UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

TESIS

TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUTOS NUMERABLES

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

PRESENTA:

FABIOLA BAUTISTA BÁEZ

ASESOR:

Dr. DAVID MEZA ALCÁNTARA

MORELIA, MICHOACÁN, JUNIO 2013

Agradecimientos

Gracias a mis padres, Teresa y Manuel. Gracias a ellos que siempre me apoyaron. Nunca me obligaron a hacer algo que no quisiera hacer y trabajaron muchísimo para hacer posible que yo terminara mi carrera.

Gracias a Lilu, porque siempre cuidó de mí. Gracias Cristi, por ser sandía, porque gracias a tí me motivé y terminé la carrera. Gracias a Pablo por ser lindo.

Gracias a mis tíos, Leticia y Ricardo. Por su ayuda, en cualquiera que necesitara. Gracias especialmente a mi tío Ricardo por toda la ayuda económica que me brindó.

Gracias a mi asesor David Meza por aceptar trabajar conmigo en este proyecto y por ser muy amable todo ese tiempo. Gracias a mis sinodales Fernando Hernández, Rigoberto Vega, Jorge Luis López y Ariet Ramos, por aceptar revisar mi trabajo que me imagino no fue fácil. Y gracias a todos mis profesores por contribuir en mi educación durante casi cinco años. Gracias a Jorge de nuevo, por toda la ayuda durante esos años, incluso cuando él no era mi profesor.

Gracias a mis amigos que, aunque aparecen en diferentes épocas de mi vida, todos ellos son muy importantes para mí. Primero quiero agradecer a mis amigas con más antigüedad, Danimas e Ivón, porque siempre me aceptaron tal como soy. Mi primer año en Fismat no hubiera sido lo mismo sin Yadis, Yunis, Juan, Saul y Héctor. Después o tal vez al mismo tiempo aparecieron Mike, Abdón y Daniel. Y en mis últimos años tuve la compañía de Alma, Zaredh y Cecilio. Gracias a todos ellos. Quiero agredecer especialmente a Alma, por hacer que todo el tiempo que tuve que pasar en la escuela fuera infinítamente mejor.

Gracias a Héctor, otra vez, por ser la persona más increíble que conozco y por su ayuda incondicional durante toda mi carrera.

Índice general

Introducción

El presente trabajo se basa en el artículo *Analytic topologies over countable sets* [6], escrito por Stevo Todorčević y Carlos Uzcátegui, a lo largo de este trabajo se analizan las primeras secciones del artículo y se explican más a fondo los resultados de éste. El objetivo del trabajo es presentar algunos resultados de manera más explícita, agregando varios detalles.

En este trabajo estudiaremos topologías sobre conjuntos numerables. Podemos identificar a cada subconjunto de $\mathbb{N}$ con su función característica. Así, el conjunto potencia $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ se identifica con el *espacio de Cantor* $2^{\mathbb{N}}$. Por este hecho, podemos considerar a cada topología sobre $\mathbb{N}$ como un subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y de esta manera podremos decir que τ es cerrado, abierto, Borel, etc. Analizaremos qué pasa con la complejidad de una topología como subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$ si suponemos que cumple ciertas propiedades topológicas. Y viceversa, si τ tiene cierta complejidad como subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$, qué pasa topológicamente.

En el primer capítulo enunciamos varios resultados y definiciones de topología general e interpretaremos éstas en el caso particular de $2^{\mathbb{N}}$. También estudiaremos la topología sobre $2^{\mathbb{N}}$. Todos los resultados de este capítulo se utilizarán a lo largo de todo el trabajo.

En el segundo capítulo se analizan topologías cerradas y G_δ. Se estudian resultados importantes sobre topologías con la propiedad de Baire. Además, se analiza un ejemplo de una topología G_δ-completa.

En el tercer capítulo se estudia la complejidad de bases y subbases para una topología. En particular, estudiaremos qué propiedad necesita una topología para tener una base F_σ y G_δ.

En el cuarto capítulo estudiaremos la complejidad de las topologías Hausdorff. El resultado más importante del capítulo nos dice que las topologías analíticas Hausdorff, tienen complejidad al menos Π^0_3.

En el quinto capítulo se analizan dos ejemplos de espacios numerables y la complejidad de su topología. El primer ejemplo es una topología con complejidad $\Pi^0_{\alpha+1}$ sobre el espacio $\omega^{<\omega}$. La topología definida depende de un filtro sobre ω, así que, dependiendo de la complejidad del filtro se puede lograr que la topología tenga cierta complejidad. El segundo ejemplo analiza un grupo topológico con complejidad Σ^1_1-completo.

Aún quedan preguntas sin responder sobre el tema. Una de las preguntas más significativas es si toda topología analítica sobre un conjunto numerable tiene una base o subbase Borel, y si la respuesta es afirmativa, sería natural preguntar la complejidad mínima de tal base o subbase.

Capítulo 1

Conceptos básicos

En la sección 1 de este capítulo expondremos definiciones y resultados básicos de topología general, los cuales pueden ser consultados en [5]. En la sección 2 expondremos resultados de teoría descriptiva de conjuntos que pueden consultarse en [1].

1.1. Topología general

Un espacio topológico es un par (X, τ), donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X tales que $\emptyset$,$X \in \tau$ y τ es cerrado bajo uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Tal colección es llamada una topología sobre X y sus elementos son llamados conjuntos abiertos. El complemento de un conjunto abierto es un conjunto cerrado. Ambos, $\emptyset$ y X son cerrados. La colección de conjuntos cerrados es cerrada bajo intersecciones arbitrarias y uniones finitas.

Un subespacio de (X, τ) consiste de un subconjunto $Y \subseteq X$ con la topología relativa, $\tau \restriction Y = \{U \cap Y : U \in \tau\}$. En general, para un conjunto X, un subconjunto $Y \subseteq X$ y una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X, la restricción de $\mathcal{A}$ a Y se define por $\mathcal{A} \restriction Y = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$.

Una base $\mathcal{B}$ para una topología τ es una colección $\mathcal{B} \subseteq \tau$ con la propiedad de que cada conjunto abierto es la unión de elementos de $\mathcal{B}$. Para que una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X sea una base para una topología, es necesario y suficiente demostrar que la intersección de cualesquiera dos elementos de $\mathcal{B}$ se puede escribir como la unión de elementos de $\mathcal{B}$ y $\bigcup\{B : B \in \mathcal{B}\} = X$. Una subbase para una topología τ es una colección $\mathcal{S} \subseteq \tau$ tal que el conjunto de intersecciones finitas de conjuntos de $\mathcal{S}$ forma una base para τ. Si X es un espacio topológico y $x \in X$, una vecindad de x es un conjunto V que contiene un conjunto abierto U que contiene a x. Una vecindad abierta de x es un conjunto abierto que lo contiene. La colección de vecindades que contienen a x es un sistema de vecindades para x. Con respecto a un sistema de vecindades para $x \in X$ se tiene el siguiente resultado.

1.1.1 Teorema. *Sea X un espacio topológico. Si para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{B}_x$ de subconjuntos de X satisface*

i) Si $V \in \mathcal{B}_x$, entonces $x \in V$.

ii) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$, entonces existe $V_3 \in \mathcal{B}_x$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$.

iii) Si $V \in \mathcal{B}_x$, existe $V_0 \in \mathcal{B}_x$ tal que si $y \in V_0$, entonces existe $W \in \mathcal{B}_y$ con $W \subseteq V$.

Entonces $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades de x.

1.1.2 Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **segundo numerable** si tiene una base numerable.

Producto Topológico.

1.1.3 Definición. Para cada $\alpha \in A$, sea X_α un conjunto. El producto cartesiano de los conjuntos X_α es el conjunto

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{x : A \longrightarrow \bigcup X_\alpha : (\forall \alpha \in A)(x(\alpha) \in X_\alpha)\}$$

que se denota por $\prod X_\alpha$ si no hay confusión con el conjunto de índices. El valor de $x \in \prod X_\alpha$ en α se denota usualmente por x_α y se refiere a la α-ésima coordenada de x.

Supóngase ahora que para cada $\alpha \in A$, X_α es un espacio topológico. Queremos definir una topología sobre el producto cartesiano.

1.1.4 Definición. La topología de Tychonoff (o topología producto) en $\prod X_\alpha$ se obtiene tomando como base para los abiertos, conjuntos de la forma $\prod U_\alpha$, donde

i) U_α es abierto en X_α, para cada $\alpha \in A$

ii) Para todas, excepto una cantidad finita de coordenadas, se tiene $U_\alpha = X_\alpha$.

Se verifica facilmente que *i*) se puede reemplazar por

i') Para todo $\alpha \in A$, $U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$, donde $\mathcal{B}_\alpha$ es una base fija para la topología de X_α.

Nótese que el conjunto $\prod U_\alpha$, donde $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para una cantidad finita $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, se puede escribir como

$$\prod U_\alpha = \Pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap \Pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$$

donde

$$\Pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \left\{ x \in \prod X_\alpha : x(\alpha_i) \in U_{\alpha_i} \right\}.$$

La función $\prod_\beta : \prod X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ definida por $\prod_\beta(x) = x_\beta$ se llama la función proyección del producto sobre X_β, o simplemente la β-ésima proyección.

Por tanto, la topología producto es precisamente la topología que tiene por subbase a la colección

$$\left\{ \Pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A \,, U_\alpha \text{ abierto de } X_\alpha \right\}.$$

1.1.5 Definición. Un espacio métrico es un par (X, ρ), con X un conjunto y $\rho : X \times X \to [0\ ,\ \infty)$ una función que satisface:

i) $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

iii) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Tal función se llama métrica sobre X.

Definimos la bola abierta con centro en $x \in X$ y radio r por

$$B_r(x) = \{y \in X : \rho(y, x) < r\}$$

con $r>0$. Las bolas abiertas forman una topología sobre X, llamada la topología del espacio métrico. Un espacio topológico (X, τ) es **metrizable** si existe una métrica ρ sobre

X tal que τ es la topología de (X, ρ). En este caso decimos que ρ es compatible con τ.

1.1.6 Definición. Un subconjunto $D \subseteq X$ de un espacio topológico X es denso si intersecta a todos los conjunto abiertos no vacíos. Un espacio que contiene un conjunto denso numerable se llama **separable**.

Sea (X, ρ) un espacio métrico. Una sucesión de Cauchy es una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X tal que $\forall \epsilon > 0\ \exists N\ \forall m, n \geqslant N\ \rho(x_n, x_m) < \epsilon$. Decimos que (X, ρ) es completo si toda sucesión de Cauchy tiene límite en X.

1.1.7 Definición. Un espacio es completamente metrizable si existe una métrica ρ para X compatible con su topología y tal que (X, ρ) es completo. Un espacio se dice **polaco** si es separable y completamente metrizable.

1.1.8 Ejemplo. i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ son espacios polacos.

ii) Cualquier conjunto A con la topología discreta es completamente metrizable, y si es numerable entonces es un espacio polaco.

iii) El espacio de Cantor 2^ω y el espacio de Baire $\mathcal{N} = \omega^\omega$, son espacios polacos.

Otros conceptos importantes que necesitaremos a lo largo de este trabajo son los axiomas de separación y compacidad que explicamos brevemente a continuación.

1.1.9 Definición. Sea X espacio topológico.

i) Decimos que X es T_0 si y sólo si para cualquiera dos elementos distintos de X, existe un conjunto abierto que contiene a uno y no al otro.

ii) Decimos que X es T_1 si y sólo si para x,$y \in X$ distintos, existe una vecindad de cada uno que no contiene al otro.

iii) Decimos que X es T_2 (Hausdorff) si y sólo si para x, $y \in X$ distintos, existen conjuntos abiertos ajenos U y V con $x \in U$, $y \in V$.

iv) Decimos que X es regular si y sólo si para cada conjunto cerrado F de X y $x \notin F$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V tales que $x \in V$ y $V \subseteq F$.

Es claro que si un espacio es T_2 es a su vez T_1 y T_0, es decir, se dan las siguientes implicaciones

$$T_2 \Longrightarrow T_1 \Longrightarrow T_0$$

Además, un espacio regular T_1 es Hausdorff.

1.1.10 Definición. Un espacio topológico X es **compacto** si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita, es decir, si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos abiertos y $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, entonces existe $I_0 \subseteq I$ finito tal que $X = \bigcup_{i\in I_0} U_i$.

La siguiente proposición nos da más información sobre espacios compactos.

1.1.11 Proposición. *i) Un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff es cerrado.*

ii) Un subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

iii) (Teorema de Tychonoff) El producto de espacios compactos es compacto.

En espacios métricos se cumple la siguiente equivalencia para conjuntos compactos.

1.1.12 Proposición. *Sea X un espacio métrico. X es compacto si y sólo si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.*

1.1.13 Definición. Sea X un espacio topológico. Un punto $p \in X$ es punto límite si toda vecindad de p contiene un punto $q \neq p$. Un punto $p \in X$ es un punto aislado si no es punto límite. Denotamos al conjunto de puntos límite de X por $X^{(1)}$.

1.1.14 Definición. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Entonces f es **continua** en $x_0 \in X$ si y sólo si para cada vecindad V de $f(x_0)$, existe un vecindad U de x_0 tal que $f(U) \subset V$. Decimos que f es continua si lo es para todo $x_0 \in X$.

1.1.15 Definición. Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$. Entonces f es un **homeomorfismo** si es biyectiva, continua y además su inversa también es continua.

1.2. Conjuntos magros

1.2.1 Definición. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ se dice **nunca denso** si su cerradura $\bar{A}$ tiene interior vacío, es decir, $\mathrm{int}(\bar{A}) = \emptyset$ (equivalentemente si $X \setminus \bar{A}$ es denso). Equivalentemente, $A \subseteq X$ es nunca denso si y sólo si para todo abierto no vacío U de X, existe un abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $V \cap A = \emptyset$.

1.2.2 Definición. Un conjunto $A \subseteq X$ es **magro** (o de la primer categoría) si $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, donde cada A_n es nunca denso. Equivalentemente, $A \subseteq X$ es magro si y sólo si está contenido en una unión numerable de conjuntos cerrados nunca densos. Un conjunto que no es magro se dice de la segunda categoría. El complemento de un conjunto magro es un conjunto **comagro** (o residual). Un conjunto comagro contiene la intersección numerable de una familia de conjuntos densos abiertos.

Se cumplen las siguientes propiedades de los conjuntos nunca densos y de los conjuntos magros.

1.2.3 Proposición. *Sea X espacio topológico*

i) Si $A \subseteq X$ es nunca denso entonces $\bar{A}$ es nunca denso.

ii) Si $B \subseteq A \subseteq X$, y A es nunca denso, entonces B es nunca denso.

iii) Si A,$B \subseteq X$ son nunca densos entonces $A \cup B$ es nunca denso.

Demostración. Para demostrar los incisos *ii*) y *iii*) usaremos la definición equivalente de los conjuntos nunca densos.

i) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\bar{A})) = \mathrm{int}(\bar{A}) = \emptyset$.

ii) Sea U abiertono vacío. Existe V abierto tal que $V \subseteq U$ y $V \cap A = \emptyset$. Se tiene entonces que

$$V \cap B = \emptyset,$$

de aquí que B es nunca denso.

iii) Sea U abierto no vacío de X. Existen dos abiertos $V,W \neq \emptyset$ de X tales que $V,W \subseteq U$ y $V \cap A = \emptyset$, $W \cap B = \emptyset$. Ahora, también existen abiertos V',W' tales que $V' \subseteq V$, $W' \subseteq W$ y $V' \cap B = \emptyset$, $W' \cap A = \emptyset$. Entonces

$$(W' \cup V') \cap (A \cup B) = (W' \cap A) \cup (W' \cap B) \cup (V' \cap A) \cup (V' \cap B) = \emptyset,$$

con $V' \cup W' \subseteq U$. Por tanto $A \cup B$ es nunca denso.

□

1.2.4 Proposición. *Sea X espacio topológico*

i) Si $M \subseteq X$ es magro y $N \subseteq M$, entonces N es magro.

ii) Si $\{M_n : n \in \omega\}$ es una familia numerable de conjuntos magros, entonces $\bigcup_{n\in\omega} M_n$ es magro.

Demostración. Usaremos la definición equivalente de los conjuntos magros para demostrar la proposición.

i) Si M es magro entonces existe una familia de conjuntos cerrados nunca densos $\{F_n : n \in \omega\}$ tales que $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n$. Entonces

$$N \subseteq M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} F_n.$$

ii) Para cada n existe una familia de conjuntos cerrados nunca densos $\{F_{k,n} : k \in \omega\}$ tales que $M_n \subseteq \bigcup_{k\in\omega} F_{k,n}$. Entonces

$$\bigcup_{n\in\omega} M_n \subseteq \bigcup_{n,k\in\omega} F_{k,n}.$$

□

1.2.5 Definición. Un **ideal** $\mathcal{I}$ en un conjunto X es una colección de subconjuntos no vacía de X que contiene al vacío y cumple:

i) Si $A, B \in \mathcal{I}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{I}$.

ii) Si $A \subseteq B$ y $B \in \mathcal{I}$ entonces $A \in \mathcal{I}$.

Si además es cerrado bajo uniones numerables se llama σ-ideal.

1.2.6 Ejemplo. La colección de los conjuntos nunca densos de un espacio topológico forman un ideal y la colección de los conjuntos magros forman un σ-ideal.

1.2.7 Definición. Sea X un espacio topológico y $U \subseteq X$ un abierto. Decimos que $A \subseteq X$ es **magro en** U si $A \cap U$ es magro en X (esto es equivalente a decir que $A \cap U$ es magro en U con la topología de subespacio). Además, A es **comagro en** U si $U \setminus A$ es magro.

1.2.8 Definición. Sea $\mathcal{I}$ un σ-ideal en un conjunto X. Si $A, B \subseteq X$, decimos que A, B son **congruentes módulo** $\mathcal{I}$, en símbolos $A =_{\mathcal{I}} B$, si la **diferencia simétrica** $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{I}$.

En particular, si $\mathcal{I}$ es el σ-ideal de los conjuntos magros de un espacio topológico, escribimos

$$A =_* B$$

y decimos que A y B son congruentes módulo los conjuntos magros.

1.2.9 Proposición. *La relación $=_{\mathcal{I}}$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Sea $\mathcal{I}$ un σ-ideal en un conjunto X.

i) Reflexiva: Si $A \subseteq X$

$$A \triangle A = \emptyset \in \mathcal{I}.$$

ii) Simétrica: Sean A,$B \subseteq X$ tales que $A =_{\mathcal{I}} B$, entonces

$$A \triangle B = B \triangle A \in \mathcal{I}.$$

iii)Transitiva: Sean $A \triangle B \in \mathcal{I}$ y $B \triangle C \in \mathcal{I}$. Entonces

$$A \triangle C \subseteq (A \triangle B) \cup (B \triangle C) \in \mathcal{I}.$$

Así que $A \triangle C \in \mathcal{I}$. □

1.2.10 Definición. Sea X un espacio topológico. Un conjunto $A \subseteq X$ tiene la **Propiedad de Baire** (BP) si $A =_* U$ para algún conjunto abierto $U \subseteq X$.

En particular todos los conjuntos abiertos, cerrados, F_σ y G_δ tienen la Propiedad de Baire.

1.3. Topología sobre el espacio de Cantor 2^ω

En la definición de producto topológico de la sección anterior, consideramos el caso particular en el que el conjunto $X_\alpha = \{0, 1\}$ para cada $\alpha \in A$ dotado con la topología discreta, y el conjunto de índices A es el conjunto de los números naturales. Llamamos a dicho producto el espacio de Cantor y será denotado por

$$2^\omega$$

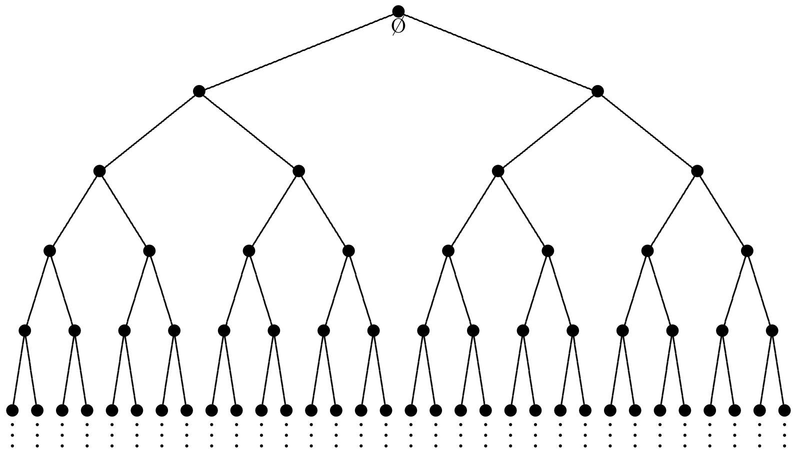
Al espacio de Cantor también lo podemos pensar como homeomorfo al conjunto potencia de los números naturales ω, al identificar cada subconjunto de naturales con su función característica.

Según la topología del producto topológico, un abierto subbásico de 2^ω es el conjunto de todas las funciones que en un subconjunto finito de ω toman solamente un valor, 1 o 0. Entonces, $V \subseteq 2^\omega$ es un abierto básico si existen dos conjunto finitos F y K, tales que dado $x \in V$, si $\alpha \in F$ entonces $x(\alpha) = 1$ y si $\alpha \in K$ entonces $x(\alpha) = 0$. Por lo dicho anteriormente, podemos escribir a V como

$$V = \{A \subseteq \omega : F \subseteq A \;\&\; K \cap A = \emptyset\}.$$

Admitimos el caso en que alguno, F o K, es vacío. Por ejemplo, una vecindad básica V para la función $x \in 2^\omega$ que sólo toma el valor 1, K debe ser vacío pues de lo contrario x no pertenecería a V. De igual manera, para cualquier vecindad básica de la función que toma sólo el valor 0, el conjunto finito F deberá ser vacío.

El espacio de Cantor lo podemos visualizar de la siguiente manera:



La raíz del árbol representa la sucesión vacía. Los niveles del árbol están enumerados por los naturales. Cada rama representa una sucesión de ceros y unos, donde ir a la derecha significa que en ese nivel (natural) toma el valor uno e ir a la izquierda significa tomar el valor cero.

La utilidad de visualizar al espacio de Cantor como lo hicimos en la figura anterior es que podemos definir la misma topología de manera distinta y muchas veces esta nueva forma de definirla nos facilitará el trabajo. Tal topología es la generada por las sucesiones finitas que definimos a continuación.

Para $n \in \omega$, denotamos por 2^n al conjunto de todas las sucesiones finitas $s = (s(0), s(1), \ldots, s(n-1)) = (s_0, \ldots, s_{n-1})$ de longitud n, donde s_j toma el valor 1 ó 0, para toda j. Permitimos el caso en que $n = 0$, en este caso $2^0 = \{\emptyset\}$, donde $\emptyset$ denota la sucesión vacía. La longitud de una sucesión finita s la denotamos por $|s|$. Entonces $|\emptyset| = 0$. Si $s \in 2^n$ y $m<n$ entonces podemos restringir s a m, $s \restriction m = (s_0, \ldots, s_{m-1})$ $(s \restriction 0 = \emptyset)$. Si s,t son sucesiones finitas binarias, decimos que s es segmento incial de t y t es extensión de s (en símbolos, $s \subseteq t$) si $s = t \restriction m$, para alguna $m<|t|$. Entonces, $\emptyset \subseteq s$, para cualquier sucesión s. Dos sucesiones son compatibles si una es segmento inicial de la otra y son incompatibles en caso contrario. Finalmente, denotamos por

$$2^{<\omega} = \bigcup_{n\in\omega} 2^n$$

al conjunto de sucesiones binarias finitas. La concatenación de $s = (s_i)_{i<n}$, $t = (t_j)_{j<m}$ es la sucesión $s^\frown t = (s_0, \ldots, s_{n-1}, t_0, \ldots, t_{m-1})$. Escribimos $s^\frown 0$ o $s^\frown 1$ en lugar de $s^\frown(0)$ o $s^\frown(1)$.

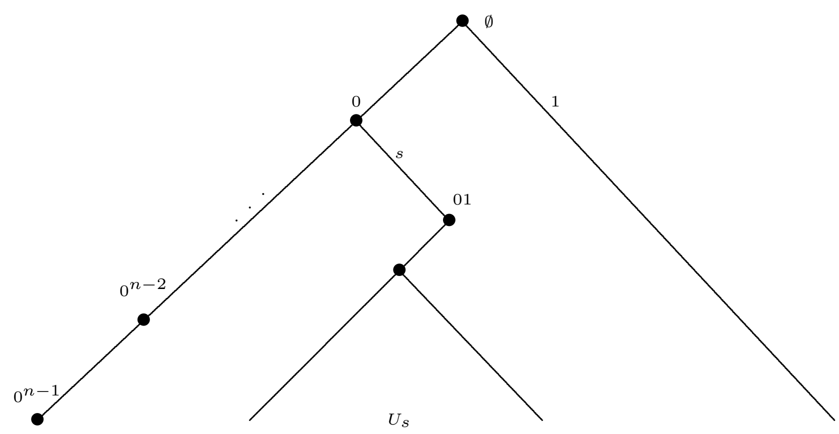
Si $x \in 2^\omega$ y $n \in \omega$, sea $x \restriction n = (x_0, \ldots, x_{n-1}) \in 2^n$. Decimos que $s \in 2^n$ es segmento inicial de $x \in 2^\omega$ si $s = x \restriction n$. Escribimos $s \subseteq x$ si s es **segmento inicial** de x. Además, para $s \in 2^{<\omega}$ y $x \in 2^\omega$, la concatenación de s y x es la sucesión infinita $s^\frown x = y$, donde $y(i) = s(i)$ si $i<|s|$ y $y(|s| + i) = x(i)$.

Con esto podemos definir la base deseada con la nueva definición.

1.3.1 Definición. Sea $s \in 2^{<\omega}$. Definimos el cono de s por

$$U_s = \{x \in 2^\omega : s \subseteq x, \}$$

es decir, como el conjunto de sucesiones que tiene como segmento inicial a s.



1.3.2 Proposición. *El conjunto de conos, $\mathcal{B} = \{U_s : s \in 2^{<\omega}\}$, forma una base para 2^ω.*

Demostración. Para demostrar esto veamos que la topología de Tychonoff y la definida por los conos es la misma. Sean $F, K \subseteq \omega$ conjuntos finitos y $V = \{A \subseteq \omega : F \subseteq A \ \& \ K \cap A = \emptyset\}$ abierto básico de la topología producto. Sea $M = \text{máx}\{n : n \in F \cup K\}$ y

$$U := \bigcup\{U_s : s \in 2^{M+1} \ \& \ \forall n \in F(s(n) = 1) \ \& \ \forall n \in K(s(n) = 0)\}$$

Si $A \in U_s$, para algún $s \in 2^{M+1}$ que además cumple $\forall n \in F$, $s(n) = 1$ y $\forall n \in K$,$s(n) = 0$, entonces $A \in V$, así $U \subseteq V$. Consideramos ahora U_t el cono con $t \in 2^n$. Sea $x \in U_t$ tal que $x(i) = 0$, para todo $i > n$. Definimos a los conjuntos finitos F y K por

$$K = \{m : m < n \ \& \ x(m) = 0\} \text{ y } F = \{m : m < n \ \& \ x(m) = 1\}.$$

Así, si $A \in U_t$ entonces $A \in V = \{A \subseteq \omega : F \subseteq A \ \& \ K \cap A = \emptyset\}$ abierto básico de la topología producto.

□

Algunos otros resultados sobre los conos son los siguientes.

1.3.3 Proposición. *El complemento de un cono es abierto.*

Demostración. Sea $s \in 2^{<\omega}$ y U_s el cono correspondiente. Supongamos que $|s| = n$. Si $y \in 2^\omega \setminus U_s$, y no tiene como segmento inicial a s, entonces tendrá como segmento inicial a algún $t \in 2^n$ distinto de s. Así que

$$2^\omega \setminus U_s = \bigcup_{\substack{t \in 2^n \\ t \neq s}} U_t$$

De éstos sólo existen una cantidad finita, así que el complemento de U_s es la unión finita de abiertos básicos. □

1.3.4 Proposición. *Todo subconjunto cerrado $F \subseteq 2^\omega$ es intersección de cerrado-abiertos básicos.*

Demostración. Sea $F \subseteq 2^\omega$ conjunto cerrado. Existe $\mathcal{G} \subseteq 2^{<\omega}$ y $\mathcal{U} = \{U_t : t \in \mathcal{C}\}$ familia de abiertos básicos tales que $2^\omega \setminus F = \bigcup_{t\in\mathcal{C}} U_t$. Entonces

$$F = 2^\omega \setminus \bigcup_{t\in\mathcal{C}} U_t = \bigcap_{t\in\mathcal{C}} (2^\omega \setminus U_t);$$

por la Proposición 1.3.3, los conjuntos $2^\omega \setminus U_t$ son cerrado-abiertos básicos. $\square$

Algunas veces usaremos la base dada por Tychonoff y algunas otras usaremos la de los conos, pues en ocaciones, una definición nos facilitará las cosas en lugar de la otra.

Además, podemos definir una métrica ρ sobre 2^ω. Sean x,$y \in 2^\omega$, y $M_{x,y} = \text{mín}\{k : x(k) \neq y(k)\}$. Definimos a $\rho : 2^\omega \times 2^\omega \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{2^{M_{x,y}+1}} & x \neq y. \end{cases}$$

Es claro que se cumple i) y ii) de la Definición 1.1.5. Para verificar iii) supongamos que $x \neq y \neq z$, pues el caso en que se da una igualdad es claro. Si $M_{x,y} > M_{x,z}$ entonces $M_{y,z} = M_{x,z}$, así que $\rho(x,y) \leqslant 2\rho(x,z)$. Si $M_{x,y} < M_{x,z}$, entonces $M_{z,y} = M_{x,y}$ con lo que se da la desigualdad. De hecho, ρ es una ultramétrica, es decir, cumple que $\rho(x,y) \leqslant \max\{\rho(x,z), \rho(z,y)\}$.

1.3.5 Observación. Un subconjunto $D \subset 2^\omega$ es **denso** si $\forall s \in 2^{<\omega}$, existe $d \in D$ tal que $s \subseteq d$.

1.3.6 Proposición. *La colección de subconjuntos finitos de ω es un conjunto denso en 2^ω.*

Demostración. Para cualquier abierto básico U_s, con $s \in 2^{<\omega}$, la sucesión $x \in 2^\omega$ tal que $x \restriction |s| = s$ y $x(i) = 0$ para $i \geqslant |s|$, es un elemento de U_s y representa un conjunto finito de ω. $\square$

En general, las definiciones anteriores para 2^ω funcionan también para 2^X, con X un conjunto numerable. Así, si $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ es una enumeración de X, un abierto básico para x_i es U_s, con $s \in 2^i$.

La definición de convergencia de una suscesión también es necesaria, pero la enunciamos para la topología de 2^ω.

1.3.7 Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega} \subset 2^\omega$ es **convergente** a $x \in 2^\omega$ si y sólo si, $\forall k\ \exists N\ \forall n \geqslant N$, $x_n \restriction k = x \restriction k$.

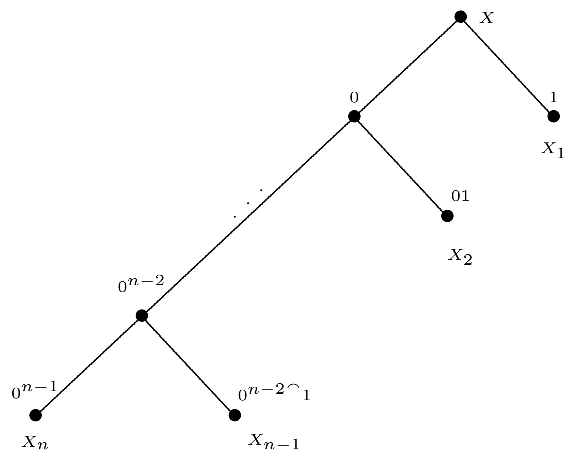
1.3.8 Definición. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es **cero-dimensional** si es Hausdorff y tiene una base de conjuntos cerrado-abiertos.

En vista de la Proposición 1.3.3, el espacio de Cantor 2^ω tiene una base de conjuntos cerrado-abiertos numerable. Además, 2^ω es un espacio Hausdorff. Para cualesquiera $x \neq y \in 2^\omega$, sea $n \in \omega$ el primer elemento donde difieren. Entonces $x \in U_{x\restriction n}$, $y \in U_{y\restriction n}$ y $U_{y\restriction n} \cap U_{x\restriction n} = \emptyset$. De aquí que el espacio de Cantor es cero-dimensional.

1.3.9 Teorema. *El espacio de Cantor es el único, salvo homeomorfismos, espacio métrico compacto cero-dimensional y sin puntos aislados.*

Demostración. Ya hemos dicho que el espacio de Cantor es cero-dimensional. Es compacto por el Teorema de Tychonoff (Proposición 1.1.11 (iii)). Además definimos una métrica que resulta ser comptible con la topología de los conos, pues las bolas abiertas coinciden con los conos; $B_{2^{\frac{1}{k}}}(x) = U_{x\restriction k}$, para $x \in 2^\omega$. No tiene puntos aislados pues para cualquier punto, cualquier cono que lo contenga contendrá además una infinidad de elementos.

Sea X un espacio que satisface las condiciones del Teorema. Consideremos una cubierta de cerrado-abiertos básicos para X de diámetro $<\frac{1}{2}$. Por la compacidad de X, existe una subcubierta finita, $X_1, \ldots, X_n$ de cerrado-abiertos con diam $<\frac{1}{2}$ que además podemos suponer ajenos. Sea $C_\emptyset = X_1 \cup \ldots \cup X_n = X$, $C_{0^i{}^\frown 1} = X_{i+1}$ para $0 \leqslant i < n-1$, $C_{0^{n-1}} = X_n$, (donde $0^i = 00\ldots0$, i veces). Cada X_i cumple con las condiciones del teorema, es decir, cada unos de ellos es métrico, compacto, cero-dimensional y sin puntos aislados. Repetimos entonces el proceso para cada X_i, usando ahora conjuntos de diámetro menor a $\frac{1}{3}$, y así sucesivamente por inducción.



Definimos $f : 2^\omega \to X$, por $f(x) = \bigcap_{n\in\omega} C_{x\restriction n}$. Veamos que está bien definida, supongamos que existen $y, z \in C_{x\restriction n}$ para todo n. Entonces la distancia de z a y es menor a $\frac{1}{n}$ para todo n, así que $x = y$.

Sea $C = f(2^\omega)$. Veamos que f es un homeomorfismo sobre C. Sea $s \in 2^{<\omega}$ entonces $f(U_s) = f(2^\omega) \cap C_s$, así que f es abierta. También $f^{-1}(C \cap C_s) = f^{-1}(C_s) = U_s$, de aquí que f es continua pues los conjuntos $C \cap C_s$ forman una base para C. Así, 2^ω es homeomorfo a $f(2^\omega)$. Note que f es suprayectiva, pues para cada n, los cerrado-abiertos de diámetro $<\frac{1}{n}$ forman una partición de X. Con esto hemos terminado, 2^ω es homeomorfo a X.

$\square$

1.3.1. Árboles y conjuntos cerrados

1.3.10 Definición. Un subconjunto $T \subseteq 2^{<\omega}$ es un **árbol** si no es vacío y es cerrado bajo segmentos iniciales, es decir, si $t \in T$ y $s \subseteq t$, entonces $s \in T$. Además, $T \subseteq 2^{<\omega}$ es **bien podado** si todo $s \in T$ tiene una extensión propia, es decir, $t \supsetneq s$, $t \in T$.

1.3.11 Definición. Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol. Se definen las ramas de T como

$$[T] = \{x \in 2^\omega : \forall n(x \restriction n \in T).\}$$

Dado un subconjunto $F \subseteq 2^\omega$, podemos definir

$$T_F = \{s \in 2^{<\omega} : \exists x \in F(s \subseteq x)\}$$

el conjunto de segmentos iniciales de elementos de F. T_F es siempre un árbol bien podado, como lo dice la proposición siguiente:

1.3.12 Proposición. *El conjunto T_F es árbol bien podado.*

Demostración. Si $s \in T_F$ y $n \in \omega$ es tal que $n < |s|$, entonces existe $x \in F$ tal que $s \subseteq x$. Si consideramos $s \restriction n$, x es tal que si lo restringimos a $|s \restriction n|$ coinicide con $s \restriction n$. De lo anterior T_F es árbol. Además T_F es bien podado pues, para cualquier $s \in T_F$, restringir al x que cumple que $s \subseteq x$ a cualquier $n \geqslant |s|$, esta restricción es una extensión propia de s y es un elemento de T_F.

$\square$

1.3.13 Proposición. *i) Sean $F, K \subseteq 2^\omega$ conjuntos cerrados. Si $T_K = T_F$, entonces $K = F$.*

ii) Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ árbol bien podado, entonces $T = T_{[T]}$.

Demostración. i) Sea $x \in K$ y $n \in \omega$. Entonces $x \restriction n \in T_K = T_F$, así que existe $y_n \in F$ tal que $x \restriction n \subset y_n$. Esto se cumple para cada $n \in \omega$, por tanto, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge a x. Entonces $x \in \overline{F} = F$. De manera análoga, $x \in F$ implica $x \in K$.

ii) Veamos que $T_{[T]} \subseteq T$. Sea $s \in T_{[T]}$, entonces existe $x \in [T]$ tal que $s \subseteq x$. Por definición de las ramas de T, se tiene que $x \restriction |s| = s \in T$. Para demostrar la otra otra contención, sea $s \in T$. Como T es bien podado, existe $x \in [T]$ tal que $x \supseteq s$. Por tanto $s \in T_{[T]}$.

$\square$

1.3.14 Proposición. *Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol. Entonces $[T]$ es cerrado.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq [T]$ una sucesión convergente a x. Entonces para todo n existe $N \in \omega$ tal que para todo $m \geqslant N$ se tiene $x \restriction n = x_m \restriction n \in T$. Por tanto $x \in [T]$. $\square$

1.3.15 Ejemplo. Sea $x \in 2^\omega$ la función constante 1 y sea $A = 2^\omega \setminus \{x\}$. Note que A no es subconjunto cerrado de 2^ω pues podemos definir una sucesión $\{x_n\}_{n\in\omega}$ donde cada x_n toma el valor 1 en los primeros n naturales. Esta sucesión converge a $x \notin A$. Ahora, es claro que $T_A = 2^{<\omega}$ y que $2^\omega = [T_A]$, pero $A \neq 2^\omega$.

1.3.16 Proposición. *Un subconjunto $F \subseteq 2^\omega$ es cerrado si y sólo si $[T_F] = F$*

Demostración. Es inmediato que si se da la igualdad entonces F es cerrado pues $[T_F]$ lo es. Nótese que siempre se tiene que el conjunto F está contenido en el conjunto de ramas de T_F, pues para todo $x \in F$, x mismo cumple que $x \restriction n \in T_F$. Así, para demostrar la otra implicación sólo falta demostrar la contención $[T_F] \subseteq F$. Sea $x \in 2^\omega \setminus F$, dado que F es cerrado existe $N \in \omega$ tal que el cono $U_{x\restriction N}$, es ajeno con F. Además, $x \restriction N \notin T_F$ y por tanto $x \notin [T_F]$. □

1.3.2. Conjuntos magros

El siguiente teorema es una caracterización combinatoria de los conjuntos magros en el espacio de Cantor.

1.3.17 Teorema (Bartoszyński, 1983)**.** *Para todo conjunto magro $M \subseteq 2^\omega$, existen $x_M \in 2^\omega$ y una función estrictamente creciente $f_M \in \omega^\omega$ tales que*

$$M \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall_n^\infty \exists j \in [f_M(n)\,,\, f_M(n+1))(x(j) \neq x_M(j))\}.$$

Demostración. Nótese primero que el conjunto

$$\{x \in 2^\omega : \forall_n^\infty \exists j \in [f_M(n)\,,\, f_M(n+1))(x(j) \neq x_M(j))\} =$$

$$= \{x \in 2^\omega : (\exists m \in \omega)(\forall n \geqslant m)(\exists j \in [f_M(n)\,,\, f_M(n+1)))(x(j) \neq x_M(j))\} =$$
$$= \bigcup_{m\in\omega} \{x \in 2^\omega : (\forall n \geqslant m)(\exists j \in [f_M(n)\,,\, f_M(n+1)))(x(j) \neq x_M(j))\}$$

sí es un conjunto magro. Sea

$$M_{m,f_M,x_M} = \{x \in 2^\omega : (\forall n \geqslant m)(\exists j \in [f_M(n)\,,\, f_M(n+1)))(x(j) \neq x_M(j)\}.$$

Para $m \in \omega$ fijo, demostremos que M_{m,f_M,x_M} es nunca denso. Sea U_s con $s \in 2^{<\omega}$ y sea $k \geqslant m$ tal que $f_M(k) \geqslant |s|$. Escojamos $t \in 2^{f_M(k)}$ extensión de s. Consideramos

$r = t^\frown x_M(f_M(k))^\frown x_M(f_M(k)+1)^\frown \ldots ^\frown x_M(f_M(k+1)-1)$ y el cono U_r. Supongamos que $x \in U_r$ y $x \in M_{m,f_M,x_M}$. Entonces existe $j \in [f_M(k), f_M(k+1))$ tal que $x(j) \neq x_M(j)$. Sin embargo, si $x \in U_r$, x coincide con x_M para todo $j \in [f_M(k), f_M(k+1))$, lo cual no puede ser. Por tanto,

$$U_r \cap M_{m,f_M,x_M} = \emptyset.$$

Además, $U_r \subseteq U_s$, lo que nos dice que el conjunto M_{m,f_M,x_M} es nunca denso. Así que $\bigcup\limits_{m\in\omega} M_{m,f_M,x_M}$ es magro.

Sea M cualquier conjunto magro. Entonces existe una sucesión de cerrados nunca densos $\{M_n : n \in \omega\}$ tal que $M \subseteq \bigcup_{n\in\omega} M_n$. Definamos a continuación la sucesión x_M y la función f_M.

Defininimos por inducción dos sucesiones; $\langle k_n : n \in \omega\rangle$ de números naturales y $\langle s_n : n \in \omega\rangle$ de sucesiones finitas. Ahora, existe $s_0 \in 2^{<\omega}$ tal que el cono $U_{s_0} \subseteq 2^\omega \setminus M_0$ (M_0 es nunca denso). Hacemos $k_0 = 0$ y $k_1 = |s_0|$. Para determinar s_1, enumeramos todas las sucesiones de longitud k_1, que son una cantidad finita. Sea t_1 la primera de ellas, entonces existe $t_1' \in 2^{<\omega}$ tal que $U_{t_1'} \subseteq U_{t_1}$ y $U_{t_1'} \cap (M_0 \cup M_1) = \emptyset$. Sea t_2 la siguiente sucesión de longitud k_1. Consideramos el abierto básico de la concatenación de $t_2^\frown t_1'$. Entonces existe $t_2' \in 2^{<\omega}$ tal que $U_{t_2'} \subseteq U_{t_2^\frown t_1'}$ y $U_{t_2'} \cap (M_0 \cup M_1) = \emptyset$. Procedemos de la misma manera para todas las sucesiones de longitud k_1. Sea $k = \frac{1}{2^{k_1}}$. Para la última sucesión t_k existe t_k' tal que $U_{t_k'} \subseteq U_{t_k^\frown t_{k-1}'}$ y $U_{t_k'} \cap (M_0 \cup M_1) = \emptyset$. Hacemos $s_1 = t_k'$ y definimos $k_2 = k_1 + |s_1|$. Para $n \geqslant 2$ definimos $k_n = k_{n-1} + |s_{n-1}|$ y para determinar la sucesión s_n, procedemos como se hizo anteriormente, ahora con las sucesiones de longitud k_n y evadiendo al conjunto $\bigcup\limits_{i\leqslant n} M_i$.

Se define $f_M(n) = k_n$ para $n \in \omega$ y $x_M = \bigcup_{i\in\omega} s_i$. De la definición anterior se sigue que para $x \in 2^\omega$, si existe una infinidad de valores de n para los cuales

$$x \restriction [f_M(n), f_M(n+1)) = x_M \restriction [f_M(n), f_M(n+1)) = s_{n+1} \restriction [f_M(n), f_M(n+1));$$

entonces $x \notin \bigcup\limits_{n\in\omega} M_n \supseteq M$, pues por como construimos a s_{n+1}, x estaría evadiendo a la unión de los M_n.

$\square$

1.3.18 Observación. Podemos generalizar el resultado anterior para el espacio de Baire ω^ω. Si $A \subseteq \omega^\omega$, entonces A es magro si y sólo si, existen $f \in \omega^\omega$ estrictamente creciente y $g \in \omega^\omega$ tales que

$$A \subseteq \{x \in \omega^\omega : \forall_n^\infty \exists j \in [f(n)\,,\,f(n+1))(x(j) \neq g(j))\}.$$

1.3.3. Funciones continuas

Enunciaremos la versión de continuidad considerando al espacio de Cantor 2^ω como dominio.

1.3.19 Proposición. *Sea X un espacio topológico. Una función $f : X \longrightarrow 2^\omega$ es continua si y sólo si para todo $x \in X$ y para todo $n \in \omega$ existe U abierto (básico) de X tal que $x \in U$ y para todo $v \in U$, $f(v) \restriction n = f(x) \restriction n$.*

1.3.20 Proposición. *Sean $f, g : 2^\omega \times 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$, $h : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ las funciones definidas por $f(A\,,B) = A \cap B$, $g(A\,,B) = A \cup B$ y $h(A) = \omega \setminus A$. Entonces, f,g,h son continuas y abiertas. Más aún, h es homeomorfismo.*

Demostración. Es fácil ver que para todo $n \in \omega$,

$$f(A,B)(n) = \text{mín}\{A(n), B(n)\} \text{ y } g(A,B)(n) = \text{máx}\{A(n), B(n)\},$$

que son funciones continuas. Para demostrar que son abiertas, veamos que g lo es y la demostración para f es análoga.

Sean $s, t \in 2^{<\omega}$, y $U_s \times U_t \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ un abierto básico del producto. Sea $C \in g(U_s \times U_t)$, entonces existe $(A, B) \in U_s \times U_t$ tal que $g(A, B) = A \cup B = C$. Sea $k = \text{máx}\{|s|, |t|\}$. Afirmamos que $U_{C\restriction k} \subseteq g(U_s \times U_t)$. Sea $D \in U_{C\restriction k}$, entonces

$$D \restriction k = C \restriction k = (A \cup B) \restriction k = A \restriction k \cup B \restriction k = \text{máx}\{t, s\}.$$

De aquí que existe $A' \in U_s$ y $B' \in U_t$ tal que $D = A' \cup B'$, es decir $D \in g(U_s \times U_t)$. Por tanto g es abierta.

Veamos ahora que h es homeomorfismo. Es claro que h es inyectiva y suprayectiva, pues $h^{-1}(B) = \omega \setminus B = h(B)$, para todo $B \in 2^\omega$. Por lo anterior bastará demostrar que h es continua. Sea $s \in 2^n$, U_s abierto básico de 2^ω, entonces

$$h^{-1}(U_s) = U_{1-s},$$

donde $(1-s)(n) = 1 - s(n)$.

□

El resultado anterior nos será muy útil pues nos dice que la colección de conjuntos abiertos es homeomorfa a la colección de conjuntos cerrados en el espacio 2^ω. Podremos hacer uso de esto cuando trabajar con conjuntos cerrados sea más sencillo que hacerlo con conjuntos abiertos, y viceversa.

1.3.21 Proposición. *La función $f : 2^\omega \times 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ definida, para cada par $A, B \subseteq \omega$, por $f(A, B) = A \cap B$ es cerrada.*

Demostración. Sea $K \times F \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ conjunto cerrado. Sea $\{x_n\}_{n\in\omega} \subseteq f(K \times F)$ sucesión convergente a $x \in 2^\omega$. Para cada $n \in \omega$, existen $z_n, y_n \in K \times F$ tales que $f(z_n, y_n) = z_n \cap y_n = x_n$. Como el conjunto $K \times F$ es un subconjunto cerrado de $2^\omega \times 2^\omega$, también es compacto. De esto se obtiene subsucesión convergente en $K \times F$, digamos $\{(z'_n, y'_n)\}_{n\in\omega} \longrightarrow (z', y') \in K \times F$. Queremos demostrar que $x = z' \cap y'$. Ahora, se cumple que $z'_n \longrightarrow z'$ y $y'_n \longrightarrow y'$, entonces

$$\forall k\ \exists N_z^k\ z'_m \restriction k = z' \restriction k,\ m \geqslant N_z$$

$$\forall k\ \exists N_y^k\ y'_m \restriction k = y' \restriction k,\ m \geqslant N_y.$$

Dado k, sea $N = \max\{N_z^k, N_y^k\}$. Entonces, $x_m \restriction k = z'_m \cap y'_m \restriction k = z' \cap y' \restriction k$, para todo $m \geqslant N$. Por tanto $\{x_n\}$ converge a $z' \cap y'$ y dado que 2^ω es Hausdorff, $z' \cap y' = x$. □

1.3.22 Proposición. *Sea $\psi : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ continua y abierta. Si $C \subseteq 2^\omega$ es comagro entonces $\psi(C)$ es comagro en $\psi(2^\omega)$.*

Demostración. Primero veamos que la imagen bajo ψ de un conjunto nunca denso F es nunca denso. Sea $U_t \subseteq 2^\omega$ un abierto básico, entonces $\psi^{-1}(U_t)$ es abierto. Existe $U_s \subseteq \psi^{-1}(U_t)$ tal que $U_s \cap F = \emptyset$. Entonces

$$\psi(U_s) \subseteq \psi(\psi^{-1}(U_t)) \subseteq U_t,$$

es decir, $\psi(U_s)$ es un abierto contenido en U_t que además cumple $\psi(U_s) \cap \psi(F) = \emptyset$, entonces $\psi(F)$ es nunca denso.

Si C es comagro entonces $C = 2^\omega \setminus M$, con $M = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, F_n conjunto nunca denso. Se cumple que la imagen de M bajo ψ es magro pues $\psi(M) = \bigcup_{n\in\omega} \psi(F_n)$, con $\psi(F_n)$ conjunto nunca denso. Finalmente

$$\psi(C) = \psi(2^\omega) \setminus \psi(M) \subseteq \psi(2^\omega \setminus M).$$

□

1.4. La jerarquía de Borel

1.4.1 Definición. Si X es cualquier conjunto, una **σ-álgebra** sobre X es una colección de subconjuntos de X que es cerrado bajo complementos y uniones numerables. Si además X es un espacio topológico, la clase de los conjuntos Borel es la mínima σ-álgebra que contiene a los conjuntos abiertos.

1.4.2 Definición. Sea X un espacio polaco. Definimos por recursión

$$\Sigma^0_1(X) = \{U \subseteq X : U \text{ es abierto}\},\ \ \Pi^0_1(X) = \{F \subseteq X : F \text{ es cerrado}\}$$

Para $1 < \alpha < \omega_1$, definimos recursivamente

$$\Sigma^0_\alpha(X) = \{\bigcup_{n\in\omega} A_n : A_n \in \bigcup_{0<\beta<\alpha} \Pi^0_\beta(X)\},$$

$$\Pi^0_\alpha(X) = \{X \smallsetminus A : A \in \Sigma^0_\alpha(X)\}.$$

Finalmente, para $\alpha>0$ definimos

$$\Delta^0_\alpha(X) = \Sigma^0_\alpha(X) \cap \Pi^0_\alpha(X).$$

Cuando no haya confusión sobre el espacio con el que trabajamos escribimos simplemente Δ^0_α,Σ^0_α y Π^0_α.

En particular tenemos que $\Sigma_2^0 = F_\sigma$(uniones numerables de cerrados), $\Pi_2^0 = G_\delta$(intersecciones numerables de abiertos), $\Sigma_3^0 = G_{\delta\sigma}$(uniones numerables de conjuntos G_δ), $\Pi_3^0 = F_{\sigma\delta}$(intersecciones numerables de conjuntos F_σ), etc.

1.4.3 Lema. *Sea X espacio métrico y $\alpha \in \omega_1$.*

1. Σ_α^0, Π_α^0, Δ_α^0 *están cerradas bajo uniones e intersecciones finitas.*
2. Σ_α^0 *está cerrado bajo uniones numerables.*
3. Π_α^0 *está cerrada bajo intersecciones numerables.*
4. Δ_α^0 *está cerrada bajo uniones e intersecciones numerables.*
5. $\Sigma_\alpha^0 \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0 \subseteq \Pi_{\alpha+1}^0$.
6. $\Pi_{\alpha+1}^0 \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0 \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0$.

Por el lema anterior se tiene la siguiente jerarquía:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & \Sigma_1^0 & & & & \Sigma_2^0 & & & & \Sigma_3^0 & & \cdots & & \Sigma_\alpha^0 & & \cdots \\
 & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & \\
\Delta_1^0 & & & & \Delta_2^0 & & & & \Delta_3^0 & & & & \cdots & & & & \Delta_{\alpha+1}^0 \cdots \\
 & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown & & \diagup & \\
 & & \Pi_1^0 & & & & \Pi_2^0 & & & & \Pi_3^0 & & \cdots & & \Pi_\alpha^0 & & \cdots
\end{array}
$$

La complejidad de Borel nos sirve como herramienta para explicar las topologías sobre conjuntos numerables vistas como subconjuntos de 2^ω. Decir que $A \in \Sigma_\alpha^0$ significa una cota superior en complejidad. Los conceptos de completez y ser hard significan cotas inferiores en complejidad. Más adelante definiremos lo que significan estos conceptos.

Denotamos por $\mathbf{B}(X)$ a la clase de los conjuntos Borel del espacio X. Así $\mathbf{B}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Delta_\alpha$.

1.4.4 Definición. Sean X, Y conjuntos y $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Decimos que A es **Wadge reducible** a B, en símbolos $A \leqslant_W B$, si existe una función continua $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f^{-1}(B) = A$, es decir, $x \in A$ si y sólo si $f(x) \in B$.

La clase de Borel es interpretable en cada espacio polaco y como esta, otras clases más lo son, por ejemplo Σ^0_ξ, Π^0_ξ, etc. Informalmente consideramos clases Γ de este estilo y denotamos por $\Gamma(X)$ la colección de subconjuntos de X que pertenecen a Γ.

1.4.5 Definición. Sea Γ una clase de conjuntos en espacios polacos. Si Y es un espacio polaco, decimos que $A \subseteq Y$ es Γ-*hard* si $B \leqslant_W A$ para cualquier $B \in \Gamma(X)$, donde X es cualquier espacio polaco cero-dimensional. Más aún, si $A \in \Gamma(Y)$, decimos que A es Γ-*completo.*

Note que si A es Γ-hard (Γ-completo) y $A \leqslant_W B$, entonces B es Γ-hard (Γ-completo, si además $B \in \Gamma$). Está obsevación nos da la base de un método para demostrar que un conjunto B es Γ-hard; escoger un conjunto A que sepamos es Γ-hard y demostrar que $A \leqslant_W B$.

1.4.6 Teorema (Wadge)**.** *Sea X un espacio polaco cero-dimensional. Entonces $A \subseteq X$ es Σ^0_ξ-completo si y sólo si A está en $\Sigma^0_\xi \setminus \Pi^0_\xi$. Además, un conjunto Borel $A \subseteq X$ es Σ^0_ξ-hard si y sólo si no es Π^0_ξ y similarmente intercambiando Σ^0_ξ por Π^0_ξ.*

Con el propósito de dar un ejemplo de un conjunto Π^0_3-completo, revisemos algo sobre teoría de juegos.

Sea A conjunto no vacío y $X \subseteq A^\omega$. Asociamos con X el siguiente juego:

I	a_0		a_2	$\dots$	
II		a_1		a_3	$\dots$

El jugador I juega $a_0 \in A$. II juega $a_1 \in A$, I juega $a_2 \in A$, etc. I gana si, y sólo si $(a_n)_{n\in\omega} \in X$. Denotamos este juego por $G(A, X)$. Una **estrategía** para I es un mapeo $\phi : A^{<\omega} \to A^{<\omega}$ tal que $|\phi(s)| = |s| + 1$ y $s \subseteq t$ implica $\phi(s) \subseteq \phi(t)$.

Una estrategía para I se puede visualizar como una función $\phi : A^{<\omega} \to A$ con I jugando $a_0 = \phi(\emptyset)$, $a_2 = \phi((a_1))$, $a_4 = \phi((a_1, a_3))$, cuando II juega $a_1, a_3, \ldots$. Una estrategía es ganadora para I en $G(A, X)$, si para cada instancia del juego $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, en la cual I sigue esta estrategía, $(a_n)_{n\in\omega} \in X$. Similarmente podemos definir una estrategía ganadora para el jugador II. Note que no puede pasar que ambos jugadores I y II tengan estrategía ganadora en $G(A, X)$. Decimos que el juego $G(A, X)$ o sólo el conjunto X está **determinado** si uno de los dos jugadores tiene estrategía ganadora.

Un resultado importante sobre juegos es cuando tratamos con conjuntos Borel.

1.4.7 Teorema (Martin)**.** *Sea T un árbol bien podado no vacío sobre un conjunto A y $X \subseteq [T]$ conjunto Borel. Entonces $G(T, X)$ está determinado.*

Sean S, T árboles bien podados no vacíos de ω y $A \subseteq [S]$, $B \subseteq [T]$ conjuntos Borel. Definimos el juego de Wadge que denotamos por WG(A,B) por

I	$x(0)$		$x(1)$	$\ldots$	
II		$y(0)$		$y(1)$	$\ldots$

donde $x(i), y(i) \in \omega$; $x \upharpoonright n \in S$, $y \upharpoonright n \in T$ para todo $i \in \omega$, $n \in \omega$. El jugador II gana si $x \in A$ si y sólo si $y \in B$. Como A, B son conjuntos Borel, por el Teorema 1.4.7, el juego está determinado. Podemos enunciar una modificación del Lema de Wadge [1].

1.4.8 Lema. *En el juego de Wadge, si el jugador II tiene estrategia ganadora entonces $A \leqslant_W B$.*

1.4.1. Π^0_3-completez y $\emptyset \times FIN$

1.4.9 Ejemplo. Un ejemplo de un conjunto que es Π^0_3-completo es el ideal sobre $\omega \times \omega$ denotado por $\emptyset \times FIN$ dado por

$$\emptyset \times FIN = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall n(|\{i : (n, i) \in A\}| < \infty)\}$$

$\emptyset \times FIN$ es Π^0_3-hard y además es $F_{\sigma\delta}$. Esto útltimo lo podemos verificar a continuación. Escribimos a $\emptyset \times FIN$ como

$$\emptyset \times FIN = \{A \subseteq \omega \times \omega : \forall n \exists m \forall i \geqslant m((n,i) \notin A)\}$$

$$= \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m\in\omega} \bigcap_{i\geqslant m} \{A \subseteq \omega \times \omega : (n,i) \notin A\}.$$

Para n, m fijos y $i \geqslant m$, el conjunto $\{A \subseteq \omega \times \omega : (n,i) \notin A\}$ es cerrado en $\omega \times \omega$. En efecto, sea $\{A_k\}_{k\in\omega}$ sucesión convergente a A. Para todo k, existen $B_k, C_k \subseteq \omega$ tales que $A_k = (B_k, C_k)$ y cumplen que $n \notin B_k$ e $i \notin C_k$. Además, $\{B_k\}_{k\in\omega}$ forma una sucesión convergente a $B \subseteq \omega$ con $n \notin B$. De igual manera, $\{C_k\}_{k\in\omega}$ forma una sucesión convergente a $C \subseteq \omega$ con $i \notin C$. De aquí que $A = (B, C) \in \emptyset \times FIN$.

Con esto demostramos que $\emptyset \times FIN$ es Π^0_3, sólo falta demostrar que es Π^0_3-hard, es decir, que para cualquier $B \in \Pi^0_3(X)$, $B \leqslant_W \emptyset \times FIN$ para X un espacio polaco cero-dimensional. Para demostrar esto usaremos el juego de Wadge, $WG(A, B)$.

Sea $B \in \Pi^0_3(X)$, con X espacio polaco cero-dimensional. De hecho, podemos suponer que $B \subseteq 2^\omega$, pues X es polaco. Además, $B = \bigcap_{i=0}^{\infty} A_i$, donde A_i es F_σ y $A_i \subseteq A_{i'}$ si $i' \leqslant i$. Podemos suponer también, $A_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} F_{ij}$, con F_{ij} cerrado y $F_{ij} \subseteq F_{ij'}$ si $j \leqslant j'$. Sea $\{e_n\}_{n\in\omega}$ una enumeración de $\omega \times \omega$. Consideramos el siguiente juego:

I	b_0		b_1	$\dots$	
II		c_0		c_1	$\dots$

donde B es el jugador I, $\emptyset \times FIN$ es el jugador II, y $c_n, b_n \in \{0, 1\}$. El jugador II gana si pasa que $(b_0, b_1, \dots,) \in B$ si y sólo si $(c_0, c_1, \dots) \in \emptyset \times FIN$. Dadas las jugadas de I, consideramos los siguientes casos para definir las jugadas de II.

- Caso 1: Si $U_{(b_0)} \cap B \neq \emptyset$, en particular $\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{k_0 j} \cap U_{(b_0)} \neq \emptyset$, donde k_0 es tal que

$e_0 = (k_0, l_0)$. El jugador II guarda el valor $(k_0, j(k_0))$, donde $j(k_0) = \text{mín}\{j : U_{(b_0)} \cap F_{k_0 j} \neq \emptyset\}$ y juega $c_0 = 1$.

- Caso 2: Si $U_{(b_0)} \cap B = \emptyset$, existe i_0 tal que $U_{(b_0)} \cap A_{i_0} = \emptyset$. Por tanto, el jugador II juega $c_0 = 1$ si y sólo si $i_0 = k_0$.

Para la jugada n:

- Caso 1: Si $U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap B \neq \emptyset$, en particular $\bigcup_{j=0}^{\infty} F_{k_n j} \cap U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap B \neq \emptyset$, donde k_n es tal que $e_n = (k_n, l_n)$, para algún l_n.

  i) Si para todo $m < n$ se tiene $k_m \neq k_n$. Definimos $j(k_n) = \text{mín}\{j : U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap F_{k_n j} \neq \emptyset\}$ y el jugador II juega $c_n = 1$.

  ii) Si existe $m < n$ tal que $k_m = k_n$. Suponemos definida $j(k_m)$. Si $j(k_m) = \text{mín}\{j : U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap F_{k_n j} \neq \emptyset\}$ entonces definimos $j(k_n) = j(k_m)$ y II juega $c_n = 0$.
  Si $j(k_m) > \text{mín}\{j : U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap F_{k_n j} \neq \emptyset\}$, entonces $j(k_n) = \text{mín}\{j : U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap F_{k_n j} \neq \emptyset\}$ y II juega $c_n = 1$

- Caso 2: Si $U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap B = \emptyset$, consideramos $i_0 = \text{mín}\{i : U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap A_i = \emptyset\}$. El jugador II juega $c_n = 1$ si y sólo si $i_0 = k_n$.

Veamos que esto es una estrategía ganadora para II. Si $(b_0, b_1, \ldots,) \in B$ entonces $U_{(b_0,b_1,\ldots,b_n)} \cap B \neq \emptyset$, para todo n. Por tanto, se cumplió el Caso 1 en todo el juego. Sea $k \in \omega$ y n el mínimo tal que $k = k_n$. Ahora, $c_n = 1$ y si para algún $n' < n$, se tiene que $k'_n = k_n$, entonces, sólo existen tantos unos como elementos menores que $j(k_n)$. Por tanto, si $e_{n'} = (k_{n'}, l_{n'})$ y $l_{n'} > j(k_n)$ así que $c_{n'} = 0$.

Por otro lado, si $(b_0, b_1, \ldots) \notin B$ existe n_0 tal que $U_{(b_0,b_1,\ldots,b_{n_0})} \cap B = \emptyset$. Por tanto, para todo $m \geqslant n_0$ nos encontramos en el Caso 2, es decir, $k_n = n_0$. Para todo $r > n$, si $e_r = (n_0, l_r)$ entonces, $c_r = 1$, es decir, $c \notin \emptyset \times FIN$.

Con esto demotramos que $\emptyset \times FIN$ tiene estrategia ganadora, así que $B \leqslant_W \emptyset \times FIN$ (Lema 1.4.8).

1.4.2. G_δ-completez y $\mathcal{NWD}$

Un resultado importante que necesitaremos más adelante es el que nos dice que el ideal de los conjuntos nunca densos $K(2^\omega)$ (el espacio de conjuntos compactos de 2^ω), es G_δ-completo. Denotemos por $\mathcal{NWD}$ a este ideal. Pero primero estudiemos un poco acerca del hiperespacio de subconjuntos compactos de un espacio topológico.

1.4.10 Definición. Sea X un espacio topológico. Denotamos por $K(X)$ el espacio de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X con la topología de Vietoris, es decir, la generada por los conjuntos de la forma

$$\{K \in K(X) : K \subseteq U\}.$$

$$\{K \in K(X) : K \cap U \neq \emptyset\}.$$

para U abierto de X. Una base para esta topología consiste de los conjuntos

$$\{K \in K(X) : K \subseteq U_0 \;\; \& \;\; K \cap U_1 \neq \emptyset \;\; \& \;\; \dots \;\; \& \;\; K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

para $U_0, U_1, \dots, U_n$ abiertos en X.

1.4.11 Proposición. *Sea X un espacio topológico cero-dimensional. Entonces $K(X)$ es cero-dimensional*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de cerrado-abiertos de X. Sean $U_0, U_1, \dots U_n \in \mathcal{B}$, y

$$\mathcal{U} = \{K \in K(X) : K \subseteq U_0 \;\; \& \;\; K \cap U_1 \neq \emptyset \;\; \& \;\; \dots \;\; \& \;\; K \cap U_n \neq \emptyset\}$$

abierto básico de $K(X)$. Entonces $K(X) \setminus \mathcal{U}$ es de la forma

$$K(X) \setminus \mathcal{U} = \{K \in K(X) : K \cap (X \setminus U_0) \neq \emptyset\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{K \in K(X) : K \subseteq (X \setminus U_i)\}.$$

para $X \setminus U_0, X \setminus U_1, \dots, X \setminus U_n$ cerrado-abiertos. Por tanto $X \setminus \mathcal{U}$ es abierto de $K(X)$. De aquí que $K(X)$ tendrá una base de cerrado-abiertos.

□

1.4.12 Proposición. *Sea $T_r \subseteq 2^{2^{<\omega}}$ el conjunto de todos los árboles en $2^{<\omega}$ y $Pt_r \subseteq$*

$2^{2^{<\omega}}$ *el conjunto de árboles bien podados en* $2^{<\omega}$*. Entonces* T_r *y* Pt_r *son conjuntos cerrados de* $2^{2^{<\omega}}$*.*

Demostración. Primero demostremos que T_r es cerrado. Sea $\{T_n\}_{n\in\omega} \subseteq T_r$ sucesión convergente a $T \in 2^{2^{<\omega}}$. Deseamos demostrar que T es un árbol. Sea $s \in T$ y $V = \{A \subseteq 2^{<\omega} : s \in A\}$. Existe N tal que para todo $n \geqslant N$, $T_n \in V$. Así que, para todo $t \subseteq s$, $t \in T_n$ para todo $n \geqslant N$. Por tanto

$$W = \{A \subseteq 2^{<\omega} : t \in A\} \supseteq \{T_n : n>N\}$$

W es un conjunto cerrado así que $T \in \overline{\{T_n : n>N\}} \subseteq W$. Por tanto $t \in T$.

Para demostrar que PT_r es cerrado, sea $\{T_n\}_{n\in\omega} \subseteq PT_r$ sucesión convergente a $T \in 2^{2^{<\omega}}$. Por lo anterior T es árbol, sólo es necesario demostrar que es bien podado. Existe N tal que para todo $n \geqslant N$, $T_n \in V_s = \{A \subseteq 2^{<\omega} : s \in A\}$, por tanto $\{T_n : n \geqslant N\} \subseteq V_s$. Note que

$$V_s = V_{s^\frown 0} \cup V_{s^\frown 1} \text{ y } V_{s^\frown 0} \cap V_{s^\frown 1} = \emptyset.$$

Nos gustaría demostrar que $s^\frown 0 \in T$ o $s^\frown 1 \in T$. Supongamos que para todo $m \geqslant N$, existe $m' > m$ tal que $s^\frown 0 \notin T_{m'}$. Por tanto, para todo $m \geqslant N$, existe $m' > m$ tal que $s^\frown 1 \in T_{m'}$. Si T_{n_k} es subsucesión de T_n tal que, para todo k, $s^\frown 1 \in T_{n_k}$. Como $\{T_{n_k}\}$ converge a T, se tiene que $s^\frown 1 \in T$. □

1.4.13 Proposición. *La función* $\psi : K(2^\omega) \longrightarrow PT_r$*, definida por* $\psi(K) = T_K$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la proposición 1.3.12, T_K es árbol bien podado, es decir que ψ está bien definida y por la proposición 1.3.13, es inyectiva. La inversa de ψ está dada por $\psi^{-1}(T) = [T]$. En efecto,

$$\psi^{-1}(\psi(K)) = \psi^{-1}(T_K) = [T_K] = K \quad \text{(Proposición 1.3.16(i))}$$

$$\psi(\psi^{-1}(T)) = \psi([T]) = T_{[T]} = T \quad \text{(Proposición 1.3.16(ii))}$$

Por la Proposición 1.3.14, $[T]$ es subconjunto cerrado de 2^ω y por tanto es compacto, así $[T] \in K(2^\omega)$.

Veamos que ψ es continua. Sean $F, G \subseteq 2^{<\omega}$ conjuntos finitos y $U = \{A \in Pt_r : F \subseteq A \ \& \ G \cap A = \emptyset\}$ abierto básico de $2^{2^{<\omega}}$. Si $F = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ y $G = \{s_0, s_1, \ldots, s_m\}$, sea

$$\mathcal{U} = \{K \in K(2^\omega) : K \subseteq 2^\omega \setminus \bigcup_{i=0}^{m} U_{s_i} \ \& \ K \cap U_{t_0} \neq \emptyset \ \& \ K \cap U_{t_1} \neq \emptyset \ \& \ \ldots \ \& \ K \cap U_{t_n} \neq \emptyset\}$$

Demostremos que $\mathcal{U} \subseteq \psi^{-1}(U)$. Sea $K \in \mathcal{U}$ y consideremos $\psi(K) = T_K$. Si $x \in K \cap U_{t_i}$, entonces $t_i \subseteq x$. Por tanto $t_i \in T_K$, así $F \subseteq T_K$. Además, si suponemos que para algún i se cumple que $s_i \in T_K$, entonces existe $x \in K$ tal que $x \supseteq s_i$, lo cual no puede pasar pues se cumple que, para todo $x \in K$, $x \notin U_{s_i}$. Por tanto, $K_0 \cap T_K = \emptyset$. De aquí que $T_K \in U$. Veamos ahora que $\mathcal{U} \supseteq \psi(U)$. Sea K tal que $\psi(K) = T_K \in U$. Dado que $s_i \notin T_K$, para todo $x \supseteq s_i$, $x \notin [T_K] = K$. Por tanto, $K \subseteq 2^\omega \setminus \bigcup_{i=0}^m U_{s_i}$. Además, como $t_j \in T_K$ y T_K es árbol bien podado, existe $x \in [T_K] = K$ tal que $t_j \subseteq x$. Por tanto, $U_{t_j} \cap K \neq \emptyset$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Para demostrar que es un homeomorfismo, demostremos que ψ es abierta. Sea $\mathcal{U}$ abierto básico de $K(2^\omega)$. Si

$$\mathcal{U} = \{K \in K(2^\omega) : K \subseteq U_{t_0} \ \ \& \ \ K \cap U_{t_1} \neq \emptyset \ \& \ \ldots \ \& \ K \cap U_{t_n} \neq \emptyset\}$$

definimos $F = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ y $G = \{t \in 2^{|t_0|} : t \neq t_0\} = 2^{|t_0|} \setminus \{t_0\}$. Sea

$$U = \{A \subseteq 2^\omega : F \subseteq A \ \ \& \ G \cap A = \emptyset\}$$

abierto básico de $2^{2^{<\omega}}$. Queremos demostrar que $U = \psi(\mathcal{U})$. Sea $T \in U$. Sabemos que $\psi([T]) = T$, así que sólo falta demostrar que $[T] \in \mathcal{U}$. Sea $x \in [T]$, y consideremos $t = x \restriction |t_0| \in T$. Dado que $T \in U$, pasa que $t = t_0$, así que $x \in U_{t_0}$. Para $1 \leqslant i \leqslant n$, $t_i \in T$, así que existe $x_i \in [T]$ tal que $x_i \restriction |t_i| = t_i$, es decir, $[T] \cap U_{t_i} \neq \emptyset$. Con esto queda demostrado que $U \subseteq \psi(\mathcal{U})$. Para demostrar la otra contención sea $T \in \psi(\mathcal{U})$, es decir,$\psi([T]) = T$. Dado que $[T] \in \mathcal{U}$, para todo $j = 1, \ldots, n$, existe $x \supseteq t_j$, así que $x \restriction |t_i| = t_j \in T$. Por tanto $F \subseteq T$. También se cumple que, para todo $x \in [T]$, $x \in U_{t_0}$. De aquí que, si $t \in 2^{|t_0|} \setminus \{t_0\}$, entonces $t \notin T$. Por tanto $G \cap T = \emptyset$.

□

Recordemos que $\mathcal{NWD}$ denota el conjunto $\{A \in K(2^\omega) : A \text{ es nunca denso en } 2^\omega\}$ y veamos ahora que es un conjunto G_δ. Sea $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$ una base de cerrado-abiertos para 2^ω, entonces podemos escribir a $\mathcal{NWD}$ como

$$\mathcal{NWD} = \{F \in K(2^\omega) : \forall n\ \exists m(U_m \subseteq U_n\ \ \&\ \ F \cap U_m = \emptyset)\} =$$
$$= \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{m} \{F \in K(2^\omega) : F \cap U_m = \emptyset\ \&\ U_m \subseteq U_n\}.$$

Para n, m fijos, el conjunto $\{F \in K(2^\omega) : F \cap U_m = \emptyset)\}$ es abierto en $K(2^\omega)$. De aquí que $\mathcal{NWD}$ es una intersección numerable de conjuntos abiertos, es decir, es un conjunto G_δ.

Para demostrar que es G_δ-completo, en vista del Teorema 1.4.6, pues como $K(2^\omega)$ es cero-dimensional, sólo falta demostrar que $\mathcal{NWD}$ no es F_σ. Para esto usaremos el siguiente teorema que enunciamos sin demostración [2].

1.4.14 Teorema. *Si $\mathcal{I}$ es un ideal que es Δ^0_2 (es decir, Π^0_2 y Σ^0_2) de conjuntos compactos en un espacio compacto metrizable entonces es de la forma $K(A)$ para algún $A \in D_2$, donde D_2 es la clase de intersecciones de un compacto y un abierto.*

Supongamos entonces que $\mathcal{NWD}$ es tanto Σ^0_2 como Π^0_2, es decir, $\mathcal{NWD} \in \Delta^0_2$. Entonces $\mathcal{NWD} = K(A)$, donde $A = F \cap U$, F cerrado y U abierto. Para cada $x \in 2^\omega$, $\{x\}$ es un conjunto nunca denso. Si $x \notin A$ entonces $\{x\} \notin K(A)$. Por tanto, para todo $x \in 2^\omega$ debe estar en A, pero eso querrá decir que $A = 2^\omega$. Lo cual es una contradicción pues $\mathcal{NWD} \neq K(2^\omega)$.

1.4.3. Conjuntos analíticos

A continuación algunas definiciones y resultados de los espacios polacos y conjuntos analíticos que nos serán de utilidad y se pueden consultar en [1].

1.4.15 Definición. Sea X un espacio polaco. Decimos que $A \subseteq X$ es analítico si existen un espacio polaco Y, $f : Y \longrightarrow X$ continua y $B \in \mathbf{B}(Y)$ tal que $A = f(B)$. Denotamos por $\Sigma^1_1(X)$ a la colección de todos los subconjuntos analíticos de X.

El siguiente lema nos da varias alternativas para caracterizar los conjunto analíticos.

1.4.16 Lema. *Sea X un espacio polaco. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) $A \in \Sigma_1^1(X)$.

ii) $A = \emptyset$ *o existe* $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ *continua tal que* $f(\omega^\omega) = A$.

iii) Existe un espacio polaco Y y $B \subseteq Y \times X$ cerrado tal que $A = \pi_X(B)$, donde π_X es la proyección en la coordenada X.

1.4.17 Definición. Sea X un espacio polaco. Decimos que $A \subseteq X$ es $\Pi_1^1(X)$ si $X \setminus A$ es analítico. $\Pi_1^1(X)$ es la colección de los subconjuntos coanalíticos.

Una función $f : X \to Y$ es Borel medible si para todo $B \in \mathbf{B}(Y)$, $f^{-1}(B) \in \mathbf{X}$, es decir, la preimagen de conjuntos Borel es Borel.

1.4.18 Lema. *Sea X un espacio polaco.*

i) $\Sigma_1^1(X)$ *y* $\Pi_1^1(X)$ *son cerrados bajo uniones e intersecciones numerables.*

ii) Si $f : X \longrightarrow Y$ *es Borel medible y* $A \in \Sigma_1^1(X)$ *entonces* $f(A) \in \Sigma_1^1(Y)$.

iii) $\Sigma_1^1(X)$ *y* $\Pi_1^1(X)$ *son cerrados bajo imagenes inversas de funciones Borel medibles.*

1.4.19 Teorema. *Sea X un espacio polaco y $B \subseteq X$ es un conjunto Borel.*

i) Existe $f : \omega^\omega \longrightarrow X$ *función continua tal que* $f(\omega^\omega) = B$*, es decir, todos los conjuntos Borel son analíticos.*

ii) Existe una función $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow X$ *continua y suprayectiva.*

1.4.20 Definición. Sea X un espacio polaco. Decimos que $P \subseteq X$ es perfecto si es cerrado y sin puntos aislados.

Note que $\emptyset$ es perfecto y cualquier conjunto perfecto no vacío tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{N}$ y 2^ω.

1.4.21 Teorema (Propiedad del Conjunto Perfecto)**.** *Sea X un conjunto polaco y $A \subseteq X$ un conjunto analítico y no numerable, entonces A contiene un conjunto perfecto.*

1.4.22 Teorema. *Si X es un espacio polaco, entonces $Y \subseteq X$ es subespacio polaco si y sólo si Y es G_δ.*

Con esto terminamos la introducción al espacio de Cantor. En el siguiente capítulo veremos algunos resultados sobre topologías de Alexandroff y G_δ.

Capítulo 2

Topologías cerradas y G_δ

A partir de este momento empezaremos a enunciar los resultados del artículo ([6]) en el que se ha basado este trabajo.

2.1. Topologías Alexandroff

2.1.1 Definición. Una topología τ sobre un espacio topológico X se dice que es de **Alexandroff** si es cerrada bajo intersecciones arbitrarias, equivalentemente, si $N_x = \bigcap\{V : x \in V \,\&\, V \text{ es } \tau\text{-abierto}\}$ es τ-abierto para todo $x \in X$. N_x se llama la **vecindad minimal** de x.

Es posible caracterizar a las topologías Alexandroff a través de relaciones binarias transitvas y reflexivas.

2.1.2 Definición. Sea X un espacio topológico y una relación binaria $\leqslant$ sobre X reflexiva y transitiva. Para todo $x \in X$ se define

$$V_x = \{y \in X : x \leqslant y\}$$

2.1.3 Proposición. *Sea X un espacio topológico Alexandroff y una relación binaria $\leqslant_\tau$ sobre X reflexiva y transitiva. Entonces $\mathcal{B}_x = \{V_x\}$ forma una base de vecindades para cada $x \in X$.*

Demostración. Debemos demostrar que se cumplen las propiedades del Teorema 1.1.1. Las propiedades $i)$ y $ii)$ son claras.

iii) V_x cumple que para todo $y \in V_x$, $V_y \subseteq V_x$.

□

2.1.4 Teorema. *Si X es un espacio topológico Alexandroff entonces existe una relación binaria $\leqslant_\tau$ sobre X tal que*

$$\tau = \{A : \forall x \in A(V_x \subseteq A)\}.$$

Demostración. Sea $\leqslant_\tau$ definida por

$$x \leqslant_\tau y \Leftrightarrow y \in cl_\tau(\{x\})$$

Notemos primero que $x \in cl_\tau(\{y\})$ si y sólo si $y \in N_x$. Es claro que $\leqslant_\tau$ es reflexiva ($x \in cl_\tau(\{x\})$). Para verificar la transitividad, si $y \in cl_\tau(\{x\})$ y $x \in cl_\tau(\{z\})$ entonces $x \in N_y$ y $z \in N_y$, pero N_y también es vecindad de x, así que $z \in N_y$, es decir que $y \in cl_\tau(\{z\})$.

Supongamos que $A \in \tau$. Sean $x \in A$ y y tal que $x \leqslant_\tau y$. Como A es abierto, existe V vecindad abierta de x tal que $x \in V \subseteq A$, además $y \in V$, pues $y \in N_x$. Esto quiere decir que $\{y \in X : x \leqslant_\tau y\} \subseteq A$. Por otro lado, sea $x \in A$ entonces $N_x \subseteq A$. De aquí A es abierto.

□

2.1.5 Teorema. *Sea τ una topología Alexandroff sobre un espacio X. Entonces la vecindad minimal de x es $\{y \in X : x \leqslant_\tau y\}$. Además, τ es T_0 si y sólo si $\leqslant_\tau$ es antisimétrica (es decir, $\leqslant_\tau$ es un orden parcial).*

Demostración. La primera afirmación es clara. Si además τ es T_0 y $x \leqslant_\tau y$, $y \leqslant_\tau x$ entonces $y \in N_x$, $x \in N_y$. Pero τ es T_0, lo que quiere decir que debe existir un abierto que contiene a x y no a y, pero y es elemento de todos las vecindades de x, y viceversa, es decir que x debe ser igual a y. Por tanto,$\leqslant_\tau$ es antisimétrica. Supongamos ahora que $\leqslant_\tau$ es antisimétrica y sean $x \neq y$. Entonces $x \in N_y$ o $y \in N_x$, pues si pasara que $y \leqslant_\tau x$ y $x \leqslant_\tau y$ entonces $x = y$ lo cual es una contradicción. □

2.1.6 Proposición. *Sea X un conjunto numerable y $S \subseteq 2^X$ conjunto cerrado en la topología de 2^X. Si S es cerrado bajo uniones (respectivamente intersecciones) finitas, entonces S es cerrado bajo uniones (respectivamente intersecciones) arbitrarias.*

Demostración. Sea $S' \subseteq S$ infinito y $x = \bigcap S'$. Sea U_t una vecindad básica de x, con $t \in 2^n$. Queremos demostrar que existe $s \in S$ tal que $s \in U_t$. Sea $s_0 \in S'$ y n_0 el primer natural donde s_0 difiere de x ($n_0 < n$). Como $x(n_0) \neq s_0(n_0)$ lo que se sigue es que $x(n_0) = 0$ y $s_0(n_0) = 1$. Pero $x(n_0) = 0$ implica que existe $s_1 \in S'$ tal que $s_1(n_0) = 0$. Si $s_0 \cap s_1 \upharpoonright n = t$ entonces hemos terminado pues lo anterior implica que $s_0 \cap s_1 \in U_t$. Si $s_0 \cap s_1 \upharpoonright n \neq t$, sea $n_1 = \text{mín}\{n_j : s_0 \cap s_1(n_j) \neq x(n_j)\}$ y procedemos con en el caso anterior hasta alcanzar a n. ASí, conseguimos $s \in S \cap U_t$, por tanto, $x \in \overline{S} = S$.

□

2.1.7 Teorema. *Sea (X, τ) un espacio topológico con X numerable.*

(i) $\tau \subseteq 2^X$ es cerrado si y sólo si τ es Alexandroff.

(ii) Si $\tau \subseteq 2^X$ es abierto entonces existe un subconjunto τ-cerrado-abierto, discreto y co-finito de X.

(iii) La cerradura de τ en 2^X, $\overline{\tau}$, es una topología. De aquí que $\overline{\tau}$ es la topología Alexandroff más pequeña que contiene a τ.

(iv) τ es denso en 2^X si y sólo si τ es T_1.

Demostración. (i) Como τ es cerrado bajo intersecciones finitas, se sigue de la Proposición 2.1.6 que τ es cerrado bajo intersecciones arbitrarias y por tanto τ es una topología Alexandroff. Por otro lado, sea $\{A_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión de τ-abiertos convergentes a A. Para todo n existe m tal que $A \upharpoonright n = A_k \upharpoonright n$, para todo $k \geqslant m$. Si $x \in A$, entonces x es elemento de eventualmente todo A_n. Como estos A_n son abiertos, la vecindad minimal N_x, es subconjunto de eventualmente todo A_n así que también es subconjunto de A y por la proposición 2.1.6, $A \in \tau$.

(ii) Supongamos τ abierto en 2^X. Entonces $\emptyset$ y X son puntos interiores de τ. Sean F,$K \subseteq X$ subconjuntos finitos y sean $V_X = \{A \in 2^X : K \subseteq A\} \subseteq \tau$ vecindad básica de X y $V_\emptyset = \{A \in 2^X : A \cap F = \emptyset\} \subseteq \tau$ vecindad básica de $\emptyset$. Consideramos al conjunto $C = F \cup K$. C es un subconjunto finito de X y $C \in V_X \subseteq \tau$. El complemento de C también es abierto pues $X \setminus C \in V_\emptyset \subseteq \tau$. Además, si $x \notin C$, entonces $\{x\} \cap F = \emptyset$, así que $\{x\} \in V_\emptyset$. Con esto concluimos que $X \setminus C$ es discreto.

(iii) Es claro que $\emptyset$ y X son elementos de $\overline{\tau}$ pues $\tau \subseteq \overline{\tau}$. Veamos que $\overline{\tau}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{\tau}$. Para toda k, se cumple que $U_{x_i\restriction k} \cap \tau \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $x = \bigcap_{i=1}^{n} x_i$, entonces, $U_{x\restriction k} \cap \tau \neq \emptyset$, para todo k. Así que x está en la cerradura de τ.

Para verificar que $\overline{\tau}$ es cerrado bajo uniones arbitrarias, veamos que los es para uniones finitas y por la proposición 2.1.6 podemos concluir que lo es bajo uniones arbitarias. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \overline{\tau}$. Para toda k, se cumple que $U_{x_i\restriction k} \cap \tau \neq \emptyset$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $x = \bigcup_{i=1}^{n} x_i$, entonces, $U_{x\restriction k} \cap \tau \neq \emptyset$, para todo k. Así que x está en la cerradura de τ. Concluimos que $\overline{\tau}$ es una topología. Además, es un conjunto cerrado así que es también una topología Alexandroff.

(iv) Supongamos que τ es denso. Sean $x \neq y \in X$. Consideremos al abierto básico $V = \{A \subseteq X : \{x\} \subseteq A \ \& \ \{y\} \cap A = \emptyset\}$ de 2^X. Por la densidad de τ, existe A abierto de X tal que $A \in V$, así que $y \notin A$. De igual manera, podemos definir un abierto básico $U = \{A \subseteq X : \{y\} \subseteq A \ \& \ \{x\} \cap A = \emptyset\}$ de 2^X. Existe un abierto $A \in V$ tal que $x \notin A$.

Por otro lado, una equivalencia de ser T_1 es que los singuletes de puntos de X son cerrados. Así, los conjuntos finitos son cerrados que por la Proposición 1.3.6 son densos en 2^X. Por tanto, la colección de los conjuntos cerrados es denso en 2^X y bajo el homeomorfismo $A \mapsto X \setminus A$ (Proposición 1.3.20), τ es denso en 2^X.

$\square$

2.1.8 Ejemplo. Considere $\tau = \{A \subseteq \omega : 0 \in A\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces τ es una topología Alexandroff pues es cerrada bajo uniones arbitrarias. Además, si $n < m$, entonces existe $A \in \tau$ tal que $n \in A$ y $m \notin A$. τ es una topología Alexandroff T_0 que no es T_1.

2.2. Filtros

2.2.1 Definición. Un *filtro* $\mathcal{F}$ en un conjunto X es una colección no vacía de subconjuntos de X que no contiene al vacío y cumple:

i) Si $A, B \in \mathcal{F}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{F}$

ii) Si $A \subseteq B$ y $A \in \mathcal{F}$ entonces $B \in \mathcal{F}$

Un filtro $\mathcal{F}$ es *principal* si está generado por sólo un elemento, es decir, existe $A \subseteq X$ tal que $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$. Un filtro es no principal si no está generado por un elemento, o equivalentemente $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$.

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Se define una topología $\tau(\mathcal{F})$ sobre $\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$ por

$$\tau(\mathcal{F}) = \{\{\omega\} \cup A : A \in \mathcal{F}\} \cup \mathcal{P}(\omega)$$

2.2.2 Proposición. *i) Para cada filtro no principal $\mathcal{F}$ sobre ω, la topología $\tau(\mathcal{F})$ generada por el filtro es Hausdorff y $\mathcal{F} \leqslant_W \tau(\mathcal{F})$.*

ii) Sea (X, τ) un espacio topológico Hausdorff tal que $X^{(1)} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Entonces existe una partición $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ de X en una cantidad finita de cerrado-abiertos con $x_i \in X_i$ y existen filtros $\mathcal{F}_i$ sobre $X_i \setminus \{x_i\}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ tal que (X, τ) es homeomorfo a $\oplus_1^n (X_i, \tau(\mathcal{F}_i))$.

Demostración. i) Supongamos que $\tau(\mathcal{F})$ no es Hausdorff, existe un punto $n \in \omega$ que no se puede separar de ω, es decir, $\forall A \in \mathcal{F}$, $n \in A$. Por tanto, $n \in \bigcap \mathcal{F}$, lo cual no puede ser pues $\mathcal{F}$ es filtro no principal.

Para demostrar que el filtro $\mathcal{F}$ es Wadge reducible a $\tau(\mathcal{F})$ definimos una función $f : 2^\omega \longrightarrow 2^{\omega+1}$, por $f(A) = A \cup \{\omega\}$. Por la Proposición 1.3.20, f es continua. Además, $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si $f(A) \in \tau(\mathcal{F})$, es decir, $\mathcal{F} \leqslant_W \tau(\mathcal{F})$.

ii) Sean $U_1, U_2, \ldots, U_n$ abiertos tales que $x_i \in U_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ y ajenos por pares (esto lo podemos hacer pues X es Hausdorff). Sea $S = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_i$. El conjunto S es discreto pues los únicos puntos límites de X son $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Para $1 \leqslant i \leqslant n-1$, hacemos

$$X_i = U_i \;\text{ y }\; X_n = U_n \cup S$$

Ahora, para $1 \leqslant i \leqslant n$, definimos

$$\mathcal{F}_i = \{A \subseteq (X_i \setminus \{x_i\}) : A \cup \{x_i\} \in \tau\}$$

$\mathcal{F}_i$ es un filtro no principal pues los conjuntos X_i son ajenos. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, definimos una función $f_i : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$, por $f(A) = A \cup \{x_i\}$. La función f_i es continua y $A \in \mathcal{F}$ si y sólo si $f_i(A) \in \tau$, es decir, $\mathcal{F}_i \leqslant_W \tau$.

Por último, es claro que (X, τ) es homeomorfo a la unión disjunta de los conjuntos X_i que forman la partición de X bajo la función $x \mapsto x$.

□

Antes de tratar con las topologías G_δ estudiaremos un poco sobre la Propiedad de Baire. Enunciaremos un Teorema sobre las topologías con la Propiedad de Baire y dos Corolarios que se siguen de él.

2.2.3 Teorema. *Sea G un conjunto comagro en 2^ω. Si G es cerrado bajo intersecciones y uniones finitas entonces $G = 2^\omega$.*

Demostración. Empezamos definiendo el conjunto $CL(G) = G \cap \{g^c : g \in G\}$, que es el conjunto de los elementos de G cuyo complemento también está en G. El conjunto $\{g^c : g \in G\}$ es comagro pues es la imagen de G bajo el homeomorfismo $A \mapsto X \setminus A$. El conjunto $CL(G)$ es entonces comagro, por ser intersección de comagros.

Veamos que del hecho de que G es cerrado bajo uniones e intersecciones finitas resulta que $CL(G)$ es cerrado también bajo uniones e intersecciones finitas y además $CL(G)$ es cerrado bajo complementos. Si $g,h \in CL(G)$, entones $g, h \in G$ y $g = g_1^c$, $h = h_1^c$ con $g_1, h_1 \in G$. Entonces $g \cup h \in G$ y $g \cup h = g_1^c \cup h_1^c = (g_1 \cap h_1)^c \in \{g^c : g \in G\}$. De manera análoga se demuestra el caso de las intersecciones. Ahora si $g \in G$ y $g = g_1^c$ entonces, $g^c = g_1 \in G$ y $(g^c)^c \in \{g^c : g \in G\}$.

Si tomamos dos elementos $g, h \in CL(G)$ y escribimos la diferencia simétrica como

$$g \triangle h = (g \cap h)^c \cap (g \cup h) \in CL(G)$$

lo cual muestra que $g \triangle h \in CL(G)$.

Sea $x \in 2^\omega$. Definimos $\psi_x : 2^\omega \longrightarrow 2^\omega$ por $\psi_x(g) = x \triangle g$. Verifiquemos que ψ_x es un homeomorfismo. Debemos demostrar que ψ_x es inyectiva, suprayectiva, continua y que su inversa también lo es.

i) Inyectiva: Sean $g \neq h \in 2^\omega$. Entonces existe n tal que $g(n) \neq h(n)$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $h(n) = 1$ y $g(n) = 0$. Tenemos dos casos:

   1) Si $x(n) = 0$, entonces $x \triangle g(n) = 1$ y $x \triangle h(n) = 0$.

   2) Si $x(n) = 1$, entonces $x \triangle g(n) = 0$ y $x \triangle h(n) = 1$.

   Por tanto, $\psi_x(g) = x \triangle g \neq x \triangle h = \psi_x(h)$

ii) Suprayectiva: Sea $h \in 2^\omega$, entonces $h = x \triangle (x \triangle h)$. Sea $g = x \triangle h \in 2^\omega$, entonces $\psi_x(g) = h$.

iii) Continua: Sea $U_s \subseteq 2^\omega$ abierto básico con $s \in 2^n$. Sea $g \in \psi^{-1}(U_s)$, entonces $x \triangle g \in U_s$ es decir, $(x \triangle g) \upharpoonright n = s$. Sea $h \in U_{g \upharpoonright n}$ el cono básico de g. Queremos demostrar que $\psi(h) = x \triangle h \in U_s$. Para todo $k \leqslant n$.

$$(x \triangle h) \upharpoonright k = ((x \cap h)^c \upharpoonright k) \cap ((x \cup h) \upharpoonright k) =$$

$$= ((x \cap g)^c \upharpoonright k) \cap ((x \cup g) \upharpoonright k) = (x \triangle g) \upharpoonright k.$$

iv) Inversa continua: Sea $U_s \subseteq 2^\omega$ abierto básico con $s \in 2^n$. Sea $g \in \psi_x(U_s)$, entonces existe $h \in U_s$ tal que $\psi_x(h) = x \triangle h = g$. Sea $y \in U_{g \upharpoonright n}$ el cono básico de g. Queremos demostrar que existe $z \in U_s$ tal que $\psi_x(z) = x \triangle z = y$. Definamos $z = x \triangle y$. Así que $\psi_x(z) = x \triangle (x \triangle y) = y$. Además

$$z \upharpoonright n = (x \triangle y) \upharpoonright n = (z \triangle g) \upharpoonright n =$$

$$= (x \triangle (x \triangle h)) \upharpoonright n = h \upharpoonright n = s$$

   es decir que $z \in U_s$.

Ahora, dado que $CL(G)$ es comagro, $\psi_x(CL(G))$ también lo es y por tanto $CL(G) \cap \psi_x(CL(G)) \neq \varnothing$. Existe $h \in CL(G) \cap \psi_x(CL(G))$, por tanto, existe $g \in CL(G)$ con $\psi_x(g) = x \triangle g = h$. Podemos escribir a x como

$$x = (x \triangle g) \triangle g = h \triangle g \in CL(G)$$

Esto para cualquier $x \in 2^\omega$. Entones $CL(G) = 2^\omega$, que es un subconjunto de G. Concluimos entonces que $G = 2^\omega$.

$\square$

2.2.4 Corolario. *Si $\tau \subseteq 2^\omega$ es una topología T_1 que tiene la propiedad de Baire entonces debe ser un subconjunto magro de 2^ω a menos que tenga una cantidad finita de puntos no-aislados.*

Demostración. Supongamos que τ no es magro. Dado que τ tiene la propiedad de Baire existe un abierto U tal que $\tau \triangle U = M$, con M un conjunto magro. Como τ no es magro se cumple $U \neq \emptyset$, entonces $U \setminus \tau \subseteq M$, de aquí que $U \setminus \tau$ es magro y entonces τ es comagro en U. Sin perder generalidad podemos suponer que U es abierto básico y τ es comagro en U.

Sean K,F conjuntos finitos tales que U es de la forma $U = \{A \subseteq \mathbb{N} : K \subseteq A$ y $A \cap F = \varnothing\}$. Sea $B = \mathbb{N} \smallsetminus (K \cup F)$ y $\rho = \{W \cap B : W \in \tau\}$ la restricción de τ a B. Definimos $g : 2^\omega \to 2^\omega$, dada por $g(A) = A \cap B$, g es continua y abierta. Sea $g \restriction U : U \to 2^B$, note que $g(U \cap \tau)$ es comagro en 2^B(1.3.22) y que $g(U \cap \tau) \subseteq \rho$. Los conjuntos comagros forman un filtro, así que ρ es comagro en 2^B. Por el Teorema 2.2.3, $\rho = 2^B$ y B es el conjunto de todos los puntos aislados. Los puntos no-aislados pertenecen a $F \cup K$ que es un conjunto finito. $\square$

2.2.5 Corolario. *Si una topología $\tau \subseteq 2^\omega$, es T_1 y G_δ entonces es la topología discreta.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.6 τ es denso. Además, $\tau = \bigcap_{n \in \omega} A_n$, donde cada A_n es denso y abierto. De aquí que τ es comagro, satisfaciendo las hipótesis del Teorema 2.2.3. Se concluye entonces que $\tau = 2^\omega$. $\square$

2.2.6 Ejemplo. El Ejemplo 2.1.8 es un ejemplo de una topología con una cantidad infinita de puntos no aislados que no es magro. En esta topología el cero es el único punto aislado, $\{0\}$ es una vecindad que sólo contiene al cero. Además, contiene un abierto básico de ω. Claramente el conjunto τ no puede ser magro, pues contiene un abierto no vacío.

2.2.7 Teorema. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω con la propiedad de Baire. Entonces $\mathcal{F}$ es magro.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ no es magro. Por tener la propiedad de Baire cumple que $\mathcal{F} \triangle U = M$, donde M es un conjunto magro y U es un abierto, de hecho, podemos suponer que U es un abierto básico. Así que $\mathcal{F}$ es comagro en U. Dado que $\mathcal{F}$ es filtro entonces es cerrado bajo la operación $\triangle^c$ definida por

$$x\triangle^c y = (x \cap y) \cup (x^c \cap y^c)$$

Si $F \in \mathcal{F}$ es finito, entonces $x\triangle^c F^c \in \mathcal{F}$. Si $s \in 2^n$, entonces $\mathcal{F} \cap U_s$ es homeomorfo a $\mathcal{F} \cap U_t$, para todo $t \in 2^n$ distinto de s. El homeomorfismo está dado por, $f : U_s \to U_t$, definido por $f(x) = x\triangle^c F^c$, donde $F = s\triangle^c t$. Note que si $x \in \mathcal{F}$ entonces $f(x) \in \mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ es comagro en U_s entonces es comagro en U_t, para todo $t \in 2^n$, por tanto es comagro en 2^ω, por el Teorema 2.2.3, $\mathcal{F} = 2^\omega$ lo cual es una contradicción. $\square$

2.3. Ejemplo

A continuación estudiaremos un ejemplo de una topología T_0 sobre un conjunto numerable X que es G_δ-completo en 2^X. Para revisar este ejemplo será necesario ayudarnos del ideal $\mathcal{NWD}$ para compararlo con $\{F \subseteq X : F \text{ es } \tau\text{-cerrado-nunca-denso}\}$.

Sea $X = 2^{<\omega}$ y sea $\preceq$ el orden usual de extensiones, es decir, si $t, s \in 2^{<\omega}$, $t \preceq s$ si y sólo si s es extensión de t. Sea τ la topología Alexandroff sobre X dada por $\preceq$. Para cada $t \in X$, su vecindad minimal es

$$N_t = \{s \in X : t \preceq s\}$$

Sea $D(\tau) = \{A \in \tau : A \text{ es } \tau\text{-denso}\}$ y $\rho = D(\tau) \cup \{\emptyset\}$.

Note que τ es una topología T_0 pues dados $t, s \in X$, si son comparables entonces alguna es extensión de la otra. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $t \preceq s$, de aquí que $s \in N_t$ pero $t \notin N_s$. Además, para cualquier $t \in X$, N_t contiene a $t^\frown 0$ y $t^\frown 1$, por lo que τ no tiene puntos aislados.

La siguiente proposición nos dice que con las condiciones que hemos mencionado para τ se cumple $\overline{\rho} = \tau$. Dado que τ es T_0, si se da la igualdad anterior podemos concluir que ρ también lo es pues si $s, t \in X$ son dos sucesiones finitas distintas, entonces existe $A \in \overline{\rho}$ tal que $s \in A$ y $t \notin A$. Definimos $V = \{B : \{s\} \subseteq B \ \& \ \{t\} \cap B = \emptyset\}$ vecindad básica de A. Entonces existe $B \in \rho \cap V$, así que $s \in B$ y $t \notin B$. Por tanto ρ también es T_0.

2.3.1 Proposición. *Sea τ una topología Alexandroff sobre un conjunto numerable X y sea $\rho = D(\tau) \cup \{\emptyset\}$ definida como antes. Entonces ρ es una topología G_δ. Aun más, si τ no tiene puntos aislados, $\tau = \overline{\rho}$.*

Demostración. Notemos primero que

$$A \text{ es } \tau \text{ denso si y sólo si } \forall x \in X \ \exists y \in A \ x \leqslant_\tau y$$

Veamos que $D(\tau)$ es G_δ. Podemos escribir a $D(\tau)$ como

$$D(\tau) = \bigcap_{x\in X} \bigcup_{x \leqslant_\tau y} \{A \in 2^X : y \in A\} \cap \tau = \bigcap_{x\in X} \bigcup_{y \in N_x} \{A \in 2^X : y \in A\} \cap \tau.$$

donde N_y es numerable y el conjunto $\{A \in 2^X : y \in A\}$ es abierto básico de 2^X pues

$$\{A \in 2^X : y \in A\} = \bigcup_{t \in 2^y} \{U_t : t(y) = 1\}$$

es una unión finita de abiertos básicos.

2.3.2 Afirmación. *Una topología Alexandroff τ sobre un conjunto numerable X no tiene puntos aislados si y sólo si, todo conjunto finito es nunca denso.*

Demostración. Supongamos que τ no tiene puntos aislados. Sea $F \subseteq X$ conjunto finito y $U \in \tau$. Para cada elemento x_i de F, sea N_{x_i} la vecindad minimal dada por el orden correspondiente a la topología. Si $F \cap U = \emptyset$, no hay nada que hacer. Si $F \cap U \neq \emptyset$, elijamos $x_j \in F \cap U$ tal que N_{x_j} no contiene a N_{x_k} para $k \neq j$. Como x_j no es aislado existe $y \in N_{x_j}$, $y \neq x_j$ y $V = N_y$ satisface $V \subseteq U$ y $V \cap F = \emptyset$.

Supongamos que τ tiene un punto aislado x, entonces $\{x\}$ es un conjunto finito abierto que no es conjunto nunca denso. $\square$

Supongamos ahora que τ no tiene puntos aislados y queremos demostrar la igualdad $\overline{\rho} = \tau$. τ es cerrado en 2^X pues es Alexandroff, entonces $\overline{\rho} \subseteq \tau$. Sea $O \in \tau$ y F, K conjuntos finitos tales que $V = \{A \subseteq \mathbb{N} : K \subseteq A \text{ y } A \cap F = \varnothing\}$ es vecindad básica de O. Dado que F es finito, por la Afirmación anterior, F es nunca denso, $\overline{F}$ también es nunca denso así que $X \setminus \overline{F}$ es abierto y denso, por tanto $X \setminus \overline{F} \in \rho$. Además $X \setminus \overline{F} \in V$. Con esto demostramos que $O \in \overline{\rho}$ y concluimos que $\overline{\rho} = \tau$. □

Para comparar ρ con $\mathcal{NWD}$ observemos que $D(\tau)$ es la familia de los complementos de la familia $\{F : F$ es τ-cerrado-nunca-denso$\}$. Para hacer esta comparación es útil estudiar los conjuntos τ-cerrados.

2.3.3 Proposición. *Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$. Entonces T es τ-cerrado si y sólo si T es árbol.*

Demostración. Supongamos que T es cerrado. Sea $t \in T$ y $s \preceq t$. Entonces $t \in N_s$, $s \in \overline{T} = T$. Para demostrar la otra implicación demostremos que T contiene todos sus puntos límites. Sea t punto límite de T. Existe $s \neq t$ tal que $s \in N_t$ y $s \in T$, es decir, $t \preceq s$. Como T es árbol y t es segmento inicial de s, $t \in T$. Por tanto, T contiene todos sus puntos límite. □

2.3.4 Proposición. *Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol. Entonces T es τ-cerrado-nunca-denso si y sólo si, [T] es nunca denso en 2^ω*

Demostración. Sea $T \subseteq 2^{<\omega}$ un árbol. Supongamos que T es nunca denso. Sea $s \in 2^{<\omega}$ y U_s abierto básico de 2^ω. Consideremos la vecindad minimal de s, N_s. Existe $t \in 2^{<\omega}$ tal que $N_t \subseteq N_s$ y $N_t \cap T = \emptyset$, además $s \preceq t$. Entonces $U_t \subseteq U_s$ y $U_t \cap [T] = \emptyset$, pues si $x \in U_t \cap [T]$ entonces

$$x \restriction |t| = t \in N_t \ \text{ y } \ x \restriction |t| \in T$$

lo cual es una contradicción.

Sea $s \in 2^{<\omega}$ y N_s su vecindad minimal. Consideramos U_s abierto básico de 2^ω, existe $t \in 2^{<\omega}$ tal que $U_t \subseteq U_s$ y $U_t \cap [T] = \emptyset$. Además $s \preceq t$, de aquí que $N_t \subseteq N_s$. También $N_t \cap T = \emptyset$, pues si $r \in N_t \cap T$ entonces

$$t \preceq r \in T \Longrightarrow t \in T;$$

lo cual es una contradicción pues si $x \in 2^\omega$ es extensión de t entonces $x \in U_t$ y $x \in [T]$. □

En vista de la Proposición 1.4.13, la imagen bajo ψ de un conjunto nunca denso es también nunca denso, donde ψ es el homeomorfismo definido en 1.4.13 entre $K(2^\omega)$ y PT_r. La imagen de los conjuntos nunca densos de $K(2^\omega)$ es el conjunto de nunca densos en $2^{2^{<\omega}}$

$$\psi(\mathcal{NWD}) = \{F \subseteq 2^{<\omega} : F \text{ es } \tau\text{-cerrado nunca denso}\}.$$

De aquí que $\{F \subseteq 2^{<\omega} : F \text{ es } \tau\text{-cerrado nunca denso}\}$ es G_δ-completo. La función complemento es un homeomorfismo, así que $D(\tau)$ es G_δ-completo.

Capítulo 3

Complejidad de bases

En este capítulo estudiaremos qué propiedades se reflejan en una topología sobre un conjunto numerable dependiendo de la complejidad de sus bases.

Primero consideramos el problema de la complejidad de una topología generada por una base cerrada, F_σ o analítica.

3.0.1 Teorema. *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable.*

i) X admite un base F_σ si y sólo si admite una subbase F_σ.

ii) Si X admite una subbase G_δ entonces admite una base Σ^0_3.

Demostración. i) Es trivial que X admite una subbase F_σ si tiene una base F_δ pues la base misma forma una subbase. Sea S una subbase F_σ de X. Por la Proposición 1.3.21, la función que intersecta dos elementos es continua cerrada. Para cada n podemos definir una función $f_n : S^n \longrightarrow 2^X$ como $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_2(f_2(\ldots(f_2(x_1, x_2), x_3)\ldots)x_n)$, es decir, f_n es una función que intersecta n elementos de la subbase, donde función f_2 es la función que intersecta dos elementos. Por tanto, f_n es cerrada y continua por ser composición de función cerradas y continuas.

Dado que S es una subbase F_σ de X, existen cerrados F_n tales que

$$S = \bigcup_{n\in\omega} F_n$$

Para cualquier $k \in \omega$, $f_k(S^k) = \bigcup\{f_k(F_{n_1} \times \ldots \times F_{n_k}) : (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \omega^k\}$, es decir, $Im(f_k) = f_k(S^k)$ es F_σ. La base generada por S es

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \omega} Im(f_k)$$

$\mathcal{B}$ es una unión numerable de conjuntos F_σ, es decir que también es F_σ.

ii) Sea S una subbase G_δ para X. Entonces $S = \bigcap_{n \in \omega} U_n$, con U_n abierto. Usando la función f_k definida en el inciso anterior podemos escribir

$$f_k(S^k) = \bigcap_{n \in \omega} f_k(U_n^k)$$

La función f_k también es abierta así que $f_k(S^k)$ es un conjunto G_δ. La base generada por S es

$$\mathcal{B} = \bigcup_{k \in \omega} f_k(S^k)$$

así que la base es una unión numerable de conjuntos G_δ, es decir, es Σ^0_3.

$\square$

Hasta este momento no sabemos si el recíproco de (ii) es verdadero.

3.0.2 Teorema. *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable. Si X admite una base F_σ (o subbase) entonces τ es Π^0_3. En particular, si τ es una topología segundo numerable, entonces τ es Π^0_3.*

Demostración. Si $\mathcal{B}$ es una base entonces

$$A \in \tau \Leftrightarrow \forall x(x \in A \longrightarrow \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \ \ \& \ \ B \subseteq A))$$

Podemos hacer unos cambios sabiendo que la base es F_σ, es decir, $\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \omega} F_n$, con F_n cerrado.

$$A \in \tau \Longleftrightarrow \forall x(x \notin A \ \text{ o } \ \exists B \in \mathcal{B}(x \in B \ \ \& \ \ B \subseteq A))$$

$$\Longleftrightarrow \forall x(x \notin A \ \text{ o } \ \exists n \in \omega \ \exists B \in F_n(x \in B \ \ \& \ \ B \subseteq A))$$

Así que podemos escribir a τ como

$$\tau = \{A \in 2^X : \forall x(x \notin A \text{ o } \exists n \in \omega \exists B \in F_n(x \in B \ \& \ B \subseteq A))\}$$

$$= \bigcap_{x \in X} \{A \in 2^X : x \notin A \text{ o } \exists n \in \omega \exists B \in F_n(x \in B \ \& \ B \subseteq A)\}$$

$$= \bigcap_{x \in X} [\{A \in 2^X : x \notin A\} \cup \{A \in 2^X : \exists n \in \omega \exists B \in F_n(x \in B \ \& \ B \subseteq A)\}]$$

$$= \bigcap_{x \in X} [\{A \in 2^X : x \notin A\} \cup \bigcup_{n \in \omega} \{A \in 2^X : \exists B \in F_n(x \in B \ \& \ B \subseteq A)\}]$$

Demostremos que $E_n = \{A \in 2^X : \exists B \in F_n(x \in B \ \& \ B \subseteq A)\}$ es cerrado para $x \in X$ y n fijos. Sea $A \in 2^X$ y $\{A_k\}_{k \in \omega} \subseteq E_n$ sucesión convergente a A. Para cada $k \in \omega$, existe $B_k \in F_n$ tal que $x \in B_k$ y $B_k \subseteq A_k$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\{B_k\}_{k \in \omega}$ es una sucesión convergente a $B \in F_n$. Veamos ahora que $x \in B$ y $B \subseteq A$. Es claro que $x \in B$ pues $x \in B_k$ para todo k. Ahora, supongamos que $B \nsubseteq A$, entonces existe $y \in X$ tal que $y \in B$ y $y \notin A$. Por la convergencia de las sucesiones $\{B_k\}$ y $\{A_k\}$ se tiene que existen k', k'' tales que $\forall k \geqslant k'$, $y \in B_k$ y $\forall k \geqslant k''$, $y \notin A_k$. Sea $m = max\{k', k''\}$, entonces $y \notin A_m$ y $y \in B_m$ pero $B_m \subseteq A_m$, lo cual es una contradicción. Por tanto $A \in E_n$ lo cual prueba que E_n es cerrado en 2^X. Además el conjunto $\{A : x \notin A\}$ es cerrado-abierto, pues unión finita de conos. De aquí que τ es intersección numerable de conjuntos F_σ, por tanto es Π^0_3.

Si τ es una topología segundo numerable, es decir, con una base numerable, entonces la base es F_σ y τ es Π^3_0. □

3.0.3 Teorema. *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable. Si X admite una base Σ^1_1 entonces τ es Σ^1_1.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base analítica. Escribimos a τ como en el teorema anterior

$$\tau = \bigcap_{x \in X} [\{A \in 2^X : (x \notin A\} \cup \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \{A \in 2^X : x \in B \ \& \ B \subseteq A\}].$$

El conjunto $\{A : x \notin A\}$, por ser cerrado-abierto es analítico, por inciso i) del teorema 1.4.19. Veamos que

$$\mathcal{A}_x = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} \{A \in 2^X : x \in B \ \ \& \ \ B \subseteq A\}$$

también lo es. Definamos $\phi : \mathcal{B} \times 2^X \to 2^X$ por

$$\phi(B, A) = \begin{cases} A \cup B & x \in B \\ X & x \notin B \end{cases}$$

Afirmamos que $\phi(\mathcal{B} \times 2^X) = \mathcal{A}_x$. Sea $C \in \phi(\mathcal{B} \times 2^X)$, es decir, existen A, B tales que $B \in \mathcal{B}$, $A \in 2^X$ y $C = \phi(A, B) = C$. Si $x \in B$, entonces $C = A \cup B$ y por tanto $C \in \mathcal{A}_x$. Si $x \notin B$, entonces $C = X$, y es claro que X pertenece a $\mathcal{A}_x$. Sea $C \in \mathcal{A}_x$, entonces existe $b \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subseteq C$. Sea $A = C \setminus B$, entonces $\phi(B, A) = A \cup B = C$, así que $C \in \phi(\mathcal{B} \times 2^X)$.

Además, ϕ es una función continua. Sólo falta verificar que $\mathcal{B} \times 2^X$ es analítico. Como $\mathcal{B}$ es analítico existe $f : \omega^\omega \to \mathcal{B}$ suprayectiva y continua. Sea $\psi : \omega^\omega \times 2^X \to \mathcal{B} \times 2^X$, la función suprayectiva dada por $\psi(x, y) = (f(x), y)$. Así que $\phi \circ \psi : \omega^\omega \times 2^X \to \mathcal{A}_x$ es suprayectiva y continua. Con esto concluimos que $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} \{A \in 2^X : x \in B \ \ \& \ \ B \subseteq A\}$ es analítico pues $\omega^\omega \times 2^X$ lo es. Los conjuntos analíticos son cerrados bajo intersecciones numerables, así que τ es analítico. □

3.0.4 Teorema. *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable. Supóngase que X es Hausdorff con una base F_σ. Si $X^{(1)}$ (el conjunto de puntos límite) es finito, entonces τ es F_σ.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.2, existe una partición de X en una cantidad finita de cerrado-abiertos $X_1, X_2, \ldots, X_n$, con $x_i \in X^{(1)}$ y $x_i \in X_i$. Además, existen filtros principales $\mathcal{F}_i = \{A \subseteq (X_i \setminus \{x_i\}) : A \cup \{x_i\} \in \tau\}$. Para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, sea $\tau_i = \tau(\mathcal{F}_i) = \{B \cap (X_i \setminus \{x_i\}) : B \cup \{x_i\} \in \tau\}$.

Sea $\mathcal{C} = \bigcup_{n \in \omega} F_n$ la base F_σ de τ, con F_n cerrado. Para cada $i = 1, \ldots, n$, definimos

$$\mathcal{C}_i = \{C \cap (X_i \setminus \{x_i\}) : C \cup \{x_i\} \in \mathcal{C}\} = \bigcup_{n \in \omega} \{C \cap (X_i \setminus \{x_i\}) : C \cup \{x_i\} \in F_n\}$$

Para n fijo, el conjunto $F_n^i = \{C \cap (X_i \setminus \{x_i\}) : C \cup \{x_i\} \in F_n\}$ es cerrado pues si $\{C_k\}_{k \in \omega} \subseteq$

F_n^i es una sucesión tal que $C_k \cup \{x_i\} \in F_n$, para todo k, entonces $\{C_k \cup \{x_i\}\}_{k\in\omega}$ es una sucesión convergente a $C \in F_n$, así que $C \setminus \{x_i\} \in \mathcal{C}_i$ y es el límite de la sucesión $\{C_k\}_{k\in\omega}$. Con esto concluimos que $\mathcal{C}_i$ es F_σ. Además, $\mathcal{C}_i$ es base para τ_i, pues si $B \cap (X_i \setminus \{x_i\})$ es tal que $B \cup \{x_i\}$ es abierto, entonces existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq B \cup \{x_i\}$. Sea $C' = C \setminus \{x_i\}$, entonces $C' \cap (X \setminus \{x_i\}) \subseteq B \cap (X \setminus \{x_i\})$ y $C' \cup \{x_i\} = C \in \mathcal{C}$. Ahora, podemos definir una base F_σ para el filtro $\mathcal{F}_i$ como

$$\mathcal{B}_i = \{A \subseteq X_i \setminus \{x_i\} : A \cup \{x_i\} \in \mathcal{C}_i\} = \bigcup_{n\in\omega} \{A \subseteq X_i \setminus \{x_i\} : A \cup \{x_i\} \in F_n^i\},$$

donde el conjunto $B_n = \{A \subseteq X_i \setminus \{x_i\} : A \cup \{x_i\} \in F_n^i\}$ es cerrado. Veamos que $\mathcal{B}_i$ es base. Sea $F \in \mathcal{F}_i$, entonces existe $A \in \mathcal{C}_i$ tal que $A \subseteq F \cup \{x_i\}$, entonces $A \setminus \{x_i\} \in \mathcal{B}_i$.

Con la base $\mathcal{B}_i$ del filtro $\mathcal{F}_i$, podemos escribir al filtro como

$$\mathcal{F}_i = \bigcup_{n\in\omega} \{A \subseteq (X_i \setminus \{x_i\}) : \exists B \in B_n (B \subseteq A)\}.$$

El conjunto $\{F \subseteq (X_i \setminus \{x_i\}) : \exists B \in B_n (B \subseteq A)\}$ es cerrado por un argumento similar al utilizado en el Teorema 3.0.2. Así que $\mathcal{F}_i$ es F_σ. Ahora podemos concluir que $\tau(\mathcal{F}_i)$ también es F_σ, pues lo podemos escribir como

$$\tau(\mathcal{F}_i) = \bigcup_{n\in\omega} \{A \cap \{x_i\} : A \in D_n^i\}$$

donde $\mathcal{F}_i = \bigcup_{n\in\omega} D_n^i$ y el conjunto $\{A \cap \{x_i\} : A \in D_n^i\}$ es cerrado. Finalmente, si $\tau_i = \bigcup_{n\in\omega} E_n^i$, podemos escribir a τ como

$$\tau = \bigcap_{i=1}^{n} \{A \in 2^X : A \cap X_i \in \tau_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{n\in\omega} \{A \in 2^X : A \cap X_i \in E_n^i\}$$

Por tanto τ es F_σ.

□

3.0.5 Teorema. *Sea (X, τ) un espacio topológico numerable. Si X es T_1 y no discreto, entonces τ no tiene un base cerrada.*

Demostración. Enumeremos los elementos de X, sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ la enumeración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es una base cerrada para τ y sea $x_n \in X$ fijo. Definimos $A_1 = \{x_1\}$, y para $2 \leqslant i \leqslant n-1$, $A_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$, $A_n = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}\}$ y para $i \geqslant n+1$, $A_i = \{x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots, x_{i+1}\}$. Note que ninguno de estos conjuntos contienen a x_n y todos son conjuntos cerrados. Para cada A_i, existe una vecindad básica $V_{A_i} \in \mathcal{F}$ tal que $x_n \in V_{A_i} \subseteq X \backslash A$. La sucesión $\{V_{A_i}\}_{i\in\omega}$ converge a $\{x_n\}$. Como $\mathcal{F}$ es cerrado, entonces $\{x_n\} \in \tau$, y τ resultará ser la topología discreta. □

3.0.6 Teorema. *Toda topología Hausdorff sobre un conjunto numerable X generada por una subbase F_σ, tiene una subbase cerrada.*

Demostración. Enumeremos los elementos de X, sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ la enumeración. Dado que la topología es Hausdorff, para cada $n \in \omega$ podemos definir una vecindad abierta V_n para x_n de tal manera que $x_i \notin \overline{V}_n$ para todo $i < n$. Por la Proposición 3.0.1(i), X admite una base F_σ. Sea $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ dicha base, con K_n cerrado y $K_n \subseteq K_{n+1}$ para todo n. Para $n \geqslant 1$, definimos

$$\mathcal{K}_n = \{A \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l : 1 \leqslant i \leqslant n \ , \ A \in K_n \ , \ x_i \in A\}.$$

Veamos que el conjunto $\mathcal{K}_n$ es cerrado en 2^X para todo n. Sea $n \in \omega$ y $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fijos. Sea $\{C_k\}_{k\in\omega}$ una sucesión de $\mathcal{K}_n$ convergente a $C \in 2^X$. Para cada k,

$$C_k = A_k \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l$$

con $1 \leqslant i \leqslant n$, $A_k \in K_n$ $x_i \in A_k\}$. Entonces

$$C = \lim_{k\to\infty} C_k \ = \lim_{k\to\infty} A_k \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l = A \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l.$$

$\{A_k\}_{k\in\omega}$ es una sucesión en K_n, que podemos suponer convergente a $A \in K_n$ y $x_i \in A$. Entonces $C \in \mathcal{K}_n$, por tanto $\mathcal{K}_n$ es un conjunto cerrado de conjuntos abiertos de X.

Sea $\mathcal{K} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{K}_n$. Afirmamos que $\mathcal{K} \cup \{X\}$ es cerrado en 2^X. Veamos que X es punto de acumulación de $\mathcal{K} \cup \{X\}$, es decir que cada sucesión $B_k \in \mathcal{K}_{n_k}(k \in \omega)$ con $\{n_k\}$ estrictamente creciente se acumula a X. Para ver esto, sea F subconjunto finito de X y sea k_0 tal que $F \subseteq \{x_i : 1 \leqslant i \leqslant n_{k_0}\}$. Considere B_k para $k \geqslant k_0$. Entonces B_k es de la forma

$$B_k = A_k \cup (X \setminus \overline{V}_{i_k}) \cup \bigcup_{l=i_k+1}^{n_k} V_l,$$

para algún $i_k \in \{1, 2, \ldots, n_k\}$. Considere $x \in F$. Si $x = x_i$ entonces $x \in A_k \subseteq B_k$. Si $x = x_i$ para $i<i_k$, entonces $x \in (X \setminus \overline{V}_{i_k}) \subseteq B_k$. Si $x = x_i$ para $i \in i_{k+1}, \ldots, n_k$, entonces $x \in V_i \subseteq B_k$. Esto demuestra que $F \subseteq B_k$. Con esto hemos demostrado que cualquier vecindad básica de $\{X\}$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión $\{B_k\}_{k\in\omega}$. Sea

$$\mathcal{B}_n = \{A \cap V_i \cap \bigcap_{l=i+1}^{n} (X \setminus \overline{V}_l) : 1 \leqslant i \leqslant n,\ A \in K_n,\ x_i \in A\}.$$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ forma una base para X pues, para cada $x_i \in X$ existen n y $A \in K_n$ tal que $x_i \in A$

$$x_i \in A \cap V_i \cap \bigcap_{l=i+1}^{n} (X \setminus \overline{V}_l) \subseteq A.$$

Veamos que

$$A \cap V_i \cap \bigcap_{l=i+1}^{n} (X \setminus \overline{V}_l) = (A \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l) \cap V_i \cap \bigcap_{l=i+1}^{n} X \setminus \overline{V}_l.$$

.

Si $x \in A$, $x \in V_i$ y $x \in X \setminus \overline{V}_l$ para todo $l = i+1, \ldots, n$, entonces es claro que $x \in (A \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l) \cap V_i \cap \bigcap_{l=i+1}^{n} X \setminus \overline{V}_l$. Para la otra contención, si $x \in (A \cup (X \setminus \overline{V}_i) \cup \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l) \cap V_i \cap \bigcap_{l=i+1}^{n} X \setminus \overline{V}_l$, entonces $x \in V_i$, es decir, $x \notin (X \setminus \overline{V}_i)$. Si $x \in \bigcap_{l=i+1}^{n} X \setminus \overline{V}_l$, entonces, $x \notin \bigcup_{l=i+1}^{n} V_l$. De todo lo anterior resulta que $x \in A$, dándose la otra contención. Esto nos dice que los elementos de $\mathcal{B}_n$ son intersección finita de elementos de $\mathcal{K}$, $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{X \setminus \overline{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Además la sucesión $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecindades abiertas converge a $\emptyset$. Para ver esto, sea

$k \in \omega$ y $N = k+1$. Para todo $n \geqslant N$,

$$\overline{V}_n \restriction k = \{\emptyset\} \restriction k;$$

la sucesión $\{\overline{V}_n\}_{n\in\omega}$ converge y dado que $V_n \subseteq \overline{V}_n$, la sucesión $\{V_n\}_{n\in\omega}$ también es convergente a $\emptyset$. Es claro además que la sucesión $\{X \setminus \overline{V}_n\}_{n\in\omega}$ converge a X.

Se sigue que

$$\mathcal{C} = \{X, \emptyset\} \cup \mathcal{K} \cup \{V_n\}_{n=1}^{\infty} \cup \{X \setminus \overline{V}_n\}_{n=1}^{\infty}$$

es un conjunto cerrado de 2^X y forma una subbase de X, pues cada $\mathcal{B}_n$ está formado por intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{C}$. □

Un problema relevante es saber si cuando X es un espacio cero-dimensional y tiene una base F_σ, es posible encontrar una base F_σ formada por cerrado-abiertos. Nótese que la colección de cerrado-abiertos es Π^0_3 por el Teorema 3.0.2.

A partir de este momento pondremos atención en espacios que admiten subbases G_δ. Veremos un resultado de Solecki, pero antes se necesitan algunos otros resultados.

3.0.7 Proposición. *Sea X un espacio Polaco. Sea $\mathcal{U} = \{G_0, G_1 \ldots,\}$ una familia numerable de subconjuntos G_δ de X. Si para todo $x \in X$, el hecho de que para todo $m \in \omega$ existe una infinidad de n tales que*

$$B_{\frac{1}{m}}(x) \cap G_n \neq \emptyset$$

implica que existe k tal que $x \in G_k$, entonces $\bigcup \mathcal{U}$ es G_δ.

Demostración. Para cada n, $G_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k^n$, con E_k^n abiertos y $E_{k+1}^n \subseteq E_k^n$ para toda k. Definimos

$$F_k^n = E_k^n \cap B_{\frac{1}{k}}(G_n) \text{ y } U_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^m$$

donde $B_{\frac{1}{k}}(G_n)$ es la bola de radio $r = \frac{1}{k}$ alrededor de G_n dada por la métrica de X. Afirmamos que

$$\bigcap_{m=0}^{\infty} U_m = \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$$

La contención $\bigcap_{m\in\omega} U_m \supseteq \bigcup_{n\in\omega} G_n$ es clara pues si $x \in G_n$ para algún n, $x \in E^n_k \cap B_{\frac{1}{k}}(G_n) = F^n_k$, para toda k.

Sea $x \in \bigcap_{m\in\omega} U_m$. Entonces para todo m, existe n tal que $x \in F^n_m = E^n_k \cap B_{\frac{1}{k}}(G_n)$, es decir , que se cumplen las condiciones del Teorema, entonces existe $n_0 \in \omega$ tal que $x \in G_{n_0}$. Con esto demostramos que la unión de los conjuntos G_δ también es G_δ. $\square$

3.0.8 Teorema (Solecki, 1997)**.** *Sea τ es una topología analítica sobre un conjunto numerable X. Supóngase que existe una sucesión $\{U_n\}$ de conjuntos abiertos tales que $\bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n = \emptyset$ y $\tau \upharpoonright U_n$ es no numerable para todo n. Entonces τ tiene una subbase Σ^0_3. Si adicionalmente τ es T_1, entonces τ tiene una subbase G_δ.*

Demostración. Para cada n, la restricción de τ al abierto U_n es un conjunto analítico (es la imagen continua de τ bajo la función intersección con U_n) y no numerable. Además, $\tau \upharpoonright U_n \subseteq 2^{U_n}$, que es un espacio polaco, así que por la Propiedad del Conjunto Perfecto, existe $Z_n \subseteq \tau \upharpoonright U_n$, homeomorfo a ω^ω. Para cada n, el conjunto $\tau \upharpoonright (X \setminus \overline{U}_n)$ es analítico, por la Proposición 1.4.16 existe $\xi_n : \omega^\omega \longrightarrow \tau \upharpoonright (X \setminus \overline{U}_n)$ continua tal que $\xi_n(\omega^\omega) = \tau \upharpoonright (X \setminus \overline{U}_n)$. Para cada n, existe $f_n : Z_n \longrightarrow \tau \upharpoonright (X \setminus \overline{U}_n)$, continua y suprayectiva dada por $f_n = \xi_n \circ \phi_n$, donde ϕ_n es el homeomorfismo entre Z_n y ω^ω. Definimos

$$Z = \{X \setminus \overline{U}_n : n \in \omega\} \cup \{V \cup f_n(V) : n \in \omega\ ,\ V \in Z_n\}.$$

Para cada n, el conjunto $Z^*_n = \{V \cup f_n(V) : V \in Z_n\}$ es homeomorfo a Z_n bajo la función $g_n : Z_n \times \tau \upharpoonright (X \setminus \overline{U}_n) \longrightarrow Z^*_n$ definida por $(V, f_n(V)) = V \cup f_n(V)$. Por como se ha definido g_n, ésta es una función continua y abierta. Para demostrar que es inyectiva, supongamos $V, W \in Z_n \subseteq \tau \upharpoonright U_n$ y $V \neq W$. Existe $x \in U_n$ tal que $V(x) \neq W(x)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $V(x) = 1$ y $V(x) = 0$. Dado que

$$U_n \cap (X \setminus \overline{U}_n) = \emptyset$$

si $U_n(y) = 1$; entonces $(X \setminus \overline{U}_n)(y) = 0$. De aquí que $f_n(V)(x) = f_n(W)(x) = 0$ y

$$g_n(V)(x) = V \cup f_n(V)(x) = 1,$$

$$g_n(W)(x) = V \cup f_n(W)(x) = 0.$$

Lo anterior nos dice que g_n es inyectiva y es claro que tambień es suprayectiva.

Por el Teorema 1.4.22 el conjunto Z_n es G_δ pues es un subespacio polaco de 2^X (Z_n es homeomorfo a ω^ω), por tanto Z_n^* también es G_δ. Además podemos escribir a Z como

$$Z = \{(X \setminus \overline{U}_n) : n \in \omega\} \cup \bigcup_{n\in\omega} Z_n^*.$$

es decir, Z es Σ_3^0, pues $\bigcup\limits_{n\in\omega} Z_n^*$ es unión numerable de conjuntos G_δ y $\{(X \setminus \overline{U}_n) : n \in \omega\}$ es $\Sigma_2^0 \subseteq \Sigma_3^0$. Veamos ahora que Z es una subbase para X.

Veamos que Z es subbase. Sea $x \in X$ y V abierto de X con $x \in V$. Como $x \notin \bigcap_{n\in\omega} \overline{U}_n$, existen $n \in \omega$ y U abierto tal que $x \in U \subseteq V \cap (X \setminus \overline{U}_n)$. Dado que f_n es suprayectiva sobre $\tau \restriction \overline{U}_n$, existe $W \in Z_n$ tal que $f_n(W) = U$. $W \cup U = W \cup f_n(W) \in Z_n^*$. Dado que $W \subseteq U_n$ entonces $U = (X \setminus \overline{U}_n) \cap (W \cup U)$, U es intersección de dos abiertos subbásicos de Z.

Adicionalmente supongamos que X es T_1. Enumeramos X por $\{x_n\}_{n\in\omega}$ y reenumeramos los abiertos U_n de tal manera que $x_n \notin \overline{U}_n$ y $x_i \notin U_n$ para $i < n$.

Podemos suponer que el rango de f_n en este caso es la colección de subconjuntos abiertos de $X \setminus (\overline{U}_n \cup \{x_i : i < n\})$(como X es T_1, el conjunto $\{x_i : i < n\}$ es cerrado). La definición para Z se mantiene casi igual, haciendo sólo un pequeño cambio

$$Z = \{(X \setminus (\overline{U}_n \cup \{x_i : i < n\})) : n \in \omega\} \cup \bigcup_{n\in\omega} Z_n^* \cup \{\emptyset\}.$$

Para cada n, el conjunto Z_n^* es G_δ por el mismo argumento que se utilizó anteriormente. Nos gustaría que la unión de los Z_n^* sea también G_δ. Para ver esto, sea $W_0 \in 2^X$ distinto de la función costante cero y $n = min\{i : x_i \in W_0\}$. Definimos

$$\mathcal{U}_n = \{A : min\{i : x_i \in A\} \geqslant n\}.$$

Note que $\mathcal{U}_n$ es una vecindad básica (cono) de W_0. Sea $W \in Z_n^*$, entonces existe $V \in Z_n$ tal que $W = V \cup f_n(V)$, con $V \subseteq U_n$ y $f_n(V) \subseteq X \setminus (\overline{U}_n \cup \{x_i : i < n\})$. De esto podemos concluir que

$$\{x_i : i < n\} \cap V = \emptyset = \{x_i : i < n\} \cap f_n(V);$$

es decir, que $W = V \cup f_n(V) \in \mathcal{U}_n$. Por tanto, $Z_n^* \subseteq \mathcal{U}_n$ y adicionalmente, para todo $j \leqslant n$ se cumple $Z_n^* \subseteq \mathcal{U}_n \subseteq \mathcal{U}_j$. Esto demuestra que si $x \in 2^X$ es tal que toda vecindad V de x intersecta una infinidad de Z_n^*, entonces intersecta una infinidad de $\mathcal{U}_n$, por tanto $x = \emptyset$.

Escribiendo $Z = \bigcup_{-1}^{\infty} Z_n^*$ con $Z_{-1} = \{X \setminus \overline{U}_n \cup \{x_i : i<n\}\} \cup \{\emptyset\}$, tenemos que Z es una unión numerable de conjuntos G_δ pues Z_{-1} es cerrado pues $\{X \setminus \overline{U}_n \cup \{x_i : i<n\}\}$ converge a $\emptyset$. Además el único $x \in 2^X$ para el cual toda vecindad intersecta a una infinidad de los Z_n^* es $\emptyset$, el cual pertenece a Z_{-1}^*. Entonces por la Proposición 3.0.7, Z es una subbase G_δ.

□

3.0.9 Corolario. *Toda topología analítica T_2 tiene una subbase G_δ.*

Demostración. Si cada $x \in X$ tiene una vecindad V_x tal que $U_x = X \setminus V_x$ es infinito, la sucesión de abiertos $\{U_x\}$ cumple las condiciones de 3.0.8. Es fácil darse cuenta que en ese caso $\bigcap_{x \in X} \overline{U}_x = \emptyset$ pues para todo $y \in X$, $y \notin \overline{U}_y$. Verifiquemos ahora que efectivamente $\tau \restriction U_x$ es no numerable para un x fijo. Podemos construir una sucesión de abiertos ajenos $\{V_n\}$ dentro U_x tal que si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son subfamilias ajenas de $\{V_n : n \in \omega\}$ entonces, $\bigcup \mathcal{U}$ y $\bigcup \mathcal{V}$ son distintos. Ahora probemos que existe tal sucesión. Sean $x_1, x_2 \in U_x$ y V_1, W_1 abiertos ajenos tales que $x_1 \in V_1$ y $x_2 \in W_1$. Sea $x_3 \in W_1$ entonces existen abiertos ajenos V_2, W_2 contenidos en W_1 tales que $x_2 \in V_2$ y $y_3 \in W_2$. Para el paso recursivo, supongamos definidos V_n, W_n abiertos ajenos tales que $x_n \in V_n$ y $x_{n+1} \in W_n$. Sea $x_{n+1} \in W_n$, entonces existen abiertos ajenos V_{n+1}, W_{n+1} tales que $x_{n+1} \in V_{n+1}$ y $x_{n+2} \in W_{n+1}$.

Si no pasa lo anterior entonces X es finito o contiene sólo un punto no-aisaldo tal que cada vecindad de él tendrá una vecindad cofinita. En este último caso, X sería homeomorfo a $\omega + 1$ con la topología del orden, así que por 3.0.6 tiene una base cerrada. □

Capítulo 4

Complejidad de Topologías Hausdorff

4.1. Operación de Souslin

4.1.1 Definición. Sea X un conjunto. Un esquema de Souslin es una familia $(A_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ de subconjuntos de X indexada por $\omega^{<\omega}$.

4.1.2 Definición. Sea $(P_s)_{s\in\omega^{<\omega}}$ un esquema de Souslin. La operación de Souslin $\mathcal{A}$ aplicada a tal esquema de Souslin produce el conjunto

$$\mathcal{A}P_s = \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} P_{x\restriction n}$$

Necesitaremos primero algunos resultados sobre conjuntos con la propiedad de Baire (BP). El siguiente par de resultados se pueden consultar en [7]

4.1.3 Lema. *Para cualquier conjunto S de un espacio polaco X, existe un conjunto A con la propiedad de Baire tal que $S \subset A$ y para cualquier $Z \subset A \setminus S$, si Z tiene la propiedad de Baire, entonces Z es magro.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para X. Sea $S \subset X$. Definimos

$$D(S) = \{x \in X : \forall B \in \mathcal{B}(x \in B \to\ B \cap S \text{ no es magro}\}.$$

Note que el complemento de $D(S)$ es cerrado. Si $x \notin D(S)$, entonces existe $B \in \mathcal{B}$ tal que

$x \in B$ y $B \cap S$ es magro. Si $y \in B$, entonces $y \notin D(S)$. Por tanto $B \subseteq X \setminus D(S)$, es decir, $X \setminus D(S)$ es abierto. Además,

$$S \setminus D(S) = \bigcup \{S \cap B : S \cap B \text{ es magro}\}$$

el cual es una unión numerable de conjuntos magros, por tanto, es magro. Sea $A = S \cup D(S) = (S \setminus D(S)) \cup D(S)$. Entonces, A tiene la Propiedad de Baire, pues es la unión de un conjunto magro y un conjunto cerrado.

Sea $Z \subset A \setminus S$ con la propiedad de Baire, queremos demostrar que Z es magro. Supongamos que Z no es magro. Existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \setminus Z$ es magro; de aquí que $U \cap S \subseteq B \setminus Z$ es magro. Además, $Z \cap B \neq \emptyset$, así que existe $x \in B$ tal que $x \in D(S)$ y por tanto $B \cap S$ no es magro, lo cual es una contradicción. $\square$

4.1.4 Teorema. *Todo conjunto analítico tiene la Propiedad de Baire.*

Demostración. Sea X un espacio Polaco y A un conjunto analítico de X. Sea $f : \omega^\omega \to X$ una función continua tal que $f(\omega^\omega) = A$. Para cada $s \in \omega^{<\omega}$, sea $A_s = f(U_s)$, donde $U_s = \{x \in \omega^\omega : x \upharpoonright |s| = s\}$. Se tiene que

$$A = \mathcal{A}A_s = \mathcal{A}\overline{A}_s.$$

Sea $a \in \mathcal{A}A_s$, entonces existe $x \in \omega^\omega$ tal que $a \in A_{x\upharpoonright n} = f(U_{x\upharpoonright n})$ para todo n. Así $f(x) = a$ y por tanto $a \in f(\omega^\omega) = A$. Para la otra contención, sea $a \in A$, entonces existe $y \in \omega^\omega$ tal que $f(y) = a$. Para todo n, $y \in A_{y\upharpoonright n}$. De esto se tiene la primera igualdad. Veamos ahora que se da la segunda igualdad. Claramente $\mathcal{A}A_s \subseteq \mathcal{A}\overline{A}_s$. Sea $a \in \mathcal{A}\overline{A}_s$. Existe x tal que para todo n, $a \in \overline{f(U_{x\upharpoonright n})}$. Veamos que $f(x) = a$. Para todo n, $B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A_{x\upharpoonright n} \neq \emptyset$, elíjase $y_n \in U_{x\upharpoonright n}$ tal que $f(y_n) \in B_{\frac{1}{n}}(a)$. Claramente, $\{y_n\}_{n\in\omega}$ converge a x. Como f es continua $f(x) = lim f(y_n) = a$.

También se cumple que, para todo $s \in \omega^{<\omega}$

$$A_s = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{s^\frown n}$$

Por el Lema 4.1.3, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, existe un conjunto B_s con la Propiedad de Baire tal que $A_s \subset B_s$, y todo conjunto con la Propiedad de Baire $Z \subset B_s \setminus A_s$ es magro. Los conjuntos $\overline{A}_s$ tienen la BP por ser cerrados. De aquí podemos suponer que $A_s \subset B_s \subset \overline{A}_s$, pues de no ser así podemos tomar $B' = B_s \cap \overline{A}_s$.

Sea $B_\emptyset = B$. Dado que B tiene la BP y $A = A_\emptyset \subset B$, es suficiente probar que $B \setminus A$ es magro. Note que

$$A = \mathcal{A}B_s$$

pues se dan las contenciones $A_s \subset B_s \subset \overline{A}_s$ y $\mathcal{A}A_s = \mathcal{A}\overline{A}_s$. Entonces

$$B \setminus A = B \setminus \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} B_{x\restriction n}.$$

Afirmamos que

$$B \setminus \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} B_{x\restriction n} \subset \bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} (B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s^\frown k}).$$

Sea $b \in B$ tal que $b \notin \bigcup_{s\in\omega^{<\omega}} (B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s^\frown k})$. Entonces, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, si $b \in B_s$, entonces $b \in B_{s^\frown k}$ para algún k. Entonces existe k_0 y s_0 de longitud k_0, tal que $b \in B_{s_0}$, y entonces existe k_1 tal que $b \in B_{s_0^\frown k_1}$, etc. Sea $a = s_0^\frown k_1^\frown k_2^\frown \ldots$, se tiene que $b \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_{a\restriction n}$ y por tanto $b \notin B \setminus \bigcup_{x\in\omega^\omega} \bigcap_{n\in\omega} B_{x\restriction n}$.

Dado que el conjunto $\omega^{<\omega}$ es numerable, sólo falta demostrar que $B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s^\frown k}$ es magro. Sea $s \in \omega^{<\omega}$ y sea $Z = B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s^\frown k}$. Se tiene que

$$Z = B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{s^\frown k} \subset B_s \setminus \bigcup_{k=0}^{\infty} A_{s^\frown k} = B_s \setminus A_s.$$

Entonces, como la colección de conjuntos con la BP forman una σ-álgebra, $Z \subset B_s \setminus A_s$ tiene la BP, entonces Z es magro. Con esto concluimos que A tiene la BP. □

4.2. Topologías Hausdorff

En esta sección estudiaremos la complejidad de topologías Hausdorff analíticas que tienen una infinidad de puntos límite. El resultado más sobresaliente sobre estas topologías nos dice que son al menos Π^0_3.

4.2.1 Lema (Talagrand). *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre ω. Entonces, $\mathcal{F}$ es magro si y sólo si, existe una partición de ω en conjuntos finitos $\{I_n : n \in \omega\}$ tal que, para todo $F \in \mathcal{F}$, $F \cap I_n \neq \emptyset$ para casi todo $n \in \omega$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es un conjunto magro. Entonces por el Teorema 1.3.17, existe $x_{\mathcal{F}} \in 2^\omega$ y una función estrictamente creciente $f_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \in 2^\omega : \forall_n^\infty \exists j \in [f_{\mathcal{F}}(n)\ ,\ f_{\mathcal{F}}(n+1))(x(j) \neq x_{\mathcal{F}}(j))\}.$$

Sea $I_n = [f_{\mathcal{F}}(n)\ ,\ f_{\mathcal{F}}(n+1))$ para $n \in \omega$. Supongamos que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que existe una infinidad de n tal que $F \cap I_n = \emptyset$. Sea $M = \{n : F \cap I_n = \emptyset\}$. Definimos

$$G = F \cup \{j : i \in I_n \ \&\ n \in M \ \&\ x_{\mathcal{F}} = 1\};$$

de aquí que $F \subseteq G$, por tanto $G \in \mathcal{F}$. Pero $G \restriction [f_{\mathcal{F}}(n), f_{\mathcal{F}}(n+1)) = x_{\mathcal{F}}$, para todo $n \in M$, lo cual es una contradicción.

Por otro lado, para cada n definamos

$$A_n = \{A \subseteq \omega : \forall m \geqslant n(A \cap I_m \neq \emptyset)\}$$

Afirmamos que A_n es nunca denso para todo n. Sean F, $K \subseteq \omega$ conjuntos finitos y $U = \{B : B \cap K = \emptyset \ \&\ F \subseteq B\}$ abierto básico de 2^ω. Sea N, tal que $I_N \cap F = \emptyset$

$$V = \{B : B \cap (K \cup I_N) = \emptyset \ \&\ F \subseteq B\}$$

si $B \in V$, entonces $(B \cap K) \cup (B \cap I_N) = \emptyset$. De aquí que $V \subseteq U$ y $V \cap A_n = \emptyset$, es decir, A_n es nunca denso. Por tanto, $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \omega} A_n$ es magro y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, así que también es magro. $\square$

4.2.2 Proposición. *Sea τ una topología analítica T_1 sobre un conjunto numerable X con una familia celular infinita (una familia de conjuntos abiertos ajenos por pares) de conjuntos no discretos. Entonces $\emptyset \times FIN \leqslant_W \tau$. En particular, τ es Π^0_3-hard.*

Demostración. Sea $\{V_i\}$ una familia celular de τ-abiertos no discretos. Para cada i fijamos un punto no aislado $x_i \in V_i$. Sea $\mathcal{F}_i$ el filtro de vecindades de x_i, restringido al conjunto $V_i \setminus \{x_i\}$. Para cada i los filtros $\mathcal{F}_i$ son analíticos, por la Proposición 2.2.2, $\mathcal{F}_i \leqslant_W \tau$.

Así que existe f continua tal que $f^{-1}(\tau) = \mathcal{F}_i$. Por los Teoremas 2.2.7 y 4.1.4, $\mathcal{F}_i$ es magro, para todo i. Por el Lema 4.2.1, para cada i, existe una partición de $V_i \setminus \{x_i\}$ en conjuntos finitos $\{F_n^i : n \in \omega\}$ tal que si $A \in \mathcal{F}_i$, $A \cap F_n^i \neq \emptyset$, para casi todo $n \in \omega$. Definimos una función $f : 2^{\omega\times\omega} \to 2^X$ por

$$f(A) = \bigcup_{i=0}^{\infty} \bigcap_{(i,n)\in A} (V_i \setminus F_n^i).$$

Veamos que f es continua. De hecho, f regresa abiertos subbásicos en abiertos subbásicos. Sea $x \in X$, $U = \{A : x \in A\}$. Entonces existe i tal que $x \in V_i$, además existe n tal que $x \in F_n^i$. Sea cumple que

$$C \in f^{-1}(U) \iff (i,n) \notin C.$$

Así que $f^{-1}(U) = \{C : (i,n) \notin C\}$ es un abierto subbásico de $2^{\omega\times\omega}$. Sólo falta demostrar que f atestigua que $\emptyset \times FIN \leqslant_W \tau$. Demostremos que $A \in \emptyset \times FIN$ si y sólo si $f(A)$ es τ-abierto. Sea $A \in \emptyset \times FIN$, y $x \in f(A)$, entonces existe i tal que $x \in V_i \setminus F_n^i$ para todo n tal que $(i,n) \in A$. Dado que $A \in \emptyset \times FIN$, el conjunto $\{n : (i,n) \in A\}$ es finito. Para cada $k \in \{n : (i,n) \in A\}$, sea U_k un abierto tal que $x \in U_k \subseteq V_i \setminus F_n^i$. Consideremos

$$U^i = \bigcap U_k.$$

U^i es un abierto que cumple que $x \in U^i \subseteq f(A)$. Así que $f(A)$ es un abierto. Supongamos ahora que $A \notin \emptyset \times FIN$, es decir, existe i tal que $\{n : (i,n) \in A\}$ es infinito. Entonces $\bigcap_{(i,n)\in A}(V_i \setminus F_n^i)$ no es vecindad de x_i pero $x_i \in \bigcap_{(i,n)\in A} V_i \setminus F_n^k$. Por tanto, no es abierto, es decir, $f(A)$ no es abierto.

Lo anterior demuestra que $\emptyset \times FIN \leqslant_W \tau$, y sabemos por 1.4.9 que $\emptyset \times FIN$ es Π_3^0-hard. Por tanto, τ es Π_3^0-hard. □

4.2.3 Lema. *Sea (X,τ) un espacio Hausdorff tal que $X^{(1)}$ es infinito. Entonces cualquiera de las siguientes condiciones implica que existe una familia celular de conjuntos τ-abiertos no-discretos.*

i) $X^{(2)} \neq \emptyset$ (conjunto de puntos límite de elementos de X^1).

ii) (X,τ) es regular.

Demostración. i) Supongamos que $X^{(2)} \neq \emptyset$. Sea $x \in X^{(2)}$ y $y_1 \neq x$ con y_1, es decir, $y_1 \in X^{(1)}$. Por la propiedad de Hausdorff existen W_1 y V_1 abiertos disjuntos tales que contienen a x y y_1 respectivamente. Entonces $W_1 \cap X^{(1)} \neq \emptyset$. Dado que x está en $X^{(2)}$, podemos encontrar $y_2 \in W_1$ punto límite de X. Existen V_2, W_2 abiertos ajenos contenidos en W_1 tal que $y_2 \in V_2$ y $x \in W_2$. Supongamos construidos V_n y W_n tal que $y_n \in V_n$ y $x \in W_n$. Sean W_{n+1} y V_{n+1} abiertos ajenos contenidos en W_n tales que $x \in W_{n+1}$ y $y_{n+1} \in V_{n+1}$, donde y_{n+1} es punto límite de X. De esta manera podemos construir una sucesión de puntos límite $\{y_n\}$ y conjuntos abiertos disjuntos $\{V_n\}$ con $y_n \in V_n$.

ii) Una equivalencia de un espacio regular dice que para $x \in X$, y cualquier abierto U con $x \in U$, entonces existe un conjunto abierto V que contiene a x y $\overline{V} \subseteq U$. Con esta propiedad podemos construir una suseción de abiertos para cada $x \in X^{(1)}$. Sea $L = \{x_n : n \in \omega\} \subseteq X^{(1)}$. Si L tuviese un punto límite estamos en el inciso anteior. Supongamos que no lo tiene. Sea V_1 vecindad de x_1 tal que $L \setminus V_1$ es infinito, y sea U_1 abierto tal que $x_1 \in U_1 \subseteq \overline{U}_1 \subseteq V_1$, esto se puede porque x_1 no es punto límite de L. Sea $y_1 = x_1$. Supongamos definidos y_n y V_n. Sea $y_{n+1} = x_m$ donde $m = min\{k : x_k \notin \bigcup_{j=1}^{n} V_j\}$ y sea V_{n+1} abierto contenido en

$$X \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{U}_j.$$

Sea U_{n+1} abierto con $y_{n+1} \in U_{n+1} \subseteq \overline{U}_{n+1} \subseteq V_{n+1}$, lo cual puede hacerse porque X es regular. Así $\{U_n : n \in \omega\}$ es una familia celular infinita de abiertos no discretos.

□

4.2.4 Ejemplo. Existe una topología Hausdorff segundo numerable sobre un conjunto numerable X tal que $X^{(1)}$ es infinito pero (X, τ) no tiene una familia celular de abiertos no discretos.

Una familia A_s con $s \in \omega \times \omega$ de conjuntos infinitos de ω se dice *independiente* si tiene la propiedad de que

$$(\bigcap_{s \in E} A_s) \cap (\bigcap_{t \in F} \omega \setminus A_t)$$

es infinito para cada par de conjuntos finitos ajenos E y F de $\omega\times\omega$. Para nuestro ejemplo considere $X=\omega\times 2$ con los puntos de $\omega\times\{0\}$ puntos aislados. Las vecindades para algún $(n,1)$ son de la forma

$$U^F_{(n,1)}=\{(n,1)\}\cup[(\bigcap_{i<n}A_{(i,n)}\cap(\bigcap_{j\in F}(\omega\setminus A_{(n,j)}))]\times\{0\},$$

donde F es un subconjunto finito de $\omega\setminus\{0,1,\ldots,n\}$. X es un espacio Hausdorff pues para $n<m$, $U^{\{m\}}_{(n,1)}$ y $U^{\emptyset}_{m,1}$ son dos vecindades disjuntas de $(n,1)$ y $(m,1)$ respectivamente. Para ver esto suponga que $(k,0)\in U^{\{m\}}_{(n,1)}\cap U^{\emptyset}_{(n,1)}$, entonces $k\in A_{(i,n)}$, para todo $i<n$, $k\in\omega\setminus A_{(n,m)}$ y $k\in A_{(j,m)}$ para todo $j<m$. De esto último, se cumple $k\in A_{(n,m)}$ lo cual es una contradicción. Además, por la independencia de la familia $A_{(n,m)}$ se cumple que, para todo $m>n$ y todo G

$$m\in F\Leftrightarrow U^F_{(n,1)}\cap U^G_{(m,1)}=\emptyset.$$

Demostremos lo anterior. Sea $m\in F$, por tanto $U^F_{(n,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(n,m)}\times\{\emptyset\}$ pero $U^G_{(m,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(n,m)}\times\{\emptyset\}$, por tanto $U^F_{(n,1)}\cap U^G_{(m,1)}=\emptyset$. Demostremos la otra implicación, supongamos $U^F_{(n,1)}\cap U^G_{(m,1)}=\emptyset$, entonces existen j,k tales que pasa alguna de las siguientes

(a) $U^F_{(n,1)}\subseteq A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$ y $U^G_{(m,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$.

(b) $U^F_{(n,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$ y $U^G_{(m,1)}\subseteq A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$

(a) no es posible pues $U^F_{(n,1)}\subseteq A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$ y $U^G_{(m,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$ implica $k=n$, y $U^G_{(m,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(j,k)}\times\{\emptyset\}$ implica $k\in G$, por tanto $k>m>n$. Así que pasa (b), por tanto $k=m$ y $U^F_{(n,1)}\subseteq\omega\setminus A_{(j,m)}\times\{\emptyset\}$ implica $m\in F$.

Así concluimos que no existe familia celular de conjuntos abiertos no-discretos.

4.2.5 Lema. *Sea X un espacio topológico Hausdorff numerable y $Y\subseteq X$ un subespacio cerrado con $Y^{(1)}$ infinito. Si Y no tiene una familia celular de conjuntos abiertos (relativos) entonces para cualquier $y\in Y^{(1)}$ existe una vecindad abierta U de y tal que el subespacio $Z=Y\setminus U$ tiene la propiedad de que $Z^{(1)}$ es infinito.*

Demostración. Suponga lo contrario, entonces existe $y\in Y^{(1)}$ tal que el complemento de todas sus vecindades abiertas contiene sólo una cantidad finita de puntos límite. Sea

$y_1 \in Y^{(1)}$ distinto de y, existe una vecindad V_1 de y_1 tal que $y \notin \overline{V}_1$. Ahora, $X \setminus \overline{V}_1$ es una vecindad abierta de y, así que podemos elegir $y_2 \in X \setminus V_1$ tal que $y_2 \notin \overline{V}_1$, y una vecindad V_2 tal que $y \notin \overline{V}_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Si consideramos ahora $\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2$, ésta es el complemento de una vecindad abierta de y, así que podemos elegir y_3 y una vecindad abierta tal que $y \notin \overline{V}_3$ y es ajena de $\overline{V}_1 \cup \overline{V}_2$. Si procedemos de esta manera podemos construir una familia celular de abiertos no-discretos de Y, contradiciendo la suposición. □

4.2.6 Teorema. *Sea τ una topología analítica T_2 sobre un conjunto numerable X tal que $X^{(1)}$ es infinito. Entonces $\emptyset \times FIN \leqslant_W \tau$.*

Demostración. Por la Proposicón 4.2.2 y el Lema 4.2.3, podemos suponer que $X^{(2)} = \emptyset$, $X^{(1)}$ es infinito y que no existe familia celular de conjuntos abiertos no-discretos de X. Note que para cualquier subconjunto cerrado Y de X se tiene que $\tau \upharpoonright Y \leqslant_W \tau$, al definir la función continua $f : 2^Y \to 2^X$ dada por $f(A) = A \setminus (\overline{X \setminus Y})$. Podemos suponer, además, que tal subespacio Y no contiene una familia celular de abiertos relativos no-discretos, mientras $Y^{(1)}$ sea infinito.

Sea $\{z_n\}$ una enumeración de $X^{(1)}$. Definiremos por inducción una sucesión creciente de enteros $\{n_k\}$, una sucesión de abiertos $\{O_k\}$ y una sucesión de conjutnos finitos $\{F_n^k\}$ tal que

(1) $z_{n_k} \in O_k$ para todo k.

(2) $\{F_n^k\}$ es una sucesión de conjuntos finitos de puntos aislado ajenos por pares en O_k y $z_{n_k} \in \overline{\bigcup_{n\in A} F_n^k}$ para cualquier subconjunto infinito $A \subseteq \omega$.

(3) $O_k \cap F_n^l = \emptyset$ para todo $l>k$ y todo n.

(4) $Z_k = X \setminus (\bigcup_{i=0}^{k} O_i)$ es un subespacio cerrado tal que $Z_k^{(1)}$ es infinito y n_{k+1} es el mínimo entero n tal que $z_n \in Z_k^{(1)}$.

Como X es un cerrado con $X^{(1)}$ infinito, por 4.2.5 existe una vecindad abierta O_0 de z_0 tal que $Z_0 = X \setminus O_0$ es un subespacio cerrado tal que $Z_0^{(1)}$ es infinito. Sea $\mathcal{F}_0$ el filtro de vecindades de z_0 restringido a $X^{(0)} \cap O_0$ (donde $X^{(0)}$ es el conjunto de puntos aislados de X). Dado que $\mathcal{F}_0$ es analítico, por el Lema 4.2.1, existe una partición en conjuntos finitos

$\{F_n^0\}$ de $X^{(0)} \cap O_0$ que cumple (2). Sea $n_0 = 0$ y n_1 el mínimo entero tal que $z_{n_1} \in Z_0^{(1)}$. Es claro que se cumple (1),(2),(3), (4) para $k = 0$.
Para el paso inductivo, supongamos que hemos definido n_i para $i \leqslant k+1$, $\{O_i\}$ y $\{F_n^i\}_{n=0}^{\infty}$ para $i \leqslant k$ tal que cumplen $(1), \ldots, (4)$. Por 4.2.5, existe una vecindad abierta O_{k+1} de $z_{n_{k+1}}$ tal que $Z_{k+1} = X \setminus O_{k+1}$ es un subespacio cerrado con $Z_{k+1}^{(1)}$ infinito. Sea n_{k+2} el mínimo entero tal que $z_{n_{k+2}} \in Z_{k+1}^{(1)}$, así que se cumplen (1) y (4). Por el Lema 4.2.1 aplicado al filtro de vecindades de $z_{n_{k+1}}$ restringido a $X^{(0)} \cap Z_k \cap O_{k+1}$, existe una partición $\{F_n^{k+1}\}_{n\in\omega}$ de $X^{(0)} \cap Z_k \cap O_{k+1}$ en conjuntos finitos tales que se cumple (2) y (3).

Definimos $f : 2^{\omega\times\omega} \to 2^X$, por:

$$f(A) = \bigcup_{(k,n)\in A} F_n^k$$

Veamos que f es continua. Sea $U = \{A : x \in A\}$ para $x \in X$ fijo. Sea $C \in f^{-1}(U)$, dado que existen n, k únicos tales que $x \in F_n^k$, tenemos que

$$C \in f^{-1}(U) \Longleftrightarrow (k, n) \in C$$

es decir, $f^{-1}(U)$ es un subbásico de $2^{\omega\times\omega}$.

Ahora veamos que $\emptyset \times FIN = f^{-1}(\{Z \subseteq X : Zescerrado\})$. Supongamos que $A \notin \emptyset \times FIN$, entonces existe k tal que la sección vertical $A_k = \{n : (k, n) \in A\}$ es infinito. Así que por (2) $z_{n_k} \in \overline{\bigcup_{n\in A_k} F_n^k}$, es decir, $z_{n_k} \in \overline{f(A)} \setminus f(A)$. Con esto demostramos que si $f(A)$ es cerrado entonces $A \in \emptyset \times FIN$. Supongamos ahora que $A \in \emptyset \times FIN$ y $z_n \notin f(A)$. Sea k el mímino entero tal que $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Por (4), n_{k+1} es el mínimo entero talque $z_{n_{k+1}} \in X \setminus (\bigcup_{i=0}^{k} O_i)$, así que z_n deberá estar en O_i para algún $i \geqslant k$. De aquí que $W = O_0 \cup \ldots \cup O_k$ es una vecindad abierta de z_n. Por (3),

$$W \cap f(A) = \bigcup_{(0,n)\in A} F_n^0 \cup \bigcup_{(1,n)\in A} F_n^1 \cup \ldots \cup \bigcup_{(k,n)\in A} F_n^k$$

que es un conjunto finito pues A es un elemento de $\emptyset \times FIN$. Entonces podemos encontrar una vecindad abierta V de z_n tal que $V \subset W$ y $V \cap f(A)$. De aquí que $z_n \notin$

$\overline{f(A)} = \emptyset$, así que $f(A)$ es cerrado. Con esto demostramos que $\emptyset \times FIN$ es Wadge reducible al conjunto de τ-cerrados, así también lo es a los conjuntos de los τ-abiertos.

□

4.2.7 Corolario. *Toda topología T_2 analítica sobre un conjunto numerable con una base F_σ y una infinidad de puntos no-aislados es Π^0_3-completo.*

Demostración. Dado que τ tiene una base F_σ, por 3.0.2, τ es Π^0_3. Además, por el teorema anterior, τ es Π^0_3-hard. Por tanto τ es Π^0_3-completo. □

4.2.8 Corolario. *La topología sobre los racionales es Π^0_3-completo.*

Capítulo 5

Algunos ejemplos

5.1. Una topología con complejidad $\Pi^0_{\alpha+1}$

Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre los naturales que contiene al filtro de los conjuntos cofinitos. Definimos la topología sobre $X = \omega^{<\omega}$ como sigue:

$$U \in \tau_{\mathcal{F}} \Leftrightarrow \{n \in \omega : s^\frown n\} \in \mathcal{F} \text{ para todo } s \in U$$

Veamos que $\tau_{\mathcal{F}}$ es Hausdorff, cero-dimensional y no tiene puntos aislados.

i) $\tau_{\mathcal{F}}$ es Hausdorff: Sean $s, t \in X$ incomparables, entonces los conjuntos formados por todas la extensiones de s y t respetivamente son $\tau_{\mathcal{F}}$-abiertos ajenos. Si $s \subset t$, entonces $U_t = \{r \in X : t \subseteq r\}$ y $U_s = \{r \in X : s \subseteq r \;\&\; r(|s|) \neq t(|s|)\}$ son $\tau_{\mathcal{F}}$-abiertos ajenos.

ii) $\tau_{\mathcal{F}}$ es cero dimensional: Para demostrar esto veamos primero cómo son los abiertos básicos. Sea $s_0 \in \omega^{<\omega}$ fijo, entonces $U \subset \omega^{<\omega}$ es un abierto básico para s_0 si para toda extensión s de s_0, existe $F_s \in \mathcal{F}$ tal que $\forall n \in F_s$, $s^\frown n \in U$. Ahora consideramos U un abierto básico y sea $C_{s_0} = \omega \setminus F_{s_0}$. Consideramos el conjunto $T_{s_0} = \{s \in \omega^{|s_0|+1} : s = s_0^\frown m \;\&\; m \in C_{s_0}\}$, entonces

$$\omega^{<\omega} \setminus U = \bigcup_{\substack{t \in \omega^{<|s_0|} \\ t \perp s_0}} U_t \cup \bigcup_{s \in T_{s_0}} U_s \cup \bigcup_{r \subsetneq s_0} V_r,$$

donde $t \perp s_0$ significa que t y s_0 no son comparables, $V_r = \{u \supseteq r : u(|r|) \neq s_0(|r|)\}$ y U_t, U_s son los abiertos formados por todas las extensiones de t y s respectivamente.

iii) $\tau_{\mathcal{F}}$ no tiene puntos aislados: Esto es claro pues para cualquier $s \in \omega^{<\omega}$ y para cualquier abierto que lo contenga, éste contendrá una infinidad de elementos.

Se cumple que si $\mathcal{F}$ es $\Pi^0_{\alpha+1}$ o Σ^0_α entonces $\tau_{\mathcal{F}}$ es $\Pi^0_{\alpha+1}$. Para ver esto definimanos, para cada $s \in \omega^{<\omega}$, una función $\phi_s : 2^{\omega^{<\omega}} \to 2^\omega$ como sigue:

$$\phi(A)_s = \begin{cases} \{n : s^\frown n \in A\} & s \in A \\ \omega & s \notin A \end{cases}$$

Nótese que $\tau_{\mathcal{F}} \subset \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$, para toda s, pues $\phi_s^{-1}(\mathcal{F}) = \{A \subseteq \omega^{<\omega} : s \notin A$ o $\{n : s^\frown n \in A\} \in \mathcal{F}\}$, así que si A es abierto y contiene a s, entonces $A \in \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$. Además

$$\tau_{\mathcal{F}} = \bigcap_{s \in \omega^{<\omega}} \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$$

La contención $\subseteq$ es clara por lo dicho anteriormente. Para demostrar la otra contención, sea $A \in \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$ para toda $s \in \omega^{<\omega}$. Supongamos $A \neq \emptyset$. Como $A \in \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$ entonces $\{n \in \omega : s^\frown n \in A\} \in \mathcal{F}$ para todo $s \in A$.

Finalmente, si para todo s, $\phi_s^{-1}(\mathcal{F})$ es continua habremos terminado pues si $\mathcal{F}$ es $\Pi^0_{\alpha+1}$, entonces $\forall s\ \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$ es $\Pi^0_{\alpha+1}$, así que $\tau_{\mathcal{F}}$ es $\Pi^0_{\alpha+1}$. De manera similar, si $\mathcal{F}$ es Σ^0_α, entonces $\forall s\ \phi_s^{-1}(\mathcal{F})$ es Σ^0_α, así que $\tau_{\mathcal{F}}$ es $\Pi^0_{\alpha+1}$. Veamos que ϕ_s es continua. Sea $n \in \omega$, y sea $W = \{A \subseteq \omega : n \in A\}$. Entonces

$$\phi_s^{-1}(W) = \{A \subseteq \omega^{<\omega} : n \in \phi_s(A)\} = \{A : s \notin A\} \cup \{A : s \in A \ \&\ s^\frown n \in A\}$$

el cual es cerrado-abierto en $2^{\omega^{<\omega}}$.

Un caso especial de $\tau_{\mathcal{F}}$ es cuando $\mathcal{F}$ es el filtro de los conjuntos cofinitos que denotaremos por τ_{FIN}. Mostraremos que τ_{FIN} no contiene una base F_σ.

5.1.1 Proposición. *τ_{FIN} no admite una base F_σ*

Demostración. Para demostrar esto haremos uso de algunas afirmaciones

5.1.2 Afirmación (1). *Sea* $A_n \subseteq \omega^n$ *un conjunto finito y* $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. *Entonces* A *es* τ_{FIN}*-cerrado y discreto.*

Demostración. Para cada $n \geqslant 1$, definamos $f(n) = max\{t(n-1) : t \in A_n\}$. Para cualquier k y $s \in \omega^k$ definimos $U_f^s = \{s\} \cup \{t \in \omega^{<\omega} : s \prec t \ \& \ t(m-1) > f(m)$ para todo $m > k\}$. Para $s' \in U_f^s$, el conjunto $\{n : s'^\frown n \notin U_f\}$ es finito pues el conjunto de extensiones t de s' que no están contenidas en U_f es el mismo de aquellos que cumplen $f(|s'|+k) > t(|s'|+k-1)$, que es sólo una cantidad finita ($A_{|s'|+k}$ es finito). De aquí que U_f^s es abierto.

Veamos ahora que A es cerrado. Sea $s \in \overline{A}$ y así $U_f^s \cap A \neq \emptyset$. Sea $t \in U_f \cap A$, entonces existe $l > k = |s|$ tal que $t \in A_l$ y $t = s$ o $t(m-1) > f(m)$ para todo $m > k$. Si $t \neq s$ entonces

$$f(l) \geqslant t(l-1) > f(l)$$

lo cual es una contradicción. Por tanto $U_f \cap A$ no contiene extensiones de s, así que $U_f \cap A = \{s\}$. Por tanto $s \in A$.

Además, para $s \in A$, el abierto U_f^s es tal que no contiene a ningún otro elemento de A, por tanto A es discreto. □

5.1.3 Afirmación (2). *Sea* $K \subseteq \tau_{FIN}$ *un conjunto cerrado y* $s \in \omega^{<\omega}$. *Entonces existe* n *tal que para todo* $V \in K$, *si* $s \in V$, *entonces existe* $m < n$ *tal que* $s^\frown m \in V$. *Más aún, para todo* $m > |s|$ *existe un conjunto finito* $A_m \subseteq \omega^m$ *tal que* $s \prec t$ *para toda* $t \in A_m$ *y si* $V \in K$ *y* $s \in V$, *entonces* $V \cap A_m \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos lo contrario, supongamos que para todo n, existe $v_n \in K$, tal que $s \in V_n$ y $s^\frown m \notin V_n$ para todo $m < n$. $\{V_n\}_{n\in\omega}$ forman una sucesión en K que es cerrado en $2^{\omega^{<\omega}}$ así que podemos suponer que $\{V_n\}_{n\in\omega} \longrightarrow V \in K$. Entonces $s \in V$ y $s^\frown k \notin V$ para todo k, lo que contradice el hecho de que V es un abierto.

Para demostrar la segunda parte, sea $m_0 = |s| + 1$ y $n_0 \in \omega$ dado por la primera parte de la afirmación. Sea $A_{m_0} = \{s^\frown 0, s^\frown 1, \ldots, s^\frown n_0\}$. Todos los elementos de A_{m_0} son extensiones de s y si $V \in K$ y $s \in V$, entonces existe $j < n$, tal que $s^\frown j \in V \cap A_{m_0}$. Supongamos definido $A_{m_k} \subseteq \omega^k$ y sea $m_{k+1} = m_k + k$. Sea $n_{k+1} \in \omega$ dado por la primera parte de la afirmación aplicado a algún $t \in A_{m_k}$, entonces

$$A_{m_{k+1}} = \{t^\frown j_k : j_k < n_{k+1} \ \& \ t \in A_{m_k}\}.$$

Así, si $V \in K$ y $s \in V$ entonces existe $j < n_{k+1}$ tal que $t^\frown j \in V \cap A_{m_{k+1}}$ □

5.1.4 Afirmación (3). *Sea $K_n \subseteq \tau_{FIN}$ un conjunto cerrado y $s \in \omega^{<\omega}$. Entonces existe una vecindad τ_{FIN}-abierta O de s tal que para todo n y todo $V \in K_n$, si $s \in V$ entonces $V \nsubseteq O$.*

Demostración. Sea $s \in \omega^{<\omega}$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que para cada n, K_n contiene un abierto V con $s \in V$. Elijimos un conjunto finito $A_n \subseteq \omega^{|s|+n}$ que está dado por la afirmación 2. Sea $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$ que es cerrado por la afirmación 1. Sea O el complemento de A. Sean $n \in \omega$ y $V \in K_n$. Si $s \in V$, por la afirmación 2, $V \cap A_n \neq \emptyset$. Si $t \in V$ y $t \in A_n$, entonces $t \notin O$, así que $V \nsubseteq O$. □

De la afirmación 3 se concluye que τ_{FIN} no tiene base F_σ. Cualquier unión numerable de subconjuntos cerrados de τ tiene un abierto no vacío que no contiene elementos de tal unión numerable.

□

5.2. Una topología Σ^1_1-completa sobre un grupo topológico numerable

Primero recordemos la definición de grupo topológico.

5.2.1 Definición. Un *grupo topológico* es un grupo algebraico $(G, \cdot)$ con una topología sobre G tal que las operaciones de grupo (producto e inversión) continuas. Un grupo *Booleano* es un grupo tal que todos sus elementos tienen orden dos, es decir, para todo $a \in G$, $a^2 = e$.

5.2.2 Proposición. *Sea $G = \{A \subseteq 2^\omega : A$ es cerrado-abierto$\}$. Entonces G es grupo con la diferencia simétrica como operación de grupo.*

Demostración. La diferencia simétrica es asociativa. El vacío es neutro y cada elemento es su propio inverso. □

Para cada conjunto denso $A \subseteq 2^\omega$ definimos una topología τ_A sobre el grupo Booleano G de los conjuntos cerrado-abiertos de 2^ω. La subbsase de τ_A son los conjuntos de la forma

$$x^+ = \{a \in G : x \in a\}\ ,\ x^- = \{a \in G : x \notin a\}$$

donde $x \in A$. Supongamos que A es analítico. La subbase de τ_A la podemos escribir como

$$\mathcal{B} = \left(\bigcup_{x\in A}\{a \in 2^{2^\omega} : x \in a \ \&\ a \in G\}\right) \cup \left(\bigcup_{x\in A}\{a \in 2^{2^\omega} : x \notin a \ \&\ a \in G\}\right).$$

Veamos que $\mathcal{B}$ es analítico. Definimos

$$\mathcal{C} = \{(x,a) \in 2^\omega \times 2^{2^\omega} : x \in A \ \&\ x \in a \ \&\ a \in G\}.$$

Note que el conjunto $G = \{U_s \subseteq 2^{2^\omega} : s \in 2^{<2^\omega}\}$, es decir, que los únicos conjuntos cerrado abiertos son los básicos. Para ver esto, sea H un cerrado-abierto de 2^ω. Considere una cubierta $U_{s_1}, U_{s_2}, \ldots, U_{s_m}$ finita de cerrado-abiertos básicos de H, esto lo podemos hacer pues H es cerrado. Además, por el hecho de que H es abierto, podemos construir la cubierta de tal manera que cada $U_{s_j} \subset H$. De aquí, podemos modificar la cubierta de tal manera que H se puede escribir como una combinación booleana de una cantidad finita de cerrado-abiertos básicos. Por esto, nótese que

$$\mathcal{C} = \bigcup_{a\in G}\{(x,a) \in 2^\omega \times 2^{2^\omega} : x \in A \cap a\}.$$

Como cada $a \cap A$ es analítico, $\mathcal{C}$ es analítico por 1.4.18. Es claro que $\Pi_1(\mathcal{C}) = \bigcup_{x\in A}\{a \in 2^{2^\omega} : x \in a \ \&\ a \in G\}$, por tanto es analítico. De manera análoga se demuestra que el conjunto $\bigcup_{x\in A}\{a \in 2^{2^\omega} : x \notin a \ \&\ a \in G\}$ también es analítico. Por tanto, $\mathcal{B}$ es analítico y por la Proposición 3.0.3, $\tau_A \in \Sigma^1_1$. Considere la función $f : 2^\omega \to 2^G$ definida por

$$f(x) = \{a \in G : x \in a\} = x^+$$

Veamos que f es inyectiva y continua. Supongamos que $x \neq y \in A$. Entonce existe $a \in x^+$ tal que $a \notin y^+$, es decir, $x \in a$ y $y \notin a$. Dado que a es cerrado-abierto de 2^ω, existe U cerrado-abierto básico de 2^ω tal que $x \in U \subseteq a$ y $y \notin U$. Así que $f(x)$ debe ser distinto de $f(y)$. Con esto demostramos que f es inyectiva sólo falta demostrar que es continua. Para ver esto sea $a \in G$ y $U_a = \{A \in 2^G : a \in A\}$ abierto básico de 2^G. Sea $y \in a$ así que

$a \in f(y)$. Por tanto $f(y) \in U_a$ y con esto concluimos que f es continua.

Note que por definición, para todo $x \in 2^\omega$, $f(x) \neq \emptyset$, pues $x \in 2^\omega \in G$, es decir, $2^\omega \in f(x)$. Más aún, si $x \in A$ entonces $f(x) = x^+ \in \tau_A$. Finalmetne, si $x \notin A$ entonces $f(x) = x^+$ tiene τ_A-interior vacío. Para ver esto, sea $U \in \tau_A$, es decir, $U = x_1^+ \cap \ldots \cap x_n^+ \cap y_1^- \cap \ldots \cap y_m^-$, con $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in A$. Dado que 2^ω es Hausdorff, existe un cerrado-abierto b tal que

$$x_1, \ldots, x_n \in b \text{ y } y_1, \ldots, y_m, x \notin b;$$

por tanto, $b \in U$ y $b \notin f(x)$, así que $U \subseteq f(x)$. Esto prueba que si $x \notin A$ entonces $f(x) \notin \tau_A$. Por tanto $A \leqslant_W \tau_A$.

Para $A = 2^\omega$, denotemos $\tau_A = \tau_1$. La subbase para τ_1 es un conjunto compacto de 2^G así que en este caso τ_1 es una topología Π^0_3. Por otro lado, para una elección adecuada de un conjunto analítico no-Borel $A \subseteq 2^\omega$, τ_A es Σ^1_1-completo. Note que la elección del conjunto A cambia la subbase de τ_A dando como resultado un cambio en la complejidad de la topología.

Aún quedan preguntas sin responder sobre el tema. En el capítulo 3 se estudiaron los casos en lo que una topología tiene base cerrada, F_σ o G_δ. Sin embargo, aún falta responder si toda topología analítica tiene una base o subbase Borel y si la respuesta es afirmativa, nos gustaría saber la complejidad Borel mínima de dicha base o subbase. Otra pregunta sin responder al respecto es si una topología regular con una base F_σ tiene una base F_σ de cerrado-abiertos.

Bibliografía

[1] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag. 1994.

[2] A.S. Kechris, A. Louveau, & W.H. Woodin. *The structure of σ-ideals of compact sets.* Trans. Amer. Math. Soc., 301(1):263-288, 1987.

[3] David Marker. *Descriptive set theory.* 2002. http://homepages.mathuic.edu/ marker/math512/dst.ps.

[4] Fernando Hernández Hernández & David Meza Alcántara. *Árboles y algunas de sus aplicaciones.* Borrador.

[5] Stephen Willard. *General topology.* Addison-Wesley Publishing Company. 1968.

[6] Stevo Todorčević & Carlos Uzcátegui *Analytic topologies over countable sets.* Topology Appl. 111(2001), no 3, 299-326.

[7] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag.

[8] Tomek Bartoszyński & Haim Judah. *Set theory on the structure of the real line.* Wellesley, Massachusetts. 1995.