



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

Problemas centrales en el desarrollo histórico de la geometría analítica.

TESIS

que para obtener el grado de:

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.

PRESENTA:

Javier Magallán Soria.

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. En educación matemática Jesús Roberto García Pérez.

Morelia, Michoacán, Abril de 2013.



AGRADECIMIENTOS

Doy gracias a Dios por permitirme terminar en forma satisfactoria este trabajo y quiero dedicarlo a mi familia que siempre me brindó su apoyo para poder concluir mis estudios, en especial a mi hermana, abuela y mis padres Francisco Javier Magallán Torres y María Teresa Soria López.

No quisiera dejar de lado a todos esos grandes compañeros que compartieron tantos momentos buenos y malos con migo y que me ayudaron a lo largo de mi estancia en la máxima casa de estudios del Estado de Michoacán, UMSNH.

Así mismo, agradezco a mi asesor el Dr. Jesús Roberto García Pérez por su incansable dedicación para ver terminado este trabajo y a mis sinodales por sus observaciones para mejorar el mismo.

Índice

Introducción	I
--------------------	---

Capítulo 1

PROBLEMA Y OBJETIVOS	1
----------------------------	---

Capítulo 2

EL ORIGEN: LOS GRIEGOS

2.1 Problema de la duplicación del cubo y el descubrimiento de las cónicas	4
2.2 Apolonio de Perga	10
2.3 Resumen	25

Capítulo 3

LA EDAD MEDIA

3.1 Introducción.....	26
3.2 Los árabes y la solución de las ecuaciones de segundo y tercer grado	27
3.3 De regreso a Occidente	38
3.4 Resumen	42

Capítulo 4

EL RENACIMIENTO

4.1 Introducción.....	43
4.2 Leonardo de Pisa	44
4.3 Solución de las ecuaciones cúbica y bicuadrática	45
4.4 Resumen	60

Capítulo 5

EL NACIMIENTO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: FERMAT Y DESCARTES

5.1 René Descartes	61
5.2 Pierre Fermat	88
5.3 Paralelismos y diferencias entre las geometrías de Descartes y Fermat	96
5.4 Resumen	98

Capítulo 6

Trabajos posteriores a Descartes y Fermat (La notación abreviada).....	99
--	----

Capítulo 7

Conclusiones finales.....	108
---------------------------	-----

Anexo	113
-------------	-----

Bibliografía	121
--------------------	-----

Introducción

La Geometría analítica surge como un *método geométrico* para resolver problemas de diferente índole, entorno a la cual los historiadores no han logrado ponerse de acuerdo sobre a quien se debe atribuir su invención; ya que si nos atenemos a los estudios con mayor antigüedad, serían los árabes y los griegos quienes por las mismas épocas desarrollaron el concepto de fijar la posición de un punto por medio de coordenadas adecuadas, pero si pensamos que la geometría analítica se debe al hecho de poder interpretar relaciones geométricas entre las coordenadas, entonces debemos de pensar en Apolonio (262-190 aC.) quien hace sus trabajos sobre las cónicas siguiendo ideas que ya había utilizado Menecmo (380-320 aC.). Otro personaje que entra en la discusión es Oresme (1323-1382) quien al trabajar con gráficas representa a la variable dependiente en función de la independiente mediante incrementos pequeños. Sin embargo, si pensamos en el desarrollo de la geometría tal y como la conocemos en la actualidad, con el uso de un simbolismo algebraico, entonces debemos de atribuirle la invención de la Geometría analítica a Fermat (1601-1665) o a Descartes (1596-1650).

La idea esencial de la Geometría analítica es establecer una correspondencia entre un par de números reales y un punto en el plano, esto con el fin de poder establecer una relación entre las curvas del plano y las ecuaciones con dos variables; es decir, la correspondencia entre propiedades algebraicas y analíticas de una función $f(x,y)=0$. Con base en lo anterior podemos concluir que el hecho de demostrar un teorema de geometría se reduce a demostrar un teorema correspondiente en algebra y análisis, esto nos lleva a una discusión aun más profunda ya que también cualquier estudio que se haga posterior a un resultado algebraico o analítico puede dar origen a un descubrimiento en el campo de la geometría que puede que jamás haya sido imaginado dentro de la geometría.

De este modo, vemos que la geometría analítica no es solo una rama que propone métodos para resolver problemas, sino que también un área que ayuda al descubrimiento de nuevos resultados en geometría (que no serán abordados dentro de este trabajo). Sin embargo, en un curso de Geometría analítica los conocimientos son muy básicos y no alcanzan para apreciar la flexibilidad, diversidad y aplicabilidad que tienen los métodos de la geometría

analítica para resolver problemas; solo la ve como una simple forma de interpretar gráficas en ecuaciones y viceversa.

Aunque también tiene su contra parte, ya que durante la solución de un problema con el método analítico nos guie a cuestiones algebraicas complicadas. Este es uno de los principales problemas de la Geometría analítica ya que si bien podemos establecer procedimientos adecuados para la solución de problemas, la ejecución de éstos requiere de un muy buen dominio algebraico.

Capítulo 1

Problema y objetivos.

La Geometría Analítica es una de las asignaturas básicas de la educación preuniversitaria para aquellas carreras con orientación a Matemáticas, física e ingenierías. Algunos de sus beneficios curriculares podemos citar los siguientes:

1. Al estudiante de bachillerato, le proporciona la oportunidad de adquirir habilidad con los procedimientos algebraicos en un contexto significativo, la geometría, mostrando como en su momento lo hizo Descartes, la potencia del método algebraico para resolver problemas complejos, no sólo de geometría euclidea sino muchos más, particularmente los relacionados con las cónicas a través del estudio de la ecuación de segundo grado con dos incógnitas.
2. También proporciona nociones y herramientas importantes para el estudio del cálculo y la física, al introducir los sistemas de coordenadas, los cuales por ejemplo, facilitan el estudio de las funciones y el movimiento.
3. Junto con el cálculo da origen a la Geometría Diferencial y es un antecedente importante para el Cálculo tensorial muy utilizado en Física.

En fin, podemos decir que la Geometría Analítica es una rama de las Matemáticas de fundamental importancia, sobre todo, porque proporciona un método y un conjunto de herramientas valiosas en la solución de numerosos problemas. Didácticamente lo anterior hace que su contenido, si se selecciona y trabaja adecuadamente, contribuya de manera importante a la adquisición, no sólo de técnicas algorítmicas, sino también, de un modo de representación (gráficas de funciones) y un método importante para resolver problemas.

Reflexiones como las expuestas en los párrafos anteriores han despertado mi interés por conocer cómo es que la humanidad ha llegado a generar un sistema de conocimientos, al que se le puede caracterizar como área o rama de las Matemáticas, en este caso, la Geometría Analítica. En este trabajo de tesis me planteo como problema, responder a la pregunta:

¿Cuáles son los orígenes, trabajos y problemas que motivaron el surgimiento y desarrollo de la Geometría Analítica, así como los personajes que contribuyeron a este proceso?

Siendo nuestro Objetivo General:

Identificar las etapas históricas importantes en el surgimiento y desarrollo de la Geometría Analítica, así como identificar y analizar los problemas importantes que dieron impulso a tal desarrollo, en el periodo comprendido del Siglo IV a.C. al Siglo XVII d.C. tomando como punto de partida el trabajo de los matemáticos griegos y concluyendo con los trabajos de Descartes y Fermat.

Un **objetivo particular** tiene que ver con la valoración del software como herramienta para la solución de algunos de los problemas que se analizaran.

Si bien, el trabajo que se plantea en esta tesis es de corte histórico, también hay un componente matemático importante, pues el interés central es entender la evolución del conocimiento a través del análisis de los problemas, su contexto histórico, las herramientas disponibles, dificultades y obstáculos para su solución y, una vez resueltos, la contribución a futuros desarrollos de la matemática.

Se pretende ubicar los elementos que permitieron la aparición y desarrollo de la Geometría Analítica, por lo que se basa en la investigación en varios documentos y artículos. Para hacer una mejor presentación del trabajo lo separamos en diferentes etapas en las cuales se dieron avances o se introdujeron ideas que favorecieron la aparición de la Geometría Analítica, recalcando en cada una de ellas la importancia de la solución de problemas, algunos planteados desde la antigüedad y otros que iban surgiendo con el mismo desarrollo y aparición de nuevos conceptos.

Al analizar los problemas en cada una de las etapas nos referimos también a los personajes que los estudiaron y lograron avances en la solución de los mismos, tomando en cuenta las nuevas herramientas que debieron crear para resolverlos, las cuales posteriormente no solo sirvieron para resolver dichos problemas sino que dieron paso al desarrollo de nuevas ideas. Simultáneamente, se incorporan algunos datos bibliográficos de cada uno de los personajes,

no sólo para reconocimiento de sus méritos, sino también, para contextualizar sus trabajos en las condiciones en las que se realizaron y las interacciones que había en la comunidad matemática de su época.

Para poder fundamentar y mostrar algunos resultados haremos uso de *Geogebra* un software de geometría dinámica que posee no solo una pantalla geométrica, sino también cuenta con herramientas algebraicas, lo cual es muy conveniente para facilitar el trabajo que nos propusimos.

Capítulo 2

EL ORIGEN: LOS GRIEGOS

2.1 Problema de la duplicación del cubo y el descubrimiento de las cónicas

Como ocurrió en varios campos de la matemática, los griegos establecieron las bases de lo que en el futuro daría origen a la Geometría analítica.

Los griegos enfocaron sus esfuerzos principalmente al estudio de la Geometría euclídea, la cual sólo emplea la regla (sin graduación) y el compás como herramientas para resolver problemas en el plano,



obteniendo avances espectaculares contenidos en los elementos de Euclides (300 aC.). No obstante, se enfrentaron a problemas que no pudieron resolver con estas herramientas, entre los que destacan los tres problemas clásicos: *la duplicación del cubo*, *la trisección del ángulo* y *la cuadratura del círculo*. Los dos primeros, involucran ecuaciones de tercer grado, las cuales no pueden ser resueltas con regla y compás. Estas circunstancias, así como el descubrimiento y estudio de nuevas curvas, las cónicas y otras llamadas mecánicas, arrojaron los primeros resultados que establecen el germen de la Geometría analítica.

La referencia más antigua que se tiene de la aparición de las secciones cónicas se atribuye a Menecmo (380–320 aC.) quien fue un matemático y geómetra griego nacido en *Alopeconnesus*¹. La aparición de las cónicas está relacionada con la solución del problema de ‘la duplicación del cubo’ que, como se comentó en el párrafo anterior, no puede resolverse con construcciones euclideas. Este problema, planteado en un contexto

¹ Actualmente Turquía.

mitológico²; consiste en determinar el lado de un cubo cuyo volumen sea igual al doble del volumen de un cubo dado. Menecmo pudo encontrar relaciones entre los elementos de las cónicas basadas en propiedades que tenían como lugares planos, traducibles en expresiones geométricas sencillas, a las que posteriormente recurrió Apolonio para deducir las propiedades de las cónicas.

Inicialmente, los nombres de las cónicas no eran los que actualmente empleamos (elipse, parábola e hipérbola); al parecer, fué Menecmo quién las ‘bautizó’ con términos asociados con el ángulo que formaba el plano de la cónica con la generatriz de un cono recto: cónica acutángula, rectángula y obtusángula.

Por ejemplo, para encontrar la relación fundamental de la parábola, Menecmo utiliza un cono circular recto de una sola hoja, observando que al cortarlo por un plano paralelo a una de sus generatrices, la intersección que se genera corresponde a la curva cuyos puntos satisfacen cierta relación con respecto a algunos elementos geométricos asociados a tal corte. En notación actual, dicha relación se resume en la expresión $y^2 = lx$, donde y es la distancia al eje de la parábola, x es la distancia al vértice de la misma y, l depende de la distancia del vértice del cono al plano de la sección (*lado recto*, hacemos referencia a esto ya que se seguirá usando en posteriores capítulos), aunque no se especifica una relación entre estas magnitudes.

Se desconoce la forma en que Menecmo obtuvo esta ecuación; sin embargo, se sabe que dependen de algunos teoremas de geometría elemental para encontrar dicha propiedad. Una manera de llegar a este resultado es: dado un cono ABC (recto en A) y la curva EDG obtenida al cortarlo con un plano perpendicular al eje del cono (Figura 2.1). Después, se considera el punto D sobre la generatriz del cono y sea P un punto cualquiera sobre la curva; ahora, otro plano horizontal (paralelo al plano de la base del cono) que corta al cono en la circunferencia $PVQR$, siendo Q el otro punto de intersección de la curva con esta circunferencia. Habrá que observar también que, A, S, D, R, V, B y C están en un mismo plano y que, el $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles.

² Cerca del 429 a. C. una plaga atacó la ciudad de Atenas y para acabar con ella, el Oráculo les dijo que debían elaborar un nuevo altar en forma de cubo cuyo volumen duplique el del altar que ya existía.

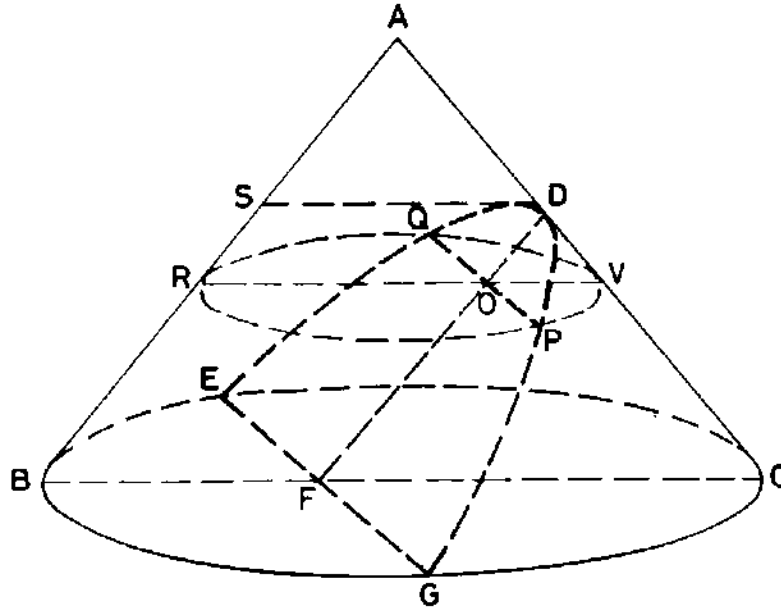


Figura 2.1 Cortes a un cono para la obtención de la parábola.

Como $\triangle RPV$ es rectángulo en P y OP es altura, OP es la media proporcional entre RO y OV , es decir, $OP^2 = RO \cdot OV$. Después, de la semejanza de $\triangle OVD$ y $\triangle BCA$ se tiene

$$\frac{OV}{DO} = \frac{BC}{AB},$$

y de la semejanza $\triangle ASD$ y $\triangle ABC$ se tiene

$$\frac{SD}{AS} = \frac{BC}{AB}.$$

Tomando las coordenadas del punto P como $OP = y$, $OD = x$, obtenemos

$$y^2 = RO \cdot OV.$$

Ahora, observando que $RO = SD$ (por ser lados opuestos de un paralelogramo), $AD = AS$ (por ser lados iguales del $\triangle ASD$) y sustituyendo, obtenemos

$$y^2 = RO \cdot OV = SD \cdot OV = AS \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right) \cdot OD \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right) = \left(\frac{AS \cdot BC^2}{AB^2}\right) \cdot x.$$

Como para cualquier punto P sobre la curva, los segmentos AS , BC y AB permanecen invariantes, podemos escribir la ecuación de la sección como

$$y^2 = l \cdot x,$$

donde l es el *lado recto* (distancia del vértice del cono al plano de la parábola). Actualmente este término se utiliza para designar a la cuerda de la parábola que pasa por el foco y que es perpendicular al eje.

Menecmo también obtuvo la relación que caracteriza a una hipérbola equilátera, cuya ecuación es $y \cdot x = k$ (con k constante). Utilizando estas dos relaciones, aborda el problema de la *duplicación del cubo* mediante la construcción de dos medias proporcionales entre 2 y 1. En nuestro lenguaje, si encontramos x e y , tales que

$$2:x = x:y = y:1,$$

entonces, de las tres proporciones que se forman se obtienen $x^2 = 2y$, $y^2 = x$ y $x \cdot y = 2$ cuyas gráficas se muestran en la Figura 2.2. Al multiplicar miembro a miembro las dos primeras se obtiene $x^3 = 2y^3$; esto es, *el cubo de lado x es de volumen doble que el cubo de lado y* . Geométricamente, la solución se puede encontrar en la intersección de cualesquiera dos curvas; en particular con la intersección de la hipérbola $x \cdot y = 2$ y la parábola $y^2 = x$.

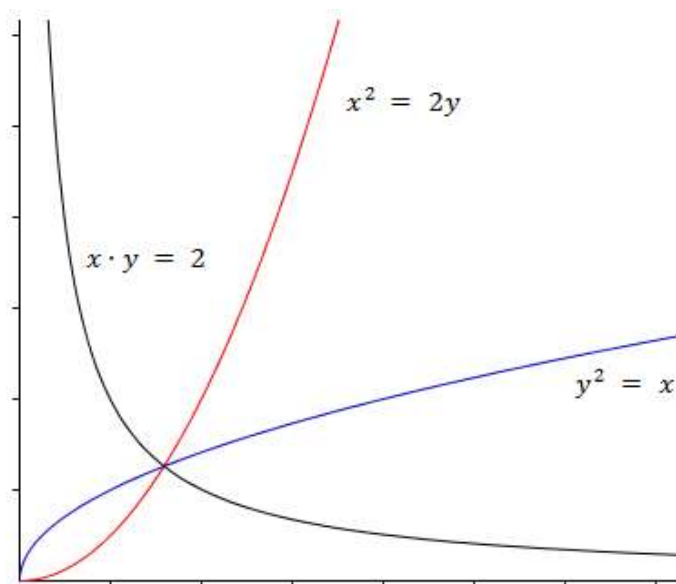


Figura 2.2 Solución gráfica del problema de la duplicación del cubo.

En general, *el problema de las dos medias proporcionales entre a y b* consiste en hallar x e y tales que

$$a:x = x:y = y:b.$$

Su resolución se reduce a hallar la intersección de la curva $x^2 = ay$ con la curva $xy = ab$, una *parábola* y una *hipérbola equilátera*.

Menecmo pudo encontrar relaciones entre los elementos de las cónicas basándose en las propiedades que tenían como lugares planos³, las cuales se traducen en expresiones geométricas básicas a las que posteriormente, a las cuales recurrió Apolonio para deducir las propiedades de las cónicas. Bajo este criterio y basados en el hecho de que Menecmo estableció expresiones parecidas a las ecuaciones que planteamos en nuestros días, podemos considerarlo como uno de los precursores de la Geometría analítica.

Aristeo (siglo IV), contemporáneo de Menecmo, escribió el *Libro de los lugares sólidos*, aquellos en los que aparecen las cónicas por intersección de cilindros y conos con planos, de lo cual se tiene conocimiento por algunos comentarios realizados por Euclides y los cuales fueron expuestos por Pappus de Alejandría (290- 350) ‘el último geómetra griego’, quien consigan información importante sobre los trabajos de matemáticos griegos que le precedieron, particularmente los relacionados con las cónicas.

Con respecto al desarrollo de estudios sobre las cónicas, Euclides escribió *Las cónicas* que, de acuerdo con Heath (1981), es una compilación de los trabajos sobre las cónicas que se habían realizado hasta su tiempo. El mismo Pappus comenta:

... Euclides le dio crédito a Aristeo por sus descubrimientos en las cónicas y que él no intento anticiparse a Aristeo sino más bien desea construir de nuevo el mismo sistema (Heath, 1921, p. 116).

El libro de *Las cónicas* de Euclides se perdió, pero de acuerdo con Pappus los primeros cuatro libros de Apolonio están basados en los primeros cuatro libros de esa obra.

³ Por lugares planos, hacemos referencia a que la figura se puede presentar en un plano, ya que también hay lugares sólidos (los correspondientes a tres dimensiones).

También Arquímedes (287–212), basándose en *Las cónicas de Eucides*, realizó trabajos sobre las cónicas, aunque se centró más en establecer la cuadratura (de la parábola) y curvaturas (elipsoide de revolución), mediante métodos infinitesimalistas problema que pudieron ver resuelto más de veinte siglos después, con la invención del cálculo infinitesimal. Además introduce la conocida espiral, uno de sus libros se llama *De las espirales*, en el que establece varias propiedades de esta curva, y la utilizó para resolver el problema de la cuadratura del círculo.

La espiral se define como *el lugar geométrico generado por un punto que se mueve uniformemente (velocidad constante) a lo largo de un rayo que gira uniformemente alrededor de su punto inicial, en un mismo plano*; su ecuación en coordenadas polares es $r = k\theta$. Esta nueva curva es importante porque da lugar a la posibilidad de generar nuevas curvas, mediante el movimiento de un punto en un plano. A estas curvas se les llama *curvas mecánicas*.

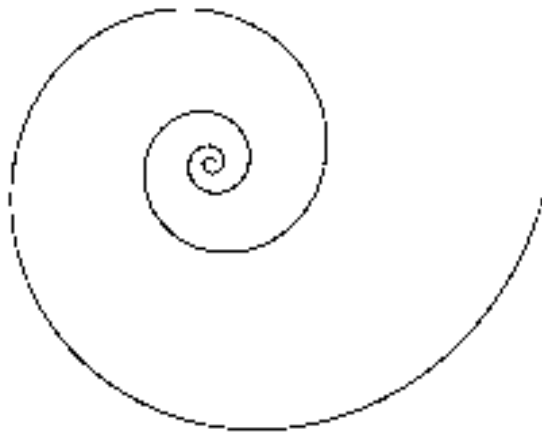


Figura 2.3 Espiral de Arquímedes

2.2 Apolonio de Perga (262-190 aC.)



Apolonio continuó los trabajos de sus antecesores sobre las cónicas; realizó un estudio más profundo sobre ellas. Se tiene muy poco conocimiento sobre su vida, algunos de los pocos datos que se tienen fueron obtenidos de las introducciones de los libros que contiene su obra maestra *Las cónicas*. En *El Tesoro del Análisis*,⁴ escrito por Pappus, se recogen varios trabajos de Apolonio:

... debemos a Apolonio la clasificación clásica de los problemas geométricos en planos, sólidos y lineales –según sean resolubles, respectivamente, con rectas y circunferencias, cónicas u otras curvas superiores– (González, 2003, p. 36).

Apolonio realizó varios trabajos que tienen que ver con la geometría de lugares planos y otros a problemas específicos. Entre sus obras conocidas encontramos:

- Dos Libros sobre *Los Lugares Planos* en los que estudia lugares geométricos rectilíneos o circulares, se habla de cómo las transformaciones geométricas (rotación, traslación, homotecia, etc.) mandan lugares geométricos en lugares geométricos y presenta algunos casos.
- En el libro *Secciones en una razón dada*, Apolonio presenta la solución de varios problemas que al escribirlos en notación algebraica llevan a ecuaciones del tipo $ax + x^2 = bc$.
- El Libro *Secciones determinadas* contiene la solución a un problema que también nos lleva a la resolución de ecuaciones cuadráticas.
- Otra de sus grandes obras es *Sobre contactos*, que fue reconstruida por Vieta, y será tratado más adelante. El propio Apolonio hace alusión a esta obra en la dedicatoria de *Las cónicas*; ambos trabajos se consideran importantes por su gran relevancia histórica sobre cuestiones geométricas. El problema de Apolonio se enuncia: “*Dados tres elementos*

⁴ Es una colección de libros de Matemáticas conjuntada por Pappus.

(punto, recta o circunferencia), trázese una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres” (González, 2003, p. 31).

Los casos más sencillos para este problema es la circunferencia que pasa por tres puntos y el de la circunferencia inscrita en un triángulo; el más complicado de todos los casos es trazar sobre la circunferencia tangente a tres circunferencias dadas. Incluso se llegó a creer incluso que ni siquiera Apolonio había sido capaz de resolver este problema, por lo que varios matemáticos le dedicaron tiempo, obteniendo así se soluciones algébricas y geométricas. Un hecho interesante es que Descartes se preguntó cual será la solución más hermosa a este problema; creemos que Newton da dicha demostración, ya que lo hace únicamente con de regla y compás.

Sin embargo, y sin lugar a dudas, la obra más importante de Apolonio por la que se le ha dado el reconocimiento de “el gran geómetra” se llama *Las cónicas*, la cual supera con mucho, los trabajos antes realizados por Menecmo y Euclides. A continuación nos centramos en esta obra en la que remarcamos la forma sistemática en la que Apolonio establece todos los conocimientos que se tenían hasta su tiempo, y sus grandes aportaciones dentro del estudio de las secciones cónicas.

Las cónicas está formada por ocho libros, de cuales aún se conservan siete gracias a los trabajos de Thabit ibn Qurra (836-901) y de Edmond Halley (1656-1742), en ellos Apolonio muestra varios descubrimientos de suma importancia; entre ellos destaca que las tres diferentes cónicas pueden obtenerse variando el ángulo de inclinación del plano que corta al cono: en la parábola el plano de corte es paralelo a una sola generatriz; en la elipse el plano de corte no es paralelo a ninguna generatriz; y en la hipérbola el plano de corte es paralelo a dos de sus generatrices y que, no necesariamente el cono debe de ser recto. Además trabajó el cono con sus dos hojas lo cual le permitió encontrar las dos ramas de la hipérbola. En algunos desarrollos, Apolonio utiliza de forma sistemática un par de diámetros conjugados, o un diámetro y una tangente como equivalentes de un sistema de coordenadas oblicuas; trabaja la noción de asíntota y sus propiedades en el caso de la hipérbola, así mismo, exhibe un método para trazar tangentes a una cónica.

A continuación presentamos una breve reseña del contenido de cada uno de los siete libros que forman parte de *las cónicas*:

Libro I. Apolonio describe como generar el cono de dos hojas y la posición en la que el plano debe de cortar al cono para poder generar las diferentes cónicas; además, considera el centro, ejes, diámetros conjugados, etc. A continuación se presentan algunos de los aspectos más importantes de este libro.

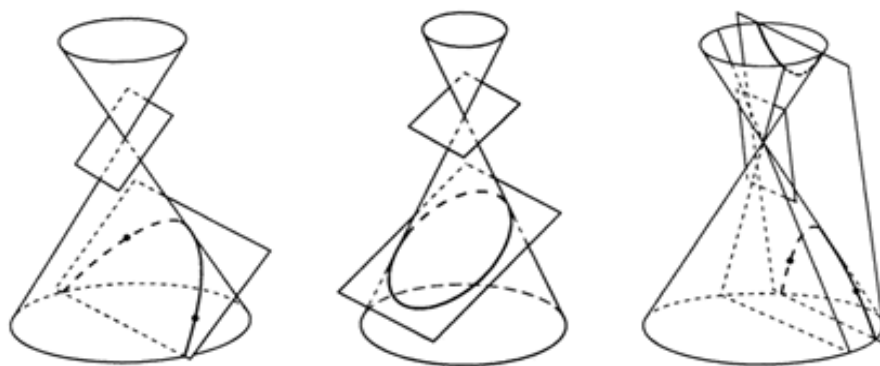


Figura 2.4 Cortes por un plano a un cono para generar las cónicas.

Algunas de las propiedades importantes de las cónicas las presenta en el libro 1, en las proposiciones I.11 y I.21; la primera se refiere a la parábola y la segunda a la hipérbola y elipse. En éstas, hace alusión a las propiedades geométricas que tienen y aparecen por primera vez con el nombre que las conocemos. En seguida, presentamos algunas de las proposiciones más destacadas de este libro; debemos de hacer notar que los enunciados que se presentan aquí no son exactamente los propuestos por Apolonio, ya que tanto éstos como la forma de obtener las cónicas es muy engorrosa. Los siguientes enunciados son más legibles y facilitan su comprensión.

La Parábola tiene la propiedad característica de que para todo punto tomado sobre la curva, el cuadrado construido sobre su ordenada y es exactamente igual al rectángulo construido sobre la abscisa x y el *latus rectum* l . (González, 2003, p. 27)

Una comprobación del enunciado anterior se presenta en la Figura 2.5 realizada con el software Geogebra; el punto que se toma sobre la cónica es A y el segmento HM corresponde al lado recto de la parábola.

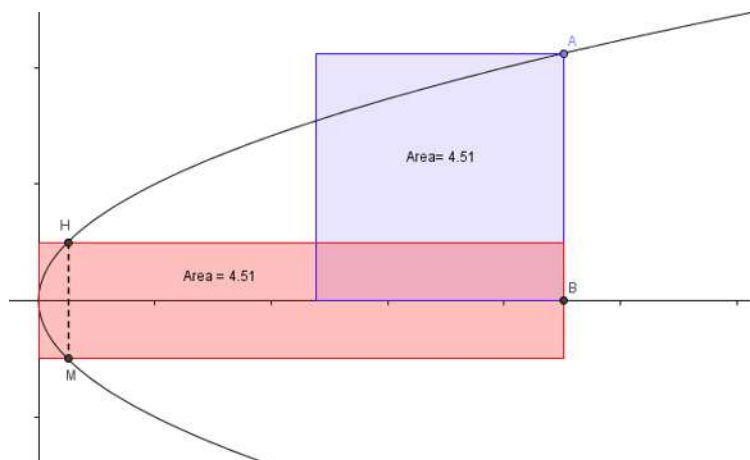


Figura 2.5 Construcción de la parábola con Geogebra

Luego:

En la sección cónica considerada llamada hipérbola (respectivamente llamada elipse), el cuadrado de la ordenada equivale a un área rectangular aplicada siguiendo el *latus rectum*, es decir, teniendo el *latus rectum* como altura, y teniendo la abscisa como base, aumentada (respectivamente disminuida) de otra área semejante a la que tenga el eje transversal o diámetro como base, y la mitad del *latus rectum* como altura. (*Ibid*, 2003, p. 26)

De los enunciados anteriores se puede establecer las siguientes relaciones algebraicas tomando en cuenta que el lado recto es l :

Para la parábola $y^2 = lx$.

Para la elipse $y^2 = lx - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$.

Para la hipérbola $y^2 = lx + \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$.

Ecuaciones referidas a uno de sus vértices como origen de coordenadas, donde concurren como ejes de coordenadas un diámetro y la tangente a la cónica en su extremo; y donde el *latus rectum* o parámetro es $l = \frac{2b^2}{a}$. Las letras a y b hacen alusión a la longitud del semieje mayor y semieje menor, respectivamente. El lector podrá observar que las ecuaciones de la elipse y la hipérbola no coinciden con la descripción hecha en la cita anterior del coeficiente de x^2 , probablemente esto se deba a un error de traducción.

A continuación obtenemos la ecuación de la elipse, siguiendo el procedimiento de Apolonio con base en la Figura 2.6.

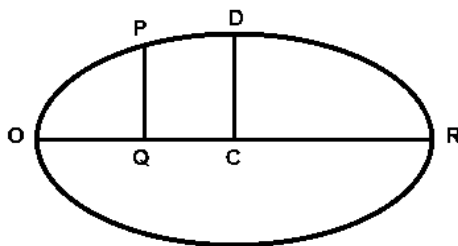


Figura 2.6. Ilustración para obtener la ecuación de la elipse.

Siendo OR el eje mayor, DC la mitad del semieje menor, C el punto medio de OR Apolonio demuestra que se cumple la relación siguiente

$$\frac{PQ^2}{CD^2} = \frac{OQ \cdot QR}{OC \cdot CR}.$$

Al hacer $QR = 2a$, $DC = b$, $OQ = x$ y $PQ = y$, se obtiene

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x \cdot (2a - x)}{a^2} \text{ de donde } y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 = lx - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Usando nuestra notación actual tenemos que en la elipse $y^2 < lx$, mientras que para la hipérbola $y^2 > lx$, lo cual muestra que los nombres no se pusieron al azar sino que responden a la semántica de los enunciados. Pero no sólo corresponde al hecho de ponerles nombre, sino que también conlleva a un cambio conceptual, ya que ahora:

... las cónicas ya no serían descritas constructivamente, sino a través de relaciones de áreas y longitudes, que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban sus propiedades intrínsecas. (*Ibid*, 2003, p. 27)

Ahora retomaremos la discusión sobre los libros de Apolonio.

Libro II. Aquí se estudian las asíntotas de la hipérbola; además se aborda el problema de trazar una tangente que forme un ángulo dado con el diámetro y que pase por un punto de contacto.

Libro III. Este libro se dedica a estudiar las relaciones de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y diámetros conjugados.

Libro IV. En él se estudian los puntos de intersección de las cónicas; un rasgo importante de este libro es que varias de las demostraciones se hacen mediante reducción al absurdo.

Libro V. Este libro, como varios autores concuerdan, es uno de los más sorprendentes, ya que Apolonio introduce métodos puramente geométricos. Aborda el tema relacionado con las normales⁵ a las cónicas, vistas como líneas rectas máximas y mínimas obtenidas de determinados puntos de la curva; además, contiene una serie de proposiciones que permiten la determinar las ecuaciones de las evolutas⁶, de cada una de las tres cónicas, la figura 2.7 muestra la evoluta de la elipse. Partiendo de los resultados de Apolonio, así como de la obtención del centro de curvatura⁷, se anticipó veinte siglos a los trabajos de Huygens sobre el péndulo simple, que lo llevaron a realizar estudios sobre las evolutas, quien fundó esta teoría que le permitió obtener las evolutas de las cónicas; y demostró que las evolutas de curvas geométricas⁸ también son geométricas y que la evoluta de una cicloide también es una cicloide, entre otros.

⁵ La *normal* desde un punto a una curva, es el segmento de distancia mínima desde el punto a la curva.

⁶ Se llama *evoluta* de una curva *C* dada, al lugar geométrico de los centros de curvatura de *C*.

⁷ El *centro de curvatura* es el punto equidistante de todos los puntos de la curva *C* a la que se esté refiriendo.

⁸ Se define a una línea como *curva geométrica* cuando se aparta constantemente de la dirección recta sin formar ángulos, y la trayectoria de los puntos que la forman es continua y, además, cumple una determinada norma.

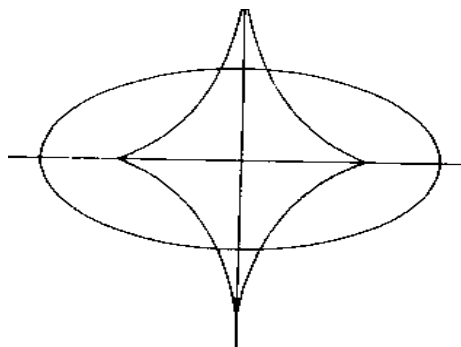


Figura 2.7 Evoluta de una elipse.

Otro aspecto importante de este libro es que Apolonio considera varios puntos y clases de puntos con referencia a las normales a una curva, tales como los pies de las normales. Comienza analizando los puntos sobre los ejes, es decir, sea A y A' los vértices de la cónica y localiza un punto E sobre el eje de modo que $AE = \frac{1}{2}l$, donde l es el lado recto, y dado O otro punto sobre el eje localizado entre A y E , tenemos que la recta OA es la mínima línea recta de O a la curva ya que si tomamos otro punto P sobre la curva la longitud de OP se irá incrementando conforme P se aleje de A .

En proposiciones siguientes, Apolonio toma un punto G a una distancia mayor que $\frac{1}{2}l$ y prueba que la línea recta mínima de G a la curva es GP , donde P es un punto tal que:

1. En el caso de la parábola $NG = \frac{1}{2}l$, donde N es el pie de la perpendicular a AA' que pasa por P .
2. En el caso de la hipérbola y la elipse $NG:CN = l:AA'$, donde C es el centro.

Demuestra que si P' es otro punto sobre la cónica, $P'G$ aumenta a medida que P' se aleja de P . Para ilustrar el método anterior, a continuación se presenta la demostración para el caso de la parábola.

Sea G un punto en el diámetro de la parábola tal que $AG > \frac{1}{2}l$ y N un punto entre A y G tal que $NG = \frac{1}{2}l$, luego PN será la ordenada del punto P (sobre la curva). Sea P' cualquier otro punto sobre la curva, por demostrar que $P'G$ es mayor que PG y por tanto, este segmento deberá ser la línea mínima desde G a la curva (Figura 2.8).

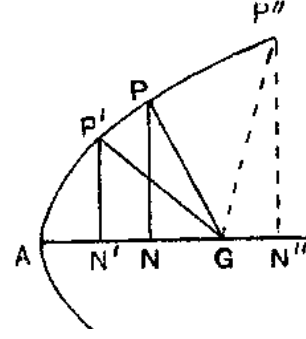


Figura 2.8

Demostración

Sabemos que $NG = \frac{1}{2}l$, es decir, $l = 2 \cdot NG$, por estar P' sobre la parábola

$$P'N'^2 = l \cdot AN' = 2 \cdot NG \cdot AN'.$$

De la figura se tiene $N'G^2 = (NG \pm N'N)^2 = NG^2 + N'N^2 \pm 2 \cdot NG \cdot N'N$, el signo en la última expresión depende de la posición de N' , en este caso es positivo.

De lo anterior tenemos que

$$P'G^2 = P'N'^2 + N'G^2 = 2 \cdot NG \cdot AN' + NG^2 + N'N^2 + 2 \cdot NG \cdot N'N.$$

Pero por hipótesis sabemos que $l = 2 \cdot NG$, por lo que de la expresión anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} P'G^2 &= 2 \cdot NG \cdot (AN' + N'N) + NG^2 + N'N^2 = l \cdot AN + NG^2 + N'N^2 \\ &= PN^2 + NG^2 + N'N^2 \end{aligned}$$

y como $PG^2 = NG^2 + PN^2$, se sigue que $P'G^2 = PG^2 + N'N^2$ y $P'G > PG$.

Lo que demuestra que PG es la distancia mínima de G a la curva.

Más adelante Apolonio prueba proposiciones referentes a puntos sobre el eje menor BB' de la elipse. Posteriormente contiene algunas proposiciones referentes al número de normales que se pueden trazar por un punto y las propiedades que estas deben tener; por ejemplo, una de ellas dice que: “dos normales a un mismo punto sobre el eje AA' deben de estar en lados

opuestos al mismo”, la cual resulta ser una idea un poco intuitiva pero de suma atracción para la época en la que estas ideas tuvieron lugar.

Encontramos también proposiciones referentes a los ángulos que deben formar las normales con respecto al eje de la cónica; además, hace la distinción para cada una de las cónicas “*si la normal a P corta al eje de la misma o el eje AA' de la elipse en G, el ángulo PGA se incrementa cuando P o G se alejan de A*”.

La última parte del libro V está destinada a la construcción de las normales a través de varios puntos de acuerdo con su posición, ya sea que estén dentro o fuera de la cónica o sobre los ejes. Encontramos proposiciones como: “*si O es un punto debajo del eje AA' de una cónica y trazamos OM la perpendicular al segmento AA' que pasa por O, y si $AM > AC$, siempre se puede trazar una y sólo una normal a través de O cortando al eje entre A y C*”. Además propone que los puntos en la curva por los que pasa la línea normal de O, están determinados por la intersección de la cónica con una hipérbola rectangular.

Para demostrar lo anterior, el procedimiento seguido por Apolonio es muy parecido al siguiente método analítico:

Dado AM el eje de una cónica, PGO una de las normales que pasa a través de un punto dado O y siendo PN la ordenada a P, tracemos OM perpendicular al eje. Tomando los ejes coordenados como los ejes que pasan por el centro de la cónica, en el caso de la parábola el eje y la tangente que pasan por el vértice son nuestro sistema coordenado.

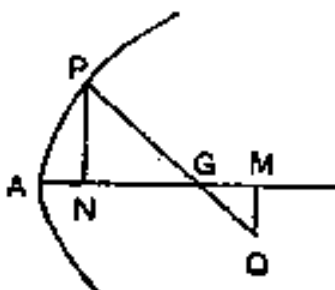


Figura 2.9

Así, sean (x, y) las coordenadas del punto P y (x_1, y_1) las coordenadas del punto O, tenemos que $\triangle PNG \sim \triangle OMG$ (Figura 2.9), de este modo tenemos que $\frac{PN}{OM} = \frac{NG}{MG}$, la que podemos describir de la siguiente manera:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{NG}{x_1 - x - NG}$$

Donde para el caso de la parábola tenemos que $NG = \frac{1}{2}p$; sustituyendo en la expresión anterior y acomodando el resultado tenemos que

$$xy - \left(x_1 - \frac{1}{2}p\right)y + \frac{1}{2}py_1 = 0,$$

esta ecuación corresponde a una hipérbola rotada cuya intersección con la parábola nos muestra los puntos por los que pasan las normales al punto O . La Figura 2.10 muestra las normales (líneas punteadas) al punto O , generadas a partir de la intersección de la hipérbola (curva color rojo) y de la parábola (curva color azul).

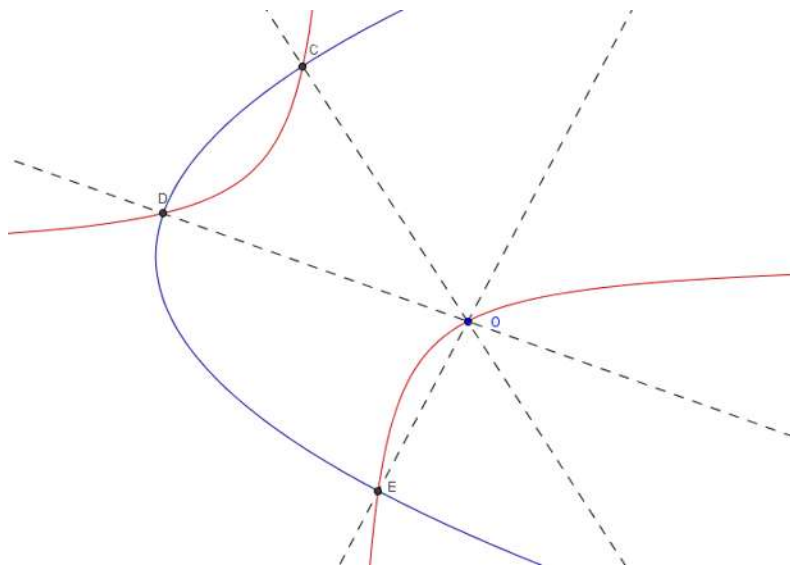


Figura 2.10. Representación del trazo de normales de Apolonio.

Aunque este método fuera posteriormente criticado por Pappus, pues considera que usar la hipérbola rectangular para ello es complejo y, para este caso de la parábola, basta con tomar la intersección entre la parábola y un círculo.

La última parte de este libro, se dedica a trabajos sobre la comparación de longitudes de las normales y de tangentes de una curva. Hasta aquí terminamos la discusión sobre el libro V de Apolonio y continuamos con la reseña de los libros faltantes.

Libro VI. Trata sobre la semejanza e igualdad de las cónicas, en este se trata el problema referente a dada una sección cónica y un cono recto circular, encontrar una sección cónica que sea igual a la cónica dada.

Libro VII. Contiene relaciones métricas entre diámetros conjugados, tangentes, áreas, etcétera.

Libro VIII. Se desconoce el contenido del libro VIII; tal vez contiene teoremas y/o problemas sobre diámetros conjugados.

Cabe mencionar que los términos elipse, parábola e hipérbola no eran nuevos ya que los pitagóricos los habían utilizado en la solución de ecuaciones de segundo grado del método de aplicación de áreas: *elipse* significa deficiencia; *hipérbola* significa exceso; y por último, *parábola* significa equiparación. Haciendo referencia a estas propiedades, Apolonio las compara con las relaciones que tiene las cónicas y, por eso, las denomina así.

Es interesante resaltar que aunque el lenguaje utilizado por Apolonio en la redacción de sus proposiciones es difícil de comprender, los enunciados pueden ser expresados en forma de ecuaciones en nuestra notación actual.

Además, su obra también tuvo gran importancia en el trabajo realizado por grandes personajes como Huygens, Newton y Kepler. Esto lo hace ver Mandelbrot (1984) en el siguiente comentario:

Los griegos descubrieron las cónicas en estado salvaje, en los conos o cilindros y Apolonio las cultivó como un mero juego de ingenio. Cuál sería la sorpresa, quince siglos después, cuando Kepler descubrió que la trayectoria del planeta Marte es elíptica, y Galileo que la caída de las piedras es parabólica (p. 115-116).

La importancia del trabajo de Apolonio en el desarrollo de la Geometría analítica, es que considera líneas que le sirven de referencia para la descripción de las propiedades de las cónicas; esto lo menciona González (2003) de la siguiente manera:

Apolonio considera ciertas *líneas de referencia* (diámetros conjugados o diámetro-tangente), que juegan un papel de *coordenadas*. En el segundo caso, al tomar un diámetro y una tangente en uno de sus extremos como *rectas de referencia*, las distancias medidas a lo largo del diámetro a partir del punto de tangencia son las

abscisas y los segmentos paralelos a la tangente, interceptada por el diámetro y la curva, son las *ordenadas* (p. 31).

Lo que él consideraba como diámetro es lo que en la actualidad conocemos como eje, lo cual permite que las relaciones entre áreas y longitudes utilizadas por Apolonio en forma de proporciones, podamos interpretarlas actualmente como relaciones entre abscisas y ordenadas. A esta relación Apolonio la nombra como el *Symptoma* de la curva, que no es otra cosa que la representación por medio de una ecuación de una curva, lo anterior, como veremos más adelante pudo servirle a Descartes de motivación para sus estudios sobre curvas.

En los trabajos de Apolonio ya está presente, con sus limitaciones y en forma un poco brusca, la idea de sistema de referencia con coordenadas, que permitirían establecer una relación entre las propiedades de las curvas, aunque estos parecían ser colocadas después del trazo de las curvas, sólo para establecer las ecuaciones en casos particulares. Es decir, debido a que eran pocas las curvas que se habían estudiado a profundidad, los resultados obtenidos por Apolonio correspondían a casos muy particulares; lo anterior nos lleva a un comentario de Boyer (1985):

El hecho de que Apolonio, uno de los más grandes geómetras de la antigüedad, no consiguiese desarrollar de una manera efectiva la Geometría analítica se debe, probablemente más a una pobreza en el número de curvas que de pensamiento; los métodos generales no son ni muy necesarios ni muy útiles cuando los problemas se refieren siempre a un número limitado de casos particulares. Por otra parte, es bien cierto que los primeros inventores de la Geometría analítica tenían a su disposición todo el Álgebra renacentista (el Álgebra de los cosistas italianos y el Álgebra simbólica de Vieta), mientras que Apolonio tuvo que trabajar con las herramientas del Álgebra geométrica, mucho más rigurosa pero, a la vez, mucho más incómoda de manejar (p. 208).

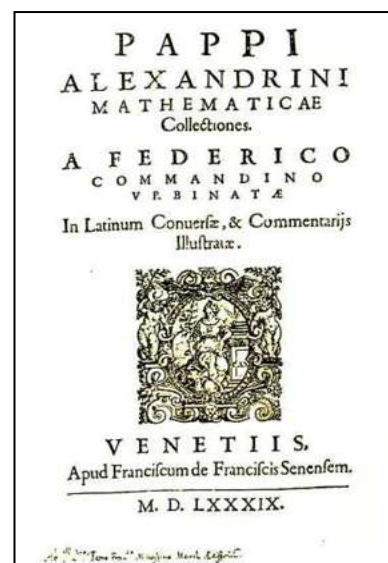
Esto describe el mérito de los trabajos de Apolonio, los cuales resultan muy avanzados para su época. Aclaremos que los elementos del Álgebra geométrica eran los segmentos de recta. A partir de ellos, se definieron las operaciones básicas: suma y diferencia de

segmentos, producto (áreas de figuras), y el cociente de segmentos (dada un área y un segmento determinar otro segmento cuyo producto con el anterior produzca el área dada).

Aunque debemos de pensar que el uso de este tipo del Álgebra geométrica conduce al rechazo de las ‘magnitudes negativas’ asociada, evidentemente, a una incomprensión de los números reales y, particularmente, de los negativos. Aun así, los resultados alcanzados mediante los métodos analíticos utilizados por Apolonio, con relación a las cónicas, es tal que como lo señala González (2003):

... su abundante producción científica, entre la que sobresale el exhaustivo y especializado trabajo sobre las cónicas donde estudia las propiedades fundamentales de todos los clásicos elementos notables de estas curvas: ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, tangentes y normales; y lo hace con una maestría y amplitud que sólo en los últimos siglos se pudo agregar algo nuevo a lo que el gran geómetra descubrió (p. 33).

Finalmente, el gran matemático Pappus (siglo III), en su principal obra *Synagoge* o *Colección matemática*, escrita hacia el 340 d.C., reviste una particular importancia histórica porque, además de ser una exposición completa y sistemática de los conocimientos matemáticos de su época, recoge fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las Matemáticas en la ciudad de Alejandría; la mayoría de ellos están perdidos. La *Colección*, compuesta por ocho libros, casi todos conservados (excepto el primero y parte del segundo), contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica; además de los enunciados de muchos teoremas, entre ellos, el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución.



Pappus abordó varios problemas relevantes en el desarrollo histórico de la Geometría analítica, pero hay uno al que se le presta mayor atención en el desarrollo de este trabajo. Se trata de un teorema sobre las cónicas, enunciado de la manera siguiente:

Si tres líneas rectas dadas en posición y desde un punto se trazan líneas rectas (segmentos rectilíneos) a las tres líneas rectas dadas formando ángulos dados, y si la razón del rectángulo que forman dos de las líneas rectas (el producto de las longitudes de los segmentos rectilíneos) al cuadrado de la recta restante (longitud del segmento rectilíneo al cuadrado) está dada, entonces el punto estará ubicado en un lugar sólido, esto es en una de las tres secciones cónicas. En el caso de cuatro líneas rectas (considerando una construcción similar a la anterior) y la razón del rectángulo que forman dos de las líneas rectas a la razón del rectángulo que forman las otras dos líneas rectas, entonces de la misma manera, el punto estará ubicado sobre una sección cónica. (Heath, p.118).

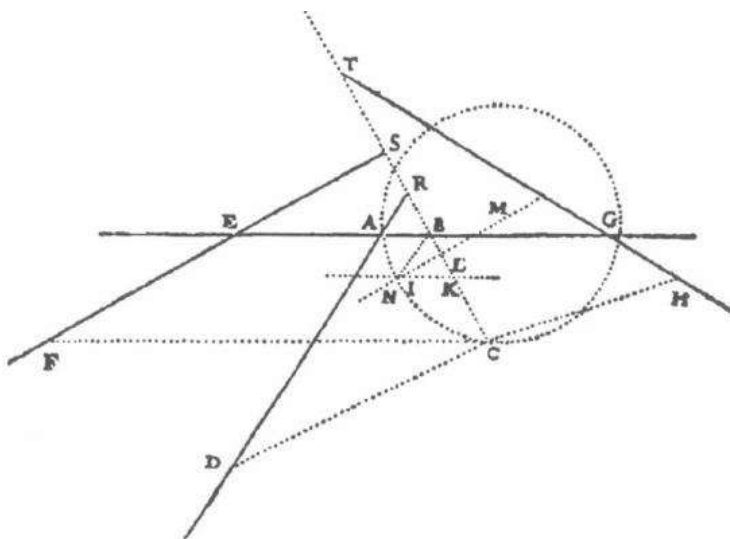


Figura 2.11. Representación geométrica de un caso particular del problema de Pappus para cuatro rectas.

Para el caso de cuatro rectas, refiriéndonos a la Figura 2.11, el problema consiste en probar que, si tenemos cuatro rectas AB , FS , DR y TH , el conjunto de puntos C tales que, al trazar los segmentos rectilíneos CB , CF , CD y CH , a las rectas dadas formando ángulos dados y la razón entre $CB \cdot CF : CD \cdot CH$ es la misma, esto es $CB \cdot CF = k \cdot CD \cdot CH$, donde k es la constante de proporcionalidad, entonces los puntos C están sobre una cónica.

Además Pappus estableció el teorema, que en la actualidad se conoce como Principio unificador de las cónicas y que, Heath (1981) lo enuncia de la manera siguiente:

El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto dado, está en una razón dada, a su distancia a una recta dada, es una sección cónica y, es una elipse, una parábola o una hipérbola, según la razón dada sea menor, igual o mayor que la unidad (p.119).

En este teorema, el punto dado es un foco (F), la recta dada es una directriz (D) y la razón dada es la excentricidad; la relación algebraica es

$$\frac{PF}{PD} = e,$$

en donde P es un punto cualesquiera de la cónica, FP es la distancia desde P a F , PD es la distancia desde P a la directriz D y, e es la razón dada (excentricidad). En el caso de la parábola ($e = 1$) nos conduce a la definición familiar: *el lugar de los puntos que equidistan de un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz).*

2.3 Resumen

El trabajo que realizaron los griegos con relación a las cónicas desde Menecmo hasta Pappus y, por supuesto, reconociendo en Apolonio como mayor exponente, produjo un gran avance en el desarrollo de la Geometría analítica, el cual podemos resumir en los siguientes puntos.

- Se genera un nuevo campo en la Geometría, aún más extenso que el de la Geometría euclídeana, a partir del descubrimiento de nuevas curvas, las cónicas y las llamadas *mecánicas*, mediante las cuales pueden resolverse problemas irresolubles con el método euclídeano.
- Se crea un nuevo método para el estudio de los lugares geométricos y sus propiedades, el método analítico. Este consiste en expresar y estudiar las propiedades geométricas mediante relaciones entre variables (asociadas con los puntos de un lugar geométrico) y parámetros (por ejemplo el *lado recto*).
- Como parte de este método, en el establecimiento de procedimientos y demostraciones se recurre, necesariamente, al uso de herramientas algebraicas, aunque estas son de naturaleza geométrica y en lenguaje retórico. El trabajo de Diofanto sobre su álgebra sincopada aparecería hasta el siglo III dC.

Con relación a los puntos anteriores, es claro que la complejidad del método analítico se debe, en gran parte, al incipiente desarrollo del Álgebra simbólica. Habría que esperar aún alrededor de catorce siglos para contar con una herramienta algebraica desarrollada, como la que se prenda que se aprenda actualmente en el bachillerato.

Capítulo 3

LA EDAD MEDIA

3.1 Introducción

Los historiadores denominan Edad media al período histórico de la civilización occidental comprendido entre el siglo V y el XV. Su comienzo se sitúa convencionalmente en el año 476 con la caída del Imperio romano de Occidente y su fin en 1492 con el descubrimiento de América, o en 1453 con la caída del Imperio bizantino. Para los fines del presente trabajo sólo haremos algunos breves comentarios sobre el desarrollo de la ciencia, las Matemáticas y su enseñanza.

Tal vez, la característica más relevante de este periodo histórico sea el dominio de la iglesia católica en las actividades sociales, políticas y culturales. En general, se reconoce un gran retroceso en cuanto al desarrollo cultural y, particularmente al conocimiento científico, al que prácticamente solo tenía acceso el clero, por las limitaciones que la propia religión les imponía. La educación prácticamente queda en manos de la Iglesia y a ella, sólo tiene acceso una reducida élite.

En el caso de las Matemáticas, lo poco que se puede rescatar hasta el siglo XII son trabajos de clérigos, algunos de ellos son traducciones de antiguos libros griegos. Durante los siglos XII y XIII empiezan a manifestarse nuevos aires, principalmente en Italia, con la aparición de una escuela importante de matemáticos, iniciada por Leonardo de Pisa (1180-1250) conocido como *Fibonacci*, pero de esta etapa hablaremos más adelante. Además surgen las primeras universidades y las llamadas *Escuelas de ábaco*, que podrían considerarse como las primeras escuelas de formación profesional (para comerciantes y mercaderes). En ellas no se enseñaba el manejo del ábaco, como lo sugiere su nombre, sino los algoritmos árabes para las operaciones aritméticas.

Si bien, la Edad media en Europa se caracteriza por una época oscura dominada por la iglesia católica, en medio oriente y en el norte de África, otra religión, la islámica, domina la vida política y cultural; sin embargo, esto no fue un obstáculo para que aquí se diera un florecimiento cultural y científico. El siguiente apartado lo dedicamos al análisis de las

aportaciones, que los árabes de esta época, en el campo de las Matemáticas relacionadas con el desarrollo de la Geometría analítica.

3.2 Los árabes y la solución de las ecuaciones de segundo y tercer grado

Con el surgimiento y expansión de la religión musulmana, iniciada por Mahoma en la primera mitad del Siglo VII, las artes y las ciencias tuvieron un florecimiento en los pueblos árabes que duró hasta finales del siglo XV. En la ciencia árabe confluyen tres *culturas* Matemáticas distintas: la babilónica, con su tradición astronómica y aritmética; la griega, a través de los científicos de Alejandría (Euclides y Apolonio); y la hindú, con la aportación del sistema de numeración posicional. No sólo rescataron los conocimientos de estas culturas, sino que también realizaron importantes aportaciones, principalmente en Geometría y Álgebra. Fueron ellos quienes llamaron Álgebra a la rama de las Matemáticas orientada al estudio de la resolución de ecuaciones, aunque su tratamiento siguió la tradición griega, del Álgebra geométrica.

Durante su etapa de expansión, a los árabes les sucedió con los pueblos conquistados lo que a los romanos con los griegos. Los invasores se interesaron por la cultura de los pueblos invadidos, la asimilaron y la aprendieron, después la transmitieron y la enseñaron. (Moreno, 2002, p. 15)

Lo anterior se hace visible en las construcciones islámicas, ya que están decoradas con figuras y dibujos geométricos, lo cual nos habla de una cultura con arte geométrico; además, construían las cónicas haciendo uso únicamente de la regla y el compás. A continuación presentamos los pasos para la construcción de la parábola con base en la ver Figura 3.11.

Construcción: Trácese una línea AB y constrúyase una perpendicular CE que corta a AB en D . Sobre el segmento lineal DB , márchense diversos puntos $G, F, \dots$ enseguida, construimos círculos con diámetros $AB, AF, AG, \dots$ que cortan CE en H y L, J y M, K y N , respectivamente. Por H y L , trazamos líneas paralelas a AB , y por B trazamos una línea paralela a CE . Hacemos que estas líneas por H, L y B se encuentren en P y S . Líneas

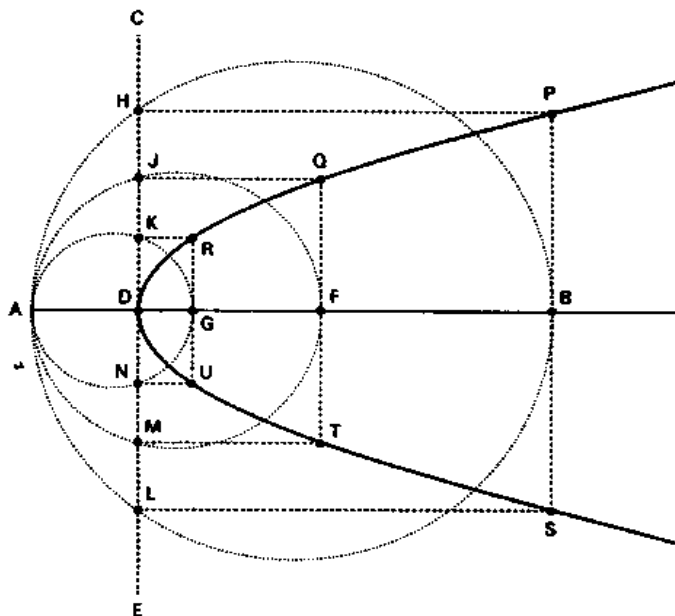


Figura 2.1. Trazo de la parábola con regla y compás.

Demostración: La prueba la haremos con herramientas actuales e introduciendo un sistema de ejes coordenados. La recta que pasa por A y B es el eje x , la recta que pasa por H y L es el eje y ; el punto D es el origen de coordenadas y la longitud el segmento $AD = a$.

Para probar que los puntos R , Q , P , U , T y S pertenecen a una parábola, sólo hay que notar que GR , FQ , BP (diferentes valores de y) y sus simétricos, representan la media geométrica de los segmentos AD y DF , AD y DB respectivamente (valores correspondientes de x); por lo que tales puntos satisfacen la relación $y^2 = ax$.

Aunque la construcción sólo permite ubicar un conjunto finito de puntos de la parábola, la relación algebraica permite representar todo el conjunto de puntos y , mediante ella, obtener el valor de y para cualquier valor x , o viceversa.

Las aportaciones más importantes de los árabes son, sin duda, las referentes a la solución de ecuaciones principalmente de segundo y tercer grado. Si bien, se basan en representaciones geométricas para resolver las ecuaciones, introducen procedimientos algebraicos en los

procesos de solución (equivalentes a los que ahora utilizamos para hacer despejes y factorizaciones). A este tipo de Matemáticas le llamaron Álgebra (en vocablo castellano), estos trabajos fueron transmitidos posteriormente a Europa, entre los siglos XII y XV, particularmente a los matemáticos italianos del Renacimiento.

Dos matemáticos árabes destacaron prominentemente en esta área, Al-Jwarismi (780-850) y Omar Jayyam (1048-1131). El primero se ocupó de dar solución a la ecuación de segundo grado usando herramientas euclidianas. Para ello separó el problema en cinco casos: $x^2 = c$, $x^2 = bx$, $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$, esto debido a que sólo se permitía utilizar coeficientes positivos y, además, cada termino debía representar un área (cuadrada o rectangular). Por ejemplo, para resolver la ecuación $x^2 + bx = c$, procedía de la manera siguiente.

Al-Jwarismi resuelve el siguiente problema (Van der Warden, 1985):

Un cuadrado y 10 raíces de lo mismo ascienden a 39 dirhams⁹. Es decir, ¿cuál es el cuadrado que, cuando se incrementa en 10 de sus raíces da como resultado treinta y nueve?

La solución:

Dividimos por dos el número de las raíces, lo que en el presente ejemplo da 5. Esto lo multiplicamos por sí mismo; el producto es 25. Sumamos esto a 39; la suma es 64. Ahora tomando la raíz de esto, lo cual es 8, y le restamos a él la mitad de las raíces, lo cual es 5. El resto es 3. Esto es la raíz del cuadrado que se buscaba; el mismo cuadrado es 9.

Ahora veamos en notación actual, la ecuación asociada a este problema es

$$x^2 + 10x = 39.$$

A continuación, en la tabla 3.1, presentamos el conjunto de operaciones numéricas y simbólicas que se describen en la solución de *Al-Jwarismi*:

⁹ Es una unidad de la moneda en varios países árabes y bereberes.

Descripción de AL-Jwarismi	Operaciones	Representación algebraica
<i>divides por dos el número de las raíces, lo que en el presente ejemplo da 5</i>	$10/2 = 5$	$b/2$
<i>Esto lo multiplicas por sí mismo; el producto es 25</i>	$(10/2)^2 = 25$	$(b/2)^2$
<i>Sumas esto a 39; la suma es 64</i>	$(10/2)^2 + 39 = 64$	$(b/2)^2 + c$
<i>Ahora tomas la raíz de esto, lo cual es 8, y le restas a él la mitad de las raíces, lo cual es 5. El resto es 3. Esto es la raíz del cuadrado que tu buscabas; el mismo cuadrado es 9.</i>	$\sqrt{64} - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Tabla 3.1 Operaciones numéricas y simbólicas de Al-Jwarismi:

Enseguida se presenta una demostración geométrica: dibuja un cuadrado AB de lado igual a la raíz buscada x . sobre los cuatro lados construye rectángulos, cada uno de anchura de $\frac{1}{4}$ de 10 ($2\frac{1}{2}$), como se muestra en la Figura 3.12.

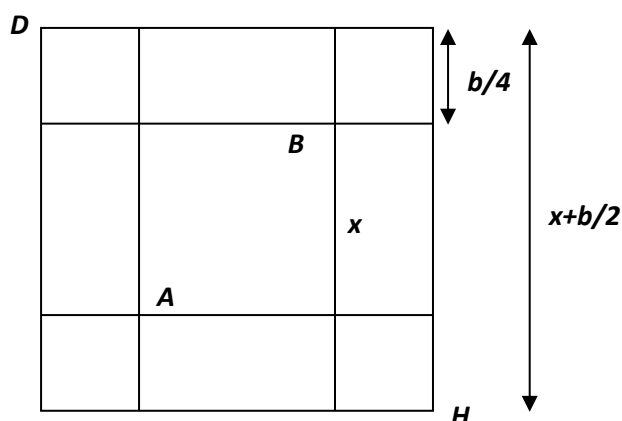


Figura 3.12. Contrucción de un cuadrado del que se obtiene la solución.

Ahora, el cuadrado junto sus cuatro rectángulos es igual a 39 ($x^2 + 10x = 39$). Enseguida, para completar el cuadrado DH , debemos agregar cuatro veces el cuadrado de lado $2\frac{1}{2}$, lo

cual nos da 25 ($4(5/2)^2 = 25$). Así, el área del cuadrado grande (DH) es 64 y su lado es 8, por lo tanto, el lado del cuadrado original es $8 - 5 = 3$.

A continuación *Al-Jwarismi* presenta otra prueba más simple, en la que, sólo construye sobre dos lados del cuadrado AB , rectángulos de anchura 5 (Figura 3.13), de la cual se obtiene el mismo resultado.

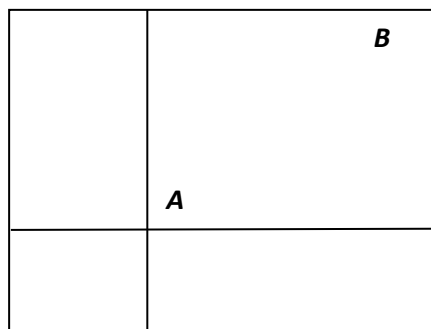


Figura 3.13

Para los otros dos casos interesantes $x^2 + c = bx$ y $x^2 = bx + c$, se realizan contrucciones similares construcciones pero más complejas.

Por su parte, Omar Jayyam se enfocó a resolver la ecuación cúbica, combinando la Geometría de Euclides y la de Apolonio; hace uso de las cónicas de manera similar a como Menecmo resolvió el problema de la duplicación del cubo, pero con una maestría extraordinaria. Al igual que Jwarismi, divide el problema de resolver la ecuación cúbica en 14 casos (Tabla 3.2). La separación de estos casos, se debe, como en el caso de Jwarismi, a que sólo se restringían a trabajar con coeficientes positivos, porque cada término en las ecuaciones cúbicas representaba un volumen.

Cubo de la cosa ¹⁰ igual a número	$x^3 = c$
Cubo de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + bx = c$
Cubo de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + c = bx$
Cubo de la cosa igual a cosa más número	$x^3 = bx + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número	$x^3 + ax^2 = c$
Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + c = ax^2$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 = ax^2 + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número	$x^3 + ax^2 + bx = c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + ax^2 + c = bx$
Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa	$x^3 + bx + c = ax^2$
Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número	$x^3 = ax^2 + bx + c$
Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número	$x^3 + ax^2 = bx + c$
Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número	$x^3 + bx = ax^2 + c$
Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa	$x^3 + c = ax^2 + bx$

Tabla 3.2

Para resolver los diferentes casos de ecuaciones cúbicas, además de *Los elementos* de Euclides y *Las cónicas* de Apolonio, Jayyam hace uso de los siguientes tres lemas:

- **Lema 1:** Tenemos dos números a y b . encontrar otros dos x e y tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

- **Lema 2.** Sean dos paralelepípedos de bases cuadradas. El lado de la base del primero es a y su altura h , el lado del segundo es b . Calcular la altura del segundo de tal forma que ambos tengan la misma altura.
- **Lema 3.** Si se conoce la altura del segundo paralelepípedo, es posible conocer el lado de su base.

¹⁰ Término que empleaban para designar a la incógnita, mismo que utilizarían los algebristas italianos.

Tomemos en cuenta que los lemas anteriores están escritos en la forma en que Apolonio tuvo acceso a ellos ya que respecto a las Matemáticas modernas no tienen una estructura lógica en su redacción para nombrarlos como lemas.

Apolonio prueba los límites anteriores usando intersecciones de cónicas, por ejemplo, el primero lo hace de la siguiente manera:

Se consideran dos rectas perpendiculares que se cortan en el punto O , sobre las rectas se trazan los segmento de valor a y b con

$$OA = a \text{ y } OB = b.$$

Después se trazan dos parábolas con vértice común O y de lados rectos OA y OB respectivamente (Figura 3.4).

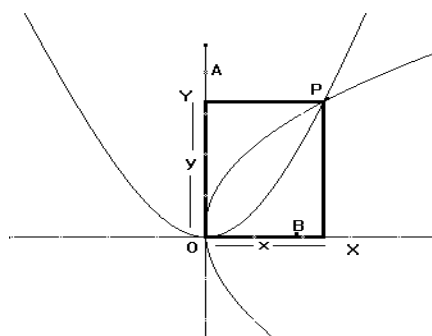


Figura 3.4

Las parábolas se cortan en P y dicho punto determina las componentes

$$OX = x; OY = y.$$

Como P está sobre las dos parábolas, entonces satisface sus ecuaciones

$$PY^2 = OX^2 = OA \cdot OY,$$

$$(x^2 = ay).$$

Entonces
$$\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{y},$$

y con la otra ecuación
$$PX^2 = OY^2 = OB \cdot OX \quad (y^2 = bx).$$

Entonces
$$\frac{OY}{OB} = \frac{OX}{OY} \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{x}{y},$$
 por lo tanto de las dos proporciones tenemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Detallan las fuentes históricas que fue Omar Jaiyyam el pionero en realizar trabajos en sobre cualquiera de las presentaciones que pueden tener las ecuaciones cúbicas que tuvieran raíz positiva. A continuación presentamos la forma de resolver algunos casos de la ecuación cúbica.

Solución de la ecuación $x^3 + bx = c$.

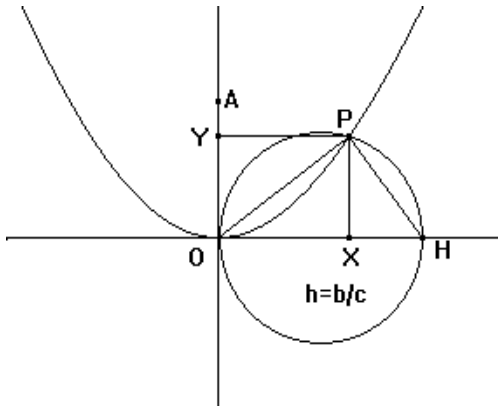


Figura 3.5

Utilizando la media proporcional entre b y la unidad, se construye un cuadrado de lado $\sqrt{b}$ y, sobre éste, un paralelepípedo de altura h y volumen c (los elementos Libro VI-13; y Lema 2). Tracemos la parábola con vértice en O y lado recto $OA = \sqrt{b}$ y una circunferencia de diámetro $OH = h$ tangente al eje de la parábola en el punto O (Figura 3.5). Consideremos $OX = x$ y $OY = y$.

Ambas curvas se cortan necesariamente en O y en otro punto P . En esta ecuación (y en todas las que vendrán después) en que los segmentos $OX = x$ y $OY = y$ que el punto de encuentro de las cónicas proyecta sobre rectas relacionadas con ellas (en este caso, el eje de la parábola y el diámetro de la circunferencia perpendicular a él). Por la Proposición 33 del Libro III y el Corolario de la Proposición 8 del Libro VI de Los elementos, los triángulos $\Delta OXP \sim \Delta HXP$; por lo cual $\frac{OX}{OY} = \frac{OY}{HX}$. Ahora por ser P un punto de la parábola, $\frac{OA}{OX} = \frac{OX}{OY}$. Combinamos las dos proporciones y tenemos lo siguiente

$$\frac{OA^2}{OX^2} = \frac{OX}{OY} \cdot \frac{OY}{HX} = \frac{OX}{HX}, \text{ de donde se deduce: } OX^3 = OA^2 \cdot HX.$$

El segmento $OX = x$, proporciona la solución (y así será en todos los casos)

$$x^3 + bx = OX^3 + OA^2 \cdot OX = OA^2 \cdot HX + OA^2 \cdot OX$$

$$= OA^2(HX + OX) = OA^2 \cdot OH = bh = c.$$

Solución de la ecuación $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$.

Donde a, b, c, x representan longitudes de segmentos rectilíneos.

Jayyam enuncia la expresión anterior en forma retórica, de la siguiente manera:

Un cubo, algunos lados y algunos números son iguales a algunos cuadrados.

A continuación presentaremos la solución de Jayyam (considerando que tiene raíz positiva), utilizando la notación actual.

Construcción geométrica

Trazamos el segmento $AB = \frac{a^3}{b^2}$ y tómesese $BC = c$. Construya el segmento AC y con este como diámetro trace la semicircunferencia. Después levante la perpendicular a AC que pase por B , la cual corta en D a la semicircunferencia. Sobre el segmento BD tomemos $BE = b$, y por el punto E trácese EF paralela a AC .

Hállese ahora G sobre BC tal que $BG \cdot ED = BE \cdot AB$ y complete el rectángulo $DBGH$, en seguida trace por H la hipérbola equilátera que tenga como asíntotas a EF y ED , la cual corta a la circunferencia en J , punto por el cual trazaremos una paralela a DE que corta al segmento EF en el punto K y al segmento BC en L , de este modo el segmento BL será la solución buscada, esto es $BL = x$. El resultado será la figura 3.6.

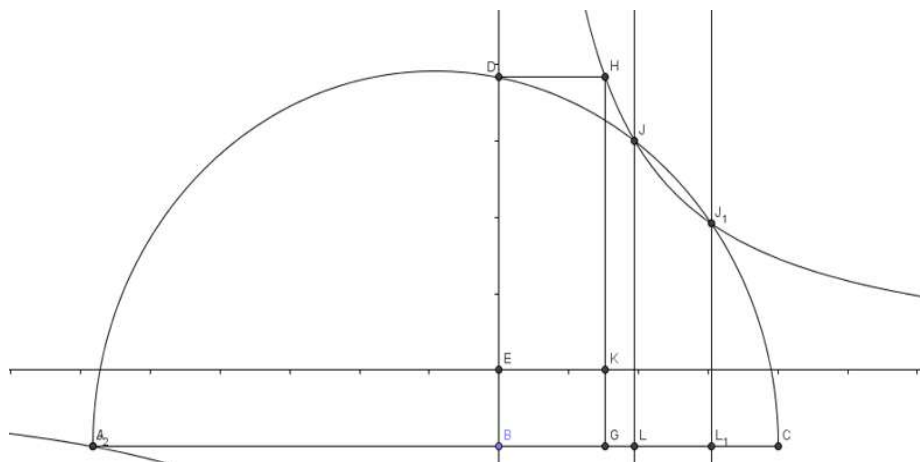


Figura 3.6

Demostración

Se trata de probar que el segmento $BL = x$, es solución de la ecuación

$$x^3 + b^2x + a^3 = cx^2.$$

Si consideremos las rectas perpendiculares ED y EF como ejes de un sistema coordenado y el punto E su origen, por la relación fundamental de la hipérbola equilátera ($xy = k$) y dado que $EK = BG$ y $KH = ED$, tenemos

$$EK \cdot KH = EK \cdot KJ = BG \cdot ED.$$

Por construcción tenemos que $BG \cdot ED = BE \cdot AB$; luego $EK \cdot KJ = BE \cdot AB$.

Por otro lado también tenemos que:

$$EK = BL, \quad KJ = LJ - KL \quad y \quad AB = AL - BL.$$

De las cuatro expresiones anteriores se obtiene

$$BL \cdot (LJ - KL) = BE \cdot (AL - BL),$$

$$BL \cdot LJ - BL \cdot KL = BE \cdot AL - BE \cdot BL.$$

Por otro lado tenemos que $KL = BE$, de este modo la expresión anterior se reduce a

$$BL \cdot LJ = BE \cdot AL \quad y \quad por \quad tanto \quad \frac{BE^2}{BL^2} = \frac{LJ^2}{AL^2}.$$

De la construcción, LJ es media proporcional entre AL y LC , luego:

$$LJ^2 = AL \cdot LC \quad y \quad \frac{BE^2}{BL^2} = \frac{LC}{AL}.$$

Entonces $BE^2 \cdot AL = BL^2 \cdot LC$, y como $AL = AB + BL$ y $LC = BC - BL$, se tiene que

$$BE^2 \cdot (AB + BL) = BL^2 \cdot (BC - BL),$$

$$BE^2 \cdot AB + BE^2 \cdot BL = BL^2 \cdot BC - BL^3.$$

Acomodando la expresión anterior llegamos a

$$BL^3 + BE^2 \cdot AB + BE^2 \cdot BL = BL^2 \cdot BC.$$

Por último cambiando los segmentos por las letras con las que los nombramos al inicio tenemos

$$x^3 + b^2 \cdot \frac{a^3}{b^2} + b^2 x = cx^2, \quad \text{esto es,} \quad x^3 + b^2 x + a^3 = cx^2.$$

Al analizar los ejemplos anteriores podemos observar:

- El uso de poderosas intuiciones geométrico-algebraicas para elegir y ‘acomodar’ las cónicas convenientemente para cada caso de la ecuación cúbica.
- Un uso muy avanzado (para su época) del Álgebra, aún no simbólica, para realizar las comprobaciones de los resultados encontrados.
- También usa los ejes y diámetros como rectas de referencia, lo cual no sólo muestra la profunda influencia de Apolonio, sino la potencia de estas maneras de representación para resolver problemas algebraicos complejos como era, sin duda, la resolución de la ecuación cúbica.
- A pesar de haber encontrado una solución geométrica para los distintos casos de la ecuación cúbica, sus procedimientos geométricos no conducían a procedimientos algebraicos equivalentes para llegar a fórmulas, como era posible en el caso de los métodos utilizados por al- Khawarizmi en la solución de las ecuaciones de segundo grado.

Concluiremos este apartado haciendo los siguientes comentarios.

- El impulso dado por los árabes al desarrollo del Álgebra no sólo por sistematizar la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado, sino por introducir transformaciones algebraicas fundamentales, produjo un gran avance en el desarrollo de esta rama de las Matemáticas, la cual es uno de los componentes fundamentales de la Geometría analítica.
- En cuanto al trabajo geométrico, destaca el uso admirable de las cónicas por Omar Jayyam para desarrollar las soluciones a las ecuaciones cúbicas. La solución de cada

uno de los casos es una obra de ‘arte’, no sólo por su gran intuición para elegir las y acomodarlas de manera precisa para obtener el segmento solución, sino también, por aplicar con maestría el método analítico inventado por los griegos.

- Aunque el trabajo de Omar Jayyam es muy creativo, su trascendencia es menor porque, a diferencia del trabajo de Jwarismi sus procedimientos no se pueden reducir a un procedimiento algebraico simple.

3.3 De regreso a Occidente

Si bien ya hemos hablado de los trabajos de Apolonio y del uso ‘coordenadas’, basándose en ciertas líneas auxiliares que eran ejes de la misma curva, aunque eran colocadas a *posteriori*, esto es un primer acercamiento a la introducción de coordenadas; aunque en ese momento no se propone una relación entre las coordenadas de los puntos de las curvas con respecto al sistema de referencia que se haya tomado.

A finales de la Edad media, comienzan a realizarse en las Universidad de Paris y Oxford estudios sobre situaciones de cambio relacionadas con magnitudes físicas. Destaca entre estos el trabajo de Nicolás Oresme (1323-1382), matemático, astrónomo y teólogo francés. Se sabe que estudió una Licenciatura en Artes de París a principios del 1340; en el año 1348 estudió Teología y en 1356 era *magister*¹¹ en el Colegio de Navarra. Posteriormente, obtuvo el grado de *magister theologiae* con lo que se convirtió en canónigo en Ruán¹² y París; después, pocos años antes de morir, a partir del año 1377 fue obispo de Lisieux¹³.

Oresme, en su obra *Tractatus de latitudinibus formarum*, escrito hacia 1362, desarrolla la teoría de la *latitud de las formas*, en donde escribe:

...Todo lo que varía, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo... (Oresme, citado en González, 2003, p. 43)

¹¹ Término latino que significa maestro y que usaba para designar a una persona que tenía poder o autoridad sobre otras.

¹² Ciudad del noroeste de Francia, capital de la región de Alta Normandía.

¹³ Ciudad francesa, situada en el departamento de Calvados en la región de la Baja Normandía.

La frase anterior expresa una de las primeras ideas que se generan sobre la representación gráfica de funciones en un sistema coordenado. Oresme introduce la noción de gráfico como elemento descriptivo de la variación de una magnitud, a la que denomina *cualidad*, en función de otra magnitud, así considera lo que denomina representación gráfica de *las intensidades de las cualidades*.

Oresme trabaja las cualidades fijando un punto como origen de una recta horizontal, a la cual llama *longitud* (lo correspondiente a nuestra abscisa) en la cual representa al tiempo o el espacio, enseguida traza una perpendicular a la recta anterior para determinar la recta llamada *latitud* (la correspondiente a nuestra ordenada) en la cual se determina la intensidad o amplitud de fenómenos tales como la velocidad, calor, etc. Sin embargo, para Oresme esta variación no se refleja como en la Geometría analítica por la curva descrita por los puntos de *longitud* y *latitud* dadas, sino por la figura total; es decir, el área que determina esa curva, el eje de las longitudes y las intensidades inicial y final, que Oresme llama simplemente *figura*. En el resto del trabajo de Oresme, se presenta un estudio de las figuras planas que producen las representaciones gráficas de las *cualidades*, en los que considera varios tipos de formas de representaciones geométricas.

Otro de los aportes de Nicolás Oresme es que introduce los términos “uniforme” y “uniformemente diforme” con los cuales hace alusión en el primer caso, a una cualidad cuyas latitudes no cambian en el tiempo; es decir, son constantes y, en el segundo caso, el término corresponde a una cualidad cuya latitud es variable, pero cuya razón de cambio es constante, como la velocidad en un movimiento uniformemente acelerado. Estos estudios sobre variación fueron posteriormente centrales para los trabajos realizados por Galileo Galilei (1564–1642).

Para comprender un poco mejor el trabajo de Nicolás Oresme veamos la forma en la que resuelve el siguiente problema:

Pensemos en un cuerpo que se mueve durante la primera mitad de un intervalo de tiempo con velocidad constante, después en la mitad del segundo intervalo se mueve con el doble de la velocidad inicial, después en la mitad del intervalo restante se mueve al triple de la

velocidad inicial y así, sucesivamente, tenemos que la velocidad promedio durante todo el intervalo será la doble que la velocidad inicial.

Para resolver el problema, interpretemos mediante un área la distancia recorrida por el móvil que tiene velocidad constante, esto debido a que $distancia = velocidad \times tiempo$, consideremos que la velocidad inicial es igual a 1. Entonces la distancia recorrida en el primer intervalo será $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, la distancia en el siguiente intervalo será $2 \times \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$, para el tercer intervalo tendremos $3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$, de modo que la distancia recorrida en el k-ésimo intervalo será $\frac{k}{2^k}$, Oresme representa esto mediante la siguiente figura 3.7.

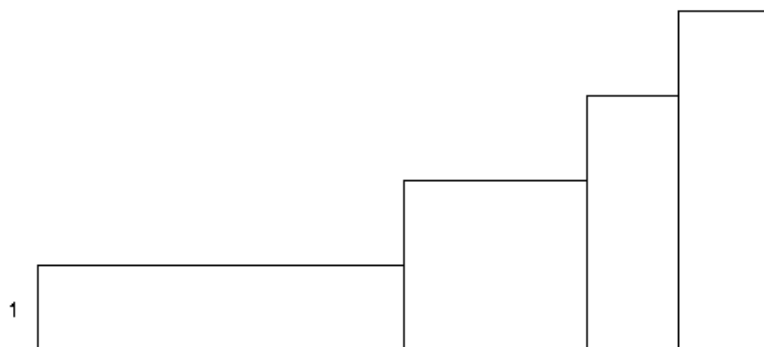


Figura 3.7.

El problema de Oresme recae en demostrar que la suma de todos esos rectángulos es igual a 2, es decir, demostrar que la suma infinita $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{k}{2^k} + \dots = 2$, la forma en la que procede para su solución es reacomodando los rectángulos en forma diferente, como se muestra en la Figura 3.8.

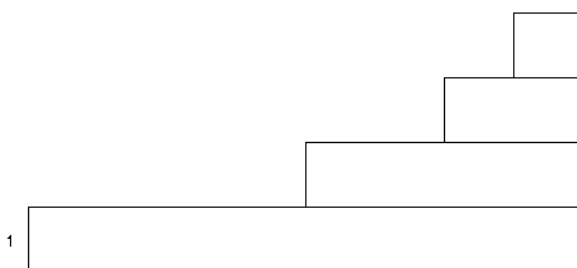


Figura 3.8.

De donde concluye que, al ir colocando encimados los rectángulos pequeños sobre el mayor cubren la misma área (cuando k tiende a infinito)¹⁴.

Con lo anterior tenemos que los trabajos de Oresme permiten traducir problemas físicos a problemas de áreas. Esta introducción del modelo geométrico posibilita el abandono de las formulaciones puramente retóricas de los problemas físicos y con ello se favorece la aparición de un lenguaje con rasgos gráfico-funcional.

¹⁴ Este resultado se puede probar usando un método algebraico similar al que se aplica a una serie geométrica en el caso de la serie $r + 2r^2 + 3r^3 + \dots$ con $r = \frac{1}{2}$

3.4 Resumen

Durante el periodo de la llamada Edad media en Occidente, muy poco se avanzó en el desarrollo de las Matemáticas en general. Sin embargo, los árabes no sólo rescataron gran parte del conocimiento antiguo (Grecia, Babilonia y Egipto) sino que incorporaron también al conocimiento matemático de los hindúes y además, dieron un impulso notable al Álgebra, aun siguiendo la tradición griega del Álgebra geométrica. En este sentido, destacan los trabajos de Al- Jwarismi y de Omar Jayyam, con relación a la solución de las ecuaciones cuadráticas y cúbicas. Este último, retoma los métodos de la ‘Geometría analítica’ griega en la solución de los diferentes casos de la ecuación cúbica.

Bajo la influencia de la matemática árabe, surgirá en los siglos XII y XIII, un renacimiento de las Matemáticas en Italia, alrededor de la solución algebraica de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, lo cual se extenderá rápidamente a otros países de Occidente. A la par, se trabajará intensamente en la elaboración de un sistema simbólico para facilitar el trabajo algebraico.

Por otro lado, el trabajo de Oresme sobre la representación geométrica de relaciones funcionales entre magnitudes físicas, para lo cual introduce nociones cercanas a las de coordenadas cartesianas, adquiere una importancia particular durante los siglos XV y XVI principalmente en estudios de dinámica, el mismo Galileo se basó en este trabajo (Boyer, 2004):

En su ‘Dos Nuevas Ciencias’ de 1638 Galileo reprodujo con gran fidelidad el diagrama y argumento de Oresme para el movimiento uniformemente acelerado (p.50)

Sin embargo, de acuerdo con Boyer, la influencia de Oresme es incierta en los trabajos de Descartes y Fermat, pues ninguno de los dos lo refieren.

Capítulo 4

EL RENACIMIENTO

4.1 Introducción

Renacimiento es el nombre de un amplio movimiento cultural que se produjo en Europa occidental, en los siglos XV y XVI. Sus principales exponentes se hallan en el campo de las artes, aunque también se produjo una renovación en las ciencias, tanto naturales como humanas. Italia fue el lugar de nacimiento y desarrollo de este movimiento; sin embargo, desde el siglo XII ya se había iniciado en las Matemáticas un movimiento de renovación.

En la última etapa de la Edad media, surge una nueva preocupación por el saber y por las formas de transmitirlo, se quiere volver a la ciencia y la cultura griega. Este renacimiento científico que trata de restaurar la ciencia griega, llega a Europa a través de la matemática árabe. Los árabes no sólo habían traducido las obras de Aristóteles y las de gran parte de la ciencia de los clásicos, sino que realizaron comentarios y añadieron en muchos casos sus propios descubrimientos científicos, especialmente en Aritmética y Álgebra.

La ciencia árabe llega a Occidente por dos caminos distintos. Uno de ellos es el marítimo, cruza el mediterráneo de sur a norte. La matemática árabe, como una mercancía más, viaja en los barcos comerciales de las llamadas Repúblicas marineras: Pisa, Génova, Amalfi y Venecia, que en el último periodo de la Edad media expanden sus redes comerciales por toda la costa Mediterránea.

El otro camino, el terrestre, tiene su centro focal en Toledo, durante el reinado de Alfonso X el sabio, en donde se constituye la llamada *Escuela de traductores de Toledo*; ahí, un grupo de estudiosos cristianos, judíos y musulmanes traducen obras fundamentales de las antiguas culturas griega y árabe (*Los elementos* de Euclides, las *Tablas astronómicas* y el *Álgebra* de Al-Khwarismi, entre otras).

4.2 Leonardo de Pisa (1170-1250)

También conocido como *Fibonacci*, hijo de un mercader italiano con intereses en el norte de África y quien fue educado para ejercer el mismo oficio.

Estudio bajo la dirección de un maestro árabe y recorrió Egipto, Siria, Grecia y Sicilia. Tuvo ocasión de conocer el sistema de numeración indo-árabe, del cual se convirtió en un acérrimo defensor. (Moreno, 2004, p. 47)

Se considera a *Fibonacci* como el primer matemático del periodo prerrenacentista, siendo su principal obra el *Liber abaci* (Libro de Ábaco), publicado en 1202 y revisado en 1228. Algunos contenidos de esta obra son:

- Una introducción a los números indoarábicos y los métodos de cálculo con enteros y fracciones.
- Serie de problemas: unos relativos a cálculos comerciales y otros que se resuelven con dos o tres incógnitas. Entre estos, formula la famosa “Serie de Fibonacci”:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ...

En la que cada término, a partir del segundo, es la suma de los dos anteriores ($a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$); con ellos es posible dar solución al problema:

¿Cuántos pares de conejos pueden ser producidos en un año, si cada par engendra un par de conejos cada mes, el cual es reproductivo desde el segundo mes y si además la muerte no ocurre?

- Una sección dedicada al cálculo de raíces cuadradas y cúbicas, y a las operaciones con radicales.
- Una extensa sección sobre un tratamiento sistemático de ecuaciones lineales y cuadráticas, basándose en el trabajo de Al-Jwarismi.

El *Liber abaci* fue un auténtico éxito y fue utilizado durante mucho tiempo como texto, principalmente en las escuelas de ábaco. Con el tiempo, muchos maestros escribieron su propio tratado, para uso de los alumnos de su escuela (se conservan alrededor de 300 de estos textos escritos entre los siglos XIII y XVI). Los más importantes, aparte del escrito

por Fibonacci, son *Trattato di Pratica d'arismetrica* del Maestro Benedetto de Florencia (1463); *La Pratica d'arismetricha* de un autor desconocido y la *Summa de Aritmética Geometría Proportioni et Proportionalità* de Luca Pacioli (1445-1517).

Del examen de estos tratados se deduce que la formación de un buen maestro de ábaco debía ser bastante completa: además de la aritmética práctica y comercial, debía tener nociones de Aritmética teórica, Teoría de números, Álgebra y Geometría teórica y práctica.

Los tratados de ábaco sólo utilizaban símbolos (especiales) para los números. Todos los razonamientos, las demostraciones y la resolución de los problemas se dan exclusivamente por medio de palabras. Los únicos esquemas que a veces aparecen, corresponden a las operaciones. Además, eran textos manuscritos y por tanto muy costosos de modo que sólo podían adquirirlos mercaderes y comerciantes ricos.

Otras obras de Fibonacci son: *Práctica geometriae* (1220), *Floss* (1225), *Epístula ad Magistrum Teodorum(?)* y *Liber quadratorum* (1225).

Los libros *Flos*, *Liber quadratorum* y la *Epistula ad Magistrum Teodorum*, contienen otros problemas sobre ecuaciones.

4.3 Solución de las ecuaciones cúbica y bicuadrática

Entre los siglos XI y XV se llegó al dominio completo de las ecuaciones lineales y cuadráticas mediante procesos algebraicos; sin embargo, los intentos por resolver de manera general la ecuación cúbica habían fracasado, sólo se habían encontrado soluciones a casos particulares. El mismo Luca Pacioli, desistió de sus intentos por resolver tal problema.

La solución de la ecuación cúbica se convirtió en la gran meta a lograr por los algebristas italianos. A continuación haremos una breve reseña de ese descubrimiento, el cual se da en un contexto muy peculiar.

Un primer intento de solución de la ecuación cúbica lo podríamos encontrar en el trabajo del Maestro Dardi de Pisa (cerca 1300), quien escribió *Aliabrea argibra* (1344) en donde contiene la solución a una gran cantidad de problemas que conducen a ecuaciones (muchas

que involucran radicales) que se pueden reducir a cuadráticas y cúbicas. En particular, encuentra la solución para la ecuación

$$x^3 + bx^2 + cx = n. \quad (1)$$

Mediante la fórmula (en nuestra actual simbología): $x = \sqrt[3]{\left(\frac{c}{b}\right)^3 + n} - \frac{c}{b}$.

No se sabe cómo llegó Dardi a esta solución, pero una hipótesis de Van der Warden (1985) es que siguió un método similar al utilizado por Al-Jwarismi, para resolver la ecuación cuadrática (ver página 30).

¿Qué cantidad L se debe sumar a ambos lados de la ecuación (1), para que en el miembro izquierdo se convierta en $(x + L)^3$? ¿Bajo qué condiciones este procedimiento funcionará?

El diagrama utilizado por Al-Jwarismi y Leonardo de Pisa para el cuadrado de lado $(x+b/2)$, es el de la Figura 4.1. Ahora vamos a tratar de dibujar un diagrama similar para el cubo de lado $x+L$.

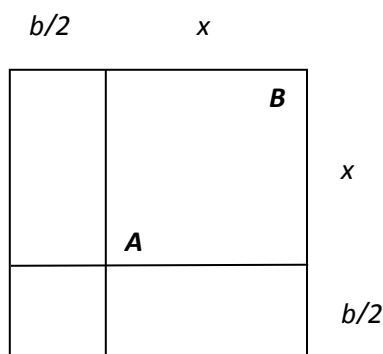


Figura 4.1.

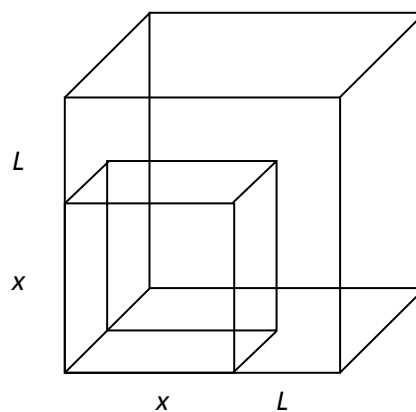


Figura 4.2.

En la Figura 4.2, el cubo de lado $x+L$ puede descomponerse en ocho partes:

un cubo de volumen x^3 (il cubo)

tres bloques de volumen x^2L

tres bloques de volumen xL^2

un cubo de volumen L^3

Si suponemos que estas partes corresponden a los tres términos en lado izquierdo de la ecuación (1) más una constante L^3 , la cual debe ser agregada a ambos lados, obtenemos lo siguiente:

$$b = 3L \quad y \quad c = 3L^2 \quad \text{de donde} \quad L = \frac{c}{b}$$

Luego:

$$\left(x + \frac{c}{b}\right)^3 = n + \left(\frac{c}{b}\right)^3$$

Aplicando la raíz cúbica en ambos miembros de la igualdad y despejando x se obtiene la solución. Sin embargo Dardi, admite que las soluciones no tienen validez general, sólo se cumplen en casos particulares. Habrá que notar que n puede tomar cualquier valor.

Scipione del Ferro (1465-1526)

Profesor de la Universidad de Bologna, fue el primero en encontrar la solución de la ecuación $x^3 + px = q$ dada por la fórmula que se sigue utilizando hoy en día:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Sin embargo no se tiene información del método que utilizó para llegar a este resultado, pues nunca lo hizo público. Se dice que, sólo antes de morir, comunicó su descubrimiento a su yerno y a su alumno Antonio María del Fiore. El primero no sabía mucho de Matemáticas y, el segundo era un estudiante mediocre, pero se aprovechó de ese conocimiento para ganar algunas competencias en las que se planteaban problemas. Estas eran públicas y se realizaban para obtener alguna plaza académica o lograr prestigio; incluso algunas veces se apostaba dinero.

Niccolò Fontana (a) Tartaglia (1499-1557)

Se considera a Tartaglia, profesor de Matemáticas en Venecia, como el redescubridor del método de solución de la ecuación cúbica en 1535, consecuencia de una apuesta que le hizo Antonio María del Fiore. La apuesta consistía en que cada uno le planteara al otro 30 problemas para resolver. Los 30 problemas que del Fiore planteó fueron sobre ecuaciones cúbicas, las cuales Tartaglia resolvió en su totalidad. Al parecer del Fiore no resolvió

ninguno de los problemas planteados por su adversario. Sin embargo, durante mucho tiempo Tartaglia no publicó su método.

Gerolamo Cardano¹⁵ (1501-1576)

En 1539, Cardano, un famoso médico, astrólogo, filósofo y matemático radicado en Milán, estaba terminando de escribir su *Practica Aritmética Generalis*, que esperaba fuera el sustituto del libro de Luca Pacioli, escrito 40 años antes. Consideró importante incluir el método de solución de la ecuación cúbica de Tartaglia después de mucha insistencia, lo convenció de que éste le revelara tal método bajo juramento de no publicarlo. Tartaglia le comunicó la solución de tres casos de la ecuación¹⁶ mediante versos. A continuación presentamos la traducción de los versos correspondientes a la solución de la primera ecuación y una explicación en nuestra simbología actual:

*Cuando está el cubo con las cosas preso
y se iguala a algún número discreto
busca otros dos que difieran en eso.*

*Después tu harás eso que te espeto
que su producto siempre sea igual
al tercio cubo de la cosa neto.*

*Después el resultado general
de sus lados cúbicos bien restados
te dará a ti la cosa principal.*

En los primeros dos versos plantea la ecuación: $x^3 + px = q$, donde p y q son positivos y la *cosa* es x .

En el tercer verso introduce dos números (positivos no conocidos) cuya diferencia sea q :

$$t - s = q, \quad (1)$$

En los tres siguientes versos establece la relación: $ts = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. (2)

¹⁵ La mayor parte de este apartado está basado en el libro de Casallerrey (2000)

¹⁶ Los casos son: $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$ y $x^3 + q = px$, al igual que los árabes, los coeficientes y las soluciones sólo podía ser positivos.

En los últimos tres versos establece que x (*cosa principal*) será la diferencia de sus *lados cúbicos* (las raíces cúbicas de t y s): $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}$. (3)

Al resolver el sistema de ecuaciones (1) y (2) obtenemos los valores de s y t en función de p y q , luego al sustituir en (3) llegamos a la fórmula buscada.

Cardano no publicó la solución de Tartaglia en su *Practica Aritmetica* (publicado en 1539) pero, al parecer, consiguió que el yerno de Scipione del Ferro le permitiera revisar sus trabajos, encontrando entre ellos la solución de la ecuación. Con esto, Cardano justificó ante Tartaglia la publicación del método de solución de la ecuación general $x^3 + px = q$, en su *Ars Magna* de 1545. Por supuesto, Tartaglia no le creyó y lo acusó de plagio.

El desarrollo que presenta Cardano para encontrar la solución es totalmente retórico y sólo se basa en dos figuras planas, aquí expondremos una variante más didáctica pero que es muy similar a la que anteriormente se le atribuyó a Dardi. Consideremos la Figura 4.3.

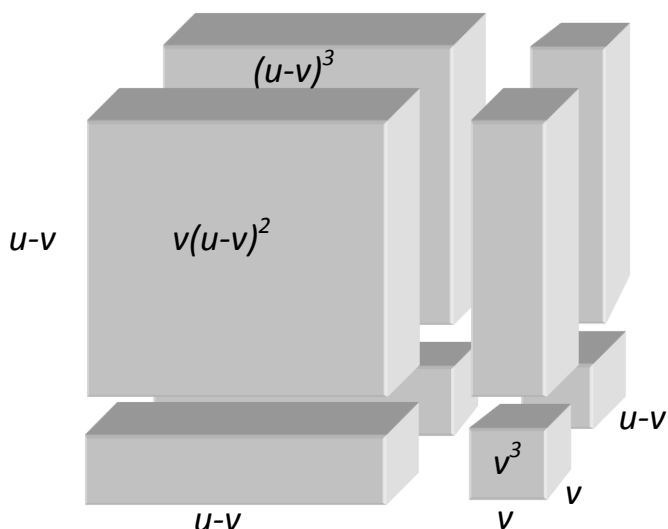


Figura 4.3.

Esta figura corresponde a un cubo de lado u separado en dos partes $u-v$ y v , como se muestra en la figura; de manera que, al separar todos los sólidos que se forman a causa de esa partición, se obtienen

1 cubo de volumen $(u-v)^3$

1 cubo de volumen v^3

3 prismas de volumen $(u-v) v^2$

3 prismas de volumen $(u-v)^2 v$

De lo anterior se tiene que

$$u^3 - v^3 = (u - v)^3 + 3(u - v)v^2 + 3(u - v)^2 v,$$

De donde, se llega a $u^3 - v^3 = (u - v)^3 + 3uv(u - v).$

Luego, haciendo $x = u - v$ y sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos

$$x^3 + 3uvx = u^3 - v^3.$$

Si comparamos esta ecuación con la inicial $x^3 + px = q$, obtenemos las relaciones

$$uv = p/3 \text{ y } u^3 - v^3 = q.$$

Haciendo $u^3 = t$ y $v^3 = s$, tendremos

$$t - s = q, \quad ts = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \text{ y } x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{s}.$$

La deducción actual de la fórmula es similar a esta, pero se prescinde de las representaciones geométricas.

Cardano también presenta, en su *Ars Magna*, la manera de reducir la ecuación general de tercer grado $ax^3 + bx^2 + cx = d$ al caso $x^3 + px = q$. Esto lo hace mediante el cambio de variable $x = y - \frac{b}{3a}$.

Ludovico Ferrari (1522-1565)

A la edad de 14 años entró al servicio de Cardano, quien prácticamente le proporcionó su primera instrucción. En poco tiempo aprendió latín, griego y Matemáticas, convirtiéndose pronto en una especie de secretario y después en su colega y amigo. A la edad de 18 años, fue contratado como profesor de Matemáticas en Milán. A los 22 años, descubrió que la ecuación general de cuarto grado puede ser reducida a una ecuación cúbica y por lo tanto, resolverse usando raíces cuadradas y cúbicas. Este resultado fue incorporado en el *Ars*

Magna de Cardano, en donde se presenta la solución a un problema que conduce a la ecuación (con el simbolismo actual). A continuación mostramos un ejemplo, de un caso particular.

$$x^4 + 6x^2 + 36 = 60x.$$

El procedimiento seguido por Ferrari, inicia sumando $6x^2$ a ambos miembros de la igualdad para completar un trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro

$$x^4 + 12x^2 + 36 = 6x^2 + 60x,$$

$$(x^2+6)^2 = 6x^2 + 60x.$$

Como el miembro derecho no es cuadrado perfecto, se busca otra cantidad de forma que, al sumarla a ambos lados se formen cuadrados perfectos, esta cantidad es

$$2tx^2 + (t^2 + 12t).$$

Al sumarla y organizar convenientemente las expresiones se llega a la igualdad

$$x^4 + 2(t+6)x^2 + (t+6)^2 = (2t+6)x^2 + 60x + (t^2+12t), \quad [*]$$

en la que el primer miembro sigue siendo un cuadrado y, como el segundo también lo debe ser, se ‘obliga’ a que el discriminante correspondiente sea igual a cero. Esto es

$$60^2 - 4(2t+6)(t^2+12t) = 0,$$

de donde se llega a la ecuación

$$t^3 + 15t^2 + 36t = 450,$$

la cual puede resolverse por el método expuesto por Cardano en el mismo libro *L'algebra*. Esta última ecuación recibe el nombre de *resolvente* de la ecuación inicial de cuarto grado. Una vez encontradas las soluciones de esta última ecuación, al menos una de las cuales será real, y sustituidas en [*], los dos miembros de esta igualdad serán cuadrados perfectos. Finalmente, la raíz cuadrada del primer miembro será $x^2 + (t+6)$ y la del segundo, un polinomio de primer grado. Igualando estas expresiones, directamente y haciendo un cambio de signo de una de ellas, obtendremos dos ecuaciones cuadráticas en x , cuyas

soluciones nos darán las cuatro raíces de la ecuación inicial. Si las tres soluciones de la resolvente son reales, algunas raíces se repetirán o se descartarán por no satisfacer a alguna de las ecuaciones del desarrollo anterior.

Con relación a la solución de la ecuación de cuarto grado, es pertinente hacer algunos comentarios. Primero, a diferencia de la solución de tercer grado, se puede asegurar que aquella es una aportación original de Ferrari; Segundo, en este caso no hay una justificación geométrica para el método; y no puede haberla porque aún no se podía dar un significado geométrico a x^4 , de modo que, representa un paso importante en la independencia del Álgebra de la Geometría; Tercero, el nivel de manejo operatorio algebraico es sorprendente, más aún, si se toma en cuenta que prácticamente era retórico.

Para cerrar este episodio agregaremos que, en 1547 Ferrari entabló un prolongado debate con Tartaglia para defender a Cardano de las acusaciones por plagio del método de solución de la ecuación cúbica. El debate se hizo a través de *carteles* públicos que llegaron a doce (seis de cada uno). En algunos de estos carteles se planteaban problemas para que el contrincante los resolviera. El debate concluyó con un ‘duelo’ público en agosto de 1548, el cual tuvo lugar en Milán, en la iglesia de Santa María de Giardino. El duelo terminó con la victoria de Ferrari.

Rafael Bombelli (1526-1572) fue un matemático e ingeniero hidráulico italiano. Autor *l'Algebra* (tres libros) publicado en Venecia en 1572 y posteriormente en Bologna en 1579. Esta obra está dividida en cinco libros. Los tres primeros fueron publicados en 1572, y en los cuales se anunciaba que los libros IV y V, estarían dedicados a la geometría y que pronto se publicarían. Desgraciadamente, Bombelli nunca publicó estos volúmenes porque murió ese mismo año. En 1923, un manuscrito de Bombelli fue descubierto en una biblioteca de Bolonia. Además de una versión manuscrita de los tres libros



ya publicados y había un manuscrito inconcluso de los otros dos libros. La geometría incompleta de Bombelli fue publicada en 1929; en ella se aprecia una influencia de los procedimientos geométricos de Omar Jayyam.

Bombelli admiró el *Ars Magna*, pero consideró que Cardano no era claro en su exposición. Un hecho de suma relevancia es que en la antigüedad, toda regla algebraica debería de ser sometida a una demostración geométrica:

...Por demostración de una regla algebraica se entendía demostración geométrica, es decir, con un conjunto de razonamientos de carácter geométrico que dieran una explicación razonada de tal regla, basados en la interpretación geométrica de los elementos de la ecuación, en términos de segmentos, áreas y volúmenes. Lo curioso es que este tipo de interpretación se daba incluso cuando el problema no tenía ninguna relación con la geometría. (Casalderrey, 2000, p. 134)

Aunque lo anterior daba paso a un problema epistemológico sobre el significado que se le debe dar a las ecuaciones de cuarto grado; es decir, ¿cómo considerarlas si no pueden tener una representación geométrica o sólo son un artificio, más allá de la naturaleza, que solo tiene utilidad en el Álgebra?, cuestión que muy probablemente se plantearon Cardano y Bombelli.

De este modo, varios matemáticos trataron de dar una demostración geométrica. Aquí presentaremos el trabajo realizado por Bombelli, quien presenta una demostración con bases geométricas y la cual permite la solución de ecuaciones de la forma $x^3 + Ax = C$, en su obra *Álgebra*, en el capítulo *De cubo y tantos igual a un número*; la regla funciona sólo para términos en los que el coeficiente del término lineal y el término constante son positivos, esta restricción se debe a que aún no consideraban cantidades negativas, pues no tenían representación geométrica.

Bombelli se basa en la Figura 4.4, en la que:

- a) Los puntos e, c, d, h, m y l están sobre la misma recta,
- b) los puntos n, b y o están sobre otra recta paralela a la anterior,
- c) los segmentos hi, ho, cb y en son perpendiculares a las rectas anteriores y por lo tanto de igual longitud x , inicialmente indeterminada.

- d) $hc = A$ y $cd=1$,
- e) $hlji$ es un cuadrado de área C , luego $hi^2=C$,
- f) se traza la semicircunferencia mie de diámetro em , de manera que el triángulo mie es recto en i . De donde, $hi^2 = mh \cdot he$ (por ser media proporcional de mh y he).
- g) De manera similar, se traza la semicircunferencia ebd , y el triángulo inscrito ebd , recto en b . De donde, $bc^2 = ec \cdot cd$ (por ser media proporcional de mh y he). Este trazo se obtiene cuando se encuentra la solución de la ecuación, esto es, cuando el segmento on corta a la semicircunferencia ebd .

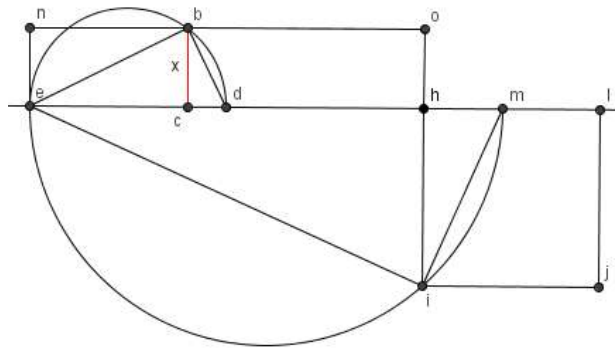


Figura 4.4. Ilustración usada por Bombelli.

Enseguida mostraremos que cuando se obtiene la construcción anterior, efectivamente la longitud del segmento bc es la solución de la ecuación $x^3 + Ax = C$.

De c), d) y g) tenemos que $x^2 = bc^2 = cd \cdot ce = 1 \cdot ce = ce$, esto es $x^2 = ce$,

de c), e) y f) $C = hi^2 = mh \cdot he = oh \cdot he$,

Este último producto es el área del rectángulo $ehon$ y por lo tanto es igual a la suma de las áreas de los rectángulos $ecbn$ y $chob$, por esto y por d) se sigue

$$C = oh \cdot he = oh \cdot hc + bc \cdot ce = x \cdot A + x \cdot x^2 = Ax + x^3,$$

es decir, $C = Ax + x^3$, que corresponde a la ecuación que inicialmente teníamos en cuestión. Entonces para poder resolver una ecuación basta con determinar la longitud del segmento bo cuando el punto b se encuentre sobre el arco de circunferencia de .

Con el fin de ejemplificar el procedimiento anterior, desarrollaremos la construcción para resolver la ecuación $x^3 + 6x = 20$, de la cual sabemos que tiene como raíz 2; luego $A = 6$ y $C^2 = 20$.

Tracemos una línea l (Figura 4.5) y sobre ella coloquemos un punto h y a partir de este construyamos el cuadrado $hijl$ de área 20, esto es, de lado $\sqrt{20} \approx 4.47$.

Sobre la recta l localizamos el punto c a una distancia 6 (coeficiente del término lineal) y teniendo como base el segmento ch levantamos un rectángulo $cboh$ con una altura arbitraria $cb = x$ que podremos modificar y que será la solución a nuestra ecuación.

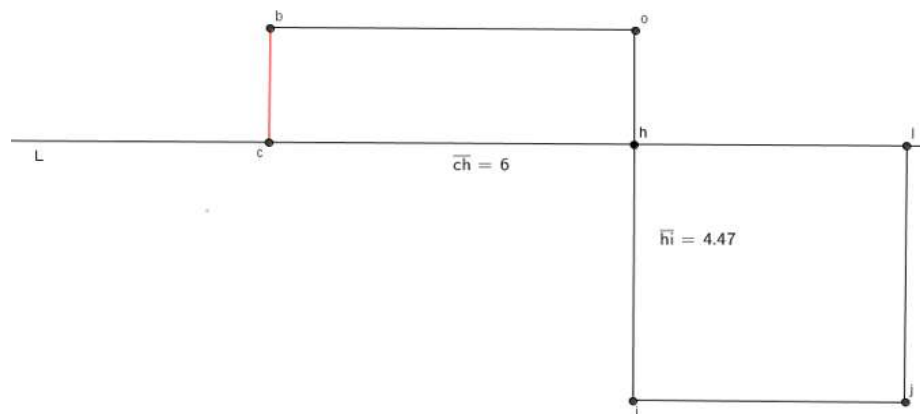
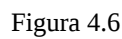


Figura 4.5

Enseguida, localizamos el punto m sobre la recta l a la misma distancia x del punto h (Figura 4.6), después se traza el segmento mi y posteriormente tracemos la perpendicular a este segmento que pase por el punto i , la cual cortará a la recta l en el punto e ; luego trazamos la semicircunferencia de diámetro em y que pasa por i .



En la figura 4.7 se muestra cómo se ubica b sobre la semicircunferencia ed , cuando el deslizador ‘solución’=2, es decir $x = 2$.

Francisco Vieta (1540 - 1603).



Abogado francés que sirvió en las cortes de Enrique III y de Enrique IV. Alternó su trabajo como abogado y consejero de la realeza con su dedicación a las Matemáticas; sobre todo en la última etapa de su vida, cuando ya había logrado una considerable fortuna.

Vieta conocía los trabajos de Diofanto y Cardano; entre sus aportes más importantes son: estableció las reglas para la extracción de raíces y dio a la trigonometría su forma definitiva en obra llamada *Canon mathematicus* (1570), además dedicó tiempo al estudio de los fundamentos del álgebra, con la publicación, de *In artem analyticam isagoge* (1591), en la que introdujo un sistema de notación que hacía uso de letras del alfabeto para expresar de manera general relaciones operatorias entre cantidades constantes e indeterminadas. En parte, por esto se le considera como el inventor del Álgebra simbólica.

De acuerdo con Boyer (2004) Vieta contrapone la *logística numerosa*, referida al cálculo numérico, a la *logística especiosa* concerniente a ‘especies’ o ‘formas de cosas’, ‘cosas’ que podían ser magnitudes inconmensurables o números enteros:

Vieta se acerca mucho a la idea de variable algebraica real, una de las más importantes en la evolución de las Matemáticas en general, y de la geometría analítica en particular... El uso de vocales vs. consonantes en la construcción de ecuaciones, no se hace tanto para distinguir entre magnitudes variables y fijas, como para distinguir las constantes desconocidas (incógnitas) de las conocidas. La transición de este enfoque hacia el primero se debió al desarrollo natural de la notación literal de Vieta y fue ella la que marcó el inicio de la geometría analítica en el sentido estricto de la palabra. (Ibid. p. 60)

Como parte de su *logística speciosa*, formula su ‘ley de homogeneidad’, según la cual sólo pueden compararse magnitudes de igual dimensión: lado, cuadrado, cubo, cuadrado-cuadrado, cuadrado-cubo, etc.

Vieta era plenamente consciente de que cuando estudiaba la ecuación general de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ (en notación actual), estaba estudiando toda una clase de expresiones.

Utiliza los signos + y – para la adición y sustracción; para la igualdad al principio utiliza la palabra *aequalis*, y posteriormente signo $\sim$ ¹⁷. No emplea signo para la multiplicación, pero emplea la ‘raya’ para la división.

Como símbolos de agrupación utiliza llaves y a veces barras. Por ejemplo, la identidad:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

Vieta la escribía así:

$$a \text{ cubus} + b \text{ in } a \text{ cuad. } 3 + a \text{ in } b \text{ cuad. } 3 + b \text{ cubo aequalis } \overline{a+b} \text{ cubo}$$

Sin duda, el trabajo de Vieta fue muy relevante para dar paso a los trabajos posteriores de Descartes y Fermat, para establecer una correspondencia entre una ecuación algebraica y una construcción geométrica.

¹⁷ El símbolo $\sim$ fue introducido por Robert Recorde en 1557

4.4 Resumen

En el periodo destacan los siguientes avances:

- 1) La solución general de las ecuaciones de tercero y cuarto grado por métodos algebraicos (retóricos), pero aun estrechamente ligados a la tradición griega, es decir, a la demostración y la interpretación geométrica (longitudes, áreas, volúmenes). La solución de la ecuación de cuarto grado parecía no tener sentido y ser simplemente un juego del intelecto. No pasaría mucho tiempo para que este obstáculo epistemológico fuera superado y los matemáticos se dieran a la tarea de continuar la búsqueda de la solución algebraica de ecuaciones de grado mayor que cuatro.
- 2) Las aportaciones en torno al establecimiento del álgebra simbólica fueron claves en la consolidación de esta rama de las Matemáticas y la futura creación de otras como la Geometría analítica y el Cálculo durante los siglos XVII y XVIII. La introducción de símbolos no sólo fue útil para expresar relaciones operatorias entre números y cantidades no determinadas, sino que también abrió el camino para distinguir otro tipo de cantidades: variables, constantes y parámetros. Esto contribuyó mucho a independizar el álgebra de la geometría y abrir más posibilidades de interacción, lo cual se dará justamente en la Geometría analítica.

Capítulo 5

EL NACIMIENTO DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA: FERMAT Y DESCARTES

Tanto Fermat (1601-1665) como Descartes (1596-1650) estaban interesados en hallar métodos generales para el estudio de las curvas, la potencia del Álgebra hizo que se volcaran a la aplicación de ésta en el estudio de la Geometría. La disciplina que crearon se llama Geometría de coordenadas o Analítica. Su idea central es el establecimiento de un nuevo método de plantear y resolver problemas tanto geométricos como algebraicos.

A continuación describimos un poco del contexto en que vivieron y analizamos parte del trabajo que desarrollaron y su contribución a la nueva rama de las Matemáticas ya que, como veremos, el objetivo de cada uno era similar, pero sus enfoques tenían algunas diferencias.

5.1 René Descartes



Nació el 31 de Marzo de 1596 en Haye, en la región de la Touraine¹⁸ francesa. Su madre, Jeanne Brochard, muere 14 meses después de su nacimiento y fue llevado a criado por su abuela. Su padre Joachin Descartes, fue consejero en el Parlamento de Bretaña y regularmente se encontraba alejado de sus hijos. Tuvo dos hermanos, Pierre y Jeanne. La temprana pérdida de su madre y la falta de relación con su padre, que le tenía muy baja estima, contribuyen a forjar un carácter que el mismo describe como triste o melancólico.

A los 10 años de edad, va al Colegio de La Flèche donde permanece 8 años; al finalizar sus estudios se independiza familiarmente. Este es uno de los colegios de élite que los jesuitas dirigían para formar futuros dirigentes políticos y administradores de la corte. En 1614 se

¹⁸ Provincia de la región Centro que comprende el departamento de Indre y Loira.

va a Poitiers a estudiar derecho civil y canónico, graduándose 2 años después. Aunque no está bien documentado, se dice que también estudió medicina. En 1618 se alista en el ejército de Mauricio Nassau y un año después se va al de Maximiliano Baviera.

Descartes tiene una vocación universal del saber, le interesa cualquier tema de conocimiento y hace aportaciones nuevas en campos muy diversos. Es innovador en el enfoque de los problemas creando nuevos métodos y sistematizando. Su método está basado en la forma de razonar propia de la geometría.

Renato Descartes (1596-1650) es generalmente conocido más como filósofo que como matemático, aunque su filosofía es discutible mientras que sus Matemáticas no lo son. (Bell, 1985, p. 147)

Descartes realizó una variedad de estudios en diferentes áreas del saber, una mente inquieta como la de este personaje bastaba que dedicara tiempo a cierto tema para poder hacer cuestiones o aportaciones novedosas, hizo trabajos en óptica, tales como la ley de refracción de la luz, donde comparte créditos con el Willebrord Snell.

Su obra principal es *Discurso del Método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias*, en la cual expone sus ideas filosóficas sobre la ciencia y la manera de llegar a la verdad. Constituía, en realidad, el prólogo a tres ensayos: *Dióptrica*, *Meteoros* y *Geometría*; agrupados bajo el título conjunto de *Ensayos filosóficos*.



En esta obra, Descartes expone de forma muy breve los fundamentos de su nuevo método, los cuales ha encontrado en la lógica, en el análisis geométrico y en el álgebra. Estos fundamentos se resumen en tan sólo cuatro reglas (Frondizi, 1974, p. 81-83):

El primero, no admitir jamás como verdadera cosa alguna sin conocer con evidencia que lo era.

El segundo, dividir cada una de las dificultades que examinare, en tantas partes fuese posible y en cuantas requiriese su mejor solución.

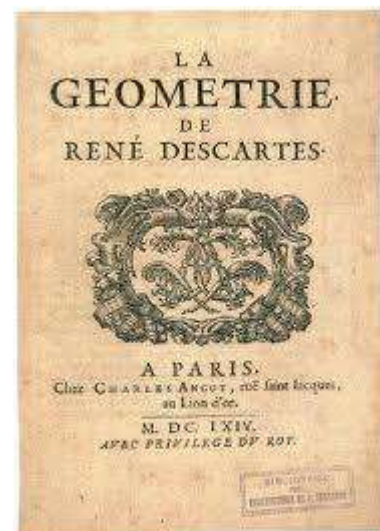
El tercero, conducir ordenadamente mis pensamientos, empezando por los objetos más simples y más fáciles de conocer, para ir ascendiendo poco a poco, gradualmente, hasta el conocimiento de los más compuestos, y suponiendo un orden entre los que no se preceden naturalmente unos a otros.

Y el último, hacer en todo enumeraciones tan completas y revisiones tan generales, que estuviera seguro de no omitir nada.

Al ver sus obras, vemos que todas tienen un toque filosófico; los temas que se abordan en esta tesis son sobre la Geometría, tema que Descartes aborda dentro de su obra *el discurso del método*. En este tema aborda ideas y nociones sobre la Geometría analítica y el Álgebra; este es el único libro de Matemáticas de Descartes, aunque también comunicó en cartas otras ideas Matemáticas. Su formación filosófica tuvo una gran influencia en su obra científica.

La Géometrie

En este ensayo, Descartes aplicó su método a la Geometría y a la 'nueva' Álgebra; a la primera la criticaba debido a que para realizar una demostración en Geometría euclídea, era necesario dar argumentos nuevos e ingeniosos, problemas diferentes requieren 'métodos' diferentes de solución, aunque su forma organizada fue una virtud que siempre reconoció. Su método pretendía aplicarse en general para cualquier problema geométrico, sin que hubiera muchas diferencias entre las soluciones de problemas diferentes. Esto lo logra al introducir una manera de identificar variables cuyas relaciones cuantitativas serán expresadas algebraicamente, facilitando la descripción de los lugares geométricos y sus propiedades; las demostraciones euclídeas son sustituidas por el cálculo algebraico.



Un comentario no favorable a Descartes, por parte de los historiadores, es la forma poco didáctica de exponer sus nuevas ideas; era un mal expositor y no se preocupó por ordenar y sistematizar su trabajo como se esperaría cuando se introducen nuevos métodos; tampoco entró en detalles para esclarecer sus argumentos. Se tiene la impresión de que Descartes escribió *La géométrie* no para explicar sino para alardear la potencia de su método aplicándola a problemas difíciles.

También se llegó a creer que Descartes no hizo una exposición clara de sus ideas, para que sólo fueran comprendidas por los geómetras más destacados de su época. Posiblemente esto influyó para que su trabajo no fuera bien acogido y por ello mismo no hubo muchas ediciones de su *Géométrie* durante el siglo XVII.

A continuación presentamos algunos de los problemas más interesantes del libro citado; en ellos se pueden apreciar los aportes de Descartes a la Geometría analítica.

Libro I. Problemas que se pueden construir empleando sólo circunferencias y líneas rectas

En el libro I de *La Géométrie* se presenta la forma de resolver algunos problemas geométricos usando Álgebra; entre estos, se encuentra la multiplicación, división y obtención de raíces cuadradas de números. En los dos primeros, la idea principal es usar el Teorema de Tales al hacer una partición de un segmento que es la unidad; mientras que para la raíz, hace uso de las propiedades de la circunferencia.

Descartes comenta que cualquier problema en Geometría puede reducirse, fácilmente, a términos tales que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción. Para encontrar las líneas requeridas, es necesario sumar o restar otras líneas; o de otra forma, se toma una línea que llamamos unidad, y se relaciona tanto como se pueda con números.

Es conveniente señalar que al plantear una ecuación, Descartes remarca la importancia de las *dimensiones* de los términos que aparecen en esta. Por ejemplo a^3 tiene las mismas dimensiones que ab^2 o b^3 ; siempre y cuando la unidad provista no se determine por las

condiciones de los problemas, lo cual no ocurre cuando la unidad se determina, pues en este caso la unidad puede siempre entenderse, por ejemplo $a^2b^2 - b$, aquí se sobre entiende que el primer término está dividido una vez por la unidad.

Aquí también resuelve problemas algebraicos que pueden resolverse con el uso de la Geometría. Resuelve algunos problemas particulares, como $z^2 = az + b^2$, $y^2 = -ay + b^2$; incluso problemas de grados mayores como $x^4 = -ax^2 + b^2$. Para la construcción de estos problemas, la idea esencial es relacionarlos con el Teorema de la potencia de un punto, en su versión para una recta secante y otra tangente, en el que se establece que si P es un punto en el plano y se fija una circunferencia con centro O , entonces para cualquier línea que pase por P y corte a la circunferencia en dos puntos A , B , se cumplirá que $PA \cdot PB = PT^2$.

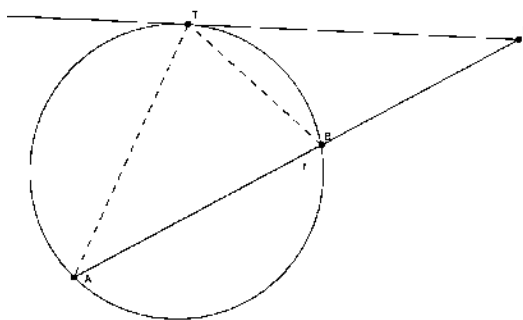


Figura 5.1 Ilustración del teorema de la potencia de un punto.

En una de las partes centrales de este libro, Descartes describe los pasos a seguir en la resolución de los problemas; dice:

Suponemos primero que la solución se ha efectuado ya, y damos nombres a todas las líneas que parezcan necesarias para su construcción,- tanto las conocidas como las desconocidas. A continuación sin distinguir entre líneas conocidas y desconocidas, debemos desembrollar la dificultad de cualquier manera que muestre, de forma más natural, las relaciones entre las líneas, hasta que encontremos posible expresar una sola cantidad de dos formas. Debemos de encontrar tantas ecuaciones como se supone que hay líneas desconocidas, si hay varias ecuaciones debemos de

usar cada una en orden ya sea considerándola sola o comprándola con otras.
(Descartes, 1997, p. 19)

Dando un poco de orden al método descrito por Descartes, podemos describirlo en la forma siguiente:

- Suponemos primero que el problema está resuelto y damos nombre a todas las líneas que parezcan necesarias para su construcción; tanto conocidas como desconocidas.
- Después, sin distinguir entre líneas conocidas y desconocidas. Se descompone el problema de manera que las relaciones entre líneas aparezcan de forma más natural, de modo que logremos expresar una sola cantidad de dos formas, lo cual conduce a la creación de las ecuaciones y debiendo encontrar tantas ecuaciones como líneas desconocidas haya. En caso de no poderse realizar esto, debemos considerar que el problema no está bien definido y así, podemos replantear y crear nuevas líneas conocidas, que nos sirvan para la determinación de alguna ecuación para la línea desconocida.
- A partir de las relaciones obtenidas, se deben de utilizar en orden para poder ir reduciendo el número de líneas desconocidas, hasta quedar sólo una de estas igualdades o alguna potencia de esta; o como suma o diferencia de dos conocidas o proporciones de las mismas.

De este modo todas las cantidades desconocidas pueden expresarse en términos de una sola, siempre que el problema pueda construirse por medio de circunferencias y líneas rectas o incluso secciones cónicas, o curvas de grado no mayor a tercero o cuarto grado.

Este proceso lo usa en la solución del problema de Pappus, con lo que, Descartes pretende exponer la eficacia de su método; este es el contenido principal del libro I. En *La Géometrie* no se presentan partes importantes del desarrollo de la solución, las cuales presentamos utilizando la notación actual.

Problema de Pappus

Este problema fue planteado entre el siglo III y IV dC., los griegos no pudieron resolverlo y continuó sin solución hasta que Descartes lo eligió como uno de los problemas principales para mostrar la potencia de su nuevo método. Lo enuncia de la siguiente manera:

Teniendo tres, cuatro o un número mayor de rectas dadas en posición, se intenta hallar, en primer lugar, un punto desde el cual se pudiesen trazar tantas líneas rectas, una sobre cada una de las dadas, formando ángulos dados, de forma que el rectángulo formado por dos de las trazadas desde el mismo punto guarde una proporción dada con el cuadrado de la tercera, en el caso de que no haya sino tres; o bien con el rectángulo de las otras dos si no hay más que cuatro. O bien, si hay cinco, que el paralelepípedo rectángulo formado por tres guarde la proporción dada con el paralelepípedo construido sobre las dos restantes y otra línea dada... De este modo tal cuestión puede hacerse extensiva a cualquier otro número de rectas. A continuación, y puesto que existe una infinidad de puntos que pueden cumplir lo que se trata de hallar, es necesario conocer y trazar la curva en la que tres o cuatro líneas rectas dadas, se encuentran en una de las secciones cónicas, pero no intenta determinarla o describirla, al igual que tampoco intenta explicar aquéllas en que deben encontrarse todos estos puntos cuando la cuestión es planteada para un número mayor de rectas. (Chica, 2001, p. 75)

Descartes presenta una demostración del teorema para el caso de cuatro rectas y, más adelante, abordará algunos casos para más rectas. A continuación presentamos el enunciado y la demostración de Descartes, pero con adiciones nuestras para hacerla más accesible.

Problema de Pappus para cuatro rectas

Enseguida presentamos una versión más ordenada y actualizada del teorema:

Sean AB , AD , EF , GH las líneas dadas *en posición*; es decir, se conocen los ángulos entre ellas así como los puntos de intersección. Debe probarse que el lugar geométrico de los puntos C , desde los cuales se trazan los segmentos CB , CD , CF y CH de manera que los ángulos CBG , CDA , CFS , CHT sean dados, y que la razón del producto de la multiplicación de un par de estos segmentos, guarde una proporción dada con el producto de la multiplicación de los otros dos, es una cónica (Figura 5.2.).

Hay seis maneras de establecer la última condición, una de las cuales se puede expresar algebraicamente de la siguiente manera

$$\frac{CF \cdot CD}{CB \cdot CH} = \lambda \text{ ó } CF \cdot CD = \lambda CB \cdot CH,$$

donde λ es la razón dada.

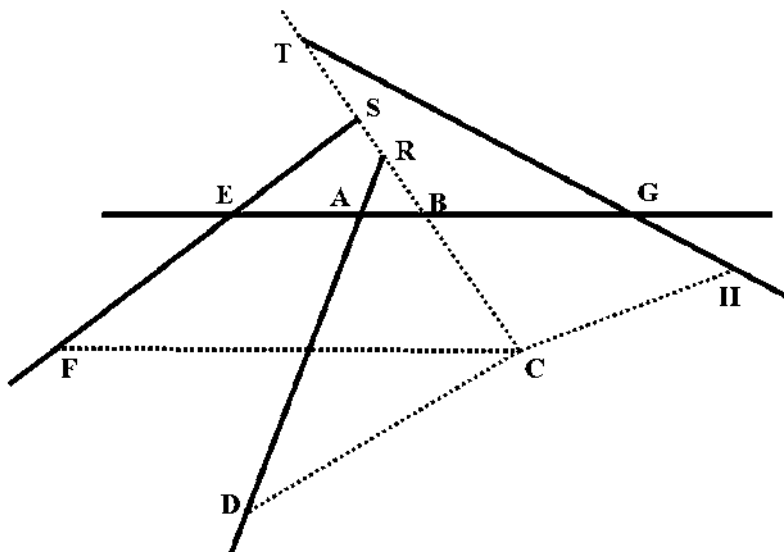


Figura 5.2. Representación del problema de Pappus para cuatro rectas.

Solución:

Denotaremos la longitud AB por x y BC por y , y tomemos $\lambda=1$, como lo hace Descartes. A continuación se encuentran las longitudes de los segmentos requeridos en función de estos dos.

Observemos primero que conocemos todos los ángulos del $\triangle ARB$; de este modo, aplicando la Ley de senos obtenemos

$$\frac{BR}{\text{sen } \angle BAR} = \frac{AB}{\text{sen } \angle ARB},$$

los denominadores de la igualdad son valores constantes dados, por las condiciones iniciales del problema, entonces hagamos $b = \text{sen } \angle BAR$, $z = \text{sen } \angle ARB$.

Despejando BR , obtenemos $BR = \frac{bx}{z}$. Por otro lado sabemos que $CR = CB + BR$, de aquí que $CR = y + \frac{bx}{z}$. Ahora veamos en el $\triangle DRC$ también conocemos todos los ángulos, de este se tiene

$$\frac{CD}{\text{sen } \angle DRC} = \frac{CR}{\text{sen } \angle CDR},$$

llamemos $c = \text{sen } \angle CDR$, $\text{sen } \angle DRC = \text{sen } \angle ARB$. Despejando CD , que es una de las rectas desconocidas, llegamos a

$$CD = \frac{z * CR}{c} = \frac{z}{c} \left(y + \frac{bx}{z} \right),$$

de ahí que

$$CD = \frac{zy}{c} + \frac{bx}{c}. \quad (1)$$

De igual forma para el $\triangle BES$ obtenemos la siguiente relación

$$\frac{BS}{\text{sen } \angle BES} = \frac{BE}{\text{sen } \angle BSE}.$$

Sea $e = \text{sen } \angle BES$, $d = \text{sen } \angle BSE$ y $AE = k$, de este modo tenemos que $BE = k + x$, y uniendo esta relación con la proporción antes descrita y despejando BS , obtenemos que

$BS = \frac{(k+x)e}{d}$. Todo lo anterior con el fin de obtener la relación para la recta CS , dado que $CS=BC+ BS$, entonces tenemos que

$$CS = \frac{dy+ex+ke}{d}.$$

De manera similar tenemos para el ΔCFS obtenemos la proporción siguiente

$$\frac{CF}{\text{sen} < BSE} = \frac{SC}{\text{sen} < CFS},$$

hagamos $m = \text{sen} < CFS$, y despejemos CF , aquí obtenemos

$$CF = \frac{dy+ex+ke}{m}. \quad (2)$$

Después para el ΔBGT obtenemos

$$\frac{BG}{\text{sen} < BTG} = \frac{BT}{\text{sen} < BGT},$$

despejando BT , tomando a $n = \text{sen} < BTG$, $s = \text{sen} < BGT$, y haciendo $AG = l$, tenemos que $BG = l - x$, de aquí que

$$BT = \frac{sl - sx}{n};$$

además notemos que $CT = BC+BT$, es decir, $CT = \frac{ny+sl-sx}{n}$ esto con el fin de poder obtener la relación correspondiente a la recta CH , la cual obtenemos de analizar el ΔCHT del que obtenemos la siguiente relación

$$\frac{CT}{\text{sen} < CHT} = \frac{CH}{\text{sen} < BTG}.$$

En esta última hacemos $p = \text{sen} < CHT$, despejamos CH y realizamos el cambio de CT por la relación antes encontrada y obtenemos

$$CH = \frac{ny+sl-sx}{p}. \quad (3)$$

De esta forma hemos obtenido las ecuaciones correspondientes a cada una de las rectas que se deben trazar desde el punto C , ahora solo nos queda usar la última hipótesis de las proporciones entre estas rectas

$$\overline{CF} * \overline{CD} = \overline{CB} * \overline{CH},$$

al realizar las sustituciones correspondientes, tenemos

$$\left[\frac{dy + ex + ke}{m} \right] \left[\frac{zy}{c} + \frac{bx}{c} \right] = y \left[\frac{ny + sl - sx}{p} \right].$$

Haciendo las operaciones algebraicas correspondientes y pasando todos los términos a un solo miembro de la ecuación llegamos a

$$\frac{eb}{mc}x^2 + \left[\frac{dz}{mc} - \frac{n}{p} \right]y^2 + \left[\frac{db}{mc} + \frac{ez}{mc} + \frac{s}{p} \right]xy + \frac{bek}{mc}x + \left[\frac{kze}{mc} - \frac{sl}{p} \right]y = 0,$$

la cual, al hacer las consideraciones correspondientes podemos reducir a la ecuación general de las cónicas

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = 0.$$

En la que no está el término constante, lo que indica que la cónica pasa por el ‘origen de coordenadas’, esto es por el punto A (Figura 5.2).

Cabe mencionar que se utilizó el software Geogebra para hacer visible lugar geométrico que genera el punto C ; sin embargo, no se tuvo éxito debido a que el punto C está sujeto a tres ó cuatro condiciones diferentes (dependiendo del problema que se tenga en cuestión) lo cual no se puede hacer en Geogebra, aunque no descartamos la posibilidad de que exista algún software que permita hacerlo.

Libro II. Sobre la naturaleza de las líneas curvas.

En este libro, Descartes comienza hablando sobre la clasificación que hacían los antiguos para la resolución de problemas de geometría, que consistía en problemas planos, sólidos y lineales. Esta clasificación obedece a que algunos problemas se podían resolver usando únicamente rectas y circunferencias; otros necesitaban alguna de las secciones cónicas; y los últimos requerían curvas más complejas, cuya construcción no se lograba con regla y compás, se necesitaban otros instrumentos como el “mesolabio” u otros mecanismos para el trazo de curvas como la *cuadratriz* y la *espiral*, utilizadas por los griegos para resolver problemas como la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Estas son generadas por dos movimientos por separado, lo que hace que no se puedan describir con exactitud. Por esta razón, Descartes no las incluye dentro de su obra de *La Géométrie*.

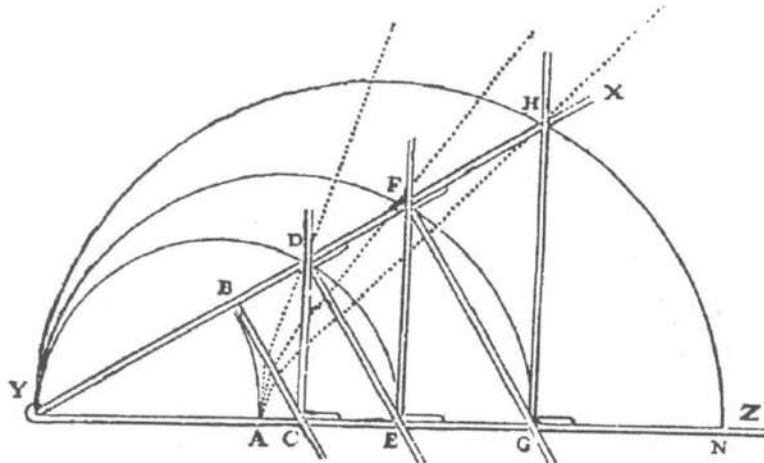
Bell (1985) explica la clasificación que hace Descartes de la siguiente manera:

Descartes agrupó las curvas en dos clases, las *geométricas* y las *mecánicas*... una curva es geométrica o mecánica según que (en nuestra terminología) dy/dx sea función algebraica o trascendente. (p. 151)

Aunque esta definición ya no se utiliza ahora, puede dejar más clara la idea que tenía Descartes su clasificación.

Como se mostró en el problema de Pappus, Descartes era capaz de escribir la ecuación de los lugares geométricos mediante expresiones algebraicas, lo que le llevó a hacer la observación de que, para hacer una clasificación de las líneas curvas no basta con solo quedarnos en la forma de construcción de las mismas, sino que es importante obtener la expresión algebraica correspondiente. Cabe mencionar que en el problema de Pappus, la construcción del lugar geométrico no se hace con un instrumento particular, sino que se genera a partir de las condiciones geométricas establecidas.

Descartes aborda el caso del *mesolabio*, inventado por Eratóstenes en el siglo III aC., instrumento que sirve para encontrar medias proporcionales y construir curvas complejas pero que se pueden expresar algebraicamente y por tanto, son geométricas.



De este modo, Descartes sugiere una nueva forma de agrupar todas esas curvas geométricas y poder clasificarlas en orden:

Reconociendo el hecho de que todos los puntos de esas curvas deben de tener una relación definida con todos los puntos de una línea recta, y que esta relación debe expresarse por medio de una sola ecuación. Si esta ecuación no contiene término alguno de grado superior que el rectángulo de dos cantidades desconocidas, o el cuadrado de una, la curva pertenece a la primera y más sencilla de las clases; pero cuando la ecuación contiene uno o más términos del tercer o cuarto grado en una o ambas cantidades desconocidas la curva pertenece a la segunda clase; y si la ecuación contiene un término del quinto o sexto grado en cualquiera o ambas cantidades desconocidas, la curva pertenece a la tercera clase, y así indefinidamente. (Descartes, 1997, p. 27)

Aquí podemos ver que implícitamente la línea recta de la que habla Descartes, es lo que en nuestros días conocemos como el eje de las “ x ” en un plano cartesiano, y la relación que él pretende describir es la que nos va a permitir generar nuestros puntos en el plano que describen la curva.

Además, describe un método para determinar a qué clase pertenece una curva, mediante los siguientes pasos:

¹⁹ Es un aparato mecánico inventado por Eratóstenes, el cual permite insertar dos medias proporcionales entre dos valores dados.

1. Escoger una línea recta a la que se hará referencia para todos los puntos de la curva.
2. Fijamos un punto en la recta de referencia, en él que se centra la investigación.
3. Tomamos un punto en la curva y comenzamos a trazar líneas que nos permitan encontrar la relación necesaria.

Esto permitirá obtener la ecuación de dicha curva. Descartes afirma que su método funciona sin importar el punto que se tome, la ecuación siempre será del mismo grado y por tanto perteneciente a la misma clase; aunque no da la demostración.

Descartes propone el siguiente problema para ilustrar este método; se trata de encontrar a qué clase pertenece esta curva:

Suponga que se va a describir la curva EC por la intersección de la regla GL y la figura plana rectilínea $CNKL$, cuyo lado KN se produce indefinidamente en la dirección de C , y el cual, moviéndose en el mismo plano de forma tal que su lado siempre coincida con alguna parte de la línea BA (producida en ambas direcciones), da a la regla GL un movimiento rotatorio alrededor de G (estando la regla articulada a la figura $CNKL$ en L). (Descartes, 1997, p. 27)

El problema consiste en encontrar la ecuación de la curva que se genera a partir de la intersección de dos semirectas, una es GL fija en G (que gira sobre este) y que se prolonga hacia la recta AB , que la corta en L , la otra semirecta es la continuación del lado KN del triángulo rectángulo “fijo” NKL , el cual se desliza junto con L ; de este modo, el punto C es la intersección de ambas semirectas cuyo lugar geométrico es la curva CE .

En la Figura 5.4 se presenta un dibujo similar al obtenido por Descartes, elaborado con Geogebra. Más abajo damos una explicación más clara sobre la construcción que se deriva de la cita anterior.

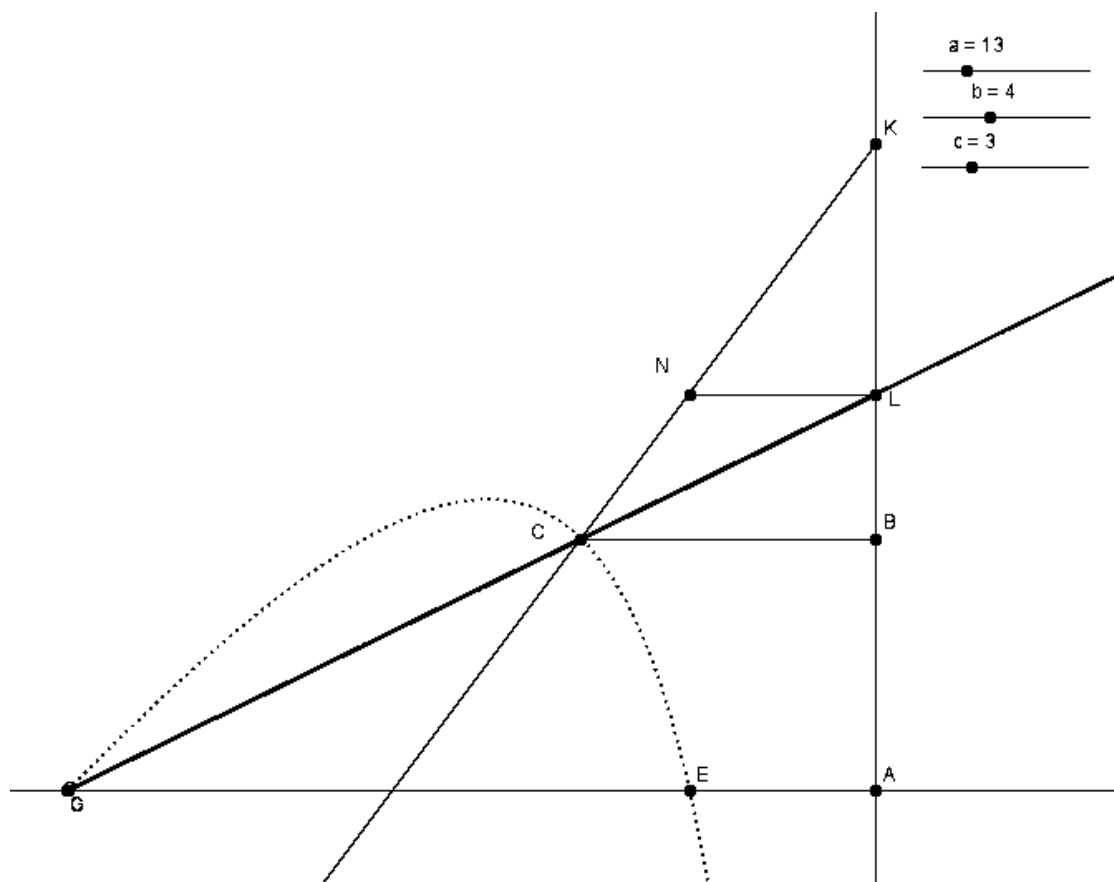


Figura 5.4. Lugar geométrico generado por el punto C .

Construcción:

- 1) Sean PQ y ST dos rectas perpendiculares que se intersecan en A ;
- 2) Sobre PR y a la izquierda de A localizamos un punto G (fijo) tal que $AG = a$
- 3) Por G hacemos pasar una recta que corte a ST en L ; en la prolongación de AL determinamos el punto K , tal que $LK = b$; luego trazando el segmento $LN=c$ perpendicular a ST completamos el triángulo rectángulo $\triangle LKN$.
- 4) Prolongamos indefinidamente KN en la dirección de N , de manera que corte a GL en C . Desde este punto trazamos el segmento CB , perpendicular a ST .

En esta construcción el giro de la semirecta GL (alrededor de G) ocasiona un deslizamiento del punto L sobre ST , de modo que el triángulo $\triangle LKN$ también se desplaza (sin deformarse) hacia arriba o hacia abajo; el punto C irá cambiando de lugar. Este cambio está

determinado por el cambio en los segmentos AB y BC , cuyas longitudes denotamos por y y x , respectivamente.

Para determinar a qué clase de ecuación corresponde el lugar geométrico que genera el punto C , debemos hallar relaciones entre las variables y los componentes que determinan tales puntos.

De 3) y 4) los segmentos NL y CB son paralelos y, por tanto, los triángulos $\triangle CBK \sim \triangle NLK$, de donde $\frac{CB}{NL} = \frac{BK}{LK} = \frac{CK}{NK}$, despejando BK de la primera igualdad y sustituyendo los valores de CB , NL y LK definidos anteriormente, se obtiene $BK = \frac{b}{c}x$.

De la Figura 5.4, $BL = BK - KL$, entonces $BL = \frac{b}{c}x - b$

Por otro lado tenemos que el segmento $AL = AB + BL$, de este modo tenemos que

$$AL = y + \frac{b}{c}x - b.$$

Ahora analizando la semejanza entre $\triangle GLA$ y $\triangle CLB$, $\frac{GL}{CL} = \frac{LA}{LB} = \frac{GA}{CB}$, de donde se obtiene que $BC * AL = AG * BL$; de este modo, al sustituir las igualdades antes encontradas y despejando el valor de x^2 , obtenemos

$$x^2 = (a + c)x - \frac{c}{b}yx - ac,$$

En este caso, el trazo de la curva se hace mediante la intersección de dos rectas que se mueven, una en rotación y la otra en traslación; es decir, se trata de una curva mecánica que no es tan simple, pero que conduce a una ecuación de segundo grado.

También es importante observar que, en la solución del problema, Descartes elige dos rectas perpendiculares para establecer las variables de las cuales van a depender los puntos del lugar geométrico analizado, lo cual es muy parecido a lo que ahora se hace. Sin embargo, Descartes no utiliza números negativos ni escalas como aparecen en nuestro dibujo (esto lo hace automáticamente el software).

Descartes retoma el análisis del problema de Pappus, para el caso en el que se tienen más de cuatro rectas, en cuanto a la clase de curva que se genera, así:

Cuando no hay más de ocho líneas dadas, la ecuación es a lo mucho bicuadrática, y por lo tanto, la curva resultante pertenece a la clase II o a la clase I. cuando no hay más de doce líneas dadas, la ecuación es de sexto grado o menor y, por lo tanto, la curva requerida pertenece a la clase III, o aún más baja, y así sucesivamente. (Descartes, 1997, p. 29)

Esta clasificación es fácil de deducirse de la relación que existe entre los segmentos que salen desde el punto *C* hacia las rectas dadas, ya que allí podemos ver que entre más líneas tengamos sucede que se va incrementando el grado de la ecuación resultante; además, debemos de notar que en ciertas posiciones de las rectas, pueden eliminarse términos reduciendo el grado de la ecuación.

Descartes continúa con ejemplos para generar las diferentes cónicas, a partir del problema de Pappus para cuatro rectas, y también describe cómo deben ser los coeficientes y analiza casos particulares, obteniendo relaciones que dan características de las diferentes cónicas, tales como el lado recto, vértices, etc.

Descartes concluye el trabajo respecto al problema de Pappus de la siguiente manera:

He mostrado, además, que a lo que he llamado la primera clase de las curvas no contiene más que a la circunferencia, la parábola, la hipérbola y la elipse. Fue esto lo que quise demostrar (Descartes, 1997, p. 37)

Entre los mayores aportes del trabajo de Descartes, está el uso y aplicación que le dio al Álgebra; al utilizar variables para designar valores, posteriormente le ayudan a escribir la ecuación de los lugares geométricos en referencia a rectas elegidas convenientemente. Esto es lo que hoy conocemos como sistema de referencia; el caso más sencillo son los ejes x y y . Sin embargo, Descartes no siempre tomaba sus rectas de referencia perpendiculares, por lo que sus sistemas podrán ser oblicuos y con la limitación de que únicamente consideraba valores positivos.

Además, la escritura algebraica utilizada por Descartes es muy parecida a la que usamos en la actualidad. En la Figura 5.5, se ilustra una operación de su libro original; para indicar potencias de un término, repite varias veces el mismo.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2ax^3 + \frac{3}{2}aa'xx + \frac{1}{2}a^3x + \frac{1}{8}a^4 \\
 - 2ax^3 - 3aa'xx - \frac{3}{2}a^3x - \frac{1}{4}a^4 \\
 + 2aa'xx + 2a^3 + \frac{1}{2}a^4 \\
 - cc - acc - \frac{1}{4}aa'cc \\
 - 2a^3 - a^4 \\
 + a^4 \\
 \hline
 x^4 + \frac{1}{2}aa'xx - a^3 + \frac{5}{8}a^4 = 0 \\
 - cc - acc - \frac{1}{4}aa'cc
 \end{array}$$

Figura 5.5. Operaciones algebraicas de Descartes.

Las normales y las tangentes

Descartes aborda el tema de las rectas normales y tangentes a una curva geométrica; para ello, establece que sólo es necesario encontrar la relación de los puntos de la curva con las líneas rectas, como se muestra en la Figura 5.6.

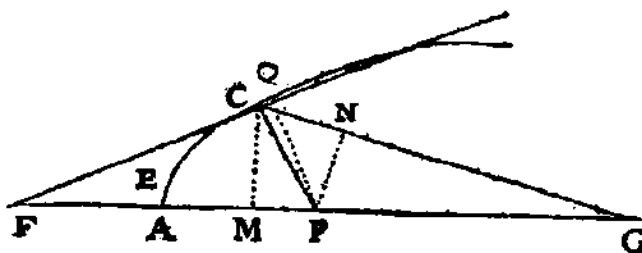


Figura 5.6.

El problema consiste en trazar la recta normal a la curva CE dada, que pasa por el punto C , para ello, buscamos una relación entre las líneas conocidas y desconocidas; denota a los segmentos: $MA = y$, $CM = x$, $PC = s$, $PA = v$. Ahora se traza la circunferencia con centro en P y radio s ; el único punto de corte con la curva será C , de este modo la ecuación de la

circunferencia será $x^2 + (y - v)^2 = s^2$. El problema se reduce a localizar el punto P , para lo cual únicamente debemos de conocer el valor de v , teniendo por conocida la posición del punto C y la ecuación de la curva.

Esto representa un gran avance en la solución ya que los puntos de la curva deben satisfacer una ecuación algebraica específica de la forma $f(x,y) = 0$; de este modo, el sistema que se obtiene de las expresiones anteriores, a saber $x^2 + (y - v)^2 = s^2$ y $f(x,y) = 0$, el cual debe tener como única solución las coordenadas del punto C , esto nos permitirá efectuar el cálculo del valor de v .

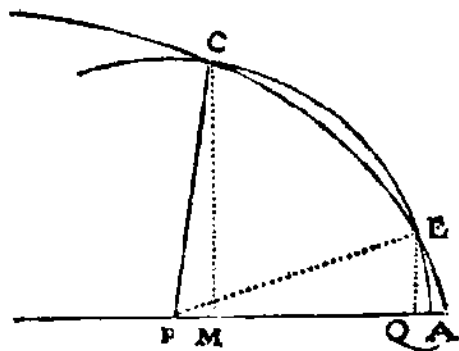


Figura 5.7.

Posteriormente, comienza el análisis y justificación de las propiedades de las líneas normales a una curva, Descartes lo hace trazando una circunferencia con centro en P y radio PC , la cual corta a la curva en un solo punto. Ahora bien, si el punto P estuviera más cerca de A , y tomando el mismo radio tendríamos que corta a la curva en dos puntos diferentes, a saber C y E ; calcula los correspondientes valores de lo que denota como y , con el método para calcular la raíz cuadrada, y a cada uno de estos valores le llama raíz, conforme los puntos estén más cerca, estas raíces irán decreciendo hasta ser iguales. También analiza los posibles casos para el signo que deben tener o cómo deben de comportarse. Además, establece un método que consiste en comparar dos ecuaciones siempre y cuando estas tengan raíces iguales, con ello se podrá encontrar el valor de v en el problema inicialmente planteado:

... cuando una ecuación tiene dos raíces iguales, su miembro izquierdo debe ser similar de forma a la expresión obtenida de multiplicar por sí misma la diferencia

entre la cantidad desconocida y una cantidad conocida igual a ella; y entonces si la expresión resultante no es de grado tan alto como la ecuación original, multiplicándola por otra expresión que la hará del mismo grado. Este último paso hace que las dos expresiones correspondan término a término. (Descartes, René, 1997, p. 22)

Para ejemplificar este método de Descartes, analicemos el problema para la curva

$$y^2 = x + 1$$

y determinemos la normal en el punto $(1, \sqrt{2})$. Tenemos

$$(x - v)^2 + y^2 = s^2 \quad \text{y} \quad s^2 = (1 - v)^2 + (\sqrt{2})^2$$

Igualando ambas ecuaciones

$$(x - v)^2 + y^2 = (1 - v)^2 + 2.$$

Desarrollando y realizando las operaciones llegamos a

$$x^2 - 2vx + y^2 = -2v + 3,$$

sustituyendo y^2 de la ecuación de la curva

$$x^2 + (-2v + 1)x + 2v - 2 = 0. \quad [*]$$

Descartes resuelve esta ecuación con un método propio; compara los coeficientes de polinomios que comparten alguna raíz, es fácil ver que el polinomio [*] tiene solución $x = 1$, de este modo se construye un nuevo polinomio que tenga esa raíz. Sea $(x - 1)^2$ el nuevo polinomio, que comparte una raíz con el polinomio de interés, al desarrollarlo obtenemos

$$x^2 - 2x + 1.$$

Ahora se comparan los coeficientes de ambos y se obtiene

$$-2v + 1 = -2,$$

de donde

$$v = \frac{3}{2}.$$

De aquí se obtiene el punto (1.5,0) por donde debe de pasar la normal, que corresponde a las coordenadas del punto B, como se muestra en la Figura 5.8.

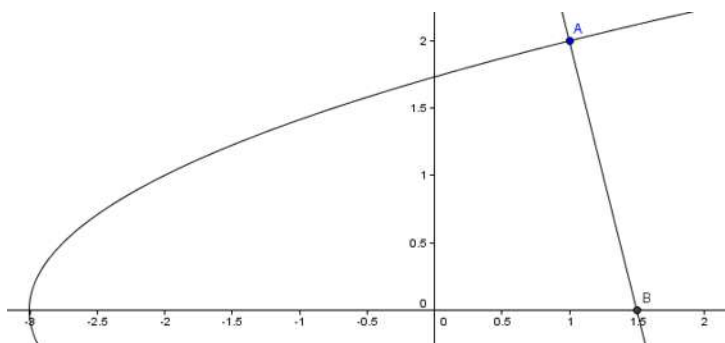


Figura 5.8.

Libro III. Para la construcción de problemas sólidos o supersólidos

Descartes dedica este libro a la solución de ecuaciones y es más bien un tratado sobre las raíces de polinomios (término que no usaba). Algunos aportes que presenta, aparentemente son obtenidos mediante procedimientos puramente algebraicos y, como es característico de su obra, algunos de manera incompleta y/o confusa.

Dedica una parte importante de este libro a la solución ecuaciones de tercer y cuarto grado, mediante intersección de curvas, para lo cual en un primer momento expondremos brevemente del contenido básicamente algebraico.

Descartes da la siguiente definición de ecuación:

Una ecuación consiste en varios términos, algunos conocidos y otros desconocidos, algunos de los cuales son juntos iguales a los demás; o, más bien, todos los cuales tomados juntos son iguales a nada. (Descartes, 1997, p. 58)

A continuación presentamos las siguientes propiedades:

- *Toda ecuación puede tener raíces distintas como el número de dimensiones de la cantidad desconocida en la ecuación.*

Descartes muestra que se pueden generar ecuaciones de grado n , multiplicando n factores lineales, en donde las soluciones están determinadas por cada uno de los factores lineales:

Por ejemplo: $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$ da lugar a una ecuación de grado 3:

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0$$

que tienen tres raíces a , b y c (en este caso positivas).

- *Sucede a menudo que algunas de las raíces son falsas o menos que nada. Por ejemplo como en el caso anterior, si a , b o c son negativos. Descartes sólo reconoce las raíces positivas.*
- *Una ecuación que tenga varias raíces es divisible por un binomio formado por la cantidad desconocida menos una de sus raíces. Es decir, si a es raíz, entonces la ecuación es divisible por $x - a$.*
- *Si una ecuación no es divisible por un binomio de la forma $x - c$, entonces tal ecuación no tiene como raíz a c . Básicamente se trata de lo que ahora conocemos como Teorema de la raíz*
- *Una ecuación puede tener tantas raíces verdaderas como cambio de signo contenga; y tantas raíces falsas como el número de veces que se encuentren en sucesión dos positivos o dos negativos. Teorema conocido como regla de los signos.*

Por ejemplo, en la ecuación $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$, hay tres raíces verdaderas (2, 3 y 4) y una falsa (-5)

- *Si en una ecuación, se cambian sólo los signos de los términos en posición par, entonces las raíces verdaderas se convierten en falsas y viceversa. Por ejemplo, de la ecuación anterior obtenemos $x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$, cuyas raíces son 5, -2, -3 y -4.*

- Si una ecuación tiene como raíces $a, b, c, \dots$, se puede construir otra ecuación en la que tenga las mismas raíces aumentadas o disminuidas en la misma cantidad t , basta hacer el cambio de variable $x = y \pm t$ (se toma el $-$ si se desea aumentar y el $+$ si se desea disminuir). Por ejemplo, si en la ecuación anterior, se sustituye $x = y - 3$ se obtiene la ecuación $y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0$, cuyas raíces son: 5, 1, 0, -1.
- Descartes no consideraba al 0 como raíz y por ello convertía la ecuación anterior en $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$, la cual ahora sólo tenía tres raíces.
- Descartes muestra que otros cambios de variable pueden transformar ecuaciones que, originalmente tienen raíces racionales o irracionales, en ecuaciones que tienen raíces enteras.
- Ni las raíces verdaderas ni las falsas son siempre reales; algunas veces son imaginarias; es decir, aunque siempre podemos concebir tantas raíces para una ecuación como yo lo he asignado, no hay, sin embargo, una cantidad definida correspondiente a cada ecuación así concebida. Así, aunque podemos concebir que la ecuación $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ tenga tres raíces, hay sólo una real, 2, mientras que las otras dos, no importa cuánto las aumentemos, disminuyamos o multipliquemos de acuerdo a las reglas recientemente expuestas, permanecen siempre imaginarias.

De los puntos anteriores se desprende una clasificación de las raíces de una ecuación: a) pueden ser reales o imaginarias, b) las reales abarcan todos los números reales diferentes de cero (racionales e irracionales), estas se dividen en falsas y verdaderas (negativas y positivas)

Resolución de ecuaciones de tercero y cuarto grado

Aunque estos problemas ya habían sido resueltos, como se ha expuesto en el Capítulo 3, Descartes quiso probar su nuevo método para encontrar otros caminos.

Un aspecto que caracteriza el trabajo de Descartes sobre la resolución de ecuaciones de grados superiores es que logra una relación de suma importancia para el desarrollo de la geometría analítica:

...se establece una correspondencia inequívoca entre las curvas planas y las ecuaciones de dos variables x, y : para cada curva hay una ecuación determinada $f(x,y)=0$, y para cada ecuación $f(x,y)=0$ hay una curva determinada. (Bell, 1985, p. 149)

De acuerdo con Bell, Descartes ya había notado que su método se podía generalizar a tres o más dimensiones:

...vio Descartes que su método se aplicaba igualmente a las superficies, siendo en este caso la correspondencia entre superficies definidas geoméricamente y ecuaciones de tres variables. Pero no se ocupó de desarrollar esto. (Ibid. p. 149)

Descartes propone un método con el que pretende establecer la resolubilidad de una ecuación de cualquier grado:

Primero, trate de poner la ecuación dada en la forma de una ecuación del mismo grado, obtenida al multiplicar juntas otras dos, cada una de un grado más bajo. Si, después de que se hayan intentado todas las formas posibles ninguna tuviera éxito, entonces es seguro que la ecuación dada no puede reducirse a una más simple. (Descartes, 1997, p. 29)

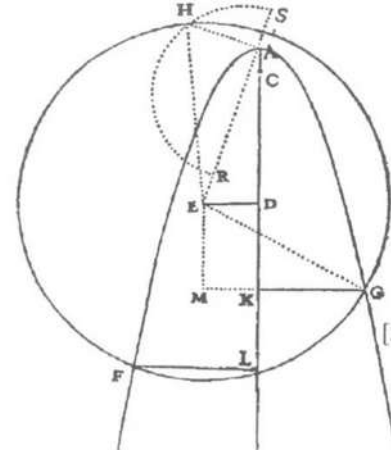
Este método es una generalización ingenua de lo que él pudo hacer para el caso de las ecuaciones de tercero y cuarto grado con ayuda de las cónicas, y establece:

Ahora, cuando está claro que el problema propuesto es sólido, si la ecuación de cuya solución tal problema depende es de cuarto grado o sólo del tercero, sus raíces siempre pueden encontrarse mediante cualquiera de las secciones cónicas, o incluso mediante alguna parte de ellas, no importa cuán pequeña, tan solo con circunferencias y líneas rectas. Me contentaré con dar aquí una regla general para encontrarlas todas mediante una parábola, pues es ésta en algunos aspectos, la más simple de estas curvas. (Descartes, 1997, p. 70)

El método que propone Descartes lo podemos reducir en las siguientes instrucciones: primero debemos de quitar el segundo término de la ecuación propuesta para llevarla a la forma $z^3 = \pm apz \pm a^2q$, si es de tercer grado, o $z^4 = \pm apz^2 \pm a^2qz \pm a^3s$, si es de

cuarto. Aquí debemos notar que Descartes mantiene la tendencia de que los términos de una expresión estén en la misma dimensión, así como indicar las posibilidades de suma y resta de los términos (pues aún no se concebía a los negativos como números ‘verdaderos’ y que la resta puede representarse como una suma). Si hacemos $a=1$ y tomamos los coeficientes como números reales, las ecuaciones anteriores se reducen a $z^3 = pz + q$ y $z^4 = pz^2 + qz + s$.

Para determinar las raíces de estas ecuaciones, Descartes hace uso de un proceso que, aunque involucra procedimientos algebraicos, es más geométrico y difícil. Nosotros desarrollaremos un procedimiento más apegado a la Geometría analítica actual, pero siguiendo a la idea principal de Descartes; utilizar las intersecciones de curvas de menor grado.



Resolveremos la ecuación de la forma $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm s$, recurriendo a la ecuación de una parábola con vértice en el origen y a la de un círculo con centro fuera del origen, entonces sean $y = x^2$ y $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, las ecuaciones correspondientes.

Desarrollando la ecuación del círculo obtenemos

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2,$$

sustituyendo $y = x^2$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$x^2 - 2hx + h^2 + (x^2)^2 - 2k(x^2) + k^2 = r^2.$$

agrupando los términos llegamos a que

$$x^4 + (1 - 2k)x^2 - 2hx + h^2 + k^2 - r^2 = 0;$$

el siguiente paso es que debemos de comparar los coeficientes de la ecuación anterior con los de la ecuación que pretendemos resolver, esto es, ver que

$$p = 1 - 2k,$$

$$q = -2h,$$

$$s = h^2 + k^2 - r^2.$$

De las tres ecuaciones anteriores lo que tenemos que hacer es determinar los valores de h , k , r , esto con el fin de poder graficar las ecuaciones y después de allí obtener las intersecciones para determinar los valores de las raíces, entonces las ecuaciones que debemos de resolver son

$$k = \frac{1-p}{2},$$

$$h = -\frac{q}{2},$$

$$r^2 = h^2 + k^2 - s;$$

analizando las ecuaciones anteriores, k y h siempre serán reales, sin embargo r sólo podrá ser real (positivo) si $h^2 + k^2 > s$.

Para ejemplificar el método anterior, resolvemos la ecuación

$$x^4 - 12x^3 - 159x^2 + 1322x + 3168 = 0.$$

Primero debemos de eliminar el segundo término de la ecuación anterior. Para lograr esto, hacemos el cambio de variable $x = y + 3$, sustituyendo y desarrollando obtenemos

$$y^4 - 213y^2 + 152y + 5460 = 0,$$

de aquí tenemos que $p = -213$, $q = 152$, $s = 5460$. Entonces vamos a encontrar los valores de h , k y r .

$$k = \frac{1-(-213)}{2} = 107, \quad h = -\frac{152}{2} = -76 \quad y \quad r^2 = (-76)^2 + 107^2 - 5460 = 11765;$$

de aquí deducimos que la ecuación de la circunferencia será

$$(x + 76)^2 + (y - 107)^2 = 11765.$$

Ahora debemos de calcular la intersección de la circunferencia anterior y la parábola $y = x^2$ esto nos permitirá determinar las raíces de la ecuación $y^4 - 213y^2 + 152y + 5460$. Esta

parte la realizaremos usando el Geogebra, como vemos en la Figura 5.9, se tienen las intersecciones de las curvas.

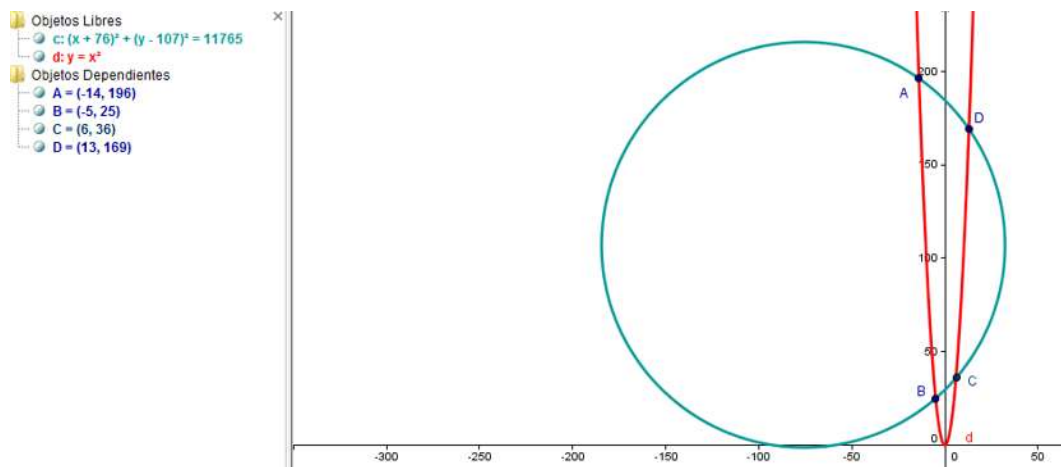


Figura 5.9.

Aquí tenemos que las soluciones son $y_1 = -14$, $y_2 = -5$, $y_3 = 6$, $y_4 = 13$; sin embargo, estas soluciones no son las de la ecuación que queríamos resolver. Nuestra ecuación original era

$$x^4 - 12x^3 - 159x^2 + 1322x + 3168.$$

Para obtener las soluciones de esta lo único que debemos de hacer es sustituir las soluciones para y en el cambio de variable que se había propuesto, a saber $x = y + 3$, de este modo obtenemos que las raíces son: $x_1 = -11$, $x_2 = -2$, $x_3 = 9$, $x_4 = 16$.

Habría que hacer notar que la solución que se obtiene mediante este método es geométrica (similar a la de Omar Jayyam) y en la mayoría de los casos sólo se podrían encontrar aproximaciones numéricas. Aun cuando este procedimiento no iguala la exactitud de los métodos puramente algebraicos, expuestos en el Capítulo 3, nos muestra la versatilidad del nuevo método para abordar problemas algebraicos.

5.2 Pierre Fermat



Pierre de Fermat (1601-1665) nació en Beaumont, Francia, fue un jurista y matemático creador de un ingenioso método de demostración que denominó *del descenso infinito*²⁰. Debido a que Fermat dedicaba su tiempo libre al estudio de las Matemáticas, fue apodado por Eric T. Bell con el sobrenombre de ‘príncipe de los aficionados’ ya que su profesión era otra. Fermat realizó estudios en diferentes áreas de la matemática, desarrollo la teoría de la probabilidad junto con Blaise Pascal; sin embargo, sus aportaciones más conocidas recaen sobre el campo de la teoría de números, especialmente por el conocido *último teorema de Fermat*²¹, el cual durante casi 350 años mantuvo ocupados a los matemáticos interesados en esta rama de las Matemáticas, hasta que fue demostrado en 1995 por Andrew Wiles ayudado por Richard Taylor.

Fermat escribió en 1636 sólo un breve tratado sobre Geometría analítica, al que tituló *Ad Locus Planos et Solidos Isagoge* (Introducción a los lugares planos y sólidos). Este trabajo está dedicado al estudio de la recta, el círculo y las secciones cónicas, en el comenta que los antiguos griegos estudiaron los lugares geométricos pero no fueron capaces de enunciar el problema en forma general. Fermat propone someter la teoría de los lugares geométricos a un análisis apropiado, que indique el camino hacia un estudio general de los problemas de lugares geométricos, estableciendo en un lenguaje claro y preciso el principio fundamental de la geometría analítica:

Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de una de estas cantidades describe una línea, recta o curva (Boyer, 2004, p.75).

²⁰ Es una variante del método de reducción al absurdo aplicable a problemas con enteros positivos.

²¹ Si n es un número entero mayor que dos, entonces no existen números enteros y no nulos a , b y c , tales que se cumpla la igualdad $a^n + b^n = c^n$

Según Boyer, esta proposición constituye uno de los enunciados más significativos de la historia de las Matemáticas. En efecto, introduce no sólo en la Geometría analítica, sino también la muy útil idea de *variable algebraica*. En la terminología de Vieta la cantidad desconocida representaba una magnitud determinada, mientras que según Fermat, el extremo de una de las variables puede ocupar diversas posiciones consecutivas, de manera que represente una línea.

Para realizar sus investigaciones, Fermat comenzó con el estudio de las obras de los geómetras griegos, con especial atención en los trabajos de Apolonio. La forma en la que se fueron desarrollando las ideas de Fermat no se conoce de forma exacta, se piensa que como comprendía el sentido que daba Vieta al Álgebra en la resolución de problemas geométricos, la cual consistía en representar con una letra toda una clase de números; lo que pudo haber pasado, es que Fermat haya traducido directamente los resultados de Apolonio a una forma algebraica.

Fermat maneja la división de los lugares en tres tipos –plano, sólido y lineal– de la manera siguiente: si el extremo de J^{22} describe una línea recta o una circunferencia, tenemos un lugar plano; si describe una parábola, una hipérbola o una elipse, es un lugar sólido; para todas las demás curvas, el lugar correspondiente es un lugar lineal. Una de las aportaciones que realizó Fermat, es que utiliza las vocales *A* y *B* para denotar las cantidades desconocidas al estudiar las ecuaciones. “Fermat introduce el estudio de la ecuación lineal utilizando las vocales (*A* y *E*) para representar, las cantidades desconocidas” (Collete, 1986).

Al igual que Descartes, Fermat también solo trabaja con magnitudes positivas, y algo que es importante señalar es que a ninguno de ellos utilizó el término *sistema coordenado* o la idea de *dos ejes*. Fermat emplea coordenadas oblicuas aunque no aparece ningún eje en forma visible, además de que no emplea coordenadas negativas, para comprender esto veamos la figura 5.10.

²² Se refiere al extremo del segmento que representa a la ‘ordenada’

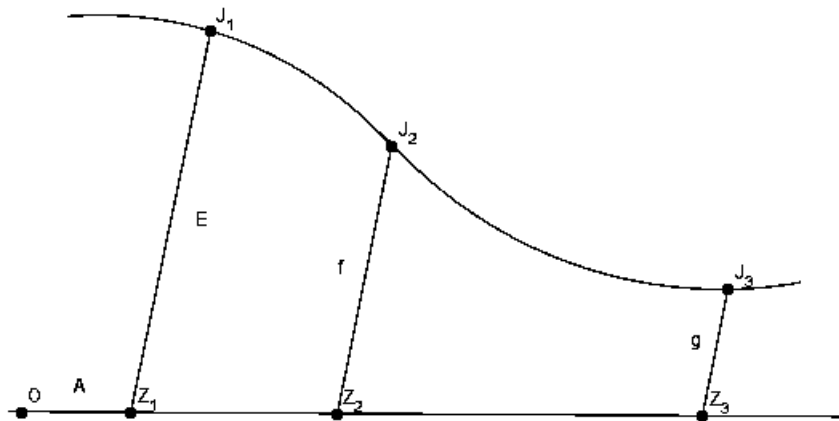


Figura 5.10.

Considerando una curva cualquiera y un punto genérico J sobre la curva, J está definido por la longitud A , distancia desde un punto O sobre una línea de base a un punto Z , y la longitud E de Z a K ; se puede ver que las medidas A y E son nuestras x e y . Al respecto, Klein (1992) se refiere a este principio general utilizado por Fermat, con relación a las ecuaciones que contienen dos cantidades desconocidas, de la siguiente manera:

Siempre que en una ecuación se hallen dos cantidades incógnita, tenemos un lugar geométrico, cuyo extremo describe una línea recta o una curva. (Klein, 1992, p. 402)

Con este método, Fermat escribe algunas ecuaciones de curvas tales como “ D in A aequetur B in E ”, que en nuestra notación es $Dx=By$, y afirma que esta representa una línea recta. Otras ecuaciones que establece, son: una más general para la recta $d(a-x)=by$; para la circunferencia $B^2 - x^2 = y^2$; para la elipse $a^2 - x^2 = ky^2$; para la hipérbola (equilátera) $xy=a$; y para la parábola $x^2 = ay$.

Como ya mencionamos, no manejaba cantidades negativas lo que le impedía representar las curvas completas, pero era consciente de que se podía hacer una traslación o girar los ejes. Una conjetura importante de Fermat es que las ecuaciones de primer grado representaban rectas y que las de segundo grado tienen secciones cónicas como lugares geométricos. Hay que hacer notar que, en ese momento se sabía que la recta y las cónicas se representaban por ecuaciones de primero y segundo grado (en dos variables) pero no lo inverso; es decir, si toda ecuación de primer grado o segundo grado, produce una recta o cónica.

Método para calcular máximos y mínimos de Fermat

Por el año de 1636, en un pequeño tratado titulado *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Fermat introduce un método para obtener los máximos o mínimos de una curva (función algebraica) utilizando una la técnica de *adigualdad* que había sido utilizada por Diofanto en la Escuela de Alejandría (Collet y Jean-Paul, 1986). El método se puede enunciar de la manera siguiente:

...se trata de buscar el máximo o el mínimo de la función f cuya variable es A ; remplacemos A por $A+E$ (donde A desempeña el papel de nuestro x habitual) en f , y hagamos $f(A+E) \approx f(A)$, dividamos cada término por E y, finalmente, eliminemos todos los términos que contengan E . La ecuación resultante se anula para uno o varios valores de la variable A , y estos valores corresponden a máximos o mínimos. (Collete, 1986, p. 28)

Boyer (1985) entiende el término “adigualdad” como una pseudo-igualdad que se convierte en igualdad cuando E se hace cero, aunque otros autores lo entienden como hacer dos expresiones tan aproximadamente iguales como sea posible.

Haciendo una analogía con la notación y los conceptos que actualmente se tienen, el método de Fermat se puede enunciar así:

Lo que hizo equivale a igualar la derivada $f'(x)$ de $f(x)$ a cero para encontrar los valores de x que hagan máximo o mínimo a $f(x)$. Geométricamente esto equivale a encontrar las abscisas de los puntos de la curva $y = f(x)$ en los cuales la tangente es paralela al eje x . (Bell, 1985, p. 153)

El trabajo de Fermat sobre máximos y mínimos tomó importancia gracias a su principio del tiempo mínimo en óptica, siendo uno de los primeros principios en el cálculo de variaciones con aplicación a la física.

Debemos de marcar que este método para calcular máximos y mínimos de Fermat, es totalmente algorítmico y que para algunos matemáticos de su tiempo, como Descartes, les parecían insuficientes las justificaciones de Fermat sobre su método.

A continuación se muestra un ejemplo de la aplicación de este método: *Dividir un segmento en dos partes de forma que el producto sea máximo* (Figura 5.11).

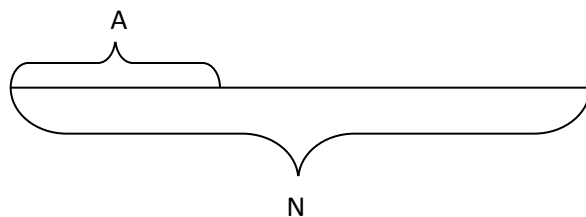


Figura 5.11.

Sea N el número conocido (la magnitud del segmento) y A la cantidad desconocida, así tendremos

$$f(A) = A(N - A) = AN - A^2;$$

para maximizar la función anterior, siguiendo el método descrito por Fermat, debemos de remplazar A por $A+E$, esto es

$$f(A + E) = (A + E)N - (A + E)^2 = AN + EN - A^2 - 2AE - E^2.$$

Igualemos las expresiones anteriores

$$AN - A^2 = AN + EN - A^2 - 2AE - E^2,$$

a la expresión anterior la dividimos por E y simplificamos para llegar a

$$N - 2A - E = 0,$$

después hacemos $E = 0$ y despejamos A

$$A = \frac{N}{2}.$$

Luego, el máximo de la función se obtiene cuando A toma el valor $N/2$.

Tratando de comparar el método algorítmico de Fermat con nuestros conocimientos actuales, equivale a determinar el valor de A tal que

$$\lim_{E \rightarrow 0} \frac{f(A + E) - f(A)}{E} = 0.$$

La esencia del análisis infinitesimal está presente en el método de Fermat ya que el uso de los valores próximos de las variables y el uso del cambio de variables; algo que se debe de remarcar, es que este método no permite distinguir entre máximos y mínimos.

Determinación de tangentes

Una aplicación novedosa que Fermat le dio a su método de máximos y mínimos en 1632, es sobre el trazo de tangentes, donde lo usa para el trazo de la tangente a una parábola. A continuación mostraremos la forma en la que Fermat resuelve este problema.

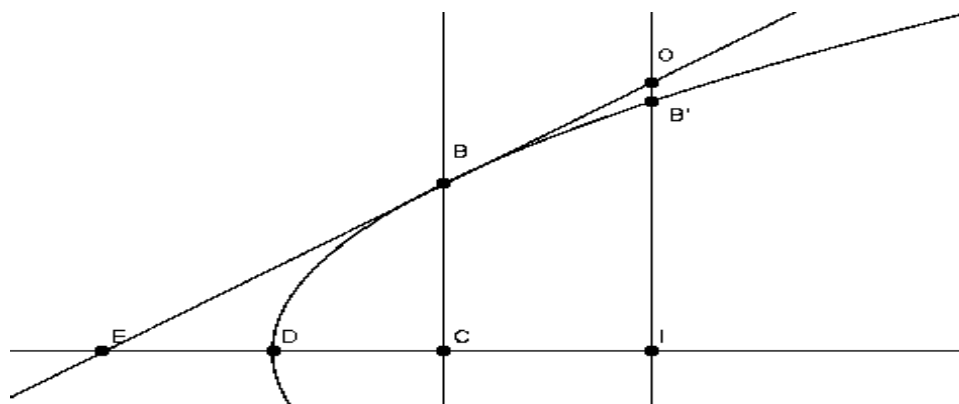


Figura 5.12. Trazo de las tangentes de Fermat

La ecuación de esta parábola horizontal es de la forma (Figura 5.12)

$$y^2 = px \quad \text{ó} \quad y = \sqrt{px}.$$

En la que el punto D es el vértice de la parábola y ‘origen de las abscisas’, B es el punto de tangencia, C es la base de la tangente, E es la intersección de la tangente con ‘el eje x ’ (eje de la parábola) tomemos B' otro punto sobre la parábola y tracemos una perpendicular al eje que pase por este punto, ésta cortará al eje en I y a la tangente en el punto O .

De lo establecido anteriormente tenemos

$$B'I^2 = p(DI),$$

$$BC^2 = p(DC),$$

dividiendo miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{B'I^2}{BC^2} = \frac{p(DI)}{p(DC)} = \frac{DI}{DC}, \text{ por lo cual } \frac{B'I^2}{DI} = \frac{BC^2}{DC}.$$

Como $OI > B'I$, se sigue que $\frac{OI^2}{DI} > \frac{BC^2}{DC}$, ahora el problema se reduce a hacer mínima la razón $\frac{OI^2}{DI}$, esto sucederá cuando el punto O se vaya acercando al punto B; de este modo, siguiendo el método descrito por Fermat, tenemos que igualar

$$\frac{OI^2}{DI} = \frac{BC^2}{DC} \rightarrow \frac{OI^2}{BC^2} = \frac{DI}{DC};$$

ahora debemos de dejar todo en términos de cantidades conocidas, y como $\triangle BEC \sim \triangle OEI$, obtenemos que $\frac{OI}{BC} = \frac{EI}{EC}$, realizando algunos arreglos podemos llegar a la siguiente expresión

$$\frac{EI^2}{EC^2} = \frac{DI}{DC} \rightarrow \frac{EI^2}{DI} = \frac{EC^2}{DC}.$$

Nombremos $DC = x$, $CE = s$, $CI = e$, sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos que

$$\frac{(s+e)^2}{x+e} = \frac{s^2}{x},$$

de donde

$$s^2x + 2sex + e^2x = s^2x + s^2e;$$

dividiendo todo entre e

$$2sx + ex = s^2.$$

Haciendo $e = 0$, $2sx = s^2$ y $s = 2x$; en este caso, la incógnita CE es el doble de la abscisa del punto de contacto. Para entender mejor este resultado, la pendiente de la tangente está dada por

$$m = \frac{BC}{EC} = \frac{\sqrt{px}}{2x} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}},$$

que corresponde a la derivada de la función inicial. Con esto podemos verificar que el método utilizado por Fermat, nos da un valor correcto de la distancia entre el punto donde la tangente corta a la recta CI y la base del punto de tangencia.

5.3 Paralelismos y diferencias entre las geometrías de Descartes y Fermat

Fermat y Descartes tenían una diferencia muy notable ya que a este último no le importaba la belleza y la armonía; además, no les daba valor a las Matemáticas puras, ya que menciona que el método matemático aplicado únicamente a las Matemáticas no tiene valor para el estudio de la naturaleza.

Su contribución independiente reposa esencialmente en el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto de un sistema de coordenadas. (Bell, 1985, p. 157)

Collete (1986) asegura que, si se agregan los métodos algorítmicos que realizaron cada uno, para relacionar una ecuación con su curva correspondiente, bastaría para atribuirles el mérito de ser los fundadores de la Geometría analítica.

Descartes retoma la idea de Vieta, sobre la construcción geométrica de las raíces de ecuaciones algebraicas, pero introduce cambios importantes en su simbolismo. En cambio Fermat conserva la notación de Vieta pero la aplica a un campo nuevo, el estudio de los lugares geométricos.

Otro aspecto de comparación entre las ideas de estos dos grandes personajes es respecto a las ideas que cada uno manejaba sobre cómo debía de hacerse la clasificación de las curvas, ya que tenían propuestas diferentes:

Mientras que Descartes sugiere clases de curvas generadas por movimientos simples, Fermat introduce grupos de curvas dadas por ecuaciones algebraicas. (Collete, 1986, p. 27)

Lo anterior puede deberse a que los trabajos de cada uno, tienen una gran diferencia:

... se puede decir que Descartes comienza con un problema de lugar geométrico a partir del cual obtiene una ecuación del lugar, mientras que Fermat se preocupa más de partir de una ecuación poder deducir las propiedades de su curva. (Collete, 1986, p. 27)

Sin duda, esto ayuda a entender la diferencia en las ideas de cada uno; ya que por un lado, Descartes trata de pasar de lo geométrico a lo algebraico y, por otro lado, Fermat estaba

más motivado por poder descubrir las características que tenía una ecuación, en lo hacía uso del aspecto geométrico; es decir, Fermat trata de pasar de lo algebraico a lo geométrico.

Sin embargo, no podemos quitarle méritos a ninguno de ellos; su colaboración fue fundamental para el establecimiento y desarrollo de la Geometría analítica, una nueva rama de las Matemáticas.

5.4 Resumen

La introducción del nuevo método de Descartes, que inicia con argumentos filosóficos, para llegar a un conocimiento verdadero, en su trabajo sobre *el discurso del método*, muestra la explicación del método, y también la aplicación del mismo en el apartado llamado *La gèometrie*, lo cual es fusión de dos áreas de la matemática, la Geometría y el Álgebra.

En el apartado de la *La gèometrie*, Descartes hace gala de su dominio algebraico y hace aportes sobre la determinación de raíces de una ecuación. La mayoría de sus aportes los realiza resolviendo problemas en los que aplica su nuevo método, siendo el problema de Pappus uno de los principales, que no solo lo resuelve, sino también que comienza con la introducción de ‘sistemas de referencia’ (no necesariamente perpendiculares) para encontrar la ecuación de un determinado lugar geométrico.

Respecto a los trabajos de Fermat, destaca la importancia de su propósito de encontrar el lugar geométrico de una ecuación; además del trazo de tangentes y la implementación del método para la determinación de máximos y mínimos, lo cual presenta un gran avance hacia conceptos que se aproximan a los de infinitésimos.

Capítulo 6

TRABAJO POSTERIORES A DESCARTES Y FERMAT:

LA NOTACIÓN ABREVIADA

Después de los trabajos realizados por Descartes y Fermat pensaríamos que la Geometría analítica crecería a pasos agigantados; sin embargo, esto no ocurrió, ya que el nuevo método no fue aceptado como se esperaba. Howard (1969) menciona que en algunos círculos fue fríamente acogido o con indiferencia.

Posteriormente se comenzaron a realizar estudios un poco más especializados y se desarrollaron varias fórmulas de bastante utilidad. Pero no fue hasta comienzos de siglo XIX que el nuevo método ganó más seguidores; sin embargo, muchos comenzaron a ver que parecía que la geometría había alcanzado su punto máximo, ya que observaban que mientras los geómetras que utilizaban el método sintético seguían obteniendo adelantos, los que aplicaban el método analítico se quedaban detenidos por la complejidad algebraica para llegar a la solución de un problema. Además, se llegó a decir que la Geometría analítica carecía de sencillez y de elegancia que caracterizaba a la Geometría sintética.

Como resultado de lo anterior, varios partidarios de la Geometría analítica comenzaron a desarrollar nuevos y mejores procedimientos, principalmente en los métodos de coordenadas, en las que el principal exponente fue Julius Plücker (1801-1868), quien en sus trabajos muestra que la Geometría analítica no tiene nada que envidiarle a la Geometría sintética.

A continuación hablaremos de uno de los métodos que se presentaron en defensa de la Geometría analítica, aunque es uno de los más sencillos, este es conocido con el nombre de *notación abreviada*, el cual fue tratado ampliamente en el primer libro de Plücker, previamente estudiado por Gabriel Lamé (1795-1870) y por Étienne Bobillier (1797-1832). Esta notación, además, equivale a que no sean únicamente los puntos los elementos básicos de la geometría sino, también otras figuras como las rectas, circunferencias o cónicas, con las que se pueden operar como aquellos y que sustituyen elementos de un espacio, lo cual conduce a generalizar el número de dimensiones.

La notación abreviada tiene su base en poder representar expresiones largas mediante expresiones reducidas, es decir, por ejemplo para escribir la ecuación de una recta en su forma general $ax + by + c = 0$ lo único que escribimos es por ejemplo $\alpha(x, y) = 0$. Esto es, $\alpha(x, y) = ax + by + c = 0$; de igual manera, una recta $\beta(x, y) = a'x + b'y + c' = 0$. Si tomamos el punto de intersección (x_0, y_0) de las rectas $\alpha(x, y) = 0$ y $\beta(x, y) = 0$, éste satisface simultáneamente ambas ecuaciones, es decir, que $\alpha(x_0, y_0) = 0$ y que $\beta(x_0, y_0) = 0$.

Además en la notación abreviada se hace uso del siguiente principio fundamental:

Si $\alpha(x, y) = 0$ y $\beta(x, y) = 0$ son dos curvas, entonces $m\alpha + n\beta = 0$, donde m y n son constantes, es una curva que pasa por los puntos de intersección de las curvas $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

Lo anterior es evidente ya que para que se cumpla que $m\alpha + n\beta = 0$ en un punto (x_0, y_0) , tendremos que $m\alpha(x_0, y_0) + n\beta(x_0, y_0) = 0$, lo cual necesariamente se cumple siempre y cuando el punto (x_0, y_0) sea un punto que esté en ambas rectas; es decir, que sea punto de intersección de ambas.

A continuación vamos a hablar un poco sobre los trabajos que se pueden realizar usando la notación abreviada, para lo cual se usan conceptos tales como ecuación normal de una recta y distancia dirigida de un punto a una recta, los cuales tendrán el mismo significado con el que se presenta a nivel medio superior. Además se usan teoremas que enunciamos enseguida.

Teorema 1. *Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ son rectas diferentes, entonces $m\alpha + n\beta = 0$ es una recta que pasa por el punto de intersección (real o ideal²³) de $\alpha = 0$ y $\beta = 0$. Además, una recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ tiene la forma $m\alpha + n\beta = 0$.*

El teorema anterior sale como resultado inmediato del principio fundamental de la notación abreviada que ya se presentó. Ahora haremos un ajuste de notación, consideremos la

²³ Al referirnos a un punto de intersección real nos referimos al punto de cruce de dos rectas y en el caso de un punto ideal nos referimos al caso en el que las dos rectas son paralelas y el punto de cruce es en el infinito.

ecuación $\alpha_n(x, y) = 0$ como la ecuación normal de la recta $\alpha(x, y) = 0$; es decir, consideraremos

$$\alpha_n(x, y) = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

y aprovechando la introducción de esta nueva notación, tomemos en cuenta la distancia dirigida de una recta a un punto, considere el punto $p(x_1, y_1)$ y la recta $\alpha(x, y) = 0$, entonces la distancia estará dada por

$$d(p, \alpha) = \alpha_n(x_1, y_1) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}},$$

para determinar qué signo debe tomarse, se tienen los siguientes criterios, los cuales son fáciles de probar:

1. Si el punto p y el origen están de lados diferentes respecto la recta, el signo que se va a tomar es positivo (Figura 6.1).

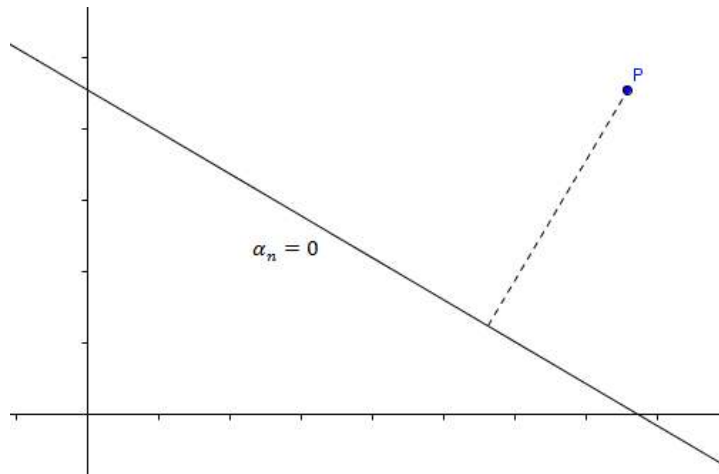


Figura 6.1.

2. Si el punto p y el origen están del mismo lado respecto la recta, el signo que se toma es el negativo (Figura 6.2).

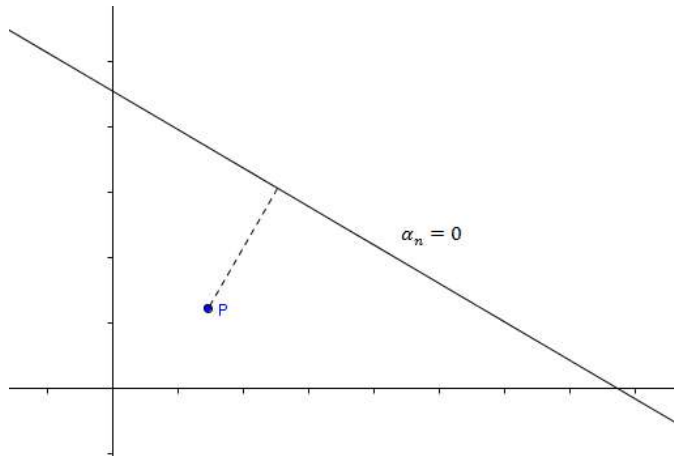


Figura 6.2.

Teorema 2. Si $\alpha_n = 0$ y $\beta_n = 0$ son las ecuaciones de dos rectas normales diferentes que no pasan por el origen, y si $m\alpha + n\beta = 0$ es una recta que pasa por su punto de intersección, entonces $-\frac{m}{n}$ es la razón de la distancia dirigida, de un punto de la recta $m\alpha + n\beta = 0$ a la recta $\beta = 0$, a su distancia con signo a la recta $\alpha = 0$.

Demostración: Sea (x_0, y_0) un punto sobre la recta si $m\alpha + n\beta = 0$, y tómese la distancia de ese punto a cada una de las rectas $d_1 = \alpha(x_0, y_0)$ y $d_2 = \beta(x_0, y_0)$, por otro lado tenemos que como el punto está sobre la recta, entonces

$$m\alpha(x_0, y_0) + n\beta(x_0, y_0) = 0,$$

de donde se deduce lo que queríamos mostrar

$$-\frac{m}{n} = \frac{\beta(x_0, y_0)}{\alpha(x_0, y_0)}.$$

Teorema 3. Si $\alpha_n = 0$ y $\beta_n = 0$ son las ecuaciones normales de dos rectas dadas no paralelas, que no pasan por el origen, entonces $\alpha_n - \beta_n = 0$ y $\alpha_n + \beta_n = 0$ son las bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas dadas, siendo la primera la bisectriz del ángulo que contiene al origen (Figura 6.3).

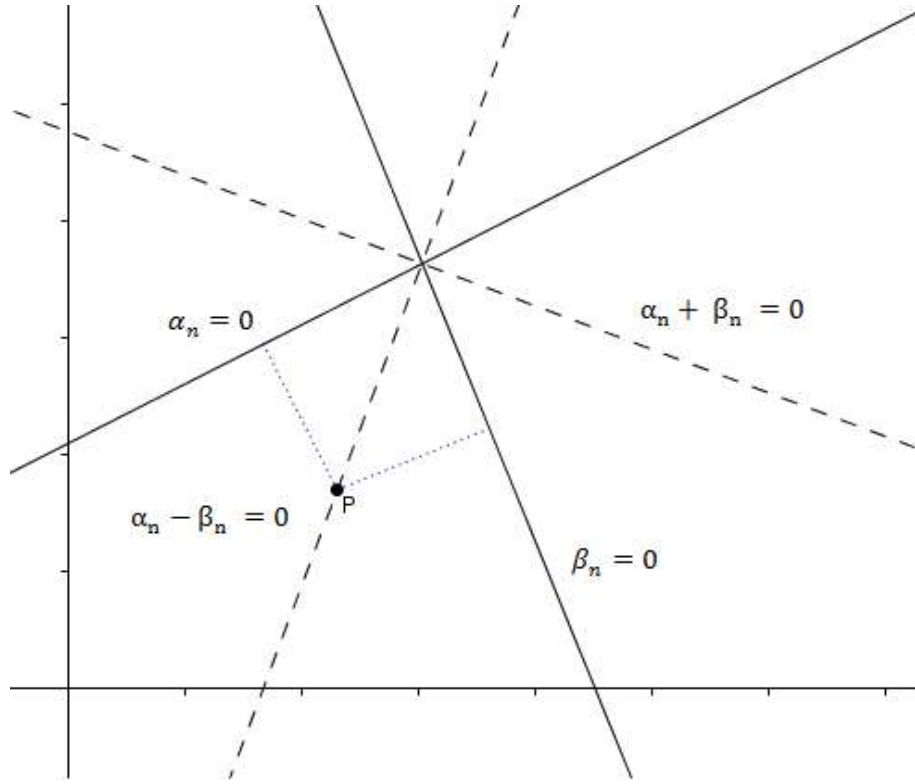


Figura 6.3.

Demostración: Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto sobre la bisectriz y al cual sacaremos la distancia desde cada una de las rectas. En este caso tenemos que considerar los posibles acomodos de las rectas:

- 1) Cuando el punto P y el origen del mismo lado de la recta $\alpha_n = 0$ y el punto P y el origen de lado contrario de la recta $\beta_n = 0$. Como sabemos la distancia del punto de la bisectriz a la recta $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ es la misma, es decir

$$-\alpha_n(x_0, y_0) = \beta_n(x_0, y_0),$$

de donde obtenemos que $\alpha_n + \beta_n = 0$.

- 2) Tomando el punto P y el origen del mismo lado de la recta $\beta_n = 0$ y el punto P y el origen de lado contrario de la recta $\alpha_n = 0$. Como sabemos la distancia del punto de la bisectriz a la recta $\alpha_n = 0$ y $\beta_n = 0$ es la misma, es decir,

$$\alpha(x, y) = -\beta(x, y),$$

de donde obtenemos que $\alpha_n + \beta_n = 0$.

- 3) Considerando punto P y el origen del mismo lado de la recta $\alpha_n = 0$ y de la recta $\beta_n = 0$. Tenemos que $-\alpha_n(x, y) = -\beta_n(x, y)$, de donde obtenemos

$$\alpha_n - \beta_n = 0.$$

- 4) El caso en el que el punto P y el origen de lado contrario de la recta $\alpha_n = 0$ y de la recta $\beta_n = 0$. De aquí obtenemos $\alpha_n(x, y) = \beta_n(x, y)$, lo cual nos lleva a

$$\alpha_n - \beta_n = 0.$$

Teorema 4. Si $\alpha = 0$ y $\beta = 0$ son las ecuaciones normales de dos rectas dadas no paralelas, que no pasan por el origen, entonces $m\alpha + n\beta = 0$ y $n\alpha + m\beta = 0$ son rectas isogonales²⁴ respecto a los ángulos formados por las dos rectas originales. (Figura 6.4)

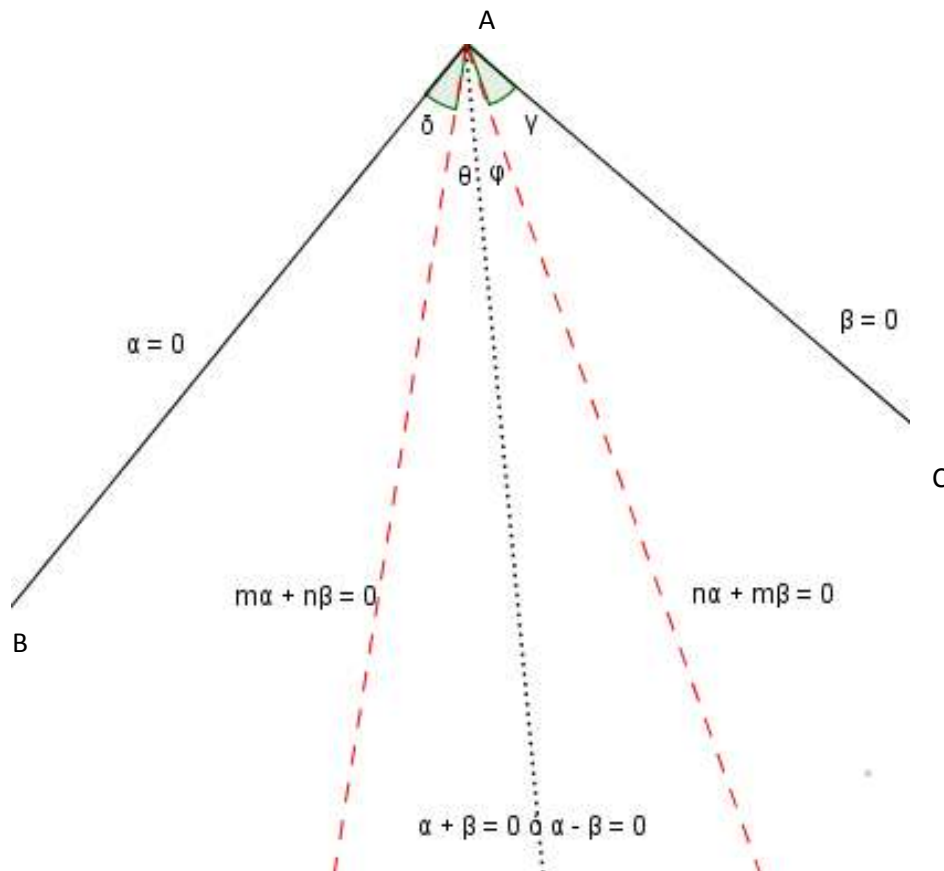


Figura 6.4.

²⁴ Dos rectas r y s que pasan por un vértice A de un triángulo ABC son isogonales si r forma con AB el mismo ángulo que s con AC . Es decir, si son simétricas respecto a la bisectriz del ángulo A .

Demostración: Bastaría con hacer ver que las rectas $m\alpha + n\beta = 0$ y $n\alpha + m\beta = 0$ tienen la misma recta bisectriz que las rectas $\alpha = 0$ y $\beta = 0$; es decir, solo debemos demostrar que $\alpha - \beta = 0$ y $\alpha + \beta = 0$ son rectas bisectrices de $m\alpha + n\beta = 0$ y $n\alpha + m\beta = 0$.

Tomando $\alpha' = m\alpha + n\beta$ y $\beta' = n\alpha + m\beta$ y haciendo $\alpha' - \beta' = 0$ obtenemos

$$m\alpha + n\beta - (n\alpha + m\beta) = 0,$$

de donde $(m - n)\alpha - (m - n)\beta = 0$, y de aquí obtenemos que $\alpha - \beta = 0$, lo cual nos demuestra que $\theta = \varphi$, y de aquí se tiene que $\delta = \gamma$; por ello las rectas son isogonales.

De igual manera haciendo $\alpha' = m\alpha + n\beta$ y $\beta' = n\alpha + m\beta$ haciendo $\alpha' + \beta' = 0$ obtenemos $\alpha + \beta = 0$, llegando de igual manera a que las rectas son isogonales.

Además presentamos el siguiente teorema y sus corolarios que resultan de suma importancia y utilidad para las cuestiones que se pretenden tratar aquí.

Teorema 5. Sean $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ las ecuaciones de los lados de un triángulo. Entonces las tres cevianas²⁵ $m\beta - n\gamma = 0$, $r\gamma - s\alpha = 0$ y $u\alpha - v\beta = 0$ son concurrentes si y sólo si $mru = nsv$.

Corolario 1. Si $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ las ecuaciones de los lados de un triángulo, tres cevianas concurrentes cualesquiera pueden expresarse en la forma $m\beta - n\gamma = 0$, $n\gamma - l\alpha = 0$ y $l\alpha - m\beta = 0$.

Corolario 2. Sea un triángulo con tres cevianas concurrentes. Siempre podemos, utilizando factores constantes apropiados, tomar $\alpha = 0$, $\beta = 0$ y $\gamma = 0$ como las ecuaciones de los lados del triángulo de modo que las ecuaciones de las tres cevianas sean $\beta - \gamma = 0$, $\gamma - \alpha = 0$ y $\alpha - \beta = 0$.

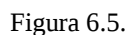
Para hacer notar la versatilidad que presenta este método y la forma en la que se utiliza analizaremos el siguiente problema:

Las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes:

²⁵ Ceviana es un segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el lado opuesto.

Como acabamos de mostrar, la demostración de la concurrencia de las bisectrices se vuelve sencilla una vez que se tiene como herramientas los teoremas anteriores son de suma utilidad. Así mismo, como se demostró este teorema de concurrencia tiene la misma sencillez demostrar la concurrencia de las alturas, de las medianas, y algunos otros un poco más elaborados, como el teorema de Desargues de los triángulos y el teorema del Hexagrama místico de Pascal.

Dadas las ecuaciones de las líneas rectas $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ y $\delta = 0$ debe encontrarse un punto, como C , del cual trazando otras líneas que vayan corten a las iniciales formando ángulos dados, y de modo que el producto a pares de estas rectas sea igual al producto de la multiplicación de las otras; o bien que ellas tengan otra proporción dada nos da como resultado una cónica (Figura 6.5).



Demostración: Sean $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ y $\delta = 0$ las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $C(x, y)$ formando los ángulos dados. De este modo para demostrar que se trata de una cónica, tomemos el producto de las ecuaciones de la siguiente manera

$$\alpha\gamma = k\beta\delta ,$$

donde k corresponde a una constante en la que pueden diferir los productos. teniendo en cuenta que

$$\alpha(x, y) = ax + by + c = 0,$$

$$\beta(x, y) = a'x + b'y + c' = 0,$$

$$\gamma(x, y) = a''x + b''y + c'' = 0,$$

y

$$\delta(x, y) = a'''x + b'''y + c''' = 0,$$

al analizar los productos vemos que serán ecuaciones de segundo grado, de este modo tenemos que la ecuación $\alpha\gamma = k\beta\delta$ corresponde a la ecuación de una cónica, lo cual queríamos mostrar.

Como vemos la demostración es muy breve y nos muestra el resultado en forma eficiente; las soluciones sintéticas de algunos casos particulares de este problema no son fáciles de obtener y el problema, se ha resistido al procedimiento en general. El método de la notación abreviada se puede aplicar para obtener el lugar geométrico para el problema con un número mayor de rectas hasta para poder llegar a la generalización, algo que se torna un poco difícil y complejo tratando de seguir el método presentado por Descartes en capítulos anteriores.

Con esto, queda demostrada la eficiencia y versatilidad que proporciona el método de la notación abreviada aunque uno de los problemas que puede presentarse al usarla es que la notación puede ser confusa ya que una misma expresión, por ejemplo $\alpha(x, y)$ puede representar no solo una recta sino que también una cónica o cualquier otra curva.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

En los seis capítulos anteriores hemos expuesto, con cierto detalle, los trabajos relevantes que se realizaron en relación al origen y desarrollo de las ideas que condujeron, después de veintiún siglos, al nacimiento de la Geometría analítica. Nuestra revisión bibliográfica y su análisis, nos lleva a identificar tres etapas: La primera, correspondiente al periodo *Griego* (S. IV a.c., al S. II a.c.), desde el descubrimiento de las cónicas por Menecmo hasta el trabajo de Apolonio; La segunda, corresponde al periodo *Arabe-Itálico* (S. VIII. al S. XVI), caracterizado por los avances importantes del álgebra, y; La tercera, marcada por los trabajos de Descartes y Fermat (S. XVII). Finalmente, agregamos algunas anotaciones sobre una cuarta etapa, posterior al siglo XVII.

A continuación expondremos, en líneas generales, las ideas, solución a problemas relevantes y otras aportaciones que se hicieron en cada una de estas etapas.

Primera etapa

Durante mucho tiempo, los geómetras griegos centraron sus esfuerzos en el estudio de la Geometría, construida a partir del uso de la regla y el compás; es decir, de la recta y la circunferencia. Para ello desarrollaron el llamado método sintético, expuesto claramente por Euclides en *Los elementos*.

El surgimiento de la Geometría analítica tiene dos vertientes: 1) el descubrimiento y estudio de curvas diferentes de la recta y la circunferencia y su aplicación a la resolución de problemas; 2) el desarrollo del método analítico caracterizado por el establecimiento de relaciones entre variables geométricas (expresadas en forma retórica) y su tratamiento mediante una incipiente Álgebra geométrica (también retórica).

En cuanto a la primera vertiente, el descubrimiento y estudio de las cónicas viene a ser la principal fuente de problemas, tales como el Problema de Pappus y aquellos que surgieron del estudio mismo de las nuevas curvas y sus componentes (ejes de simetría, vértices, diámetros, lado recto, normales, tangentes, etc.), un estudio exhaustivo similar al que

habían realizado los griegos con relación al triángulo y la circunferencia. Claramente, Apolonio es el máximo exponente de su época en cuanto a la cantidad de problemas que propone y resuelve sobre las cónicas.

Por otro lado, las cónicas mostraron su importancia en la resolución de problemas cuya solución no podía obtenerse mediante la geometría euclídeana, tal es el caso del problema de la *duplicación del cubo*, que junto con la *trisección del ángulo* y la *cuadratura del círculo*, integran los llamados *problemas clásicos* de los griegos. Estos dos problemas también están relacionados con la generación de otras dos curvas: la *cuadratriz* y la *espiral*.

Las limitaciones de los métodos para resolver problemas radica, en este caso, en el tipo de curvas que se pueden utilizar. En el caso de la Geometría euclídeana, las únicas curvas que se utilizan son la recta y la circunferencia, con las cuales se pueden generar y resolver una cantidad ‘infinita’ de problemas, con relación a la solución de ecuaciones sólo pueden resolverse las de primero y segundo grado; en cambio, con el auxilio de las cónicas se pueden resolver también ecuaciones de tercero y mayor grado. Si a estas agregamos las curvas mecánicas, las cuales también se estudian y aplican con el método analítico, el campo de resolución de problemas se amplía considerablemente.

Con relación al llamado *método analítico*, este se caracteriza por la búsqueda de relaciones simples entre variables y parámetros, sin restricciones fijadas de antemano, que permitan estudiar los lugares geométricos mediante transformaciones algebraicas. Evidentemente, su desarrollo depende del desarrollo mismo del Álgebra. En la época de los griegos y, particularmente, cuando se realizaron los trabajos más importantes de las cónicas, el Álgebra estaba muy ligada a la Geometría euclídeana y, por tanto, era retórica. Si uno revisa algunas de las traducciones de *Los elementos* y de *Las cónicas*, se da uno cuenta de la dificultad de comprensión de esta última obra sobre la primera, aún con explicaciones apoyadas en el Álgebra actual. No es coincidencia pues, que la Geometría analítica surgiera hasta que el Álgebra simbólica alcanzara un nivel importante de desarrollo.

Segunda etapa

Las contribuciones importantes a la matemática de los antiguos griegos, llegan hasta el Siglo IV de nuestra era y no volverá a darse un resurgimiento en Occidente, de la misma o mayor magnitud hasta el siglo XVI. En el periodo intermedio, para el caso de la Geometría analítica, las principales contribuciones se hicieron en el Álgebra por los matemáticos árabes e italianos. Los primeros, rescatando los trabajos de Euclides y Apolonio, desarrollan novedosos procedimientos de Álgebra geométrica para determinar la solución de ecuaciones de segundo y tercer grado. Destaca el trabajo de Ommar Jayyam, por su ingenioso uso de las cónicas para resolver estas últimas, aunque no parece haber tenido influencia en trabajos posteriores.

Desde el siglo XII, algunas comunidades italianas establecen relaciones comerciales y culturales con los árabes, lo cual favoreció un florecimiento del Álgebra en la Italia renacentista que después se extendería a toda Europa. Las aportaciones realizadas por los algebristas italianos, no sólo con la solución algebraica de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, sino también todo lo desarrollado en torno al planteamiento y resolución de problemas algebraicos, establecieron las bases de su independencia de la geometría y del desarrollo del álgebra simbólica actual.

Sin duda, la solución definitiva de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, por métodos algebraicos, representa un gran logro al establecer métodos de solución generales para un amplio conjunto de problemas; al mismo tiempo abre todo un nuevo campo de problemas en torno al estudio de ecuaciones de grado n y que, posteriormente, se transformaría en el estudio de los polinomios.

Al avance de las Matemáticas en el periodo mencionado en los párrafos precedentes, se agrega el surgimiento de una física ligada estrechamente a la matemática en desarrollo. En particular, los trabajos de Oresme y posteriormente de Galileo sobre el movimiento uniforme y disforme, contribuyen al surgimiento de la noción de función y su representación gráfica, las cuales pudieron influir en el surgimiento de la Geometría analítica.

Las aportaciones en torno al establecimiento del Álgebra simbólica fueron claves en la consolidación de esta rama de las Matemáticas y la futura creación de otras como la

Geometría analítica y el Cálculo durante los siglos XVII y XVIII. La introducción de símbolos no sólo fue útil para expresar relaciones operatorias entre números y cantidades no determinadas, sino que también abrió el camino para distinguir otro tipo de cantidades: variables, constantes y parámetros. Esto contribuyó mucho a independizar el álgebra de la geometría y abrir más posibilidades de interacción, lo cual se dio justamente en la Geometría analítica.

Tercera etapa

Sin duda, el nacimiento de la geometría analítica se da en el siglo XVII en los trabajos, independientes y complementarios, de Descartes y Fermat. El primero, partiendo de una nueva concepción científica y un método para resolver problemas, el cual estaba basado en reglas lógicas y, en el caso de la geometría, la aplicación del álgebra es trascendental dando lugar a sus principales aportaciones en el establecimiento de la geometría analítica. Descartes retoma problemas clásicos de la antigüedad para mostrar el poder de los métodos algebraicos en la solución de problemas geométricos (problema de Pappus y trazo de tangentes) el estudio de curvas mecánicas estableciendo su expresión algebraica y, la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, empleando las cónicas y estableciendo una conexión importante entre las ecuaciones y la intersección de curvas.

En el trabajo de Descartes expuesto en *La Géométrie*, habrá que reconocer también, sus aportaciones al álgebra misma, sobre todo en la notación y las raíces de ecuaciones.

Por otro lado, el trabajo de Fermat se enfoca al estudio de los lugares geométricos asociados a ecuaciones algebraicas, lo cual le permitió generar una gran cantidad de curvas y estudiar sus propiedades. Particularmente, adquieren relevancia su trabajo sobre tangentes y máximos. Aportando en este último, ideas y procedimientos que favorecieron el desarrollo del cálculo, en particular, al introducir una noción cercana a *infinitésimo*.

Etapas posteriores al Siglo XVII

Si bien, con los trabajos de Descartes y Fermat, se establecieron los fundamentos definitorios de la Geometría analítica, faltando por realizar mucho trabajo para llevarla a un nivel como el que se tiene en la actualidad.

En el mismo siglo XVII se hicieron algunos aportes, como la incorporación, por John Wallis (1616-1703) de los números negativos al sistema de coordenadas, el cual se empezó a denominar *cartesianas*; también, Jacques Bernoulli (1654-1705) introduce las coordenadas polares. En el siglo XVIII, se introducen otros sistemas de coordenadas (cilíndricas y esféricas) y, el desarrollo de la Geometría analítica, continúa muy ligado al desarrollo del Cálculo, esta relación llegará a su culminación con el surgimiento de la geometría diferencial en el siglo XIX.

Algunos partidarios de este método investigaron más a detalle aspectos de esta materia y plantearon varias fórmulas útiles, aunque el avance se veía truncado por la complejidad de algunos cálculos algebraicos mientras que los avances que producían los geómetras que aplicaban el método sintético seguían en progreso. En el intento de favorecer el desarrollo de la Geometría analítica se introducen varios procedimientos, tal como la notación abreviada estudiada por Julius Plücker (1801-1868), con los que se intenta mostrar que el nuevo método no tiene nada que envidiarle al método sintético. Así como el anterior fueron varios los procedimientos que se crearon para dar respaldo a la Geometría analítica.

El proceso de desarrollo del nuevo método continuaría para que este tomara la forma que actualmente tiene. En la actualidad se han desarrollado software de geometría dinámica tales como *Geogebra* que permiten el análisis y estudio de funciones o gráficas. Como se mostró a lo largo del trabajo, este software se puede utilizar como una herramienta didáctica para facilitar la solución y comprensión de problemas.

ANEXO

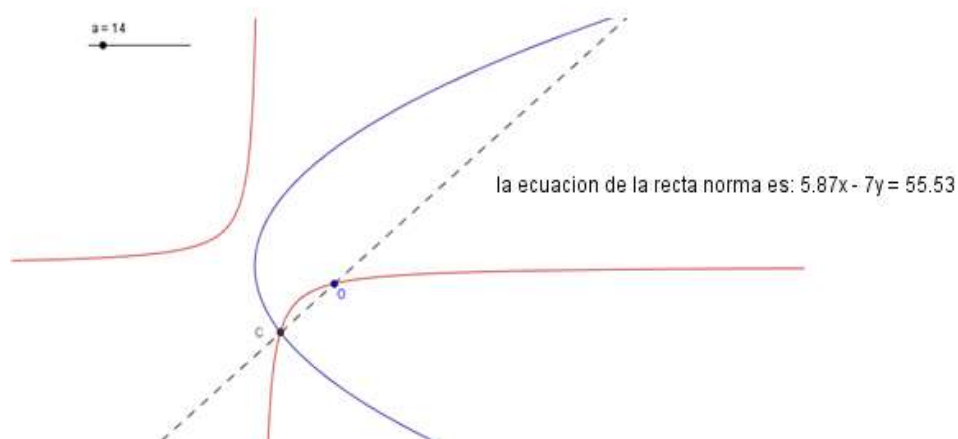
En este anexo describimos algunas de las construcciones que aparecen en el trabajo y que se realizaron en el software *Geogebra*, presentando los protocolos de construcción correspondientes que pueden ser de utilidad para reproducir las construcciones.

Normales de Apolonio

En esta parte presentamos la forma que describe Apolonio para el trazo de las normales desde cualquier punto sobre el plano, para el ejemplo que se muestra en la figura se trabaja sobre una parábola, la cual se define inicialmente en el software, la ecuación de esta es: $y^2 = a \cdot x$ donde para definir el valor de “a” se colocó un deslizador para definir su valor.

Después colocamos un punto en el plano en el lugar que se desee, siendo sus coordenadas $O = (x_0, y_0)$ y en base a este punto definimos la hipérbola $x \cdot y - (x_0 - \frac{1}{2}a)y - \frac{y_0}{2a} = 0$, después trazamos los puntos de intersección entre la cónica que acabamos de definir y la parábola inicial, en el ejemplo que se muestra la intersección es C.

Por último trazamos la recta que pasa por cada punto de intersección y el punto $O = (x_0, y_0)$ de este modo tenemos las normales a la curva que pasan por ese punto. La ventaja de esto es que podemos deslizar el punto sobre el plano además de que también podemos cambiar la cónica inicial que era una parábola por alguna otra como la elipse o hipérbola teniendo cuidado de cambiar los parámetros correspondientes para cada una.



En la imagen anterior la parábola es la que se presenta en color azul y la ecuación de la hipérbola es la curva de color rojo. El protocolo de construcción es el que se presenta en la siguiente tabla, la cual presenta el orden en el que se fueron generando los objetos y los nombres que se le iban dando a estos, así como también la forma en la que se definieron y el valor de estos.

Protocolo de la Construcción			
Archivo Vista Ayuda			
Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Número a		a = 6
2	Parábola c	$y^2 = a x$	c: $y^2 = 6x$
3	Punto A	Foco de c	A = (1.5, 0)
4	Punto O		O = (7.6, -1.56)
5	Número x_1	x(O)	$x_1 = 7.6$
6	Número y_1	y(O)	$y_1 = -1.56$
7	Hipérbola d	$x y - (x_1 - 1/2 a) y - y_1 / 2 a = 0$	d: $x y - 4.6y = -4.68$
8	Punto C	Punto de intersección de c, d	C = (3.59, 4.64)
8	Punto D	Punto de intersección de c, d	D = (0.19, 1.06)
8	Punto E	Punto de intersección de c, d	E = (5.42, -5.7)
9	Recta b	Tangente a c pasando por C	b: $-3x + 4.64y = 10.77$
10	Recta e	Recta que pasa por C perpendicular a b	e: $-4.64x - 3y = -30.57$
11	Recta f	Tangente a c pasando por D	f: $-3x + 1.06y = 0.56$
12	Recta g	Tangente a c pasando por E	g: $-3x - 5.7y = 16.26$
13	Recta h	Recta que pasa por D perpendicular a f	h: $-1.06x - 3y = -3.39$
14	Recta i	Recta que pasa por E perpendicular a g	i: $5.7x - 3y = 48.01$

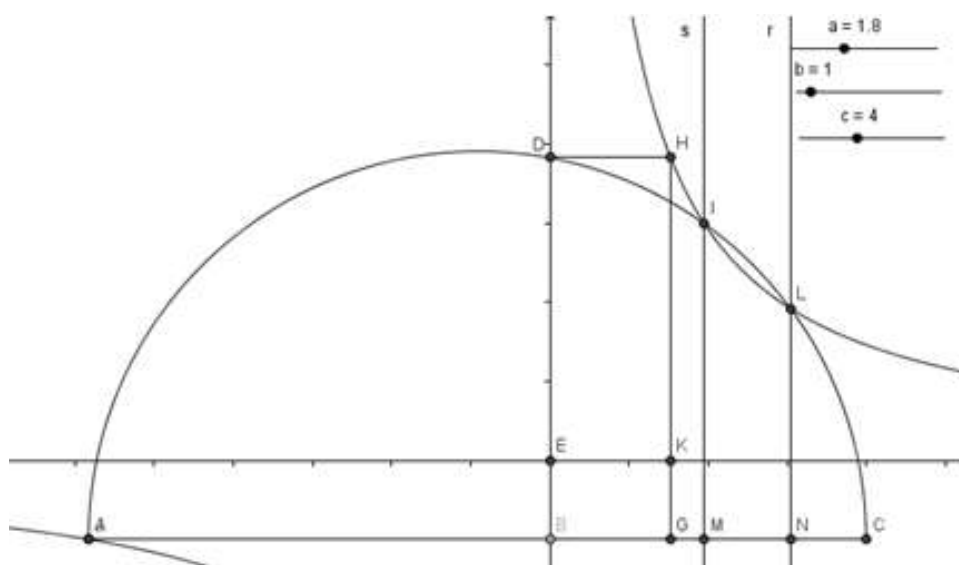
Solución de ecuaciones de tercer grado de Omar Jayyam

Al inicio de la construcción definimos primero tres deslizadores que irán tomando los valores de los coeficientes de la ecuación de la forma $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$, en nuestro caso usaremos los ejes coordenados como referencia para la construcción aunque esto no quiere decir que debe de ser así necesariamente ya que pueden tomarse rectas cualesquiera como referencia.

Colocamos un punto B sobre el eje y , después trazamos una recta l paralela al eje x que pase por B y sobre esta localizamos el punto A , de tal modo que el segmento $AB = \frac{a^3}{b^2}$ y de igual modo localicemos el punto C sobre la recta l de modo que $BC = c$.

Construya el segmento AC y con este como diámetro trace la semicircunferencia. Después levante la perpendicular a AC que pase por B , la cual corta en D a la semicircunferencia. Sobre el segmento BD localicemos el punto E de modo que $BE = b$, y por el punto E trácese EF paralela a AC .

Después hállese G sobre BC tal que $BG \cdot ED = BE \cdot AB$ y complete el rectángulo $DBGH$, en seguida trace por H la hipérbola equilátera que tenga como asíntotas a EF y ED , la cual cortara a la circunferencia en J , punto por el cual trazaremos una paralela a DE que cortara al segmento EF en el punto K y al segmento BC en L , de este modo el segmento BL será la raíz cubica. La imagen resultante será la siguiente:



La forma de obtener la imagen anterior es mediante el protocolo de construcción que aquí presentamos:

Protocolo de la Construcción			
Archivo Vista Ayuda			
Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Número a		$a = 1.8$
2	Número b		$b = 1$
3	Número c		$c = 4$
4	Punto B	Punto en EjeY	$B = (0, -1)$
5	Recta d	Recta que pasa por B perpendicular a EjeY	$d: y = -1$
6	Circunferencia e	Circunferencia con centro B y radio a^2 / b^2	$e: x^2 + (y + 1)^2 = 34.01$
7	Punto A	Punto de intersección de e, d	$A = (-5.83, -1)$
7	Punto C_1	Punto de intersección de e, d	$C_1 = (5.83, -1)$
8	Circunferencia f	Circunferencia con centro B y radio c	$f: x^2 + (y + 1)^2 = 16$

Protocolo de la Construcción			
Archivo Vista Ayuda			
Nº	Nombre	Definición	Valor
9	Punto D ₁	Punto de intersección de f, d	D ₁ = (-4, -1)
9	Punto C	Punto de intersección de f, d	C = (4, -1)
10	Segmento g	Segmento [A, C]	g = 9.83
11	Arco h	Semicircunferencia a través de A y C	h = 15.44
12	Punto D	Punto de intersección de h, EjeY	D = (0, 3.83)
13	Circunferencia k ₂	Circunferencia con centro B y radio b	k ₂ : x ² + (y + 1) ² = 1
14	Punto E	Punto de intersección de k ₂ , EjeY	E = (0, 0)
14	Punto F	Punto de intersección de k ₂ , EjeY	F = (0, -2)
15	Recta i	Recta que pasa por E paralela a g	i: y = 0
16	Número ED	Distancia de E a D	ED = 3.83
17	Texto TextoED	Nombre[E] + (Nombre[D]) + " \, = \, " + ED	TextoED = "ED \, = \, 3.83"
18	Circunferencia p	Circunferencia con centro B y radio a ² / (ED b)	p: x ² + (y + 1) ² = 2.32
19	Punto G ₁	Punto de intersección de p, g	G ₁ = (-1.52, -1)
19	Punto G	Punto de intersección de p, g	G = (1.52, -1)
20	Recta j	Recta que pasa por D perpendicular a EjeY	j: y = 3.83
21	Recta l	Recta que pasa por G perpendicular a g	l: x = 1.52
22	Punto H	Punto de intersección de j, l	H = (1.52, 3.83)
23	Punto K	Punto de intersección de l, i	K = (1.52, 0)
24	Segmento m	Segmento [G, H]	m = 4.83
25	Segmento n	Segmento [D, H]	n = 1.52
26	Cuadrilátero polígono1	Polígono D, H, K, E	polígono1 = 5.83
26	Segmento d ₁	Segmento [D, H] de Cuadrilátero polígono1	d ₁ = 1.52
26	Segmento h ₁	Segmento [H, K] de Cuadrilátero polígono1	h ₁ = 3.83
26	Segmento k	Segmento [K, E] de Cuadrilátero polígono1	k = 1.52
26	Segmento e ₁	Segmento [E, D] de Cuadrilátero polígono1	e ₁ = 3.83
27	Cuadrilátero polígono2	Polígono E, K, G, B	polígono2 = 1.52
27	Segmento e ₃	Segmento [E, K] de Cuadrilátero polígono2	e ₃ = 1.52
27	Segmento k ₁	Segmento [K, G] de Cuadrilátero polígono2	k ₁ = 1
27	Segmento g ₂	Segmento [G, B] de Cuadrilátero polígono2	g ₂ = 1.52
27	Segmento b ₂	Segmento [B, E] de Cuadrilátero polígono2	b ₂ = 1
28	Hipérbola q	x y = polígono1	q: x y = 5.83
29	Punto I	Punto de intersección de h, q	I = (1.95, 3)
29	Punto J	Punto de intersección de h, q	J = (-5.83, -1)
29	Punto L	Punto de intersección de h, q	L = (3.04, 1.92)
29	Punto O	Punto de intersección de h, q	O indefinida
30	Recta r	Recta que pasa por L perpendicular a g	r: x = 3.04
31	Recta s	Recta que pasa por I perpendicular a g	s: x = 1.95
32	Punto M	Punto de intersección de s, g	M = (1.95, -1)
33	Punto N	Punto de intersección de r, g	N = (3.04, -1)
34	Número distanciaBM	Distancia de B a M	distanciaBM = 1.95
35	Texto TextoBM	Nombre[B] + (Nombre[M]) + " \, = \, " + distanciaBM	TextoBM = "BM \, = \, 1.95"
36	Número distanciaBN	Distancia de B a N	distanciaBN = 3.04
37	Texto TextoBN	Nombre[B] + (Nombre[N]) + " \, = \, " + distanciaBN	TextoBN = "BN \, = \, 3.04"
38	Texto texto1	"La ecuación resuelta es: " + "x^3" + "+" + (b^2) + "x"	texto1 = "La ecuación resuelta es: x^3 + (b^2)x"

Descartes y la obtención de ecuaciones de una curva.

Para la construcción primero se traza una recta l que funcionara como el eje x , después vamos a localizar un punto G sobre esta recta y después generamos un deslizador “ a ” para localizar a esta distancia al punto A . Después trazamos una recta perpendicular a l que pase por el punto A la nombraremos l_0 , sobre esta colocamos un punto L que puede desplazar sobre toda la recta.

Después colocamos otro deslizador “ b ” para colocar un punto K a la distancia que marque ese deslizador sobre la recta l_0 respecto del punto L y después trazamos la segmento que pasa por G y L .

Después trazamos una paralela a l que pase por L y la nombraremos como l_2 , y colocamos un nuevo deslizador “ c ” para localizar el punto N a la distancia que indique el deslizador c y después trazamos la semi-recta que pasa por los K y N , para enseguida localizar el punto de intersección C de la semi-recta KN y el segmento GL . Después trazamos otra recta paralela a l que pase por C y localizamos la intersección de esta con la recta l_0 . Por último utilizamos la opción de lugar geométrico para determinar cómo se comporta el punto C conforme se mueve el punto L . A continuación presentamos la figura final después de seguir todos los pasos indicados anteriormente.

Para obtener la ecuación de la curva generada colocamos cinco puntos en cualquier lugar sobre la cónica, esto con la finalidad de usar la opción ‘cónica que pasa por cinco puntos’ que nos da el software, de este modo se presenta la ecuación de la cónica que corresponde a una rama de la hipérbola, en la parte algebraica aunque podemos presentarlo en la parte grafica mediante un cuadro de texto.

Solución de ecuaciones de cuarto grado de Descartes

La construcción que vamos a utilizar es la correspondiente para a solución de ecuaciones de la forma $z^4 = \pm pz^2 \pm qz \pm s$, donde para resolverla haremos uso de la intersección de una parábola con una circunferencia, haciendo la aclaración que la primera tendrá su vértice en el origen y la segunda podrá tener su centro fuera del origen (h, k) y su radio es r .

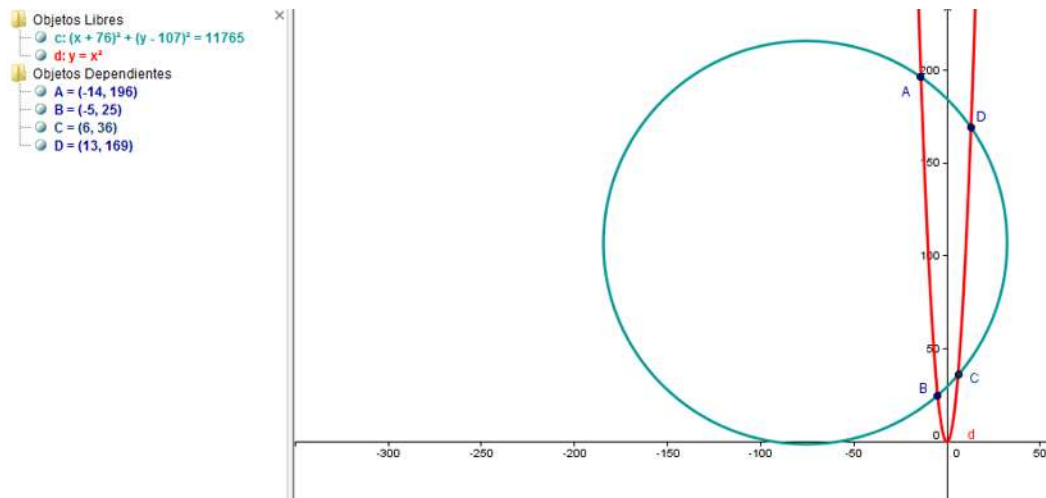
Para poder graficar las curvas anteriores necesitamos conocer los siguientes valores, donde p , q , s los obtenemos de la ecuación en cuestión. Una vez localizados esos valores los sustituimos en las siguientes ecuaciones:

$$k = \frac{1 - p}{2}$$

$$h = -\frac{q}{2}$$

$$r^2 = h^2 + k^2 - s$$

Con los valores anteriores graficamos la parábola y la circunferencia introduciendo las ecuaciones directamente en la barra de entrada del software. Después de realizar esto únicamente seleccionamos los puntos de intersección entre ambas curvas y las coordenadas en x de estos puntos serán las soluciones a nuestra ecuación de cuarto grado. A continuación presentamos una ilustración de lo anterior.



El protocolo de construcción de la imagen anterior se presenta en la siguiente tabla:

Protocolo de la Construcción			
Archivo Vista Ayuda			
Nº	Nombre	Definición	Valor
1	Circunferencia c		$c: (x + 76)^2 + (y - 107)^2 = 11765$
2	Parábola d		$d: y = x^2$
3	Punto A	Punto de intersección de c, d	$A = (-14, 196)$
3	Punto B	Punto de intersección de c, d	$B = (-5, 25)$
3	Punto C	Punto de intersección de c, d	$C = (6, 36)$
3	Punto D	Punto de intersección de c, d	$D = (13, 169)$

Bibliografía.

- Bell, E.T. (1985). *Historia de las Matemáticas*. Traducido por R. Ortiz de *The Development of Mathematics*, 1940. Fondo de cultura económica, México.
- Boyer, Carl B. (2004). *History of analytic geometry*. Editorial Dover, USA.
- Casalderrey, Francisco Martin (2000). *Cardano y Tartaglia, Las Matemáticas en el Renacimiento italiano, las Matemáticas en sus personajes*. Nivola Libros y ediciones, España.
- Chica, Ángel Blas (2001). *Las Matemáticas en sus personajes, tomo 8, Descartes, Geometría y método*. Nivola Libros y ediciones, España.
- Collete, Jean-Paul (1986). *Historia de las Matemáticas II*. Traducido por Alfonso Casal Piga de *histoire des mathématiques 2*, 1979, Siglo veintiuno editores, México.
- Descartes, R. (1997). *La Geometría*. Traducido por R. García Aguilar de *La Géométrie* (1637). Editorial Limusa, México.
- Eves, Howard (1969). *Estudio de las Geometrías volumen II*. Traducida por Francisco Paniagua de *A survey of geometry* (1965). Unión tipográfica editorial hispano americana. México.
- Gonzalez, Pedro Miguel Urbaneja (2003). *Orígenes y evolución histórica de la geometría analítica*. Editorial Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, Tenerife.
- Heath, Sir Tomas (1921). *A history of greek mathematics, vol. II From Aristarchus to Diophantus*. Dover Publications, Inc, New York.
- Kline, Morris (1992). *Pensamiento de la antigüedad a nuestros días I*. Traducido por Mariano Martínez, Juan Tarrés, Alfonso Casal de *Mathematical thought from ancient to modern times*, 1972. Alianza Editorial, España.
- Mandelbrot, Benoit (1984.) Artículo *De Apolonio de Perga a Kepler*. Editorial Norma, Barcelona.

Moreno, Ricardo Castillo (2002). *Omar Jayyam poeta y matemático, la matemática en sus personajes*. Nivola Libros y ediciones, España.

Torrecillas, Blas Jover (1999). *Fermat el mago de los números, la matemática en sus personajes*. Nivola Libros y ediciones, España.

Van der Warden (1985). *A history of algebra*. Editorial Springer-Velag, Berlin.