recta, en este caso CD . Para probar esto, supongamos que el plano CDE corta al $FEAB$ en una recta EH diferente de EF . Si $\angle HEA < \angle FEA$, EH corta a AB en un punto H que, como AB es paralela a CD , no pertenece a CD , lo cual no puede suceder. Si $\angle HEA > \angle FEA$, consideramos el plano CEF que corta al plano $DCAB$ en una recta CH' . Supongamos que $CH' \neq CD$, entonces $\angle H'CG < \angle DCG$ pues de lo contrario, un punto F en EF y H' estarían en diferentes lados de ECD , pero los planos FEC y DCE sólo se cortan en la recta EC . Así, como lo hicimos con H , podemos demostrar que H' pertenece a AB . Como AB y EF son paralelas, tenemos una contradicción. Por lo tanto, EF y CD están en el mismo plano.

Así, la hipótesis de que una recta EF es paralela a una de otras dos paralelas, AB y CD , equivale a considerar a EF como la intersección de dos planos en el que las dos paralelas AB y CD están.

Ahora, sean EF y CD paralelas a AB , donde las tres rectas no están en el mismo plano. Por lo anterior, tenemos que EF es coplanar con CD y con AB . De aquí, usando lo que vimos al principio de la demostración para el caso no coplanar, podemos demostrar que EF es paralela a CD . ■

El teorema anterior también se puede expresar, para el caso en que las tres rectas no son coplanares, de la siguiente manera:

Tres planos se cortan en rectas que son paralelas todas entre sí, si el paralelismo de dos

de ellas es presupuesto.

Ya vimos que por el Teorema 18 el ángulo de paralelismo es una función de un segmento. Ahora vamos a probar que a cada ángulo le corresponde un segmento p tal que ese ángulo es su ángulo de paralelismo.

Teorema 31. Para cada ángulo dado $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ existe un único segmento p tal que $\Pi(p) = \alpha$.

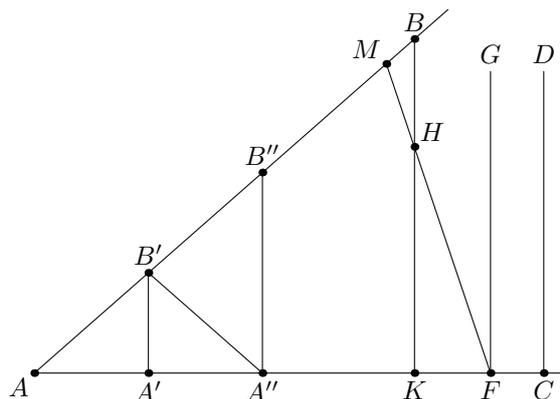


Figura 38. Existencia del segmento p tal que $\Pi(p) = \alpha$.

Demostración. Sean AB y AC dos rectas tales que en su punto de intersección A forman un ángulo agudo α (Figura 38). Tomamos un punto aleatorio B' en AB . Desde este punto trazamos $B'A'$ perpendicular con AC . Hacemos $A'A'' = AA'$ y trazamos la recta $A''B''$ perpendicular a AC . Continuamos este proceso hasta llegar a una perpendicular a AC que no se corte con AB . Esto tiene que pasar necesariamente, porque si en el triángulo $AA'B'$ la suma de los ángulos internos es $\pi - \alpha$, entonces en el triángulo $AB'A''$ es igual a $\pi - 2\alpha$, en el triángulo $AA''B''$ es menor que $\pi - 2\alpha$ (Teorema 24); esto continúa así hasta llegar a ser la suma de ángulos negativa y es evidente la imposibilidad de construir el triángulo.

Pasando desde la perpendicular CD que no corta a AB a aquellas perpendiculares que sí la cortan debe haber, por continuidad en las magnitudes de los segmentos, una única recta límite FG , tal que las perpendiculares que están a un lado de ella corten a AB y las que están en el otro lado no la corten. Ahora trazamos la recta FH que forma con FG el ángulo agudo HFG , en el lado donde está A . Desde algún punto H de FH bajamos la recta HK perpendicular a CD en K , cuya prolongación deberá cortar AB en algún punto B y haciendo un triángulo AKB en el que entra la prolongación de la recta FH , ésta debe cortar a la hipotenusa AB en algún punto M . Como el ángulo GFH es arbitrario y puede ser tomado tan pequeño como queramos, FG es paralela a AB y $AF = p$ (Teoremas 18 y 23).

Ahora vamos a probar que $p = AF$ es el único que cumple que $\Pi(p) = \alpha$. Si $p = AK$ donde $AK < AF$, la recta perpendicular KB interseca a la AB en un punto B así que $\Pi(p) > \alpha$ (Teorema 18). Si $p = AC$ donde $AC > AF$, la recta CD perpendicular AC no interseca a FG (Teorema 6) y no es paralela a ella (Teorema 27), así que no interseca a la recta AB (Teorema

3) y no es paralela a ella pues sería paralela también a FG (Teorema 30), así que $\Pi(p) < \alpha$ (Teorema 18). ■

Observación 32. De aquí podemos ver fácilmente que para $p = 0$, el límite de $\Pi(p)$ toma el valor de $\frac{1}{2}\pi$; con el incremento de p el ángulo $\Pi(p)$ decrece, mientras que el límite es cero para $p = \infty$.

Como estamos en la libertad de elegir el ángulo que estará bajo el símbolo de $\Pi(p)$ cuando la recta p es expresada por un número negativo, podemos definir lo siguiente.

Definición 33. Si p es un número mayor o igual que cero, entonces $\Pi(-p)$ será el valor que cumple que

$$\Pi(p) + \Pi(-p) = \pi.$$

Ésta es una ecuación que sirve para valores de p tanto positivos como negativos y para $p = 0$.

3.5. Triángulos esféricos

En esta sección demostraremos dos propiedades de los triángulos esféricos, relativas al área de éstos y su relación con la suma de sus ángulos. Estas propiedades serán de utilidad para desarrollar la Trigonometría hiperbólica.

Recordemos que aquí a un triángulo esférico lo definimos como la intersección de la esfera con un ángulo triedro con vértice en el centro de ésta y sus lados los medimos como los ángulos planos del ángulo triedro y sus ángulos como los ángulos diedros de éste. Así que en el siguiente teorema, por triángulos opuestos entenderemos que son aquellos que son formados por dos ángulos triedros con vértice en el centro de la esfera tal que los rayos de uno son los rayos opuestos a los rayos del otro; en tales triángulos, los lados y ángulos están en orden opuesto. También admitiremos que dos triángulos esféricos congruentes son equivalentes en superficie.

Teorema 34. Dos triángulos opuestos en una esfera son equivalentes en superficie.

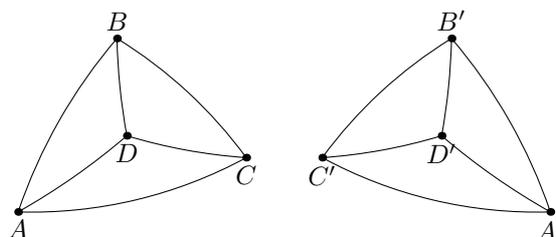


Figura 39. Triángulos opuestos.

Demostración. En los triángulos opuestos ABC y $A'B'C'$ (Figura 39) tenemos que para los lados se cumple que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$, y los correspondientes ángulos en los puntos A, B, C son también iguales a los ángulos en los puntos A', B', C' . Supongamos que un plano pasa a través de los puntos A, B, C y desde el centro O de la esfera bajamos la perpendicular a dicho plano cortando, ambos triángulos esféricos opuestos en los puntos D y D' , respectivamente. Entonces se cumple que $\angle DOA = \angle DOB = \angle DOC$ pues el plano por ABC corta a la esfera en un círculo y la recta OD corta a este plano en el centro de dicho círculo (Teorema 15), así también se cumple que $\angle DOA = \angle D'OA'$, $\angle DOB = \angle D'OB'$ y $\angle DOC = \angle D'OC'$ (Teorema 10), consecuentemente los pares de triángulos esféricos isósceles ADB y $A'D'B'$, BDC y $B'D'C'$, ADC y $A'D'C'$ son congruentes (Teorema 17) y, por tanto, tienen la misma superficie. De aquí tenemos que los triángulos esféricos opuestos ABC y $A'B'C'$ son equivalentes en superficie por ser suma de superficies iguales. ■

En el siguiente teorema la superficie de un ángulo esférico será la superficie esférica que es cortada por el ángulo diedro que lo determina. Si la medida de un ángulo esférico es α y el área total de la esfera es S , admitiremos que el área de α será $\frac{\alpha}{2\pi}S$, que nos da que la magnitud de la superficie es proporcional a la del ángulo. Para denotar el área del ángulo esférico de medida α , lo haremos por $area(\alpha)$.

Teorema 35. La superficie de un triángulo esférico es igual a la mitad de la suma de las superficies de los tres ángulos menos la de un ángulo recto.

Demostración. En el triángulo esférico ABC , donde cada lado es menor que π , designamos los ángulos por A, B, C (Figura 40); prolongamos el lado AB hasta que un círculo completo $ABA'B'A$ es formado y divide a la esfera en dos partes iguales. En la mitad en la que está el $\triangle ABC$, prolongamos los otros dos lados a través de su punto de intersección C hasta encontrar el círculo en A' y B' .

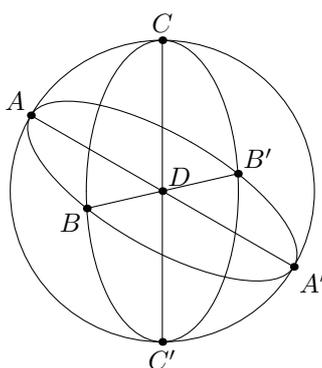


Figura 40. Superficie de un triángulo esférico.

De esta manera el hemisferio es dividido en cuatro triángulos, $\triangle ABC$, $\triangle ACB'$, $\triangle B'CA'$, $\triangle A'CB$, cuyas áreas son designadas por P, X, Y, Z , respectivamente. Es evidente que $P+X = area(B)$ y $P+Z = area(A)$. El tamaño del triángulo esférico Y es igual al del triángulo

opuesto ABC' , teniendo el lado AB en común con el triángulo P y cuyo tercer ángulo C' está en el punto final del diámetro de la esfera que empieza en C y pasa a través del centro D de la esfera (Teorema 34). De aquí se sigue que $P+Y = \text{area}(C)$, y como $P+X+Y+Z = \text{area}(\pi)$, también tenemos que

$$2P + \text{area}(\pi) = 2P + (P+X+Y+Z) = (P+X) + (P+Y) + (P+Z) = \text{area}(B) + \text{area}(A) + \text{area}(C)$$

y así obtenemos que

$$P = \frac{1}{2}(\text{area}(A) + \text{area}(B) + \text{area}(C) - \text{area}(\pi))$$

■

3.6. Propiedades de los triángulos rectilíneos

Aunque la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que π , la suma de los ángulos entre tres planos que se intersecan en rectas paralelas, sí es igual a dos rectos. Este hecho será muy importante en lo que sigue, ya que nos dará una superficie en la que se cumple la Geometría euclidiana.

Teorema 36. Si tres planos se cortan en rectas paralelas, entonces la suma de los tres ángulos diedros es igual a dos ángulos rectos.

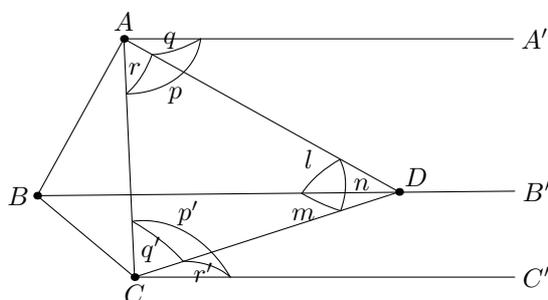


Figura 41. Suma de ángulos entre tres planos que se intersecan en rectas paralelas.

Demostración. Sean AA' , BB' , CC' tres rectas paralelas hechas por la intersección de tres planos (Teorema 30). Tomamos en ellas tres puntos A , B , C , y supongamos que un plano pasa por estos tres puntos (Figura 41). Este plano también cortará a los planos de las paralelas en las rectas AB , AC , y BC . Pasamos un plano por la recta AC y un punto D en la recta BB' , la intersección de éste con los otros dos planos de las paralelas AA' y BB' , CC' y BB' produce las dos rectas AD y DC . La inclinación de dicho plano con el de las paralelas AA' y CC' , lo designaremos por ω .

Los ángulos entre los tres planos donde están las paralelas, los designaremos por X , Y , Z , respectivamente en las rectas AA' , BB' , CC' ; finalmente llamamos a los ángulos lineales

$\angle BDC = a$, $\angle ADC = b$, $\angle ADB = c$. Tomando a A como centro construimos una esfera, en la que las intersecciones con las rectas AC , AD , AA' determinan un triángulo esférico, con lados p , q y r . A su área la llamamos α . El ángulo opuesto a q es el ángulo ω , el opuesto a r es X , y consecuentemente el ángulo opuesto a p es $\pi + 2\alpha(\frac{2\pi}{S}) - \omega - X$, donde S es el área total de la esfera (Teorema 35). En la misma manera CA , CD , CC' cortan a una esfera alrededor del centro C del mismo radio que la que consideramos con centro en A , y determinan un triángulo esférico de área β , con los lados p' , q' , r' , y ángulos, ω opuesto a r' , Z opuesto a q' y consecuentemente $\pi + 2\beta(\frac{2\pi}{S}) - \omega - Z$ opuesto a p' .

Finalmente, una esfera alrededor de D que tiene radio igual a las anteriores forma, con sus intersecciones con las rectas DA , DB , DC , un triángulo esférico cuyos lados son l , m , n y los ángulos opuestos a ellos son $\omega + Z - 2\beta(\frac{2\pi}{S})$ (pues es suplementario del opuesto a p'), $\omega + X - 2\alpha(\frac{2\pi}{S})$ (es suplementario del opuesto a p), y Y , respectivamente. Consecuentemente su área es $\delta = \frac{1}{2}(area(X) + area(Y) + area(Z) - area(\pi)) - \alpha - \beta + area(\omega)$.

Si disminuimos ω , en el triángulo pqr , p sigue siendo igual, q se mantiene en su lugar pero se reduce en magnitud, pues $\angle A'AD$ se hace más pequeño. Así, el nuevo triángulo pqr está metido en el anterior y por tanto su área es menor. Similarmente el triángulo $p'q'r'$ también disminuye su magnitud. Entonces tenemos que disminuyendo ω también se reducen los valores α y β , así que $\alpha + \beta - area(\omega)$ puede hacerse tan pequeño como cualquier número dado. En el triángulo δ también los lados l y m pueden ser reducidos hasta desaparecer (Teorema 26). Si reducimos ω , D se aleja de B y entonces los lados l y m se reducen. Como el ángulo entre l y m se mantiene igual, el nuevo triángulo se podría ver como dentro del anterior, así que el triángulo δ disminuye su área. Entonces δ desaparece junto con ω ; de aquí se sigue que cuando δ se hace 0

$$area(X) + area(Y) + area(Z) = area(\pi) \Rightarrow X + Y + Z = \pi.$$

■

En la Geometría euclidiana, las mediatrices de un triángulo siempre concurren. Sin embargo, en la Geometría de Lobachevski no siempre es así. En caso de que dos de ellas se corten, las tres concurren. En otro caso no se intersecan; pero si dos de ellas son paralelas, las tres mediatrices lo son entre sí. Esto es lo que establecen los siguientes dos teoremas.

Teorema 37. En un triángulo, las mediatrices de los lados no se intersecan o las tres se cortan en el mismo punto.

Demostración. Suponiendo que en el triángulo ABC las dos perpendiculares ED y DF que son levantadas en los segmentos AB y BC en sus puntos medios E y F , se intersecan en D (Figura 42); trazamos las rectas DA , DB , DC , dentro de los ángulos del triángulo. En los triángulos congruentes ADE y BDE por LAL (Teorema 9), tenemos que $AD = BD$. Así también se sigue que $BD = CD$. Entonces el $\triangle ADC$ es isósceles y entonces la perpendicular desde el punto D al lado AC corta a éste en el punto medio G (Teoremas 7 y 9). La prueba no cambia en el caso en el que el punto D esté en la recta AC o fuera del triángulo.

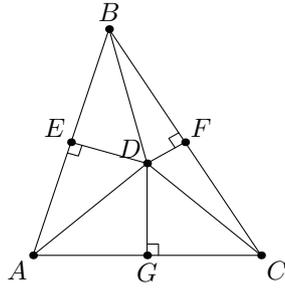


Figura 42. Mediatrices de un triángulo que concurren.

En el caso en el que dos de las mediatrices no se intersequen, entonces la tercera no podrá intersecarse con ellas, pues de lo contrario, se intersecarían las tres por lo que acabamos de ver. ■

Teorema 38. Las mediatrices de los lados de un triángulo deben ser las tres paralelas, suponiendo el paralelismo de dos de ellas.

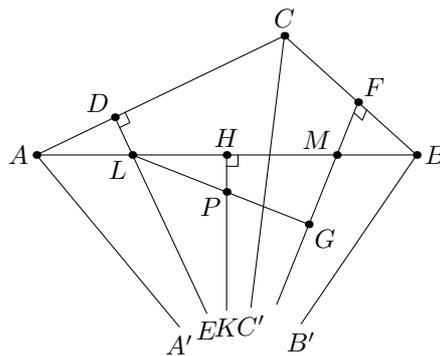


Figura 43. Mediatrices de un triángulo que son paralelas.

Demostración. En el triángulo ABC sean las rectas DE, FG, HK , perpendiculares a los lados AC, CB, BA , en sus puntos medios D, F, H , respectivamente (Figura 43). Primeramente asumiremos que las rectas DE y FG son paralelas, cortando a AB en L y en M , y que la perpendicular HK está entre ellas. Dentro del $\angle BLE$ trazamos desde el punto L una recta LG , que debe cortar a FG en algún punto G por muy pequeño que sea $\angle GLE$. Como en $\triangle LGM$ la perpendicular HK no puede intersecar a MG (Teorema 37), ésta debe cortar a LG en algún punto P . De aquí se sigue que HK es paralela a DE (Teorema 18) y a MG (Teoremas 23 y 30).

Ponemos los lados $BC = 2a, AC = 2b, AB = 2c$, y designamos los ángulos opuestos a ellos por A, B, C , entonces en el caso que acabamos de considerar tenemos

$$A = \Pi(b) - \Pi(c)$$

$$B = \Pi(a) - \Pi(c)$$

$$C = \Pi(a) + \Pi(b)$$

que lo podemos comprobar fácilmente con ayuda de las rectas AA' , BB' , CC' , que son trazadas desde los puntos A , B , C , paralelas a la perpendicular HK y consecuentemente a las dos perpendiculares DE y FG (Teoremas 31 y 30).

Sean ahora las dos perpendiculares HK y FG paralelas, por lo que la tercera DE no puede cortar a las otras dos (Teorema 37); es decir, es paralela a ellas o corta a AA' . La última suposición dice que el ángulo

$$C > \Pi(a) + \Pi(b).$$

Sea Q el punto tal que $\angle BCQ = \Pi(a) + \Pi(b)$ y $AC = CQ$, y designamos la magnitud del tercer lado BQ por $2c'$ (Figura 44), entonces el $\angle CBQ$ es mayor que el $\angle CBA$ y en concordancia con lo que hemos probado,

$$\angle CBQ = \Pi(a) - \Pi(c') > \Pi(a) - \Pi(c)$$

de donde se sigue que $c' > c$ pues $\Pi(c) > \Pi(c')$ (Teorema 31).

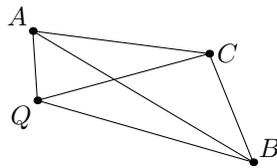


Figura 44. CA movido a su nueva posición CQ .

En $\triangle ACQ$ los ángulos en A y Q son iguales (Teorema 7), de aquí que en $\triangle ABQ$ el ángulo en Q debe ser más grande que el del punto A , consecuentemente $AB > BQ$ (Teorema 8); esto es $c > c'$. Lo cual es una contradicción. ■

3.7. Líneas límite y equidistante

Algo más que nos será de utilidad en este trabajo son los conceptos de línea límite y superficie límite. Su importancia reside en que en la superficie límite se cumple la Trigonometría euclidiana y servirá de referencia al momento de desarrollar la de Lobachevski.

Definición 39. *Línea límite (horociclo)* es la curva que está en un plano para la que todas las mediatrices de sus cuerdas son paralelas entre sí.

Teorema 40. Dada una recta y un punto en ella, existe una única línea límite que pasa por ese punto tal que las mediatrices de las cuerdas son paralelas a esa recta.

Demostración. De conformidad con la definición, vamos a generar una línea de la siguiente manera: desde un punto A de una recta dada AB (Figura 45), a diferentes ángulos $\angle CAB =$

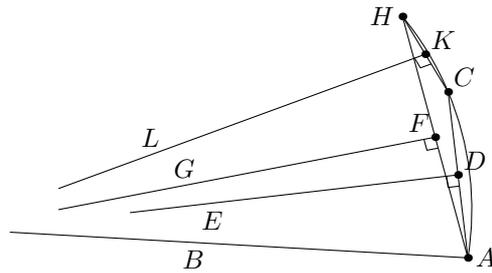


Figura 45. Línea límite.

$\Pi(a)$, trazamos cuerdas $AC = 2a$. El punto final C de dicha cuerda estará en nuestra línea, cuyos puntos iremos determinando gradualmente de esta forma. La perpendicular DE levantada sobre la cuerda AC , en su punto medio D , será paralela a la recta AB .

De la misma manera que DE , la perpendicular FG levantada en el punto medio de cualquier cuerda AH , será paralela a AB ; consecuentemente, esta peculiaridad pertenece a toda perpendicular KL en general, que es levantada en el punto medio K de cualquier cuerda CH dibujada entre cualesquiera puntos C y H (Teorema 38), por lo que esta línea, unívocamente determinada, cumple con la definición de línea límite. ■

A partir del teorema anterior podemos dar la siguiente definición.

Definición 41. La recta que determina en un punto de ella una única línea límite se conoce como *eje de la línea límite*.

Observación 42. Por la última parte de la demostración anterior se concluye que las mediatrices de las cuerdas de una línea límite deben llamarse, sin distinción, *ejes de la línea límite*.

Teorema 43. Un círculo cuyo radio es arbitrariamente grande pasa a ser una línea límite.

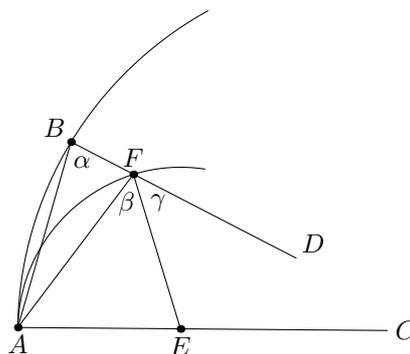


Figura 46. Círculo que crece continuamente.

Demostración. Dada una cuerda AB de la línea límite (Figura 46), trazamos desde los puntos finales A y B de la cuerda dos ejes AC y BF , que consecuentemente formarán con la cuerda

dos ángulos iguales $\angle BAC = \angle ABF = \alpha$ ya que son ambas paralelas a la perpendicular por el punto medio de AB . Sobre uno de estos ejes AC , tomamos un punto E como centro de un círculo y trazamos el arco AF desde el punto inicial A , del eje AC , a su punto de intersección F con el otro eje BF . El radio del círculo, FE , correspondiente al punto F , formará en un lado con la cuerda AF un ángulo $\angle AFE = \beta$ y en el otro lado con el eje BF , el ángulo $\angle EFD = \gamma$. De aquí se sigue que el ángulo entre las dos cuerdas $\angle BAF = \angle BAE - \angle FAE = \alpha - \beta < \beta + \gamma - \alpha$ (Teorema 27); de donde $\alpha - \beta < \frac{1}{2}\gamma$ que se obtiene al sumar $\alpha - \beta$ a ambos lados de la desigualdad.

Cuando el ángulo γ se aproxima al límite cero, se tiene que es en consecuencia de un movimiento del punto E en la dirección AC , cuando F se mantiene fijo, (Teorema 26); así también, si se mantiene al centro E en su posición y se aproxima F a B en el eje BF , de tal manera que $EF = EA$, disminuye todavía más el ángulo γ (Teorema 27). De aquí se sigue que con una disminución del ángulo γ también el ángulo $\alpha - \beta$ disminuye, que representa la mutua inclinación de las dos cuerdas AB y AF ; y así, la distancia del punto B de la línea límite al punto F en el círculo, tiende a desaparecer. ■

A partir de este resultado podemos llamar a la línea límite también como *un círculo con radio infinito*.

Teorema 44. Sean s y s' dos arcos de líneas límite acotados por las rectas paralelas AA' y BB' , donde $s = AB$ y $s' = A'B'$ (Figura 48). Entonces los segmentos AA' y BB' son iguales y los denotamos por x , y el cociente $\frac{s'}{s}$ sólo depende de la distancia x que separa a las líneas límite y está dado por la fórmula

$$s' = sq^{-x},$$

donde q es un número real positivo.

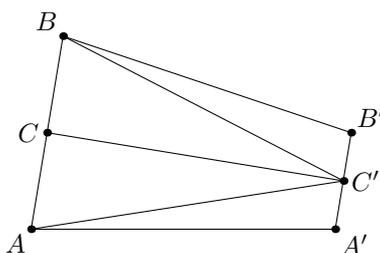


Figura 47. Los segmentos AA' y BB' son iguales.

Demostración. Probemos primero que los segmentos AA' y BB' miden lo mismo. Para esto, trazamos la mediatriz CC' del segmento AB (Figura 47). Así, los triángulos ACC' y BCC' son congruentes por LAL (Teorema 9), así que los lados AC' y BC' son iguales. Como $\angle ABB' = \angle BAA'$ (Teorema 40) y $\angle CBC' = \angle CAC'$ tenemos que $\angle B'BC' = \angle C'AA'$. También tenemos que los ángulos $BB'C'$ y $AA'C'$ son iguales porque sus suplementarios son iguales (Teorema 40). Así, por LAA $\triangle BC'B' \cong \triangle AC'A'$ y de aquí $AA' = BB' = x$. También

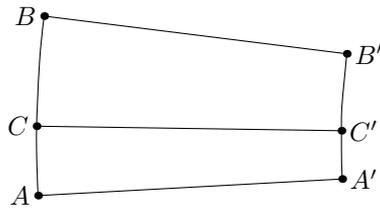


Figura 48. Ejes de arcos de líneas límite.

obtenemos que CC' es mediatriz de $A'B'$ y por lo tanto podemos considerar que divide a los dos arcos de línea límite en dos partes iguales.

Enseguida vamos a probar que la razón entre los arcos límite s y s' depende únicamente de la distancia x . Entre los arcos AA' , BB' trazamos un tercer arco CC' , que marcará en el arco AB una parte $AC = t$ y en el arco $A'B'$ en el mismo lado una parte $A'C' = t'$ (Figura 48). Asumamos que la razón entre t y s es igual a la de los números enteros p y q , así que

$$t = \frac{p}{q}s$$

Ahora dividamos s por arcos en q partes iguales, entonces habrá p partes en t . Así, al trazar los ejes que dividan al arco AB en las q partes tenemos que, por ser todos estos ejes paralelos y dividir también al arco $A'B'$ en partes iguales, habrá la misma razón entre las partes de s y t que entre s' y t' ; consecuentemente, tenemos

$$\frac{t'}{t} = \frac{s'}{s}.$$

Como cualquier número real puede ser aproximado por números racionales, tenemos que dondequiera que sean tomados los arcos t y t' entre los ejes AA' y BB' , la razón entre t y t' permanecerá siempre igual.

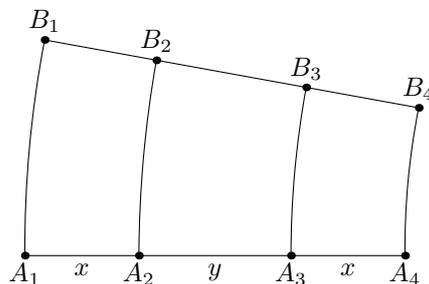


Figura 49. Razones de los arcos límite.

Ahora consideremos que tenemos dos rectas paralelas AA' , BB' y en ellas los arcos límite A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 , A_4B_4 de tal manera que $A_1A_2 = A_3A_4$ y definidos respectivamente en la dirección del paralelismo (Figura 49). La línea límite definida por A_3 coincide al trasladarla a

A_1 con la definida por A_1 (Teorema 40). Entonces, el arco límite A_3B_3 lo podemos ver como parte del A_1B_1 y el A_4B_4 como parte del A_2B_2 al hacer la traslación ya que $A_1A_2 = A_3A_4$, por lo que tenemos que $\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_3B_3}{A_4B_4}$.

De aquí tenemos que la razón $\frac{s'}{s}$ depende únicamente de la distancia que separa a los arcos de líneas límite. Llamaremos $f(x)$ a la función que asocia a esta separación x de los arcos de líneas límite su correspondiente razón $\frac{s'}{s}$ entre las longitudes de los arcos.

Sean AA' y BB' dos rectas paralelas y A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 tres arcos de líneas límite definidos respectivamente en la dirección del paralelismo y sean $A_1A_2 = x$, $A_2A_3 = y$ (Figura 49). Entonces tenemos que $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = f(x)$, $\frac{A_3B_3}{A_2B_2} = f(y)$ y $\frac{A_3B_3}{A_1B_1} = f(x + y)$. De aquí es fácil ver que $f(x + y) = f(x)f(y)$. Esta función es continua y el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) probó que la única función continua que satisface esta ecuación es $f(x) = q^{-x}$, donde q es un número real positivo. ■

En la demostración del teorema anterior, $f(x)$ es una razón, por lo que es independiente de la unidad de longitud seleccionada. Entonces, calculando logaritmo natural a ambos lados de la ecuación $f(x) = q^{-x}$, obtenemos que también $\ln f(x)$ y $-x \ln q$ deben ser independientes de la unidad de longitud. Si despejamos $\ln q$, obtenemos que debe ser el inverso de una longitud; es decir, $\ln q = \frac{1}{k}$. Entonces la ecuación quedaría como

$$f(x) = e^{-\frac{x}{k}}.$$

Podemos remarcar que el límite de la función cuando x tiende a ∞ es cero, y así no sólo la distancia entre las dos paralelas decrece (Teorema 29), además tenemos que con la prolongación de las paralelas en la dirección del paralelismo ésta debe desaparecer completamente. Las rectas paralelas tienen así el carácter de asíntotas.

Mencionamos también que k es una constante conocida como la *constante del espacio*. Su valor numérico depende de la unidad de medida seleccionada, pero k puede ser una unidad de medida por sí misma; a veces es conveniente considerar $k = 1$. Por eso cuando desarrollemos la trigonometría tomaremos ese valor para simplificar los cálculos, sin que por ello dejen de ser válidos los resultados obtenidos para otros valores de k .

Definición 45. *Superficie límite (horoesfera)* es la superficie que resulta de la revolución de la línea límite alrededor de uno de sus ejes.

Definición 46. Las mediatrices de las cuerdas de la superficie límite se llaman *ejes de la superficie límite*.

Definición 47. El eje de la Definición 45 se llama *eje de revolución de la superficie límite*.

Definición 48. *Plano principal* es un plano que pasa a través del eje de revolución de una superficie límite.

Definición 49. *Triángulo límite* es la intersección de una línea límite con los tres planos determinados por tres de sus ejes.

Teorema 50. En la superficie límite se cumple la Geometría euclidiana.

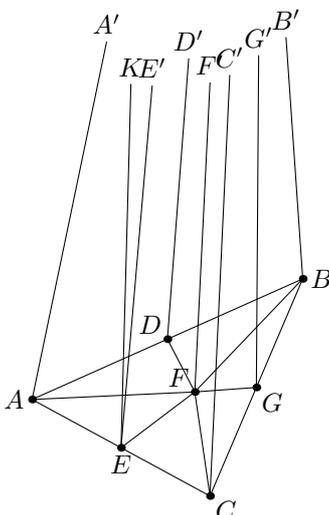


Figura 50. Tres puntos en la superficie límite.

Demostración. Sean A, B, C , tres puntos en la superficie límite (Figura 50), donde AA' es el eje de revolución, BB' y CC' son otros dos ejes, AB y AC son cuerdas a las que los ejes están inclinados a iguales ángulos $\angle A'AB = \angle B'BA$, $\angle A'AC = \angle C'CA$ (Teorema 40). Los dos ejes BB' y CC' están dibujados a través de los puntos finales de la tercera cuerda BC , son también paralelos entre ellos y están en el mismo plano (Teorema 30).

Una perpendicular DD' es levantada en el punto medio D de la cuerda AB en el plano de las dos paralelas AA', BB' y debe ser paralela a los tres ejes AA', BB', CC' , (Teoremas 31 y 30); igualmente la perpendicular EE' a la cuerda AC en el plano de las paralelas AA', CC' será paralela a los tres ejes AA', BB', CC' , y a la perpendicular DD' . Ahora designemos al ángulo entre el plano que contiene a las paralelas AA' y BB' y el plano de $\triangle ABC$ por $\Pi(a)$, donde a puede ser positivo, negativo o nulo. Si a es positivo, entonces levantemos $FD = a$ dentro del $\triangle ABC$, en este plano, y perpendicular a la cuerda AB en su punto medio D . Si a fuera negativo, entonces $FD = a$ debe ser dibujada fuera del triángulo en el otro lado de la cuerda AB ; cuando $a = 0$, el punto F coincide con D . En todos los casos serán congruentes los triángulos AFD y BFD por LAL; consecuentemente, tendremos que $FA = FB$.

Levantemos en F la recta perpendicular FF' al plano del $\triangle ABC$. Como $\angle D'DF = \Pi(a)$, y $DF = a$, tenemos que FF' es paralela a DD' y a la recta EE' , con la que también está en un plano perpendicular al plano de $\triangle ABC$.

Supongamos ahora que en el plano de las paralelas EE', FF' sobre EF la perpendicular EK es levantada, entonces ésta estará en ángulo recto con el plano del $\triangle ABC$, (Teorema 12),

y a la recta AE en este plano, (Teorema 13); consecuentemente AE , que es perpendicular a EK y EE' , deberá ser también al mismo tiempo perpendicular a FE , (Teorema 13). Los triángulos AEF y FEC son congruentes por LAL, ya que son triángulos rectángulos y tienen los lados adyacentes al ángulo recto, iguales; entonces tenemos $AF = FC = FB$.

Una perpendicular desde el vértice F del triángulo isósceles BFC a la base BC , va a través de su punto medio G ; un plano que pasa a través de esta perpendicular FG y la recta FF' , deberá ser perpendicular al plano del $\triangle ABC$ y cortar el plano de las paralelas BB' , CC' , en la recta GG' , que es también paralela a BB' y CC' (Teorema 30). Como ahora CG está en ángulo recto con FG y al mismo tiempo con GG' , consecuentemente $\angle C'CG = \angle B'BG$ (Teorema 31). De aquí se sigue que para la superficie límite cada eje puede ser considerado eje de revolución.

En concordancia con esto cada plano principal corta a la superficie límite en una línea límite. Tres planos principales que se cortan mutuamente, forman ángulos entre ellos cuya suma es π (Teorema 36). Estos ángulos pueden ser considerados como ángulos de triángulos límite. Consecuentemente, la misma interdependencia de los ángulos y lados, probada en la Geometría euclidiana para los triángulos rectilíneos, pertenece a los triángulos límite. ■

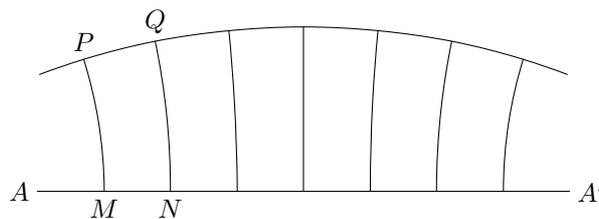


Figura 51. Línea equidistante.

Teorema 51. Dada una recta AA' , existe una única línea dividida en dos brazos, uno a cada lado de la recta AA' que equidista de ella y corta a las rectas perpendiculares de AA' en ángulo recto.

Demostración. Sea AA' una recta y trazamos rectas perpendiculares a AA' . Cortamos a iguales distancias MP , NQ ,... a lo largo de estas perpendiculares (Figura 51). Así formamos una línea uniforme que no es, como en la Geometría euclidiana, una línea recta; y por simetría, esta curva corta a todas estas perpendiculares a AA' en ángulos rectos. Sin embargo, la línea completa consiste de dos brazos simétricos respecto de la recta. ■

Definición 52. La curva del Teorema 51 se llama *línea equidistante de AA'* .

3.8. Trigonometría hiperbólica

En lo que sigue, desarrollaremos las fórmulas de la Trigonometría hiperbólica. Para ello, utilizaremos gran parte de los teoremas probados anteriormente. Aclaremos que aquí las

funciones trigonométricas estarán definidas como sigue:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

$$\operatorname{cos} x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots,$$

y de ahí definimos las demás funciones trigonométricas de la siguiente manera

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}, \quad \sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}, \quad \operatorname{csc} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}.$$

En el siguiente teorema encontraremos las fórmulas trigonométricas para triángulos rectilíneos y esféricos, y veremos que estas últimas son independientes del postulado de las paralelas.

Teorema 53. La Trigonometría esférica es independiente del quinto postulado de Euclides.

Demostración. En lo que sigue, si x es el tamaño de un segmento de recta, designaremos por x' el tamaño de otro segmento de recta que cumple que

$$\Pi(x) + \Pi(x') = \frac{1}{2}\pi.$$

Sea ahora ABC un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa es $AB = c$ y los otros dos lados son $AC = b$ y $BC = a$; los ángulos opuestos a ellos los denotamos por $\angle ABC = \Pi(\beta)$ y $\angle BAC = \Pi(\alpha)$, respectivamente (Teorema 31). En el punto A levantamos la recta AA' perpendicular al plano del $\triangle ABC$, y de los puntos B y C trazamos BB' y CC' paralelas a AA' (Figura 52).

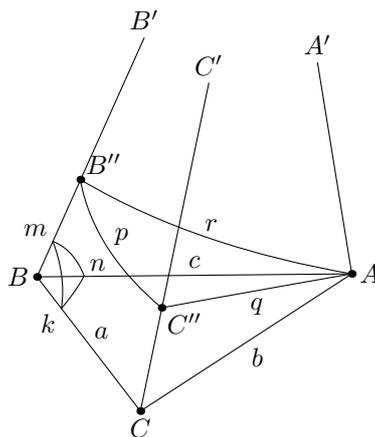


Figura 52. Triángulo límite $AB''C''$.

Los planos que determinan estas tres paralelas forman los ángulos: $\Pi(\alpha)$ en AA' ; como el plano de las rectas AA' y CC' es perpendicular al de $\triangle ABC$ (Teorema 12) y BC es perpendicular a AC , tenemos que también lo es al plano de las rectas AA' y CC' (Teorema 12),

de aquí se concluye que es también perpendicular a una perpendicular a CC' en el plano de las rectas AA' y CC' (Teorema 13) y entonces los planos determinan un ángulo recto en CC' ; consecuentemente se tiene $\Pi(\alpha')$ en BB' (Teorema 36).

Las intersecciones de las rectas BA, BC, BB' con una esfera alrededor del punto B como centro, determina un triángulo esférico mnk , en el cual sus lados son $mn = \Pi(c), kn = \Pi(\beta), mk = \Pi(a)$ y los ángulos opuestos son $\Pi(b), \Pi(\alpha'), \frac{1}{2}\pi$. Así, debemos admitir la existencia de un triángulo esférico con lados $\Pi(c), \Pi(\beta), \Pi(a)$ y ángulos opuestos $\Pi(b), \Pi(\alpha'), \frac{1}{2}\pi$, si admitimos la existencia de un triángulo rectilíneo de lados a, b, c y ángulos opuestos $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{1}{2}\pi$ (Figura 53).

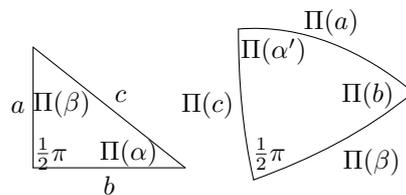


Figura 53. Triángulo rectilíneo y triángulo esférico.

Como la existencia de un triángulo esférico implica la existencia de un triángulo simétrico a él, entonces el triángulo esférico de la Figura 53 necesita también la de otro triángulo rectilíneo, que debe tener los lados a, α', β , y los ángulos opuestos $\Pi(b'), \Pi(c), \frac{1}{2}\pi$ (Figura 54). También, como a es independiente de b y α de β , podemos pasar de a, b, c, α, β a b, a, c, β, α y también a a, α', β, b', c .

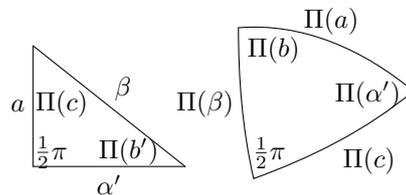


Figura 54. Triángulo rectilíneo y triángulo esférico simétrico.

Supongamos que por A , con AA' como eje pasa una superficie límite y corta a los otros dos ejes BB' y CC' en B'' y C'' (Figura 52), y en las intersecciones con los planos las paralelas forman un triángulo límite, cuyos lados son $B''C'' = p, C''A = q, B''A = r$, y los ángulos opuestos a ellos son $\Pi(\alpha), \Pi(\alpha'), \frac{1}{2}\pi$, como ya habíamos obtenido y donde, consecuentemente (Teoremas 36 y 50):

$$p = r \operatorname{sen} \Pi(\alpha), \quad q = r \operatorname{cos} \Pi(\alpha).$$

Ahora cortemos por la recta BB' los tres planos principales de la Figura 52 y doblémoslos hasta que estén en el mismo plano, donde los arcos p, q, r , se unirán a un único arco de la línea límite, que va a través del punto A y tiene a AA' como eje (Figura 55). De esta manera en el mismo lado están, los arcos p y q , el lado b del triángulo, que es perpendicular a AA' en A , el eje CC' va del final de b paralelo a AA' y a través de C'' , el punto de unión de p y q , el lado a perpendicular a CC' en el punto C , y el eje BB' paralelo a AA' que comienza en el punto final de a y pasa

a través del punto final B'' del arco p . En el otro lado de AA' estarán, el lado c perpendicular a AA' en el punto A , y el eje BB' paralelo a AA' , y que va a través del punto final del arco r .

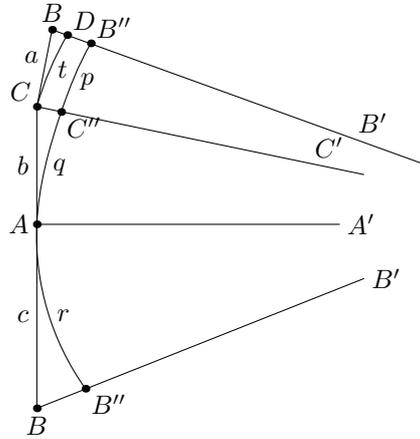


Figura 55. Desdoble de los tres planos.

El tamaño del segmento CC'' depende de b , cuya dependencia la expresaremos por $CC'' = f(b)$. De la misma manera tenemos $BB'' = f(c)$. Si describimos, tomando a CC' como eje una nueva línea límite del punto C a su intersección D con el eje BB' y designamos el arco CD por t , entonces $BD = f(a)$. $BB'' = BD + DB'' = BD + CC''$, consecuentemente $f(c) = f(a) + f(b)$. Además, tomando $k = 1$ para simplificar cálculos, vemos que (Teorema 44)

$$t = pe^{f(b)} = r \operatorname{sen} \Pi(\alpha) e^{f(b)}.$$

Si la perpendicular al plano de $\triangle ABC$ fuera levantada en B en lugar de A , entonces las líneas c y r permanecerían igual, los arcos q y t cambiarían a t y q , las rectas a y b en b y a , y el ángulo $\Pi(\alpha)$ en $\Pi(\beta)$, todo esto sucede por que sólo intercambiamos los catetos. Consecuentemente tendríamos

$$q = r \operatorname{sen} \Pi(\beta) e^{f(a)},$$

de donde se sigue, sustituyendo el valor de q por $r \cos \Pi(\alpha)$,

$$\cos \Pi(\alpha) = \operatorname{sen} \Pi(\beta) e^{f(a)},$$

y si cambiamos α y β por b' y c , como anteriormente hicimos ver,

$$\operatorname{sen} \Pi(b) = \operatorname{sen} \Pi(c) e^{f(a)};$$

además, multiplicando por $e^{f(b)}$, ya que probamos que $f(c) = f(a) + f(b)$,

$$\operatorname{sen} \Pi(b) e^{f(b)} = \operatorname{sen} \Pi(c) e^{f(c)}.$$

Al intercambiar los catetos obtenemos

$$\operatorname{sen} \Pi(a) e^{f(a)} = \operatorname{sen} \Pi(c) e^{f(c)}.$$

Y de las dos últimas ecuaciones se sigue que

$$\text{sen } \Pi(a)e^{f(a)} = \text{sen } \Pi(b)e^{f(b)}.$$

Como las rectas a y b son independientes una de la otra y, aún más, podemos poner $b = 0$, en la que se cumple que $f(b) = 0$, $\Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$, tenemos que en cada segmento a , sustituyendo en la ecuación anterior estos resultados, que

$$e^{-f(a)} = \text{sen } \Pi(a).$$

Aplicando la ecuación anterior para los segmentos a, b, c y recordando que $f(c) = f(a) + f(b)$, obtenemos

$$\text{sen } \Pi(c) = \text{sen } \Pi(a) \text{sen } \Pi(b), \quad (1)$$

Permutando las letras a, b, c , por a, α', β se tiene

$$\text{sen } \Pi(\beta) = \text{sen } \Pi(\alpha') \text{sen } \Pi(a).$$

pero, como $\Pi(\alpha') = \frac{1}{2}\pi - \Pi(\alpha)$ y por la identidad $\cos x = \text{sen}(\frac{1}{2}\pi - x)$, llegamos a

$$\text{sen } \Pi(\beta) = \cos \Pi(\alpha) \text{sen } \Pi(a). \quad (2)$$

Intercambiando las letras a con b y α con β la fórmula anterior se convierte en

$$\text{sen } \Pi(\alpha) = \cos \Pi(\beta) \text{sen } \Pi(b), \quad (3)$$

Cambiando α por b' , β por c y b por α' y con la ayuda de la identidad

$$\cos \Pi(b) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\alpha), \quad (4)$$

Intercambiando a con b y α con β de nuevo, obtenemos

$$\cos \Pi(a) = \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta). \quad (5)$$

Si designamos en el triángulo rectángulo esférico los lados $\Pi(c)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(a)$, y los ángulos opuestos $\Pi(b)$, $\Pi(\alpha')$ (Figura 53), por las letras a, b, c, A, B , entonces obtenemos que las ecuaciones (1-5) toman la forma de aquellas que conocemos como probadas en la Trigonometría esférica para los triángulos rectángulos,

$$\text{sen } a = \text{sen } c \text{sen } A,$$

$$\text{sen } b = \text{sen } c \text{sen } B,$$

$$\cos A = \cos a \text{sen } B,$$

$$\cos B = \cos b \text{sen } A,$$

$$\cos C = \cos a \cos b;$$

de estas ecuaciones podemos pasar a aquellas para todos los triángulos esféricos en general. De aquí se sigue que la Trigonometría esférica no depende de si en un triángulo rectilíneo la suma de sus ángulos internos sea igual a dos rectos o no. ■

En el siguiente teorema encontraremos una fórmula explícita para el ángulo de paralelismo. Esto nos permitirá hacer cálculos explícitos con ella para, posteriormente, encontrar las fórmulas de la Trigonometría de Lobachevski en general.

Teorema 54. La función ángulo de paralelismo está determinada por la fórmula

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}.$$

Demostración. Consideremos el triángulo rectángulo ABC , cuyos lados son a, b, c , y sus ángulos opuestos $\Pi(\alpha), \Pi(\beta), \frac{1}{2}\pi$.

Prolongamos la hipotenusa c a través del punto B , y hacemos $BD = \beta$ (Figura 56), en el punto D trazamos la perpendicular a BD y la llamamos DD' , que será paralela a BB' , la prolongación del lado a más allá del punto B . Trazamos AA' paralela a DD' por A , que es al mismo tiempo paralela a CB' (Teorema 30), así tenemos $\angle A'AD = \Pi(c + \beta)$, $\angle A'AC = \Pi(b)$, y consecuentemente

$$\Pi(b) = \Pi(\alpha) + \Pi(c + \beta). \quad (6)$$

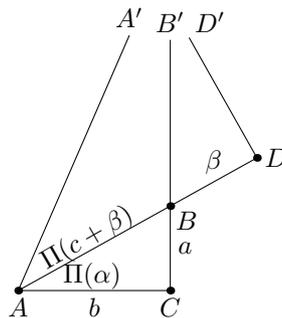


Figura 56. D al otro lado de A en el triángulo rectángulo ABC .

Ahora, consideremos el caso en el que β es construido en el otro lado de B y, como veremos enseguida, vamos a obtener una ecuación similar.

Si marcamos la distancia β respecto a B en la hipotenusa c (Figura 57), entonces en el punto D , dentro del triángulo levantamos la perpendicular DD' en AB , y del punto A trazamos AA' paralela a DD' , así BC con su prolongación CC' será la tercera paralela; entonces $\angle CAA' = \Pi(b)$, $\angle DAA' = \Pi(c - \beta)$, consecuentemente $\Pi(c - \beta) = \Pi(\alpha) + \Pi(b)$. Este fue el caso para $c > \beta$.

Si $c = \beta$ (Figura 58), la perpendicular AA' trazada sobre AB en el punto A es paralela al lado $BC = a$, con su prolongación CC' ; consecuentemente, tenemos $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \frac{1}{2}\pi$ y también $\Pi(c - \beta) = \frac{1}{2}\pi$ (Teorema 31).

Si $c < \beta$, el final de β está más allá del punto A en D sobre la prolongación de la hipotenusa AB (Figura 59). Aquí la perpendicular DD' levantada sobre AD y la recta AA' paralela a

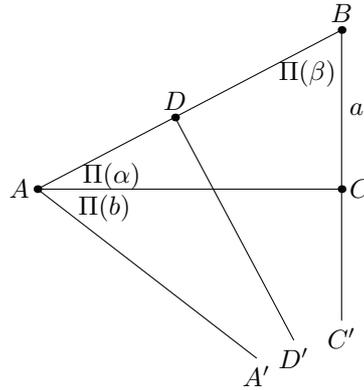


Figura 57. D en el interior de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC .

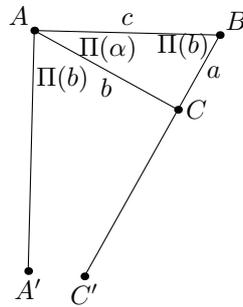


Figura 58. D coincide con A en el triángulo rectángulo ABC .

ella desde A , serán paralelas al lado $BC = a$, con su prolongación CC' . Aquí tenemos que $\angle DAA' = \Pi(\beta - c)$; consecuentemente, $\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \pi - \Pi(\beta - c) = \Pi(c - \beta)$, (Teorema 31).

Así, de estos tres casos obtuvimos la ecuación:

$$\Pi(\alpha) + \Pi(b) = \Pi(c - \beta). \quad (7)$$

Sumando y restando las ecuaciones (6) y (7) obtenemos respectivamente,

$$2\Pi(b) = \Pi(c - \beta) + \Pi(c + \beta),$$

$$2\Pi(\alpha) = \Pi(c - \beta) - \Pi(c + \beta),$$

de donde, si despejamos, calculamos su coseno y efectuamos la razón, obtenemos

$$\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \frac{\cos \left(\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) + \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \right)}{\cos \left(\frac{1}{2}\Pi(c - \beta) - \frac{1}{2}\Pi(c + \beta) \right)}.$$

Vamos a sustituir el valor $\frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(\alpha)} = \cos \Pi(c)$ dado por la ecuación (4). También vamos a llamar $A = \frac{1}{2}\Pi(c - \beta)$ y $B = \frac{1}{2}\Pi(c + \beta)$. Así tenemos que $\cos \Pi(c) = \frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$. Por una conocida

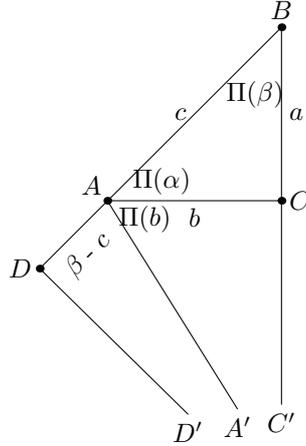


Figura 59. D en el exterior de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC .

identidad trigonométrica tenemos la primera igualdad siguiente, y de ahí las demás:

$$\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \frac{1 - \cos \Pi(c)}{1 + \cos \Pi(c)} = \frac{1 - \frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}}{1 + \frac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}} = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos(A-B) + \cos(A+B)}$$

De aquí, usando la identidad trigonométrica para suma y resta de cosenos, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos(A-B) + \cos(A+B)} &= \frac{\cos A \cos B + \sen A \sen B - \cos A \cos B + \sen A \sen B}{\cos A \cos B + \sen A \sen B + \cos A \cos B - \sen A \sen B} = \\ &= \frac{2 \sen A \sen B}{2 \cos A \cos B} = \tan A \tan B. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que se cumple la ecuación

$$\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(c - \beta) \tan \frac{1}{2}\Pi(c + \beta).$$

Si consideramos el caso $\beta = c$ tenemos que $\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(0) \tan \frac{1}{2}\Pi(2c)$, como $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$ el primer factor vale 1 y por tanto, $\tan^2 \frac{1}{2}\Pi(c) = \tan \frac{1}{2}\Pi(2c)$. Ahora, si consideramos dos segmentos arbitrarios x e y , y sustituyéndolos por $\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}$ y $\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}$, respectivamente, obtenemos lo siguiente, donde la última igualdad es por lo que acabamos de probar:

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}\Pi(x) \tan \frac{1}{2}\Pi(y) &= \tan \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2}\right) \tan \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2} + \frac{y-x}{2}\right) = \\ &= \tan^2 \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \tan \frac{1}{2}\Pi(x+y) \end{aligned}$$

De aquí tenemos que $\tan \frac{1}{2}\Pi(x)$ es una función que cumple la ley de la exponenciación y, como es continua por ser composición de continuas, tenemos que podemos representarla como

$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = q^{-x}$. Como $\Pi(x) = 0$ para $x = \infty$, tenemos que q debe ser un número mayor que 1, y como es la única restricción que tenemos al respecto podemos considerar a esta constante como $q = e^{\frac{1}{k}}$, donde e es la base de los logaritmos naturales y k es la constante del plano. Así tenemos la expresión

$$\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}.$$

■

Vamos a simplificar los cálculos en la siguiente proposición considerando $k = 1$. Para obtener las fórmulas generales, bastará con dividir entre k todas las letras que expresen una longitud.

Teorema 55. Las fórmulas para la Trigonometría de Lobachevski son las siguientes:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A \tan \Pi(a) &= \operatorname{sen} B \tan \Pi(b), \\ \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(c)}{\operatorname{sen} \Pi(a)} &= 1, \\ \cot A \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos C &= \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}, \\ \cos A + \cos B \cos C &= \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \Pi(a)}. \end{aligned}$$

Demostración. De las ecuaciones encontradas en la prueba del Teorema 53 es suficiente recordar las siguientes, que son respectivamente la (1), la (3) y la (5),

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \Pi(c) &= \operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} \Pi(b), \\ \operatorname{sen} \Pi(\alpha) &= \operatorname{sen} \Pi(b) \cos \Pi(\beta), \\ \cos \Pi(a) &= \cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta). \end{aligned}$$

Si a la ecuación (1) la dividimos por $\cos \Pi(c)$ en ambos lados, obtenemos las siguientes igualdades; la segunda es por (3) y la tercera por (5):

$$\frac{\operatorname{sen} \Pi(c)}{\cos \Pi(c)} = \frac{\operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} \Pi(b)}{\cos \Pi(c)} = \frac{\operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} \Pi(\alpha)}{\cos \Pi(c) \cos \Pi(\beta)} = \frac{\operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} \Pi(\alpha)}{\cos \Pi(c) \frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(c)}} = \frac{\operatorname{sen} \Pi(a)}{\cos \Pi(a)} \operatorname{sen} \Pi(\alpha).$$

Así tenemos la siguiente ecuación:

$$\tan \Pi(c) = \operatorname{sen} \Pi(\alpha) \tan \Pi(a) \tag{8}$$

Ahora consideramos un triángulo rectilíneo cuyos lados son a, b, c y sus ángulos opuestos A, B, C . Si A y B son ángulos agudos (Figura 60), entonces la perpendicular p desde el vértice del ángulo C está dentro del triángulo y corta el lado c en dos partes, x en el lado del ángulo A

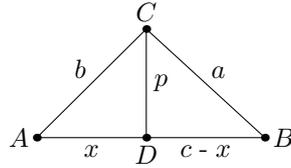


Figura 60. Triángulo ABC con los ángulos A y B agudos.

y $c - x$ en el lado del ángulo B . Así surgen dos triángulos rectángulos para los que obtenemos, aplicando la ecuación (8) a cada uno de ellos,

$$\tan \Pi(a) = \operatorname{sen} B \tan \Pi(p),$$

$$\tan \Pi(b) = \operatorname{sen} A \tan \Pi(p).$$

Estas ecuaciones se mantienen igual también cuando uno de los ángulos, por ejemplo B , es un ángulo recto u obtuso (Figura 61).

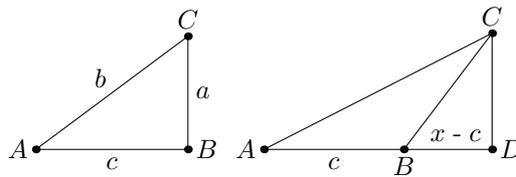


Figura 61. Triángulo ABC con ángulo B recto y obtuso.

En consecuencia, tenemos que para todo triángulo, mediante un simple despeje, se cumple la siguiente ecuación

$$\operatorname{sen} A \tan \Pi(a) = \operatorname{sen} B \tan \Pi(b). \quad (9)$$

Para un triángulo con ángulos agudos A, B (Figura 60), tenemos también aplicando la ecuación (5),

$$\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b),$$

$$\cos \Pi(c - x) = \cos B \cos \Pi(a),$$

estas ecuaciones también relacionan triángulos, en el que uno de los ángulos A o B es recto u obtuso.

Por ejemplo, para $B = \frac{1}{2}\pi$ debemos tomar $x = c$ (Figura 61), la primera ecuación entonces se convierte en la que encontramos en la ecuación (5), la otra, sin embargo, es autosuficiente.

Para $B > \frac{1}{2}\pi$ (Figura 61), la primera ecuación se mantiene sin cambios, en lugar de la segunda debemos escribir, correspondientemente $\cos \Pi(x - c) = \cos(\pi - B) \cos \Pi(a)$; pero tenemos $\cos \Pi(x - c) = -\cos \Pi(c - x)$ (Teorema 31), y también $\cos(\pi - B) = -\cos B$, por lo que se mantiene sin cambios.

Si A es un ángulo recto u obtuso, entonces deberán ser $c - x$ y x reemplazadas por x y $c - x$, para llevarlas al caso anterior. Para eliminar x de ambas ecuaciones, hacemos lo siguiente, donde

la primera igualdad es por una conocida identidad trigonométrica, la segunda y la tercera por la expresión encontrada para $\tan \frac{1}{2}\Pi(x)$ y la cuarta por la identidad trigonométrica $\tan^2 \frac{1}{2}A = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$.

$$\begin{aligned}\cos \Pi(c-x) &= \frac{1 - (\tan \frac{1}{2}\Pi(c-x))^2}{1 + (\tan \frac{1}{2}\Pi(c-x))^2} = \frac{1 - e^{2x-2c}}{1 + e^{2x-2c}} = \frac{1 - (\tan \frac{1}{2}\Pi(c))^2 (\cot \frac{1}{2}\Pi(x))^2}{1 + (\tan \frac{1}{2}\Pi(c))^2 (\cot \frac{1}{2}\Pi(x))^2} = \\ &= \frac{1 - \frac{1-\cos \Pi(c)}{1+\cos \Pi(c)} \frac{1+\cos \Pi(x)}{1-\cos \Pi(x)}}{1 + \frac{1-\cos \Pi(c)}{1+\cos \Pi(c)} \frac{1+\cos \Pi(x)}{1-\cos \Pi(x)}} = \\ &= \frac{1 + \cos \Pi(c) - \cos \Pi(x) - \cos \Pi(x) \cos \Pi(c) - 1 - \cos \Pi(x) + \cos \Pi(c) + \cos \Pi(x) \cos \Pi(c)}{1 + \cos \Pi(c) - \cos \Pi(x) - \cos \Pi(x) \cos \Pi(c) + 1 + \cos \Pi(x) - \cos \Pi(c) - \cos \Pi(x) \cos \Pi(c)} = \\ &= \frac{2 \cos \Pi(c) - 2 \cos \Pi(x)}{2 - 2 \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)} = \frac{\cos \Pi(c) - \cos \Pi(x)}{1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(x)}.\end{aligned}$$

Si sustituimos en el último resultado las expresiones encontradas anteriormente: $\cos \Pi(x) = \cos A \cos \Pi(b)$, $\cos \Pi(c-x) = \cos B \cos \Pi(a)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\cos B \cos \Pi(a) &= \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos \Pi(c) \cos A \cos \Pi(b)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos B \cos \Pi(a) (1 - \cos \Pi(c) \cos A \cos \Pi(b)) &= \cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \Pi(c) (1 + \cos A \cos \Pi(b) \cos B \cos \Pi(a)) &= \cos A \cos \Pi(b) - \cos B \cos \Pi(a) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \Pi(c) &= \frac{\cos \Pi(a) \cos B + \cos \Pi(b) \cos A}{1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B}\end{aligned}$$

De donde se sigue

$$\begin{aligned}\cos \Pi(c) (1 + \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \cos A \cos B) &= \cos \Pi(a) \cos B + \cos \Pi(b) \cos A \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \Pi(a) \cos B (\cos \Pi(c) \cos \Pi(b) \cos A - 1) &= \cos \Pi(b) \cos A - \cos \Pi(c) \Rightarrow \\ \cos \Pi(a) \cos B &= \frac{\cos \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}\end{aligned}$$

Si la ecuación anterior la multiplicamos por $\cos \Pi(c)$ obtenemos

$$\begin{aligned}\cos \Pi(c) \cos \Pi(a) \cos B &= \frac{\cos^2 \Pi(c) - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 - \cos \Pi(c) \cos \Pi(a) \cos B &= \frac{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) - \cos^2 \Pi(c) + \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)}{1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)} \Rightarrow \\ \Rightarrow (1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)) (1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)) &= 1 - \cos^2 \Pi(c).\end{aligned}$$

Así que

$$(\operatorname{sen} \Pi(c))^2 = (1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a))(1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c)). \quad (10)$$

Todo este desarrollo podemos hacerlo para los otros lados del triángulo de forma análoga, por lo tanto tenemos las siguientes ecuaciones:

$$(\operatorname{sen} \Pi(a))^2 = (1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b))(1 - \cos B \cos \Pi(c) \cos \Pi(a)) \quad (11)$$

$$(\operatorname{sen} \Pi(b))^2 = (1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c))(1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)). \quad (12)$$

De estas tres ecuaciones encontramos por una simple sustitución:

$$\frac{(\operatorname{sen} \Pi(b))^2 (\operatorname{sen} \Pi(c))^2}{(\operatorname{sen} \Pi(a))^2} = (1 - \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c))^2.$$

De donde se sigue, a partir de un despeje sin ambigüedad en el signo,

$$\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(c)}{\operatorname{sen} \Pi(a)} = 1. \quad (13)$$

Si sustituimos aquí el valor de $\operatorname{sen} \Pi(c) = \frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} \tan \Pi(a) \cos \Pi(c)$ dado por la ecuación (9), entonces obtenemos

$$\begin{aligned} \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} A \tan \Pi(a) \cos \Pi(c)}{\operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} C} &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\cos \Pi(c) \left(\cos A \cos \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} A \tan \Pi(a) \right)}{\operatorname{sen} \Pi(a) \operatorname{sen} C} &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \Pi(c) &= \frac{\cos \Pi(a) \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos A \operatorname{sen} C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)}; \end{aligned}$$

pero sustituyendo esta expresión para $\cos \Pi(c)$ en la ecuación (12), se sigue

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \Pi(b) &= \left(1 - \frac{\cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(a) \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos A \operatorname{sen} C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)} \right) \left(1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \right) = \\ &= \left(\frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \Pi(b)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos A \operatorname{sen} C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b)} \right) \left(1 - \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \Pi(b) \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} \Pi(b) \cos A \operatorname{sen} C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) &= \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} A \cos C \cos \Pi(a) \cos \Pi(b) \\ \Rightarrow \cos \Pi(b) \cos \Pi(a) \left(\operatorname{sen} \Pi(b) \cos A \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} A \cos C \right) &= \operatorname{sen} A \cos^2 \Pi(b) \\ \Rightarrow \operatorname{sen} \Pi(b) \cos A \operatorname{sen} C + \operatorname{sen} A \cos C &= \operatorname{sen} A \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\cot A \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos C = \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)}. \quad (14)$$

Sustituyendo $\cos \Pi(b) = \frac{\cos A}{\cos \Pi(a)} \tan \Pi(a) \cos \Pi(b) + \cos C$ por la ecuación (9) tenemos lo siguiente, donde la implicación resulta de multiplicar la ecuación por $\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)}$ y despejar:

$$\begin{aligned} \cot A \cos C \frac{\cos A}{\cos \Pi(b)} \tan \Pi(a) \cos \Pi(b) + \cos C &= \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} \cos C &= 1 - \frac{\cos A}{\cos \Pi(a)} \cos C \tan \Pi(a). \end{aligned}$$

Si intercambiamos las letras a con b y A con B , la ecuación (14) también da

$$\frac{\cos \Pi(a)}{\cos \Pi(b)} = \cot B \cos C \tan \Pi(a) + \cos C.$$

De las dos últimas ecuaciones se sigue,

$$\begin{aligned} \left(\cot B \cos C \tan \Pi(a) + \cos C \right) \cos C &= 1 - \frac{\cos A}{\cos \Pi(a)} \cos C \tan \Pi(a) \Rightarrow \\ \Rightarrow \cot B \cos C \tan \Pi(a) \cos C &= \cos^2 C - \frac{\cos A}{\cos \Pi(a)} \cos C \tan \Pi(a) \Rightarrow \\ \Rightarrow \tan \Pi(a) \frac{\cos C}{\cos \Pi(a)} \left(\cot B \cos C + \cos A \right) &= \cos C \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$\cos A + \cos B \cos C = \frac{\cos B \cos C}{\cos \Pi(a)}. \quad (15)$$

Por lo tanto, las ecuaciones para la interdependencia de los lados a, b, c , y los ángulos opuestos A, B, C , en el triángulo rectilíneo, serán las ecuaciones (9), (13), (14), (15). ■

Teorema 56. Los límites de las ecuaciones (9), (13), (14), (15) cuando los lados del triángulo tienden a cero son respectivamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} b \sin A &= a \sin B, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ a \sin(A + C) &= b \sin A, \\ \cos A + \cos(B + C) &= 0. \end{aligned}$$

Demostración. En esta demostración veremos lo que sucede cuando los lados a, b y c del triángulo, son muy pequeños. En este caso tenemos los siguientes desarrollos, donde hemos usado la regla de L'ôpital para calcular los límites:

$$\cot \Pi(a) = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\Pi(a)}{2 \tan \frac{1}{2}\Pi(a)} = \frac{1 - e^{-2a}}{2e^{-a}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\cot \Pi(a)}{a} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2a}}{2e^{-a}a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2e^{-2a}}{-2e^{-a}a + 2e^{-a}} = 1 \\ \cos \Pi(a) &= \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\Pi(a)}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}\Pi(a)} = \frac{1 - e^{-2a}}{1 + e^{-2a}} \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\cos \Pi(a)}{a} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-2a}}{a + ae^{-2a}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2e^{-2a}}{1 + e^{-2a} - 2ae^{-2a}} = 1 \\ \text{sen } \Pi(a) &= \sqrt{1 - \cos^2 \Pi(a)} \approx 1 - \frac{1}{2}a^2 \\ \text{sen } \Pi(a) &= \frac{\cos \Pi(a)}{\cot \Pi(a)} = \frac{\frac{1 - e^{-2a}}{1 + e^{-2a}}}{\frac{1 - e^{-2a}}{2e^{-2a}}} = \frac{2e^{-2a}}{1 + e^{-2a}} \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\text{sen } \Pi(a)}{1 - \frac{1}{2}a^2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2e^{-a}}{(1 + e^{-2a})(1 - \frac{1}{2}a^2)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2e^{-2a}}{-a(1 + e^{-2a}) - 2e^{-2a}(1 - \frac{1}{2}a^2)} = 1. \end{aligned}$$

Así tenemos que para valores pequeños se cumplen las siguientes igualdades

$$\cot \Pi(a) = a, \quad \text{sen } \Pi(a) = 1 - \frac{1}{2}a^2, \quad \cos \Pi(a) = a,$$

y también de la misma manera para los lados b y c .

Por una simple sustitución y un despeje obtenemos que la ecuación (9) se convierte en

$$b \text{ sen } A = a \text{ sen } B, \quad (16)$$

Sustituyendo y desarrollando la ecuación (13) obtenemos:

$$\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right)bc \cos A + 1 - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}b^2c^2 = 1 - \frac{1}{2}a^2$$

Si restamos 1 a ambos lados, multiplicamos por -2 y consideramos $1 - \frac{1}{2}a^2 \approx 1$ y $\frac{1}{2}b^2c^2 \approx 0$ obtenemos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \quad (17)$$

Sustituyendo en la ecuación (14) y multiplicando a ambos lados por $\text{sen } A$ tenemos:

$$\left(1 - \frac{1}{2}b^2\right) \cos A \text{ sen } C + \text{sen } A \cos C = \frac{b \text{ sen } A}{a}$$

si consideramos $1 - \frac{1}{2}b^2 \approx 1$ y usamos la identidad para el seno de una suma obtenemos

$$a \text{ sen}(A + C) = b \text{ sen } A, \quad (18)$$

Haciendo un simple despeje en la ecuación (15) obtenemos

$$\left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) \cos A + \left(1 - \frac{1}{2}a^2\right) \cos B \cos C - \text{sen } B \text{ sen } C = 0$$

considerando $1 - \frac{1}{2}a^2 \approx 1$ y usando la identidad para suma de cosenos obtenemos

$$\cos A + \cos(B + C) = 0. \quad (19)$$

■

En la prueba anterior, las ecuaciones (16) y (17) son asumidas en la Geometría euclidiana y se conocen respectivamente como *ley de senos* y *ley de cosenos*. El siguiente teorema nos dice que cuando los lados del triángulo son muy pequeños, la Geometría de Lobachevski pasa a ser la Geometría de Euclides.

Teorema 57. Las ecuaciones (16), (18) y (19) implican que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

Demostración. Sean A, B, C , los tres ángulos internos de un triángulo, entonces:

$$\operatorname{sen}(A + B + C) = \operatorname{sen} A \cos(B + C) + \cos A \operatorname{sen}(B + C)$$

dividamos entre a para obtener lo siguiente, donde la primera igualdad es por (16), la segunda por (18) y la tercera por (19)

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}(A + B + C)}{a} &= \frac{\operatorname{sen} A}{a} \cos(B + C) + \cos A \frac{\operatorname{sen}(B + C)}{a} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} B}{b} \cos(B + C) + \cos A \frac{\operatorname{sen}(B + C)}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} (\cos(B + C) + \cos A) = 0 \end{aligned}$$

Como $0 < A + B + C \leq \pi$, el único valor para esta suma será

$$A + B + C = \pi.$$

■

Lobachevski expresa que “las ecuaciones (9), (13), (14) y (15) llegan, por sí mismas, a ser suficiente fundamentación para considerar la suposición de la Geometría imaginaria como posible” (Lobachevski, *Geometrische Untersuchungen*, Cap. 37). Sin embargo, esto sólo es subjetivo porque, en el sentido estricto del término, se trataba más de una convicción que de un hecho científicamente establecido. La prueba de la consistencia lógica de la Geometría hiperbólica se consiguió sólo hasta que se encontraron modelos euclidianos de la nueva geometría, lo cual es tema del siguiente capítulo.

En la demostración del siguiente teorema, hacemos un desarrollo parecido al de Taurinus, en la que prueba que la Trigonometría de Lobachevski es válida en una esfera de radio imaginario.

Teorema 58. Las ecuaciones (9), (13), (14) y (15) de la geometría plana pasan a ser las respectivas ecuaciones para triángulos esféricos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b &= \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a, \\ \cos a &= \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A, \\ \cot A \operatorname{sen} C + \cos C \cos b &= \operatorname{sen} b \cot a, \\ \cos A &= \cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C, \end{aligned}$$

si ponemos ai, bi, ci , en lugar de los lados a, b, c , donde $i^2 = -1$.

Demostración. Al hacer la sustitución obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \Pi(ai) &= 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai) \cos \frac{1}{2} \Pi(ai) = 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai) \cos \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \Pi(ai) + \cos^2 \frac{1}{2} \Pi(ai)} = \\
 &= \frac{2}{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\cos \frac{1}{2} \Pi(ai)} + \frac{\cos \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai)}} = \frac{2}{\cot \frac{1}{2} \Pi(ai) + \tan \frac{1}{2} \Pi(ai)} = \frac{2}{e^{ai} + e^{-ai}} = \frac{1}{\cos a}. \\
 \cos \Pi(ai) &= \cos^2 \frac{1}{2} \Pi(ai) - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \Pi(ai) = \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai) \cos \frac{1}{2} \Pi(ai) \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai)} - \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\cos \frac{1}{2} \Pi(ai)} \right) = \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai) \cos \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \Pi(ai) + \cos^2 \frac{1}{2} \Pi(ai)} \left(\cot \frac{1}{2} \Pi(ai) - \tan \frac{1}{2} \Pi(ai) \right) = \frac{\cot \frac{1}{2} \Pi(ai) - \tan \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\cos \frac{1}{2} \Pi(ai)} + \frac{\cos \frac{1}{2} \Pi(ai)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Pi(ai)}} = \\
 &= \frac{e^{ai} - e^{-ai}}{e^{ai} + e^{-ai}} = i \tan a. \\
 \tan \Pi(ai) &= \frac{\operatorname{sen} \Pi(ai)}{\cos \Pi(ai)} = \frac{1}{i \tan \frac{1}{2} \Pi(ai) \cos \frac{1}{2} \Pi(ai)} = \frac{1}{i \operatorname{sen} a}.
 \end{aligned}$$

Por lo que debemos poner:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \Pi(a) &= \frac{1}{\cos a}, \\
 \cos \Pi(a) &= i \tan a, \\
 \tan \Pi(a) &= \frac{1}{i \operatorname{sen} a},
 \end{aligned}$$

y similarmente para los lados b y c .

De esta manera pasamos de las ecuaciones (9), (13), (14), (15) a las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} A \tan \Pi(a) = \operatorname{sen} B \tan \Pi(b) &\Rightarrow \frac{\operatorname{sen} A}{i \operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{i \operatorname{sen} b} \Rightarrow \\
 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a, & \tag{20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos A \cos \Pi(b) \cos \Pi(c) + \frac{\operatorname{sen} \Pi(b) \operatorname{sen} \Pi(c)}{\operatorname{sen} \Pi(a)} &= 1 \Rightarrow \\
 i^2 \cos A \tan b \tan c + \frac{\cos a}{\cos b \cos c} &= 1 \Rightarrow \\
 \frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 1 + \cos A \tan b \tan c &\Rightarrow \\
 \cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A, & \tag{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cot A \operatorname{sen} C \operatorname{sen} \Pi(b) + \cos C &= \frac{\cos \Pi(b)}{\cos \Pi(a)} \Rightarrow \\
 \frac{\cot A \operatorname{sen} C}{\cos b} + \cos C &= \frac{\tan b}{\tan a} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\cot A \operatorname{sen} C + \cos C \cos b = \operatorname{sen} b \cot a, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B \cos C &= \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \Pi(a)} \Rightarrow \\ \cos A &= \cos a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C - \cos B \cos C. \end{aligned} \quad (23)$$

■

En el Teorema 54 encontramos la fórmula $\tan \frac{1}{2}\Pi(x) = e^{-\frac{x}{k}}$. Vamos a ver la equivalencia entre las funciones trigonométricas hiperbólicas y la función $\Pi(x)$. Para esto hacemos los siguientes desarrollos:

$$\operatorname{senh} \frac{x}{k} = \frac{e^{\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{k}}}{2} = \frac{1 - e^{-\frac{2x}{k}}}{2e^{-\frac{x}{k}}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k})}{2 \tan \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k})} = \cot \Pi\left(\frac{x}{k}\right) \quad (24)$$

$$\operatorname{cosh} \frac{x}{k} = \frac{e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}}{2} = \frac{\cot \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k}) + \tan \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k})}{2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k}) + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k})}{2(\operatorname{sen} \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k}) \cos \frac{1}{2}\Pi(\frac{x}{k}))} = \frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(\frac{x}{k})} \quad (25)$$

$$\operatorname{tanh} \frac{x}{k} = \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{k}}{\cos \frac{x}{k}} = \frac{\frac{\cos \Pi(\frac{x}{k})}{\operatorname{sen} \Pi(\frac{x}{k})}}{\frac{1}{\operatorname{sen} \Pi(\frac{x}{k})}} = \cos \Pi\left(\frac{x}{k}\right) \quad (26)$$

En lo que sigue, para simplificar la notación tomaremos $k = 1$.

Si tenemos el triángulo rectángulo rectilíneo de la Figura 57 y sustituimos los ángulos $\Pi(\alpha)$ y $\Pi(\beta)$ por A y B , respectivamente, tenemos que al efectuar las respectivas sustituciones dadas por las ecuaciones (24-26), las ecuaciones (1), (2), (3), (4), (5) y (8) se transforman respectivamente en:

$$\operatorname{cosh} c = \operatorname{cosh} a \operatorname{cosh} b \quad (27)$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\cos A}{\operatorname{cosh} a} \quad (28)$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\cos B}{\operatorname{cosh} b} \quad (29)$$

$$\operatorname{tanh} b = \operatorname{tanh} c \cos A \quad (30)$$

$$\operatorname{tanh} a = \operatorname{tanh} c \cos B \quad (31)$$

$$\operatorname{senh} a = \operatorname{sen} A \operatorname{senh} c. \quad (32)$$

Así también, para cualquier triángulo general, las ecuaciones (9), (13), (14), (15), se transforman respectivamente en las siguientes:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{senh} a} = \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{senh} b} \quad (33)$$

$$\cos A \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c + \operatorname{cosh} a = \operatorname{cosh} b \operatorname{cosh} c \quad (34)$$

$$\cot A \operatorname{sen} C \operatorname{tanh} a + \cos C \operatorname{tanh} a \operatorname{cosh} b = \operatorname{senh} b \quad (35)$$

$$\cos A + \cos B \cos C = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \operatorname{cosh} a. \quad (36)$$

3.9. Área en la Geometría de Lobachevski

Por último, nos disponemos a exponer cómo se relacionan la longitud y el área en la Geometría de Lobachevski. En esta sección seguiremos el libro de Sommerville *The elements of non-euclidean geometry*, pues esto ya no lo desarrolló Lobachevski en su *Geometrische Untersuchungen*.

Primeramente, encontraremos el perímetro y área de un círculo. Estos resultados los usaremos posteriormente para encontrar el área de un triángulo.

Teorema 59. La longitud de una circunferencia de radio r es

$$2\pi k \operatorname{senh} \frac{r}{k}.$$

Demostración. Sea Δs la longitud de la cuerda PQ de un círculo de radio r , que subtiende un ángulo $\Delta\theta$ en el centro (Figura 62). Entonces, tomando el triángulo rectángulo formado por el centro, un extremo del segmento PQ y el punto medio de ese segmento, aplicando la fórmula (32) obtenemos:

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{k} = \operatorname{senh} \frac{r}{k} \operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta\theta,$$

Como $\operatorname{senh} \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{k} \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{k}$ y $\operatorname{sen} \frac{1}{2} \Delta\theta \approx \frac{1}{2} \Delta\theta$, al considerar $\Delta\theta$ y Δs muy pequeños, tenemos que la longitud de la cuerda es

$$\Delta s \approx k \operatorname{senh} \frac{r}{k} \Delta\theta. \quad (37)$$

Por lo tanto, la longitud de toda la circunferencia es $\int_0^{2\pi} k \operatorname{senh} \frac{r}{k} d\theta = 2\pi k \operatorname{senh} \frac{r}{k}$. ■

Teorema 60. El área de un círculo de radio r es igual a $4\pi k^2 \operatorname{senh}^2 \frac{r}{2k}$.

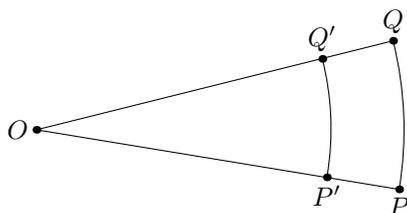


Figura 62. Diferencial de área $PP'Q'Q$.

Demostración. Primeramente vamos a calcular el área de un sector de círculo POQ , donde $\angle POQ = \theta$ es muy pequeño. Para esto, vamos a considerar que la Geometría euclidiana es válida para dimensiones muy pequeñas (Teorema 57) y, en particular, la noción de área.

Pongamos P' y Q' en OP y OQ respectivamente y muy cercanos de P y Q (Figura 62). Sean $OP = OQ = r$, $PP' = QQ' = \Delta r$. Entonces área de $PQ'Q'P' \approx \Delta r \cdot PQ \approx$

$k\theta\Delta r \sinh \frac{r}{k}$ (Ecuación (37)). Así que el área del sector es

$$\int_0^r k\theta \sinh \frac{r}{k} dr = k^2\theta \cosh \frac{r}{k} \Big|_0^r = k^2\theta \left(\cosh \frac{r}{k} - 1 \right)$$

y por la identidad $\sinh^2 \frac{x}{2} = \frac{\cosh x - 1}{2}$ tenemos que el área del sector es

$$2k^2\theta \sinh^2 \frac{r}{2k}. \quad (38)$$

Por lo tanto, el área de todo el círculo es $4\pi k^2 \sinh^2 \frac{r}{2k}$. ■

Definición 61. Si los ángulos de un triángulo son A, B, C , a la diferencia $\pi - (A + B + C)$ se denomina *defecto angular del triángulo*.

En el siguiente teorema se muestra la relación existente entre el área de un triángulo y su defecto angular.

Teorema 62. El área de cualquier triángulo es proporcional a su defecto angular.

Demostración. Sea ABC un triángulo y unimos por una recta a M y N , los puntos medios de AB y AC , respectivamente (Figura 63). Trazamos las perpendiculares AA', BB', CC' a MN . Tenemos que $\triangle AA'M \cong \triangle BB'M$ y $\triangle AA'N \cong \triangle CC'N$ por LAA (Teorema 9), por lo que $BB' = AA' = CC'$. Por este motivo, podemos trazar la línea equidistante de MN que pasa por A, B y C (Teorema 51). También de las congruencias, tenemos que $\angle B'BM = \angle MAA'$ y $\angle C'CN = \angle NAA'$.

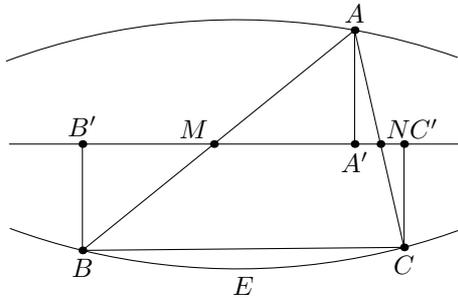


Figura 63. Línea equidistante por los vértices del triángulo.

Denotamos por $\angle ABE$ el ángulo que AB forma con la tangente a la equidistante en B . El ángulo $B'BE$ es un ángulo recto (Teorema 51). Entonces $\angle BAC + \angle ABE + \angle ACE = \angle B'BM + \angle MBE + \angle C'CN + \angle NCE = \pi$. Así que la suma de los ángulos del triángulo ABC es $\pi - 2CBE$. El área del triángulo es $BMNC + MAA' + NAA' = B'BCC'$. Entonces, todos los triángulos con base BC y vértice en la otra rama de la equidistante que pasa por B, C y A tienen la misma área y el mismo defecto.

Si tenemos dos triángulos, podemos transformar uno de ellos en otro triángulo que tenga la misma área y defecto, y además tenga uno de sus lados igual a uno de los lados del otro

triángulo. Para probar esto, sean ABC y DEF dos triángulos y DF el mayor de los seis lados. Construimos la equidistante a través de B , C y A . Con centro C y radio DF cortamos la rama de la equidistante donde está A en un punto A' . Entonces el triángulo $A'BC$ tiene la misma área que el $\triangle ABC$ y su lado $A'C$ es igual al lado DF del otro triángulo.

Si la mediatriz de la base BC del triángulo ABC corta a la otra rama de la equidistante en A' , el triángulo isósceles $A'BC$ tiene la misma área y defecto del triángulo ABC . Así, si dos triángulos tienen la misma área pueden ser transformados en el mismo triángulo isósceles y tener el mismo defecto, y viceversa. Esto se realiza transformando uno de los triángulos para que tenga un lado igual al del otro. Ya teniendo esto, los transformamos en el triángulo isósceles trazando la mediatriz de su lado igual y el punto de cruce con la equidistante es el tercer vértice. Es fácil ver que la equidistante debe estar a la misma distancia en ambos triángulos. Por lo tanto, los triángulos son congruentes.

Sea ABC un triángulo con área Δ y defecto δ que se divide en dos triángulos ABD , ADC con áreas Δ_1 y Δ_2 y defectos δ_1 y δ_2 . Entonces $\delta_1 = \pi - \angle BAD - B - \angle ADB$, $\delta_2 = \pi - \angle DAC - C - \angle ADC$. Entonces $\delta_1 + \delta_2 = 2\pi - A - B - C - \pi = \pi - A - B - C = \delta$, y $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$. Si $\Delta_1 = \Delta_2$, por lo visto en el párrafo anterior, podemos ver al triángulo ABC como isósceles donde $AB = AC$ y D es el punto medio de BC , entonces $\delta_1 = \delta_2$ y $\Delta = 2\Delta_1$, $\delta = 2\delta_1$; así, siguiendo este procedimiento llegamos a que las áreas de los triángulos que son iguales a $2^{-n}\Delta$ son proporcionales a sus defectos, pues éstos son $2^{-n}\delta$. De aquí se deduce que por ser el área una función continua y como cualquier número real se puede expresar como convergencia de una serie de potencias de dos, el defecto de cualquier triángulo es proporcional a su área, o

$$\Delta = \lambda(\pi - A - B - C).$$

■

El teorema siguiente nos dice que el valor de λ es k^2 . Para probarlo vamos a necesitar las fórmulas encontradas en los Teoremas 59 y 60.

Teorema 63. El área de un triángulo de ángulos A , B , C , es $k^2(\pi - A - B - C)$

Demostración. Primero calcularemos el área de un triángulo rectángulo ABC y ángulo recto en C . Dividimos el triángulo en pequeños sectores de círculo por líneas dibujadas a través de A . Entonces, usando la fórmula (38) para sectores de circunferencia, el área del triángulo estará dada por

$$\int_0^A k^2 \left(\cosh \frac{c}{k} - 1 \right) dA = \int_0^A k^2 \cosh \frac{c}{k} dA - \int_0^A k^2 dA$$

Es fácil ver que $\int_0^A k^2 dA = k^2 A$. Así que nos concentraremos en calcular la otra integral. Para esto usamos la ecuación (30): $\frac{\tanh \frac{b}{k}}{\tanh \frac{c}{k}} = \cos A$, y llamamos $t = \tanh \frac{b}{k}$ y $y = \cos^2 A$ con lo que obtenemos el siguiente desarrollo

$$\int_0^A k^2 \cosh \frac{c}{k} dA = \int_0^A k^2 \frac{\cos A}{\tanh \frac{b}{k}} \operatorname{senh} \frac{c}{k} dA = \int_0^A k^2 \frac{-2 \cos A \operatorname{sen} A dA}{-2 \operatorname{sen} A \tanh \frac{b}{k} \operatorname{csch} \frac{c}{k}} =$$

$$\begin{aligned} \int_0^A k^2 \frac{-dy}{2\sqrt{1-y} \tanh \frac{b}{k} \sqrt{\coth^2 \frac{c}{k} - 1}} &= \int_0^A k^2 \frac{-dy}{2\sqrt{1-y} \sqrt{\cos^2 A - \tanh^2 \frac{b}{k}}} = \\ &= \int_0^A k^2 \frac{-dy}{2\sqrt{1-y} \sqrt{y-t^2}} = \int_0^A k^2 \frac{-dy}{2\sqrt{\frac{1}{4}(1-t^2)^2 - (y - \frac{1}{2}(1+t^2))^2}}. \end{aligned}$$

La última igualdad se comprueba fácilmente realizando las operaciones. Así tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^A k^2 \cosh \frac{c}{k} dA &= k^2 \int_1^{\cos^2 A} \frac{-dy}{2\sqrt{\frac{1}{4}(1-t^2)^2 - (y - \frac{1}{2}(1+t^2))^2}} = \frac{1}{2} k^2 \operatorname{arc} \cos \frac{2y - (1+t^2)}{1-t^2} \Big|_0^{\cos^2 A} \\ &= \frac{1}{2} k^2 \operatorname{arc} \cos \frac{2 \cos^2 A - (1 + \tanh^2 \frac{b}{k})}{1 - \tanh^2 \frac{b}{k}} \end{aligned}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \cosh^2 \frac{b}{k} (2 \cos^2 A - 1 - \tanh^2 \frac{b}{k}) &= 2 \cos^2 A \cosh^2 \frac{b}{k} - \cosh^2 \frac{b}{k} - \operatorname{senh}^2 \frac{b}{k} \\ &= 1 - 2 \cosh^2 \frac{b}{k} + 2 \cos^2 A \cosh^2 \frac{b}{k} = 1 - 2 \cosh^2 (1 - \cos^2 A) = 1 - 2 \cosh^2 \frac{b}{k} \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \cos^2 B. \\ &= -\cos 2B = \cos(\pi - 2B) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\int_0^A k^2 \cosh \frac{b}{k} dA = \frac{1}{2} k^2 \operatorname{arc} \cos (\cos(\pi - 2B)) = \frac{1}{2} (\pi - 2B) k^2.$$

Por lo tanto, el área del triángulo rectángulo es

$$\frac{1}{2} (\pi - 2B) k^2 - A k^2 = k^2 \left(\pi - \frac{\pi}{2} - A - B \right).$$

El caso general se deduce fácilmente de aquí, pues dividimos el triángulo en dos triángulos rectángulos en los que se cumple la fórmula. El área total será la suma del área de los triángulos rectángulos y al sumar de esa manera, la suma de los defectos será igual al defecto del triángulo mayor. Así que la fórmula para calcular el área del triángulo es

$$\Delta = k^2 (\pi - A - B - C).$$

■

El área de un triángulo se incrementa conforme la suma de sus ángulos disminuye, por lo que no puede exceder πk^2 . El área llega a ese valor cuando los tres vértices están en el infinito, siendo los tres lados paralelos entre sí.

Finalmente, el último resultado que mostraremos será una fórmula para encontrar el área de cualquier polígono.

Teorema 64. Si S' es la suma de los ángulos exteriores de un polígono cualquiera, el área del polígono será igual a $k^2(S' - 2\pi)$.

Demostración. Consideremos un polígono de n lados, el área de este polígono puede encontrarse partiéndolo en triángulos. Unimos un vértice con cada uno de los demás, dividiendo el n -ágono en $n - 2$ triángulos. La suma de los ángulos del n -ágono es igual a la suma de los $n - 2$ triángulos. Sean $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ las áreas, y $\delta_1, \delta_2, \dots$ los defectos de estos triángulos. Si S es la suma de los ángulos y A el área del polígono,

$$A = \sum_{i=1}^n \Delta_i = \sum_{i=1}^n k^2 \delta_i = k^2((n - 2) \cdot \pi - S)$$

Si S' es la suma de los ángulos exteriores, $S' + S = n\pi$, así que

$$A = k^2(S' - 2\pi),$$

que es independiente de n . ■

4. Modelos de la Geometría hiperbólica

Una vez que hemos introducido y desarrollado la Geometría de Lobachevski a través de sus axiomas, ahora vamos a trabajarla dentro de modelos euclidianos, lo cual permite tener una mejor idea intuitiva de ella y, a su vez, propicia en otros sentidos el desarrollo de la misma.

4.1. Primeros modelos

4.1.1. Modelo de la pseudoesfera

El Modelo de la pseudoesfera fue establecido por Eugenio Beltrami. En este, el plano de Lobachevski es una superficie donde las rectas son *geodésicas*; es decir, líneas de mínima longitud que unen dos puntos que están sobre la superficie. Aquí la longitud se mide con los procesos usuales del cálculo.

La pseudoesfera se genera por la revolución de una tractriz. Intuitivamente, una tractriz es la curva que dibuja en la arena el carrito arrastrado por un niño, después que éste ha girado 90° respecto de su dirección inicial (Figura 64). Para obtener las geodésicas podemos emplear una liga tirante, sólo que habrá casos en los que deba colocarse por dentro de la pseudoesfera (Figura 65).

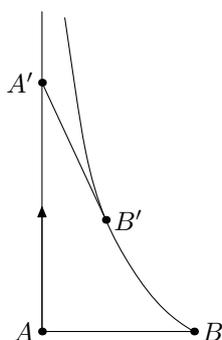


Figura 64. Tractriz.

La distancia entre dos puntos es la longitud de la geodésica que los une. Dos figuras son iguales si existe una correspondencia entre ellas que conserve las distancias. Estas correspondencias se conocen como *movimientos hiperbólicos*. Las longitudes, áreas y ángulos se miden sobre la superficie y corresponden a los del plano de Lobachevski.

El gran defecto de este modelo es que no es completo; es decir, no se puede avanzar tanto como se quiera sobre una geodésica cuando se dirige a la boca de la trompeta. Esto contradice el postulado 2 de Euclides. Por eso se dice que la geometría de la pseudoesfera coincide localmente con la de Lobachevski.

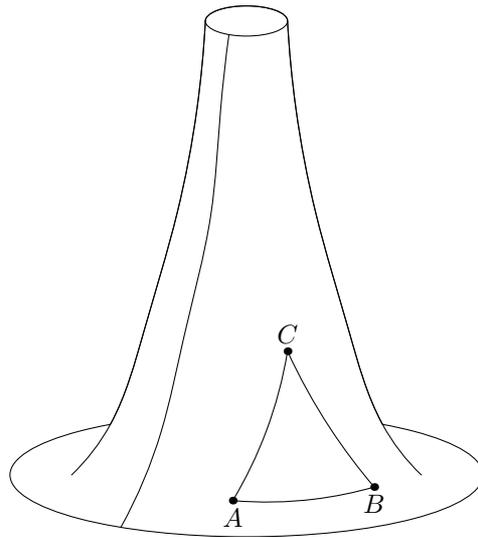


Figura 65. Pseudoesfera.

4.1.2. Modelo de Klein

El Modelo de Klein consiste del disco sin frontera $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$. Los puntos del interior serán los puntos del plano hiperbólico y los de la frontera se llamarán *puntos al infinito*. Las cuerdas en el disco serán las rectas hiperbólicas. Claramente se cumple el Axioma de Lobachevski, pues hay muchas rectas que contienen a un punto P y no cortan a una recta l que no contiene a P (Figura 66).

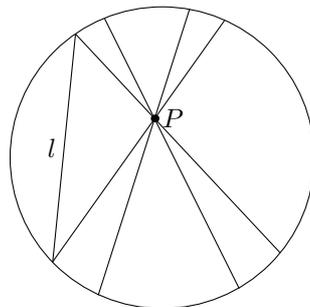


Figura 66. Modelo de Klein.

La forma de medir aquí es diferente de la euclidiana y, en consecuencia, todas las rectas hiperbólicas tienen longitud infinita, por lo que este modelo es completo. Si dos rectas se intersecan en un punto al infinito; es decir, si son paralelas, tenemos que el ángulo entre ellas tiene que ser cero por el Teorema 26, por lo que claramente la medida del ángulo hiperbólico difiere de la del euclidiano, por lo que se dice que este modelo no es conforme.

4.1.3. Modelo del hiperboloide

Si ponemos al Modelo de Klein en el plano $z = 1$ en \mathbb{R}^3 y proyectamos, desde el origen, los puntos de dicho modelo a la hoja del hiperboloide de dos hojas $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ donde z es positivo, obtenemos el Modelo del hiperboloide (Figura 67). Si esta hoja del hiperboloide es cortada por un plano por el origen, este plano la corta en una rama de hipérbola; el plano considerado también corta al Modelo de Klein en una recta, por lo que esta rama de hipérbola es una recta en el Modelo del hiperboloide. Esta proyección que hicimos de las rectas al hiperboloide, con ayuda del plano por el origen, es claramente biyectiva y así, es evidente que el Modelo del hiperboloide también cumple el Axioma de Lobachevski.

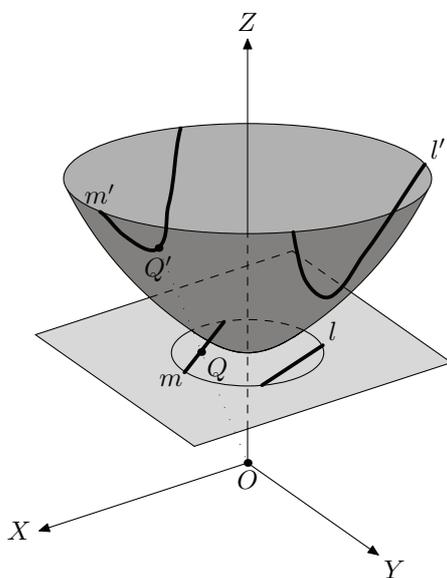


Figura 67. Modelo del hiperboloide.

4.2. Modelo del semiplano superior

En el desarrollo de este modelo nos basaremos en el libro de A. S. Smogorzhevski titulado *Acerca de la Geometría de Lobachevski*.

Los puntos del semiplano superior son los puntos (x, y) de \mathbb{R}^2 tales que $y > 0$. Este conjunto de puntos corresponde al semiplano superior del plano \mathbb{R}^2 y lo denotaremos por \mathbb{H} . Los puntos del eje x serán puntos al infinito. La longitud s de la línea en el espacio \mathbb{H} será diferente a la longitud σ de la imagen de esta línea en la interpretación; a las magnitudes s y σ las llamaremos longitudes *hiperbólica* y *euclidiana*, respectivamente.

4.2.1. Medición de longitudes

Aquí veremos el procedimiento para medir longitudes hiperbólicas en este modelo. Para ello nos basaremos en los siguientes principios.

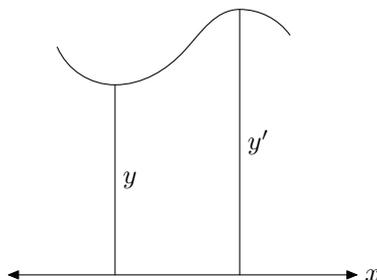


Figura 68. Longitudes hiperbólicas.

1. La longitud hiperbólica de un segmento MN paralelo al eje x con ordenada y , tendrá una longitud igual a $\frac{MN}{y}$.
2. Si σ es la longitud euclidiana de una curva, s la longitud hiperbólica de ésta, y e y' las ordenadas mínima y máxima de la curva respectivamente, se cumple la desigualdad (Figura 68):

$$\frac{\sigma}{y'} < s < \frac{\sigma}{y}.$$

Así que lo primero que haremos es hallar la longitud de un arco AB que es suave, estrictamente creciente y en ningún momento es cero. Marquemos en el arco AB , desde A hasta B los puntos $A, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, B$ (Figura 69).

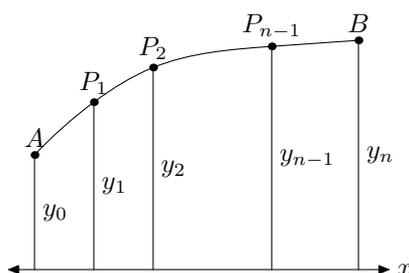


Figura 69. Arco AB dividido en n partes.

Supongamos que las magnitudes $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n; \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n; \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ designan respectivamente, las ordenadas de los puntos; las longitudes euclidianas de los arcos $AP_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}B$, que son partes del arco AB ; las longitudes euclidianas de las cuerdas que comprenden estos arcos. Así formamos las sumas:

$$\Sigma = \frac{\sigma_1}{y_1} + \frac{\sigma_2}{y_2} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_n},$$

$$\Sigma' = \frac{\sigma_1}{y_0} + \frac{\sigma_2}{y_1} + \dots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1}},$$

$$Z = \frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n}.$$

Por el segundo principio tenemos que $\Sigma < s < \Sigma'$ ya que $0 < y_0 < y_1 < \dots < y_n$. Ahora analicemos la diferencia

$$\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma_1}{y_0 y_1} (y_1 - y_0) + \frac{\sigma_2}{y_1 y_2} (y_2 - y_1) + \dots + \frac{\sigma_n}{y_{n-1} y_n} (y_n - y_{n-1}).$$

El segundo miembro aumentará si sustituimos cada una de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ por σ' , definida como la mayor de ellas y cada denominador por y_0^2 . Así tenemos que

$$\Sigma' - \Sigma < \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_1 - y_0 + y_2 - y_1 + \dots + y_n - y_{n-1}) = \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_n - y_0).$$

Entonces, si σ' tiende a cero, también $\Sigma' - \Sigma$ tiende a cero.

Ahora, transformamos Z para que tenga la siguiente forma:

$$Z = \frac{\sigma_1 \zeta_1}{y_1 \sigma_1} + \frac{\sigma_2 \zeta_2}{y_2 \sigma_2} + \dots + \frac{\sigma_n \zeta_n}{y_n \sigma_n}.$$

Si designamos por α a la menor y β a la mayor de las razones $\frac{\zeta_1}{\sigma_1}, \frac{\zeta_2}{\sigma_2}, \dots, \frac{\zeta_n}{\sigma_n}$, obtenemos

$$\alpha \Sigma \leq Z \leq \beta \Sigma.$$

Si n tiende a infinito y $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ tienden a cero, tendremos que $\Sigma' - \Sigma$ tenderá a cero. Esto sucede porque $\Sigma' - \Sigma = \frac{\sigma'}{y_0^2} (y_n - y_0)$ y recordando que σ' tiende a cero mientras y_n e y_0 son constantes. También tenemos que α y β se aproximarán a la unidad, pues el arco AB es suave. De esta manera tenemos que Σ, Σ' y Z se aproximarán al mismo límite, y éste será la longitud hiperbólica s del arco AB .

Entonces, para calcular la longitud hiperbólica podemos utilizar el límite de cualquiera de las tres sumas, pero es más fácil usar la suma Z , pues sólo intervienen segmentos euclidianos y no arcos. Así obtenemos

$$s = \lim Z = \lim \left(\frac{\zeta_1}{y_1} + \frac{\zeta_2}{y_2} + \dots + \frac{\zeta_n}{y_n} \right). \quad (39)$$

Si el arco de alguna línea se puede dividir en un número finito de partes en las que se cumplen las condiciones anteriores, resulta que la longitud hiperbólica de esa línea es la suma de las longitudes hiperbólicas de dichas partes.

4.2.2. Movimientos hiperbólicos

Aquí analizaremos los movimientos hiperbólicos de este modelo, los cuales como hemos visto anteriormente, deben cumplir que la longitud hiperbólica de cualquier arco AB en \mathbb{H} es igual a su longitud en su nueva posición.

Veamos los tipos más simples de movimientos hiperbólicos.

1. Si se traslada cada punto de \mathbb{H} en una misma distancia y una misma dirección paralela al eje x , cada figura se transforma en una figura hiperbólicamente igual a ella, pues no cambian las magnitudes euclidianas ni sus ordenadas. Entonces, *el desplazamiento euclidiano de \mathbb{H} , a lo largo del eje x , es un movimiento hiperbólico.*
2. Supongamos que la transformación de similitud con centro en un punto O del eje x y con coeficiente positivo de similitud, transforma el segmento MN en el segmento M_1N_1 (Figura 70). Llamemos y e y_1 a las ordenadas de los puntos N y N_1 , respectivamente. Por la semejanza de los triángulos OMN y OM_1N_1 (LAL), tendremos que $\frac{MN}{y} = \frac{M_1N_1}{y_1}$. Entonces, por la igualdad (39) tenemos que la transformación no varía la longitud hiperbólica de un arco determinado por cualquier línea. Así que *la transformación de similitud con centro de similitud en el eje x y con coeficiente positivo de similitud, es un movimiento hiperbólico.* Recalcamos que el coeficiente de similitud debe ser positivo para que el segmento M_1N_1 esté dentro de \mathbb{H} y no en el semiplano negativo.

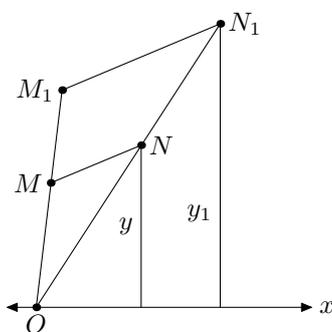


Figura 70. Transformación de similitud.

3. Supongamos que en la inversión respecto a la circunferencia k , de radio R con centro O en el eje x , M y N son puntos suficientemente cercanos entre sí, y M' y N' son sus puntos inversos, respectivamente (Figura 71). Sean y e y' las ordenadas de los puntos de intersección de la bisectriz de $\angle MON$ con los segmentos MN y $M'N'$, respectivamente. Como $\triangle OMN \cong \triangle ON'M'$ (LAL), entonces $\frac{MN}{y} = \frac{M'N'}{y'}$. Con ayuda de la ecuación (39) sabemos que durante la transformación dada, no varía la longitud hiperbólica de cualquier arco.

Por consiguiente, *la inversión respecto a una circunferencia de cualquier radio con centro en el eje x , es un movimiento hiperbólico.*

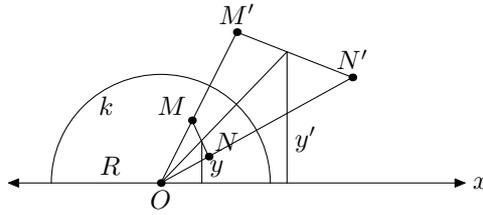


Figura 71. Inversión respecto a una circunferencia con centro en x .

4. No es difícil convencerse de que *la transformación de simetría respecto a una recta perpendicular al eje x es un movimiento hiperbólico.*

Una transformación que se obtiene de la secuencia de varios movimientos hiperbólicos, también pasa cualquier figura a otra hiperbólicamente igual y, por tanto es, a su vez, un movimiento hiperbólico. También es cierto que cualquier movimiento hiperbólico puede ser presentado en forma de secuencia de un número finito de los movimientos hiperbólicos mencionados anteriormente; sin embargo, no lo demostraremos.

4.2.3. Rectas y circunferencias hiperbólicas

Nuestro principal objetivo aquí es probar que \mathbb{H} cumple los postulados de la Geometría de Lobachevski. Así que primero tenemos que encontrar cuáles son las rectas y circunferencias en \mathbb{H} .

Aquí definimos recta hiperbólica como la línea por la cual se mide la distancia hiperbólica más corta entre cualesquiera dos puntos de ella. Así mismo denominamos circunferencia hiperbólica al lugar geométrico de puntos que se encuentran a una misma distancia hiperbólica del punto dado como centro.

Primero que nada, probaremos que las semirrectas euclidianas perpendiculares al eje x serán rectas hiperbólicas.

Sean A y B dos puntos en una perpendicular al eje x . Unimos estos puntos con el segmento de la recta m y con cualquier otra curva o quebrada n (Figura 72). Sean a y b dos rectas arbitrarias paralelas al eje x , bastante cercanas, y que cortan al segmento m en los puntos C y D ; y la línea n , en los puntos E y F . Como la longitud euclidiana del segmento CD es menor que la longitud euclidiana del arco EF y sus longitudes hiperbólicas pueden considerarse iguales a $\frac{CD}{y}$ y $\frac{EF}{y}$, donde y es la ordenada del punto D , la longitud hiperbólica del segmento CD es menor que la longitud hiperbólica del arco EF . Con esto obtenemos que la longitud hiperbólica del segmento m es menor que la longitud hiperbólica del arco n , que es lo que se quería demostrar.

Ahora demostraremos que la semicircunferencia de la circunferencia euclidiana k , con centro en el eje x , es también una recta hiperbólica.

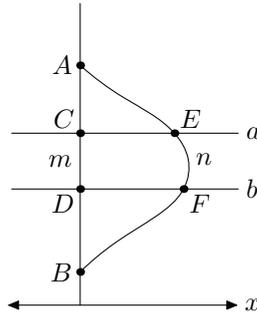


Figura 72. Semirrecta perpendicular al eje x .

Sean A y B los puntos donde k corta al eje x . Sea q la circunferencia con centro en A y la vamos a considerar como circunferencia de inversión (Figura 73). Sean M y N los puntos de intersección entre k y q . En la inversión k se transforma en la recta MN . Como la inversión es un movimiento hiperbólico y MN es perpendicular al eje x , la semicircunferencia k se transforma en una recta hiperbólica. Así que esta semicircunferencia es también una recta hiperbólica.

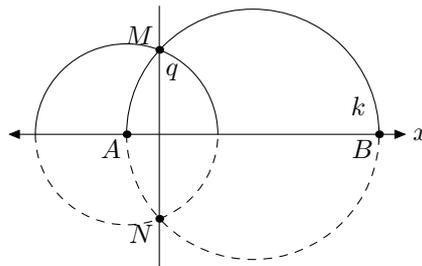


Figura 73. Semicircunferencia con centro en el eje x .

Ahora veremos que las rectas hiperbólicas tienen longitud hiperbólica infinita. Para esto levantemos una perpendicular al eje x por un punto arbitrario M de ésta (Figura 74), elijamos en dicha perpendicular un punto A y construyamos los puntos A_1, A_2, \dots de tal manera que se cumplan las igualdades euclidianas:

$$AA_1 = A_1M, A_1A_2 = A_2M, A_2A_3 = A_3M, \dots$$

Examinando la transformación de similitud con centro M y coeficiente $\frac{1}{2}$, observamos que transforma los puntos A, A_1, A_2, \dots a los puntos A_1, A_2, A_3, \dots y como es un movimiento hiperbólico, tenemos que las longitudes hiperbólicas de los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ son iguales entre sí. De esta manera, nuestra construcción se reduce a trazar en la recta hiperbólica AM , desde el punto A , los segmentos $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots$ hiperbólicamente iguales entre sí y así, nunca alcanzaremos el punto M . Por lo tanto, todo punto del eje x es un punto del semiplano infinitamente alejado.

Este procedimiento se puede realizar en la dirección opuesta y también será infinito. Entonces, el punto infinitamente alejado de la recta AM también será un punto de la recta hiperbólica infinitamente alejado. Por lo tanto, la recta hiperbólica AM sólo tendrá dos puntos alejados infinitamente y son los mencionados anteriormente.

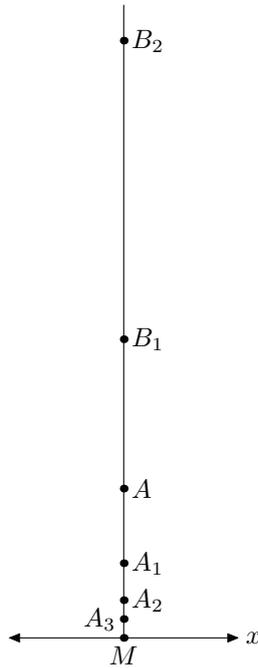


Figura 74. Las rectas tienen longitud infinita.

Si la recta se ve como una semicircunferencia con centro en el eje x , los puntos de intersección con el eje serán sus puntos infinitamente alejados.

También tenemos que el plano \mathbb{H} es conforme; es decir, la magnitud euclidiana de un ángulo en \mathbb{H} es igual a su magnitud real.

Primero veremos el caso del ángulo recto. Tracemos la semicircunferencia k con centro en el punto M del eje x , tracemos en M la perpendicular p al eje x (Figura 75). Examinemos los ángulos 1, 2, 3, 4 formados por las rectas hiperbólicas k y p . Haciendo una simetría respecto a p podemos transformar 1 en 2 y 3 en 4, y haciendo inversión respecto a k podemos transformar 1 en 3 y 2 en 4. Así tenemos que en el plano de Lobachevski $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$ y por tanto, cada uno de ellos es recto.

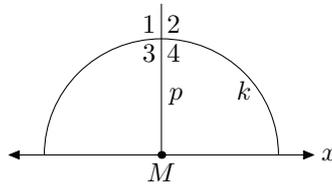


Figura 75. Ángulos rectos.

En esta misma configuración sean A el punto de intersección de k y p ; y N uno de los puntos de intersección de k y el eje x (Figura 76). Tomando N como centro, trazamos la semicircunferencia euclidiana n de radio NA que dividirá al ángulo 1 en dos ángulos 5 y 6, iguales entre sí. La inversión respecto a n transformará a k en p y p en k y por tanto, los ángulos 5 y 6

se intercambiarán. De aquí obtenemos que son iguales entre sí como magnitudes hiperbólicas y además, ambos son iguales a la mitad de un recto.

Sean L el punto de intersección de n y el eje x , que se encuentra al mismo lado de M que N , y l la semicircunferencia con centro L y radio LA . Esta circunferencia dividirá el ángulo 6 en los ángulos 7 y 8. No es difícil convencerse de que $\angle 8 = \angle NAL = \frac{1}{4}d$ donde $d = 90^\circ$ y, como $\angle 6 = \frac{1}{2}d$ y $\angle 7 = \frac{1}{4}d$, las magnitudes de los ángulos 7 y 8 son iguales entre sí. Como en la inversión respecto a l se permutan estos ángulos, tenemos que sus magnitudes hiperbólicas son iguales. De esta misma manera demostramos que los ángulos que tienen la magnitud euclidiana de $\frac{1}{8}d, \frac{1}{16}d, \dots$, tienen también esta misma magnitud en el plano de Lobachevski.

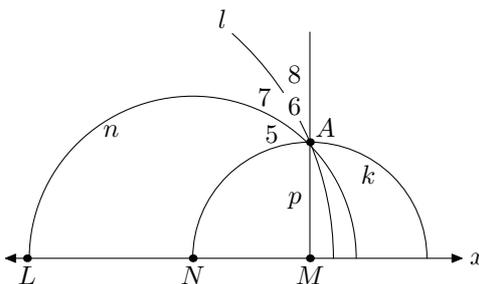


Figura 76. Ángulos potencia de dos.

Como todo ángulo se puede expresar en forma de suma de un número finito o también en forma de serie de sumandos tipo $d, \frac{1}{2}d, \frac{1}{4}d, \dots$, la conformidad queda demostrada.

Ahora veremos cómo se expresa una circunferencia en \mathbb{H} . Tracemos a través del punto M , que está en el eje x , la recta euclidiana p perpendicular a él, y elijamos en ella dos puntos arbitrarios B y C ($MB > MC$) (Figura 77). Construyamos en p el punto A de tal manera que se cumpla la igualdad entre magnitudes euclidianas

$$\frac{CM}{AM} = \frac{AM}{BM}. \quad (40)$$

De esta igualdad obtenemos que las longitudes hiperbólicas de los segmentos CA y AB son iguales. Con la transformación de similitud con centro en M y coeficiente $\frac{CM}{AM}$, el segmento AB pasa al CA . Esto se sigue de las siguientes cuentas:

$BM \frac{CM}{AM} = BM \frac{AM}{BM} = AM$ y, por lo tanto, B pasa a A ; $AM \frac{CM}{AM} = CM$ y, por tanto, A pasa a C .

Sea O el centro euclidiano del segmento BC , tracemos la circunferencia euclidiana q con centro O y radio OB , y sea A_1 el punto simétrico a A respecto al eje x . Como $OA = OM - AM$, $OA_1 = OM + MA_1 = OM + AM$, tenemos que

$$OA \cdot OA_1 = OM^2 - AM^2. \quad (41)$$

Luego, $OM = \frac{1}{2}(BM + CM)$ y, por la igualdad (40), $AM^2 = BM \cdot CM$. Entonces la igualdad (41) puede adquirir la forma $OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM + CM)^2 - BM \cdot CM = \frac{1}{4}(BM^2 + 2BM \cdot$

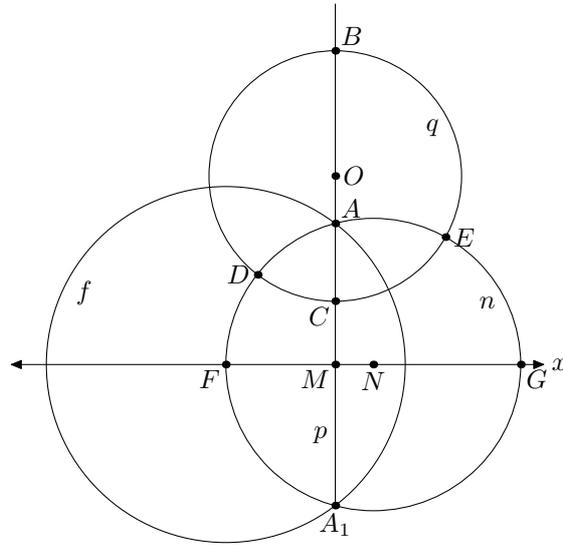


Figura 77. Las circunferencias hiperbólicas son circunferencias euclidianas.

$CM + CM^2 - 4BM \cdot CM$) o

$$OA \cdot OA_1 = \frac{1}{4}(BM - CM)^2. \quad (42)$$

Como $\frac{1}{2}(BM - CM) = OB$, de la igualdad (42) obtenemos

$$OA \cdot OA_1 = OB^2. \quad (43)$$

Con esto, tenemos que los puntos A y A_1 son simétricos respecto a la circunferencia q .

Ahora, demostraremos que los puntos de q son equidistantes del punto A . Tracemos a través de A y A_1 una circunferencia euclidiana arbitraria n . Su centro está en el eje x y así, su parte dentro de \mathbb{H} es una recta hiperbólica. Sean D y E los puntos donde se cortan n y q ; y F y G donde se cortan n y el eje x , respectivamente. Sea f la circunferencia con centro F y radio FA . Las circunferencias q y f son ortogonales pues f pasa por los puntos A y A_1 , que son simétricos respecto a q , por lo que la inversión respecto a f transforma la circunferencia q en sí misma. Esta inversión transforma la recta p en una circunferencia que pasa por F , A y A_1 ; es decir, en la circunferencia n , e inversamente.

Así tenemos que los arcos AD y AE de n se transforman, respectivamente, en los segmentos AB y AC de p . Por lo tanto, las longitudes hiperbólicas de los segmentos AD y AE son iguales a las longitudes hiperbólicas de los segmentos AB y AC ; es decir, las distancias hiperbólicas entre los puntos B, C, D, E y el punto A , son iguales. Con esto demostramos que las circunferencias hiperbólicas se exponen en forma de circunferencias euclidianas que no tienen puntos en el eje x . Es bueno advertir que, el centro hiperbólico no coincide con el euclidiano.

4.2.4. Cumplimiento de los axiomas de la Geometría de Lobachevski

Axioma 1. Por dos puntos diferentes puede ser trazada una, y sólo una, recta hiperbólica.

Si los puntos dados A y B se encuentran en una perpendicular euclidiana al eje x , esta perpendicular será la recta hiperbólica buscada. Si no, hallamos en el eje x el punto N , equidistante de A y B , y describimos desde N una semicircunferencia de radio NA (Figura 78); ésta será la recta hiperbólica buscada.

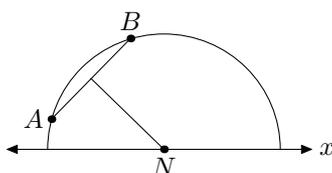


Figura 78. Recta hiperbólica que pasa por A y B .

Demostraremos que a través de dos puntos diferentes A y B no pueden pasar dos rectas hiperbólicas diferentes l y l' . Basta con suponer que A y B están en una perpendicular euclidiana l al eje x , pues cualquier otro caso puede fácilmente pasarse a éste por un movimiento hiperbólico. Para esta disposición de los puntos A y B , la distancia hiperbólica se mide sólo por la recta euclidiana l , así que en el segmento AB coinciden l y l' (Figura 79). Supongamos que existe un punto C que pertenece a l' , pero no a l , y que B se encuentra en l' entre C y A . Entonces el arco AC de la semicircunferencia k con centro en el eje x pertenecerá a la recta hiperbólica, pero en el segmento AC no coincide con l' .

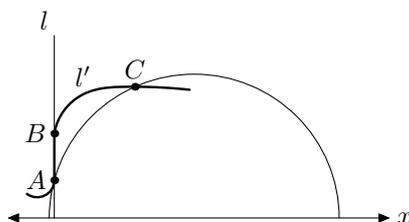


Figura 79. La única recta hiperbólica que pasa por A y B .

Axioma 2. Una recta puede alargarse en ambas direcciones tanto como se quiera.

Esto es fácil de ver por el hecho de que una recta hiperbólica, en este modelo, tiene longitud infinita.

Axioma 3. Dados un centro y un radio, se puede trazar una circunferencia.

Si el radio se da como un segmento que se muestra como arco de una semicircunferencia, éste se puede llevar mediante un movimiento hiperbólico a uno expresado como segmento de semirrecta haciendo que el centro sea el mismo. Supongamos que el segmento se expresa como

segmento de semirrecta perpendicular al eje x . Sea A el centro, C el otro extremo del segmento que se usará como radio, y M la intersección de dicha semirrecta con el eje x . Trazamos una circunferencia euclidiana con centro en M y radio MA (Figura 77), sea B el inverso del punto C respecto a esta circunferencia. Sea O el punto medio del segmento euclidiano BC y trazamos la circunferencia con centro O y radio OC , el cual estará en su totalidad dentro de \mathbb{H} . Como probamos anteriormente, esta circunferencia euclidiana será una circunferencia hiperbólica y su radio hiperbólico será AC .

Axioma 4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Este se sigue de que el modelo es conforme y que en la Geometría euclidiana se cumple.

Axioma 5. Por el punto P que no pertenece a la recta hiperbólica p , pueden ser trazadas dos rectas hiperbólicas paralelas a p .

Las rectas hiperbólicas que son perpendiculares euclidianas al eje x , son paralelas pues su punto común, alejado infinitamente, es el mismo en el semiplano \mathbb{H} que en el plano \mathbb{R}^2 . Sean A y B los puntos de p infinitamente alejados. Tracemos a través de P y A la semicircunferencia euclidiana m con centro M en el eje x , y a través de P y B la semicircunferencia euclidiana n con centro N en el eje x (Figura 80). Las semicircunferencias euclidianas m y n serán las rectas hiperbólicas que buscamos.

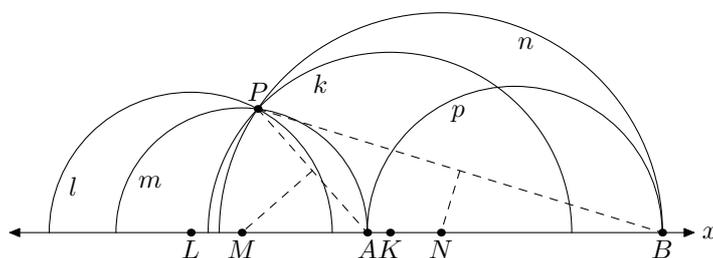


Figura 80. Axioma de Lobachevski.

Por el punto P pasan tres tipos de rectas hiperbólicas: las que cortan a p , las paralelas a p y las que no cortan a p ni son paralelas a ésta. Para construir una recta hiperbólica del primer tipo es necesario desde cualquier punto K del segmento MN como centro, trazar una semicircunferencia k de radio KP . Para trazar una recta l del tercer tipo tenemos que tomar como centro un punto L fuera del segmento MN .

Así tenemos que en \mathbb{H} se cumplen los axiomas de la Geometría de Lobachevski, y por lo tanto sus teoremas. Por lo que \mathbb{H} representa al plano de Lobachevski.

4.2.5. Líneas equidistantes y líneas límite

Sean p y q la perpendicular y la inclinada al eje x en un cierto punto M (Figura 81). Supongamos que P_1Q_1 y P_2Q_2 son dos arcos de dos circunferencias con centro común M ; es

decir, son segmentos de dos rectas hiperbólicas m_1 y m_2 . Como m_1 y m_2 son perpendiculares a la recta p , las longitudes hiperbólicas de los arcos P_1Q_1 y P_2Q_2 son las distancias hiperbólicas de los puntos Q_1 y Q_2 a la recta hiperbólica p . Estas distancias son iguales entre sí, pues el arco P_1Q_1 puede ser convertido en el P_2Q_2 mediante la transformación de similitud con centro en M . Entonces q es el lugar geométrico de los puntos tales que su distancia hiperbólica entre ellos y la recta p son iguales. Esta es la línea *equidistante* a la recta p , la denominamos *base*. Como podemos ver fácilmente la equidistante no es una recta.

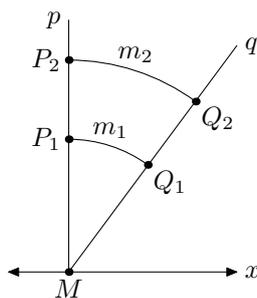


Figura 81. Línea equidistante.

Es fácil convencerse de que las rectas hiperbólicas perpendiculares a la base también lo serán a la equidistante. La inversión respecto de un punto del eje x distinto de M , transforma q en una circunferencia euclidiana; ésta corta al eje x como lo hace la recta hiperbólica, pero su centro no pertenece al eje x .

Así, tenemos que la equidistante se expresa como una semirrecta euclidiana oblicua respecto del eje x ; o bien, como una circunferencia euclidiana que corta al eje x pero con centro fuera del eje x . Es fácil ver que no existen líneas equidistantes de otra forma.

Tracemos el diámetro p de la circunferencia q , perpendicular al eje x , y sea C el punto de su intersección con q , más cercano al eje x (Figura 82). Si se fija C y se mueve el centro de q por p en dirección contraria a donde está el eje x , en el límite q se convertirá en la recta euclidiana h , paralela al eje x . h no es una recta hiperbólica y será una *línea límite*.

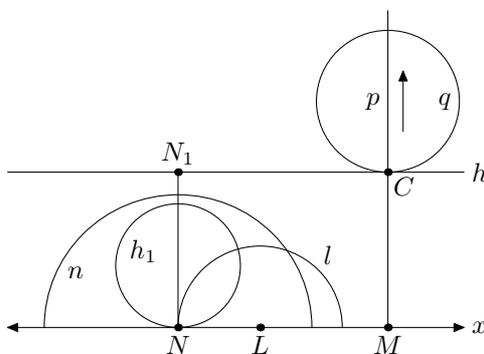


Figura 82. Líneas límite.

Veamos qué pasa con la inversión respecto a una circunferencia n con centro N en el eje x .

Este movimiento transforma a h en la circunferencia euclidiana h_1 , que pasa por N , con centro en la perpendicular común NN_1 del eje x y h ; de donde obtenemos que h_1 hace contacto con el eje x . Así pues, la línea límite se expone en \mathbb{H} como una recta euclidiana paralela al eje x , o como una circunferencia euclidiana que se toca con el eje x .

Si trazamos por N la circunferencia euclidiana l con el centro L en el eje x , por ser los radios de h_1 y l perpendiculares entre sí, la recta hiperbólica l corta a la límite h_1 en un ángulo recto. De aquí obtenemos que todas las rectas hiperbólicas que pasan por un punto de la línea límite infinitamente alejado son perpendiculares a ésta. Estas rectas serán los *ejes de la línea límite*.

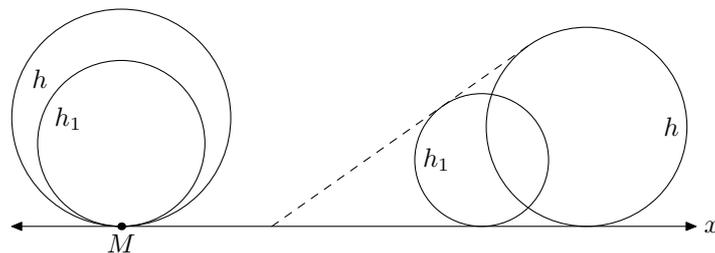


Figura 83. Líneas límite invariantes bajo movimientos hiperbólicos.

Cualquier línea límite h es hiperbólicamente igual a otra línea límite h_1 ; es decir, existe un movimiento hiperbólico que transforma h en h_1 . Si h y h_1 son ambas rectas euclidianas paralelas al eje x o circunferencias euclidianas de diferentes radios tangentes al eje x (Figura 83), dicho movimiento será una transformación de similitud con el centro de similitud en el eje x . Si son circunferencias euclidianas de un mismo radio tangentes al eje x (Figura 83), el movimiento será un desplazamiento de \mathbb{H} a lo largo del eje x . Si una de las líneas es una recta euclidiana y la otra una circunferencia euclidiana tangente al eje x , el movimiento hiperbólico será una inversión con centro en el eje x .

4.2.6. Algunos teoremas de la Geometría de Lobachevski

Ahora veremos cómo se visualizan algunos teoremas de la Geometría hiperbólica usando el modelo del semiplano.

Teorema 65. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos.

Demostración. Sea ABC un triángulo rectángulo en el que sus lados se exponen como un segmento en la perpendicular euclidiana al eje x , un arco de la circunferencia euclidiana con centro en M que está en el eje x y un arco de la circunferencia euclidiana con centro N que está en el eje x (Figura 84). El ángulo en C es recto. Llamamos α al ángulo en A y es igual al de las tangentes a las circunferencias b y c en el punto A o, equivalentemente, al ángulo entre los radios NA y MA de estas circunferencias. Llamamos β al ángulo en B y entonces también tenemos que $\beta = \angle BNM$.

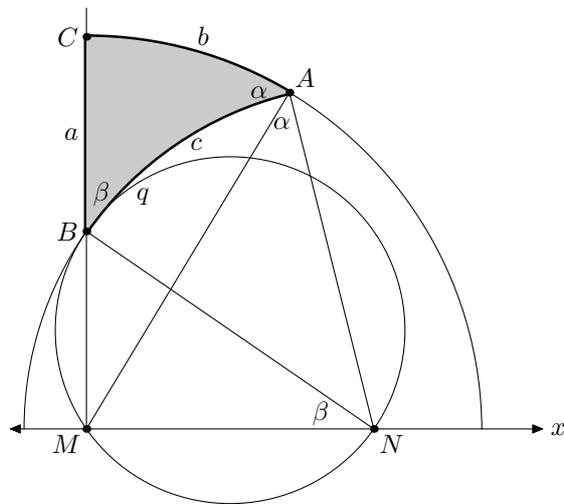


Figura 84. Suma de los ángulos de un triángulo rectángulo.

Construyamos en el segmento BN , como diámetro, la circunferencia euclidiana q que tiene sólo un punto común B con la circunferencia c . Por esto el punto A se encuentra fuera del círculo limitado por q y, por consiguiente, $\alpha = \angle MAN < \angle MBN$. De aquí, como se cumple que $\angle MBN + \beta = 90^\circ$, tenemos:

$$\alpha + \beta < 90^\circ;$$

por eso $\alpha + \beta + 90^\circ < 180^\circ$ como se quería demostrar.

Mediante un movimiento hiperbólico podemos situar cualquier triángulo rectángulo de tal manera que uno de sus catetos pertenezca a una recta perpendicular al eje x .

Si se trata de un triángulo oblicuángulo, lo dividimos en dos triángulos rectángulos por una de sus alturas. La suma de los ángulos agudos de estos triángulos rectángulos es igual a la suma de los ángulos del triángulo oblicuángulo dado. Así, por la desigualdad que acabamos de obtener se deduce fácilmente el teorema para cualquier triángulo dado. ■

Teorema 66. Dos rectas divergentes tienen una y solamente una, perpendicular común.

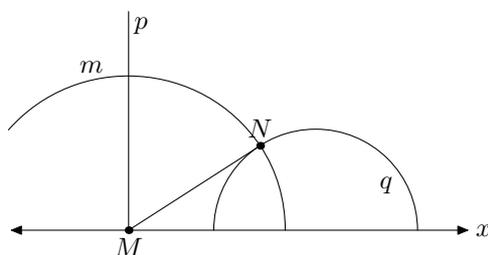


Figura 85. Dos rectas divergentes con una perpendicular común.

Demostración. Supongamos que una de las rectas divergentes dadas se expone como la perpendicular euclidiana p al eje x en el punto M , la otra se expone en forma de la semicircunferencia

euclidiana q con el centro en el eje x y, además, p y q no tienen puntos comunes (Figura 85). Esta disposición de las rectas divergentes siempre se puede realizar mediante un movimiento hiperbólico.

Tracemos desde M la tangente euclidiana MN a q y, con el radio MN , describamos la semicircunferencia m con centro M . Es obvio que m es una recta hiperbólica que corta tanto a p como a q en ángulo recto. Así, m representa la recta que buscábamos. No puede haber dos rectas perpendiculares pues, en caso contrario, existiría un cuadrilátero con cuatro ángulos e implicaría que en algún triángulo sus ángulos internos suman 180° o más. ■

Teorema 67. La proyección rectangular del lado de un ángulo agudo sobre el otro lado, es un segmento.

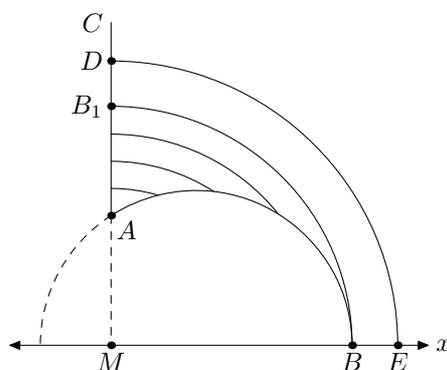


Figura 86. Proyección rectangular del lado de un ángulo agudo sobre el otro.

Demostración. La justeza del teorema es evidente de la Figura 86, donde el segmento AB_1 es la proyección rectangular del lado AB del ángulo agudo $\angle BAC$ sobre su lado AC . En la misma figura, el arco DE de la circunferencia euclidiana con el centro M es perpendicular a la recta hiperbólica AC . Esta perpendicular no se corta con la oblicua AB . ■

4.2.7. Medición de segmentos de rectas hiperbólicas

Finalmente encontraremos una fórmula para calcular longitudes de segmentos de rectas hiperbólicas en el modelo que estamos considerando.

Primero examinemos la semirecta euclidiana perpendicular al eje x en su punto M , y en ella los puntos A, B, C, D , dispuestos de tal manera que $\frac{MB}{MA} = \frac{MD}{MC}$ o, que es lo mismo, $\frac{MB}{MD} = \frac{MA}{MC}$ (Figura 87). Designando por μ a cada una de las dos últimas relaciones; vemos que la transformación de similitud con centro M y coeficiente μ traslada el segmento CD al segmento AB y entonces, las longitudes de estos segmentos son iguales. De aquí se sigue que la longitud hiperbólica de AB denotada por AB_h se caracteriza por la relación $\frac{MB}{MA}$; es decir, es función de esta relación. Demostraremos que esta función puede ser logarítmica; es decir, que

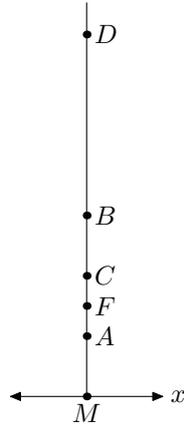


Figura 87. Puntos en una semirrecta perpendicular al eje x .

se puede poner

$$AB_h = \log \frac{MB}{MA}. \quad (44)$$

Supongamos que F es un punto del segmento AB . Entonces $\frac{MB}{MA} = \frac{MF}{MA} \cdot \frac{MB}{MF}$. Calculando logaritmos a esta igualdad y por la fórmula anterior obtenemos $AB_h = AF_h + FB_h$, lo que concuerda con la suma de segmentos.

En dicha fórmula se puede escoger el logaritmo con cualquier base positiva diferente de 1; sin embargo, para la concordancia con las propiedades de la distancia que propusimos anteriormente, es necesario optar por el logaritmo natural y entonces la fórmula queda así:

$$AB_h = \ln \frac{MB}{MA}. \quad (45)$$

Esto lo podemos ver de la siguiente manera, si el segmento AB es suficientemente pequeño en comparación con el MA , de las relaciones

$$\ln \frac{MB}{MA} = \ln \frac{MA + AB}{MA} = \ln \left(1 + \frac{AB}{MA} \right)$$

obtenemos con ayuda de la fórmula (45) y haciendo la aproximación $\ln 1 + x \approx x$

$$AB_h \approx \frac{AB}{MA}$$

lo que concuerda con el primer principio sobre la medición de segmentos en el Modelo III.

Las longitudes hiperbólicas de los segmentos AB y BA , calculadas por la fórmula (45), son iguales por su magnitud absoluta, pero se diferencian por el signo. Si la dirección del segmento es indiferente, en el segundo miembro de la fórmula deberá estar el valor absoluto del logaritmo.

Examinemos ahora la semicircunferencia euclidiana q con centro M en el eje x , que lo corta en los puntos N' y N , y la perpendicular euclidiana al eje x en el punto M , que corta q

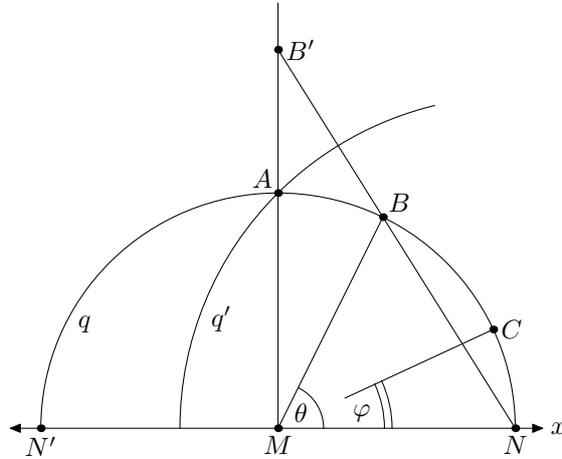


Figura 88. Puntos en una semicircunferencia con centro en el eje x .

en el punto A (Figura 88). Sea B un punto en el arco AN . Tracemos la recta euclidiana NB y designemos por B' su intersección con MA . Es fácil ver que son iguales los segmentos AB y AB' , pues la inversión respecto a la circunferencia q' de radio NA con el centro N transforma q en la recta euclidiana MA y, por consiguiente, A se transforma en sí mismo y B en B' ya que están en la recta euclidiana que pasa por el centro de inversión N . Así, $AB_h = AB'_h = \ln \frac{MB'}{MA}$. Llamemos θ al $\angle NMB$; entonces $\angle MNB = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ y

$$\frac{MB'}{MA} = \frac{MB'}{MN} = \tan \left(90^\circ - \frac{\theta}{2} \right) = \cot \frac{\theta}{2}.$$

De aquí

$$AB_h = \ln \cot \frac{\theta}{2}. \quad (46)$$

Si C es un punto del arco BN y $\angle NMC = \varphi$, entonces como podemos ver de (46)

$$AC_h = \ln \cot \frac{\varphi}{2}, \quad BC_h = AC_h - AB_h = \ln \cot \frac{\varphi}{2} - \ln \cot \frac{\theta}{2}.$$

De aquí

$$BC_h = \ln \left(\cot \frac{\varphi}{2} \tan \frac{\theta}{2} \right). \quad (47)$$

Así, ya tenemos fórmulas para cualquier caso en como pudiese estar expuesto el segmento.

4.3. Modelo del disco unitario

En este modelo, los puntos del plano de Lobachevski será el conjunto $\mathbb{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$; es decir, los puntos que están dentro del disco de radio 1 centrado en el origen. La frontera de este círculo son los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1$, y la llamaremos *círculo al infinito* \mathbb{D}_∞ .

Notemos que si realizamos la inversión respecto a una circunferencia centrada en $(-1, 0)$ y de radio $\sqrt{2}$, los puntos de \mathbb{H} se transforman en los de \mathbb{D} y viceversa (Figura 89).

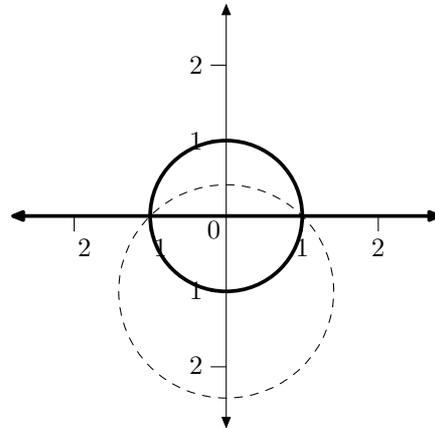


Figura 89. Relación entre \mathbb{H} y \mathbb{D} .

4.3.1. Puntos, rectas y ángulos

Ahora podemos establecer cuáles son las rectas y circunferencias en el Modelo del disco unitario. Las rectas euclidianas perpendiculares al eje x en \mathbb{H} se transforman en circunferencias ortogonales a \mathbb{D}_∞ que pasan por el punto $(0, -1)$ o el diámetro que pasa por $(0, -1)$. Las circunferencias euclidianas con centro en el eje x , por ser perpendiculares a éste, se transforman en circunferencias ortogonales a \mathbb{D}_∞ que no contienen a $(0, -1)$ o en diámetros de \mathbb{D}_∞ que no contienen a ese punto. De aquí se sigue que *las rectas hiperbólicas serán las porciones de circunferencias ortogonales euclidianas a \mathbb{D}_∞ , que se encuentran dentro de \mathbb{D} o diámetros euclidianos a \mathbb{D}_∞* (Figura 90).

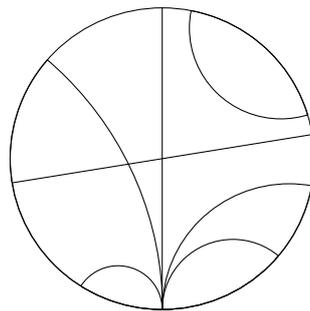


Figura 90. Rectas en \mathbb{D} .

Como el Modelo del semiplano es conforme y la inversión preserva ángulos, tenemos que *el Modelo del disco unitario también debe ser conforme.*

Si tenemos una circunferencia euclidiana en el interior \mathbb{H} , entonces mediante la inversión

se transforma en otra circunferencia euclidiana en el interior de \mathbb{D} y viceversa. Así que *las circunferencias hiperbólicas son circunferencias euclidianas en el interior de \mathbb{D} .*

Si tenemos una circunferencia tangente al eje x , entonces mediante la inversión, se transformará en una circunferencia tangente a \mathbb{D}_∞ . Así que *las líneas límite en este modelo serán las circunferencias tangentes a \mathbb{D}_∞ pero dentro del disco unitario.*

Si tenemos una circunferencia que interseca al eje x en \mathbb{H} con centro fuera del eje x , tenemos que esa intersección no es en ángulo recto. Al hacer la inversión, éstas circunferencias se transforman en circunferencias no ortogonales a \mathbb{D}_∞ . Por lo tanto, *las líneas equidistantes son circunferencias euclidianas no ortogonales a \mathbb{D}_∞ .*

4.3.2. Movimientos hiperbólicos

Como hemos establecido una biyección entre \mathbb{H} y \mathbb{D} , debe haber los mismos movimientos hiperbólicos en ambos modelos, sólo que se expresan de manera diferente.

La reflexión respecto a una semirrecta perpendicular al eje x o la inversión respecto a una semicircunferencia, con centro en el eje x , se pueden considerar ambas como reflexiones hiperbólicas respecto a una recta hiperbólica. Esto, en el Modelo del disco, se expresa como una inversión respecto a una circunferencia ortogonal a \mathbb{D}_∞ o una reflexión euclidiana respecto a un diámetro del disco, dependiendo de como se exprese la recta hiperbólica en el modelo.

Los movimientos hiperbólicos serán composición de reflexiones hiperbólicas. Los que se realizan por medio de dos reflexiones hiperbólicas se pueden clasificar de la manera siguiente:

1. Si las dos rectas hiperbólicas se intersecan dentro de \mathbb{D} , este movimiento se conoce como *rotación hiperbólica*.
2. Si las dos rectas hiperbólicas se intersecan en un punto en \mathbb{D}_∞ , el movimiento se llama *rotación al infinito* y no tiene equivalente en la Geometría euclidiana.
3. Si las dos rectas hiperbólicas no se intersecan, el movimiento se llama *traslación hiperbólica*.

En el semiplano superior, revisamos que la traslación a lo largo del eje x es un movimiento hiperbólico; en realidad, este se puede ver como dos reflexiones respecto a rectas euclidianas perpendiculares al eje x . En este modelo, se ve como dos reflexiones respecto a rectas hiperbólicas que se intersecan en $(0, -1)$; es decir, como una rotación al infinito.

También revisamos el movimiento hiperbólico dado por la razón de similitud respecto a un punto en el eje x . Este se puede ver como dos inversiones respecto a circunferencias euclidianas concéntricas cuyo centro se localiza en el eje x . Al pasarlo a \mathbb{D} , esto se ve como la composición de dos reflexiones hiperbólicas respecto a rectas que no se intersecan.

En este modelo, los movimientos hiperbólicos cumplen los siguientes dos teoremas.

Teorema 68. Dados cualesquiera dos puntos en \mathbb{D} , siempre existe un movimiento que manda uno en el otro.

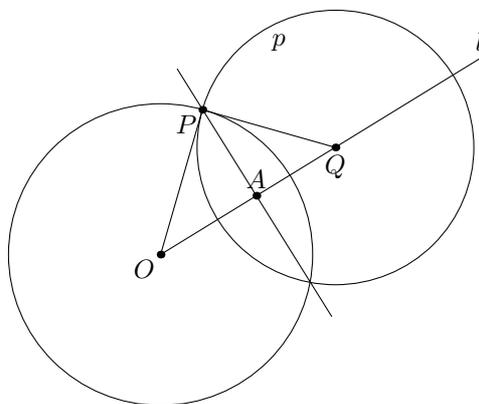


Figura 91. Reflexión que manda un punto en el origen.

Demostración. Basta demostrar que, dado un punto A en \mathbb{D} arbitrario, siempre existe un movimiento que lo manda en el centro O . Sea d la distancia euclidiana entre A y O , l el rayo en la dirección OA (Figura 91). Del punto A levantamos la perpendicular a l y en el punto de intersección P con \mathbb{D}_∞ , trazamos la tangente a \mathbb{D}_∞ , que cortará al rayo l en un punto Q . Trazamos la circunferencia p con centro en Q y radio QP . Ésta será ortogonal a \mathbb{D}_∞ y, por tanto, una recta hiperbólica.

$OQ = \frac{1}{d}$ por ser Q el inverso de A respecto a \mathbb{D}_∞ , $PQ = \sqrt{\frac{1}{d^2} - 1}$ por el teorema de Pitágoras y $QA = \frac{1}{d} - d$. Entonces $QA \cdot QO = \frac{1}{d}(\frac{1}{d} - d) = \frac{1}{d^2} - 1$, por lo que la reflexión hiperbólica respecto a p , es el movimiento hiperbólico buscado. ■

Teorema 69. Dadas cualesquiera dos rectas hiperbólicas en \mathbb{D} , siempre existe un movimiento que manda una en la otra.

Demostración. Por el teorema anterior, es suficiente verificar que se cumple para cualesquiera dos rectas que pasen por O . Esto es inmediato pues las rotaciones euclidianas por el origen son movimientos hiperbólicos. ■

Enseguida, daremos la fórmula para calcular la distancia hiperbólica entre dos puntos sin demostrarla porque es un proceso extenso y va más allá de los propósitos de este trabajo. Para ello podemos ver a los puntos de \mathbb{D} como números complejos. Es decir, $\mathbb{D} = \{x + yi \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 1\}$. Tomando esto en cuenta obtenemos la relación general para cualesquiera puntos z y w , que es la siguiente:

$$d_{hip}(z, w) = \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right).$$

Los movimientos hiperbólicos conservan la distancia entre dos puntos; sin embargo, no lo demostraremos.

4.3.3. Cumplimiento de los axiomas de la Geometría de Lobachevski

Ahora veremos cómo el Modelo del disco unitario cumple con los Axiomas de Lobachevski. En realidad, esto ya lo probamos con \mathbb{H} y, al principio, dimos una relación entre estos dos modelos. La intención aquí es mostrar cómo se visualizan los postulados de la Geometría de Lobachevski en \mathbb{D} .

Axioma 1. Por dos puntos diferentes puede ser trazada una y sólo una, recta hiperbólica.

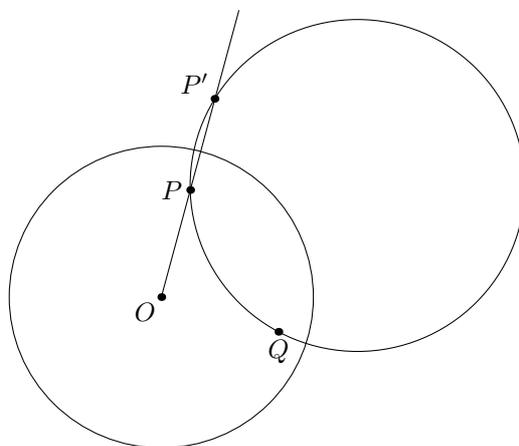


Figura 92. Recta hiperbólica por los puntos A y B .

Sean P y Q dos puntos en \mathbb{D} . Si P y Q son colineales con el centro, la única recta hiperbólica que los contiene es el diámetro en el que están contenidos. Si no, localizamos el punto P' , inverso de P respecto a \mathbb{D}_∞ (Figura 92). Trazamos la circunferencia que pasa por los puntos P , Q y P' ; ésta será una circunferencia ortogonal a \mathbb{D}_∞ que contiene a P y a Q , pues la potencia del origen respecto de esta circunferencia es exactamente 1. La unicidad se da porque una circunferencia con estas propiedades tiene forzosamente que contener a P' y tres puntos determinan una única circunferencia. Todo esto es porque ya sabemos cuáles son las rectas hiperbólicas en este modelo.

Axioma 2. Una recta puede alargarse en ambas direcciones tanto como se quiera.

Esto se cumple por las mismas razones que en el semiplano superior.

Axioma 3. Dados un centro y un radio, se puede trazar una circunferencia.

Si tenemos un punto A como centro y un segmento como radio, transformamos ese segmento en otro que se exprese como parte de un diámetro, manteniendo al punto A en el mismo

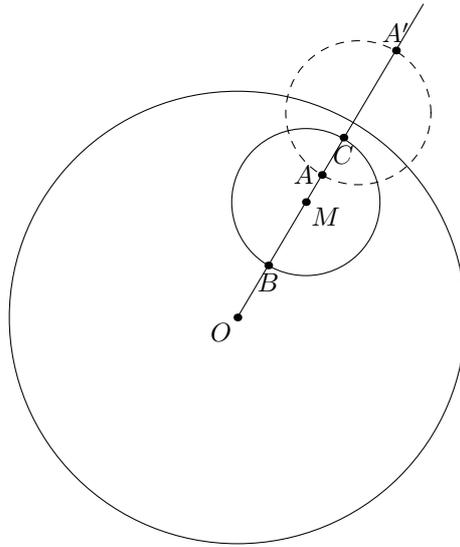


Figura 93. Circunferencia hiperbólica con centro en A y radio AC .

lugar; al otro extremo del segmento lo llamamos B (Figura 93). Trazamos una recta hiperbólica perpendicular a dicho diámetro por A . Esto lo logramos localizando el punto A' inverso de A respecto a \mathbb{D}_∞ y trazando la circunferencia de diámetro AA' . Reflejamos hiperbólicamente, respecto a esta recta, el punto B y le llamamos C al inverso. Ahora localizamos el punto medio euclidiano del segmento BC que denotamos por M , y trazamos la circunferencia euclidiana con centro M y radio MB que, como probamos anteriormente, es la circunferencia hiperbólica buscada.

Axioma 4. Todos los ángulos rectos son iguales.

Esto se cumple porque el modelo es conforme y en la Geometría euclidiana se cumple.

Axioma 5. Por el punto P que no pertenece a la recta hiperbólica p , pueden ser trazadas dos rectas hiperbólicas paralelas a p .

Como vimos anteriormente, cualquier circunferencia ortogonal a \mathbb{D} y que pase por P , debe pasar por P' , el inverso de P respecto a \mathbb{D}_∞ . Trazamos la mediatriz de PP' , y este debe ser el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias ortogonales a \mathbb{D}_∞ que pasen por P (Figura 94). Las rectas hiperbólicas que pasan por P son estas circunferencias y además el diámetro que pasa por P , pero éste se puede considerar como una circunferencia con centro en el punto al infinito de la mediatriz.

Para hallar las paralelas, tenemos que trazar las mediatrices de los segmentos PA y PB , donde A y B son los puntos al infinito de la recta p , y donde se corten con la mediatriz de PP' (que puede ser el punto al infinito) serán los centros de las circunferencias ortogonales que representan a las rectas hiperbólicas paralelas con p que pasan por P . Estos centros los representaremos por las letras M y N respectivamente.

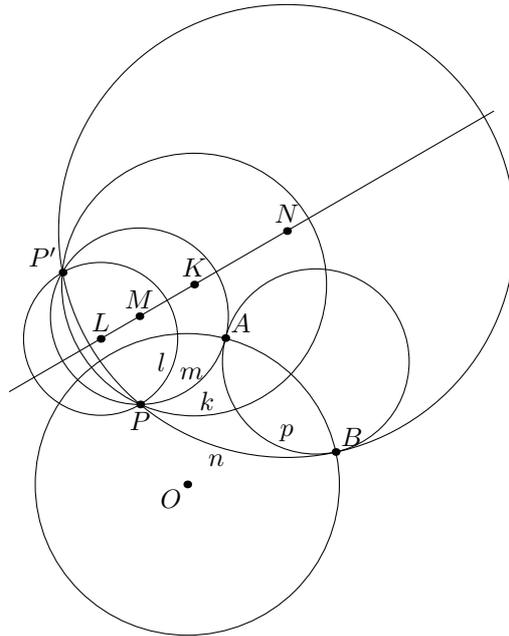


Figura 94. Axioma de Lobachevski.

Si el centro de una circunferencia K está en la mediatriz de PP' dentro del segmento MN y pasa por P , ésta representará una recta hiperbólica k que pasa por P e interseca a la recta p . Si el centro L está fuera del segmento MN , la circunferencia representa a una recta divergente de p que pasa por P .

4.3.4. Algunos teoremas de la Geometría de Lobachevski

A continuación mostraremos cómo se visualizan algunos teoremas de la Geometría hiperbólica usando el Modelo del disco unitario.

Teorema 70. La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es menor que dos rectos.

Demostración. Mediante un movimiento hiperbólico llevamos el vértice A al centro del disco para que dos de los lados del triángulo sean radios y los otros dos vértices determinen el lado BC , perteneciente a un arco perpendicular a \mathbb{D}_∞ (Figura 95). Es fácil ver que los ángulos hiperbólicos β y γ , son menores que los ángulos euclidianos β' y γ' ; entonces

$$180^\circ = \alpha + \beta' + \gamma' > \alpha + \beta + \gamma.$$



Teorema 71. La altura de un triángulo rectángulo e isósceles crece al crecer los lados, pero sin llegar a rebasar una cierta longitud.

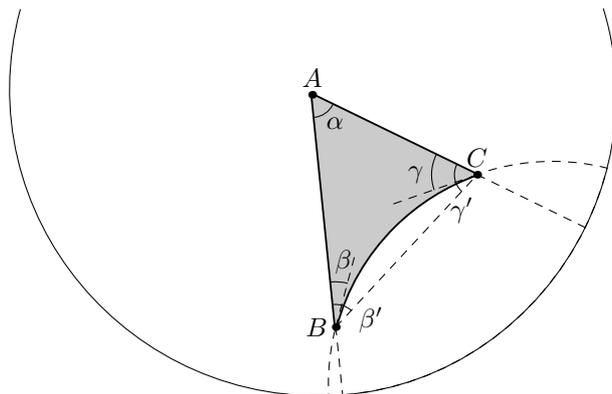


Figura 95. Suma de los ángulos de un triángulo.

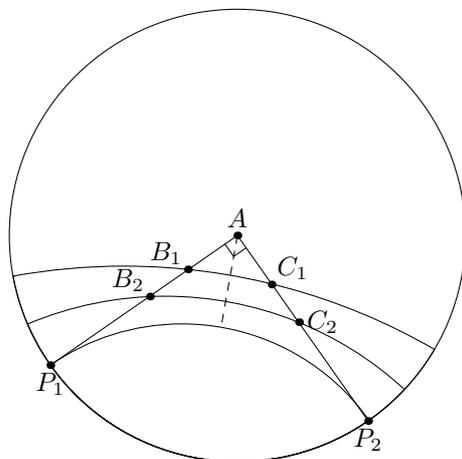


Figura 96. Máxima altura de un triángulo rectángulo isósceles.

Demostración. Ubicamos el ángulo recto del triángulo en el centro del disco mediante un movimiento hiperbólico. De la Figura 96 resulta fácil convencerse de que la altura de los triángulos se incrementa pues los círculos ortogonales no se intersecan.

La altura máxima se obtiene cuando los vértices B y C son puntos al infinito, la cual es finita, pues la circunferencia ortogonal por los puntos P_1 y P_2 corta a la altura en un punto a distancia finita del vértice A . ■

Teorema 72. El ángulo 2α formado por las dos paralelas a una recta l por un punto P exterior a ella, depende únicamente de la distancia del punto a la recta (éste es el ángulo de paralelismo).

Demostración. Mediante un movimiento hiperbólico podemos mandar el punto P al centro del disco. El ángulo 2α resulta ser el ángulo entre los radios determinados por los puntos al infinito A y B de la recta l (Figura 97). Si la distancia p se incrementa, los puntos A y B están más cerca y, por tanto, el ángulo 2α disminuye. Si la distancia p disminuye, los puntos se alejan y el ángulo 2α aumenta. Podemos ver que si p es cero, el ángulo 2α es 180° y si es infinito, el

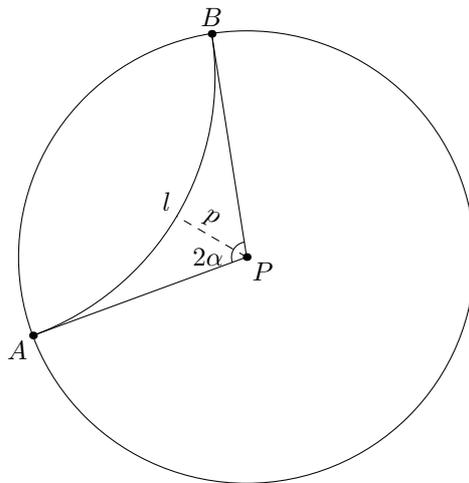


Figura 97. Ángulo de paralelismo.

ángulo es de 0° . ■

4.4. Algunas proposiciones equivalentes al quinto postulado vistas con los modelos

En esta última sección vamos a analizar, usando los modelos, las proposiciones equivalentes al quinto postulado que estudiamos en la sección 2.2. Esto para hacer ver porqué estas proposiciones no se cumplen en la Geometría de Lobachevski. Sin embargo, aquí no tocaremos la prueba por rotación de Thibaut pues se requiere conexidad riemanniana para ello y eso va más allá del nivel de este trabajo.

En el intento de Proclo se mencionó que la falla era que se consideraba que la distancia entre dos paralelas era acotada. Para refutar esto consideremos en el Modelo del semiplano una recta l expresada como semirrecta perpendicular al eje x , una recta expresada como semicircunferencia con centro en el eje x paralela hiperbólicamente a l , y una línea equidistante n a l (Figura 98). Como l es tangente a m en el modelo y n es oblicua al eje x tenemos que n debe intersectar a m en un punto dentro del semiplano, por lo que la distancia entre las paralelas l y m supera cualquier cota en la dirección contraria al paralelismo.

Analizamos enseguida la prueba de Wallis usando el Modelo del disco unitario. Aquí supondremos que la recta CD es oblicua a la CA donde C está en el centro del disco. Wallis en su prueba usa que hay un triángulo $C'A'E'$ semejante al CGF por la relación $CA : CG$ y que hace coincidir el lado $C'A'$ con el segmento CA , al hacer esto el triángulo coincidiría con la figura formada por el segmento AB y las rectas CD y AB por el criterio ALA, pero estas rectas pueden no intersectarse como en la figura o, si lo hacen, el ángulo en la intersección no puede ser igual al $\angle CFG$ pues tendríamos un cuadrilátero con suma de ángulos igual a 360° , lo cual ya vimos que es falso a menos que $A = G$.

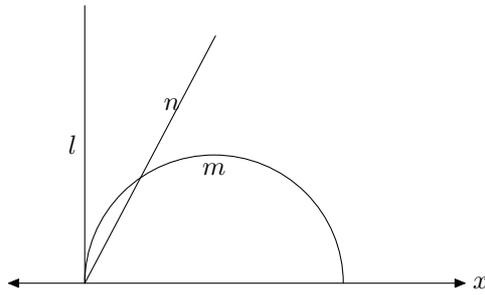


Figura 98. Distancia entre paralelas.

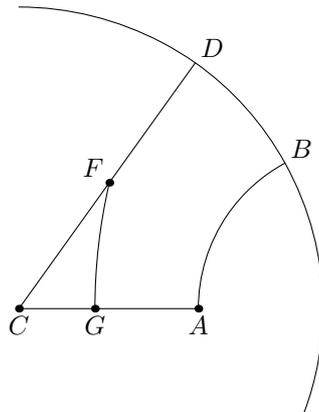


Figura 99. No existen triángulos semejantes en el Modelo del disco unitario.

Consideremos el punto A en el centro del disco unitario, el rayo AX partiendo de él y las rectas AA', BB', \dots rectas a iguales ángulos respecto a AX y separadas entre sí la misma distancia, también consideramos las rectas AP, AQ, \dots que dividen al ángulo $A'AX$ en ángulos iguales. En la prueba de Bertrand se asume que las tiras $A'ABB', B'BCC', \dots$ tienen la misma área, así también los ángulos $A'AP, PAQ, \dots$. Asumiendo esto se obtiene que el área del ángulo $A'AP$ es mayor que la de la tira $A'ABB'$ y por tanto no está contenido el ángulo en la tira, por lo que tiene que cortarla. Sin embargo, podemos hacer el ángulo $A'AP$ menor que el ángulo $A'AB'$ donde B' es el punto al infinito de la recta BB' . De esta manera, el ángulo $A'AP$ está contenido en la tira $A'ABB'$, por lo que no podemos comparar de esta manera las áreas y por tanto la prueba de Bertrand es incorrecta.

Por último veremos porqué la prueba de Legendre es incorrecta; es decir veremos porqué dentro de un ángulo pueden existir puntos en los cuales ninguna recta por ellos interseca a ambos rayos del ángulo.

Para esto consideremos un ángulo BAC con vértice en el origen del Modelo del disco, y B y C puntos en \mathbb{D}_∞ (Figura 101). Trazamos la recta hiperbólica que tiene por puntos al infinito a B y a C , que será la circunferencia ortogonal a \mathbb{D}_∞ pues en el caso en el que es una recta euclidiana es evidente que existan tales puntos. Tomamos un punto D dentro de este círculo. Localizamos el punto D' inverso de D respecto a \mathbb{D}_∞ . Trazamos la mediatriz de DD' y como

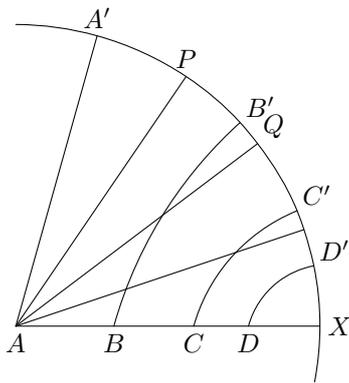


Figura 100. Áreas infinitas en el disco unitario.

ya vimos, todas las rectas hiperbólicas que pasan por D se expresan como circunferencias que tienen su centro en esta mediatriz. Localizamos los puntos de intersección de las mediatrices de DC y DB con la mediatriz de DD' y los llamamos M y N , respectivamente. Es evidente que las circunferencias euclidianas con centro dentro del segmento MN que pasan por D no intersecan ningún lado del ángulo, mientras las que tienen centro al otro lado de F sólo intersecan el lado AC y las que están del otro lado de G sólo a AB .

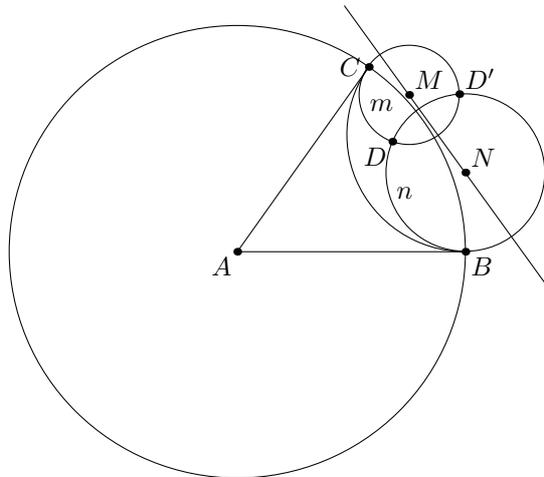


Figura 101. Argumentación de que la demostración de Legendre es incorrecta.

5. Conclusiones

En este trabajo esbozamos el desarrollo de la Geometría hiperbólica, describimos su historia y la desarrollamos, tanto de la manera axiomática, como usando los modelos. Vimos que esta geometría es similar a la Geometría de Euclides en muchos aspectos, pero se diferencia en lo concerniente al quinto postulado, lo cual tiene consecuencias importantes en la forma de medir, entre otras cosas, que la alejan de la percepción intuitiva a la que estamos acostumbrados.

A partir de Euclides, el problema del quinto postulado fue motivo de preocupación para los matemáticos y durante casi dos milenios, algunos de ellos intentaron probarlo a partir de los otros cuatro e intentaron supuestas demostraciones que adolecían de alguna inconsistencia lógica; sin embargo, no era fácil determinar cuál es el error cometido.

Otros matemáticos abordaron el problema suponiendo que el quinto postulado de Euclides era falso, trataron de llegar a alguna contradicción pero no lo lograron. Fue así que Lobachevski, Gauss y Bolyai lograron resolver el problema, al establecer que el quinto postulado era, en realidad, independiente de los demás. El momento en el que hicieron sus descubrimientos, la gente no podía asimilar las nuevas ideas ya que parecía, por la experiencia cotidiana y el sentido común, que la única geometría posible era la de Euclides. Este fue el motivo por el que Lobachevski recibió críticas ofensivas y, posiblemente, fue el motivo por el que Gauss no se atrevió a publicar sus resultados.

En el desarrollo de la Geometría de Lobachevski seguimos el orden establecido por él, pero dimos explicaciones más detalladas que las originales, intentando hacer más accesibles sus resultados. A pesar de esto, es muy difícil imaginar y concebir esos resultados porque no es posible hacer una representación concreta de ellos en la realidad, sin deformar las rectas o hacer artificios similares.

Algunos de los resultados son muy similares en ambas geometrías, como: el paralelismo es reflexivo y transitivo; o si dos mediatrices se intersecan entonces las tres mediatrices lo hacen. Sin embargo, hay otros que son completamente diferentes, como: las rectas paralelas se acercan asintóticamente; o una circunferencia que crece indefinidamente no es una recta, sino una curva llamada horociclo o línea límite con propiedades muy distintas a las rectas.

Desarrollamos la Trigonometría de Lobachevski y probamos que cuando los lados del triángulo se vuelven muy pequeños, la Trigonometría hiperbólica se aproxima a la euclidiana; algunos de esos resultados los comparamos con los respectivos resultados euclidianos y obtuvimos los equivalentes a la Ley de senos y la Ley de cosenos. Con estos resultados Lobachevski llegó a pensar que había probado la consistencia lógica de la nueva geometría; sin embargo, estrictamente hablando, esto no era prueba de ello y sólo se logró mediante el uso de los modelos. Además, vimos que en la superficie de una esfera se cumple la Trigonometría esférica, a pesar de que el quinto postulado no se cumple; y que la Trigonometría de Lobachevski es equivalente a la Trigonometría esférica en una esfera de radio imaginario.

El concepto de área cambia completamente en la Geometría hiperbólica; por ello, no existe el concepto de semejanza de triángulos. Probamos que el área de un triángulo está dado por su defecto angular y, por esto, no puede superar cierta cantidad finita, determinada por la constante del espacio que depende de la unidad de longitud.

Además de exhibir la consistencia lógica, el uso de los modelos euclidianos de la Geometría de Lobachevski, permite representarla en la realidad, lo cual ayuda a entender cómo se comportan las rectas y circunferencias en esta nueva geometría, cómo usar diversas herramientas matemáticas para su estudio y cómo poder aplicarla a otras ramas del conocimiento.

En cuanto al uso de modelos en la Geometría de Lobachevski, vimos que: el de la pseudoesfera no es muy adecuado, pues no es completo, sólo se cumple la Geometría de Lobachevski localmente; el Modelo de Klein y el del hiperboloide tienen la desventaja que los ángulos no se miden por los ángulos euclidianos. En los modelos de Poincaré, los ángulos se miden con ángulos euclidianos; por esta razón, son más intuitivos y resultan ser los más convenientes a nivel educativo.

El Modelo del semiplano resulta ser más conveniente que el del disco, cuando se requiere hacer rotaciones al infinito, pues el punto al infinito en consideración se puede mandar, mediante un movimiento hiperbólico, al punto al infinito del eje x , resultando así que las rectas por este punto se exponen como semirrectas perpendiculares al eje x . El modelo del disco es más conveniente en ocasiones que el del semiplano, cuando se requiere hacer rotaciones hiperbólicas sobre puntos dentro del plano hiperbólico, pues el punto en cuestión se puede mandar, mediante un movimiento hiperbólico, al centro del disco, resultando que las rectas que pasan por éste se exponen como rectas euclidianas.

A partir de estas observaciones, concluimos que estudiar la Geometría de Lobachevski permite entender mejor la necesidad de la formalización de las matemáticas; en particular, porque es indispensable establecer la independencia y consistencia de los axiomas de una teoría. El desarrollo axiomático de la Geometría de Lobachevski ejemplifica la forma en cómo se realiza la negación de un axioma y cómo, al seguir desarrollando la teoría, se obtienen teoremas que no se contradicen entre sí, pero que son las negaciones de los teoremas deducidos del axioma original. Sin embargo, de esta manera no es posible determinar la consistencia e independencia de los axiomas de la teoría, sino que esto sólo se consigue con los modelos.

Usar los modelos es importante pues, gracias a ellos, aparte de que permite probar la consistencia e independencia de los axiomas de una teoría, podemos dar diversas interpretaciones a conceptos que posiblemente sea difícil imaginar o concebir. En el caso de la Geometría de Lobachevski, el uso de los modelos euclidianos permite que podamos ver a la Geometría hiperbólica como parte de la Geometría euclidiana, la cual es una teoría perfectamente compatible con nuestra intuición, que sabemos usar y aplicar a las distintas ramas de la ciencia.

Referencias

- [1] Bonola Roberto, *Non euclidean geometry*, The Open Court Publishing Co., (1912).
- [2] Bromberg Shiley y Moreno Luis, *Fundamentación de la Geometría de Euclides a Hilbert*, CINVESTAV del IPN, Sección de Matemática Educativa, (1987).
- [3] Departamento de Matemática Educativa (Ed.), *Elementos de Euclides*, Tomado de Científicos Griegos, CINVESTAV del IPN, (1984).
- [4] Sommerville D. M. Y., *The elements of non-euclidean geometry*, Dover Publications.
- [5] Eves Howard, *A survey of geometry*, Allyn and Bacon, Inc., (1972).
- [6] Fernández Fernández Santiago, *Lobachevski un espíritu indomable*, Nivola, (2004).
- [7] Filloy Yagüe Eugenio, *Historia de la geometría euclideana*, CINVESTAV del IPN, Sección de Matemática Educativa, (1988).
- [8] Hilbert David, *The foundations of geometry*, The Open Court Publishing Co., (1902).
- [9] Kagán Veniamin, *Lobachevski*, Editorial Científico-Técnica, (1974).
- [10] López López Jorge Luis y Muciño-Raymundo Jesús, *Geometría hiperbólica*, (2005).
- [11] Moise Edwin E. y Downs Floyd L., *Geometría Moderna*, Addison-Wesley Iberoamericana, (1986).
- [12] Ramírez-Galarza Ana Irene y Seade Kuri José, *Introducción a la geometría avanzada*, Facultad de Ciencias, UNAM, (2002).
- [13] Robinson Horatio N., *Elements of plane and spherical trigonometry*, Ivison, Blakeman, Taylor and Co., (1880).
- [14] Smogorzhevski A. S., *Acerca de la Geometría de Lobachevski*, Mir, (1978).