UNIVERSIDAD MICHOACANA

DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

Aproximaciones a π hasta el Siglo XVII: Un Enfoque Histórico y de Análisis Numérico.

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTADA POR

LUCÍA TORRES FERNÁNDEZ

ASESOR

DR. JOSÉ GERARDO TINOCO RUIZ

MORELIA, MICHOACÁN,

JULIO, 2012

PREFACIO

Dado su significado geométrico y como número trascedente, uno de los problemas de mayor relevancia en la cultura científica es aproximar el valor de π con precisión arbitraria. En este trabajo hacemos una revisión técnico-histórica de los diferentes algoritmos empleados para el efecto; incluyendo entre otros los primeros esbozos al respecto en el papiro de Rhind, las ideas de Arquímedes utilizando el principio de exhaución inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares en un círculo, el método de Liu Hui para evaluar la razón de la circunferencia de un círculo y su diámetro y la mejora que hace Zu Chongzhi de este cálculo. Se habla someramente de los cálculos hechos por los hindúes basados en las ideas de Arquímedes. Revisaremos el trabajo de Viète, quien obtuvo una excelente aproximación haciendo uso de una técnica que él llamó apotomes. Huygens, por su parte, aplicó algunos de los conocimientos de Arquímedes inscribiendo polígonos regulares en un círculo; revisaremos las técnicas de interpolación de Wallis, las series de Gregory, Nilakantha y Leibniz con las cuales aproximaron el valor de π. Newton en el siglo XVII aplicó sus conocimientos y rápidamente pudo aproximar el valor de π con 16 lugares decimales correctos.

Se enfatizan las diferencias entre cada uno de los enfoques, su nivel de precisión reflejado en el orden de convergencia y la manera en que nos conducen a los algoritmos que empleamos hoy en día empleando nuestros modernos dispositivos electrónicos que nos permiten dar una aproximación un poco más moderna –pero no final- al valor de π.

DEDICATORIA

Este trabajo lo dedico con todo mi AMOR a mis Padres y Hermanos.

A mi querida Maestra María.

AGRADECIMIENTOS

Primeramente doy gracias a Dios por haberme permitido terminar mis estudios, darme salud y sabiduría.

A mis Padres, Mateo Torres Villalobos y Martha Fernández Magaña, por su apoyo incondicional, sacrificio y sobre todo paciencia, los quiero mucho.

A mis hermanos, Antonio, Adriana, Mateo y Martha, por estar siempre conmigo y apoyarme.

Al Dr. José Gerardo Tinoco Ruiz por su apoyo, paciencia, comprensión y por brindarme su cariño. Gracias por permitirme ser su Tesista para mi fue un honor, lo quiero mucho.

Al Dr. Francisco Javier Domínguez Mota muchas gracias por su apoyo, comprensión, revisión de tesis, gracias por todos sus consejos.

Agradezco al proyecyo SEP-PROMEP "Complejidad numérica y computacional de la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales y sus aplicaciones IV" por el apoyo económico que me brindó para poder realizar este trabajo de Tesis.

Al Dr. Armando Sepúlveda López, L.C.F.M Azucena Chavez Gonzalez, Dr. Jesús Roberto García Peréz. Por ser mis revisores ya que sin ustedes esto no sería posible. Gracias al M. C. Francisco Alarcón Ahumada por sus observaciones que me ayudaron a mejorar.

A mi Familia por apoyarme siempre, en especial a mis Tías Lupita Fernández, Lupita Torres y Chaby, por que siempre han sido un apoyo incondicional. A todos mis prim@s, ti@s, cuñadas, gracias.

A todos mis amigos de Nueva Italia que siempre han estado conmigo, July, Pat, Nancy, Faby, Laura, Moy, Chuche, Juan Víctor, Marko,Pita, gracias a todos mis amig@s.

De forma muy especial agradezco a mis amigos y compañeros tesistas del área de Matemáticas Aplicadas, Belem, Venegas, Michel, Gera, gracias por los buenos momentos que pasamos juntos,el apoyo que me brindaron y claro los ricos cafés que no podían faltar para seguir trabajando.

A todos mis amigos de Morelia, recuerdo que cuando entre a la facultad me sentía sola, pero poco a poco encontré muy buenos amigos que siempre me apoyaron y me daban fuerzas para seguir adelante, Mares, Salvador, Mary Carmen, Yami, Tulio, Armando, Adrix, Jorge, Josss, Luis, Maggy, Erika,Tea, Guillermo, Monica Beatriz,Lua, Mony, a mis amigos del Inglés, Georgina, Vane, Luz, Anais, Jorge,Pabel.

A todos mis amig@s, compañer@s, que me faltaron de mencionar una disculpa, pero todos ustedes son una parte muy importante en mi vida, al igual que todos mis profesores que fortalecieron mi formación académica.

CONTENIDO

Aproximaciones a π hasta el Siglo XVII: Un Enfoque Histórico y de Análisis Numérico.

CAPÍTULO 1

1.1 INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es hacer una breve reseña de distintas maneras que se han usado a lo largo de la historia para aproximar el valor π. Además del esbozo histórico, complementaremos nuestro ensayo con un sencillo estudio numérico que muestre la calidad de las diferentes estimaciones. Entre otras, hablaremos de cómo se obtienen las siguientes aproximaciones a π.

Matemático y/o Lugar	Año	Valor
La Biblia (1 Reyes 7, 23)	~950 a.C.	3
Papiro de Ahmes (Egipto)	1650 a.C.	3.16
Arquímedes de Siracusa	(287-212 a.C.)	entre 223/71 y 220/70
Liu Hui (China)	260	3.1416
ZU CHONGZHI	429	Entre : 3.1415926 y 3.1415927
Madhava (India)	1400	3.141592
Francois Vieta (Francia)	(1540-1603)	3.1415926536
John Wallis	1655	
Huygens	1724	Entre: 3.1415926533 y 3.1415926538
Isaac Newton	1737	3.1415926535897928

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el presente capítulo hablamos de manera somera de dos aproximaciones que se deducen de textos encontrados en la Biblia y en el Papiro de Rhind, lo que nos mostrará el nivel de precisión obtenido en la antigüedad. También haremos una breve introducción al concepto de orden de convergencia de una sucesión, el cual es una herramienta que nos permitirá calificar la bondad de cada uno de los métodos de los que hablaremos en los capítulos subsecuentes los cuales se separaron como sigue:

1.1.1 En el capítulo 2

En éste capítulo se hablará de las contribuciones de Arquímedes (287-212 a.C.) para el cálculo de π, los valores que obtiene son entre $223/71\ y\ 220/70$ es así cómo podemos observar que él hizo muy buenas aproximaciones, haciendo uso de la geometría. Él circunscribió e inscribió polígonos regulares y con ello es que logra llegar a sus ecuaciones las cuales son enunciadas posteriormente. Cabe mencionar que los trabajos de Arquímedes de aproximar π han sido utilizados por grandes matemáticos.

1.1.2 En el capítulo 3

En este capítulo se hablará de los cálculos de $\boldsymbol{\pi}$ en el Oriente y se discutirá el método de Liu Hui para evaluar la razón de la circunferencia de un círculo y su diámetro, ahora conocido como π. También examinaremos los valores para π dados por Zu Chongzhi $(429 - 500)$. Sin embargo el método usado por Zu no es extenso, pero es más exacto el método que aplicó Liu. También se estará hablando de la forma de calcular π, como calcularon dicha constante Los Hindúes, tomaron como referencia las bases que cimento Arquímedes para obtener este cálculo.

1.1.3 En el capítulo 4

En este capítulo hablaremos d elos cálculos de π en el Occidente antes del siglo XVII. Esta parte del trabajo es muy importante ya que hablaremos de Vièta y Wallis, su forma de calcular π utilizando geometría, e interpolación respectivamente, y con esto obtener aproximaciones para π.

1.1.4 En el capítulo 5

En ésta parte del trabajo halaremos de la forma de calcular π hasta la primera mitadel Siglo XVIII en el cuál se estará hablando de grandes matemáticos como son Snell, Huygens, Gregory, Leibniz, Nilakantha y las aproximacones que nos proporcionaron. También, se hablará de Isaac Newton y su aportación para encontrar esta constante. Y en el último apartado se estarán explicando las conclusiones de nuestro trabajo de Tesis.

Podemos iniciar hablando de un poco de historia de dónde es que proviene la idea de obtener una constante para calcular el área del círculo, por lo cual empezaremos diciendo lo siguiente.

Desde la antigüedad se pensó que la fórmula para calcular la longitud de la circunferencia de un círculo, sabiendo su diámetro debería ser:

$$\textbf{Circunferencia} = \textbf{diámetro} \times \boldsymbol{\pi}$$

El símbolo $\boldsymbol{\pi}$ (que por cierto fue usado por primera vez hasta 1706, por William Jones, y posteriormente popularizado por Euler) representa un valor constante, pero no se sabía el valor de éste con exactitud.

1.2 Pi en la Biblia

En la Biblia[1] (Reyes 7, 23) dice que:

"Heriam hizo una fuente circular de metal fundido, que medía cuatro metros y medio[2] de diámetro y dos metros con veinticinco centímetros de alto. Su circunferencia, medida a cordel, era de trece metros y medio."

Es decir

$$\textbf{Circunferencia} = \textbf{diámetro} \times \boldsymbol{\pi}$$
$$13.5 = 4.5 \times \boldsymbol{\pi}.$$

Lo anterior nos sugiere un valor de

$$\boldsymbol{\pi = 3.}$$

Para continuar con la investigación se hablará de El **Papiro de Ahmes** también conocido como El Papiro de Rhind**,** el cual es un documento de carácter didáctico que contiene diversos problemas matemáticos. Está redactado en escritura hierática y mide unos seis metros de longitud por 32 cm de anchura. El texto, según relata Ahmes fue escrito durante el reinado de Apofis I en el siglo XIX a. de C. y fue transcrito por él a mediados del siglo XVI a. de C.

El papiro fue encontrado en el siglo XIX, junto a un rollo de cuero, entre las ruinas de una edificación próxima al Ramesseum, y adquirido por Henry Rhind en 1858. Dos fragmentos se custodian desde 1865 en el Museo Británico de Londres, aunque no están expuestos al público; una de esas porciones relacionados con nuestro tema se muestra en la siguiente figura:

En este Papiro se encuentra el siguiente ejemplo:

[1] Tomado de http://neoparaiso.com/logo/valor-de-pi.html
[2] En la fuente de información se manejan metros.

Se quiere calcular un área de un campo de diámetro 9 khet (unidad de medida). ¿Cuál es el área?

Se toma $1/9$ del diámetro y a esto se le toma como 1, entonces nos quedan 8. Ahora multiplicamos 8 veces 8 (utilizando la forma de multiplicar de los egipcios), entonces eso mide cada lado, por lo tanto tiene 64 de área.[3]

A continuación se muestra como se realizó esta operación: "

1	9
1/9	1

esto nos deja 8

1	8
2	16
4	32
8	64

Por lo tanto el área de ese campo es $64\ setat$."

Lo anterior parece indicar que en ese Papiro, aproximaron el área de un círculo utilizando un cuadrado sustrajeron del diámetro de un círculo $(1/9)$ y eso lo tomaron como un lado del cuadrado. Esta idea para cuadrar el círculo nos conduce a la siguiente estimación

$$\pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx \left(\frac{8d}{9}\right)^2 \rightarrow \pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3.1605.$$

El valor encontrado de π es una excelente aproximación, que tiene un error aproximado de 0.0189 con el valor conocido actualmente; esto es,

$$error_{abs} = 3.16049383 - 3.14159265 = 0.01890118.$$

Por otro lado, la aproximación al error relativo es

[3] Mostramos cómo multiplicaban los egipcios a través de un ejemplo: ¿Cuánto es $9\ x\ 6$? Ellos para encontrar el valor de esta operación realizaban lo siguiente:

1	6
2	12
4	24
8	48

Entonces $9\ x\ 6 = 1 * 6 + 8 * 6 = 54$.

$$error_{rel} = \frac{error_{abs}}{\pi} \approx \frac{0.01890118}{3.14159265} = 0.00601643 = 0.601643\%.$$

Con lo cual podemos observar que efectivamente es una muy buena aproximación.

Existe una interesante conjetura de K. Vogel y O. Neugebauer de cómo se llegó a esta interpretación, usaban la mitad de un octágono regular, éste lo aproximaron al círculo y obtuvieron una muy buena aproximación de su área. Pero ésta es una conjetura muy sofisticada.

Cantor (1907) en cambio, argumenta que la manera en que lo podrían haber hecho fue construyendo paredes en forma de redes ortogonales, tales que cubran el círculo. Esta técnica nos sirve para comprender la construcción egipcia.

Primero: Si se intenta dibujar un círculo y un cuadrado intersecando este círculo tal que tengan un área similar, intuitivamente se da la siguiente figura:

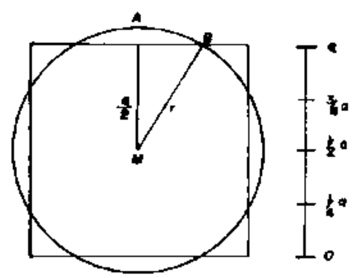


Figura 1

Entonces los puntos de intersección del círculo con un lado del cuadrado, mostrados en la figura 1 están ubicados en: $\frac{1}{4}a$ y $\frac{3}{4}a$ respectivamente. En la figura 1 podemos observar que el área del cuadrado es a^2y se toma como igual al área del círculo. Esta construcción nos proporcionaría una primera aproximación al área como se mencionó anteriormente. Si ésta no se considera satisfactoria, entonces se usa la misma técnica, pero con cuadrados de la mitad del lado, como observamos en la figura 2

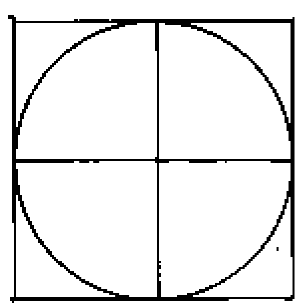


Figura 2

Si tomamos ahora $\frac{a}{4}$ como lado de los subcuadrados, entonces vemos que una aproximación al área del cuadrado circunscrito es

$$\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{7}{8}a^2.$$

Si comparamos con la aproximcación al área $\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ concluimos que la aproximación a π es $\frac{7}{2}$.

Si esto no es suficiente así que se continúa el proceso de subdividir los cuadrados.

Segundo: Utilizando esta técnica vemos la posibilidad de obtener una conexión entre $a/2\ y\ r$ en la figura 1. Para encontrar el valor de r aplicamos el Teorema de Pitágoras (figura 3).

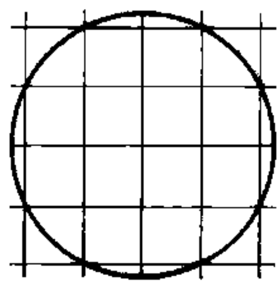


Figura 3

Tenemos que

$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 \rightarrow r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}} = \frac{a}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5}{4}} = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{5}\right) \rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{5}}r.$$

Entonces el valor obtenido por los egipcios $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{8}\boldsymbol{d}}{\mathbf{9}}$ no es del todo correcto**,** puesto que después de realizar estas operaciones encontramos que el valor $\boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{2}\boldsymbol{d}}{\sqrt{\mathbf{5}}}$ es una mejor estimación**,** pero el error relativo ε es menor que 0,62 por ciento y apenas se nota e incluso para un diámetro grande d. Esta explicación de la construcción egipcia asume dos errores: una determinación errónea del cuadrado y un cálculo inexacto de MB. Sin embargo, los errores no sólo son muy pequeñas, también disminuyen entre sí, el área del círculo que pasa por B (figura 1) es $\pi\left(\frac{\sqrt{5}a}{4}\right)^2 = (0.99083\ a)^2 < a^2$, el cual es ligeramente más pequeño. Pero con $\frac{8}{9}$ en lugar de $\frac{2}{\sqrt{5}}$, el resultado es más preciso $\pi\left(\frac{9a}{16}\right)^2 = (0.99701\ a)^2$.

El hecho de que no tenemos ningún registro del menor indicio de cómo explicar la aproximación de Egipto $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ puede tener muchas razones, pero si la construcción fue considerada como muy simple, no se esperaría encontrar ninguna explicación por escrito.

1.2.1 Análisis Numérico y Orden de convergencia.

El Análisis numérico[4] es una rama de las matemáticas cuyos límites no son del todo precisos. De una forma rigurosa, se puede definir como la disciplina ocupada de describir, analizar y crear algoritmos numéricos que nos permitan resolver problemas matemáticos, en los que estén involucradas cantidades numéricas, con una precisión determinada, es decir se obtienen aproximaciones.

Desde esta perspectiva, el análisis numérico proporcionará todo el andamiaje necesario para llevar a cabo todos los procedimientos matemáticos existentes en base a algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos empleando números.

Un concepto fundamental en Análisis Numérico es el de error de redondeo. Éste aparece como consecuencia de la naturaleza de las computadoras que solo pueden operar con números representados de forma finita.

El valor de π puede calcularse numéricamente pero no de manera exacta. Ya que es un número irracional y no se puede expresar con un número finito de dígitos o de una manera periódica . Eso quiere decir que, por más cifras decimales que logremos calcular correctamente, siempre habrá más cifras decimales que desconocemos. En la actualidad se conocen miles de cifras decimales del valor de π.

La mayoría de las aproximaciones que vamos a estudiar están dadas en términos de sucesiones numéricas. Nos interesa saber la velocidad con que éstas se aproximan al valor de π. El análisis numérico nos da una manera de de calcular esta velocidad mediante el uso del llamado orden de convergencia: entre mayor sea éste orden, más rápidamente obtenemos buenas aproximaciones.

[4] Tomado de http://www.mitecnologico.com/Main/AnalisisNumerico

Para nuestros fines el orden de convergencia se calculará de la siguiente manera:

Proponemos que

$e_n = \frac{A}{n^\alpha} = A\left(\frac{1}{n}\right)^\alpha$, α Orden de convergencia,

$e_n =$ error del n-término.

A es el área de la circunferencia

Sustituimos y vemos que

$$\frac{e_n}{e_{2n}} = \frac{A(\frac{1}{n^\alpha})}{A\frac{1}{(2n^\alpha)}} = \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{(2n)^\alpha}} = 2^\alpha.$$

De donde

$$\alpha = \log_2\left(\frac{e_n}{e_{2n}}\right).$$

Si $\alpha = 1$ estamos hablando de convergencia lineal, si α es > 1 se trata de convergencia superlineal de las cuales la más común es la convergencia cuadrática es decir $\alpha = 2$.

CAPÍTULO 2

2.1 ARQUÍMEDES: LA MEDIDA DEL CÍRCULO

En el panorama de la Ciencia griega del siglo III a.C. destaca especialmente la figura de Arquímedes[5] (287-212). Sus aportaciones fundamentales, a la geometría, aritmética, mecánica e hidrostática, le confieren una importancia singular en la Historia de la Ciencia. Junto con Euclides (c.300) y Apolonio (270-190), constituyen la llamada Edad de Oro de la Matemática griega.

Manteniendo el *rigor euclídeo*, Arquímedes imprimió a sus obras una clara intención de calcular y medir. Quizás ello se debiera a sus orígenes -era hijo de Fidias el astrónomo- y a los signos de su tiempo -fue contemporáneo de Aristarco de Samos, y de Eratóstenes (276-194), astrónomo y bibliotecario de Alejandría, autor de *Sobre la medida de la Tierra*, en el que se nos lega su famoso cálculo del radio de la Tierra. En ese contexto, escribió Arquímedes su libro sobre la *Medida del Círculo*.

En el Teorema I de esa obra, Arquímedes nos ofrece una bella "cuadratura" del círculo con su método de exhaución; y en el Teorema III obtiene la famosísima aproximación del número π la fracción $223/71$. La enorme influencia que la obra arquimediana ejerció sobre la comunidad científica a lo largo de la Edad Media árabe y latina, así como en el Renacimiento italiano, tuvo en la *Medida del círculo* el representante más eficaz, tanto por la fascinación de lo circular, como por la sencillez de los enunciados de sus teoremas y el magistral desarrollo de sus demostraciones.

De todos los tratados arquimedianos que se conservan, este es uno de los más conocidos. No va precedido de un prólogo y consta de tres teoremas. Los estudiosos de la obra de Arquímedes están mayoritariamente de acuerdo en que se trata de un fragmento de una obra más extensa. En cualquier caso, junto a *Sobre la esfera y el cilindro*, es la obra más citada en la antigüedad y una de las cinco arquimedianas que llegaron a las manos de Eutocio, un comentarista del siglo VI. Fue conocida y estudiada por los matemáticos medievales, árabes y latinos. En sus portaciones nos menciona tres proposiciones, de las cuales solo se analizaran la proposición 1 la cual se incluye por lo interesante de su argumento y la proposición 3, ya que la proposición 2 no tiene mucha relevancia no se enuncia.

---

[5] Los datos biográficos fueron tomados de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/fundoro/web_fcohc/002_proyectos/bachillerato/matematicas/Arquimedes_Circulo.html

PROPOSICIÓN 1

El área de cualquier círculo es igual a un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia, del círculo.

Demostración tenemos el cuadrado $ABCD$ inscrito en un círculo dado, sea K el triángulo en cuestión.

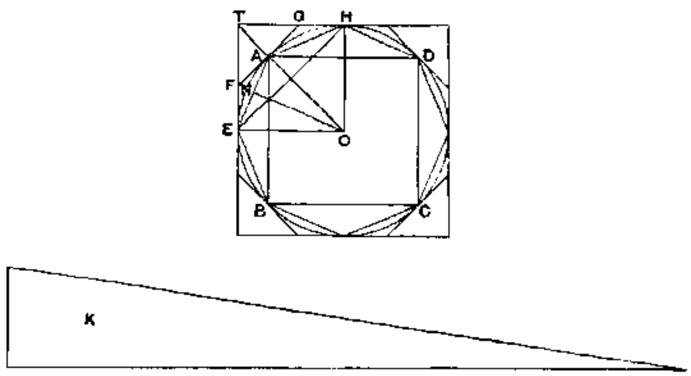


Figura 4

Entonces si el círculo no es igual a K en área, tiene que ser más grande o más pequeño que éste. Aquí lo que busca Arquímedes es hacer una doble reducción al absurdo.

a) Si es posible que el área del círculo sea más grande que el área de K.

Se inscribe un cuadrado $ABCD$en el círculo, bisecamos los arcos AB, BC, CD, DA (ver figura 4), así que se bisecan cada uno de los lados en su punto medio, y éstos son los lados de un polígono regular, estos puntos son los que subtienden la división de los segmentos continuamos esta subdivisión hasta que la diferencia del área del círculo y el polígono sea menor entre ellos.

$$\text{área del círculo} - P_{2n} < \text{área del círculo} - K \ \rightarrow K < P_{2n},$$

donde P_{2n} es el área del polígono de 2^n lados.

$$P_{2n} = (2^n)\ \left[\frac{\overline{AE}.\overline{ON}}{2}\right] = 2^n\ \overline{AE}\ .\frac{\overline{ON}}{2} = (\text{perímetro del polígono})\frac{\overline{ON}}{2} < (\text{perímetro del polígono})\ \frac{r}{2}$$

$$< (\text{perímetro del círculo})\frac{r}{2} = C\,\frac{r}{2} = K.$$

Observando la ecuación anterior llegamos a una contradicción, ya que no es consistente con nuestra hipótesis.

b) Si es posible que el área del círculo sea más pequeña que el área de K.

Ahora circunscribe un cuadrado, y marca dos lados adyacentes que tocan el círculo en E, H (ver figura 4) y se juntan en T. Biseca los arcos entre los puntos adyacentes de contacto y dibuja las tangentes en los puntos de bisección. Tomamos al punto medio del arco EH y FAG la tangente en A. Entonces el ángulo TAG es ángulo recto.

Por lo tanto

$$TG > GA$$

$$TG = GH.$$

Encontramos que el triángulo FTG es más grande que la mitad del área de $TEAH$.

De manera semejante, si el arco AH es bisecado y se traza la tangente en el punto de bisección, ésta cortará del área GAH más de la mitad.

Si continuamos el proceso, obtendremos un polígono circunscrito tal que los espacios interceptados entre él y el círculo son menores que el exceso de K sobre el área del círculo y podemos ver que al circunscribir el polígono nos muestra los espacios interceptados entre el círculo y el polígono, vemos que el exceso de ellos es menor que K sobre el área del círculo.

Entonces

$$P_{2n} - \text{área del círculo} < K - \text{área del círculo} \rightarrow P_{2n} < K.$$

Ahora ya que la perpendicular desde O a cualquiera de los lados del polígono es igual al radio del círculo, mientras el perímetro del polígono es más grande que la circunferencia del círculo, encontramos que el área del polígono es más grande que el triángulo K; lo cual es imposible, por lo que se dijo anteriormente.

Por lo tanto el área del círculo no es menor que K. Entonces el área del círculo no debe ser más grande ni más pequeña que K, sino iguales. Justo lo que quería demostrar Arquímedes.

En su proposición 3 Arquímedes nos proporciona una muy buena aproximación a π.

PROPOSICIÓN 3

La razón de la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro es más chico que $3\frac{1}{7}$ pero más grande que $3\frac{10}{71}$.

Esto es que $3\frac{1}{7} < \pi < 3\frac{10}{71}$. Lo que a continuación se da son cálculos de Arquímedes pero **lo que se encuentra en corchetes es lo que se cree que hizo**, porque no se tienen notas acerca de eso. Aquí se observa que el usa una aproximación de $\sqrt{3}$ sin ninguna explicación de cómo la encontró, y muestra la manera de aproximar las raíces de cuadrados con una gran cantidad de números.

I) Sea AB el diámetro de cualquier círculo, O es el centro, AC la tangente en A; y sea el ángulo AOC $\frac{1}{3}$ de un ángulo recto. Entonces:

$$OA:AC\left[=\sqrt{3}:1\right] > 265:153 \quad y \quad OC:CA[=2:1] = 306:153.$$

Primero, toma OD que biseca al ángulo AOC y que corta AC en D (figura 5). Ahora $CO:OA = CD:DA$, esta relación es cierta por el **Teorema de la Bisectriz:** él cual dice que en un triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz del ángulo interno opuesto. Y es equivalente con lo siguiente:

Así que tenemos

$$[(CO+OA):OA \;=\; CA:DA], \qquad (CO+\;OA):CA = OA:AD.$$

Por lo tanto

$$OA:AC\left[=\sqrt{3}:1\right] > 265:153 \;+\; OC:CA[=2:1] = 306:153$$

$$OA:AD > 571:153.$$

Así que

$$OD^2:AD^2[=(OA^2+AD^2):AD^2 > (571^2+153^2):153^2] = 349450:23409,$$

si de la relación anterior se toma la raíz cuadrada, se obtiene:

$$OD:DA > 591\frac{1}{8}:153.$$

Podemos observar en la figura el procedimiento del cual se ha estado hablando.

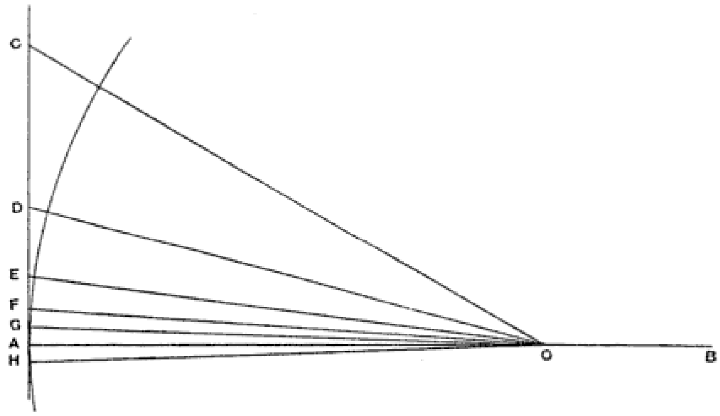


Figura 5

Segundo, sea OE que biseca el ángulo AOD(figura 5), y que toca AD en E.

$$[\text{Entonces } DO\!:OA = DE\!:EA, \text{ así que } (DO+OA)\!:DA = OA\!:AE].$$

Por lo tanto

$$OA\!:AE \left[> \left(591\frac{1}{8}+571\right)\!:153\right] > 1162\frac{1}{8}\!:153.$$

[Encontramos que

$$OE^2\!:EA^2 > \left\{\left(1162\frac{1}{8}\right)^2+153^2\right\}\!:153^2 > \left(135053\frac{33}{64}+23409\right)\!:23409$$

$$> 1373943\tfrac{33}{64}\!:23409].$$

Así que

$$OE\!:EA > 1172\frac{1}{8}\,:\,153.$$

Tercero, tomamos OF que biseca el ángulo AOE y toca AE en F (figura 5). Así

$$OA\!:AF\ \left[> \left(1162\frac{1}{8}+1172\frac{1}{8}\right)\!:153\right] > 2334\frac{1}{4}\!:153.$$

[Por lo tanto

$$OF^2 + FA^2 > \left\{\left(2334\tfrac{1}{4}\right)^2 + 153^2\right\} : 153^2 > 5472132\tfrac{1}{16} : 23409].$$

Así que si sacamos sus raíces cuadradas obtenemos:

$$OF : FA > 2339\frac{1}{4} : 153.$$

Cuarto, tomamos OG que biseca al ángulo AOF, y toca AF en G (figura 5). Se obtiene que

$OA : AG$[$> \left(2343\tfrac{1}{4} + 2339\tfrac{1}{4}\right) : 153$], (por las ecuaciones anteriores) $> 4673\tfrac{1}{2} : 153$.

Ahora, el ángulo AOC, el cual es $\frac{1}{3}$ de un ángulo recto, ha sido bisecado cuatro veces, y se encuentra que

$$< AOG = \tfrac{1}{48} \text{ (ángulo recto)}.$$

Tomamos el ángulo AOH en el otro lado de OA igual al ángulo AOG.

Entonces

$$< GOH = \tfrac{1}{24} \text{ (ángulo recto)}.$$

Así que GH es un lado del polígono regular de 96 lados circunscrito en el círculo.

Como

$$OA : AG > 4673\frac{1}{2} : 153,$$

mientras que

$$AB = 2\,OA, GH = 2\,AG,$$

encontramos que

AB:(Perímetro del polígono de 96 lados)$\left[> 4673\tfrac{1}{2} : 153\ x\ 96\right] > 4673\tfrac{1}{2} : 14688.$

Pero,

$$\frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}\left[< 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}}\right] < 3\frac{1}{7}.$$

Por lo tanto la circunferencia del círculo es a fortiori menor que $3\frac{1}{7}$ veces el diámetro AB.

II) Ahora tomamos AB como el diámetro de un círculo (figura 6), y AC que toca el círculo en C, el ángulo CAB igual a $\frac{1}{3}$ del ángulo recto. Tracemos BC.

Primero, tomamos AD que biseca el ángulo BAC y de tal forma que toca BC en d y el círculo en D(figura 6) trazamos BD.

Entonces $< BAD = < dAC = < dBD$, y los ángulos en D, C son ángulos rectos.

Encontramos que los triángulos ADB, $[ACd]$, BDd son semejantes. Esto lo podemos ver en la figura 6.

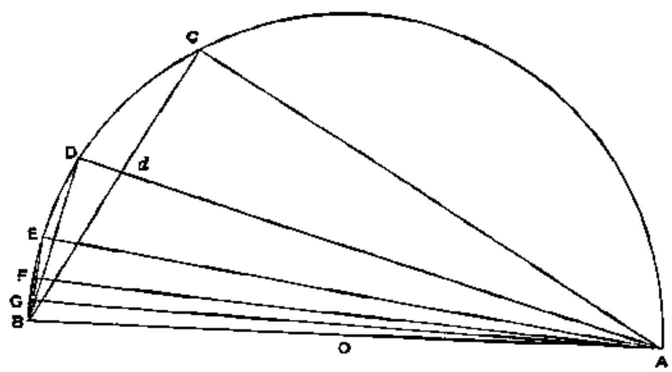


Figura 6

Por lo tanto

$$AD:DB = DB:Dd[= AC:Cd] = AB:Bd = (AB + AC):(Bd + Cd) = (AB + AC):BC$$

Ó

$$(BA + AC):BC = AD:DB.$$

[Pero, $AC:CB < 1351:780$, mientras $BA:BC = 2:1 = 1560:780$].

Por consiguiente

$$AD:DB < 2911:780.$$

[También

$$AB^2:BD^2 < (2911^2 + 780^2):780^2$$

$$< 9082321:608400].$$

Por lo tanto

$$AB:BD < 3013\frac{3}{4}:780.$$

Segundo, tomamos AE que biseca el ángulo BAD, y toca al círculo en E (figura 6) y unimos BE. Entonces probamos de la misma forma anterior, que

$AE:EB[= BA + AD:BD < \left(3013\frac{3}{4} + 2911\right):780]$, (se obtiene a partir de las ecuaciones anteriores)

$$< 5924\frac{3}{4}:780 < 5924\frac{3}{4} \times \frac{4}{13}:780 \times \frac{4}{13} < 1823:240.$$

[Por lo tanto $AB^2:BE^2 < (1823^2 + 240^2):240^2 < 3380929:57600$].

Así que

$$AB:BE < 1838\frac{9}{11}:240.$$

Tercero, tomamos AF que biseca el ángulo BAE, y toca al círculo en F (figura 6). Así que

$AF:FB\ [= BA + AE : BE < 3661\frac{9}{11}:240,]$(se obtiene a partir de las ecuaciones anteriores)

$$< 3661\frac{9}{11} \times \frac{11}{40}:240 \times \frac{11}{40} < 1007:66.$$

[Se sigue que

$$AB^2:BF^2 < (1007^2 + 66^2):66^2 < 1018405:4356].$$

Por lo tanto

$$AB: BF < 1009\frac{1}{6} : 66.$$

Cuarto, tomamos AG que biseca el ángulo BAF y toca al círculo en G (figura 6). Entonces

$AG: GB[= BA + AF: BF] < 2016\frac{1}{6}: 66$ (por las ecuaciones anteriores).

[Y

$$AB^2: BG^2 < \{(2016)^2 + 66^2\}: 66^2 < 4069284\frac{1}{36} : 4356].$$

Por lo tanto

$$AB: BG < 2017\frac{1}{4}: 66,$$

donde

$$BG: AB > 66: 2017\frac{1}{4}.$$

[Ahora el ángulo BAG que es el resultado de la bisección del cuarto ángulo BAC, ó $\frac{1}{3}$ del ángulo recto, es igual a $1/48$ del ángulo recto.

Así que el ángulo subtendido por BG en el centro es $\frac{1}{24}$ (ángulo recto)].

Por lo tanto BG es un lado del polígono regular inscrito de 96 lados.

Tenemos, entonces que

$$BG: AB > 66: 2017\frac{1}{4}$$

(Perímetro del polígono): $AB\left[> 96 \times 66: 2017\frac{1}{4}\right] > 6336: 2017\frac{1}{4}.$

Y

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

Por lo tanto la circunferencia de un círculo es más grande que $3\frac{10}{71}$ del diámetro de AB.

Por lo tanto la razón de la circunferencia al diámetro AB es:

$$< \mathbf{3\frac{1}{7}} \textbf{ pero} > \mathbf{3\frac{10}{71}}$$

Como se ha descrito anteriormente sabemos que el área de un círculo es proporcional al cuadrado de su radio. $A = \pi_1 r^2$, para alguna constante π_1 . Similarmente la proporcionalidad entre la circunferencia de un círculo y su diámetro $C = \pi_2 d$ para alguna constante π_2. Donde veremos que $\pi_1 = \pi_2 = \pi$. En la *medición del círculo,* Arquímedes muestra que estas dos constantes son la misma, usando su resultado $A = \frac{1}{2}rC$ ya que entonces $A = \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}2r\pi_2 r = \pi_2 r^2 = \pi_1 r^2$.

Ahora mostraremos cómo el método de Arquímedes de inscribir y circunscribir polígonos nos puede llevar a obtener buenas aproximaciones a π. Arquímedes inicia con hexágonos regulares inscritos y circunscritos sobre el círculo de radio 1. Sucesivamente duplica el número de lados de estos polígonos. Para esto consideramos la figura 7, donde t_n denota la mitad del lado del polígono circunscrito de n lados, s_n denota el lado del polígono inscrito de n lados, con $r = 1$:

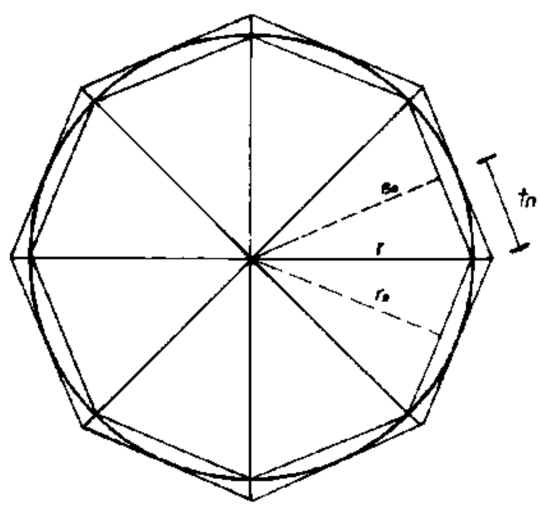


Figura 7

Iniciemos con los polígonos circunscritos. La relación entre t_n y t_{2n} se indica en la figura 8, donde O es el centro del círculo, y OD biseca al ángulo AOC.

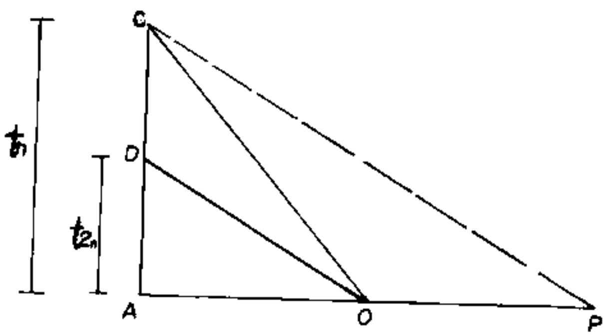


Figura 8

Si CP es paralela a OD, es fácil de ver que $OP = CO$. Ya que los triángulos ADO y ACP son semejantes, encontramos que

$$\frac{AD}{AO} = \frac{AC}{(AO+OP)} = \frac{AC}{(AO+OC)}$$ (por ser triángulo isósceles).

De aquí obtenemos que

$$t_{2n} = \frac{t_n}{1+\sqrt{1+t_n^2}}$$

Esta es la relación de recurrencia a la que llegó Arquímedes, para utilizarla iniciaremos con un triángulo equilátero y una circunferencia de radio 1, tenemos la figura 9 y ahí se observan cómo se encontraron las relaciones que se muestran a continuación

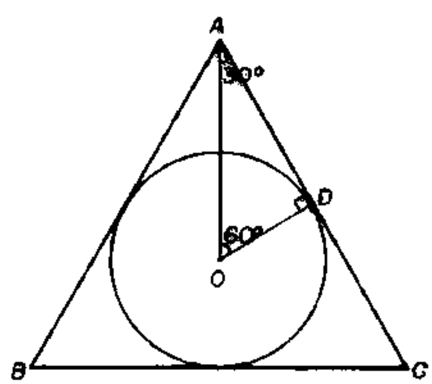


Figura 9

$$\frac{AD}{DO} = \tan 60 \rightarrow AD = \tan 60 = \sqrt{3}.$$

Pero como se calculó la mitad de un lado tenemos que el lado buscado es $AC = 2\sqrt{3}$.

Ahora consideramos el polígono inscrito. Si s_n denota un lado del polígono regular inscrito con n lados, la relación entre s_n y s_{2n} se indica en la figura 10

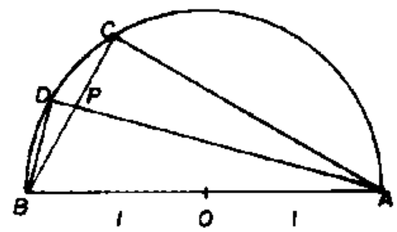


Figura 10

donde $s_n = BC$ y $s_{2n} = BD$, y AD biseca al ángulo BAC. Es fácil checar que los triángulos $ABD, BPD\ \ y\ \ APC$ son semejantes. Entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BP}{BD}\ \ y\ \ \frac{AC}{AD} = \frac{PC}{BD}.$$

Así que

$$\frac{AB + AC}{AD} = \frac{BP + PC}{BD} = \frac{BC}{BD}$$

ó

$$\frac{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}{\sqrt{4 - s_{2n}^2}} = \frac{s_n}{s_{2n}}.$$

Despejando obtenemos que:

$$s_{2n}^2 = \frac{s_n^2}{2 + \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

De igual manera calculamos para el polígono inscrito de 3 lados (figura 11), en un triángulo equilátero y una circunferencia de radio 1 , a partir de ésta se obtienen las siguientes relaciones

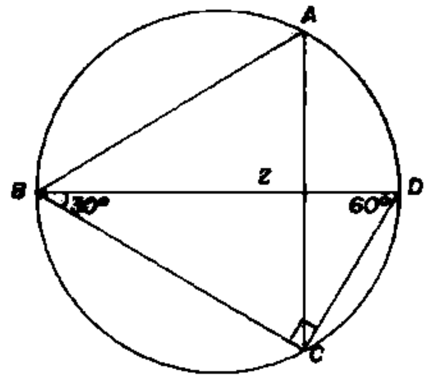


Figura 11

$$\frac{BC}{BD} = sen\ 60\ \rightarrow BC = BD(sen\ 60) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}.$$

Con la formula encontrada por Arquímedes y los valores obtenidos de nuestro polígono base (3 lados) podemos calcular nuestra tabla de recursividad (tabla 1):

N	t_n	p_n	s_n	$q_n/2$	p_n-$q_n/2$	***Cociente de errores***	***Orden empírico***
3	1.732050808	5.19615242	1.73205081	2.59807621	2.59807621		
6	0.577350269	3.46410162	1	3	0.46410162	5.598076211	2.484931128
12	0.267949192	3.21539031	0.51763809	3.10582854	0.10956177	4.235981436	2.082696267
24	0.131652498	3.15965994	0.26105238	3.13262861	0.02703133	4.053140291	2.019040112
48	0.065543463	3.14608622	0.13080626	3.1393502	0.00673601	4.012957292	2.004665802
96	0.03273661	3.1427146	0.06543817	3.14103195	0.00168265	4.003219368	2.001160674
192	0.016363922	3.14187305	0.03272346	3.14145247	0.00042058	4.000803603	2.000289809
384	0.008181413	3.14166275	0.01636228	3.14155761	0.00010514	4.000200823	2.00007243
768	0.004090638	3.14161018	0.00818121	3.14158389	2.6284E-05	4.000050201	2.000018106
1536	0.002045311	3.14159703	0.00409061	3.14159046	6.5711E-06	4.000012548	2.000004526
3072	0.001022654	3.14159375	0.00204531	3.14159211	1.6428E-06	4.000003131	2.000001129
6144	0.000511327	3.14159293	0.00102265	3.14159252	4.1069E-07	4.00000077	2.000000278
12288	0.000255663	3.14159272	0.00051133	3.14159262	1.0267E-07	4.000000078	2.000000028
24576	0.000127832	3.14159267	0.00025566	3.14159265	2.5668E-08	3.999999654	1.999999875
49152	6.39159E-05	3.14159266	0.00012783	3.14159265	6.4171E-09	3.999997855	1.999999226

Tabla 1

Como podemos observar efectivamente tenemos una excelente aproximación de π. De aquí podemos decir que el cociente de errores se aproxima a 4:

$$\frac{e_n}{e_{2n}} \approx 4.$$

Donde

e_n= error con polígonos inscritos.

En la tabla 1:

p_n = mitad del lado del perímetro del polígono circunscrito de n lados.

$\frac{q_n}{2}$ = mitad del perímetro del polígono inscrito de n lados.

Ambos deben de ser aproximaciones a π pues $r = 1$, y, veamos el hecho de que

$$e_n \leq P_n - \frac{q_n}{2},$$

y

$$\alpha = \log_2\left(\frac{e_n}{e_{2n}}\right), \text{ es el orden empírico.}$$

En nuestro caso $\alpha \approx 2$, esto nos da un orden cuadrático. Si Iniciamos inscribiendo un polígono de 4 lados (figura 12) se puede ver que

$$\frac{CD}{CB} = \sin 45 \ \rightarrow CD = \frac{1}{\sqrt{2}}(2) \rightarrow CD = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

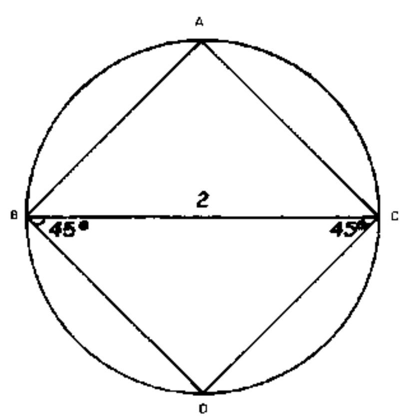


Figura 12

El valor obtenido es la medida del lado que estábamos buscando para poder establecer la relación de recursividad.

Ahora tomemos el polígono de 4 lados que circunscribe la circunferencia, se puede ver claramente en la figura 13 que el lado que buscamos mide 2, ya que éste es del tamaño del diámetro de la circunferencia.

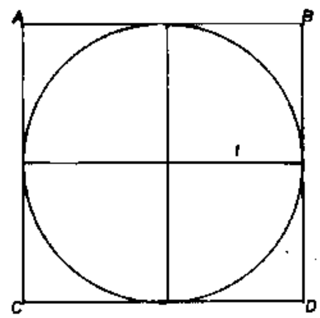


Figura 13

Por tanto

$$t_4 = 1 \ \ y \ \ s_4 = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

A partir de la recursividad obtenida por Arquimedes nos proporciona la tabla 2:

N	t_n	p_n	s_n	$q_n/2$	p_n-$q_n/2$	*Cociente de errores*	*Orden empírico*
4	1	4	1.414213562	2.82842712	1.17157288		
8	0.41421356	3.3137085	0.765366865	3.06146746	0.25224104	4.64465606	2.215571768
16	0.19891237	3.18259788	0.390180644	3.12144515	0.06115273	4.124771818	2.044314312
32	0.0984914	3.15172491	0.196034281	3.13654849	0.01517642	4.029457433	2.010585593
64	0.04912685	3.14411839	0.098135349	3.14033116	0.00378723	4.007262229	2.002616921
128	0.02454862	3.14222363	0.049082457	3.14127725	0.00094638	4.001809267	2.000652408
256	0.01227246	3.14175037	0.024543077	3.1415138	0.00023657	4.000451925	2.000162988
512	0.006136	3.14163208	0.012271769	3.14157294	5.914E-05	4.000112957	2.00004074
1024	0.00306797	3.14160251	0.006135914	3.14158773	1.4785E-05	4.000028237	2.000010184
2048	0.00153398	3.14159512	0.00306796	3.14159142	3.6962E-06	4.000007058	2.000002546
4096	0.00076699	3.14159327	0.001533981	3.14159235	9.2406E-07	4.000001762	2.000000636
8192	0.0003835	3.14159281	0.00076699	3.14159258	2.3101E-07	4.000000433	2.000000156
16384	0.00019175	3.14159269	0.000383495	3.14159263	5.7754E-08	4.000000077	2.000000028
32768	9.5874E-05	3.14159266	0.000191748	3.14159265	1.4438E-08	3.999999908	1.999999967
65536	4.7937E-05	3.14159266	9.58738E-05	3.14159265	3.6096E-09	3.999998893	1.999999601
131072	2.3968E-05	3.14159265	4.79369E-05	3.14159265	9.024E-10	3.999998032	1.99999929
262144	1.1984E-05	3.14159265	2.39684E-05	3.14159265	2.256E-10	3.999986221	1.99999503
524288	5.9921E-06	3.14159265	1.19842E-05	3.14159265	5.6401E-11	3.999976379	1.99999148
1048576	2.9961E-06	3.14159265	5.99211E-06	3.14159265	1.41E-11	3.999968505	1.999988641
2097152	1.498E-06	3.14159265	2.99606E-06	3.14159265	3.5256E-12	3.999370198	1.999772829

Tabla 2

2.2 EL ANÁLISIS NUMÉRICO DE ARQUÍMEDES

Siguiendo esta línea de trabajo, describiremos a continuación otros resultados obtenidos por Arquímedes.

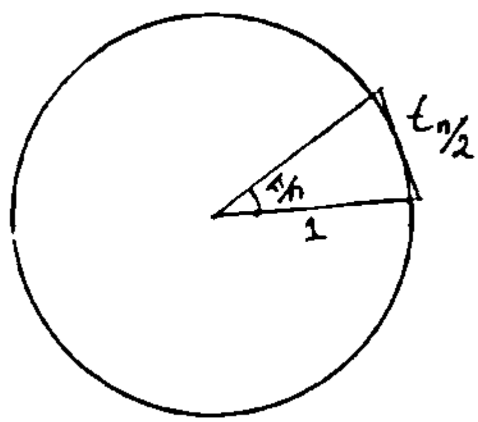
De manera particular, deduciremos una relación de recurrencia que nos da excelentes aproximaciones, denotando por p_N y P_N la mitad de las longitudes del perímetro del polígono regular inscrito y circunscrito en el círculo unitario, se obtiene que

$$p_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \qquad P_3 = 3\sqrt{3},\ p_4 = 2\sqrt{2}, P_4 = 4.$$

Es geométricamente obvio que las secuencias $\{p_N\}$ y $\{P_N\}$ son crecientes o decrecientes respectivamente, con un límite en común π. Por cuestiones de simplicidad utilizaremos nuestras notaciones de trigonometría para poder llegar a las relaciones de recurrencia que se utilizan para este cálculo.

Vamos a tomar

$$t_N = \frac{P_N}{2N} \ \& \ s_N = \frac{p_N}{N} \rightarrow t_N = \tan\frac{\pi}{N} \ \& \ s_N = 2\, sen\frac{\pi}{N}.$$



Así que

$$P_N = 2N\ t_N = 2N\tan\frac{\pi}{N}.$$

Ahora

$$\frac{P_{2N}}{P_N} = \frac{4N \tan\frac{\pi}{2N}}{2N\ tan\frac{\pi}{N}} = \frac{2\tan\frac{\pi}{2N}}{\frac{2\tan\frac{\pi}{2N}}{1-\tan^2\frac{\pi}{2N}}}.$$

De aquí se obtiene que

$$\frac{P_{2N}}{P_N} = 1-\tan^2\frac{\pi}{2N}.$$

Por otra parte tenemos que

$$\frac{P_{2N}}{p_N} = \frac{4N\tan\frac{\pi}{2N}}{2N\sin\frac{\pi}{N}} = \frac{2\tan\frac{\pi}{2N}}{\sin\frac{\pi}{2N}\,cos\,\frac{2\pi}{N}} = \frac{1}{\cos^2\frac{2\pi}{N}}$$

entonces si sumamos

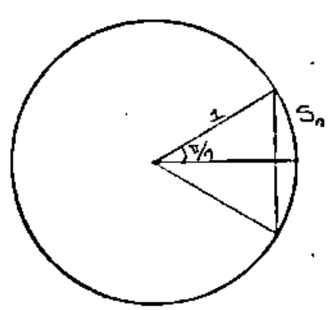
$$\frac{P_{2N}}{P_N} + \frac{P_{2N}}{p_N} = 1-\tan^2+\sec^2 = 1-\tan^2+1+\tan^2 = 2.$$

Si tomamos el recíproco, obtenemos la siguiente relación de recurrencia:

$\frac{1}{P_{2N}} = \frac{1}{2}\left({}^{1}/_{P_N} + {}^{1}/_{p_n}\right)$ →media armónica.

Ahora, queremos obtener la relación de recurrencia para los polígonos inscritos, para esto vemos que

$$P_N p_N = 4N\tan\frac{\pi}{2N} * 2N\sin\frac{\pi}{N} = 8N^2\tan\frac{\pi}{2N} * 2\sin\frac{\pi}{2N}\cos\frac{\pi}{2N} = 16N^2\sin^2\frac{\pi}{2N}.$$



Tomando raíz cuadrada obtenemos

$$\sqrt{P_N p_N} = 4N \sin \frac{\pi}{2N}$$

entonces, se obtiene

$$p_{2N} = \sqrt{P_{2N} p_N} \rightarrow \text{media geométrica.}$$

Si iniciamos con $N = 3$ y aplicamos las anteriores relaciones de recurrencia, se obtiene la tabla 3:

N	p_N	P_N	$p_N - P_N$	Cociente de errores	Orden empírico
3	2.598076211	5.19615242	2.598076211		
6	3	3.46410162	0.464101615	5.598076211	2.484931128
12	3.105828541	3.21539031	0.109561768	4.235981436	2.082696267
24	3.132628613	3.15965994	0.027031329	4.053140291	2.019040112
48	3.139350203	3.14608622	0.006736012	4.012957292	2.004665802
96	3.141031951	3.1427146	0.001682649	4.003219368	2.001160674
192	3.141452472	3.14187305	0.000420578	4.000803603	2.000289809
384	3.141557608	3.14166275	0.000105139	4.000200823	2.00007243
768	3.141583892	3.14161018	2.62845E-05	4.000050201	2.000018106
1536	3.141590463	3.14159703	6.57109E-06	4.00001255	2.000004526
3072	3.141592106	3.14159375	1.64277E-06	4.000003137	2.000001131
6144	3.141592517	3.14159293	4.10693E-07	4.000000788	2.000000284
12288	3.141592619	3.14159272	1.02673E-07	4.00000019	2.000000069
24576	3.141592645	3.14159267	2.56683E-08	4.000000069	2.000000025
49152	3.141592651	3.14159266	6.41708E-09	3.999999792	1.999999925
98304	3.141592653	3.14159265	1.60427E-09	4.000000277	2.0000001
196608	3.141592653	3.14159265	4.01068E-10	3.999996678	1.999998802
393216	3.141592654	3.14159265	1.00267E-10	4	2
786432	3.141592654	3.14159265	2.50666E-11	4.000017716	2.00000639
1572864	3.141592654	3.14159265	6.26699E-12	3.999787415	1.999923324

Tabla 3

Si utilizáramos las técnicas más recientes de desarrollo en serie de MacLaurin aplicadas a la Geometría de Arquímedes, obtenemos mejores aproximaciones.

Partiendo de:

$$p_N = N \sin\left({}^{\pi}/_{N}\right) \;\; y \;\; P_N = N \tan\left({}^{\pi}/_{N}\right).$$

La serie correspondiente a p_N es

$$p_N = N\left[\frac{\pi}{N} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{N}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{N}\right)^5 - \ \dots\right].$$

Si truncamos la serie infinita y nos quedamos sólo con los dos primeros términos, obtendremos la aproximación

$$p_N = \pi - \frac{1}{6}\frac{\pi^3}{N^2}.$$

De igual manera, el desarrollo de MacLaurin de la tangente nos lleva a obtener

$$P_N = N\left[\frac{\pi}{N} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{N}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{N}\right)^5 + \ \dots\right] \to P_N \approx \pi + \frac{1}{3}\frac{\pi^3}{N^2}.$$

Calculemos unas cuantas aproximaciones para tener una idea de cómo se comporta el error (tabla 4):

N	p_N	P_N	u_N	$p_N - P_N$	Cociente de errores	Orden empírico
3	2.567402345	4.28997327	3.330493694	1.722570927		
6	2.998045076	3.42868781	3.153398969	0.430642732	4	2
12	3.105705759	3.21336644	3.142330548	0.107660683	4	2
24	3.13262093	3.1595361	3.141638772	0.026915171	4	2
48	3.139349723	3.14607852	3.141595536	0.006728793	4	2
96	3.141031921	3.14271412	3.141592834	0.001682198	4	2
192	3.14145247	3.14187302	3.141592665	0.00042055	4	2
384	3.141557608	3.14166275	3.141592654	0.000105137	4	2
768	3.141583892	3.14161018	3.141592654	2.62843E-05	4	2

Tabla 4

En esta tabla también está incluida la sucesión u_N que se obtiene con la eliminación de los términos $1/_{N^2}$ a partir de las series

$$p_N = N\left[\frac{\pi}{N} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{N}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{N}\right)^5 - \ \dots\right],$$

$$P_N = N\left[\frac{\pi}{N} + \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{N}\right)^3 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{N}\right)^5 + \ \dots\right].$$

Obteniendo

$$u_N = \frac{1}{3}(2p_N + P_N) = \pi + \frac{1}{20}\frac{\pi^5}{N^4} + \cdots,$$

así que, $u_N - \pi \approx \frac{1}{20}\frac{\pi^5}{N^4}$, y por lo tanto tenemos $u_N \approx \frac{1}{20}\frac{\pi^5}{N^4} + \pi$. Observando la tabla 4 podemos ver qué u_N converge más rápido a π que p_N ó P_N. En la tabla se observa que el cociente de errores es de 4 y el orden empírico de 2.

CAPÍTULO 3

3.1 CÁLCULOS DE π EN EL ORIENTE

En este capítulo se muestran algunas formas de aproximar π que fueron realizadas en el oriente. También examinaremos los valores para π dados por Zu Chongzhi $(429-500)$. Sin embargo el método usado por Zu no es extenso, pero si es más exacto que el método que aplicó Liu. También hablaremos de cómo calculaban el valor de π en la India.

3.2 LA MEDIDA DEL CÍRCULO EN LA ANTIGUA CHINA

3.2.1 MÉTODO DE LIU

Liu Hui[6] 劉徽 fue un matemático chino que vivió durante el Reinado de Wei. En el año 263 editó un libro que había sido compuesto en torno al inicio de nuestra era, conocido como *Jiuzhang Suanshu* o *Los nueve capítulos del arte matemático*, junto con comentarios importantes. Esta obra estaba llamada a ser uno de los libros chinos más famosos en el dominio de las matemáticas. Liu presenta (entre otras cosas): una estimación del número π como 3,14159 y éste lo obtiene con un algoritmo que aplica de forma iterativa, y sugiere que 3,14 es una muy buena representación de esta constante (su estimación fue realizada de forma similar de como lo hizo Arquímedes, considerando un polígono de 192 lados); el resultado de que el área de un círculo es la mitad de su circunferencia multiplicado por la mitad del diámetro; la regla de doble reducción al absurdo; análisis de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas; y resultados sobre el área de figuras como el prisma, la pirámide, el tetraedro, el cilindro o el cono. No logró determinar el volumen de la esfera, pero escribió: "dejemos el problema a quienquiera, que pueda decir la verdad al respecto".

Aquí se muestra que, a pesar que Liu hizo sus cálculos sin tecnología, éstos son muy precisos los valores de la razón de la circunferencia y el diámetro (figura 14).

[6] Los datos biográficos fueron tomados de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Liu_Hui.html

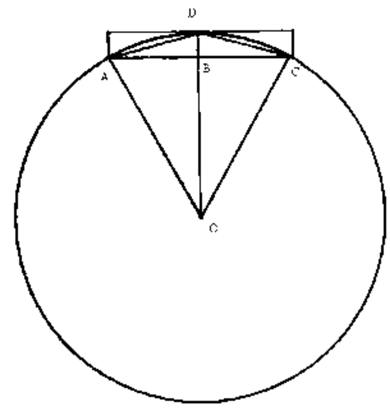


Figura 14

Los valores para π los obtiene de la siguiente manera:

comencemos con un hexágono inscrito en un círculo de radio $r = 10$. Sea AC un lado, entonces

$$BC = \frac{1}{2}a_6 = 5,$$

$$OB = b_6 = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a_6^2} = 8.660254, \qquad DB = c_6 = r - b_6 = 1.339746$$

$$DC^2 = a_{12}^2 = c_6^2 + \frac{1}{4}a_6^2 = 26.794919, A_6 = 310.58\,2854.$$

Donde $b_n = OB$ y este se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras, a_n es el lado del polígono de n lados, c_n es la diferencia del radio con b_n, A_n es la constante buscada. Seguimos realizando estas operaciones y obtenemos con el uso de la tecnología los siguientes valores, y a partir de estos se construye la tabla 5.

OC	**OB**	**DB**	**DC**	$\mathbf{A_n}$	$\mathbf{a_n}$	$\mathbf{100 * \pi - A_n}$	**Cociente de Errores**	**Orden Empírico**
10	8.660254038	1.339745962	5.176380902	310.5828541	6	3.57641124		
	9.659258263	0.340741737	2.610523844	313.2628613	12	0.89640403	3.989731319	1.996291594
	9.914448614	0.085551386	1.308062585	313.9350203	24	0.22424505	3.997430551	1.999072969
	9.978589232	0.021410768	0.654381656	314.1031951	48	0.05607027	3.999357495	1.999768247
	9.994645875	0.005354125	0.327234633	314.1452472	96	0.01401813	3.999839365	1.999942062
	9.998661379	0.001338621	0.163622792	314.1557608	192	0.00350457	3.999959841	1.999985516
	9.999665339	0.000334661	0.081812081	314.1583892	384	0.00087614	3.99998996	1.999996379
	9.999916334	8.36656E-05	0.040906126	314.1590463	768	0.00021904	3.99999749	1.999999095
	9.999979084	2.09164E-05	0.020453074	314.1592106	1536	5.4759E-05	3.999999374	1.999999774

Tabla 5

Obviamente Liu no generó muchas líneas de esta tabla. De hecho solo llega a calcular A_{192} y deduce que

$$314\frac{64}{625} < A_{192} < 314\frac{196}{625},$$

recomienda tomar $A \approx 314$ (el entero más cercano) y por tanto $\pi = 3.14$ para él.

CONCLUSIONES PARA EL MÉTODO DE LIU

1.- Tanto Arquímedes como Liu utilizaron polígonos inscritos; Arquímedes también utiliza polígonos circunscritos. Los dos asumieron el principio de exhaución, sosteniendo que eventualmente los lados del polígono llegarán a ser tan pequeños que coincidirán con el círculo.

2.- El método de Arquímedes solamente concierne con la evaluación del perímetro de polígonos inscritos y circunscritos; de esto se deduce la circunferencia del círculo. Al mostrar que el área de un círculo es el producto de la mitad de la circunferencia y el radio, el método de Liu prueba que la razón del área de un círculo al cuadrado de su radio, es idéntico a la razón de la circunferencia al radio o sea π.

3.- Una de las razones de la simplicidad del método de Liu es que usa el sistema decimal.

3.2.2 LOS VALORES PARA π DE ZU CHONGZHI

Zu Chongzhi [7] (祖冲之, Pinyin Zǔ Chōngzhī) (429-500) fue un matemático y astrónomo que estuvo al servicio de las dinastías meridionales Liu Song y Qi. Nació en 429 en Jiankang (hoy Nanjing). Su familia estuvo históricamente unida a la investigación astronómica, y desde su niñez estuvo en contacto con matemáticos y astrónomos. Ya desde joven se hizo muy famoso por su talento.

Zu Chongzhi empezó a calcular el valor de π en el 464, es decir, a los 35 años. Los numerosos e incansables matemáticos chinos que lo precedieron en esta tarea habían logrado ciertos avances. Liu Wei, por ejemplo, calculó dicho valor con una precisión de cuatro decimales. Partiendo de esta base y tras años de estudio, Zu Chongzhi determinó el valor de π con una aproximación de siete decimales (entre 3.1415926 y 3.1415927), adelantándose así en más de mil años a los matemáticos del resto del mundo. Varios historiadores de matemáticas de algunos países han propuesto denominar el número π "razón de Zu" en reconocimiento a sus extraordinarias contribuciones.

Los valores para π de Zu Chongzhi no fueron superados sino hasta un milenio después cuando Al-Kashi evaluó correctamente 16 lugares decimales de π [Youschkevitch & Rosebfeld 1973,258]. Es interesante la nota del valor fraccional de Zu para el valor de π mediante la fracción $\frac{355}{113}$ la cual fue dada en la India en el Siglo XV y por Adriaan Anthoniszoon ene l Siglo XVI [Beckmann 1970,98].

Zu Chongzhi utiliza el método de Liu pero con un radio de 1000, en lugar de 10, lo que hace los cálculos más precisos al retener mas cifras. La tabla 6 nos muestra los valores:

OC	OB	DB	DC	A_n	a_n	$1000000 * \pi - A_n$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1000	866.0254038	133.9745962	517.6380902	3105828.541	6	35764.11236		
	965.9258263	34.07417371	261.0523844	3132628.613	12	8964.040309	3.989731319	1.996291594
	991.4448614	8.555138626	130.8062585	3139350.203	24	2242.450543	3.997430551	1.999072969
	997.8589232	2.141076761	65.43816564	3141031.951	48	560.7026993	3.999357495	1.999768247
	999.4645875	0.535412524	32.72346325	3141452.472	96	140.1813043	3.999839365	1.999942062
	999.8661379	0.13386209	16.36227921	3141557.608	192	35.04567794	3.999959841	1.999985516
	999.9665339	0.033466083	8.181208052	3141583.892	384	8.761441474	3.99998996	1.999996379
	999.9916334	0.008366556	4.090612582	3141590.463	768	2.190361743	3.99999749	1.999999095
	999.9979084	0.002091641	2.045307361	3141592.106	1536	0.547590521	3.999999376	1.999999775
	999.9994771	0.00052291	1.022653814	3141592.517	3072	0.136897635	3.999999857	1.999999948
	999.9998693	0.000130728	0.511326924	3141592.619	6144	0.034224409	4.000000014	2.000000005
	999.9999673	3.26819E-05	0.255663464	3141592.645	12288	0.008556102	4.000000109	2.000000039
	999.9999918	8.17048E-06	0.127831732	3141592.651	24576	0.002139025	4.000001088	2.000000393

Tabla 6

[7] Los datos biográficos fueron tomados de http://espanol.cri.cn/chinaabc/chapter17/chapter170301.htm

El grado de exactitud para los valores de π depende del número de lugares para cada b_n calculado. De esta Zu Chongzhi llega al valor estimado con 6 decimales correctos.

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

3.3 LA CUADRATURA DEL CÍRCULO (HINDÚ)

Son muy escasos los documentos de tipo matemático que han llegado a nuestras manos, pese a tener constancia del alto nivel cultural de esta civilización. Aun más que en el caso de China, existe una tremenda falta de continuidad en la tradición matemática hindú y al igual que ocurría con las tres civilizaciones anteriores, no existe ningún tipo de formalismo teórico. Los primeros indicios matemáticos se calculan hacia los siglos VIII-VII a.C, centrándose en aplicaciones geométricas para la construcción de edificios religiosos y también parece evidente que desde tiempos remotos utilizaron un sistema de numeración posicional y decimal. [8]

Fue, sin embargo, entre los siglos V-XII d.C cuando la contribución a la evolución de las matemáticas se hizo especialmente interesante, destacando cuatro nombres importantes: Aryabhata (s.VI), Brahmagupta (s.VI), Mahavira (s. IX) y Bhaskara Akaria (s.XII).

La característica principal del desarrollo matemático en esta cultura, es el predominio de las reglas aritméticas de cálculo, destacando la correcta utilización de los números negativos y la introducción del cero, llegando incluso a aceptar como números válidos los números irracionales.

Profundizaron en la obtención de reglas de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, en las cuales las raíces negativas eran interpretadas como deudas. Desarrollaron también, sin duda para resolver problemas astronómicos, métodos de resolución de ecuaciones diofánticas, llegando incluso a plantear y resolver (s.XII) la ecuación $x^2 = 1 + ay^2$, denominada ecuación de Pelt.

Como resumen acabaremos diciendo que en la historia de la India se encuentran suficientes hechos que ponen en evidencia la existencia de relaciones políticas y económicas con los estados griegos, egipcios, árabes y con china. Matemáticamente se considera indiscutible la procedencia hindú del sistema de numeración decimal y las reglas de cálculo. Los números que llamamos árabes no son árabes sino hindúes; pero la mayoría de la gente cree, erróneamente, que los números que utiliza son árabes.

A continuación enunciamos algunos teoremas importantes en el trabajo de Madhava[9] (माधव) de Sangamagrama (1350-1425), el cual fue un importante matemático de Kerala, India. Madhava fue fundador de la Escuela de Kerala, y es considerado el padre del análisis matemático, por haber dado el paso decisivo desde los procedimientos finitos de los matemáticos antiguos, hacia el concepto de infinito -a través del concepto de límite-, núcleo del análisis moderno clásico. Él también es reconocido como uno de los

[8] Tomado de http://www.profesorenlinea.cl/matematica/MatematicaHistoria.htm
[9] Los datos biográficos fueron tomados de http://es.wikipedia.org/wiki/Madhava_de_Sangamagrama

más importantes astrónomos durante la Edad Media europea, debido a sus importantes contribuciones en los campos de series infinitas, cálculo y trigonometría.

Todo su trabajo matemático está perdido, y solo se sabe de él por medio de los escritos que legaron sus discípulos, principalmente Nilakantha Somayaji y Jyesthadeva.

TEOREMA 1.- $arc\tan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \cdots \qquad \left(|arc\tan t| \leq {}^{\pi}/_{4}\right).$

Ślokā :

व्यासार्धेन हतादभीष्टगुणतः कोट्याप्तमाद्यं फल
ज्यावर्गेण विनिघ्नमादिमफलं तत्तत्फलं चाहरेत् ।
कृत्वा कोटिगुणस्य तत्र तु फलेष्वेकत्रिपञ्चादिभि-
र्भक्तेष्वोजयुतैस्त्यजेत्समयुतिं जीवाधनुश्शिष्यते ॥

[*K* (T.S.S.), 19, chap. VI.]

En nuestra notación, que es la conocida serie de MacLaurin para $arc\tan t$.

Tomamos cualquier arco circular, como se muestra en la figura 17, cuya abscisa no es menor que su ordenada. Multiplicamos la “ordenada” del arco por el semidiámetro y lo dividimos entre la abscisa. Esto nos da el primer término. Multiplicamos este término por el cuadrado de la “ordenada” y lo dividimos por el cuadrado de la “abscisa”, resulta el segundo término. Repetimos el proceso de multiplicar por el cuadrado de la ordenada y dividimos por el cuadrado de la abscisa. Se obtienen los términos sucesivos y se dividen en orden por los enteros impares $1, 3, 5, \ldots$. Si ahora los términos órdenes son impares se suman, y los términos cuyo orden es par son sustraídos de los anteriores, lo que resulta es la circunferencia.

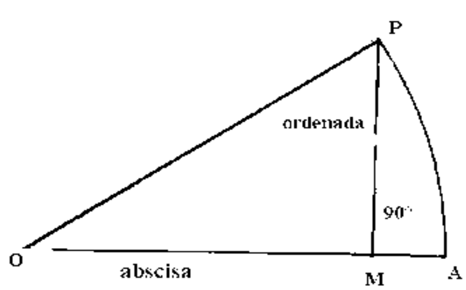


Figura 17

Esto quiere decir que, en la figura 17 (con $AOP \leq 45°$).

$$arc\ AP = OP\left\{\frac{PM}{OM} - \frac{1}{3}\frac{PM^3}{OM^3} + \frac{1}{5}\frac{PM^5}{OM^5} - \cdots\right\}.$$

De los siguientes Teoremas se pueden obtener aproximaciones a π el cual se calculo a través de $\left(\frac{C}{D}\right)$.

TEOREMA 3.-

$$C = \sqrt{12}\, D \left\{1 - \frac{1}{3*3} + \frac{1}{5*3^2} - \frac{1}{7*3^3} + \ \dots\right\}.$$

Ślokā :

व्यासवर्गाद्रविहतात्पदं स्यात्प्रथमं फलम् ।
ततस्तत्तत्फलाच्चापि यावदिच्छं त्रिभिर्हरेत् ॥
रूपाद्ययुग्मसंख्याभिर्लब्धेष्वेषु यथाक्रमम् ।
विषमाच्च युते त्यक्ते युग्मयोगे वृतिर्भवेत् ॥

[T, chap. II.]

Extraemos la raíz cuadrada de 12 y multiplicamos por el diámetro. Este es el primer término. Dividiendo el primer término repetidamente por 3, obtenemos los otros términos: el segundo después de una división por 3, el tercero término con una división mas por 3, y así sucesivamente. Divide los términos por los enteros impares $1, 3, 5, \dots$; sumamos los términos de orden impar y restamos los de orden par, lo que resulta en la circunferencia. Se calcula el cociente de errores y orden empírico, es lo que se había manejado.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ obtenida agregando un término a la vez en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando el término par de la serie.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.4641016151378	3.2250896155E-01		
2	3.0792014356780	6.2391217912E-02	4.276646538	2.096479974
3	3.1561814715700	1.4588817980E-02		
4	3.1378528915957	3.7397619941E-03	16.68320551	4.06032461
5	3.1426047456631	1.0120920733E-03		
6	3.1413087854629	2.8386812691E-04	51.39294129	5.683498317
7	3.1416743126988	8.1659109044E-05		
8	3.1415687159418	2.3937648009E-05	156.2293001	7.287521239
9	3.1415997738115	7.1202217127E-06		
10	3.1415905109381	2.1426517134E-06	472.3549175	8.883727467
11	3.1415933045031	6.5091328816E-07		
12	3.1415924542877	1.9930214679E-07	1424.310433	10.4760479
13	3.1415927150204	6.1430586840E-08		
14	3.1415926345473	1.9042479149E-08	4288.260389	12.0661768
15	3.1415926595217	5.9319207324E-09		
16	3.1415926517340	1.8557955173E-09	12898.86078	13.65495603
17	3.1415926541726	5.8278226689E-10		

TEOREMA 5.-

$$C = 3D + 4D\left\{\frac{1}{3^3-3} - \frac{1}{5^3-5} + \frac{1}{7^3-7} - \cdots\right\}.$$

Ślokā :

व्यासाद्वनसंगुणितात् पृथगाप्तं त्र्याद्ययुग्विमूलघनैः ।
त्रिगुणव्यासे स्वमृणं क्रमशः कृत्वापि परिधिरानेयः ॥

[K * (T.S.S.), 16, chap. VI.]

Divide 4 veces el diámetro es dividido por el cubo de los enteros impares, a partir de 3, restado por el mismo entero. Estos cocientes alternadamente se suman y se restan con 3 veces el diámetro. Y así se obtiene la circunferencia.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando un término a vez en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando el término par de la serie.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3	1.4159265359E-01		
2	3.166666667	2.5074013077E-02	5.646988105	2.497481592
3	3.133333333	8.2593202565E-03		
4	3.145238095	3.6454416483E-03	6.878182535	2.782027403
5	3.13968254	1.9101139073E-03		
6	3.142712843	1.1201891230E-03	7.373148057	2.882280727
7	3.140881341	7.1131270845E-04		
8	3.142071817	4.7916348202E-04	7.607928786	2.927503742
9	3.141254824	3.3782998203E-04		
10	3.141839619	2.4696533961E-04	7.73434001	2.951278188
11	3.141406718	1.8593509329E-04		
12	3.141736099	1.4344567087E-04	7.809152526	2.965165991
13	3.141479689	1.1296458554E-04		
14	3.141683189	9.0535617962E-05	7.856716776	2.973926554
15	3.141518986	7.3667994517E-05		
16	3.141653394	6.0740607633E-05	7.888684369	2.979784716

TEOREMA 6.-

$$C = 16D\left\{\frac{1}{1^5+4*1}-\frac{1}{3^5+4*3}+\frac{1}{5^5+4*5}-\cdots\right\}.$$

Ślokā :

समपञ्चाहतयो यरूपाद्ययुजाश्चतुर्घ्ना मूलयुताः ।
ताभिष्षोडशगुणिताद्व्यासात्पृथगाहृते तु विषमयते ॥
समफलयोगे त्यक्ते स्यादिष्टव्याससभवः परिधिः ।

[*T*, chap. II.]

16 veces el diámetro es dividido por la 5^apotencia de cada uno de los enteros impares 1,3,5 …, incrementado por 4 veces sus números enteros. Los cocientes obtenidos se suman o se restan del anterior, es de acuerdo a si son pares o impares. Lo que se obtiene después de estas operaciones es la circunferencia.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando o restando un término a vez en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando el término par de la serie.

n	Aproximación	$\|\pi - Aproximación\|$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.2000000000	5.84073E-02		
2	3.1372549020	4.33775E-03	13.46488951	3.751130486
3	3.1423423423	7.49689E-04		
4	3.1413919414	2.00712E-04	21.61179876	4.433747248
5	3.1416627377	7.00841E-05		
6	3.1415634174	2.92362E-05	25.642514	4.680465806
7	3.1416065040	1.38505E-05		
8	3.1415854357	7.21784E-06	27.80778902	4.797417136
9	3.1415967039	4.05036E-06		
10	3.1415902424	2.41122E-06	29.06584293	4.861252843
11	3.1415941599	1.50633E-06		
12	3.1415916741	9.79517E-07	29.84753494	4.899539882
13	3.1415933125	6.58866E-07		
14	3.1415921974	4.56193E-07	30.36096586	4.924145782
15	3.1415929775	3.23866E-07		
16	3.1415924186	2.35002E-07	30.71393931	4.940821656

TEOREMAS 7 Y 8.-

$$C = 8D\left\{\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{6^2-1}+\frac{1}{10^2-1}+\cdots\right\},$$

$$C = 4D - 8D\left\{\frac{1}{4^2-1}+\frac{1}{8^2-1}+\cdots\right\}.$$

Ślokā :

द्व्यादेश्चतुरादेर्वा चतुरधिकानां निरेकवर्गास्स्युः ।
हाराः कुञ्जरगुणितो विष्कंभः स्वमितिकल्पितो भोज्यः ॥
फलयुतिराद्ये वृत्तं भाज्यदलं फलविहीनमन्यत्र ।

[*T*, chap. **II.**]

Uno menos los cuadrados de la sucesión de los enteros pares iniciando con 2 ó 4 menos uno e incrementándolos continuamente por 4 son los divisores. Ocho veces el diámetro se divide por cada uno de estos y los resultados sucesivos se suman y así obtener la circunferencia para el primer caso. En el segundo caso, la suma es similar, se resta 4 veces el diámetro, así obtener la circunferencia.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando un término a vez en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando el término par de la serie.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	2.66666667	0.47492599		
2	2.8952381	0.24635456	1.927814895	0.946966533
3	2.97604618	0.16554648		
4	3.01707182	0.12452084	1.978420361	0.984348993
5	3.04183962	0.09975303		
6	3.05840277	0.08318989	1.989983184	0.99275624
7	3.07025462	0.07133804		
8	3.07915339	0.06243926	1.994271517	0.995861843
9	3.0860798	0.05551285		
10	3.09162381	0.04996885	1.996304514	0.997331804
11	3.09616153	0.04543113		
12	3.09994403	0.04164862	1.997422369	0.998139433
13	3.10314531	0.03844734		
14	3.10588974	0.03570292	1.99810114	0.998629612
15	3.10826857	0.03332409		
16	3.11035027	0.03124238	1.998543632	0.99894907
17	3.11218724	0.02940541		

Si tomamos el término 3530, vemos que la aproximación a π es 3.1410264, se observa que esta aproximación converge lentamente al valor de π que ahora conocemos, esto es para el Teorema 7, sin embargo si extendemos el Teorema 8 hasta el término 2744 observamos que la aproximación a π es 3.14232099 el cual converge más lentamente.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.46666667	0.325074013		
2	3.33968254	0.198089886	1.64104296	0.714613007
3	3.28373848	0.14214583		
4	3.25236593	0.110773281	1.788246083	0.838545282
5	3.23231581	0.090723156		
6	3.21840277	0.076810112	1.850613491	0.888003613
7	3.20818565	0.066592999		
8	3.20036552	0.058772862	1.884769223	0.914387887
9	3.19418791	0.052595256		
10	3.18918478	0.047592129	1.906263878	0.930747841
11	3.18505042	0.043457762		
12	3.18157669	0.039984032	1.921019687	0.941872304
13	3.17861701	0.037024357		
14	3.17606518	0.034472523	1.931770359	0.949923603
15	3.17384234	0.032249684		
16	3.17188874	0.030296082	1.939949281	0.956018935
17	3.17015826	0.028565604		

TEOREMA 9.-

$$C = 3D + 6D\left\{\frac{1}{(2*2^2-1)^2-2^2} + \frac{1}{(2*4^2-1)^2-4^2} + \frac{1}{(2*6^2-1)^2-6^2} + \cdots\right\}.$$

Ślokā :

वर्गैर्युजां वा द्विगुणैर्निरेकै-
वर्गीकृतैर्वर्जितयुग्मवर्गैः ।
व्यासं च षड्घ्नं विभजेत्फलं स्वं
व्यासे त्रिनिघ्ने परिधिस्तदा स्यात् ॥

[*K* (T.S.S.), 17, chap. VI.]

Si el denominador de los cocientes es el cuadrado de dos veces el cuadrado de los números enteros pares $(2, 4, 6, \dots)$ restando uno, disminuido por el cuadrado del mismo entero. La suma resultante de los cocientes se multiplica por 6 veces el diámetro y al resultado se le agrega el triple del diámetro, obteniendo la circunferencia.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando un término a vez en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando el término par de la serie.

n	$Aproximación$	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.1333333333333	0.00825932		
2	3.1396825396825	0.001910114	4.323993572	2.112364378
3	3.1408813408813	0.000711313		
4	3.1412548236078	0.00033783	5.654068641	2.499289398
5	3.1414067184965	0.000185935		
6	3.1414796890043	0.000112965		
7	3.1415189855953	7.3668E-05	6.296776154	2.654613381
8	3.1415419859978	5.06676E-05	6.667575241	2.7371622
9	3.1415563302846	3.63233E-05		
10	3.1415657346586	2.69189E-05	6.907224198	2.788106052
11	3.1415721544830	2.04991E-05		
12	3.1415766854350	1.59682E-05	7.074366902	2.822601044
13	3.1415799739622	1.26796E-05		
14	3.1415824182478	1.02353E-05	7.197414038	2.847478653
15	3.1415842726746	8.38092E-06		
16	3.1415857049341	6.94866E-06	7.291711429	2.866257467
17	3.1415868286212	5.82497E-06		

TEOREMA 10.-

$$C \doteqdot 4D\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{n}\mp\frac{{(n+1)}/{2}}{(n+1)^2+1}\right\}, \text{ donde } \boldsymbol{n} \text{ es impar y grande.}$$

Ślokā :

व्यासे वारिधिनिहते रूपहृते व्याससागराभिहते ।
त्रिशरादिविषमसंख्याभक्तमृणं स्वं पृथक् क्रमात् कुर्यात् ॥
यत्संख्ययात्र हरणे कृते निवृत्ता हृतिस्तु जामितया ।
तस्या ऊर्ध्वगतायास्समसंख्याया तद्दलं गुणोऽन्ते स्यात् ॥
तद्वर्गो रूपयुतो हारो व्यासाब्धिघाततः प्राग्वत् ।
ताभ्यामाप्तं स्वमृणे कृते घने शोधनञ्च करणीयम् ॥
सूक्ष्मः परिधिः सा स्यात् बहुकृत्वो हरणतोऽतिसूक्ष्मश्च ।

[*T*, chap. II.]

Multiplicamos el diámetro por 4. Se resta y se suma alternadamente los cocientes obtenidos de dividir 4 veces el diámetro entre los enteros impares $3, 5, 7, \ldots$ dejamos que el proceso se detenga en cierto momento dando lugar a una "suma finita". Multiplicando 4 veces el diámetro por la mitad del entero par subsecuente al último entero impar utilizado como un divisor, entonces divide por el cuadrado del entero par incrementado por uno. El resultado es la corrección que será agregada a o sustraída de nuestra suma finita, elegimos la suma o resta dependen del signo del último término de la suma. El resultado final es la circunferencia determinada de una manera más exacta que al tomar una gran cantidad de términos, es decir, términos que van más allá del momento en el cual nos detuvimos.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando un término a vez alternando los signos en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando los términos pares de la serie.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.2	0.058407346		
2	3.137254902	0.004337752	13.46488951	3.751130486
3	3.142342342	0.000749689		
4	3.141391941	0.000200712	21.61179876	4.433747248
5	3.141662738	7.00841E-05		
6	3.141563417	2.92362E-05	25.642514	4.680465806
7	3.141606504	1.38505E-05		
8	3.141585436	7.21784E-06	27.80778902	4.797417136
9	3.141596704	4.05036E-06		
10	3.141590242	2.41122E-06	29.06584294	4.861252844
11	3.14159416	1.50633E-06		
12	3.141591674	9.79517E-07	29.84753497	4.899539883
13	3.141593312	6.58866E-07		
14	3.141592197	4.56193E-07	30.36096595	4.924145787
15	3.141592977	3.23866E-07		
16	3.141592419	2.35002E-07	30.71393948	4.940821664
17	3.141592827	1.73834E-07		

TEOREMA 11.-

$$C \doteqdot 4D\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\pm\frac{1}{n}\mp\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+1}{[(n+1)^2+4+1]\left(\frac{n+1}{2}\right)}\right\}, \text{ con } \boldsymbol{n} \text{ impar y grande.}$$

Ślokā :

अस्मात्सूक्ष्मतरोऽन्यो विलिख्यते कश्चनापि संस्कारः ।
अन्ते समसंख्यादलवर्गस्सैको गुणस्स एव पुनः ॥
युगगुणितो रूपायुतस्समसंख्यादलहतो भवेद्धारः ।
त्रिशरादिविषमसंख्याहरणात्परमे तदेव वा कार्यम् ॥

[T, chap. II.]

Ahora obtenemos otra corrección más precisa. El cuadrado de la mitad del cuadrado entero par subsecuente al último divisor entero impar, incrementado por uno, es un factor. Este factor multiplicado por 4, entonces incrementado por uno y después multiplicado por el entero impar definido, nos da el divisor. Multiplicamos y dividimos 4 veces el diámetro por nuestro factor y divisor respectivamente. El resultado es una mejora a nuestra corrección previa.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando un término a vez alternando los signos en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando los términos pares de la serie.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.111111111	0.030481542		
2	3.142857143	0.001264489	24.10581352	4.591309213
3	3.141463415	0.000129239		
4	3.141614907	2.22532E-05	56.8226975	5.828395416
5	3.141587302	5.352E-06		
6	3.141594274	1.62089E-06	79.73330993	6.317110655
7	3.141592073	5.80654E-07		
8	3.14159289	2.36279E-07	94.18207424	6.557380591
9	3.141592547	1.0624E-07		
10	3.141592705	5.17594E-08	103.4016298	6.692115114
11	3.141592627	2.69319E-08		
12	3.141592668	1.48046E-08	109.4859545	6.774601994
13	3.141592645	8.52544E-09		
14	3.141592659	5.10918E-09	113.6491887	6.828443576
15	3.14159265	3.16947E-09		
16	3.141592656	2.02649E-09	116.5952994	6.865365816
17	3.141592652	1.33067E-09		

TEOREMA 12.-

$$C \doteqdot 2\mathrm{D} + 4\mathrm{D}\left\{\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{4^2-1} + \cdots \pm \frac{1}{\mathrm{n}^2-1} \mp \frac{1}{2[(\mathrm{n}+1)^2+2]}\right\}$$, con $\boldsymbol{n}$ es par y grande.

Ślokā :

द्व्यादियुजां विकृतयो व्येका हारा द्विनिघ्ना विष्कंभे ।
धनमृणमन्तेऽन्त्योर्ध्वगतौजकृतिद्विसहितहारो द्विघ्नि: ॥

[*T*', chap. II.]

El denominador de los cocientes es el cuadrado de los enteros pares $(2, 4, 6, \dots)$ menos uno. Los cocientes se alternan sumando o restando y se multiplica por 4 veces el diámetro, al resultado s ele suma el doble del diámetro. Dado que el proceso haya terminad en cierto momento dando lugar a una “suma finita”. Tomamos el entero impar subsecuente al último entero par elevado al cuadrado, ese impar se eleva al cuadrado y agregamos2, duplicamos la suma al resultado obtenido, dividimos 4 veces el diámetro. Este cociente se agrega a o se resta de la suma finita definida, esto nos conduce a un valor corregido de la circunferencia.

En la siguiente tabla se muestra la aproximación a la razón de $\frac{C}{D}$ la cuál es obtenida agregando un término a vez alternando los signos en la expresión anterior. El orden empírico fue calculado tomando los términos pares de la serie.

n	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.15151515152	0.009922498		
2	3.14074074074	0.000851913	11.64731573	3.541925601
3	3.14173669468	0.000144041		
4	3.14155670300	3.59506E-05	23.6967714	4.566618605
5	3.14160419526	1.15417E-05		
6	3.14158823633	4.41726E-06	32.6086611	5.027183301
7	3.14159457772	1.92413E-06		
8	3.14159172813	9.25461E-07	38.84614936	5.279699693
9	3.14159313495	4.81361E-07		
10	3.14159238685	2.66736E-07	43.27001266	5.435295638
11	3.14159280932	1.55734E-07		
12	3.14159255859	9.4999E-08	46.49802049	5.539097394
13	3.14159271374	6.01513E-08		
14	3.14159261426	3.93284E-08	48.9246193	5.61248872
15	3.14159268003	2.64416E-08		
16	3.14159263537	1.8218E-08	50.79919614	5.666733762
17	3.14159266642	1.28269E-08		

CAPÍTULO 4

4.1 CÁLCULOS DE π EN EL OCCIDENTE: ANTES DEL SIGLO XVII

En este capítulo hablaremos de los cálculos de π en el Occidente antes del siglo XVII. Esta parte del trabajo es muy importante ya que hablaremos de Vièta y Wallis, su forma de calcular π utilizando geometría, e interpolación respectivamente, y con esto obtener aproximaciones para π.

4.1.1 RELACIÓN DE INSCRIBIR POLÍGONOS EN ORDEN EN UN CÍRCULO.

François Viète[10] (conocido en multitud de textos en español por su nombre latinizado **Francisco Vieta**) fue un matemático francés (Fontenay-le-Comte, 1540 - París, 1603). Se le considera uno de los principales precursores del álgebra. Fue el primero en representar los parámetros de una ecuación mediante letras. Fue consejero privado de los reyes de Francia Enrique III y de Enrique IV. Entre 1564 y 1568, se sumerge en trabajos de astronomía y trigonometría y redacta un tratado que quedará inédito: *Harmonicon Cœleste*.

En 1571, publica una obra de trigonometría, el *Canon mathematicus*, en el que presenta numerosas fórmulas relacionadas con senos y cosenos. Emplea de modo poco habitual para la época los números decimales. Se trata de las primeras tablas trigonométricas elaboradas desde que lo hicieran los matemáticos árabes en el siglo X.

En 1593, publicó su *octavo libro de las respuestas variadas,* sobre temas matemáticos en la que vuelve sobre los problemas de la trisección del ángulo (que reconoce está unido a una ecuación de tercer grado), de la cuadratura del círculo, de la construcción del heptágono regular, etc. El mismo año, partiendo de consideraciones geométricas y por medio de cálculos trigonométricos que dominaba, descubre el primer producto infinito de la historia de las matemáticas que daba una expresión de π:

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \ldots.$$

[10] Los datos biográficos fueron tomados de http://es.wikipedia.org/wiki/Fran%C3%A7ois_Vi%C3%A8te

Proporcionó 10 decimales exactos de π recurriendo al método de Arquímedes que, ayudándose de un polígono de 393.216 lados (6×2^{16}), es claramente más sencillo que múltiples extracciones de raíces de raíces.

A continuación presentamos el desarrollo que permitió llegar a este resultado.

PROPOSICIÓN I

Si dos polígonos ordenados son inscritos en el mismo círculo y por otro lado el número de lados y ángulos del primero (figura 18) es la mitad del número de ángulos y lados del segundo entonces, el primer polígono será al segundo como el apotome del lado del primero es al diámetro.

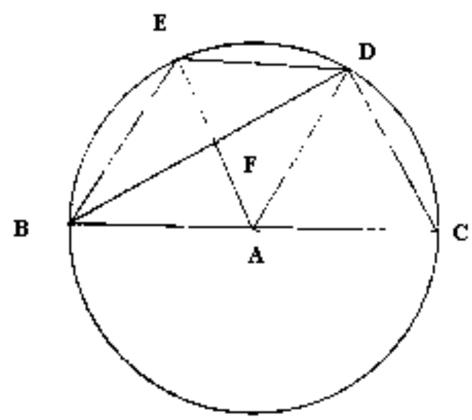


Figura 18

Llamó apotome al lado subtendido por la periferia de lo que queda del semicírculo en el que subtiende un lado. Es decir,

$$\frac{polígono\ 1}{polígono\ 2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{DC}{BC}, \text{ donde } BC \text{ es el diámetro,}$$

con P_n denotaremos los polígonos.

Por lo tanto, en el círculo con centro en A se inscribió de forma ordenada y escalonada un polígono con lado BD. Y tomamos la circunferencia BD esta se corta en dos partes y a ese punto lo llamamos E y es subtendido por BE. Y por lo tanto el otro polígono con lado BE es inscrito. Entonces el número de lados ó ángulos del primer polígono será la mitad del número de lados ó ángulos del segundo polígono. Por otra parte unimos $D\ y\ C$. Dice que el primer polígono con lado BD es al polígono con lado BE. Ó ED como DC es a BC. Entonces el primer polígono es al segundo polígono con el triángulo BAD es al trapezoide

$BEDA$. Por supuesto este trapezoide $BEDA$ es dividido en dos triángulos $BAD\ y\ BED$ con BD que tienen base en común. Entonces los triángulos con la misma base y por tanto son entre sí como lo son sus alturas AE es la mitad del diámetro e interseca a BD en F.

Entonces la semicircunferencia es cortada en E, AE interseca a BD y forman un ángulo recto. Así que AF es la altura del triángulo $BDA\ y\ FE$ la altura del otro triángulo BED. Por esto el triángulo BAD es al triángulo BED como AF es a EF y como juntos dan el trapezoide $BEDA$ se tiene que el triángulo BAD es al trapezoide como AF es a AE. Entonces el primer polígono será al segundo en la misma razón. Pero AF es a AE ó BC como DC es a BC. Pero el ángulo BDC es igual a BFA y por esta razón $AF\ y\ DC$ son paralelas. Entonces el primer polígono con lado BD es el segundo polígono con lado BE ó ED como DC es a BC. Lo que quería probar.

PROPOSICIÓN II

Si son inscritos una infinidad de polígonos en orden en el mismo círculo y el número de lados del primer polígono es la mitad del número de lados del segundo y un cuarto del número de lados del tercero y así se continua el proceso sin interrupción con una relación continúa de subdivisión y de esta manera

$$\frac{polígono\ 1}{polígono\ 2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{DC}{BC},$$

donde BC es el diámetro.

En esta relación DC es lo que llamamos el Apotome. Como

$$\frac{P_2}{P_3} = \frac{CE}{BC}$$

$$\frac{P_1}{P_3} = \frac{(DC)(CE)}{BC^2}.$$

Llamaremos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ a los apotomes. Entonces el primer polígono será al cuarto polígono como:

$$\frac{P_1}{P_4} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{BC^3}.$$

El primer polígono será al quinto polígono como:

$$\frac{P_1}{P_5} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}{BC^4}.$$

El primer polígono será al sexto polígono como:

$$\frac{P_1}{P_6} = \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{BC^5} \;....$$

Y si realizamos este proceso continuamente se vuelve infinito.

Es claro que Vieta está pensando que el "ultimo polígono" es el círculo y que el último cociente es la razón del área del primer polígono al área del último, Vieta calcula una relación de recurrencia para los apotomes de la siguiente manera

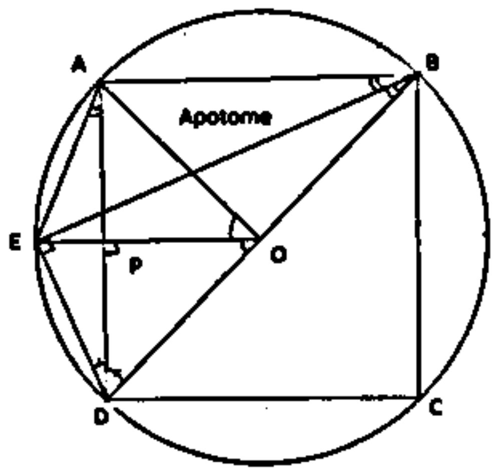


Figura 19

Tomamos

$$\overline{OA}^2 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 = \overline{OP}^2.$$

Entonces

$$OP = \sqrt{1 - \frac{1}{4} l_n^2}.$$

Así que

$$\overline{EP} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} l_n^2}.$$

Entonces

$$\overline{ED}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{ED}^2 = \frac{1}{4} l_n^2 + 1 - 2\sqrt{1 - \frac{1}{4} l_n^2} + 1 - \frac{1}{4} l_n^2 = 2 - \sqrt{4 - l_n^2}.$$

De aquí obtenemos que

$$AP_{n+1}^2 = \overline{BE}^2 = 4 - \overline{ED}^2 = 2 + \sqrt{4 - l_n^2} = 2 + AP_n,$$

$$AP_{n+1} = \sqrt{2 + AP_n}.$$

Donde

$$l_n^2 = 4 - AP_n^2.$$

Entonces

$$AP_n^2 = 4 - l_n^2 \rightarrow AP_n = \sqrt{4 - l_n^2}.$$

Tomemos ahora como primer polígono al cuadrado, si el círculo tiene 2 de radio.*El lado del cuadrado inscrito en el círculo será* $\sqrt{2}$ *y el área del cuadrado será 2. Y por lo tanto la razón "última" será* $\frac{2}{\pi}$*. El apotome del lado del octágono es*

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

entonces el apotome del polígono de 16 lados es

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}.$$

el apotome del polígono de 32 lados es

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

el apotome del polígono de 64 lados es

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

y de esta manera se continúa con el desarrollo.

Aplicando el resultado anterior, comenzando con el cuadrado se puede obtener la tabla 7.

Apotome	Apotome/2	Producto	Aproximación	$\lvert \pi - Aproximación \rvert$	Orden Empírico
1.41421356	0.707106781	0.707106781	2.82842712474619	0.31316552884360	
1.84775907	0.923879533	0.653281482	3.06146745892072	0.08012519466907	1.966597557
1.96157056	0.98078528	0.640728862	3.12144515225805	0.02014750133174	1.991655028
1.99036945	0.995184727	0.637643577	3.13654849054594	0.00504416304385	1.997914114
1.99759091	0.998795456	0.636875508	3.14033115695475	0.00126149663504	1.999478551
1.99939764	0.999698819	0.636683693	3.14127725093277	0.00031540265702	1.999869639
1.9998494	0.999924702	0.636635752	3.14151380114430	0.00007885244549	1.99996741
1.99996235	0.999981175	0.636623767	3.14157294036709	0.00001971322270	1.999991852
1.99999059	0.999995294	0.636620771	3.14158772527716	0.00000492831263	1.999997963
1.99999765	0.999998823	0.636620022	3.14159142151120	0.00000123207859	1.999999491
1.99999941	0.999999706	0.636619835	3.14159234557012	0.00000030801968	1.999999873
1.99999985	0.999999926	0.636619788	3.14159257658487	0.00000007700492	1.999999958
1.99999996	0.999999982	0.636619776	3.14159263433856	0.00000001925123	1.999999992
1.99999999	0.999999995	0.636619773	3.14159264877699	0.00000000481281	1.9999999
2	0.999999999	0.636619773	3.14159265238659	0.00000000120320	1.999999468
2	1	0.636619772	3.14159265328899	0.00000000030080	2.000001597
2	1	0.636619772	3.14159265351459	0.00000000007520	2.00000426
2	1	0.636619772	3.14159265357099	0.00000000001880	2.00002556
2	1	0.636619772	3.14159265358509	0.00000000000470	2.00003408
2	1	0.636619772	3.14159265358862	0.00000000000117	2.000409024
2	1	0.636619772	3.14159265358950	0.00000000000029	2.000545545
2	1	0.636619772	3.14159265358972	0.00000000000007	2.002184247
2	1	0.636619772	3.14159265358977	0.00000000000002	2.00877021
2	1	0.636619772	3.14159265358979	0.00000000000000	2.03562391

Tabla 7

De la relación anterior se obtuvo la tabla y se observa que el orden empírico es ≈ 2, como se puede apreciar en las tablas presentadas anteriormente.

La relación anterior la podemos utilizar para un polígono de 3 lados e ir duplicando los lados de dicho polígono, los valores fueron calculados a partir de $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = a$, los cuales se muestran a continuación:

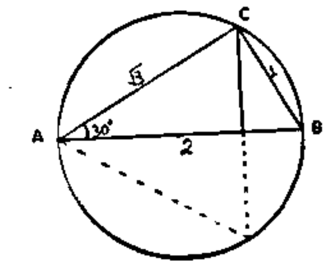


Figura 20

Apotome	Apotome entre 2	Producto	Aproximación	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$	Orden Empírico
1	0.5	0.5	2.59807621135332	0.54351644223648	
1.73205081	0.866025404	0.433012702	3.00000000000000	0.14159265358979	1.940577265
1.93185165	0.965925826	0.418258152	3.10582854123025	0.03576411235954	1.985161874
1.98288972	0.991444861	0.414679895	3.13262861328124	0.00896404030855	1.996291594
1.99571785	0.997858923	0.413792034	3.13935020304687	0.00224245054293	1.999072969
1.99892917	0.999464587	0.413570484	3.14103195089051	0.00056070269928	1.999768247
1.99973228	0.999866138	0.413515123	3.14145247228546	0.00014018130433	1.999942062
1.99993307	0.999966534	0.413501284	3.14155760791186	0.00003504567793	1.999985516
1.99998327	0.999991633	0.413497825	3.14158389214832	0.00000876144147	1.999996379
1.99999582	0.999997908	0.41349696	3.14159046322805	0.00000219036174	1.999999095
1.99999895	0.999999477	0.413496744	3.14159210599927	0.00000054759052	1.999999775
1.99999974	0.999999869	0.41349669	3.14159251669216	0.00000013689764	1.99999995
1.99999993	0.999999967	0.413496676	3.14159261936538	0.00000003422441	2.000000005
1.99999998	0.999999992	0.413496673	3.14159264503369	0.00000000855610	2.000000094
2	0.999999998	0.413496672	3.14159265145077	0.00000000213902	2.0000003
2	0.999999999	0.413496672	3.14159265305504	0.00000000053476	2.000001198
2	1	0.413496672	3.14159265345610	0.00000000013369	2.000003594
2	1	0.413496672	3.14159265355637	0.00000000003342	2.00001917
2	1	0.413496672	3.14159265358144	0.00000000000836	1.99998083
2	1	0.413496672	3.14159265358770	0.00000000000209	2.000230052
2	1	0.413496672	3.14159265358927	0.00000000000052	2.000920575
2	1	0.413496672	3.14159265358966	0.00000000000013	2.003688187
2	1	0.413496672	3.14159265358976	0.00000000000003	2.024831853
2	1	0.413496672	3.14159265358979	0.00000000000001	2.08246216

En la tabla se observa que el orden empírico es ≈ 2, como se puede apreciar en las tablas presentadas anteriormente.

4.2 WALLIS: CÁLCULO DE π POR INTERPOLACIONES SUCESIVAS

John Wallis[11] (Ashford, 23 de noviembre de 1616 – Oxford, 28 de octubre de 1703) fue un matemático inglés a quien se atribuye en parte el desarrollo del cálculo moderno. Fue un precursor del cálculo infinitesimal (introdujo la utilización del símbolo ∞ para representar la noción de infinito). Entre 1643 y 1689 fue criptógrafo del Parlamento y posteriormente de la Corte Real. Fue también uno de los fundadores de la *Royal Society* y profesor en la Universidad de Oxford.

Nació en Ashford (Kent), fue el tercero de los cinco hijos del reverendo John Wallis y Joanna Chapman. Inició su educación en la escuela local de Ashford, pero se trasladó a la escuela James Movat en Tenterden en 1625 debido al brote de una plaga. Tuvo su primer contacto con las matemáticas en 1631 en la escuela Martin Holbeach de Felsted; le gustaban pero su estudio de las mismas fue errático, "las matemáticas que en este momento tenemos, pocas veces son vistas como estudios académicos, más bien como algo mecánico".

Durante este tiempo, Wallis se mantuvo próximo al partido Puritano al que prestó ayuda para descifrar los mensajes de los monárquicos. La calidad de la criptografía de la época no era uniforme; a pesar de los éxitos individuales de matemáticos como François Viète, los principios subyacentes al diseño y análisis del cifrado eran entendidos vagamente

También estaba preocupado por el uso que pudieran hacer del cifrado las potencias extranjeras; rechazó, por ejemplo, una solicitud para enseñar criptografía a estudiantes de Hanover realizada en 1697 por Gottfried Leibniz.

De regreso a Londres (en 1643 había sido nombrado capellán de San Gabriel en Fenchurch Street), Wallis se une al grupo de científicos que posteriormente formarían la Royal Society. Al fin podía satisfacer sus intereses matemáticos, llegando a dominar en unas pocas semanas de1647 el libro *Clavis Mathematicae* de William Oughtred. En poco tiempo, empezó a escribir sus propios tratados sobre un amplio número de materias: a lo largo de su vida, Wallis realizó contribuciones significativas a la trigonometría, el cálculo, la geometría y el análisis de las series infinitas.

John Wallis se unió a los Presbiterianos moderados apoyando la proposición contra la ejecución de Carlos I, lo cual le valió la permanente hostilidad de los Independentistas. A pesar de su oposición, fue propuesto en 1649 para ocupar la Cátedra Savilian de Geometría en la Universidad de Oxford, dónde vivió hasta su muerte el 28 de octubre de 1703. Al margen de sus trabajos en matemáticas, también escribió sobre teología, lógica, gramática inglesa y filosofía; asimismo, fue uno de los pioneros en la introducción en

[11] Los datos biográficos fueron tomados de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wallis.html

Inglaterra de un sistema de enseñanza para sordomudos, inspirado en el método del español Juan de Pablo Bonet.

Después de 1650, los métodos analíticos reciben más atención y remplaza los métodos geométricos basados en los escritos antiguos. Esto se debió en parte a la aceptación en la geometría de los métodos algebraicos que Descartes y Fermat habían introducido, y en parte al interés sigue siendo muy activo en el trabajo de interpolación numérica, aproximación, logaritmos, una herencia de los siglos XVI y principios del XVII. Esta tradición era muy fuerte en Inglaterra, donde Napier y Briggs habían trabajado.

Fue uno de los fundadores de la Royal Society y, a través de su trabajo, bajo la influencia de Newton, Gregory y otros matemáticos. En su *Arithmetica Infinitorum* (Oxford, 1655), dirigió las exploraciones en los ámbitos del infinito un poco con los métodos analíticos, mediante la interpolación y extrapolación para obtener nuevos resultados.

EL ESQUEMA DE INTERPOLACION DE WALLIS Y SU PRODUCTO FINITO

La última parte de la *Arithmetica Infinitorum* (Aritmética Infinita de Wallis) de 1655 es un intento de calcular, usando sus indivisibles aritméticos, el área de un cuadrante del círculo unitario es

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Por supuesto ninguno de los símbolos π y $\int$ fueron usados en aquel entonces. Wallis escribió □ para el reciproco de esa área, el cual es el límite de la suma:

$$\frac{1}{\square} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}},$$

(la Suma de Riemann para la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ correspondiente a la subdivisión de [0,1] con n sub-intervalos iguales).

Como no puede calcular directamente el límite de esta suma, se embarca en una de las investigaciones más audaces por analogía e intuición que ha dado un resultado correcto, y obtiene al final de su producto infinito para $\frac{\pi}{2}$. Wallis sabia que

$$\int_0^1 x^{p/q}\,dx = \frac{1}{(p/q)+1} = \frac{q}{p+q}$$

si p y q son enteros positivos. Esta fórmula es suficiente para la evaluación de cualquier integral de la forma:

$$\int_0^1 (1 - x^{1/p})^q dx$$

ya que

$$\int_0^1 \left(1 - x^{\frac{1}{p}}\right)^q = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} 1^{q-n} (-1)^n x^{\frac{n}{p}} = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} (-1)^n x^{\frac{n}{p}} = \sum_{n=0}^{q} \binom{q}{n} (-1)^n \frac{p}{n+p}$$

si $p\ y\ q$ son enteros positivos. Por ejemplo:

$$\int_0^1 \left(1 - x^{1/3}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(1 - 2x^{1/3} + x^{2/3}\right) dx = 1 - \frac{2}{\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{\frac{2}{3}+1} = \frac{1}{10}.$$

El objetivo de Wallis era descubrir la "ley general" o la fórmula de la integral anterior en función de $p\ y\ q$, y luego sustituir $p = q = \frac{1}{2}$ en esta fórmula para obtener

$$\frac{1}{\square} = \int_0^1 (1 - x^2)^{1/2} dx.$$

Con el propósito de reconocer el patrón, se encontró que es más conveniente trabajar con el inverso de la integral que es:

$$f(p,q) = \frac{1}{\int_0^1 \left(1 - x^{1/p}\right)^q dx}.$$

Wallis inició calculando los valores de $f(p,q)$ para $p, q \leq 10$, y obtuvo los resultados mostrados en la siguiente tabla (a), donde $a_{pq} = f(p,q)$ esta tabulado en la $p - esima$ fila y la $q - esima$ columna.

$\boldsymbol{p \backslash K}$	0	1	2	3	4	…	10
0	1	1	1	1	1	…	1
1	1	2	3	4	5	…	11
2	1	3	6	10	15	…	66
3	1	4	10	20	35	…	
…	…	…	…	…	…	…	…
10	1	11	66	206	1001	…	184754

Tabla (a)

Sobre la base de estos valores calculados para $p, q \leq 10$, Wallis tomó como evidente que la tabla (a) es simplemente una tabla de coeficientes binomiales. Es decir, cada entrada en la tabla es la suma de la de arriba y la de la izquierda.

Además de explicar la simetría evidente de la diagonal en la tabla (a), proporciona fórmulas que se pueden utilizar para interpolar entre los elementos de una fila o columna de la tabla. Wallis en realidad escribe estas formulas sobre la base de considerar las filas como las secuencias de "figurados" números.

Por ejemplo, en la segunda fila $(p = 2)$ corresponde a los números “triangulares”

$$1,3,6,10,15, \ldots,$$

para los cuales

$$a_{2,q} = \frac{1}{2}(q+1)(q+2).$$

De forma similar la fila $(p = 3)$ corresponde a los números “piramidales”

$$1,4,10,20,35, \ldots,$$

para los cuales

$$a_{3,q} = \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3).$$

En general

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\ldots(q+p).$$

Ahora Wallis quiere expandir la Tabla (a) por interpolación, insertando filas y columnas correspondientes a las partes medias de los valores de los enteros $p \ y \ q$ (incluyendo en particular $p = q = \frac{1}{2}$ para el cual $a_{1/2, 1/2} = \square$). Él inicia insertando los valores medios para q en

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\ldots(q+p).$$

Interpola entre los elementos de la $p - esima$ fila (p entero) de la Tabla (a). Por ejemplo:

$$a_{2, 1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right) = \frac{15}{8},$$

$$a_{3,5/2} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{2}+1\right)\left(\frac{5}{2}+2\right)\left(\frac{5}{2}+3\right)\frac{693}{48}.$$

Por la simetría diagonal, esto es que al mismo tiempo inserta valores $a_{p,q}$ (p un medio del entero) entre los elementos de la $q-esima$ columna (q entero) de la Tabla anterior. El resultado de esta interpolación de los valores de $a_{p,q}$ para cualquier p ó q (pero no ambos) mitades del entero es expandido en la Tabla (b) que se muestra a continuación. Se ha insertado el valor desconocido $a_{1/2,1/2}=\square$.

Dicha tabla se llena de la siguiente manera, primero para $q = 1/2$, tenemos

$$a_{p,\frac{1}{2}} = \frac{1}{p!}\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+p\right).$$

Entonces

$$a_{1,\frac{1}{2}} = (1)\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right), a_{2,\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{15}{8}\right), a_{3,\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{105}{48}\right).$$

Ahora, para $q = \frac{3}{2}$, tenemos

$$a_{p,\frac{3}{2}} = \frac{1}{p!}\left(\frac{3}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{3}{2}+p\right).$$

Entonces

$$a_{1,\frac{3}{2}} = \left(\frac{5}{2}\right), a_{2,\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{35}{8}\right), a_{3,\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right) = \left(\frac{315}{48}\right).$$

A continuación se muestra la tabla que se construye a partir de los datos obtenidos.

$p\backslash q$	**0**	**1/2**	**1**	**3/2**	**2**	**5/2**	**3**
0	1	1	1	1	1	1	1
1/2	1	$\square$	$\frac{3}{2}$		$\frac{15}{8}$		$\frac{105}{48}$
1	1	$\frac{3}{2}$	2	5/2	3		4
3/2	1		$\frac{5}{2}$		$\frac{35}{8}$		$\frac{315}{48}$
2	1	$\frac{15}{8}$	3	35/8	6		10
5/2	1						
3	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10		20

Tabla (b)

Lo que restaba para Wallis en este punto el paso crucial de “llenar los huecos” para en la Tabla (b). Para simplificar la descripción de esta interpolación final se escribe:

$$m = 2p, \qquad n = 2q, \qquad b_{m,n} = a_{p,q} = a_{m/2,\, n/2}.$$

Observemos que

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2)\dots(q+p-1)(q+p)$$
$$= \frac{1}{p!}q(q+1)(q+1)\dots(q-1+p)\frac{(q+p)}{q} = \frac{q+p}{q}a_{p,q-1}$$

y entonces si $m\ y\ n$ son enteros

$$b_{mn} = a_{m/2,\, n/2} = \frac{m/2 + n/2}{n/2}a_{m/2,\, (n/2)-1} = \frac{m+n}{n}b_{m,n-2}.$$

Sin embargo, Wallis noto que la ecuación anterior también es satisfecha por aquellos a_{mn} para m ó n impares que fueran insertados en la tabla (b). Por ejemplo para $b_{12} = \frac{3}{2}$, obtenemos

$$b_{14} = \frac{5}{4}\times\frac{3}{2} = \frac{15}{8}$$

y de $b_{41} = \frac{15}{8}$, se obtiene:

$$b_{43} = \frac{7}{3}\times\frac{15}{8} = \frac{35}{8}.$$

Entonces Wallis uso la ecuación anterior para llenar el resto de los elementos de la fila $m = 1$ en términos de $\square$. Por ejemplo:

$$b_{13} = \frac{4}{3}b_{11} = \frac{4}{3}\square, \qquad y \quad b_{15} = \frac{6}{5}b_{13} = \frac{8}{5}\square.$$

Finalmente, llenó los espacios en blanco que quedaban en la Tabla (b) mediante el "hecho" de que

$$b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}.$$

Para $m\ y\ n$ par la ecuación anterior la familiar Ley de formación, $a_{p,q} = a_{p,q-1} + a_{p-1,q}$, de la Tabla (a) (El Triángulo de Pascal). Wallis lo simplifico asumiendo por analogía que

$b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}$ se mantiene también cuando m ó n ó ambos son impares. Por ejemplo, teniendo cálculos alrededor de $b_{13} = b_{31} = \frac{4}{3}\square$, se obtiene:

$$b_{33} = \frac{4}{3}\square + \frac{4}{3}\square = \frac{8}{3}\square,$$

otro ejemplo:

$$b_{35} = b_{33} + b_{15} = \frac{8}{3}\square + \frac{8}{5}\square = \frac{64}{15}\square, etc.$$

De esta manera es como llena la siguiente tabla (c):

$m\backslash n$		**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	$p\backslash q$	0	½	1	$3/2$	2	$5/2$	3
0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	½	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$		$\frac{105}{48}$
2	1	1	$\frac{3}{2}$	2	$5/2$	3		4
3	$3/2$	1	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}\square$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}\square$	$\frac{315}{48}$
4	2	1	$\frac{15}{8}$	3	$35/8$	6		10
5	$5/2$	1	$\frac{8}{5}\square$					
6	3	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10		20

Tabla (c)

De la formula $b_{mn} = \frac{m+n}{n} b_{m,n-2}$, el cálculo final $\square = a_{1,1}$, se obtiene de la fila completada para $m = 1$

$$b_{1,n} = \frac{1+n}{n} b_{1,n-2},$$

se encuentra por inducción que

$$b_{1,n} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}$$

si n es par, mientras que

$$b_{1.n} = \frac{\square}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}$$

para n impar.

Además se deduce de la definición

$$b_{1,n} = \frac{1}{\int_0^1 (1-x^2)^{n/2}\, dx}$$

entonces la secuencia se incrementa de forma monótona:

$$b_{1,1} < b_{1,2} < b_{1,3} < \cdots < b_{1,n} < b_{1,n+1} < \cdots.$$

Si se sustituye en

$$b_{1,n} = 1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}$$

$$b_{1.n} = \frac{\square}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \ldots \times \frac{n+1}{n}$$

en

$$b_{1,2n-1} < b_{1,2n} < b_{1,2n+1}$$

se obtiene:

$$\frac{\square}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} < \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k} < \frac{\square}{2} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{2k}{2k-1},$$

reagrupando obtenemos:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} < \frac{2}{\square} < \left[\prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} \right] \frac{2n+2}{2n+1}.$$

Desde $\frac{2}{\square} = \frac{\pi}{2}$ y $\frac{2n+2}{2n+1} \to 1$ cuando $n \to \infty$, obtenemos

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \ldots.$$

Por lo tanto tenemos que Wallis encontró, utilizando interpolación (ver para $p = \frac{1}{2}$ en la tabla (c)) que $\square = \frac{4}{\pi}$, de donde

$$\frac{2}{\square} = \frac{2}{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}$$

Haciendo algunos cálculos para ver que tan buena es esta aproximación tenemos que:

n	$\pi/2$	Aproximación a π	$\lvert\pi - Aproximación\rvert$
1	1.33333333	2.666666667	0.474925987
2	1.42222222	2.844444444	0.297148209
3	1.46285714	2.925714286	0.215878368
4	1.4860771	2.972154195	0.169438459
5	1.50108798	3.002175955	0.139416699
6	1.5115851	3.023170192	0.118422462
7	1.51933681	3.038673629	0.102919025
8	1.525295	3.050589996	0.091002658
9	1.53001727	3.060034547	0.081558106
10	1.5338519	3.067703807	0.073888847
11	1.53702758	3.07405516	0.067537493
12	1.53970067	3.079401343	0.06219131
13	1.54198171	3.083963419	0.057629234
14	1.54395103	3.08790207	0.053690584
15	1.54566844	3.091336889	0.050255765
16	1.54717936	3.094358723	0.04723393
17	1.54851891	3.097037822	0.044554832
18	1.54971468	3.099429357	0.042163297
19	1.55078863	3.101577263	0.04001539
20	1.55175848	3.103516962	0.038075692
21	1.55263866	3.105277323	0.036315331
22	1.55344106	3.106882117	0.034710536
23	1.55417555	3.108351092	0.033241561
24	1.55485039	3.109700789	0.031891865
25	1.55547258	3.110945167	0.030647487

Se observa que este método de interpolación si funciona pero converge muy lentamente al valor que conocemos de π, haciendo cálculos hasta el término 3000 se obtiene 3.141330909 como aproximación a π con un error de 0.000261745.

CAPÍTULO 5

5.1 π EN LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XVIII

En ésta parte del trabajo hablaremos de la forma de calcular π hasta el Siglo XVIII, donde se estará hablando de grandes matemáticos como Snell, Huygens, Gregory, Leibniz, Nilakantha y las aproximacones que nos proporcionaron. También, se hablará de Isaac Newton y su aportación para encontrar esta constante. Y en el último apartado se estarán explicando las conclusiones de nuestro trabajo de Tesis.

5.2 WILLEBRORD VAN ROYEN SNELL

Willebrord van Royen Snell[12] (1580-1626), también conocido como Snellius, fue un astrónomo y matemático holandés conocido por la ley de refracción que lleva su nombre. Introdujo varios descubrimientos importantes sobre el tamaño de la Tierra y realizó mejoras al método aplicado del cálculo. Era una estudiante de Ludolph van Ceulen (1540-1610) en la Universidad de Leyden. Snell buscaba un límite inferior y superior de manera que el valor de π pudiera ser calculado utilizando un polígono con un numero menor de lados. A pesar de que no pudo probar su proposición (la cual se llevó a cabo más tarde por Christian Huygens (1629-1695)), utilizó estos resultados para obtener los primeros 35 dígitos de π, los cuales habían sido obtenidos anteriormente usando el Método de Arquímedes con un polígono de 2^{30} lados.[13]

Además de sus trabajos para determinar el tamaño de la tierra, publicó *Cyclometria sive de circuli dimensione* (1621), y *Tiphys Batavus*, tratado sobre navegación en el que estudia la loxodromia (1624); *Coeli et siderum in eo errantium observationes Hassiacae* (1618), con las observaciones astronómicas de landgrave William IV de Hesse, y *Villebrordi Snell doctrinæ triangulorum canoniæ libri quatuor* (1627), tratado sobre trigonometría publicado póstumamente. En su honor, un cráter lunar lleva el nombre de *Snellius*.

[12] Tomado de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Snell.html
[13] http://www.takayaiwamoto.com/Greek_Math/Sqr_Circle/Snell_Huygens_Sqr.html

En la figura 21

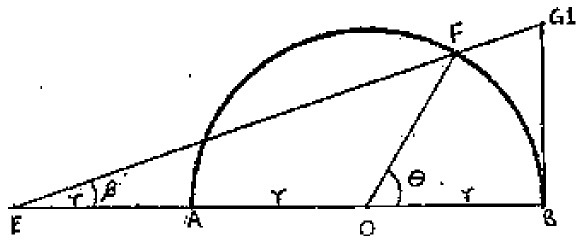


Figura 21

$BG1$: representa la mitad del lado de un polígono circunscrito .

Se puede ver que

$$BG1 \; = \; 3r \tan \beta. \quad (1)$$

En el triángulo EOF tenemos:

Ley Seno

$$\frac{EF}{sin\,(\pi - \theta)} \; = \; r \sin \beta. \;\; (2)$$

Ley del Coseno:

$$EF^2 = EO^2 = FO^2 \; - (2EO)(FO)\cos(\pi - \theta) \;\; = \; (2R)^2 = 5r^2 + 4r^2 cos(\theta).$$

Por lo tanto,

$$EF \;\; = \; r\left(5 \; + \; 4cos\;(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} \;\; (3)$$

sustituyendo (3) en (2), obtenemos

$$sen\,\beta \;\; = \; \frac{sin\,\theta}{\left(5 + 4cos\,(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (4)$$

como

$$\cos^2 \beta \;\; = \; 1 - sen^2\,\beta, \cos \beta = \frac{(\cos \theta \; + \; 2)^2}{(5 \; + \; 4 \cos \theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces,

$$\tan \beta = \; sen\,\theta \;/\;(2 \; + \cos \theta)$$

Por lo tanto

$$BG1 \ = \ 3\, r \; sen\, \theta \;/\; (2 \ + \ cos\, \theta)$$

Similarmente, en la figura 22

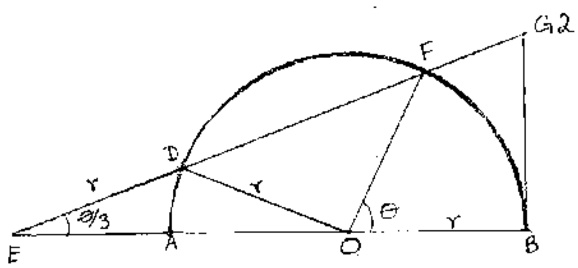


Figura 22

Nótese que el ángulo $DEA = \theta \,/\, 3$, (ya que esta es la configuración usada por Arquímedes en su trisección del ángulo) entonces tenemos

$$EO \ = \ 2r \; cos \; (\frac{\theta}{3})$$

de la figura 22 se obtiene

$$BG2 \ = \ EB(\tan\frac{\theta}{3}) = (EO \ + \ r) \ \tan\frac{\theta}{3} = \ r\left(2\cos\frac{\theta}{3} + \ 1\right) \ \tan\frac{\theta}{3}.$$

Lo que Snell encontró y más tarde demostró Huygens con rigor se resume de la siguiente manera:

$$BG1 < arco\; BF < BG2 \ \text{ ó } \ \frac{3\; r\; sen\; \theta}{(2\; cos\; \theta)} < r\theta < r\left(2cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + 1\right) tan\left(\frac{\theta}{3}\right).$$

La demostración que hace Huygens de las proposiciones de Snell es muy larga y solamente es geométrica. Una demostración corta y utilizando nuestras herramientas del cálculo y notación moderna es la siguiente:

Para el límite superior queremos demostrar que

$$3\sin\theta\,/(2 + \cos\theta) < \theta.$$

Sea

$$f(\theta) = 2\theta + \theta cos\theta - 3sin\theta.$$

Si sacamos la primera derivada tenemos

$$f'(\theta) = 2 - \theta\sin\theta - 2cos\theta \text{ , de donde } f'(0) = 0.$$

Calculando la segunda y tercer derivada tenemos

$$f''(\theta) = \sin\theta - \theta cos\theta, \text{ de donde } f''(0) = 0$$

y

$$f'''(\theta) = \theta\ sin\theta > 0.$$

Por lo tanto $f''(\theta)$ es estrictamente creciente y como $f''(0) = 0 \rightarrow f''(\theta) > 0$ en $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, y se observa que $f'(\theta)$ es estrictamente creciente, como

$$f'(0) = 0 \rightarrow f'(\theta) > 0.$$

Por lo tanto $f(\theta)$ es estrictamente creciente y como $f(0) = 0 \rightarrow f(\theta) > f(0) = 0$.

Entonces

$$\theta(2 + cos\theta) - 3sin\theta > 0.$$

Por lo tanto

$$\theta > \frac{3sin\theta}{(2 + cos\theta)}.$$

Por otra parte, queremos demostrar que

$$\theta < (2\cos\frac{\theta}{3} + 1)(\tan\frac{\theta}{3}) = 2\sin\frac{\theta}{3} + \tan\frac{\theta}{3}.$$

Sea

$$f(\theta) = 2\sin\frac{\theta}{3} + \tan\frac{\theta}{3} - \theta, \text{de donde } f(0) = 0$$

Si calculamos la primera y segunda derivada obtenemos

$$f'(\theta) = \frac{2}{3}\cos\frac{\theta}{3} + \frac{\sec^2\frac{\theta}{3}}{3} - 1, f'(0) = 0$$

$$f''(\theta) = -\frac{2}{9}\sin\frac{\theta}{3} + \frac{(2\sec\frac{\theta}{3}\sec\frac{\theta}{3}\tan\frac{\theta}{3})}{9} = \frac{2}{9}\sin\frac{\theta}{3}\left(-1 + \frac{1}{\cos^3\frac{\theta}{3}}\right) > 0$$

como $f''(0) = 0 \rightarrow f''(\theta) > 0$ en $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, se observa que $f'(\theta)$ es estrictamente creciente y como $f'(0) = 0 \rightarrow f'(\theta) > 0$.

Entonces $f(\theta)$ es estrictamente creciente y como $f(0) = 0 \rightarrow f(\theta) > f(0) = 0$.

Por lo tanto

$$\theta < (2\cos\frac{\theta}{3} + 1)(\tan\frac{\theta}{3}).$$

5.3 CHRISTIAN HUYGENS Y LA MEDIDA DEL CÍRCULO

Christian Huygens[14] (14 de abril de 1629 - 8 de julio de 1695) fue un astrónomo, físico y matemático Holandés, nacido en La Haya. Huygens nació en el seno de una importante familia holandesa. Su padre, el diplomático Constantin Huygens, le proporcionó una excelente educación y le introdujo en los círculos intelectuales de la época. Estudió mecánica y geometría con preceptores privados. En esta etapa, Huygens estuvo muy influido por el matemático francés René Descartes, visitante habitual de la casa de Constantin durante su estancia en Holanda. Su formación universitaria transcurrió entre 1645 y 1647 en Leiden, y entre 1647 y 1649 en el Colegio de Orange de Breda. En ambos centros estudió Derecho y Matemáticas, destacándose en la segunda.

En 1660 volvió a París para instalarse definitivamente. Allí mantuvo frecuentes reuniones con importantes científicos franceses, entre otros, Blaise Pascal. Sin embargo, pronto abandonó la ciudad para marchar a Londres en 1661. Ingresó en la recién formada Royal Society, donde pudo comprobar los asombrosos avances realizados por los científicos ingleses. Allí pudo mostrar sus telescopios y conoció a científicos como Robert Hooke o Robert Boyle, entre otros.

Dada su experiencia en la Royal Society de Londres, Huygens pudo llegar a liderar esta nueva academia e influir notablemente en otros científicos del momento, como su amigo y pupilo Leibniz. Fueron años muy activos para Huygens, pero se enturbiaron por sus problemas de salud y las guerras del Rey Sol contra Holanda. Huygens abandonó Francia en 1681. Tras una estancia en su Holanda natal, Huygens decidió volver a Inglaterra en 1689. Allí volvió a relacionarse con la Royal Society y conoció a Isaac Newton, con el que mantuvo frecuentes discusiones científicas. Volvió a Holanda poco antes de morir. Nunca se casó ni tuvo descendencia, al igual que Newton. Entre los trabajos que realizó sobre matemáticas podemos destacar el valor de aproximación que da para π. En su escrito "Determinación de la magnitud del círculo", cuyo problema IV se enuncia como:

Encontrar la relación entre la circunferencia y el diámetro; a través de cuerdas en un círculo dado, para encontrar la longitud de los arcos que subtiende.

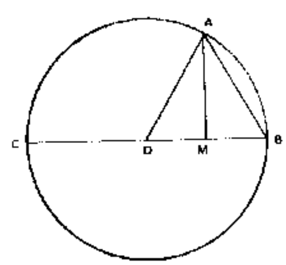


Figura 23

[14] Los datos biográficos fueron tomados de http://es.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens

Huygens toma un círculo de centro D, traza CB como diámetro, sea AB el arco de un sexto de la circunferencia desde A y traza la perpendicular al diámetro que toca a éste en M, llamando AM el seno. Supone entonces que DB es de $100{,}000$ partes, la cuerda BA contendrá el mismo número. Pero, AM será hecho de 86,603 partes y no uno menos (lo que significa que si se quita una pieza o una unidad de 86,603 habría menos de lo que debería ser), ya que es la mitad del lado del triángulo equilátero inscrito en el círculo.

Tomamos los resultados de Huygens:

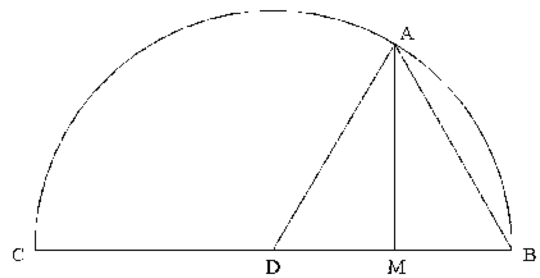


Figura 25

Haciendo referencia a la figura 25, sea AB un secante abarcando de la longitud de un arco $\frac{\pi}{n}$ en un círculo con diámetro $BC = 2$ y centro en D. Por otra parte, AM es ortogonal a BC. Entonces $AB = 2\sin\frac{\pi}{2n}$ y $AM = \sin\frac{\pi}{n}$. Huygens mostró en el Teorema 7 que:

$$q_1 = AB + \frac{AB - AM}{3} < \frac{\pi}{n}.$$

Después de 9 teoremas había llegado a

$$q_2 = AB + \frac{AB - AM}{3} * \frac{4AB + AM}{2AB + 3AM} > \frac{\pi}{n}$$

y

$$q_3 = AM + \frac{AB - AM}{3} * \frac{10(AB + AM)}{2AB + 3AM + \frac{4}{3}(q_2 - q_1)} < \frac{\pi}{n}$$

Utilizando las dos ultimas desigualdades, Huygens demostró el poder de su técnica, usando un triángulo, un hexágono con $r = 100{,}000$ determina

$$104{,}465\,\frac{2}{3} < \text{arco}\,\frac{\pi}{3} < 104727$$

$$104\,711\,\frac{1}{2} < \text{arco}\,\frac{\pi}{3} < 104727$$

entonces

$$3.14135 < \pi < 3.14181.$$

Usando un cuadrado, un octágono con $r = 1{,}000{,}000$ obtiene

$$7{,}847{,}868 < \text{arco}\,\frac{\pi}{4} < 7{,}854{,}066$$

$$7{,}853{,}885 < \text{arco}\,\frac{\pi}{4} < 7{,}854{,}066$$

entonces

$$3.14150 < \pi < 3.14164,$$

con un octágono, un polígono de 16 lados con $r = 1{,}000{,}000{,}000$ obtiene

$$392{,}679{,}714 < \text{arco}\,\frac{\pi}{8} < 392{,}699{,}148$$

$$392{,}699{,}010 < \text{arco}\,\frac{\pi}{8} < 392{,}699{,}148$$

entonces

$$3.141592 < \pi < 3.1415932,$$

y usando polígonos con 30 y 60 lados y $r = 10{,}000{,}000{,}000$ obtiene

$$10{,}471{,}972{,}889{,}195 < \text{arco}\,\frac{\pi}{30} < 10{,}471{,}975{,}512{,}584$$

$$10{,}471{,}975{,}511{,}302 < \text{arco}\,\frac{\pi}{30} < 10{,}471{,}975{,}512{,}584.$$

Por lo tanto la constante que buscamos según Huygens se encuentra entre

$$\mathbf{3.1415926533 < \boldsymbol{\pi} < 3.1415926538}.$$

Obsérvese el grado de precisión: por ejemplo, para obtener la misma aproximación del polígono de 60 lados, el método de Arquímedes tendría que utilizar un polígono de 100,000 lados.

Ahora si hacemos algunos cálculos utilizando las relaciones que da Huygens se obtiene lo siguiente:

Límite Inferior, n representa el número de términos calculados.

n	q_1	$\pi - q_1$	Cociente de errores	Orden empírico
1	2.66666666666666	0.47492598692313		
2	3.10456949966158	0.03702315392821	12.82781007	3.681202994
3	3.13397459621556	0.00761805737423		
4	3.13914757031222	0.00244508327757	15.14187851	3.920472293
5	3.14058450451184	0.00100814907795		
6	3.14110472164033	0.00048793194946	15.6129505	3.964671295
7	3.14132870924356	0.00026394434623		
8	3.14143771670383	0.00015493688596	15.78115671	3.980131049
9	3.14149583402932	0.00009681956047		
10	3.14152908648966	0.00006356710013	15.85960467	3.987284904
11	3.14154921426445	0.00004343932534		
12	3.14156197063156	0.00003068295823	15.90237635	3.991170464
13	3.14157037027178	0.00002228331801		
14	3.14157608272735	0.00001657086244	15.92822022	3.993513168
15	3.14158007661734	0.00001257697245		
16	3.14158293664190	0.00000971694789	15.94501562	3.995033606
17	3.14158502804245	0.00000762554734		
18	3.14158658588601	0.00000606770378	15.95654039	3.996075983
19	3.14158776548685	0.00000488810294		
20	3.14158867188352	0.00000398170627	15.96478891	3.996821572
21	3.14158937760653	0.00000327598326		
22	3.14158993368420	0.00000271990559	15.97089452	3.997373215
23	3.14159037662859	0.00000227696120		
24	3.14159073296874	0.00000192062105	15.97553988	3.997792782

Límite Superior, n representa el número de términos.

n	q_2	$\pi - q_2$	cociente de errores	orden empírico
1	3.33333333333333	0.19174067974354		
2	3.14381916835873	0.00222651476894	1013.404713	9.984994729
3	3.14178185803814	0.00018920444835		
4	3.14162598365927	0.00003333006948	66.80198403	6.061819047
5	3.14160135101114	0.00000869742135		
6	3.14159555925161	0.00000290566182	65.11578438	6.024935397
7	3.14159380421355	0.00000115062376		
8	3.14159316950091	0.00000051591112	64.60428625	6.01355798
9	3.14159290791073	0.00000025432094		
10	3.14159278868477	0.00000013509498	64.38004981	6.008541788
11	3.14159272982173	0.00000007623194		
12	3.14159269880605	0.00000004521626	64.26144073	6.005881421
13	3.14159268155614	0.00000002796635		
14	3.14159267151480	0.00000001792501	64.19098016	6.004298685
15	3.14159266543724	0.00000001184745		
16	3.14159266163259	0.00000000804280	64.14573324	6.0032814
17	3.14159265917959	0.00000000558980		
18	3.14159265755644	0.00000000396665	64.11483958	6.002586407
19	3.14159265645734	0.00000000286755		
20	3.14159265569759	0.00000000210780	64.09297191	6.002094262
21	3.14159265516259	0.00000000157280		
22	3.14159265477949	0.00000000118970	64.07677796	6.0017297
23	3.14159265450094	0.00000000091115		
24	3.14159265429558	0.00000000070579	64.06501956	6.001464934

Límite Inferior mejorado, donde n representa el número de términos.

n	q_3	$\pi - q_3$	Cociente de errores	Orden empírico
1	2.72727272727272	0.41431992631707		
2	3.13364031998249	0.00795233360730	52.10042068	5.703223116
3	3.14055373165393	0.00103892193586		
4	3.14134284272855	0.00024981086124	31.83341816	4.992470172
5	3.14150977949192	0.00008287409787		
6	3.14155901754434	0.00003363604545	30.88716054	4.948935345
7	3.14157696916409	0.00001568442570		
8	3.14158455831901	0.00000809527078	30.85886414	4.947613055
9	3.14158813828868	0.00000451530111		
10	3.14158997605171	0.00000267753808	30.95160379	4.951942261
11	3.14159098513236	0.00000166845743		
12	3.14159157044747	0.00000108314232	31.05413272	4.956713372
13	3.14159192580082	0.00000072778897		
14	3.14159215001380	0.00000050357599	31.14609498	4.960979388
15	3.14159229622548	0.00000035736431		
16	3.14159239433314	0.00000025925665	31.22492977	4.964626422
17	3.14159246182718	0.00000019176261		
18	3.14159250929386	0.00000014429593	31.29194995	4.967719658
19	3.14159254333526	0.00000011025453		
20	3.14159256817942	0.00000008541037	31.34909718	4.97035199
21	3.14159258659895	0.00000006699084		
22	3.14159260045110	0.00000005313869	31.39816467	4.972608326
23	3.14159261100414	0.00000004258565		
24	3.14159261913939	0.00000003445040	31.44062854	4.974558154

Haciendo uso de nuestras herramientas del cálculo vemos que efectivamente en el polígono de 60 lados Huygens obtuvo excelentes aproximaciones.

5.4 EL DESCUBRIMIENTO DE LA FORMULA DE SERIES PARA π POR LEIBNIZ, GREGORY Y NILAKANTHA

Una de las expresiones clásicas en serie para π es

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Una prueba sencilla y moderna, la cuál es muy conocida es la siguiente:

tomando en cuenta que la serie para $\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots$, entonces

$$\arctan\, x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\,.$$

La última integral tiende a 0 si $|x| \leq 1$, ya que

$$\left|\int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt\right| \leq \left|\int_0^x t^{2n+2}dt\right| = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Por lo tanto, $\arctan\, \mathrm{x}$ se representa en una serie infinita para $|x| \leq 1$:

$$\arctan\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

La serie para $\frac{\pi}{4}$ es obtenida tomando $x = 1$ en la ecuación anterior, la cual fue obtenida de forma independiente por Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$, James Gregory $(1638 - 1675)$ y un Matemático de la India en el Siglo XIV ó tal vez en el Siglo XV cuya identificación no se sabe con certeza. Usualmente escrito por Nilakantha, la prueba de la India de la serie mencionada tiene fecha de la Mitad del Siglo XV y fue consecuencia de un esfuerzo por rectificar el círculo. Los detalles de las circunstancias e ideas llevaron al descubrimiento de las series por Leibniz y Gregory son más conocidas. Es interesante entrar en estos detalles por muchas razones. La serie infinita empezó a desempeñar un papel en matemáticas solamente en la segunda mitad del Siglo XVII. Antes de esto, sólo casos particulares de las series geométricas infinitas fueron usadas por algunos. La serie de $arctan$ fue obtenida por Leibniz y Gregory al inicio de sus estudios de series infinitas, y de hecho, antes de qué los métodos y algoritmos de cálculo fueran desarrollados completamente. La historia de la serie de $arctan$ es importante porque revela las primeras ideas sobre la serie y su relación con la cuadratura o el proceso de encontrar el área bajo la curva. En el caso de Leibniz, es posible ver cómo se utiliza y transforman las viejas ideas sobre el desarrollo de métodos de cuadratura.

La obra de Leibniz, en efecto tiene que ver primordialmente con cuadratura, la serie para encontrar la constante π es el resultado (en 1673) de aplicar su método a la circunferencia. Gregory, en cambio, estaba interesado en encontrar una representación en serie infinita para cualquier función y descubre la relación entre ésta y las derivadas sucesivas de la función dada.

El descubrimiento de Gregory fue hecho en 1671, no es otro más que la Serie de Taylor quien nació hasta 1685. Las ideas del cálculo, tales como la integración por partes, el cambio de variables, y derivadas de orden superior, no se entendían completamente en 1670. Algunos casos particulares se conocían, por lo general con lenguaje geométrico.

Por ejemplo, el teorema fundamental del cálculo fue declarado como un teorema de geometría en una obra de Gregory que escribió en el año 1668. También se pueden ver ejemplos similares en un libro de Isaac Barrow, el mentor de Newton, publicado en 1670.

Por supuesto, muy poco después de este período de transición, Leibniz empezó ahora a crear las técnicas, algoritmos y notaciones de cálculo como las conocemos. Había sido precedido por Newton, al menos en cuanto a las técnicas, pero Newton no publicó nada hasta mucho más tarde.

Por lo tanto, es posible ver cómo su trabajo sobre $arctan$ fue a la vez dependiente de los conceptos anteriores y representa un paso de transición hacia sus ideas más posteriores.

Finalmente, aunque las pruebas dadas por Leibniz, Gregory y Nilakantha son muy diferentes en el enfoque y la motivación, todos ellos guardan relación con la prueba moderna.

5.4.1 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Gottfried Wilhelm Leibniz[15], (1 de julio de 1646 - Hannover, 14 de noviembre de 1716) fue un filósofo, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán.

Fue uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como "El último genio universal". Realizó profundas e importantes contribuciones en las áreas de metafísica, epistemología, lógica, filosofía de la religión, así como a la matemática, física, geología, jurisprudencia e historia. Incluso Denis Diderot, el filósofo deísta francés del siglo XVIII, cuyas opiniones no podrían estar en mayor oposición a las de Leibniz, no podía evitar sentirse sobrecogido ante sus logros, y escribió en la *Enciclopedia*: "Quizás nunca haya un hombre leído, estudiado, meditado y escrito más que Leibniz. Lo que ha elaborado sobre el mundo, sobre Dios, la naturaleza y el alma es de la más sublime elocuencia. Si sus ideas hubiesen sido expresadas con el olfato de Platón, el filósofo de Leipzig no cedería en nada al filósofo de Atenas." De hecho, el tono de Diderot es casi de

[15] Los datos biográficos fueron tomados de http://es.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Leibniz

desesperanza en otra observación, que contiene igualmente mucho de verdad: "Cuando uno compara sus talentos con los de Leibniz, se tiene la tentación de tirar todos sus libros e ir a morir silenciosamente en la oscuridad de algún rincón olvidado." La reverencia de Diderot contrasta con los ataques que otro importante filósofo, Voltaire, lanzaría contra el pensamiento filosófico de Leibniz; a pesar de reconocer la vastedad de la obra de éste, Voltaire sostenía que en toda ella no había nada útil que fuera original, ni nada original que no fuera absurdo y risible.

Ocupa un lugar igualmente importante tanto en la historia de la filosofía como en la de las matemáticas. Inventó el cálculo infinitesimal, independientemente de Newton, y su notación es la que se emplea desde entonces. También inventó el sistema binario, fundamento virtual de todas las arquitecturas de las computadoras actuales. Fue uno de los primeros intelectuales europeos que reconocieron el valor y la importancia del pensamiento chino como potencia desde todos los puntos de vista.

La formación matemática de Leibniz en el momento en que encontró la fórmula π puede ser rápidamente descrita. Había obtenido su Título de Doctor en Derecho en febrero de 1667, pero había estudiado matemáticas por su cuenta. En 1672, era un simple aficionado a las matemáticas. Ese año, visitó París y conoció a Christian Huygens $(1629-1695)$, el Físico Matemático más importante en Europa Continental.

Leibniz cuenta la historia de esta reunión en una carta de 1679 al matemático Tschirnhaus, “en ese momento... yo no sabía la definición correcta del centro de gravedad. En efecto, cuando por casualidad Huygens me habló de ello, él sabía que yo pensaba que era una línea recta trazada a través del centro de gravedad y esta siempre cortaba una figura en dos partes iguales,... Huygens se rio cuando se enteró de esto, y me dijo que nada más lejos de la verdad. Así que, excitado por este estímulo, comencé a aplicar al estudio de la geometría más compleja, aunque de hecho no había en ese momento realmente estudiado los elementos (Euclides)... Huygens, que me creía un mejor geómetra, me dio a leer las cartas de Pascal, publicado bajo el nombre de Dettonville, y de estos. Aprendí el método de los indivisibles y los centros de gravedad, es decir, la métodos bien conocidos de Cavalieri y Guldinus ".

El estudio de Pascal jugó un importante papel en el desarrollo de Leibniz como un Matemático. Fue por Pascal que él aprendió las ideas de “triángulo característico” y “transmutación”. Con el fin de entender el concepto de transmutación, se supongamos que $A \ y \ B$ son dos áreas (ó volúmenes), que se han dividido en indivisibles usualmente tomados como rectángulos infinitesimales (ó prismas). Si hay una correspondencia uno a uno entre los indivisibles de $A \ y \ B$, y si estos indivisibles tienen áreas iguales (o volúmenes), entonces B se dice que es obtenida de A por la transmutación y se sigue que $A \ y \ B$ tienen áreas iguales (o volúmenes).

Pascal también había considerado triángulos infinitesimales y mostrando su uso en la búsqueda de, entre otras cosas, el área de la superficie de una esfera. A Leibniz le llamó la atención la idea de un triángulo infinitesimal y sus posibilidades.

Leibniz fue capaz de obtener una fórmula de transmutación interesante, que luego aplico a la cuadratura de un círculo y por lo tanto, descubrió la serie para π. Para obtener la fórmula de la transmutación, se toman en cuenta dos puntos vecinos $P(x, y)$ y $Q(x + dx, y + dy)$ en una curva $y = f(x)$. En primer lugar muestra que $\acute{a}rea\ (\Delta OPQ) = \left(1/2\right)\acute{a}rea(rect\acute{a}ngulo(ABCD))$. (Ver figura 26)

Aquí PT es tangente a $y = f(x)$ en $P\ y\ OS$ es perpendicular a PT. Supongamos que p es la altura de OS y z es $AC = BD = ordenada\ de\ T$.

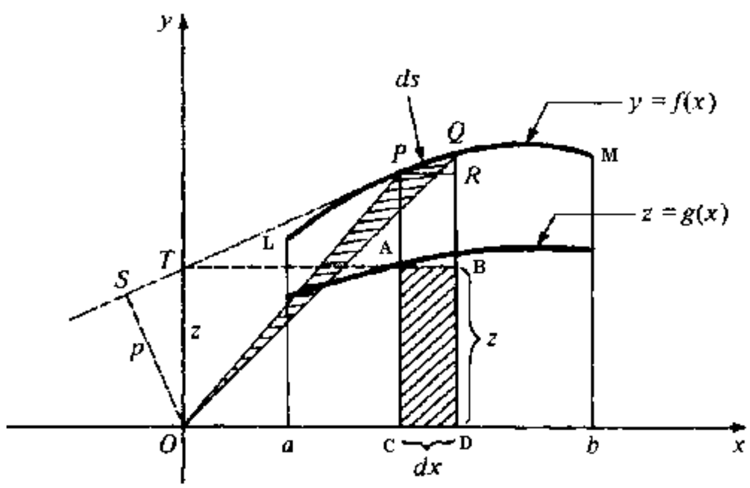


Figura 26

Tenemos que ΔOST es semejante al triángulo característico ΔPQR,

$$\frac{dx}{p} = \frac{ds}{z},$$

donde ds es la longitud de PQ. Por lo tanto

$$\acute{a}rea(OPQ) = \frac{1}{2}pds = \frac{1}{2}zdx.$$

Ahora, observamos que para cada punto P en $y = f(x)$, hay un punto correspondiente A es el punto correspondiente. Por lo tanto, conforme P se mueve de $L\ a\ M$, los puntos A forman una curva, digamos $z = g(x)$. Si el sector OLM denota la región cerrada y formada por $y = f(x)$ y la altura de las líneas $OL\ y\ OM$, entonces

$$\acute{a}rea(sector\ OLM) = \frac{1}{2}\int_a^b g(x)dx.$$

Esta es la fórmula de transmutación de Leibniz. De esto se sigue que el área bajo $y = f(x)$ es

$$\int_a^b ydx = \frac{b}{2}f(b) - \frac{a}{2}f(a) + \acute{a}rea(sector\ OLM) = \frac{1}{2}\left[[xy]_a^b + \int_a^b zdx\right].$$

Este es un caso particular de la fórmula de integración por partes. Esto se puede ver en la figura 26 en la cual observamos que

$$z = y - x\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo el valor de z en

$$\int_a^b ydx = \frac{b}{2}f(b) - \frac{a}{2}f(a) + \acute{a}rea(sector\ OLM) = \frac{1}{2}[xy]_a^b + \int_a^b zdx,$$

se encuentra que

$$\int_a^b ydx = [xy]_a^b - \int_{f(a)}^{f(b)} xdy.$$

Ahora, consideremos un círculo de radio 1 y centro $(1,0)$. Está dado por la siguiente ecuación

$$y^2 = 2x - x^2$$

en este caso,

$$z = y - x\frac{dy}{dx}$$

implica que

$$z = \sqrt{2x - x^2} - \frac{x(1-x)}{\sqrt{2x - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2x - x^2}} = \sqrt{\frac{x}{2-x}}$$

así que, $z^2 = \frac{x}{2-x}$ y por tanto

$$x = \frac{2z^2}{1+z^2}.$$

En la figura 27, sea $A\hat{O}B = 2\theta$.

Entonces

$$\text{área del sector } AOB = \theta$$

y

$$\theta = \text{área}(\Delta AOB) + \acute{a}rea\big(regi\acute{o}n\ entre\ el\ \text{área}\ \widehat{AB}\ y\ la\ l\acute{\imath}nea\ AB\big).$$

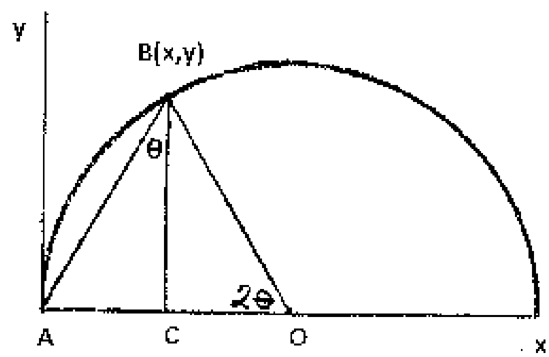


Figura 27

Por la fórmula de transmutación la segunda área es $\frac{1}{2}\int_0^x z\,dt$ donde z es dada por $z = \frac{x}{y}$. Ahora, de la figura 28,

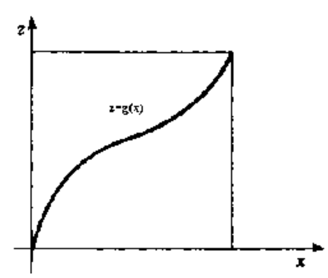


Figura 28

se observa que

$$\frac{1}{2}\int_0^x zdt = \frac{1}{2}\left(xz - \int_0^x xdu\right).$$

Usando

$$x = \frac{2z^2}{1+z^2},$$

la ecuación $\theta = área(\Delta AOB) + área(región\ AB\ entre\ la\ línea\ AB)$ se reescribe cómo

$$\theta = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xz - \int_0^z \frac{t^2}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}[z(2-x)+xz] - \int_0^z \frac{t^2}{1+t^2}dt\ = z - \int_0^z \frac{t^2}{1+t^2}dt.$$

Aquí se usó que $y = z(2-x)$.

En este punto, Leibniz fue capaz de utilizar la técnica dada por Nicolás Mercator $(1620\ a\ 1687)$, quien había considerado el problema de la cuadratura de la hipérbola $y\ (1\ +\ x)\ =\ 1$. Puesto que ya se conocía que

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

él resolvió el problema mediante la expansión de $1\ /\ (1\ +\ x)$ como una serie infinita y la integración término a término. Él tenia simultáneamente la expansión de $log\ (1\ +\ x)$. Mercator publicó este resultado en 1668, a pesar de que probablemente lo había obtenido unos años antes.

Un año más tarde, John Wallis (1616-1703) determinó los valores de x para los cuales la serie es válida. Así, Leibniz encontró que

$$\theta = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots.$$

En la figura 27, $A\hat{B}C\ =\ \theta\ \ y\ \ z\ = \frac{x}{y} = tan\ \theta$.Por lo tanto, la ecuación anterior es la serie de $arctan\ z$. Por supuesto, Leibniz no inventó la notación para la integral y diferencial las cuáles se utilizaron hasta 1675, y su descripción de los procedimientos es geométrica, pero las ideas son las mismas.

El descubrimiento de la serie infinita de π fue el primer gran logro de Leibniz. Comunicó su resultado a Huygens, quien lo felicitó, diciendo que esta propiedad notable del círculo sería celebrada entre los matemáticos por siempre.

Incluso Isaac Newton (1642-1727) elogió el descubrimiento de Leibniz. En una carta del 24 de octubre de 1676, a Henry Oldenburg, secretario de la Royal Society de Londres, escribe: "el método de Leibniz para la obtención de series convergentes es, sin duda muy elegante, y suficiente, para revelar el genio de su autor, aunque no hubiera **escrito nada más**". Por supuesto, para Leibniz, esto fue sólo un primer paso para mayores cosas como él mismo lo dice "Historia et origo calculi differentialis".

A continuación se muestra una tabla con los valores obtenidos para la serie de

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

n	$\pi/4$	π
1	1	4
3	0.66666667	2.66666667
5	0.86666667	3.46666667
7	0.72380952	2.8952381
9	0.83492063	3.33968254
11	0.74401154	2.97604618
13	0.82093462	3.28373848
15	0.75426795	3.01707182
17	0.81309148	3.25236593
19	0.7604599	3.04183962
21	0.80807895	3.23231581
23	0.76460069	3.05840277
25	0.80460069	3.21840277
27	0.76756365	3.07025462
29	0.80204641	3.20818565
31	0.76978835	3.07915339
…	…	…
101	0.79029965	3.16119861

El término n representa los términos. Como podemos observar esta serie converge de manera muy lenta al valor que ahora conocemos de π.

5.4.2 Kerala Gargya Nilakantha (c. 1450-c. 1550)

Nilakantha[16] nació en una familia de brahmanes Namputiri que llegó desde el sur de Malabar en Kerala. El Nambudiri es la casta principal de Kerala. Se trata de una casta ortodoxa, cuyos miembros se consideran descendientes de la antigua religión védica. Nilakantha estudió astronomía y Vedanta, uno de los seis sistemas ortodoxos de la filosofía hindú indio, bajo el maestro Ravi. Fue alumno también de Damodra que era el hijo de Paramesvara un astrónomo indio famoso. Una serie de textos sobre astronomía matemática escrita por Nilakantha han sobrevivido. El Tantrasangraha es su tratado en astronomía escrito en 1501, consta de 432 versos en sánscrito dividido en 8 capítulos, y abarca diversos aspectos de la astronomía india. Se basa en los modelos epicicloidal y excéntrica del movimiento planetario. Los dos primeros capítulos tratan de los movimientos y las longitudes de los planetas. El tercer capítulo en el Tratado de ofertas de la sombra con varios problemas relacionados con la posición del Sol sobre la esfera celeste, incluyendo las relaciones de sus expresiones en los tres sistemas de coordenadas, es decir, las coordenadas eclípticas, ecuatoriales y horizontales. En particular, utiliza los resultados descubiertos por Madhava y es una fuente importante de los notables resultados matemáticos que él descubrió. Se enuncian Teoremas sin pruebas de las Series de $arctg,\ coseno\ y\ seno$.

Estos trabajos fueron llevados al mundo occidental por un inglés llamado C. M. Whish en 1835. Desafortunadamente, su trabajo sobre el tema casi no tuvo impacto y pasó inadvertido durante casi un siglo cuando C. Rajagopal y sus socios comenzaron a publicar sus resultados de los estudios de estos manuscritos.

Se desprende de los datos astronómicos contenidos en el Tantrasangraha que fue compuesto alrededor del año 1500. El Yuktibhasa fue escrito casi un siglo después. No está del todo claro el descubrimiento de estas series. En el Aryabhatiya Bhasya, un trabajo sobre astronomía, Nilakantha atribuyo la serie para el $seno$ a Madhava. Este matemático vivió entre los años 1340-1425. No se sabe si Madhava encuentra las otras series o si son descubrimientos porteriores.

Poco se sabe acerca de estos matemáticos. Madhava vivía cerca de Cochín, en la parte más meridional de la India (Kerala) y algunos de estos trabajos astronómicos todavía sobreviven. Nilakantha fue un genio versátil que escribió no sólo en astronomía y matemáticas, sino también en la filosofía y la gramática.

Sus exposiciones eruditas fueron bien conocidos y estudiados hasta hace muy poco. Él atrajo a muchos estudiantes talentosos, incluyendo Tuncath Ramanujan Ezuthassan, una figura clara e importante en la literatura de Kerala. Acerca de Jyesthadeva, no se sabe nada, excepto que era un brahmán de la casa de Parakroda.

[16] Tomada de http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nilakantha.html

En el Tantrasangraha-vakhya, la serie de $arctan, seno\ y\ coseno$ se dan en verso que, cuando se convierten en símbolos matemáticos puede ser escrito como:

$$r\ arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{1}.\frac{ry}{x} - \frac{1}{3}.\frac{ry^3}{x^3} + \frac{1}{5}.\frac{ry^5}{x^5} - \cdots, donde\ \frac{y}{x} \leq 1$$

$$y = s - s.\frac{s^2}{(2^2+2)r^2} + s.\frac{s^2}{(2^2+2)r^2}.\frac{s^2}{(4^2+4)r^2} - \cdots.(seno)$$

$$r - x = r.\frac{s^2}{(2^2-2)r^2} - r.\frac{s^2}{(2^2-2)r^2}.\frac{s^2}{(4^2-4)r^2} + \cdots.\ (coseno).$$

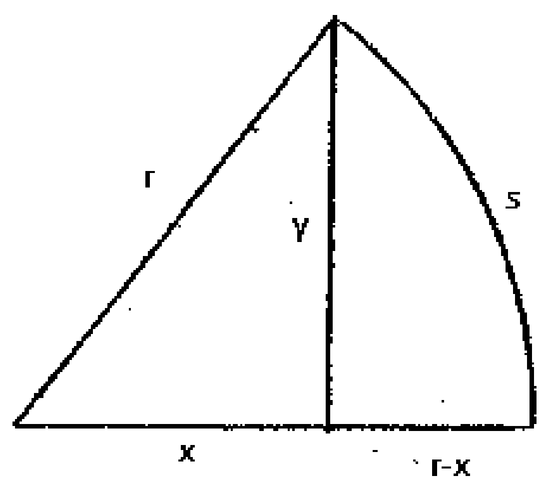


Figura 29

Hay algunas características especiales en el tratamiento de la serie para π que no fueron considerados por Leibniz y Gregory. Nilakantha estableció algunas aproximaciones racionales para el error en el que incurre tomando sólo los primeros n términos de la serie. La expresión de la aproximación se utiliza para transformar la serie de π en una que converge más rápidamente. Los errores se dan de la siguiente manera:

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1), \quad i = 1,2,3.$$

Donde

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \qquad f_2(n) = \frac{n/2}{n^2+1} \quad y \quad f_3(n) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1}{(n^2+5)n/2}.$$

Las series transformadas son:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \frac{1}{7^3 - 7} - \cdots$$

y

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5 + 4 * 1} - \frac{4}{3^5 + 4 * 3} + \frac{4}{5^5 + 4 * 5} - \cdots.$$

La prueba de Leibniz de la fórmula de π fue encontrada por la cuadratura de un círculo. La prueba en el libro de Jyesthadeva es por una rectificación directa de un arco de un círculo. En el diagrama a continuación, el $arco\ AC$ es $\frac{1}{4}$ del círculo de radio 1 con centro O y $OABC$ es un cuadrado.

El lado AB se divide en n partes iguales de longitud δ, así que $n\delta = 1, P_{r-1}P_r = \delta$. $EF\ y\ P_{r-1}D$ son perpendiculares a OP_r. Ahora, los triángulos $OEF\ y\ OP_{r-1}D$ son similares, lo que nos da

$\frac{EF}{OE} = \frac{P_{r-1}D}{OP_{r-1}}$, esto es, $EF = \frac{P_{r-1}D}{OP_{r-1}}$.

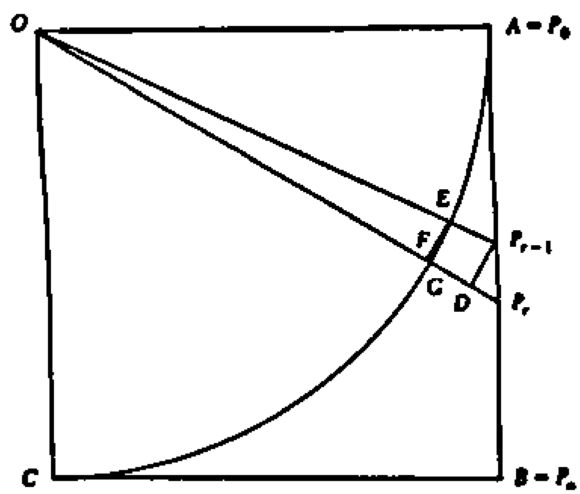


Figura 30

La semejanza de los triángulos $P_{r-1}P_rD$ y OAP_r nos conduce a

$$\frac{P_{r-1}P_r}{OP_r} = \frac{P_{r-1}D}{OA}, \quad \text{ó} \quad P_{r-1}D = \frac{P_{r-1}P_r}{OP\_r}.$$

Por lo tanto

$$EF = \frac{P_{r-1}P_r}{OP_{r-1}OP_r} = \frac{P_{r-1}P_r}{OP_r^2} = \frac{\delta}{1 + AP_R^2} = \frac{\delta}{1 + r^2\delta^2}.$$

Si tenemos $EG \approx EF \approx \frac{\delta}{1+r^2\delta_r^2}, \frac{1}{8}\ del\ arco$ del círculo es

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{1 + r^2\delta^2}.$$

Por supuesto, no existía una idea clara de los límites en ese momento, la relación se entiende en un sentido intuitivo solamente. Para evaluar el límite, Jyesthadeva utiliza dos lemas. Uno de ellos es la serie geométrica

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Jyesthadeva dice que la expansión se encuentra con un procedimiento de iteraciones

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x\left(1 - x\left(\frac{1}{1+x}\right)\right).$$

El otro resultado es que

$$S_n^{(p)} \equiv 1^p + 2^p + \cdots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1},\ \text{para } n \text{ grande.}$$

Un bosquejo de la prueba es dada por Jyesthadeva.

Se observa que $\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{\delta}{1+r^2\delta^2}$ se puede escribir, después de una expansión de $\frac{\delta}{1+r^2\delta^2}$ en una serie geométrica

$$\frac{\pi}{4} = \lim_{n\to\infty}\left[\delta\sum_{r=1}^{n} 1 - \delta^3\sum_{r=1}^{n} r^2 + \delta^5\sum_{r=1}^{n} r^4 - \cdots\right] = \lim_{n\to\infty}\left[1 - \frac{1}{n^3}\sum_{r=1}^{n} r^2 + \frac{1}{n^5}\sum_{r=1}^{n} r^4 - \cdots\right]$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Donde se hemos utilizado la relación $S_n^{(p)} \equiv 1^p + 2^p + \cdots + n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$ y el hecho de que $\delta = 1 / n$.

Consideremos la aproximación $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1)$ y su aplicación a la transformación de la serie. Supongamos que

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1),$$

Donde $f(n+1)$es una función racional de n de la cual σ_n será una mejor aproximación a $\frac{\pi}{4}$ en la enésima suma parcial S_n. Cambiando a n por $n-2$ se obtiene:

$$\sigma_{n-2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n-2} \pm f_i(n-1)$$

restando la segunda relación de la primera, se obtiene

$$\pm u_n = \sigma_n - \sigma_{n-2} = \pm \frac{1}{n} \mp f(n+1) \mp f(n-1).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sigma_n = \sigma_{n-2} \pm u_n = \sigma_{n-4} \mp u_{n-2} \pm u_n = \cdots = \sigma_1 - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots \pm u_n \\ = 1 - f(2) - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots u_n\end{aligned}$$

y como

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto

$$\sigma_n = 1 - f(2) - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots.$$

Por lo tanto, tenemos una nueva serie de π, que depende de cómo elija la función $f(n)$. El objetivo es elegir $f(n)$ de tal manera que $\frac{\pi}{4} = 1 - f(2) - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots$. converja mas rápido que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$. Ahora, la ecuación $\pm u_n = \sigma_n - \sigma_{n-2} = \pm \frac{1}{n} \mp f(n+1) \mp f(n-1)$implica que

$$f(n+1) + f(n-1) = \frac{1}{n} - u_n.$$

La serie $\frac{\pi}{4} = 1 - f(2) - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots$. será convergente más rápidamente que $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$, si $u_n$es $o\left(\frac{1}{n}\right)$, es decir, insignificante en comparación con $1 / n$. Es razonable suponer $f(n+1) \approx f(n-1) \approx f(n)$. Estas observaciones, junto con $f(n+1) + f(n-1) = \frac{1}{n} - u_n$. Implica que $f(n) = 1/2n$ es una posible aproximación racional en la ecuación $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots \mp \frac{1}{n} \pm f_i(n+1)$. Con esta $f(n)$, el valor de u_n está dada por $f(n+1) + f(n-1) = \frac{1}{n} - u_n$.

Esto lleva a

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} = -\frac{1}{n^3 - n},$$

y si se sustituye esta relación en $\frac{\pi}{4} = 1 - f(2) - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots$,se obtiene

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \frac{1}{7^3 - 7} - \cdots.$$

La otra serie

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5 + 4 * 1} - \frac{4}{3^5 + 4 * 3} + \frac{4}{5^5 + 4 * 5} - \cdots$$

es obtenida tomando $f(n) = \frac{n/2}{n^2+1}$ en la ecuación $\frac{\pi}{4} = 1 - f(2) - u_3 + u_5 - u_7 + \cdots$.

Se puede demostrar que si $\frac{\pi}{4} = S_n + f(n)$, donde S_n es la enésima suma parcial, $f(n)$ se representa como una fracción continua:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+}\frac{1^2}{n+}\frac{2^2}{n+}\frac{3^2}{n+}\dots.\right] = \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{2^2}{n + \cfrac{3^2}{n + \cdots}}}}.$$

Los tres primeros convergentes son

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, f_2(n) = \frac{n/2}{n^2 + 1} \ y \ f_3(n) = \frac{(n/2)^2 + 1}{(n^2 + 5)n/2}.$$

Estos han sido expresados en las series anteriormente mencionadas en el capitulo 3, los cuales son los resultados que ya había dada Madhava. Se observa que, Nilakantha estaba usando algún procedimiento que daba a las sucesiones convergentes, pero este artículo no contiene ninguna sugerencia de que la fracción continua que representa u_n fuera conocida para él. Esta fracción continua implica que

$$\frac{2}{4-\pi} = 2 + \frac{1^2}{2+}\frac{2^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\dots = \cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cdots}}}}$$

esta serie se puede comparar con la serie del Matemático Inglés del Siglo XVII, William Brouncker (1620-1684) del cual se hablará a continuación, enuncio el siguiente resultado

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \frac{1^2}{2+}\frac{3^2}{2+}\frac{5^2}{2+}\dots.$$

La tercera aproximación es

$$f_3(n) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + 1}{(n^2+5)n/2}$$

La cuál es muy eficaz para obtener buenos valores numéricos para el cálculo de $\boldsymbol{\pi}$, estos resultados se muestran en el capítulo 3, el cuál no da un valor hasta ocho decimales correctos. Nilakantha da la siguiente relación para obtener dicho valor $\frac{\mathbf{104348}}{\mathbf{33215}}$ la cual es correcta hasta nueve lugares decimales, donde $\boldsymbol{n}$ es el número de términos de la sucesión.

n	Aproximación	π-Aproximación
1	4.00000000000000	0.85840734641021
2	3.00000000000000	0.14159265358979
3	3.16666666666667	0.02507401307687
4	3.13333333333333	0.00825932025646
5	3.14523809523810	0.00364544164830
6	3.13968253968254	0.00191011390725
7	3.14271284271284	0.00112018912305
8	3.14088134088134	0.00071131270845
9	3.14207181707182	0.00047916348202
10	3.14125482360776	0.00033782998203
11	3.14183961892940	0.00024696533961
12	3.14140671849650	0.00018593509329
13	3.14173609926067	0.00014344567087
14	3.14147968900425	0.00011296458554
15	3.14168318920776	0.00009053561796
16	3.14151898559528	0.00007366799452
17	3.14165339419743	0.00006074060763
18	3.14154198599778	0.00005066759201
19	3.14163535667939	0.00004270308960
20	3.14155633028457	0.00003632330522

Se observa que la serie de Nilakantha converge a π de forma muy lenta, ya que en el término 343 da una aproximación de 3.14159260359404 y un error de 0.00000004999575.

5.4.3 WILLIAM VISCOUNT BROUNCKER

William Viscount Brouncker[17] (1620-1684) Brouncker obtuvo grado de Mestro en la Universidad de Oxford en 1647. Fue uno de los fundadores y primer presidente de la Royal Society. En 1662, se convirtió en canciller de la reina Catalina, entonces era jefe del Hospital de Santa Catalina. Fue nombrado uno de los miembros de la Comisión de la Armada en 1664 y su carrera se puede rastrear en el Diario de Samuel Pepys, a pesar de sus desacuerdos frecuentes en el diario Brouncker muy respetado más que la mayoría de sus colegas.

Su trabajo matemático que se trate en particular, los cálculos de las longitudes de la parábola y cicloide, y la cuadratura de la hipérbola, que requiere aproximación de la función logaritmo natural por serie infinita. Él fue el primer europeo para resolver lo que ahora se conoce como la ecuación de Pell. Fue el primero en Inglaterra en tomar interés en fracciones continuas generalizadas y, tras el trabajo de John Wallis, que proporcionan el desarrollo de la fracción continua generalizada de π.

Consideró la ecuación

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y la escribió de la forma

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

sustituyendo en esta expresión para $\boldsymbol{x}$ en el lado derecho, obtiene

$$\boldsymbol{x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}.$$

Ahora sustituye para x en el lado derecho de la ecuación anterior, y sustituye nuevamente cada vez que aparece x, obtiene la fracción continua

$$\boldsymbol{x = 1 + \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots etc.}}\right)}}$$

[17] Los datos biográficos fueron tomados de http://en.wikipedia.org/wiki/William_Brouncker,_2nd_Viscount_Brouncker

Se puede comprobar a partir de la ecuación original, el límite es el número irracional

$$x = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 1.61803\ldots,$$

y este número ahora se puede aproximar por una fracción racional lo más cerca como se desee y cortar la fracción continua en un punto correspondiente. Las fracciones racionales obtenidas cortando el proceso en pasos consecutivos se denominan convergentes; por ejemplo, los términos convergentes de la fracción continua son

$$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\frac{13}{8},\frac{21}{13},\frac{34}{21},\frac{55}{34},\frac{89}{55},\frac{144}{89},\ldots etc.,$$

el proceso converge bastante rápido; por ejemplo, la ultima fracción en los límites de convergencia es $\frac{144}{89} = 1.61789$, lo que concuerda con 4 cifras significativas respecto al valor dado para x. Esto se explica en el texto de las fracciones continuas.

El resultado que Brouncker transformó en una fracción continua era en realidad dado por Wallis, que era $\frac{4}{\pi} = \cdots$. La fracción continua que Brouncker obtuvo fue la expresion

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2+\cdots}}}}}$$

con convergentes$1,\frac{3}{2},\frac{15}{13},\frac{105}{76},\frac{945}{789},\ldots$ como obtuvo Brouncker este resultado, nadie lo sabe; Wallis demostró la equivalencia con su resultado, pero su prueba es tan complicada que es casi seguro que no refleja la derivación de Brouncker.

El resultado de Brouncker fue probado más tarde por Euler (1775), cuya demostración fue la siguiente. Considero la serie convergente

$$S = a_0 + a_1 + a_1a_2 + a_1a_2a_3 + +a_1a_2a_3a_4 + \cdots$$

la cual es equivalente con la fracción continua

$$S = a_0 + \cfrac{a_1}{1-\cfrac{a_2}{1+a_2-\cfrac{a_3}{1+a_3-\cdots}}}.$$

Ahora considera la serie

$$arc\tan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

y establece $a_0 = 0, a_1 = x, a_2 = -\frac{x^2}{3}, a_3 = -\frac{3x^2}{5}, \ldots$; entonces

$$arc\tan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{x^2}{3 - x^2 + \cfrac{9x^2}{5 - 3x^2 + \cfrac{25x^2}{7 - 5x^2 + \cdots}}}}$$

si se estableció $x = 1$, tenemos $arctan\ x = \frac{\pi}{4}$, el resultado de Brouncker.

5.5 ISAAC NEWTON

Sir Isaac Newton[18] (1642 -1727) fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés, autor de los *Philosophiae naturalis principia mathematica*, más conocidos como los *Principia*, donde describió la ley de gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en su obra *Opticks*) y el desarrollo del cálculo matemático. Newton comparte con Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes. Entre sus hallazgos científicos se encuentran el descubrimiento de que el espectro de color que se observa cuando la luz blanca pasa por un prisma es inherente a esa luz, en lugar de provenir del prisma (como había sido postulado por Roger Bacon en el siglo XIII); su argumentación sobre la posibilidad de que la luz estuviera compuesta por partículas; su desarrollo de una ley de convección térmica, que describe la tasa de enfriamiento de los objetos expuestos al aire; sus estudios sobre la velocidad del sonido en el aire; y su propuesta de una teoría sobre el origen de las estrellas. Fue también un pionero de la mecánica de fluidos, estableciendo una ley sobre la viscosidad.

A los dieciocho años ingresó en la Universidad de Cambridge para continuar sus estudios. Newton nunca asistió regularmente a sus clases, ya que su principal interés era la biblioteca. Se graduó en el College Trinity como un estudiante mediocre debido a su formación principalmente autodidacta, leyendo algunos de los libros más importantes de matemática y filosofía natural de la época. En 1663 Newton leyó la *Clavis mathematicae* de William Oughtred, la *Geometría* de Descartes, de Frans van Schooten, la Óptica de Kepler, la *Opera mathematica* de Viète, editadas por Van Schooten y, en 1664, la *Aritmética* de John Wallis, que le serviría como introducción a sus investigaciones sobre las series infinitas, el teorema del binomio y ciertas cuadraturas.

En 1663 conoció a Isaac Barrow, quien le dio clase como su primer profesor Lucasiano de matemática. En la misma época entró en contacto con los trabajos de Galileo, Fermat, Huygens y otros a partir, probablemente, de la edición de 1659 de la *Geometría* de Descartes por Van Schooten. Newton superó rápidamente a Barrow, quien solicitaba su ayuda frecuentemente en problemas matemáticos.

En esta época la geometría y la óptica ya tenían un papel esencial en la vida de Newton. Fue en este momento en que su fama comenzó a crecer ya que inició una correspondencia con la Royal Society. Newton les envió algunos de sus descubrimientos y un telescopio que suscitó un gran interés de los miembros de la Sociedad, aunque también las críticas de algunos de sus miembros, principalmente Robert Hooke. Esto fue el comienzo de una de las muchas disputas que tuvo en su carrera científica. Se considera

[18] Los datos biográficos fueron tomados de http://en.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

que Newton demostró agresividad ante sus contrincantes que fueron principalmente, (pero no únicamente) Hooke, Leibniz y, en lo religioso, la Iglesia Católica Romana. Como presidente de la Royal Society, fue descrito como un dictador cruel, vengativo y busca-pleitos. Sin embargo, fue una carta de Hooke, en la que éste comentaba sus ideas intuitivas acerca de la gravedad, la que hizo que iniciara de lleno sus estudios sobre la mecánica y la gravedad. Newton resolvió el problema con el que Hooke no había podido y sus resultados los escribió en lo que muchos científicos creen que es el libro más importante de la historia de la ciencia, el *Philosophiae naturalis principia mathematica*.

Para un gigante como Newton, el cálculo de π fue muy sencillo, y en efecto, en su Metodo de Fluxiones y Serie Infinita, el dedica solo un párrafo de solo 4 líneas, disculpándose por tal trivialidad trivialidad. Y da el valor de π con 16 decimales.

La Serie de Gregory-Leibniz:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots.$$

Fue teóricamente interesante, ya que esta serie ayudaba para una nueva aproximación para calcular π. Pero, para cálculos numéricos era prácticamente inútil. La convergencia de esta serie era tan lenta que 300 términos eran insuficientes para obtener 2 lugares decimales, y 2 lugares decimales eran menos precisos que $3\frac{1}{7}$, el valor que Arquímedes había obtenido 2000 años antes.

Newton había encontrado la forma para calcular la fluxión (derivada) de un fluido (variable), y a la inversa, para encontrar la cantidad de fluido de una Fluxión dada (para integrar). Que era encontrar el área bajo la curva. De este modo encontró (en símbolos modernos)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

usando su descubrimiento del teorema del binomio, e integrando término por término

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1*3}{2*4}x^4 + \frac{1*3*5}{2*4*6}x^6 + \cdots\right)dx$$

y utilizando $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$

obtiene

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1*3}{2*4}\frac{x^5}{5} + \cdots$$

sustituyendo $x = {}^{1}/_{2}$, el cual nos da $\arcsin x = {}^{\pi}/_{6}$, …

$$\pi = 6\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 * 3 * 2^3} + \frac{1 * 3}{2 * 4 * 5 * 2^5} + \cdots\right).$$

La cual converge más rápido que la serie de Gregory-Leibniz, donde $\boldsymbol{n}$ es el número de términos de la sucesión, se muestran algunos términos:

n	Aproximación	π- Aproximación	Cociente de Errores	Orden Empírico
1	3.00000000000000	0.14159265358979		
2	3.12500000000000	0.01659265358979	8.533454449	3.093129881
3	3.13906250000000	0.00253015358979		
4	3.14115513392857	0.00043751966122	37.92436103	5.245052968
5	3.14151117234003	0.00008148124976		
6	3.14157671577487	0.00001593781493	158.7515981	7.310627305
7	3.14158942531912	0.00000322827067		
8	3.14159198235838	0.00000067123141	651.8164298	9.348321907
9	3.14159251115786	0.00000014243193		
10	3.14159262287062	0.00000003071917	2652.455686	11.37311293
11	3.14159264687556	0.00000000671423		
12	3.14159265210589	0.00000000148391	10740.45183	13.39076707
13	3.14159265325874	0.00000000033105		
14	3.14159265351534	0.00000000007445	43358.87733	15.40403978
15	3.14159265357293	0.00000000001686		
16	3.14159265358595	0.00000000000384	174717.2308	17.41466237
17	3.14159265358891	0.00000000000088		
18	3.14159265358959	0.00000000000020	704897.1297	19.42705321
19	3.14159265358975	0.00000000000005		
20	3.14159265358978	0.00000000000001	13944704.09	23.73321398
21	3.14159265358979	0.00000000000000		

Eso es lo que la mayoría de los libros de Historia dicen acerca del Método de Newton para obtener π. Observando el trabajo original, sin embargo, encontramos que Newton uso un método un poco diferente. Él considero un círculo cuya ecuación es

$$y = \sqrt{x - x^2}.$$

Es decir, un círculo (figura 31) con radio ${}^{1}/_{2}$ con centro en $(\frac{1}{2}, 0)$. Entonces el segmento circular ADB tiene área:

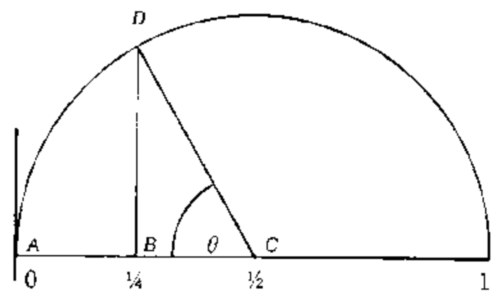


Figura 31

$$a = \int_0^{1/4} \sqrt{x - x^2}dx = \int_0^{1/4} \sqrt{x}\sqrt{(1-x)}dx$$
$$= \left(2/_3\right)x^{3/2} - \left(1/_5\right)x^{5/2} - \left(1/_{28}\right)x^{7/2} - \left(1/_{72}\right)x^{9/2}\Big|_0^{1/4}$$
$$= 2/_{(3*2^3)} - 1/_{(5*2^5)} - 1/_{(28*2^7)} - 1/_{(72*2^9)} - \cdots$$

Newton usó el Teorema Binomial. Por otro lado, el segmento ABD es igual al sector ACD el cual es menos el triángulo BCD, y como $CD = 1, BD = \sqrt{3/_4}$, Newton encontró

$$a = \pi/_{24} - \sqrt{3/_{32}}.$$

Comparó las dos ecuaciones anteriores, y obtiene

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{5*2^5} - \frac{1}{28*2^7} - \frac{1}{72*2^9} - \cdots\right).$$

Es así cómo Newton obtiene el valor de π, 22 términos son suficientes para tener 16 lugares decimales correctos (el último fue incorrecto por el error inevitable de redondeo). Muy lejos de los polígonos de Arquímedes, donde con un polígono de 96 lados (extrayendo raíces cuadradas 4 veces) produjo solamente ¡2 lugares decimales!

Los cazadores de dígitos de la época de Newton regresaron a las series de Gregory:

$$\arctan x = x - x^3/_3 + x^5/_5 - x^7/_7 + \cdots.$$

La cual fue modificada de varias formas para acelerar la convergencia. El Astrónomo Abraham Sharp (1651-1742), por ejemplo, sustituyó $\sqrt{1/_3}$, obtuvo

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3*3} + \frac{1}{3^2*5} - \frac{1}{3^3*7} + \cdots\right)$$

usando esta serie, cálculo 72 lugares decimales.

En 1706, John Machín $(1680 - 1752)$, Profesor de Astronomía en Londres, uso las series Gregory y el siguiente artificio con el cual la convergencia es rápida y da cálculos numéricos muy buenos.

Para $\tan\beta = {}^{1}/_{5}$, obtiene

$$\tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1 - tan^2\,\beta} = \frac{5}{12} \quad y \quad \tan 4\beta = \frac{2\tan 2\beta}{1 - tan^2\,2\beta} = \frac{120}{119}.$$

Esto difiere de 1 solamente por ${}^{1}/_{119}$, si se expresa $\arctan 1 = {}^{\pi}/_{4}$; en términos de ángulos, esta diferencia es:

$$\tan\left(4\beta - {}^{\pi}/_{4}\right) = \frac{\tan 4\beta - 1}{1 + \tan 4\beta} = \frac{1}{239}.$$

Entonces

$$\arctan\left({}^{1}/_{239}\right) = 4\beta - {}^{\pi}/_{4} = 4\arctan\left({}^{1}/_{5}\right) - {}^{\pi}/_{4}.$$

Sustituyendo en la serie de Gregory por en las dos $arctan$ en la ecuación anterior, Machín obtiene

$${}^{\pi}/_{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3*5^3} + \frac{1}{5*5^5} - \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3*239^3} + \frac{1}{5*239^5} - \cdots\right).$$

En la siguiente tabla se muestran algunos valores para la sucesión de Machín, donde $\boldsymbol{n}$ es el número de términos de la sucesión

$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{Aproximación}$	$\boldsymbol{\lvert\pi - Aproximación\rvert}$	**Cociente de errores**	**Orden empírico**
1	3.18326359832636	0.0416709447366		
2	3.14059702932606	0.0009956242637	41.85408718	5.387296608
3	3.14162102932503	0.0000283757352		
4	3.14159177218218	0.0000008814076	1129.584367	10.14157631
5	3.14159268240440	0.0000000288146		
6	3.14159265261531	0.0000000009745	29118.71399	14.82965902
7	3.14159265362355	0.0000000000338		
8	3.14159265358860	0.0000000000012	740303.4334	19.49775719
9	3.14159265358984	0.0000000000000		
10	3.14159265358979	0.0000000000000	32442362.5	24.95137555
11	3.14159265358979	0.0000000000000		
12	3.14159265358979	0.0000000000000	1097172	20.06535828

5.6 CONCLUSIONES

En este trabajo se analizaron diferentes métodos que fueron utilizados a lo largo de la historia para el cálculo de π; si utilizamos los métodos mencionados y nuestras herramientas modernas de cálculo, podemos obtenemos excelentes aproximaciones para π.

Arquímedes fue uno de los grandes matemáticos que se interesó en calcular dicha constante, el utilizó el método de inscribir y circunscribir polígonos regulares en una circunferencia de radio 1, con estos cálculos logro aproximar el valor de π, con dos dígitos decimales correctosel cual lo obtuvo con un polígono regular de 96 lados.

El trabajo realizado en China, tanto por Liu y Zu, aunque basado en las ideas de Arquímedes, solo usa polígonos regulares inscritos y radios distintos de 1 y de esta manera obtienen fórmulas recursivas que resultan en mejores aproximaciones a π. En la India calcularon este valor mediante distintos Teoremas, que enunciamos sin demostraciones. De entre los últimos “arquimedianos”, destacan Snell y Huygens, los cuales obtienen con poco trabajo, precisiones que solamente pudieran obtenerse mediante polígonos de una gran cantidad de lados, usando el Método de Arquímedes.

Siguiendo otra línea de razonamiento, Wallis utilizó interpolación sobre unas tablas especiales y obtiene de manera muy ingeniosa una serie la cual se aproxima a π, aunque de forma lenta. Leibniz utilizó la notación moderna y las Series de Gregory para deducir la misma serie.. Nilakantha aproximó este valor mejorando las series de Gregory- Leibniz, mediante la adición delos “convergentes”. Newton da las mejores aproximaciones mejorando la Serie de Gregory-Leibniz y con solo 22 términos obtiene 16 decimales correctos.

También tenemos expresiones para π en la forma de fracciones continuas, una de las cuales es obtenida por Brouncker, las cuales fueron demostradas más tarde por Euler.

Podemos pues concluir que el estudio histórico de las diferentes maneras de aproximarπ , y utilizar unos pocos conceptos modernos de Análisis Numérico, nos ha dado una mejor perspectiva de un concepto fundamental en las matemáticas.

5.7 REFERENCIAS

- Beckmann, Petr. *A history of pi.* St. Martin Press. New York. 1971.
- Berggren, Lennart. Borwein, Jonathan M. Borwein, Peter B. *Pi.* Ed. Springer.1997.
- C. H. Edwards, Jr. *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag New York, Inc. 1979.
- Engels, Hermann. *Quadrature of the circle in ancient Egypt*. Technical university of Aachen. Historia Mathematica 4 (1977), 137-140.
- Francois Viète Translation of Article 9 (Excerpt 2). *Defense for the New Cyclometry or "Anti-Axe".*
- G. M. Phillips. *Archimedes the numerical analyst*. Reprinted from the American mathematical monthly, vol. 88, No. 3, March 1981. The Mathematical Institute, University of Sa. Andrews, Sa. Andrews, Scotland.
- Gregory. *Correspondence with John Collins.* 1671.
- Huygens. *De Circuli Magnitudine Inventa*. 1724.
- Jones, William. *The First Use of π for the Circle Ratio*. 1706.
- Lam Lay-Yong. *Circle Measurements in ancient China*, Department of Mathematics, National University of Singapore, Singapore 0511, Republic of Singapore, and Ang Tian-Se, Department of Chinese Studies, University of Malaya, Kuala Lumpur, Malaysia. Historia Mathematica 13 (1986), 325-340.
- Madhava. *The Power Series for Arctan and Pi*. *On the Hindu Quadrature of the Circle*. Appendix by K. Balangadharan. (~1400)
- Newton, Isacc. *Of the Method of Fluxions and Infinite Series*. 1737.
- Roy. *The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha.* 1990.
- Viète. *Variorum de Rebus Mathematicis Reponsorum Liber VIII*. Appendix IV-Traslations of Viète and Huygens. Translation of Article 9 (Excerpt 1): Various Responses on Mathematical Matters: Book VIII (1593). Chapter XVIII.
- Wallis. *Computation of π bye Successive Interpolations.* 1655.