



UNIVERSIDAD MICHUACANA DE SAN
NICOLÁS DE HIDALGO

ESCUELA DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

**“LA RELACIÓN ENTRE LA DISTRIBUCIÓN DE
PROBABILIDAD DEL CAMPO DE DENSIDAD Y LA
DISTRIBUCIÓN DE MASAS DE LOS NÚCLEOS DENSOS
EN NUBES MOLECULARES”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA

Vianey Edaly Camacho Pérez

ASESOR DE TESIS

Dr. Enrique Vázquez Semadeni

Noviembre 2012

*Dedicado a
mi familia*

Agradecimientos

Gracias a la escuela de Ciencias Físico Matemáticas, a mis profesores, amigos y compañeros por su apoyo en mi formación personal y académica.

A mi asesor, el Dr. Enrique Vázquez Semadeni, por compartir sus conocimientos y hacer posible el fin de este ciclo.

Índice

Agradecimientos	v
1. Introducción	1
2. Conceptos básicos	5
2.1. Medio Interestelar	5
2.1.1. Medio Interestelar	5
2.1.2. Relaciones de escalamiento de Larson	8
2.2. Conceptos básicos de formación estelar	9
2.3. Procesos colectivos	11
2.3.1. Tasa y eficiencia de formación estelar	12
2.3.2. Función de masa inicial	12
2.3.3. Distribución de masas de los núcleos densos (CMF) en las nubes moleculares	15
2.4. Dinámica de fluidos	16
2.4.1. Espectro de potencias de la turbulencia	16
2.4.2. Choques. Condiciones de salto en un medio isotérmico . .	18
2.5. La pPDF en las nubes moleculares	20
3. Teoría Padoan y Nordlund 2002	23
3.1. Origen de los núcleos densos	23
3.2. La CMF	25
3.3. La hipótesis oculta	29

4. Segunda Distribución	31
4.1. Distribución de δ de Dirac	33
4.2. Distribución con ancho finito	36
5. Simulaciones Numéricas	41
5.1. Simulaciones	41
5.2. Distribución de ρ y m	42
6. Discusión y conclusiones	51
6.1. Limitaciones	53
A. Tiempo de caída libre	57
B. Condiciones de salto MHD	59
Bibliografía	65

Resumen

En este trabajo se analiza la obtención del número de grumos densos de masa dada (en inglés, clump mass function, o CMF) en un flujo isotérmico y supersónicamente turbulento. Primeramente se hace un análisis del seminal trabajo de Padoan & Nordlund (2002) para derivar la CMF, discutiéndose las suposiciones implícitas que contiene. Con base en este análisis, se presenta entonces una derivación formal de la CMF a partir de la función de densidad de probabilidad (PDF) del campo de densidad (pPDF) en este tipo de flujos, mostrando que además de la pPDF es necesario conocer la distribución conjunta de grumos de densidad ρ y masa m , $P(\rho|m)$. Se discute también el hecho de que $P(\rho|m)$ puede escribirse como el producto de las probabilidades absolutas $P(\rho)$ denotada (pPDF) y $P(m)$ si y sólo si las variables ρ y m pueden considerarse como variables al azar independientes entre sí. Para determinar si existe dependencia o no entre estas variables, se recurre a simulaciones numéricas preexistentes de estos flujos, realizadas con una malla numérica fija y uniforme, para calcular la distribución de masas de los grumos en intervalos restringidos de densidad, y así determinar si esta distribución depende o no del intervalo de densidad. El resultado que se obtiene sugiere que sí existe dependencia entre las variables, aunque un análisis de los sesgos numéricos sugiere que el resultado no es concluyente, por lo que se propone repetirlo a futuro con simulaciones de malla adaptiva.

En conclusión, se argumenta que la obtención de la CMF requiere siempre de una función de distribución adicional a la pPDF, y que es necesario determinar dicha función adicional, y la dependencia o no entre las variables ρ y m a través de simulaciones numéricas o estudios analíticos

Capítulo 1

Introducción

El proceso por el cual el gas que puebla la Galaxia (figura 1.1) se transforma en estrellas es el objeto de estudio de las teorías de formación estelar. El desarrollo de estas teorías es de gran importancia debido a que estos procesos son los que llevan a la formación de sistemas solares como el nuestro. Uno de los principales objetivos de estas teorías es entender el origen de la función de masa inicial estelar (FMI), que es la función que describe la llamada distribución de masas de las estrellas al momento de su formación (figura 1.2). Entender el origen de la FMI es primordial, entre otras cosas, para entender la dinámica del medio interestelar (MI), la formación de elementos químicos y formación y evolución de galaxias, pues las estrellas masivas son las que forman los elementos pesados en el Universo, y además inyectan energía cinética y térmica, causando fuertes ondas de choque y movimientos turbulentos en el MI.

Un gran número de trabajos observacionales (p. ejm., Salpeter 1955; Kroupa 2001, 2002; Chabrier 2003) han logrado determinar la forma de la FMI estelar. Sin embargo, aún no se logra entender que es lo que determina esta distribución. Salpeter, en su seminal estudio de 1955, encontró que la FMI sigue una ley de potencias con una pendiente $\alpha = 2.35$ (figura 1.2), posteriormente autores como Miller & Scalo (1979); Zinnecker (1982); Elmegreen (1997); Fatuzzo & Adams (1998); Padoan & Nordlund (2002); Hennebelle & Chabrier (2008); Hopkins (2012), han producido teorías que intentan explicar la forma funcional de la FMI.

Otro aspecto que también está en discusión es el momento en que queda determinada la FMI. Se sabe que esta queda establecida en etapas tempranas de formación estelar.



Figura 1.1. Medio interestelar compuesto de gas y polvo. En este medio es donde nacen las estrellas.

La pregunta es entonces ¿qué tan temprano? Diversas observaciones indican que esto ocurre en la fase de núcleo denso pre-estelar (Motte et al. 1998, 2001; Tesi et al. 1998; Johnstone et al. 2000). Sin embargo, esto no es del todo claro ya que hay que considerar que no todos los núcleos están gravitacionalmente ligados como para colapsar y formar una estrella y sucede que, observando el espectro de masa de estos grumos se ve que no todo el gas se convierte en estrellas (Bonnell et al. 2006).

Ya que el origen de la FMI continúa siendo un tema de intensa discusión, un primer paso para su comprensión es entender el origen y la forma de la función de masa de los núcleos proto-estelares (CMF). Esta visión está sustentada en evidencia observacional (p. ejm., Motte et al. 1998; Johnstone et al. 2000; André et al. 2007) que indica que la CMF tiene la misma forma funcional que la FMI, sólo que desplazada por un factor ~ 3 , lo que sugeriría que la FMI se deriva directamente de la CMF con una eficiencia del 30%. Sin embargo, esta evidencia no es concluyente, pues podría tratarse simplemente de una coincidencia, ya que es factible que el paso de núcleo denso a objetos estelares involucre muchos y diferentes pro-

cesos, desde la competencia de los objetos protoestelares en formación por acretar el material que cae al pozo de potencial que los contiene (p. ejm., Bonnell et al. 1997), hasta el calentamiento del material circundante a las protoestrellas por la radiación emitida por ellas, que modifica la masa de Jeans local, cambiando la masa de los fragmentos que producirá (p. ejm., Krumholz 2006; Bate 2009).

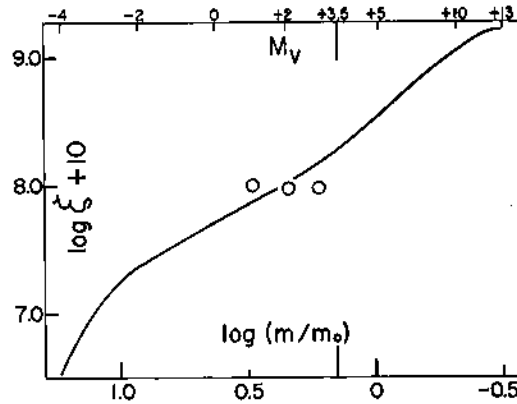


Figura 1.2. Función de masa inicial (Salpeter, 1955).

Algunos trabajos que adoptan este punto de vista son el de Padoan & Nordlund (2002; PN02), quienes presentaron un modelo para describir el origen de la FMI a partir de la CMF como resultado de fluctuaciones de densidad en un medio turbulento; el de Hennebelle & Chabrier (2008), quienes extendieron el trabajo de PN02 a modo de considerar el soporte turbulento en contra de la autogravedad de los núcleos.

En esta tesis nos enfocamos en el análisis de la CMF, como un primer paso para entender la FMI. Las teorías que intentan derivar la FMI como una propiedad de la turbulencia en las nubes que forman estrellas, generalmente parten de una distribución lognormal del campo de densidad, que es la distribución esperada en gas isotérmico supersónicamente turbulento (Vázquez-Semadeni 1994; Passot & Vázquez-Semadeni 1998; Federrath et al. 2012). Sin embargo, además de esta distribución, lo que han hecho teorías como la de Padoan & Nordlund (2002) y la de Elmegreen (2011) es suponer implícitamente la forma funcional de la distribución de tamaños de los núcleos.

Debido a esto, uno de los objetivos de este trabajo es mostrar la importancia de conocer la forma de esta distribución y poder inferir una función que se aproxime a ella. Para esto, la presente tesis esta organizada como sigue: en el capítulo II se presenta una revisión de los conceptos básicos de formación estelar, abarcando una descripción breve del medio interestelar y procesos físicos que involucran la formación de estrellas; en el capítulo III, se describe y discute una de las teorías más aceptadas en el ámbito de formación estelar para la función de masa inicial (Padoan & Nordlund, 2002) y se introduce la idea de la segunda distribución; en el capítulo IV, bajo el planteamiento de la necesidad de conocer la segunda distribución, se realiza la derivación formal de la CMF a partir de la distribución conjunta de densidades y tamaños de grumos en las nubes moleculares; en el capítulo V, usando simulaciones de turbulencia isotérmica supersónica, se generan histogramas para conocer la distribución de masa de los núcleos en diferentes intervalos de densidad, lo que permite inferir el comportamiento y la relación entre estas dos variables, m y ρ ; finalmente, en el capítulo VI se discuten los resultados de las simulaciones, así como las limitaciones encontradas y el trabajo a futuro, y se presentan las conclusiones. Adicionalmente, se agrega un apéndice en el que se desarrollan cálculos de algunos conceptos básicos, como el tiempo de caída libre y las condiciones de salto en un medio magnetohidrodinámico.

Capítulo 2

Conceptos básicos

2.1. Descripción del Medio Interestelar

Diversos tipos de observaciones muestran que en las galaxias, incluida la nuestra, se siguen formando estrellas aún en la actualidad (ver, p. ejm., la serie de libros “Protostars & Planets”). En este capítulo, revisaremos algunos conceptos físicos básicos necesarios para entender el proceso de formación estelar.

2.1.1. Medio Interestelar

Además de contener una enorme cantidad ($\sim 10^{11}$) de estrellas, nuestra Galaxia contiene el llamado Medio Interestelar (MI), que es, como su nombre lo dice, el medio que hay entre una estrella y otra. El MI está formado principalmente por gas y polvo, rayos cósmicos (partículas relativistas) y campos magnéticos (Ferrière, 2001) y constituye de un 10 a un 15 % de la masa total del disco de la Vía Láctea, conteniendo alrededor de $10^{10}M_{\odot}$.

Aproximadamente la mitad de la materia en el medio interestelar está confinada a nubes densas, que ocupan $\sim 1 - 2\%$ del volumen interestelar. Estas nubes se dividen en tres tipos: nubes oscuras, formadas esencialmente por gas molecular frío ($T \sim 10 - 20K$), nubes difusas, que consisten en gas atómico frío ($T \sim 100K$) y nubes traslúcidas, las cuales contienen tanto gas atómico como molecular. Los

Rangos	Promedio para una nube gigante
Masas: $10 - 10^6 M_{\odot}$	$\sim 5 \times 10^5 M_{\odot}$
Radios: $1 - 10^2$ pc	~ 20 pc
Temperatura: $10 - 60^{\circ} K cm^{-3}$	$\sim 3 \times 10^2 cm^{-2}$
Vida media: $10^7 - 10^9$ años	$\sim 10^7 - 10^9$ años
Masa total en la Galaxia: $\sim 2 \times 10^9 M_{\odot}$	Número total en la Galaxia: $\sim 4 \times 10^3$

Tabla 2.1. Rangos de parámetros físicos de las nubes moleculares en el medio interestelar y valores promedio para las nubes moleculares gigantes.

elementos de los cuales está constituido el MI son ~ 90.8 % hidrógeno (por número de átomos), ~ 9.1 % de helio y el resto de elementos más pesados (Ferrière, 2001).

En las nubes moleculares (NMs) oscuras ocurre la formación estelar en la Galaxia. A su vez, éstas forman grandes conglomerados de gas molecular, llamados complejos gigantes o nubes moleculares gigantes. En la tabla 2.1 se muestran las propiedades observadas de las nubes moleculares gigantes. Adicionalmente, las NMs presentan subestructuras, denominadas grumos masivos (“clumps”) y núcleos densos (“cores”), como se muestra en la figura 2.1, y cuyas propiedades se detallan en la tabla 2.2

Las observaciones espectroscópicas de nubes moleculares exhiben anchos de línea que corresponden a movimientos supersónicos (Wilson et al. 1970), que se han interpretado como turbulencia supersónica (Zuckerman & Evans 1974; Larson 1981). La turbulencia supersónica genera fluctuaciones de densidad que pueden llegar a ser de gran amplitud, por lo que comúnmente se han interpretado a las subestructuras de las nubes como fluctuaciones de densidad turbulentas (Sasao 1973; Ballesteros-Paredes et al.; Padoan 1995; Padoan & Nordlund 2002).

Por otro lado, dado que la turbulencia involucra movimientos desordenados de las parcelas del fluido, comúnmente se supone que, con respecto a escalas de tamaño más grandes que las más grandes escalas de coherencia de los movimientos turbulentos, la turbulencia ejerce una presión isotrópica, análoga a la presión

térmica producida por los movimientos azarosos de las moléculas del gas (Chandrasekhar 1957a,b; Bonazzola et al 1981; Vázquez-Semadeni & Gazol 1995). Esta “presión turbulenta” frecuentemente se añade a la presión térmica en análisis de estabilidad gravitacional, por ejemplo.

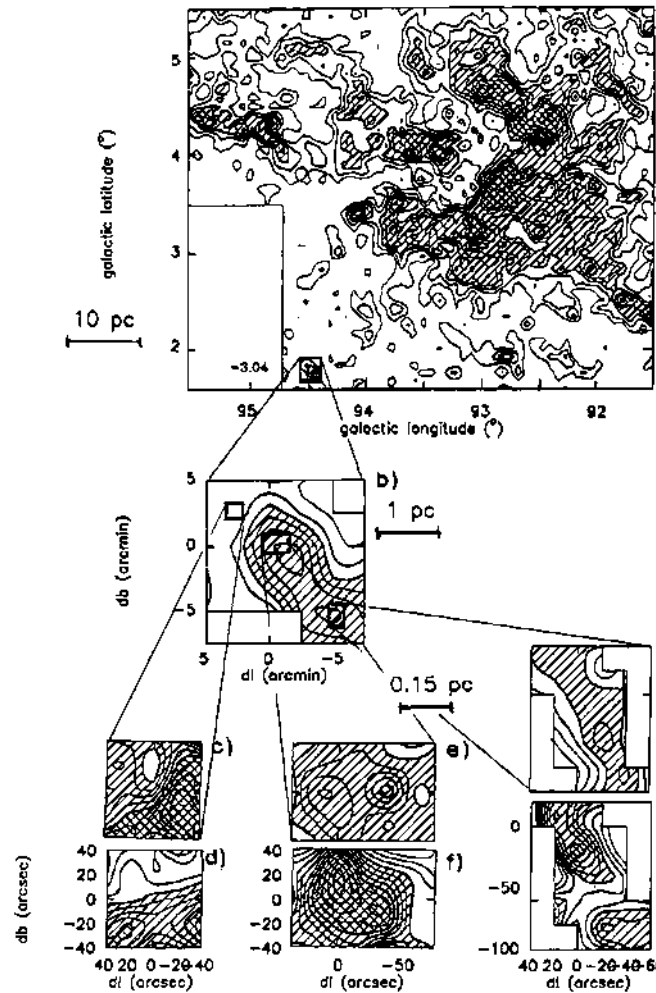


Figura 2.1. Mapa de las observaciones en la nube Cyg OB7 (Falgarone, 1992), en la cual se aprecia claramente la estructura jerárquica y las componentes de un nube molecular, como filamentos y clumps.

Estructura	Tamaño	Densidad
Nubes moleculares	0.2-0.6 pc	$10^2 - 10^3 \text{ cm}^{-3}$
Cúmulos	$\sim 0.1 \text{ pc}$	$10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-3}$
Núcleos	$\sim 0.01 \text{ pc}$	$10^4 - 10^7 \text{ cm}^{-3}$

Tabla 2.2. Parámetros físicos de las principales estructuras en las nubes moleculares. Estas cantidades son solamente un estimado de acuerdo a una nube molecular bajo las condiciones aquí mencionadas (Javier A. Rodón 2009).

2.1.2. Relaciones de escalamiento de Larson

Larson (1981) encontró que las nubes moleculares y sus subestructuras presentan relaciones de escala entre la dispersión de velocidad (no térmica), su densidad y el tamaño. Hoy en día estas relaciones se describen como

- Relación de dispersión de velocidades-tamaño

$$\Delta v = \Delta v_0 \left(\frac{L}{L_0} \right)^\beta, \quad (2.1)$$

donde $v_0 \approx 1 \text{ km s}^{-1}$, $L_0 \approx 1 \text{ pc}$ y $\beta \approx 0.5 \pm 0.1$ (ver, p.ejm., Blitz 1993; Heyer & Brunt 2004); los subíndices cero representan valores de referencia.

- Relación densidad-tamaño

$$\langle n \rangle = n_0 \left(\frac{L}{L_0} \right)^\kappa, \quad (2.2)$$

donde $n_0 \approx 3400 \text{ cm}^{-3}$, $L_0 \approx 1 \text{ pc}$ y $\kappa \approx -1$, aunque esta relación de escalamiento ha sido cuestionada por varios autores (Kegel 1989; Scalo 1990; Ballesteros-Paredes & Maclow 2002; Ballesteros-Paredes et al. 2011a, 2012) que han sugerido que puede ser el resultado de un sesgo observacional causado por un limitado rango dinámico en la densidad columnar, definida como $N = \int_0^L \rho dL$, que permiten las observaciones.

Ambas relaciones implican que la energía gravitacional y la energía turbulenta escalan de la misma manera con el tamaño. Por ejemplo, la energía cinética turbulenta promedio por unidad de volumen de una nube es

$$E_K \approx \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2.3)$$

en donde ρ es la densidad promedio del gas, y v es la dispersión de velocidades turbulenta.

Si suponemos que valen las relaciones de Larson, de manera que $\rho \propto R^{-1}$ y $v \propto R^{1/2}$, entonces

$$\Rightarrow E_K \propto R^{-1} R \propto R^0. \quad (2.4)$$

Y para la energía gravitacional por unidad de volumen de la nube, tenemos

$$|E_G| \approx G \frac{\rho M}{R}, \quad (2.5)$$

donde M es la masa total de la nube y ρ su densidad promedio. Usando $M \sim \rho R^3$,

$$G \frac{\rho^2 R^3}{R} = G \rho^2 R^2.$$

Entonces, si $\rho \sim R^{-1}$

$$\Rightarrow E_G \propto R^0 \propto E_K \text{ QED.} \quad (2.6)$$

2.2. Conceptos básicos de formación estelar

Una pregunta esencial en el tema de formación estelar es si una estructura gaseosa, sujeta a su autogravedad y su presión térmica, colapsa gravitacionalmente o no. El criterio fundamental que responde a esta pregunta fue estudiado por primera vez por el inglés James Jeans (1928). Consideremos este análisis basándonos en el teorema del virial. Para entenderlo, idealicemos una nube molecular como una nube esférica, isotérmica y de densidad uniforme, para la cual el teorema del virial está dado por (p. ejm., Shu 1992)

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 3Mc_s^2 - \alpha \frac{GM^2}{R}, \quad (2.7)$$

donde I es el momento de inercia, dado por $I = \int_V \rho r^2 dV$, ρ es la densidad, V es el volumen, $M = \int_V \rho dV$ es la masa, R es el radio, c_s la velocidad del sonido y α es una constante que depende de la geometría del sistema. Considerando una nube esférica de radio R y masa M el momento de inercia estará dado por $I = (3/5)MR^2$, por lo que $\ddot{I}$ se puede escribir como

$$\ddot{I} = \frac{6}{5}M(R\ddot{R} + \dot{R}^2) \quad (2.8)$$

Ahora, i) si $\ddot{I} = 0$,

$$3Mc_s^2 - \alpha \frac{GM^2}{R} = 0, \quad (2.9)$$

la nube se encuentra en equilibrio entre su presión interna y su autogravedad, es decir, no se expande ni colapsa.

ii) Si $\ddot{I} \neq 0$ entonces la nube está fuera de equilibrio, podemos hacer el análisis de esta condición con la ecuación (2.7) o la ecuación (2.8) de la siguiente manera:

De la ecuación (2.7) tenemos que si $\ddot{I} < 0$ el término dominante es la energía gravitacional de la nube, por lo que ésta se contraerá. Estrictamente hablando esto no siempre es cierto pues en realidad la condición de expansión (ó contracción) significa $\dot{R} > 0$ (ó $\dot{R} < 0$). Sin embargo, lo es en la mayoría de los casos. Por ejemplo, supongamos que $\dot{R} = v_0$ y $|\ddot{R}| \approx (v_0 \Delta t)$, con $v_0 > 0$. Entonces, $\ddot{R} < -(v_0^2/R)$ y en un tiempo $\Delta t \lesssim (R/v_0)$ la nube comenzará a contraerse.

Entonces, en términos de la ecuación (2.7) la condición $\ddot{I} < 0$ (colapso) requiere que

$$\alpha \frac{GM}{R} > 3c_s^2. \quad (2.10)$$

El lado izquierdo de la desigualdad es la energía gravitacional de la nube, mientras que el lado derecho es la energía térmica del gas, ambas por unidad de masa. Ahora bien, la masa debe estar dada por $M = \rho V$ y $V = 4/3\pi R^3$, por lo que la desigualdad (2.10) se reescribe como

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\alpha\pi G\rho R^2 &> c_s^2 \rightarrow \\ R &> \left(\frac{3c_s^2}{4\pi\alpha G\rho} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si la densidad ρ y la velocidad del sonido c_s del gas están dadas, claramente la condición (2.11) se satisface sólo si $R > L_J$, donde L_J es la llamada *longitud de Jeans*, y esta dada por

$$L_J = \left(\frac{3c_s^2}{4\pi\alpha G\rho} \right)^{1/2}. \quad (2.12)$$

De la misma manera, se puede definir la mínima masa que debe tener una nube de densidad ρ y velocidad del sonido c_s , para que sea inestable gravitacionalmente. Esta masa, llamada *masa de Jeans*, está dada por la masa contenida dentro de una esfera de densidad ρ y radio $L_J/2$:

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho \left(\frac{L_J}{2} \right)^3 = \frac{1}{48} \left(\frac{3c_s^2}{\alpha G} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{\pi\rho} \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Adicional a la masa y longitud de Jeans, otro concepto fundamental en el estudio de la formación estelar, y en la astrofísica en general, es el del tiempo de caída libre, que es el tiempo que tarda en colapsarse un conjunto de átomos o moléculas cuando se encuentran sólo bajo el efecto de su propia autogravedad. El tiempo de caída libre, t_{cl} , se define como (ver Apéndice A)

$$t_{cl} = \left[\frac{3\pi}{32 G\rho_0} \right]^{1/2} \sim 1.2 \times 10^6 n_3^{-1/2} \text{ años}. \quad (2.14)$$

en donde $n_3 = n/(1000 \text{ cm}^{-3})$.

2.3. Procesos colectivos

Se pueden considerar dos situaciones en el problema de formación estelar: una es el aspecto local y otra es el aspecto global o colectivo. Y es que, si bien la formación de una estrella depende de que alguna región del gas alcance su masa de

Jeans, una pregunta fundamental es la de qué condiciones y procesos en el MI llevan a que esto ocurra. Para resolver esto, en este trabajo se analizará la formación de estrellas bajo la perspectiva de los procesos colectivos. Los que aquí consideramos son *la tasa y la eficiencia de formación estelar* (TFE y EFE respectivamente), y la *función de masa inicial estelar*.

2.3.1. Tasa y eficiencia de formación estelar

La TFE está definida como la masa de gas transformada en estrellas por unidad de tiempo, mientras que la EFE es la fracción de ese gas que se convierte en estrellas durante un tiempo dado. Ambas se relacionan por:

$$\text{EFE}(t) = \frac{1}{M_{\text{tot}}(t)} \int_0^{\Delta t} \text{TFE}(t) dt. \quad (2.15)$$

Las observaciones muestran que la eficiencia de formación estelar en la Galaxia es mucho menor que la esperada (p. ejm. Myers et al.1986). La razón es que existen distintos agentes en la NM que limitan el proceso de formación estelar. Uno de estos agentes es la turbulencia, y es que si bien la turbulencia es un factor importante para la generación de estructuras densas, a pequeña escala, a gran escala actúa como soporte contra el colapso gravitacional, lo cual reduce la eficiencia de formación de estrellas.

2.3.2. Función de masa inicial

Un problema que aún sigue abierto es qué determina la masa de las estrellas al momento de su formación. La llamada *función de masa inicial estelar* (FMI), es precisamente la distribución de masas de las estrellas al momento de llegar a la secuencia principal. Es decir, la FMI describe cuántas estrellas existen en una cierta población de estrellas recién formadas por intervalo de masa. Observacionalmente, la primera determinación de la FMI fue realizada por Salpeter (1995), quien encontró una ley de potencias de la forma

$$dN(M) \propto M^{-\alpha} dM, \quad (2.16)$$

con $\alpha = 2.35$. En términos del logaritmo de la masa, esta expresión se reescribe como

$$d(\ln N(M)) \propto M^\Gamma d(\log M), \quad (2.17)$$

donde $\Gamma = -(\alpha - 1)$.

Determinar observacionalmente la forma de la FMI no es un proceso trivial. La función de masa inicial de las estrellas es un concepto idealizado ya que se refiere a un conjunto de estrellas inmediatamente después de llegar a la secuencia principal. En la práctica es casi imposible conseguir una muestra de estrellas que cumpla con esta condición. El tiempo de vida de una estrella se estima como $t \sim 10^{10} M^{-2}$ años, donde t es el tiempo de vida de la estrella y M su masa. Esta relación quiere decir que las estrellas más masivas tienen tiempos de vida más cortos que las estrellas de baja masa, lo que implica que en un grupo de estrellas (en una región de formación estelar) tomadas al azar, las estrellas de baja masa se han venido acumulando, mientras que las de alta masa no, lo cual afectará la forma de la FMI pues habrá un exceso en el rango de estrellas poco masivas. Para evitar esto es necesario hacer censos de regiones de formación estelar reciente, evitando además contabilizar estrellas “de campo”; es decir aquéllas que no pertenecen a la misma región de formación estelar pero que aparecen proyectadas dentro de ella. Una discusión de estos problemas se puede encontrar en Kroupa (2001).

Una descripción actual de la FMI observada es la de Kroupa (2001), que sigue una forma de ley de potencias por pedazos de la forma:

$$\begin{aligned} dN &\propto M^{-2.3} dM, (M \geq 0.5M_\odot), \\ dN &\propto M^{-1.3} dM, (0.08 \leq M < 0.5M_\odot), \\ dN &\propto M^{-0.3} dM, (M < 0.08M_\odot). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Esta función se grafica en la figura 2.2, en ella observamos que la masa más común está alrededor de $\sim 0.1M_\odot$; es decir, las estrellas de baja masa son mucho más abundantes que las de alta masa. A pesar de que la forma funcional de la

FMI está relativamente bien determinada, su origen continuará siendo un tema de debate. Algunas de las teorías que intentan explicarla son:

i) Teorías basadas en turbulencia.

En este tipo de teorías, y en particular la que se trata en esta tesis, un paso muy importante que antecede a la FMI estelar es la función de masa de los núcleos densos de las nubes moleculares, pues según varios autores (p. ejm., Motte et al., 1998; Padoan & Nordlund 2002; Lada et al., 2007, en P & PV y referencias ahí mencionadas), es esta última la que determina la función de masa inicial estelar.

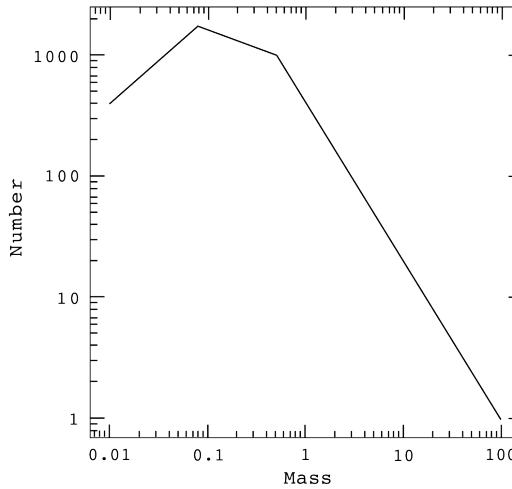


Figura 2.2. La FMI de Kroupa (2001) dada por la ecuación (2.18). El segmento $M \geq 1$ corresponde a la pendiente de Salpeter (1995).

A su vez, estas teorías intentan derivar la función de masas de los núcleos densos a partir de la función de densidad de probabilidad (PDF, por sus siglas en inglés) del campo de densidad. Sin embargo, en el resto de esta tesis intentaremos demostrar que esto no es posible sin contar con información adicional sobre otra distribución: la de los tamaños de los núcleos de densidad dada, u otra equivalente.

ii) Teorías basadas en acreción caótica competitiva.

Los primeros modelos de acreción para la FMI, por ejemplo Larson (1978, 1982) y Zinnecker (1982), discuten cómo las estrellas compiten por la masa en

un reservorio de gas que se encuentra en colapso gravitacional. Las estrellas que acretan mayor cantidad de masa debido a su mayor masa inicial o cercanía con el pozo de potencial mayor, incrementan su atracción gravitacional y por lo tanto su capacidad de acretar.

En el resto de esta tesis nos enfocaremos a las teorías basadas en turbulencia.

2.3.3. Distribución de masas de los núcleos densos (CMF) en las nubes moleculares

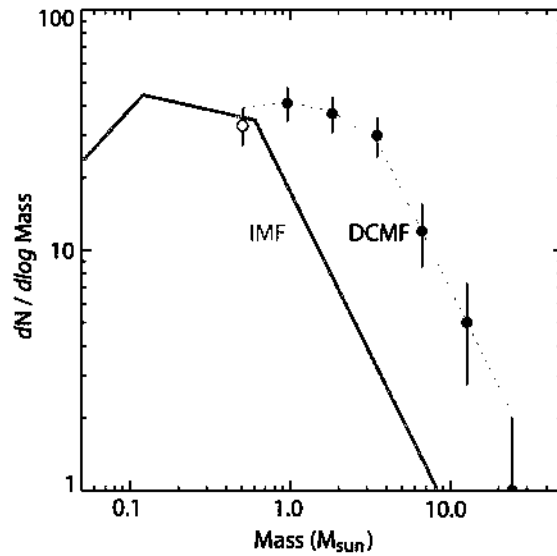


Figura 2.3. Comparación entre la FMI y la CMF (J. Alves et al. 2007).

Otra cuestión de gran importancia acerca de la FMI estelar es ¿en qué momento queda determinada? Una propuesta común queda establecida desde la fase de nube molecular en donde la turbulencia causa un ensamble de fluctuaciones de densidad, dando origen a una distribución de masa de los núcleos densos conocida como CMF (“Core Mass Function” por sus siglas en inglés). Y es que la CMF muestra una curva muy similar a la función de masa inicial estelar, tal como se muestra en la figura 2.3.

La cola de alta masa de la CMF tiene forma de una ley de potencias similar a la FMI estelar

$$dN = N_0 M^\delta dM. \quad (2.19)$$

Esta distribución da el número de estructuras N con masa en un rango entre M y $M + dM$, y se encuentra que, para las estructuras más grandes y de baja densidad, $\delta \sim 1.5 \pm 0.15$ (Blitz 1993), pero para el gas más denso como el caso de los “cores” o núcleos, $\delta \sim -2.3$ (Motte et al., 1998). Esta última pendiente es la que acerca la distribución de masas de los núcleos a la FMI estelar, como se ve en la figura 2.3. Es por esto que algunos autores sugieren que las masas de las estrellas se encuentran determinadas por la CMF de los núcleos densos en las NM. Los censos que se han hecho en las regiones de formación estelar muestran también que el pico de la CMF está desplazado con respecto al de la FIM estelar por un factor ~ 3 , lo que se interpreta como correspondiente a una eficiencia local de formación de los núcleos densos. Sin embargo, la interpretación anterior no está exenta de problemas. Primeramente, hay que notar que este factor necesariamente depende del método que se use para seleccionar a los núcleos densos. Además, al observar un núcleo no es posible determinar cuál será la masa final de la o las estrellas que se formarán, pues aunque el núcleo haya alcanzado la masa suficiente para colapsar, puede seguir acretando masa, la cual contribuirá a la formación de la estrella y por lo tanto al resultado final de su masa. Por otro lado, puede continuar fragmentándose. A pesar de lo anterior, en esta tesis adoptamos el punto de vista de que la FMI estelar proviene de la CMF, a fin de discutir algunas de las teorías que se basan en esta hipótesis.

2.4. Conceptos básicos de dinámica de fluidos

2.4.1. Espectro de potencias de la turbulencia

La turbulencia es un régimen de flujo de fluidos que se caracteriza por movimientos desordenados (o caóticos). Como se mencionó en la sección 3.1, la turbulencia tiene un papel doble en las nubes moleculares. Por un lado, a gran es-

cala, los movimientos caóticos actúan como soporte contra el colapso de la nube; y a pequeña escala, el flujo turbulento propicia la fragmentación de las estructuras para generar regiones cada vez más densas. La distribución de energía cinética de los movimientos turbulentos a diferentes escalas se denomina el espectro de energía de la turbulencia, $E(k)$.

La teoría más conocida para la turbulencia y su espectro de potencias es la teoría de Kolmogorov (1941). Esta teoría supone que la energía es inyectada en las escalas más grandes del flujo y se disipa en las escalas pequeñas, mientras que en un rango de escalas intermedias sólo se transfiere de una escala a otra, siendo el flujo de energía independiente de la escala. El espectro se representa esquemáticamente en la figura 2.4.

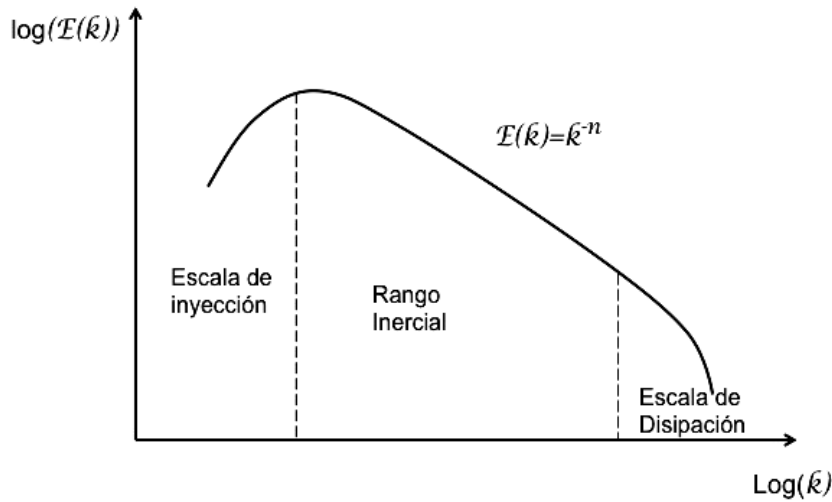


Figura 2.4. Diagrama esquemático del espectro de potencia de la turbulencia.

La teoría de Kolmogorov, que no derivaremos aquí predice que el espectro de la turbulencia tiene la forma

$$E(k) \propto k^{-5/3}. \quad (2.20)$$

Sin embargo, esta teoría es aplicable sólo para flujos incompresibles. En el caso de flujos altamente compresibles, se piensa que se aplica el espectro de Burgers

que tiene la forma

$$E(k) \propto k^{-2}, \quad (2.21)$$

que se obtiene de tomar la transformada de Fourier de una discontinuidad.

2.4.2. Choques. Condiciones de salto en un medio isotérmico

Debido a que las teorías de la FMI estelar basadas en turbulencia suponen que las estructuras más densas de las nubes moleculares se producen por choques, es necesario recordar aquí las condiciones de salto de las variables físicas a través de estos.

En un choque, la compresión del fluido ocurre en una capa muy delgada, similar al tamaño del camino libre medio de las partículas, por lo cual se puede aproximar el proceso como una discontinuidad en el fluido. Para derivar la relación que hay entre las condiciones del medio antes y después del choque primero escribimos las ecuaciones de Euler (p. ejm., Shu 1992, Gas Dynamics)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad (2.23)$$

$$\rho \left(\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla E \right) = -P \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.24)$$

donde ρ es la densidad, P es la presión, $\mathbf{u}$ es la velocidad y E es la energía total por unidad de volumen. La ecuación (2.22) es la ecuación de conservación de masa, (2.23) es la ecuación de conservación de momento y (2.24) es la ecuación de conservación de energía para un medio isotérmico en ausencia de campo magnético. Considerando un fluido en un estado estacionario con variaciones sólo en la dimensión del choque, las ecuaciones se escriben como:

$$[\rho u_{\perp}]_0^1 = 0, \quad (2.25)$$

$$[\rho u_{\perp}^2 + P]_0^1 = 0, \quad (2.26)$$

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = 0, \quad (2.27)$$

en donde los corchetes representan la diferencia entre la cantidad escrita entre ellos, evaluada en los estados denotados por el subíndice y el superíndice; el subíndice cero representa las condiciones antes del choque y el superíndice uno las condiciones después del choque.

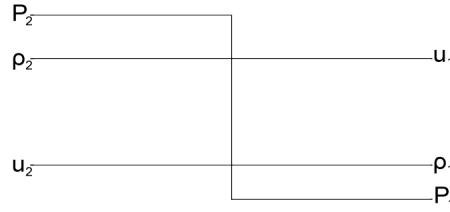


Figura 2.5. Escala macroscópica de las condiciones de choque.

Suponiendo un choque perpendicular a la velocidad del medio, como en la figura 2.5, estas condiciones quedan como

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1, \quad (2.28)$$

$$\rho_0 u_0^2 + P_0 = \rho_1 u_1^2 + P_1, \quad (2.29)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} + \frac{1}{2} u_0^2 = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} u_1^2. \quad (2.30)$$

De la ecuación (2.28) podemos expresar $u_1 = \rho_0 u_0 / \rho_1$. Además, sabemos que para un flujo isotérmico, la velocidad del sonido está dada por $c_s^2 = P/\rho$. Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación de conservación de momento, llegamos a

$$\rho_0 [c_s^2 + u_0^2] = \rho_1 \left[c_s^2 + \frac{\rho_0^2 u_0^2}{\rho_1^2} \right]. \quad (2.31)$$

Recordando la definición del número de Mach, $\mathcal{M}$, como la razón entre la velocidad del fluido y la velocidad del sonido tenemos que $\mathcal{M}^2 = (u/c_s)^2$. Sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos que el salto en densidad en un choque isotérmico esta dado por

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \mathcal{M}_0^2. \quad (2.32)$$

2.5. La densidad de probabilidad del campo de densidad (ρ PDF) en las nubes moleculares

Una medida estadística para describir las nubes moleculares es a través de la *función de densidad de probabilidad del campo de densidad*, a la que de ahora en adelante nos referiremos como ρ PDF (por sus siglas en inglés). La ρ PDF indica que fracción de volumen está ocupada por gas en un cierto intervalo de densidad. Es decir, en términos generales, sea $f(\rho)$ la ρ PDF, cuyas unidades son $[V/\rho]$. Al integrar sobre todos los posibles valores de la densidad, tenemos que

$$\int f(\rho) d\rho = V, \quad (2.33)$$

$$\int \rho f(\rho) d\rho = M, \quad (2.34)$$

donde V y M son el volumen y la masa totales de la región. Normalizando la ρ PDF, $f' = \frac{f}{\int f d\rho}$, y eliminando el apóstrofe tendremos

$$\int f(\rho) d\rho = 1, \quad (2.35)$$

$$\int \rho f(\rho) d\rho = \langle \rho \rangle. \quad (2.36)$$

Una propiedad importante que se ha obtenido a partir de estudios numéricos basados en la turbulencia es que la ρ PDF se aproxima a una distribución lognormal (Vázquez-Semadeni 1994; Passot & Vázquez-Semadeni 1998; Padoan et al.

1997; Federrath et al. 2008) y que se ha verificado observacionalmente, al menos para las etapas tempranas de las nubes (Kaunulainen 2009). Ésta distribución puede ser escrita como:

$$p(\ln n') d\ln n' = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln n' - \overline{\ln n'}}{\sigma} \right)^2 \right] d\ln n', \quad (2.37)$$

en esta expresión hemos usado la notación de Padoan & Nordlund (2002), donde n' es la densidad numérica (con unidades $[1/V]$) en unidades del promedio de la densidad n_0 ,

$$n' = \frac{n}{n_0} \quad (2.38)$$

y el promedio del logaritmo de la densidad, $\overline{\ln n'}$, está determinado por la desviación estándar del logaritmo de la densidad, σ :

$$\overline{\ln n'} = -\frac{\sigma^2}{2}, \quad (2.39)$$

que a su vez es función del rms del número de Mach, $\mathcal{M}$, del flujo :

$$\sigma^2 = \ln(1 + \mathcal{M}^2 \gamma^2), \quad (2.40)$$

donde $\gamma \approx 0,5$, para experimentos numéricos (ver también Federrath et al., 2008)

Capítulo 3

Teoría Padoan y Nordlund 2002

Padoan y Nordlund (2002), en adelante PN02, fueron los primeros en derivar la distribución de masa de los núcleos gravitacionalmente inestables generados por fragmentación turbulenta, suponiendo que este tipo de fragmentación de las nubes moleculares es la responsable de la FMI estelar.

PN02 afirman que la turbulencia supersónica puede explicar la morfología y cinemática de las nubes moleculares y la formación de núcleos densos. En particular, suponen que las nubes moleculares se encuentran en un régimen turbulento supersónico y súper Alfvénico, de modo que están caracterizadas por un espectro de energía de la turbulencia, una función de densidad de probabilidad (PDF) del campo de densidad de forma lognormal, y que las fluctuaciones de densidad son producidas por choques. A continuación describimos cómo estos ingredientes son utilizados por PN02 para obtener la función de masa de los núcleos densos (“core mass function”, o CMF).

3.1. Turbulencia supersónica y origen de los núcleos densos

PN02 consideran que los núcleos densos son las regiones comprimidas detrás de los choques en un flujo isotérmico supersónicamente turbulento magnetizado.

Suponiendo que la presión magnética antes del choque del gas es mucho mayor que la presión térmica, las condiciones de salto para un choque isotérmico magnetohidrodinámico son¹:

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} \approx \mathcal{M}_A, \quad (3.1)$$

$$\frac{\lambda}{L} \approx \mathcal{M}_A^{-1}, \quad (3.2)$$

$$\frac{B_1}{B_0} \approx \mathcal{M}_A, \quad (3.3)$$

donde ρ_0 , B_0 y ρ_1 , B_1 son los valores de la densidad del gas y la intensidad del campo magnético antes y después del choque respectivamente. L es la extensión lineal antes del choque del gas que formará el núcleo denso después de este choque (medida en dirección perpendicular de la superficie del choque), y λ es el grosor de la región densa detrás del choque, que PN02 identifican con el tamaño típico de los núcleos densos de las nubes moleculares. $\mathcal{M}_A$ es el número de Mach Alfvénico del choque, es decir, la razón entre la velocidad del flujo y la velocidad de Alfvén², medidos antes del choque:

$$\mathcal{M}_A \equiv \frac{v}{v_A} \equiv \frac{v}{B_0/\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (3.4)$$

PN02 notan que las únicas componentes dinámicamente importantes del campo magnético son las paralelas a la superficie del choque, pues las componentes perpendiculares no ejercen presión en contra de la compresión, y que la única componente relevante de la velocidad es la perpendicular, pues la paralela no produce compresión.

Otro ingrediente importante en esta teoría es el espectro de potencias de la turbulencia, que se supone una ley de potencias de la forma

$$E(k) \approx k^{-\beta}, \quad (3.5)$$

¹Estas ecuaciones se derivan en el Apéndice B.

²La velocidad de Alfvén es la velocidad de las llamadas ondas de Alfvén, que son perturbaciones transversales del campo magnético en un fluido magnetizado. Ver p. ejm., Shu 1992.

donde k es el número de onda y β el índice espectral. Generalmente se supone $\beta = 2$ para el espectro de potencias de turbulencia supersónica (ver sección 4 del capítulo II).

3.2. La distribución de masa de los núcleos densos y los núcleos que colapsan

Para determinar la masa de los núcleos densos, dada por $m = \rho V$, en donde ρ y V son respectivamente la densidad promedio y volumen del núcleo, es precisamente necesario estimar tanto ρ como V . PN02 suponen que el tamaño típico de un núcleo denso en las tres dimensiones está dado por el grosor, λ , de la zona densa postchoque. Debido a esto, y usando las condiciones de choque (B.7) y (B.8), su masa m es

$$m \sim \rho_1 \lambda^3 = \rho_0 \mathcal{M}_A \left(\frac{L}{\mathcal{M}_A} \right)^3 = \frac{\rho_0 L^3}{\mathcal{M}_A^2}, \quad (3.6)$$

donde $\mathcal{M}_A$ es el número de Mach Alfvénico y L el tamaño de la región del gas antes del choque.

Por otro lado, dada la ecuación (3.5), y considerando las relaciones de Larson, el valor rms de la dispersión de velocidades σ_v en la escala L es

$$\sigma_v \propto L^\alpha, \quad (3.7)$$

donde

$$\alpha = \frac{\beta - 1}{2}. \quad (3.8)$$

Sea entonces $\sigma_v(L)$ la velocidad típica después del choque a escala L . Identificando a v de la ecuación (3.4) con $\sigma_v(L)$ de la ecuación (3.7) e introduciendo el resultado en la ecuación de masa (3.6), obtenemos

$$m \sim \frac{\rho_0 L^3}{\mathcal{M}_{A,0}^2} \left(\frac{L}{L_0} \right)^{4-\beta}, \quad (3.9)$$

donde L_0 es la escala donde la velocidad turbulenta es v_0 y el número de Mach rms es $\mathcal{M}_{A,0}$.

Para llegar a la distribución de masa de los núcleos, PN02 consideran en su análisis la distribución de masas en un caso completamente autosimilar y posteriormente una modificación proveniente de la dependencia con el número de Mach.

Para el caso autosimilar, PN02 consideran primero dos cajas similares, de modo que ambas tienen la misma distribución espacial (relativa al tamaño de la caja) de estructura de densidad, el mismo número de Mach rms y la misma densidad promedio, pero tienen tamaños L_1 y $L_2 > L_1$, de modo que todas las estructuras de densidad en la segunda caja tienen tamaños que están escalados por el factor L_2/L_1 . Esta situación se ilustra en la figura 3.1. Dado que $\langle \rho \rangle_2 = \langle \rho \rangle_1 = \rho_1$ todas las masas escalan como L^3 , ya que $M = \rho L^3$. Entonces, $m_2/m_1 = \rho L_2^3/\rho L_1^3$.

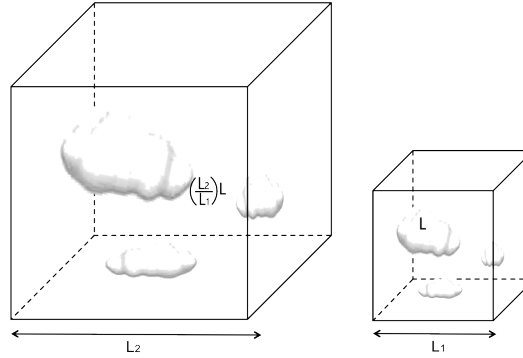


Figura 3.1. Diferentes escalas de tamaño con la misma densidad y masa.

A continuación, PN02 consideran $(L_2/L_1)^3$ copias de la caja de tamaño L_1 ordenadas a modo de construir una caja de tamaño L_2 (ver figura 3.2). Si se consideran ahora nubes de tamaño L (fig. 3.1), puede verse que el número de estas nubes, $N(L)$, dentro del conjunto de cajas de tamaño L_1 , es $(L_2/L_1)^3$ veces mayor que el de nubes de tamaño $L' = (L_2/L_1)L$ en la caja de tamaño L_2 . Es decir,

$$N(L) = \left(\frac{L_2}{L_1} \right)^3 N(L'), \quad (3.10)$$

de donde se infiere que

$$N(L) \propto L^{-3}. \quad (3.11)$$

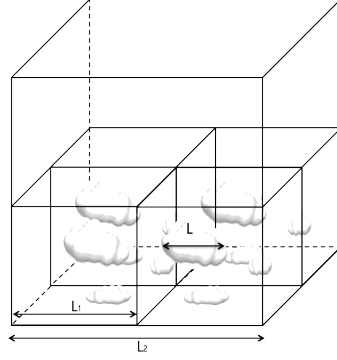


Figura 3.2. Caja, o nube, de tamaño $L_2 > L_1$, que contiene subestructuras de tamaño L contenidas en regiones de tamaño L_1 .

Combinando entonces las relaciones (3.9) y (3.11) PN02 obtienen que

$$N(m) d \log m \approx m^{-3/(4-\beta)} d \log m, \quad (3.12)$$

y notan que este resultado es consistente con la función de Salpeter, cuando $\beta = 1.78$, que es el valor obtenido en las simulaciones de turbulencia de Padoan et al. (1997) pues en este caso el exponente de M en la ecuación (3.12) toma el valor de -1.35. Según PN02, el cálculo anterior da el número total de núcleos de masa m . Sin embargo, para calcular la fracción de núcleos densos que son *gravitacionalmente inestables* y colapsan para formar proto-estrellas, es necesario seleccionar sólo a aquellos cuyas masas superan su propia masa de Jeans, que PN02 suponen puede derivarse de la PDF del campo de densidad como sigue.

Como se vio en el capítulo 2, la PDF de la densidad está dada por

$$p(\ln n') d \ln n' = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln n' - \overline{\ln n'}}{\sigma} \right)^2 \right] d \ln n',$$

Por otro lado, podemos escribir la masa de Jeans correspondiente a la densidad n como

$$m_J = m_{J,0} \left(\frac{n}{n_0} \right)^{-1/2}, \quad (3.13)$$

donde

$$m_{J,0} = 1.2 M_\odot \left(\frac{T}{10 \text{ K}} \right)^{3/2} \left(\frac{n_0}{1000 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-1/2} \quad (3.14)$$

es la masa de Jeans correspondiente a la densidad promedio n_0 . Suponiendo temperatura constante, la distribución de la masa de Jeans se puede entonces obtener de la PDF de la densidad haciendo un cambio de variable

$$p(m_J) d \ln m_J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma/2} \left(\frac{m_J}{m_{J,0}} \right)^{-2} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln m_J - A}{\sigma/2} \right)^2 \right] d \ln m_J, \quad (3.15)$$

donde m_J está en masas solares y

$$A = \ln m_{J,0}^2 - \overline{\ln n'}. \quad (3.16)$$

PN02 interpretan $p(m_J)$ como la probabilidad de que una masa m tenga la densidad n necesaria para que $m \in (m_J(n), m_J(n) + dm_J)$. Entonces, la fracción de núcleos de masa m con masa mayor o igual a la masa de Jeans (dada su densidad promedio) es

$$\int_0^m p(m_J) dm_J; \quad (3.17)$$

es decir, la fracción de masa en núcleos cuyas masas de Jeans son menores que la masa m . Entonces, multiplicando la ecuación (3.12) por este factor de peso, la distribución de masa de los núcleos que colapsan queda como

$$N(m) d \log m \approx m^{-3/(4-\beta)} \left[\int_0^m p(m_J) dm_J \right] d \log m. \quad (3.18)$$

El significado físico de esta expresión es que, de la distribución de masas de los núcleos densos producidos por la turbulencia, sólo colapsarán aquéllos para los

que su densidad sea suficientemente alta como para que su masa de Jeans sea menor a la masa del núcleo mismo.

La forma de la función de masa de los núcleos densos (CMF) dada por la ecuación (3.18), con $\beta = 1.78$, se ilustra en la figura 3.3. Como puede observarse, a altas masas la función es simplemente una ley de potencias con la pendiente -1.35, muy similar a la encontrada por Salpeter (1995), mientras que a bajas masas la función cae nuevamente, por efecto de la disminución de la probabilidad de que un núcleo de masa pequeña alcance a contener una masa de Jeans, lo cual sólo ocurre a densidades muy altas. De acuerdo a la forma lognormal de la PDF de la densidad, la probabilidad de encontrar valores muy altos de la densidad es pequeña, aunque permanece finita.

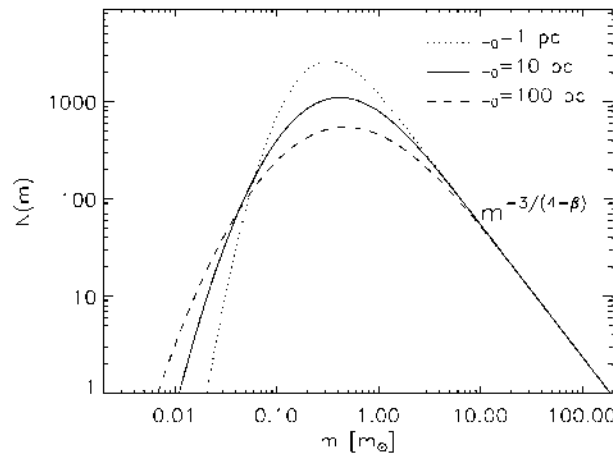


Figura 3.3. Distribución del número de estructuras a una masa dada (Padoan & Nordlund, 2002).

3.3. La hipótesis oculta de la distribución de tamaños

La teoría de PN02 para obtener la CMF, descrita en las secciones anteriores, está basada en una serie de importantes suposiciones: *i*) los núcleos pre-estelares son resultado de las regiones más densas de choques y fluctuaciones en un campo de velocidad supersónicamente turbulento, lo que permite al núcleo tener su masa

en función de la escala; *ii*) el número de núcleos depende de la escala L como $N(L) \propto L^{-3}$ y *iii*) la distribución de masas de Jeans puede ser obtenida de la PDF del campo de densidad.

Estas suposiciones en el modelo de PN02 han sido cuestionadas (Elmegreen 2007; Ballesteros Paredes 2004) ya que no es claro que se verifiquen. Por ejemplo, la justificación de la relación $N(L) \propto L^{-3}$ se basa en argumentos de escalamiento y autosimilaridad no evidentes. También está implícita la suposición de que la masa del clump es proporcional a la de la estrella que formará. Esto implica que no se considera la posibilidad de que un grumo pequeño sea parte de uno grande, caso en el cual sólo se formará la estrella correspondiente al grande, pues el material del chico quedaría contenido dentro del material del grande. Otro aspecto que no se toma en cuenta en este modelo es la forma de la PDF de la densidad a una masa dada. PN02 suponen que la distribución de densidad a una masa dada tienen una forma lognormal. Esta suposición no es trivial pues la distribución de densidades promedio en grumos de masa m dada no es necesariamente la misma que la distribución de la densidad punto a punto en el medio, como se discute en el siguiente capítulo.

Capítulo 4

La necesidad de una segunda distribución

Como se discutió en el capítulo anterior, las teorías que intentan derivar la CMF a partir de la PDF de la densidad (pPDF) necesariamente deben suponer que existe alguna distribución adicional a ella. Así, PN02 suponen que la distribución de la densidad promedio de los grumos de masa m también tiene una forma lognormal, mientras que Elmegreen (2011) supone que la nube tiene un perfil de densidad de ley de potencias a partir de la cual calcula el tamaño de la región con densidad ρ dada. Es decir, tanto PN02 como Elmegreen (2011) hacen alguna suposición adicional a la pPDF, consistente en suponer una relación complementaria entre dos cualesquiera de las variables masa, densidad y tamaño de los grumos. En este capítulo abundaremos sobre la necesidad de conocer esta relación adicional.

La PDF de la densidad es una función de un punto, es decir, a cada región de volumen infinitesimal en el espacio le corresponde una densidad determinada. Sin embargo, esto no aporta información alguna acerca del tamaño de las regiones que poseen una densidad promedio dada o, equivalentemente, sobre la masa de las regiones de densidad promedio $\langle \rho \rangle$ dada.

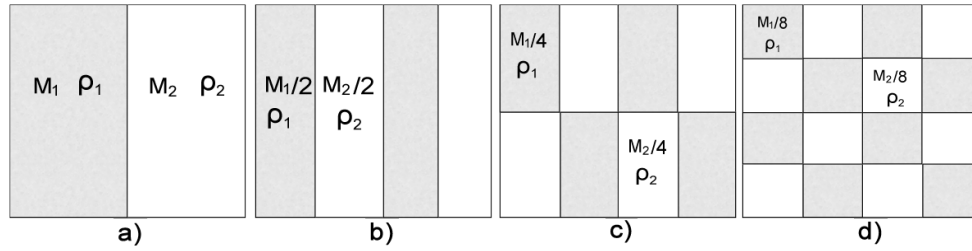


Figura 4.1. Diferentes distribuciones de masa que generan la misma PDF de densidad. Se observa también que lo que varía es la masa y el tamaño de las estructuras, aunque sean de la misma densidad.

De hecho, hay que notar que puede haber diferentes distribuciones de masa que nos den la misma distribución de densidad, tal como lo muestra la figura 4.1, en donde se presenta un ejemplo claro de diferentes distribuciones de masas de los grupos (es decir, CMFs) que generan la misma PDF de densidad, que se muestra en la figura 4.2. A su vez, esto implica distintas distribuciones de tamaño de las regiones de densidad dada. Este sencillo ejemplo muestra que la PDF no determina de manera única la distribución de masa de los grupos (la CMF).

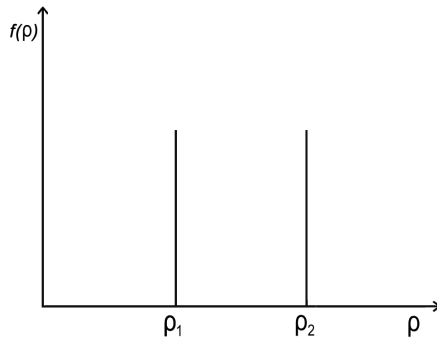


Figura 4.2. PDF de densidad correspondiente a todas las distribuciones de masa de la figura 4.1.

A continuación generalizamos este concepto, y consideramos explícitamente algunas formas funcionales de “la segunda distribución”.

4.1. Distribución de δ de Dirac

Supongamos que los grumos son esféricos, y que su densidad promedio es una función exclusivamente de su radio r , de la forma

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha, \quad (4.1)$$

en donde ρ_0 y r_0 son respectivamente una densidad y un radio de referencia, y α es un parámetro libre. En particular, esta forma funcional, con $\alpha = -1$, corresponde precisamente a la relación densidad-tamaño propuesta por Larson (1981), pero en lo que sigue por generalidad, dejamos el parámetro α sin especificar. Dado que el volumen de los grumos es $V_c = (4/3)\pi r^3$, entonces la relación densidad tamaño anterior implica que

$$V_c = V_{0,c} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{3/\alpha}, \quad (4.2)$$

en donde $V_{0,c} = (4/3)\pi r_0^3$.

La relación entre la densidad y el tamaño dada por la ecuación (4.1) puede verse como una distribución de densidades a un tamaño dado con una forma funcional de una δ de Dirac, pues a cada radio r corresponde una y sólo una densidad $\rho(r)$. Es decir, la distribución de la densidad a un radio dado r está dada por $P(\rho|r)dr' = \rho(r')\delta(r' - r)dr'$. Esto se ilustra en la figura 4.3.

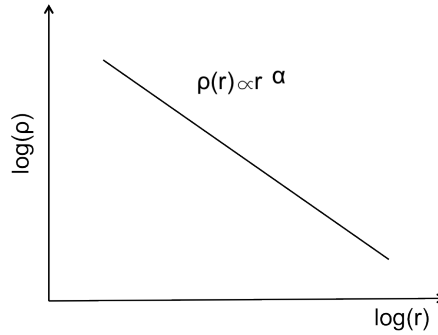


Figura 4.3. Dependencia de la densidad con el tamaño r de un núcleo dada por la ecuación (4.1), con $\alpha < 0$.

Sea ahora $V(\rho)$ el volumen total ocupado por todos los grumos de radio r y densidad $\rho(r)$. Dado que estamos suponiendo que todos los grumos de densidad ρ tienen el mismo radio r , y por lo tanto, el mismo volumen $V_c(\rho)$ dado por la ecuación (4.2). Entonces es claro que el número de grumos con densidad entre ρ y $\rho + d\rho$, $N(\rho)$, satisface

$$N(\rho)V_c(\rho)d\rho = V(\rho)d\rho. \quad (4.3)$$

Pero a su vez, el volumen total ocupado por estructuras de densidad entre ρ y $\rho + d\rho$ está relacionado con la pPDF, $P(\rho)$, por

$$V(\rho)d\rho = V_0P(\rho)d\rho, \quad (4.4)$$

en donde V_0 es el volumen total del sistema. Tenemos entonces que

$$N(\rho)V_c(\rho)d\rho = V_0P(\rho)d\rho. \quad (4.5)$$

La expresión anterior se puede escribir en términos del número de grumos de masa m , $N(m)dm$, sin pérdida de generalidad, ya que, integrando sobre todos los posibles valores de ρ o de m , se obtiene el mismo número de núcleos. Es decir, de (4.5) tenemos

$$N(\rho)d\rho = \frac{V_0}{V_c(\rho)}P(\rho)d\rho = N(m)dm \quad (4.6)$$

Para escribir la expresión anterior en términos de la masa de los grumos notamos que, de (4.1),

$$r = r_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/\alpha}, \quad (4.7)$$

y por lo tanto

$$m_c(\rho) = c_1 \rho r_0^3 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{3/\alpha} = c_1 \rho^{1+3/\alpha} \rho_0 r_0^3 \rho_0^{-1-3/\alpha} \equiv m_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1+3/\alpha}$$

en donde $m_0 = c_1 \rho_0 r_0^3$ y c_1 es una constante geométrica. Definiendo $n \equiv \rho/\rho_0$ y $m \equiv m_c/m_0$, tenemos que

$$m_c(\rho) = m_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{3}{\alpha}+1} \Rightarrow n = m^{\frac{\alpha}{\alpha+3}}, \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow dn = \left(\frac{\alpha}{3+\alpha} \right) m^{-\frac{3}{3+\alpha}} dm. \quad (4.9)$$

Haciendo el cambio de variable en términos de la masa, la ecuación (4.6) queda

$$\begin{aligned} N(m)dm &= \frac{V_0}{V_{0,c}} (m^{\frac{\alpha}{\alpha+3}})^{-\frac{3}{\alpha}} P(m) \left(\frac{\alpha}{\alpha+3} \right) m^{-\frac{3}{\alpha+3}} dm, \\ \Rightarrow N(m)dm &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+3} \right) \frac{V_0}{V_{0,c}} m^{\frac{-6}{\alpha+3}} P(m) dm, \end{aligned} \quad (4.10)$$

en donde $P(m)$ denota la PDF escrita en términos de la masa.

Esta es la forma general de la distribución de masas de los núcleos para una ρ PDF, $P(\rho)$, arbitraria y una distribución de densidades a tamaño dada por $P(\rho|r)$, con forma de δ de Dirac.

Si además suponemos una forma lognormal para $P(\rho)$, como es común en turbulencia supersónica isotérmica,

$$P(\ln n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln n - \overline{\ln n})^2 \right];$$

y considerando el logaritmo natural de la ecuación (4.8)

$$\ln n = \ln m^{\frac{\alpha}{\alpha+3}}, \quad d \ln n = \frac{\alpha}{\alpha+3} d \ln m, \quad (4.11)$$

la ρ PDF lognormal en términos de la masa se expresa como

$$P(\ln m) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln m^{\frac{\alpha}{\alpha+3}} - \overline{\ln n})^2 \right]; \quad (4.12)$$

entonces, la ecuación (4.10) queda

$$N(\ln m) d \ln m = \left(\frac{\alpha}{\alpha+3} \right)^2 \frac{V_0}{V_{0,c}} \exp(\ln m^{\frac{-6}{\alpha+3}}) \times$$

$$\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln m^{\frac{\alpha}{\alpha+3}} - \overline{\ln n})^2 \right] \frac{\alpha}{d} \ln m. \quad (4.13)$$

Esta ecuación expresa la distribución de masa de los núcleos densos para una PDF lognormal y $P(\rho|r)$ con forma de δ de Dirac; es decir, que todos los grumos de tamaño r tienen densidad $\rho(r)$ dada por la ecuación (4.1).

4.2. Caso general de la distribución con ancho finito

En la sección anterior se consideró un caso simplificado, en el que se supuso que todos los grumos de tamaño r tienen la misma densidad $\rho(r)$. Sin embargo, en la realidad debemos esperar que exista una distribución de densidades a cada tamaño (o masa) de los grumos, caracterizada por una anchura finita, mayor que cero, como se ilustra en la figura 4.4.

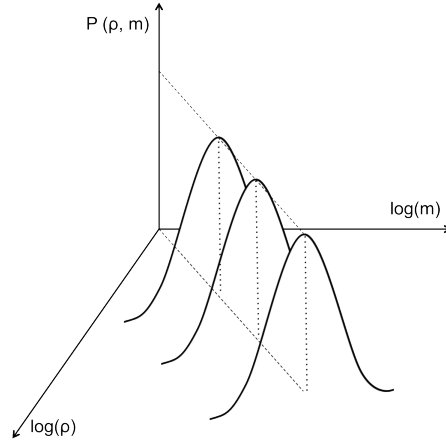


Figura 4.4. Distribución de densidad con la masa m de un núcleo. A cada masa corresponde una distribución de densidad. La línea punteada representa el caso anterior (delta de Dirac).

A continuación denotamos por $P(\rho, m)d\rho dm$ la probabilidad de encontrar una región con densidad $\in (\rho, \rho + d\rho)$ y masa $\in (m, m + dm)$. Es decir, $P(\rho, m)$ es la fracción del volumen total ocupada por los grumos con ρ y m . Entonces

$$P(\rho, m)d\rho dm = \frac{\sum V_c(\rho, m)}{V_0}d\rho dm, \quad (4.14)$$

en donde $V_c(\rho, m)$ es el volumen del grumo de densidad ρ y masa m . La suma en esta ecuación corre sobre todos los grumos de masa m y densidad ρ . Pero, dadas ρ y m , el volumen del grumo está fijo, y es igual a $V_c(\rho, m) = m/\rho$, de modo que

$$\begin{aligned} P(\rho, m)d\rho dm &= \frac{N(\rho, m)V_c(\rho, m)}{V_0}d\rho dm \\ &= \frac{m}{\rho} \frac{N(\rho, m)}{V_0}d\rho dm, \\ \Rightarrow \frac{\rho V_0}{m} P(\rho, m)d\rho dm &= N(\rho, m)d\rho dm, \end{aligned} \quad (4.15)$$

en donde $N(\rho, m)d\rho dm$ es el número de grumos con densidad $\rho \in (\rho, \rho + d\rho)$ y masa $m \in (m, m + dm)$.

El problema es entonces conocer la función $P(\rho, m)$, la cual nos da la fracción del volumen con densidad y masa antes mencionadas. No es sencillo determinar esta función, ya que primero se debe conocer si las variables ρ y m de los núcleos densos son independientes o no. Si m y ρ son independientes, entonces la probabilidad $P(\rho, m)$ se puede escribir como $P(\rho, m) = P(\rho)P(m)$, en donde $P(m)dm$ es la probabilidad de encontrar un grumo de masa $(m, m + dm)$, (equivalentemente, la fracción del volumen total ocupada por grumos en este rango de masas), independientemente de su densidad. La ecuación (4.15) quedaría en este caso como

$$\Rightarrow \frac{\rho V_0}{m} P(\rho) P(m) d\rho dm = N(\rho, m) d\rho dm. \quad (4.16)$$

Integrando sobre ρ , se obtiene

$$N(m)dm = \frac{V_0}{m} P(m) \left[\int_{\rho} \rho P(\rho) d\rho \right] dm \equiv \left[\int_{\rho} N(\rho, m) d\rho \right] dm. \quad (4.17)$$

en donde el término entre corchetes de la segunda igualdad da la forma explícita de $N(\rho)$. De nuevo, la forma más natural para la ρ PDF es una función lognormal. Insertando esta función en la integral de la primera igualdad de la ecuación (4.17), tenemos

$$\frac{1}{(2\pi\sigma)^2} \int_0^{\infty} \rho \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln \rho - \overline{\ln \rho}}{\sigma} \right)^2 \right] d \ln \rho. \quad (4.18)$$

Haciendo el cambio de variable $s = \ln \rho$, $d\rho = \rho ds$, $\rho = e^s$ y $s_0 = \overline{\ln \rho}$,

$$\int_0^{\infty} \rho P(\rho) d\rho = \frac{1}{(2\pi\sigma)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2s} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(s-s_0)^2} ds. \quad (4.19)$$

Definamos ahora $u = (s - s_0)/\sigma$ y $ds = \sigma du$. Entonces, la ecuación anterior se reescribe como

$$\frac{e^{2s_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{u}{\sqrt{2}} - \sigma\sqrt{2}\right)^2 + 2\sigma^2} du, \quad (4.20)$$

la cual es de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (4.21)$$

Así, la integral sobre ρ de la ecuación (4.17) es

$$\int_0^{\infty} \rho P(\rho) d\rho = e^{2(\overline{\ln \rho} + \sigma^2)}, \quad (4.22)$$

por lo que

$$N(\ln m) d \ln m = V_0 e^{2(\overline{\ln \rho} + \sigma^2)} e^{-\ln m} P(\ln m) d \ln m. \quad (4.23)$$

Así pues, suponiendo que ρ y m son independientes, y adoptando la forma lognormal de la ρ PDF, el número de núcleos densos queda dado por la ecuación (4.23). Sin embargo el problema no queda completamente resuelto, ya que aún queda por determinar la función $P(m)$. En la siguiente sección se describe un intento de encontrar la forma de esta función, y de poner a prueba la hipótesis de independencia entre m y ρ a través de simulaciones numéricas.

Capítulo 5

Distribución de masa de objetos de densidad dada en simulaciones numéricas de nubes moleculares

Se mostró en el capítulo anterior que la descripción de la CMF en un flujo turbulento requiere conocer una distribución adicional a la PDF de la densidad. Si la densidad y la masa se pueden considerar como variables aleatorias independientes, entonces esta segunda distribución es la de las masas de los grumos en un intervalo de densidades. Describimos a continuación los resultados al tratar de obtener esta nueva función, así como de determinar si ρ y m son variables independientes, a partir de simulaciones numéricas de turbulencia supersónica isotérmica.

5.1. Simulaciones de turbulencia supersónica y definición de los grumos

Los datos usados en este capítulo proceden de una simulación numérica presentada por Vázquez-Semadeni et al. (2008), de turbulencia supersónica isotérmica, con un número de Mach rms $M_s = 10$, mantenido a través de la aplicación de un campo de fuerza estocástico, que se renueva periódicamente. Las simulaciones

se realizaron en la supercomputadora Kanbalam de la UNAM, con una resolución de 512^3 celdas en la malla numérica.

Los datos de las simulaciones usadas están tomados en un tiempo igual a dos tiempos de cruce turbulentos¹. Esto se debe a que hay que darle tiempo al gas de alcanzar una distribución estacionaria, lo cual no puede ser al inicio de la simulación porque las condiciones son uniformes.

Además se consideró el campo de densidades de tres realizaciones diferentes de la simulación con el mismo número de Mach, pero con distinta semilla para el generador de números aleatorios usado para originar el campo de fuerza que agita al fluido. Los resultados de las tres simulaciones se combinaron, a fin de tener una mejor estadística para el campo de densidad y un mayor número de grumos para obtener la estadística de sus masas.

5.2. Obtención de la distribución conjunta de la densidad y masa de los grumos

Para determinar si las variables ρ y m son independientes en un flujo turbulento compresible, y la forma funcional de la distribución de las masas de los grumos, se procedió de la siguiente manera: utilizando el ambiente de post-procesamiento y de análisis de datos IDL, se leyeron los datos de la densidad en cada celda de la malla numérica de una simulación. A continuación, se encontraron los grumos utilizando un algoritmo conocido como “*Friends of friends*” (FOF) (Huchra & Geller, 1982) cuyo método se describe en la figura 5.1, implementado por Enrique Vázquez-Semadeni y Javier Ballesteros-Paredes: se busca el máximo de densidad en toda la malla, y se buscan todos los puntos de la malla que formen un conjunto conexo y que tengan densidad mayor o igual que un cierto umbral definido pre-

¹El tiempo de cruce turbulento, $T_{turb} = L/v_{turb}$, con L el tamaño de la caja numérica y v_{turb} la magnitud rms de la velocidad, es el tiempo necesario para que una parcela de gas moviéndose con velocidad v_{turb} cruce la caja numérica. Este tiempo se interpreta como el tiempo necesario para que los campos de densidad y velocidad puedan considerarse como estadísticamente independiente de sus valores a un tiempo $t - T_{turb}$

viamente. Este conjunto de puntos de la malla constituye un grumo, al cual se le pueden medir su masa y su densidad promedio. Posteriormente, se pone en cero el valor de la densidad en este grumo, y se busca el siguiente máximo de densidad en la malla, repitiendo el proceso, y así sucesivamente hasta agotar todos los puntos de la malla con densidad mayor que el umbral.

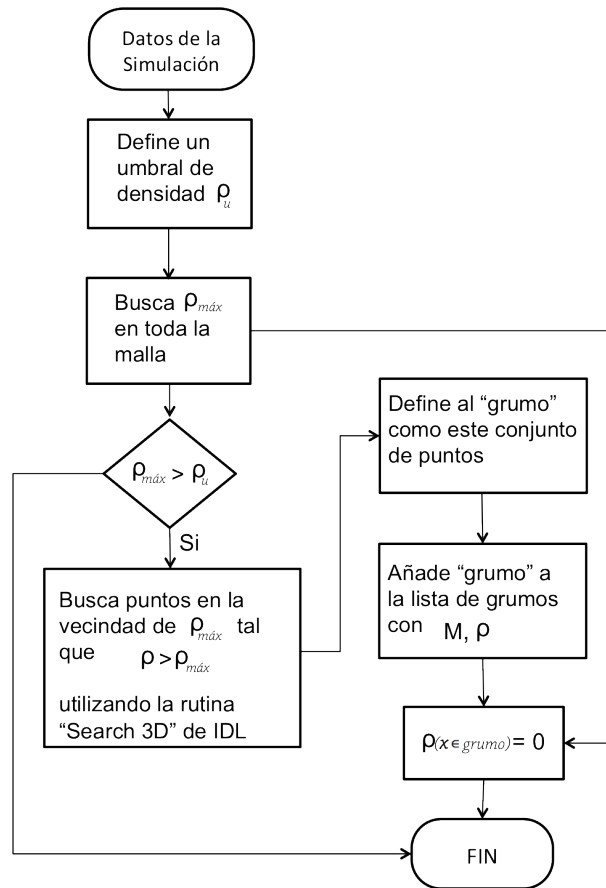


Figura 5.1. Diagrama de flujo del proceso para encontrar núcleos densos en la simulación.

El proceso se repitió para valores del umbral de densidad, ρ_u , dados por $\rho_u = 2^n$, con $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, a fin de obtener conjuntos de grumos cada vez más densos y pequeños. El súper conjunto de grumos así definido se clasificó por

intervalos logarítmicos de densidad promedio dados por $[2^n, 2^{n+1}]$, con n de 0 a 9.

Finalmente, se repitió el proceso para las otras dos simulaciones, y se agregaron los grumos obtenidos de ellas a la base de datos, obteniéndose un total de 1256 grumos.

Una vez clasificados los núcleos de acuerdo a la densidad, se realizó un histograma de masas de cada intervalo, figura 5.2, para determinar si esta distribución varía con el intervalo de densidad. En caso afirmativo, puede decirse que la masa y la densidad no son variables aleatorias independientes. Por el contrario, si la distribución $P(m)$ no depende del intervalo de densidad, entonces puede decirse que ρ y m son independientes, y $P(\rho, m) = P(\rho)P(m)$. Nótese de la figura 5.2 que los intervalos (1-2) y (512-1024) no tienen elementos y que los intervalos (128-256) y (256-512) contienen muy pocos, por lo que no son incluidos en los resultados finales.

Lo que buscamos ahora es determinar la probabilidad $P(\ln m)$ de encontrar una región de masa m en cada intervalo de densidad. Análogamente a la pPDF, consideramos la distribución del logaritmo de la masa, pues las masas de los grumos pueden alcanzar varios ordenes de magnitud. Esta probabilidad la calculamos operacionalmente como la fracción del volumen total ocupada por grumos de masa m y densidad ρ , es decir, m PDF.

Ahora bien, según la ecuación (4.23)

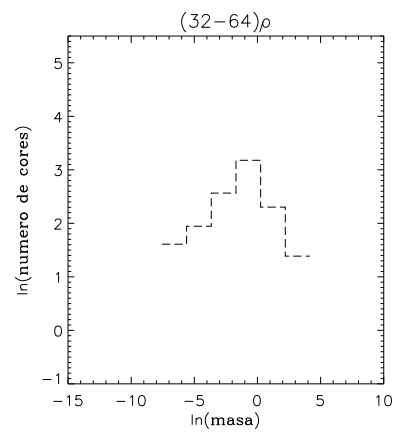
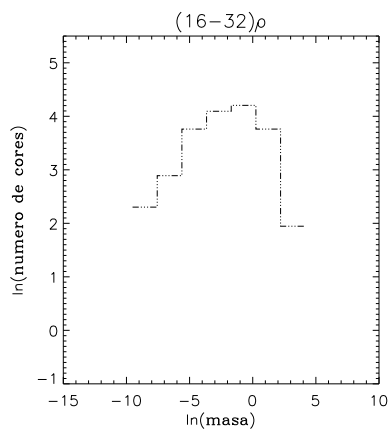
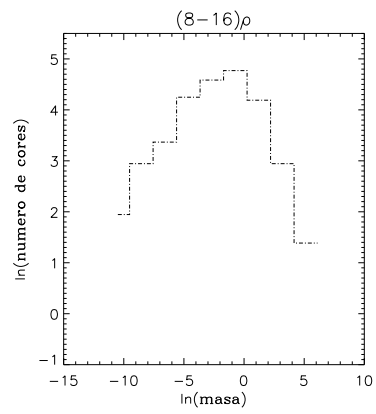
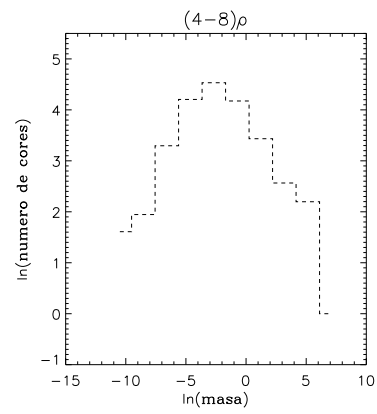
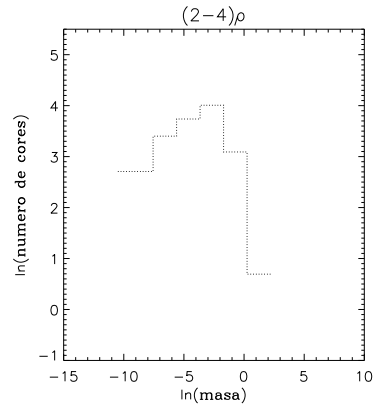
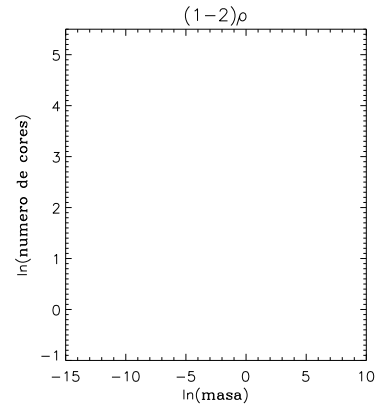
$$N(\ln m)d(\ln m) \propto e^{-\ln m}P(\ln m)d(\ln m),$$

en donde $N(\ln m)$ es el número de grumos con $\ln m'$ entre $\ln$ y $\ln m d(\ln m)$.

Entonces

$$P(\ln m)d(\ln m) \propto e^{\ln m}N(\ln m)d(\ln m). \quad (5.1)$$

De acuerdo a esto, para obtener $P(\ln m)$, dividimos los histogramas de la figura 5.2 por la masa característica del intervalo de masa. La figura 5.3 muestra, para los intervalos (2-4) a (256-512), las gráficas de la probabilidad $P(\ln m)$ para cada intervalo de densidad.



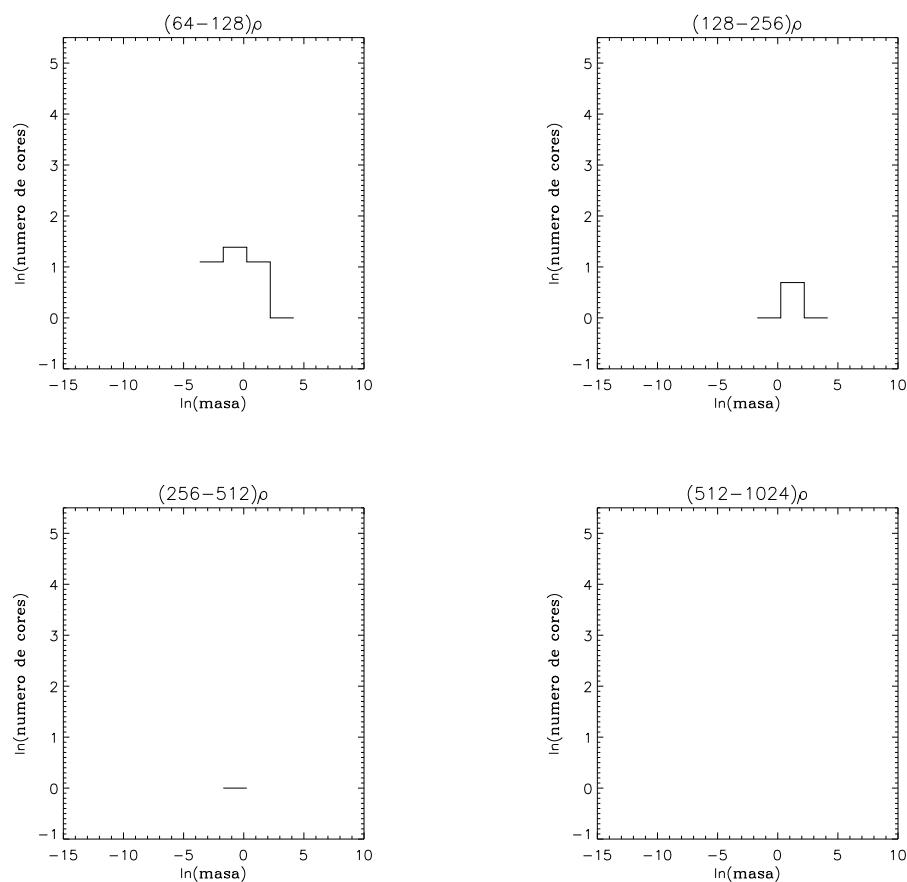
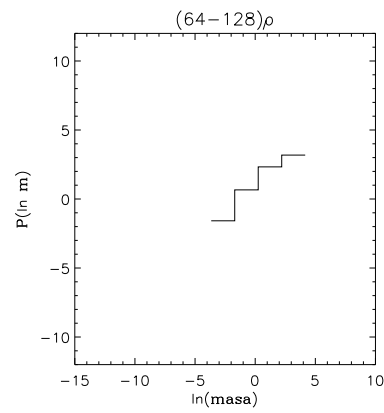
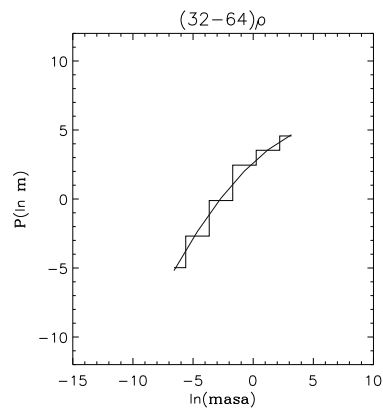
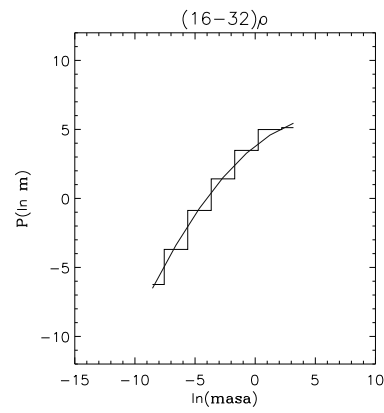
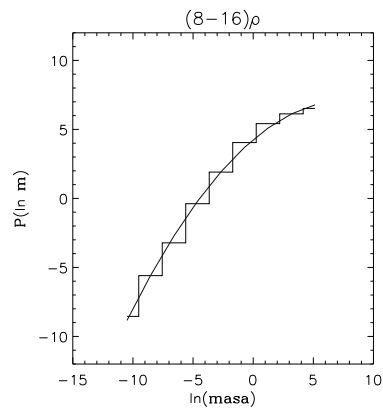
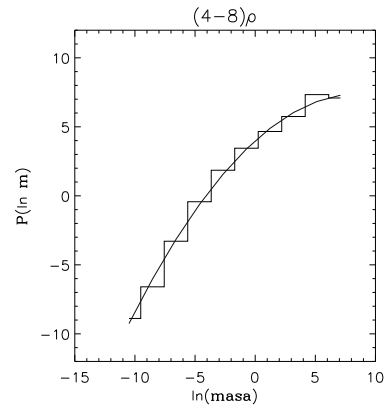
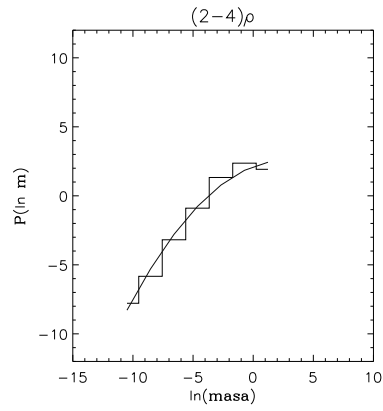


Figura 5.2. Histogramas de la distribución de masas de los núcleos densos en los diferentes intervalos de densidad indicados por texto en la parte superior de cada gráfica.



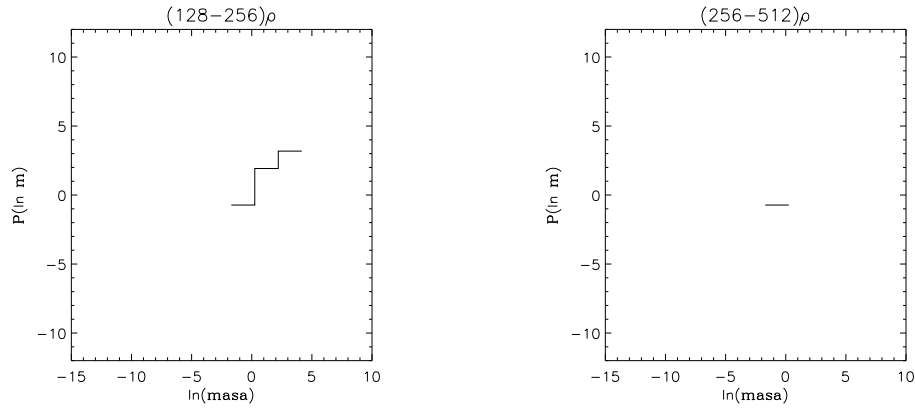


Figura 5.3. Histogramas de la mPDF para intervalos de densidad dados

Para determinar cuantitativamente si $P(\ln m)$ varía con la densidad de los núcleos, se tomaron los intervalos de densidad con mejor estadística, y se les aplicó a los histogramas un ajuste polinomial de la forma

$$P(\ln m) = A + B \ln m + C(\ln m)^2. \quad (5.2)$$

Este ajuste se hizo usando la rutina POLY_FIT de IDL. Estos ajustes se muestran también en la figura 5.3 para los intervalos de densidad con mejor estadística, y la tabla 5.1 muestra los valores de los parámetros A, B y C de estos ajustes con su desviación estándar, σ_A , σ_B y σ_C correspondiente. Finalmente, en la figura 5.4 se grafican los valores de los parámetros resultantes de los ajustes como función de la media geométrica del intervalo logarítmico de densidad.

De la figura 5.4 se aprecia que el parámetro A primero aumenta y después disminuye según aumenta la densidad de los grumos. De forma similar, el parámetro B cambia conforme aumenta la densidad, siendo C el único que se mantiene constante. Las variaciones en A y B son mayores que las incertidumbres dadas por σ_A y σ_B , de modo que, en sentido estricto, se concluiría que las variables aleatorias ρ y m no son independientes. Sin embargo, cabe la posibilidad de que ellas sean ocasionadas por artefactos numéricos de las simulaciones. En particular, la probabilidad de encontrar núcleos de todas las masas a altas densidades está limitada

por el tamaño de la celda y por la difusión numérica, la última causa que las celdas con altas densidades pierdan masa, mientras que la primera impone un valor mínimo a la masa que puede tener un grumo a una cierta densidad dada cuando el tamaño del grumo es igual a una sola celda.

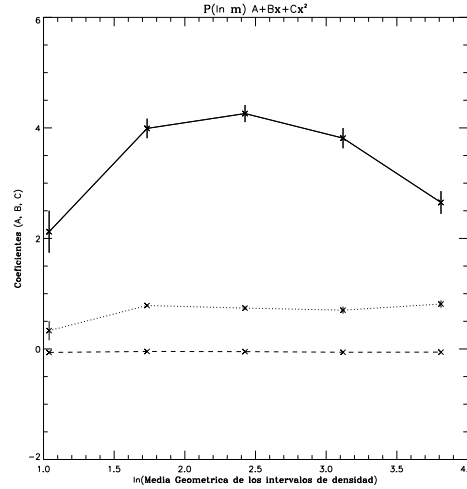


Figura 5.4. Parámetros del ajuste polinómico como función de la media geométrica del intervalo de densidad.

Así pues, en la práctica no podemos descartar con seguridad la hipótesis de que ρ y m son variables aleatorias independientes. Será necesario repetir el análisis numérico con simulaciones de mayor rango dinámico y resolución, como se discute más a fondo en el capítulo 6.

En cuanto a la forma funcional de $P(\ln m)$, no contamos con una predicción teórica, pero los resultados de las simulaciones sugieren que, al menos en el rango de masas y densidades, se puede ajustar por

$$P(\ln m) = \langle A \rangle + \langle B \rangle \ln m + \langle C \rangle (\ln m)^2, \quad (5.3)$$

en donde $\langle A \rangle$, $\langle B \rangle$ y $\langle C \rangle$ son los promedios de estas constantes sobre los diferentes intervalos de densidad.

Densidad ρ	$\langle A \rangle$	$\langle B \rangle$	$\langle C \rangle$
(2-4)	2.121 ± 0.379	0.332 ± 0.175	-0.063 ± 0.018
(4-8)	3.991 ± 0.177	0.787 ± 0.026	-0.045 ± 0.004
(8-16)	4.259 ± 0.155	0.739 ± 0.034	-0.485 ± 0.005
(16-32)	3.815 ± 0.184	0.702 ± 0.065	-0.059 ± 0.010
(32-64)	2.650 ± 0.206	0.813 ± 0.068	-0.057 ± 0.015

Tabla 5.1. Parámetros de los ajustes polinomiales a los histogramas de $mPDF$ en cada intervalo de densidad.

Capítulo 6

Discusión y conclusiones

Se ha hecho énfasis a lo largo de este trabajo sobre la importancia de que, para obtener la función de masa de los núcleos densos en las nubes moleculares, no basta conocer la distribución de densidad de probabilidad del campo de densidad (ρ PDF) en las nubes, como se a hecho en trabajos anteriores (p. ejm. PN02; Elmegreen 2011), sino que es necesario también conocer la distribución de masas o tamaños de las estructuras en cuestión. Recordemos que la masa es función tanto de la densidad como del tamaño (volumen). Entonces, dadas dos de estas tres variables se puede conocer, sin necesidad de suposiciones adicionales, la tercera. Actualmente, se conoce la distribución de densidad de los núcleos, es necesario conocer entonces la distribución de tamaños, o masas, para determinar la función de masa de estos núcleos densos. Con este objetivo, en el capítulo 4 se derivó de manera formal el espectro de masas de los grumos, suponiendo conocida la distribución conjunta de densidades del medio y de tamaños de los grumos, y se discutieron algunas formas funcionales de esta segunda distribución.

Primero se analizó el caso en que la distribución de tamaños obedece una delta de Dirac, de modo que todos los núcleos de densidad ρ tienen el mismo tamaño r (como en el caso de la relación densidad-tamaño de Larson 1981). Es decir, considerando núcleos esféricos de tamaño r con densidad $\rho \propto r^\alpha$, se obtuvo una expresión para el número total de estructuras con densidad entre ρ y $\rho + d\rho$ a la que se asocia una ρ PDF. Ya que integrando estas estructuras sobre todo

valor posible de densidad o masa se obtiene el mismo número de núcleos, se expresó la distribución de masas de los núcleos como lo indica la ecuación (4.10). Suponiendo además que la pPDF obedece una forma lognormal la distribución de masas para los núcleos con tamaño r y densidad $\rho(r)$ viene dada por la ecuación (4.13).

La ecuación (4.13) sería un resultado concluyente si se considera que a cada radio r corresponde una densidad $\rho(r)$, sin embargo, lo que en realidad sucede es que a cada radio r no hay sólo una densidad, si no una distribución de densidad, ó equivalentemente, a cada densidad se tiene una distribución de tamaños (o masas). Este segundo caso se discutió también en el capítulo 4, considerando una probabilidad $P(\rho, m)$ de encontrar un núcleo con densidad y masas entre los rangos $(m, m + dm)$ y $(\rho, \rho + d\rho)$ respectivamente. El problema que se plantea entonces es conocer $P(\rho, m)$. Para esto se suponen dos posibles situaciones: *i*) m y ρ son variables independientes, ó, *ii*) no lo son. El caso sencillo es suponer que son variables independientes, pues se reduce al caso $P(\rho, m) = P(\rho)P(m)$, en el que se puede asociar una PDF lognormal para la densidad, dando por resultado la ecuación (4.23), en donde queda por determinar la PDF de las masas $P(m)$. El caso en que no sean variables independientes se complica, pues hay que estimar no sólo $P(m)$, si no la distribución conjunta.

En el capítulo 5 se intentó determinar la dependencia o independencia de ρ y m en una simulación de turbulencia isotérmica supersónica. Esto se hizo mediante el análisis de la distribución de masa de núcleos densos $P(m)$ en diferentes intervalos de densidad, para determinar si $P(m)$ depende o no del intervalo de densidad en que se mide. En la simulación usada se identificaron núcleos densos mediante el algoritmo “friends of friends” (FOF), y usando los datos sobre densidad y masa de estos núcleos se hicieron histogramas de masas en diferentes intervalos de densidad, $N(m|\rho)$. Notando que $N(m|\rho)$ y la PDF de las masas están relacionadas por la ecuación (4.23), se obtuvieron entonces las funciones $P(m|\rho)$ en diferentes intervalos de densidad. Para saber si nuestra suposición era correcta se analizó si la distribución obtenida variaba o no cuando variaba el intervalo de densidad, para lo cual se hizo un ajuste polinomial, ecuación (5.2), a las distribuciones con mejor

estadística (figura 5.2). Finalmente se graficaron las desviaciones de estos histogramas (figura 5.3) en los que se observa una variación ligera de los parámetros por lo que podemos concluir que p y m no son variables independientes. Sin embargo, a pesar del buen ajuste para los intervalos, el resultado no es determinante debido a limitaciones de las simulaciones que se discuten en la sección 2.1.2.

Así pues, nuestro trabajo ha mostrado explícitamente la dependencia del espectro de masas de los grumos en la distribución de probabilidad de sus masas en cada intervalo de densidad del flujo, y, tentativamente, sugiere que dicha distribución varía en el intervalo de densidad, aunque es necesario verificar este resultado utilizando simulaciones numéricas de mayor resolución, como se discute a continuación.

6.1. Limitaciones

La definición de nubes y grumos, y el problema cloud-in-cloud

Uno de los principales problemas en el desarrollo de teorías de formación estelar es cómo definir un núcleo denso. Hay que recordar que las nubes moleculares y sus subestructuras, que son excesos locales de densidad, son parte de un medio continuo, por lo que no hay fronteras bien definidas entre ellas. Así pues, diferentes métodos de definir a las nubes y los grumos arrojarán diferentes muestras de objetos.

En particular, el llamado problema de “nube en nube” (“cloud in cloud” en inglés), o bien de la “estructura jerárquica” consiste en que, si se considera un exceso local de densidad a una cierta escala R_0 , y ésta contiene múltiples subregiones que son por sí mismas excesos locales de densidad en una escala más pequeña R_1 (figura 6.1), y así sucesivamente, entonces la distribución de probabilidad de las masas de estos objetos no constituye una PDF estrictamente hablando, pues la suma de todas las masas así calculadas no es igual a la masa total de sistema, ya que las masas de los objetos a escala R_1 son parte de la masa del objeto a escala R_0 .

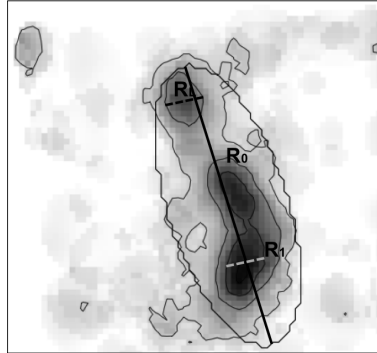


Figura 6.1. Representación del problema cloud-in-cloud. Una nube difusa puede contener subestructuras más densas y éstas contener regiones más compactas y aún más densas que las anteriores. Los objetos más pequeños forman parte del objeto difuso, por lo que la suma de todas las masas de todos los objetos excede la masa total del sistema.

Se supuso para el cálculo analítico del espectro de masas de los grumos, realizado en el capítulo 4, que los núcleos densos eran estructuras independientes; es decir, se despreció el problema cloud-in-cloud. Sin embargo, la forma de definir a los grumos en los datos de la simulación numérica utilizada en el capítulo 5, como regiones conexas por encima de un umbral de densidad, sí sufre del problema cloud-in-cloud, por lo que los dos análisis no son del todo consistentes. Sin embargo, dado que la resolución del problema no es trivial, en este trabajo hemos debido tolerar tal inconsistencia.

Limitaciones de la simulación

Los histogramas de la figura 5.1 muestran que según se aumenta la densidad considerada, la masa típica de los núcleos no varía sensiblemente. Sin embargo lo que en realidad se espera es que a densidades mayores las masas sean menores; pues las estructuras pequeñas y densas son parte de las grandes y difusas, por lo que su masa es necesariamente menor. Entonces, ¿por qué los histogramas muestran lo contrario? La razón es el uso de una simulación de malla fija; es de-

cir, una en que las celdas de la malla numérica no cambian en el transcurso de la simulación puesto que la masa de los núcleos está dada por

$$dM = \rho dV, \quad (6.1)$$

es entonces claro que, a una densidad dada ρ_0 , la masa mínima que puede tener una nube o núcleo es cuando tiene el tamaño de una sola celda de la caja, es decir,

$$M_{min} = \rho V_{celda}. \quad (6.2)$$

Por eso, cuando aumenta la densidad característica del intervalo considerado, aumenta la masa mínima de la distribución de los núcleos. En cambio, si se utiliza una simulación de malla adaptiva, en la que el tamaño de las celdas numéricas se reduce al aumentar la densidad, esta limitación espúrea es eliminada.

Trabajo a futuro

Para atenuar las limitaciones mencionadas introducidas por la simulación, se plantea usar simulaciones de malla adaptiva. Como su nombre lo dice, las simulaciones de malla adaptiva van ajustando el tamaño de la celda en relación con la densidad de la región. En la figura 6.2 se muestra la comparación en dos dimensiones de simulaciones de malla fija y malla adaptiva.

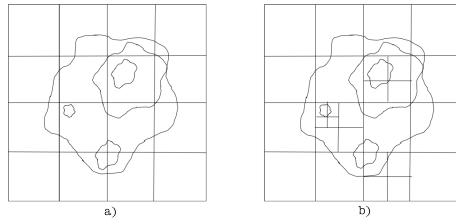


Figura 6.2. a) Representación 2D de una simulación a malla fija, las celdas no cambian en el transcurso de la simulación, b) representación de una simulación de malla adaptiva, las celdas cambian de acuerdo a los parámetros de densidad impuestos.

Adicionalmente, se propone utilizar algún método de identificar grumos que no sufra del problema cloud-in-cloud, como por ejemplo el algoritmo CLUMP-FIND (Williams et al. 1994). Éste funciona identificando máximo locales en la densidad, y separando por construcción grumos vecinos. La limitación que presenta es que no identifica a los grumos “madre” que contienen a otros más pequeños, por lo que posiblemente no identifique a las estructuras más masivas, autogravitantes, que pueden dar origen a cúmulos estelares. Será entonces necesario estudiar a fondo sus ventajas y desventajas.

Apéndice A

Tiempo de caída libre

Una escala de tiempo característica de los procesos descritos en el capítulo 2 es el tiempo de caída libre t_{cl} , que es el tiempo que tarda una distribución de materia, uniforme y esférica, en precipitarse a su centro, debido a su autogravedad, en ausencia de cualquier mecanismo de soporte.

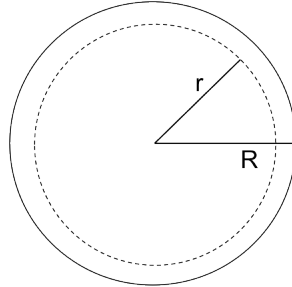


Figura A.1. Idealización de una nube molecular como una nube esférica de radio R .

Supongamos una nube esférica y uniforme (figura A.1) de radio inicial R , en reposo. La velocidad radial en un punto en la superficie exterior cuando está a una distancia r del centro es

$$v = \frac{dr}{dt} = - \left[2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{A.1})$$

que se obtiene al considerar $E \sim (GM^2)/R = (1/2)MV^2$, pues mientras más pequeña se hace la nube la energía gravitacional (negativa) es mayor en valor absoluto, G es la constante gravitacional y M es la masa de la nube.

Haciendo el cambio de variable $x = r/R$ y $dx = dr/R$, obtenemos

$$\begin{aligned} R \frac{dx}{dt} &= - \left[2GM \left(\frac{1}{xR} - \frac{1}{R} \right) \right]^{1/2} = - \left(\frac{2GM}{R} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{x} - 1 \right)^{1/2}, \\ &\rightarrow \frac{dx}{dt} = - \left(\frac{2GM}{R^3} \right)^{1/2} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{1/2} \\ \therefore dt &= - \frac{R^{-3/2}}{(2GM)^{1/2}} \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Esta integral puede resolverse utilizando la *Función Beta* $B(m, n)$ donde $\Gamma(m)$ es la *Función Gamma*.

$$B(m, n) \equiv \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}, \quad (\text{A.3})$$

Tomando $m = 3/2$ y $n = 2$

$$\frac{\Gamma(3/2)\Gamma(2)}{\Gamma(7/2)} = \frac{\pi}{2}, \quad (\text{A.4})$$

Obtenemos que

$$t = \left(\frac{R^3}{2GM} \right)^{1/2} \frac{\pi}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Sea ρ_0 la densidad inicial de la esfera, dada por

$$\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}. \quad (\text{A.6})$$

Entonces, el tiempo de caída libre está dado por

$$t = \left(\frac{3\pi}{32G\rho} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.7})$$

Apéndice B

Obtención de las condiciones de salto MHD presentadas por PN02

PN02 establecen que los núcleos densos se forman como las partes más densas de filamentos causados por choques en flujos isotérmicos supersónicamente turbulentos y magnetizados. Sin embargo, no presentan la derivación de las condiciones de salto que consideran, por lo cuál lo hacemos aquí.

En magnetohidrodinámica las ecuaciones de conservación, despreciando los términos difusivos (véase Shu Gas Dynamics, 1992, Cap.25), son:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = 0; \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\rho u_i u_k + P \delta_{ik} - \frac{1}{4\pi} \left(B_i B_k - \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2 \delta_{ik} \right) \right] = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \rho \epsilon + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) + \\ & \nabla \cdot \left[\rho \mathbf{u} \left(h + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{B} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{u}) = 0; \quad (\text{B.4})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0; \quad (\text{B.5})$$

donde, asumiendo un gas ideal

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}, \quad (\text{B.6})$$

$\mathbf{B}$ es el campo magnético, ρ la densidad, $\mathbf{u}$ la velocidad, P la presión y ε representa la energía.

Consideremos un régimen estacionario, de modo que podemos eliminar las derivadas temporales y podemos considerar las componentes, paralela y perpendicular, de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{u}$. Entonces

$$[\rho u_{\perp}]_0^1 = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\left[\rho u_{\perp}^2 + \frac{B_{\parallel}^2}{8\pi} \right]_0^1 = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$[B_{\perp} u_{\parallel} - B_{\parallel} u_{\perp}]_0^1 = 0, \quad (\text{B.9})$$

donde los subíndices 0 y 1 representan las condiciones antes y después del choque respectivamente.

Otras consideraciones en PN02 son que la componente paralela de la velocidad y la perpendicular del campo magnético al plano del choque no contribuyen al choque mismo. Esto se debe a que la onda de choque, como las ondas de sonido, es una onda longitudinal, de modo que los gradientes de las variables físicas son paralelos a la dirección de propagación de la onda, que es la misma que la dirección del movimiento del fluido. Por lo tanto $v_{\parallel}$ no contribuye a la compresión del gas. En el caso del campo magnético, de la ecuación (B.4), se observa que la componente de $\mathbf{B}$ paralela a $\mathbf{u}$ no produce ningún cambio temporal en $\mathbf{B}$, por lo que sólo es relevante la componente perpendicular a $\mathbf{u}$ (es decir, paralela al choque). Tenemos entonces que

$$u_{\perp} = 0, \quad B_{\parallel} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Finalmente, considerando el caso en que la presión térmica es despreciable frente a la presión magnética, las condiciones (B.8) y (B.9) quedan:

$$\left[\rho u_{\perp}^2 + \frac{B_{\parallel}^2}{8\pi} \right]_0^1 = 0, \quad (\text{B.11})$$

$$[B_{\parallel} u_{\perp}]_0^1 = 0. \quad (\text{B.12})$$

Por lo tanto, de (B.7), (B.11) y (B.12) tenemos

$$\rho_0 u_0 = \rho_1 u_1, \quad (\text{B.13})$$

$$\rho_0 u_0^2 + \frac{B_0^2}{8\pi} = \rho_1 u_1^2 + \frac{B_1^2}{8\pi}, \quad (\text{B.14})$$

$$B_0 u_0 = B_1 u_1. \quad (\text{B.15})$$

De (B.13) y (B.15) se obtienen las relaciones $(\rho_1/\rho_0) = (u_0/u_1)$ y $(B_1/B_0) = (u_0/u_1)$. Luego, dividiendo la expresión (B.14) por ρ_0 , obtenemos

$$u_0^2 + \frac{B_0^2}{8\pi\rho_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0} u_1^2 \frac{\rho_0^2}{\rho_1^2} + \frac{B_0^2}{8\pi\rho_0} \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2}. \quad (\text{B.16})$$

Recordemos ahora que la velocidad de Alfvén, v_A , está dada por

$$v_A^2 = \frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}. \quad (\text{B.17})$$

(ver, p.ejm., Shu 1992). Entonces, sustituyendo v_A en la ecuación (B.16), queda

$$\begin{aligned} u_0^2 + \frac{v_A^2}{2} &= \frac{\rho_0}{\rho_1} u_1^2 + \frac{v_A^2}{2} \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2} \\ \Rightarrow u_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) + \frac{v_A^2}{2} \left(1 - \frac{\rho_1^2}{\rho_0^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Definiendo ahora $x \equiv \rho_1/\rho_0$, la ecuación anterior se reescribe

$$\begin{aligned}
u_1^2 - \frac{v_A^2}{2}(x+1)x &= 0 \\
\Rightarrow 2 \left(\frac{u_0}{v_A} \right)^2 &= x^2 + x.
\end{aligned} \tag{B.19}$$

Finalmente, bajo la condición $x^2 \gg x$ y recordando que el número de Mach Alfvénico está dado por $\mathcal{M}_A = u/v_A$, nos queda

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{2} \frac{u_1}{v_A} \\
\therefore \frac{\rho_1}{\rho_0} &\sim \mathcal{M}_A.
\end{aligned} \tag{B.20}$$

La ecuación anterior es la primera condición de salto obtenida por PN02 (su ec. (1)). Considerando ahora las expresiones (B.13) y (B.15), tenemos que

$$\frac{u_0}{u_1} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{\rho_1}{\rho_0},$$

de donde

$$\frac{B_1}{B_0} \sim \mathcal{M}_A, \tag{B.21}$$

que es la condición de salto de la ecuación (3) de PN02.

Finalmente, para obtener la condición 2 de PN02, consideramos la masa de los flujos que colisionan antes y después del choque, figura B.1, m_0 y m_1 respectivamente, las cuales deben ser iguales por conservación.

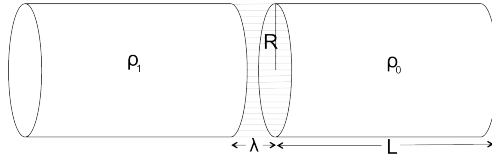


Figura B.1. Diferentes escalas de tamaño con la misma densidad y masa.

$$m_0 = 4\pi R^2 L \rho_0; \quad m_1 = 4\pi R^2 \lambda \rho_1, \tag{B.22}$$

$$\text{si } m_0 = m_1 \quad \Rightarrow L\rho_0 = \lambda\rho_1. \quad (\text{B.23})$$

Usando la ecuación (B.20),

$$\frac{\lambda}{L} \sim \mathcal{M}_A^{-1}. \quad (\text{B.24})$$

Las ecuaciones (B.20), (B.21) y (B.23) son las condiciones de salto (1),(2) y (3) presentadas por PN02.

Bibliografía

Tabla de Acrónimos	
A&A	Astronomy & Astrophysics
ApJ	The Astrophysical Journal
ApJL	The Astrophysical Journal Letters
ApJS	The Astrophysical Journal Supplement
ApSS	Astrophysics and Space Science
MNRAS	Monthly Notices of the Royal Astronomical Society
PASJ	Publications of the Astronomical Society of Japan
PASP	Publications of the Astronomical Society of the Pacific
PRE	Physical Review E

[Alves et al.(2007)] Alves, J., Lombardi, M., & Lada, C. J. 2007, A&A, 462, L17

[Adams & Fatuzzo(1996)] Adams, F. C., & Fatuzzo, M. 1996, ApJ, 464, 256

[Ballesteros-Paredes et al.(1999)] Ballesteros-Paredes, J., Vázquez-Semadeni, E., & Scalo, J. 1999, ApJ, 515, 286

[Ballesteros-Paredes(2004)] Ballesteros-Paredes, J. 2004, ApSS, 292, 193

[Blitz(1993)] Blitz, L. 1993, Protostars and Planets III, 125

[Bonazzola et al.(1987)] Bonazzola, S., Heyvaerts, J., Falgarone, E., Perault, M., & Puget, J. L. 1987, A&A, 172, 293

- [Bonnell et al.(1997)] Bonnell, I. A., Bate, M. R., Clarke, C. J., & Pringle, J. E. 1997, MNRAS, 285, 201
- [Bonnell et al.(2006)] Bonnell, I. A., Clarke, C. J., & Bate, M. R. 2006, MNRAS, 368, 1296
- [Burgers 1111] Burgers, J. M. 1974, "The Nonlinear Diffusion Equation"(Dordrecht:Reidel)
- [Chabrier(2003)] Chabrier, G. 2003, PASP, 115, 763
- [Chandrasekhar(1951)] Chandrasekhar, S. 1951, Royal Society of London Proceedings Series A, 210, 26
- [Elmegreen(1997)] Elmegreen, B. G. 1997, ApJ, 486, 944
- [Elmegreen(2007)] Elmegreen, B. G. 2007, ApJ, 668, 1064
- [Elmegreen(2011)] Elmegreen, B. G. 2011, ApJ, 731, 61
- [Falgarone et al.(1992)] Falgarone, E., Puget, J.-L., & Perault, M. 1992, A&A, 257, 715
- [Federrath et al.(2008)] Federrath, C., Klessen, R. S., & Schmidt, W. 2008, ApJL, 688, L79
- [Ferrière(2001)] Ferrière, K. M. 2001, Reviews of Modern Physics, 73, 1031
- [Hennebelle & Chabrier(2008)] Hennebelle, P., & Chabrier, G. 2008, ApJ, 684, 395
- [Heyer & Brunt(2004)] Heyer, M. H., & Brunt, C. M. 2004, ApJL, 615, L45
- [Hopkins(2012)] Hopkins, P. F. 2012, MNRAS, 423, 2037
- [Huchra & Geller(1982)] Huchra, J. P., & Geller, M. J. 1982, ApJ, 257, 423
- [Johnstone et al.(2000)] Johnstone, D., Wilson, C. D., Moriarty-Schieven, G., et al. 2000, ApJ, 545, 327

- [Kolmogorov(1941)] Kolmogorov, A. 1941, Akademiia Nauk SSSR Doklady, 30, 301
- [Kroupa(2001)] Kroupa, P. 2001, MNRAS, 322, 231
- [Larson(1978)] Larson, R. B. 1978, MNRAS, 184, 69
- [Larson(1981)] Larson, R. B. 1981, MNRAS, 194, 809
- [Larson(1982)] Larson, R. B. 1982, MNRAS, 200, 159
- [Miller & Scalo(1979)] Miller, G. E., & Scalo, J. M. 1979, ApJS, 41, 513
- [Motte et al.(1998)] Motte, F., Andre, P., & Neri, R. 1998, A&A, 336, 150
- [Myers et al.(1986)] Myers, P. C., Dame, T. M., Thaddeus, P., et al. 1986, ApJ, 301, 398
- [Padoan(1995)] Padoan, P. 1995, MNRAS, 277, 377
- [Padoan et al.(1997)] Padoan, P., Nordlund, A., & Jones, B. J. T. 1997, MNRAS, 288, 145
- [Padoan & Nordlund(2002)] Padoan, P., & Nordlund, A. 2002, ApJ, 576, 870
- [Passot & Vázquez-Semadeni(1998)] Passot, T., & Vázquez-Semadeni, E. 1998, PRE, 58, 4501
- [Salpeter(1955)] Salpeter, E. E. 1955, ApJ, 121, 161
- [Sasao(1973)] Sasao, T. 1973, PASJ, 25, 1
- [Shu(1992)] Shu, F. H. 1992, Physics of Astrophysics, Vol. II, by Frank H. Shu. Published by University Science Books, ISBN 0-935702-65-2, 476pp, 1992.,
- [Vázquez-Semadeni(1994)] Vázquez-Semadeni, E. 1994, ApJ, 423, 681

[Vázquez-Semadeni & Gazol(1995)] Vázquez-Semadeni, E., & Gazol, A. 1995, A&A, 303, 204

[Vázquez-Semadeni et al.(2008)] Vázquez-Semadeni, E., González, R. F., Ballesteros-Paredes, J., Gazol, A., & Kim, J. 2008, MNRAS, 390, 769

[Williams et al.(1994)] Williams, J. P., de Geus, E. J., & Blitz, L. 1994, ApJ, 428, 693

[Wilson et al.(1970)] Wilson, R. W., Jefferts, K. B., & Penzias, A. A. 1970, ApJL, 161, L43

[Zinnecker(1982)] Zinnecker, H. 1982, Annals of the New York Academy of Sciences, 395, 226

[Zuckerman & Evans(1974)] Zuckerman, B., & Evans, N. J., II 1974, ApJL, 192, L149