UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

COMPLETACIÓN Y COMPACTACIÓN DE GRUPOS TOPOLÓGICOS

T E S I S

para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Autor:
Oscar Trejo Espinosa

Asesor:
Doctor en Cs. Matemáticas,
David Meza Alcántara

Julio, 2013
Morelia, Michoacán

Índice

Agradecimientos

Agradesco a mi asesor Dr. David Meza Alcántara por todo su apoyo a lo largo de este trabajo y por estar siempre al pendiente de mí. Gracias por regalarme mucho de su tiempo y la paciencia que se tomo para ayudarme.

Gracias a todos mis familiares y compañeros por su ayuda en el transcurso de la carrera, en especial a mis padres Juana y Salvador, a mis hermanos Anabel, Llazmin, Mariela, Salvador y Erick; a mis amigos Héctor, Antonio, Ana Cristina, Yesenia...

Gracias a mi mujer Treicy Hesveyde y a mi pequeño Oscar Dyron por toda su paciencia, apoyo y motivación para salir adelante.

Introducción

Completar y compactar espacios son problemas fundamentales del análisis y la topología general. Las completaciones clásicas se dan en espacios métricos, mientras que las compactaciones (como la de Stone–Čech) se tienen para espacios topológicos completamente regulares. En este trabajo presentamos una completación y una compactación sobre grupos topológicos. La completación que haremos está inspirada en la completación clásica para espacios métricos, mediante clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy. La idea de esto es pensar a las vecindades básicas de la identidad como las vecindades de radio ϵ en espacios métricos. Hacemos énfasis solo en la identidad ya que los grupos topológicos son homogéneos. Un hecho importante de las vecindades de un punto es que forman un filtro Cauchy. Dentro de este trabajo diremos que un grupo topológico es Raĭkov completo si todo filtro Cauchy converge.

Por otro lado la compactación que daremos está basada en la compactación de Stone–Čech para espacios completamente regulares. Como el intervalo $[0, 1]$ no es grupo, la idea al basarnos en la compactación de Stone–Čech, es tomar funciones continuas a uno de los grupos más conocidos, el toro $\mathbb{T}$. Con esto en mente, daremos la construcción de la Compactación de Bohr de un grupo topológico, tomando la familia de todos los caracteres continuos de el grupo al toro. Encajaremos al grupo en un subgrupo compacto de una potencia del toro $\mathbb{T}$, mediante el producto diagonal de todos los caracteres continuos.

En el primer capítulo, desarrollaremos los conceptos básicos de grupos, grupos topológicos y filtros. Se prueban resultados como que todo grupo topológico de clase T_0 es regular, se prueba el teorema de Peter-Weyl para grupos localmente compactos, el cual asegura la existencia de caracteres no triviales de un grupo localmente compacto. Se habla un poco del cociente de grupos y se define el concepto de filtro. Todas estas serán herramientas necesarias para el trabajo realizado en los capítulos siguientes.

En espacios métricos tenemos sucesiones de Cauchy y el concepto de espacio completo. Haremos una analogía a este concepto en grupos topológicos, mediante el uso de filtros, veremos que todo grupo topológico admite una completación de Raĭkov y daremos la construcción de la completación, intentando siempre destacar la analogía con lo que ocurre en espacios métricos. Se prueban propiedades como la unicidad de la completación (salvo isomorfismo topológico), se prueba la extensión de homomorfismos continuos de un grupo a su completación y otras como que el producto arbitrario de grupos completos es completo, recordando que esta propiedad en espacios métricos solo se da para producto numerable.

En el capítulo dos hablaremos de la compactación de grupos topológicos basados en la compactación de Stone–Čech para espacios completamente regulares (ver [5]). Se define la topología de Bohr, la cual tiene propiedades como ser maxima entre las mas gruesas que la topología original que hacen precompacto al grupo. La compactación realizada recibe el nombre de compactación de Bohr, esta se hace a detalle pero considerando en lugar de [0,1] al toro $\mathbb{T}$. Hablaremos un poco de grupos maximales casi–périodicos, y el functor "dotar a un grupo con la topología de Bohr". Veremos que esta operación forma un functor covariante de la categoria de los grupos localmente compactos abelianos a los grupos abelianos, precompactos y Hausdorff.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Grupos

Definición 1.1.1. Recordemos que $(G, \cdot)$ con G un conjunto y $\cdot$ una operación binaria sobre G es un *grupo* si
i) La operación $\cdot$ es cerrada en G.
ii) La operación $\cdot$ es asociativa,
iii) Existe un elemento neutro $e \in G$ tal que para cada $x \in G$ se tiene que $x \cdot e = x = e \cdot x$.
iv) Para cada $x \in G$ existe su inverso $y = x^{-1} \in G$ tal que $x \cdot y = y \cdot x = e$.
Si el producto $\cdot$ es conmutativo ($i.e$ $a \cdot b = b \cdot a$) diremos que G es un grupo *abeliano*.

Un ejemplo claro de un grupo que nos será de gran utilidad durante el transcurso de esta tesis es el toro.

Ejemplo 1.1.2. Sea $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ este conjunto es llamado el *toro* y es un grupo con la multiplicación de números complejos.

También recordemos lo que es un subgrupo:

Definición 1.1.3. Un subconjunto H de un grupo G es subgrupo de G si:
i) el elemento identidad e de G está en H.
ii) Para cualesquiera $x, y \in H$ se tiene que $x \cdot y \in H$.
iii) Para cada $x \in H$ su inverso x^{-1} también está en H.

Lema 1.1.4. *Sea H subconjunto no vacío de un grupo G. Si para cualesquiera $x, y \in H$ se tiene que $xy^{-1} \in H$, entonces H es un subgrupo de G.*

Demostración. Que el neutro está en H es claro. Para x, y^{-1} se tiene que $xy \in H$, y para los inversos tenemos que para $e, x \in H$ el producto $x^{-1} = ex^{-1} \in H$.

□

Definición 1.1.5. Sea G grupo y A subconjunto de G, denotaremos por $\langle A \rangle$ al menor subgrupo H de G que contiene a A. En tal caso, diremos que H es el subgrupo generado por A. Si el conjunto A consta de un solo elemento diremos que el grupo $\langle A \rangle$ es *cíclico*.

Definición 1.1.6. Un grupo G se dice *divisible* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $G^n = G$. Dicho de otro modo, G es divisible si dado $x \in G$ y algún $n \in \mathbb{N}$ existe $y \in G$ tal que $y^n = x$.

En el siguiente lema daremos una condición suficiente para que un homomorfismo definido en un subgrupo de un grupo abeliano se pueda extender.

Lema 1.1.7. *Sea G un grupo abeliano con la operación $+$ y sea H subgrupo de G, consideremos $f : H \to F$ un homomorfismo con F un grupo abeliano, sean $x \in G$ y $y \in F$. Entonces f admite una extensión a un homomorfismo $h : \langle H \cup \{x\} \rangle \to F$ tal que $h(x) = y$. si y sólo si $kx \notin H$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o $mx \in H$ y $f(mx) = my$.*

Demostración. Supongamos que dicha extensión existe y cumple que $h(x) = y$, como $h|_H = f$, tenemos que $my = h(mx) = mf(x)$. Ahora demostremos la suficiencia. Llamemos $H_0 = \langle H \cup \{x\} \rangle$, y definamos

$$\begin{aligned} h : H_0 &\longrightarrow F \\ z = kx + b &\longmapsto ky + f(b). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Caso 1. Supongamos que $kx \notin H$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces cada $z \in H_0$ tiene la forma $z = kx + b$, con $b \in H$ y $k \in \mathbb{Z}$, claramente h esta bien definida y h extiende a f. También h es homeomorfismo pues dados $z_1 = kx + a$ y $z_2 = lx + b$ entonces $h(z_1 + z_2) = h((k + l)x + a + b) = (k + l)y + f(a + b)$ y como f es homomorfismo se tiene que $h(z_1 + z_2) = h(z_1) + h(z_2)$.
Caso 2. Supongamos ahora que existe $m \in N$ tal que $mx \in H$, consideremos m mínimo y definamos $h(x) = y$, donde $my = f(mx)$ y en general como en la ecuación (1.1). Veamos que h esta bien definida. Sean $kx + a = lx + b$ entonces $(k - l)x = b - a \in H$, entonces m divide a $k - l$ pues $mx \in H$,

digamos $k - l = mp$ para algún $p \in \mathbb{Z}$, por lo tanto

$$h(kx+a) - h(lx+b) = ky + f(a) - (ly + f(b)) =$$
$$(k-l)y - f(b-a) = mpy - f(mpx) = mp(y - f(x)) = 0;$$

es decir, $h(kx+a) = h(lx+b)$. También es fácil ver que h extiende a f y probar que h es homomorfismo es análogo al *Caso 1.*

□

Teorema 1.1.8. *Sea H subgrupo de un grupo abeliano G, entonces todo homomorfismo $f : H \to F$, con F un grupo divisible abeliano, se puede extender a un homomorfismo $g : G \to F$.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ la familia de todas las parejas de la forma (K, g) con K subgrupo de G que contiene a H y $g : K \to F$ homomorfismo que extiende a f. Dados dos elementos (K, g) y (K_1, g_1) definimos un orden en $\mathscr{B}$ como sigue:
diremos $(K, g) < (K_1, g_1)$ si y sólo si $K \subset K_1$ y g_1 extiende a g. Claramente este es un orden parcial en la familia $\mathscr{B}$. Sea $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ una cadena en $\mathscr{B}$, consideremos $K^* = \bigcup\{K \mid (K, g) \in \mathscr{C}$ para algun homomorfismo $g : K \to F\}$ y definamos $g^*(x) = g(x)$ si $x \in K$ y $(K, g) \in \mathscr{C}$, como cada homomorfismo g extiende al homomorfismo anterior en $\mathscr{B}$, se tiene que g^* esta bien definida y es homomorfismo, nótese que K^* es subgrupo de G, entonces para todo $(K, g) \in \mathscr{C}$ se cumple que $(K, g) < (K^*, g^*)$ es decir la cadena $\mathscr{C}$ esta acotada. Por el lema de Zorn, la familia $\mathscr{B}$ tiene un elemento maximal, digamos (K, g).
Afirmamos que $K = G$. Supongamos que no y sea $a \in G \setminus K$, como F es divisible por el Lema 1.1.7, existe un homomorfismo $h : \langle K \cup \{a\} \rangle \to F$ tal que h extiende a g, claramente $K \subset \langle K \cup \{a\} \rangle$, entonces $(K, g) < (\langle K \cup \{a\} \rangle, h)$, y esto es una contradicción a la maximalidad de (K, g). Por lo tanto K es igual a G y así g es el homomorfismo buscado.

□

Proposición 1.1.9. *Sea G grupo y $b \in G$ con b distinto del elemento identidad e, entonces existe un subgrupo cíclico H de G tal que $b \in H$ y H es isomorfo a un subgrupo K del toro $\mathbb{T}$.*

Demostración. Caso 1. Si b es de orden finito sea $p \in \mathbb{N}$ mínimo tal que $pb = 0$ y sea $\varphi = \frac{2\pi}{p}$. Definamos $a = cos\varphi + isen\varphi$, entonces a es de orden p.

Sea $H = \langle b \rangle$ y $K = \langle a \rangle$ y definamos $g(b^n) = a^n$ para cada $n \in N$, claramente $b \in H$ y g es un isomorfismo.
Caso 2. Supongamos ahora que b es de orden finito, sabemos que existe $0 < \varphi < \pi$ tal que $n\varphi \neq 2\pi k$ para todo $n, k \in N$, sea $a = cos\varphi + isen\varphi$ y definamos $H = \langle b \rangle$, $K = \langle a \rangle$ y $g(b^n) = a^n$, nuevamente g es isomorfismo. Esto termina la demostración.

□

Como un resultado del Teorema 1.1.8 y de la Proposición 1.1.9 tenemos:

Corolario 1.1.10. *Sea G grupo abeliano y $a \in G$ distinto de la identidad, entonces existe un homomorfismo $g : G \to \mathbb{T}$ tal que $g(a) \neq 1$.*

Demostración. Por la Proposición 1.1.9 existe H subgrupo de G tal que $a \in H$ y $H \cong K$ con K subgrupo de $\mathbb{T}$, sea $f : H \to K$ el isomorfismo obtenido en la prueba de la Proposición 1.1.9, claramente $f(a) \neq 1$. Como $\mathbb{T}$ es divisible, por el Teorema 1.1.8, existe $g : G \to \mathbb{T}$ tal que g extiende a f y $g(a) \neq 1$.

□

1.2 Propiedades de grupos topológicos

Nuestro objetos de estudio serán los grupos topológicos los cuales están definidos como:

Definición 1.2.1. Un *grupo topológico* es un par $G = ((\mathbf{G}, \cdot), \tau)$ donde

i) $(\mathbf{G}, \cdot)$ es un grupo con la operación $\cdot$,
ii) τ es una topología para $\mathbf{G}$ que cumple que las operaciones

$$\begin{array}{rcl} \mu : G \times G & \longrightarrow & G \\ (x, y) & \longmapsto & x \cdot y, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} I : G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1}, \end{array}$$

son continuas, considerando a $G \times G$ dotado con la topología producto.

Observación 1.2.2. A los elementos U de τ los llamaremos abiertos y si $x \in U$ entonces U será llamado vecindad de x o en caso de ser necesario vecindad abierta de x.

Notación 1.2.3. A la familia formada por todas las vecindades abiertas del elemento x la llamaremos sistema de vecindades del punto $x \in G$ y la denotaremos $\mathcal{N}_x$. Cuando sea necesario denotaremos $\mathcal{N}_x(G)$ para hacer enfásis en que grupo topológico estamos considerando las vecindades.

Definición 1.2.4. Sea G un grupo topológico y sea $g \in G$ fijo. Definimos *las traslaciones izquierda y derecha* bajo el elemento g como

$$\begin{aligned} \lambda_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gx \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \rho_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto xg. \end{aligned}$$

Un hecho importante es que en cualquier grupo topológico las traslaciones izquierda y derecha son homeomorfismos.

Lema 1.2.5. *En todo grupo topológico las traslaciones son homeomorfismos.*

Demostración. Para la traslación izquierda. Claramente λ_g es biyección para cada $g \in G$, nótese que λ_g es continua, por la continuidad del producto en G. La continuidad de la inversa se tiene por el hecho de que $\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}} \simeq Id_G$ y que $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g \simeq Id_G$, pues $(\lambda_g \circ \lambda_{g^{-1}})(x) = \lambda_g(g^{-1}x) = g(g^{-1}x) = x$. La demostración para la traslación derecha es análoga. $\square$

Gracias a que las traslaciones son homeomorfismos podemos afirmar el siguiente corolario.

Corolario 1.2.6. *Para cada U vecindad de x en G se tiene que $x^{-1}U$ es vecindad de la identidad. Por otro lado si U es vecindad de la identidad, entonces xU es vecindad de x.*

Lema 1.2.7. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos topológicos, si f es continua en la identidad $e \in G$, entonces f es continua en todo G.*

Demostración. Sean $e_G \in G, e_H \in H$ los elementos identidad en G y H respectivamente. Sean x un elemento arbitrario de G y V una vecindad de $y = f(x) \in H$. Por el Lema 1.2.5 las traslaciones son homeomorfismos, entonces $y^{-1}V$ es una vecindad de e_H. Como f es continua en e_G, existe una vecindad U de e_G tal que $f(U) \subseteq y^{-1}V$. Nuevamente como las traslaciones son homeomorfismos, xU es una vecindad de x y así, $f(xU) = f(x)f(U) \subseteq yy^{-1}V = V$. $\square$

Recordemos que un espacio topológico X es de clase T_0, si dados $x, y \in X$ distintos, existe una vecindad abierta U de x tal que $y \notin U$, o de otro modo existe W vecindad abierta de y tal que $x \notin W$.

Durante este capítulo, consideraremos grupos topológicos de clase T_0.

Definición 1.2.8. Sea G un grupo topológico T_0 y $A \subset G$, diremos que A es *simétrico* si se cumple que $A = A^{-1}$, donde $A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}$.

Proposición 1.2.9. *Para cada $U \subset G$, vecindad de la identidad en G, y todo $x \in U$ se tienen las siguientes propiedades.*
i) Existe V vecindad de $e \in G$ tal que $xV \subset U$.
ii) Existe V vecidad de la identidad tal que V es simétrica y $V \subset U$.
iii)Existen V, W vecindades de la identidad tales que $VW \subset U$.
iv) Existe V vecindad de la identidad, tal que $V^2 \subset U$.
v) Existe V vecindad de la identidad, tal que $VV^{-1} \subset U$.
vi) Se tiene que $\{e\} = \bigcap \mathcal{N}_e$.
vii) Para cada $x \in G$ existe V vecindad de la identidad tal que $xVx^{-1} \subset U$.
viii) Para cada x, $y \in G$ existe V vecindad de la identidad tal que $(xV)(yV) \subset xyU$.

Demostración. Para (i) consideremos $V = x^{-1}U \cap U$, tenemos que V es vecindad de la identidad y que $xV = x(x^{-1}U \cap U) = U \cap xU \subset U$. Para probar (ii) consideremos $V = U \cap U^{-1}$. Entonces $V \subset U$ y $V^{-1} = (U \cap U^{-1})^{-1} = U \cap U^{-1} = V$. Para la prueba de (iii) recordemos por la Definición 1.2.1 que la función $\mu : G \times G \to G$ es continua, entonces para U existe un abierto $U_1 = W_1 \times W_2$ de $G \times G$ con W_1, W_2 vecindades de la identidad tal que $\mu(U_1) \subset U$, es decir, $W_1W_2 \subset U$. Para poder probar (iv), nótese que para W_1 y W_2 de la prueba de (iii), tenemos que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, pues $e \in W_1 \cap W_2$. Entonces $V = (W_1 \cap W_2) \times (W_1 \cap W_2) \subset W_1 \times W_2$ de donde $(W_1 \cap W_2)^2 = \mu(W_1 \cap W_2, W_1 \cap W_2) \subset U$. Para probar (v) tenemos por (iv) que existe V vecindad de la identidad tal que $V^2 \subset U$, ahora para V por (ii), existe V_1 vecindad de e simétrica tal que $V_1 \subset V$, entonces $V_1^2 \subset V^2 \subset U$ por lo que $V_1V_1^{-1} = V_1^2 \subset U$. La propiedad (vi) es clara pues los grupo topológicos que consideramos son espacios T_0. La prueba de (vii) se sigue del Lema 1.2.5, pues las funciones $y \mapsto xy$ y $xy \mapsto xyx^{-1}$, son homeomorfismos. La prueba de (viii) se tiene por que las traslaciones son homeomorfismos y por que la multiplicación μ en G es continua. $\square$

Lema 1.2.10. *Sea G un grupo topológico. Para cada vecindad U de la identidad, existe una vecindad V de la identidad tal que $\overline{V} \subset U$.*

Demostración. Sea U una vecindad de e y V una vecindad simétrica de e tal que $V^2 \subset U$. Lo cual es posible por la Proposición 1.2.9. Así, si $x \in \overline{V}$ entonces xV es una vecindad de x y por tanto, $xV \cap V \neq \emptyset$. Tenemos que existen $v, w \in V$ de tal modo que $xv = w$, es decir, $x = v^{-1}w \in V^2 \subset U$. Por lo tanto $\overline{V} \subset U$.

□

Una propiedad importante de los grupos topológicos es:

Proposición 1.2.11. *Todo grupo topológico G de clase T_0 es un espacio regular.*

Demostración. Como las traslaciones son homeomorfismos basta considerar $e \in G$, el elemento identidad, y $F \subset G$ cerrado tal que $e \notin F$. Queremos probar que existen $U \in \mathcal{N}_e$ vecindad abierta de la identidad y $V \subset G$ tal que $F \subset V$, con $U \cap V = \emptyset$. Como F es cerrado, $G \setminus F$ es abierto. Sabemos por la Proposición 1.2.9 que existe $U \subset G \setminus F$ vecindad simétrica de la identidad tal que $U^2 \subset G \setminus F$ es decir $U^2 \cap F = \emptyset$.
Afirmación. $\overline{U} \cap F = \emptyset$. Supongamos que no, entonces existe $z \in F$ tal que para cada $W \in \mathcal{N}_z$, se tiene que $W \cap U \neq \emptyset$ y en particular para zU se tiene $zU \cap U \neq \emptyset$. Si $w \in zU \cap U$ entonces w es de la forma $w = zu = \tilde{u}$ con $u, \tilde{u} \in U$, por lo que $z = \tilde{u}u^{-1} \in U^2$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\overline{U} \cap F = \emptyset$ y así $V = G \setminus \overline{U}$ es un abierto que contiene a F y $U \subset \overline{U}$ es una vecindad de e, además $U \cap V = \emptyset$. □

Definición 1.2.12. Sean G y H dos grupos topológicos y $f : G \to H$ una función que es un isomorfismo de grupos y un homeomorfismo de espacios topológicos, entonces diremos que f es un *isomorfismo topológico* entre G y H. También diremos que G y H son *topológicamente isomorfos* si existe un isomorfismo topológico entre ellos.

Más adelante necesitaremos utilizar el hecho de que la cerradura de un grupo es grupo. Para poder probar esto haremos uso del siguiente lema.

Lema 1.2.13. *Sea G grupo topológico T_0 y sean A, B subconjuntos de G, entonces:*
i) $(\overline{A})(\overline{B}) \subset \overline{AB}$,
ii) $\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$.

Demostración. Para (i) sea $z \in (\overline{A})(\overline{B})$, entonces $z = xy$ con $x \in \overline{A}$ y $y \in \overline{B}$, sea U vecindad de la identidad por (viii) de la Proposición 1.2.9 existe V vecindad de la identidad tal que $(xV)(yV) \subset xyU$. Como $x \in \overline{A}$ se tiene que $xV \cap A \neq \emptyset$ y de igual manera como $y \in \overline{B}$ se tiene que $yV \cap B \neq \emptyset$ por lo tanto $AB \cap xyU \neq \emptyset$ y como xyU es vecindad de xy y U es arbitrario se tiene que $z = xy \in \overline{AB}$. Para la prueba de (ii) recordemos que la inversa $I : G \to G$ es una función continua, entonces $(\overline{A})^{-1} \subset \overline{A^{-1}}$. Por otro lado $A^{-1} \subset (\overline{A})^{-1}$ por lo que $\overline{A^{-1}} \subset \overline{(\overline{A})^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$, pues $(\overline{A})^{-1}$ es cerrado. Con esto concluimos la prueba del lema.

□

Lema 1.2.14. *Sea H subgrupo de un grupo topológico G, si H es abierto entonces es cerrado.*

Demostración. Nótese que $G \setminus H = \bigcup\{xH \mid x \notin H\}$, como H es abierto entonces $G \setminus H$ lo es, por lo tanto H es cerrado.

□

Ahora daremos algunas caracterizaciones del cociente de grupos topológicos y algunas propiedades de grupos topológicos localmente compactos y abelianos.

Definición 1.2.15. Sea G un grupo, la topología formada por todos los subconjuntos de G es llamada la *topología discreta* de G. Cuando un grupo G esté dotado con la topología discreta diremos que G es un *grupo topológico discreto* o sólo diremos que G es *discreto*. Nótese que para que un grupo topológico sea discreto basta que los singuletes (los subconjuntos con un solo elemento) de G sean abiertos.

Lema 1.2.16. *Un subgrupo H de un grupo topológico G es discreto si y sólo si H tiene un punto aislado.*

Demostración. Claramente si H es discreto, tenemos que todos sus puntos son aislados. Por otra parte, sea x punto aislado de H, sabemos que para alguna vecindad U de la identidad $xU \cap H = \{x\}$. Tomemos $y \in H$ arbitrario. Tenemos que

$$yU \cap H = yU \cap (yx^{-1}H) = yx^{-1}(xU \cap H) = yx^{-1}\{x\} = \{y\}.$$

Tenemos que $yU \cap H = \{y\}$, por lo tanto H es discreto.

□

Definición 1.2.17. Sea G grupo topológico abeliano y sea H subgrupo de G, definimos el *cociente* de G bajo H como el conjunto $\{gH \mid g \in G\}$ y lo denotamos por G/H. Además definimos el mapeo cociente $p : G \to G/H$ dado por $p(x) = xH$.

Observación 1.2.18. Si G es un grupo topológico abeliano, entonces G/H es un grupo topológico abeliano con la operación $xHyH = xyH$ y el elemento neutro H. El cociente lo consideramos dotado con la *topología inducida* por p, es decir, U es abierto en G/H si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en G. Notemos que p es un homomorfismo pues $p(xy) = xyH = xHyH = p(x)p(y)$. Claramente G/H es abeliano pues G lo es.

Proposición 1.2.19. *Sea G grupo topológico abeliano y H subgrupo de G, entonces G/H con la topología cociente es discreto si y sólo si H es abierto.*

Demostración. Supongamos que G/H es discreto, recordemos que el neutro del grupo G/H es H y así H es abierto. Ahora recordemos que G/H esta formado por las clases laterales $G/H = \{gH \mid g \in G\}$, y gracias al Lema 1.2.5 las traslaciones son homeomorfismos es decir gH es abierto para todo $g \in G$, es decir, G/H es discreto.

□

Lema 1.2.20. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo continuo con H un grupo topológico Hausdorff. Entonces el kernel de f definido como* $\ker\ f = \{x \in G \mid f(x) = e_H\}$ *es un subgrupo cerrado de G.*

Demostración. Como f es homomorfismo $f(e_G) = e_H$, por lo que $e_G \in ker\ f$. Sean $x, y \in ker\ f$, tenemos que $f(xy^{-1}) = f(x)f(y)^{-1}$ y como $f(x) = f(y) = e_H$, tenemos que $f(xy^{-1}) = e_H$, por lo tanto $xy^{-1} \in ker\ f$. Concluimos que $ker\ f$ es un subgrupo de G. Para ver que $ker\ f$ es cerrado, tenemos que $ker\ f = f^{-1}(e_H)$, y al ser H Hausdorff, el punto $\{e_H\}$ es cerrado. Como f es continua, concluimos que $ker\ f$ es cerrado. □

A partir de la Definición 1.2.17, tenemos:

Observación 1.2.21. La proyección natural $p : G \to G/H$ es continua y abierta.

Demostración. Es claro por definición que $p : G \to G/H$ es continua. Veamos que p es abierta. Sea $U \subset G$ abierto, nos gustaría probar que $p(U) \subset G/H$ es abierto, pero por definición $p(U)$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(p(U))$ es abierto en

G. Nótese que $p^{-1}(p(U)) = p^{-1}(UH) = \bigcup_{x\in U} p^{-1}(xH)$. Sea $y \in p^{-1}(p(U))$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $y \in p^{-1}(x_0H)$, es decir $p(x_0) = p(y)$. Nos gustaría probar que existe V vecindad de y tal que $V \subset p^{-1}(p(U))$. Afirmamos que $V = yx_0^{-1}U$ es la vecindad buscada, es decir $yx_0^{-1}U \subset p^{-1}(p(U))$. Queremos entonces ver que para todo $u \in U$, $yx_0^{-1}u \in p^{-1}(zH)$ para algún $z \in U$. Entonces $p(yx_0^{-1}u) = p(y)p(x_0)^{-1}p(u)$. Por la Observación 1.2.18 y como $p(y) = p(x_0)$, se tiene $p(yx_0^{-1}u) = ep(u) = p(u)$. Por lo tanto $yx_0^{-1}U \subset p^{-1}(p(U))$ para algún $x_0 \in U$. Concluimos que $p : G \to G/H$ es abierta.

□

Proposición 1.2.22. *Sea G grupo topológico abeliano no necesariamente T_0 y sea $N = \overline{\{e\}}$, entonces:*
i) G/N es Hausdorff.
ii) Sea $p : G \to G/N$ lo proyección natural, entonces para cada $F \subset G$ cerrado se cumple que $p^{-1}(p(F)) = F$.

Demostración. Para probar (i) basta ver que G/N es T_0. Sea $gN \in G/N$ distinto de N Claramente $G/N \setminus N$ es abierto y contiene a gN. Tenemos que G/N es T_0 y por la Proposición 1.2.11 concluimos que G/N es Hausdorff.

Para probar (ii), claramente se tiene que $F \subset p^{-1}(p(F))$. Por otro lado sea $x \in p^{-1}(p(F))$ por lo tanto $p(x) \in p(F)$, es decir, existe $y \in F$ tal que $p(y) = p(x)$ por lo que $x = yz$ para algún $z \in N$. Tenemos que $xy^{-1} = z$ con lo que concluimos $xy^{-1} \in N$. Queremos probar que x está en F y como F es cerrado basta ver que x esta en la cerradura de F. Sea V vecindad de x, entonces $y^{-1}V$ es vecindad de xy^{-1}, por lo tanto $e \in y^{-1}V$, por lo que existe $w \in V$ tal que $y^{-1}w = e$, y como los inversos son únicos, se tiene $w = y$ y así $y \in V$, es decir $V \cap F \neq \emptyset$ y por lo tanto $x \in \overline{F} = F$.

□

El siguiente teorema sólo lo enunciaremos y no será demostrado, sin embargo lo utilizaremos para probar la generalización para grupos localmente compactos. Puede consultarse este resultado en [1].

Teorema 1.2.23. *Sea G grupo topológico compacto y sea $b \in G$ distinto de la identidad, entonces existe un carácter continuo $f : G \to \mathbb{T}$, tal que $f(b) \neq 1$.*

Proposición 1.2.24. *Sea G un grupo topológico compacto, entonces la topología de G coincide con la topología inducida por la familia de todos los homomorfismos continuos de G al toro $\mathbb{T}$.*

Demostración. Sea G^* la familia de todos los homomorfismos continuos de G al toro $\mathbb{T}$. Quisieramos probar que la topología débil inducida por la familia G^* es más fina que la topología de G. Esto se traduce a probar que cualquier $x \in G$ y cualquier $U \subset G$ abierto, con $x \in U$ existen $V_1, \ldots, V_n$ abiertos de $\mathbb{T}$ y caracteres continuos $\chi_1, \ldots, \chi_n \in G^*$, tales que $x \in \chi_1^{-1}(V_1) \cap \ldots \cap \chi_n^{-1}(V_n) \subset U$. Sea U abierto en G y consideremos $G \setminus U$ el cual es cerrado. Como G es compacto $G \setminus U$ es compacto. Por el Teorema 1.2.23, para cada $x \in G \setminus U$ sabemos que existe $\chi_x : G \to \mathbb{T}$ homomorfismo continuo tal que $\chi_x(x) \neq 1$. Como $\mathbb{T}$ es Hausdorff, existen U_x y V_x vecindades ajenas de $\chi_x(x)$ y el 1 respectivamente. Las vecindades $\chi_x^{-1}(U_x)$ y $\chi_x^{-1}(V_x)$ son ajenas pues U_x y V_x lo son. La familia $\{\chi_x^{-1}(U_x) \mid x \in G \setminus U\}$ forma una cubierta abierta para $G \setminus U$, por lo tanto existe una subcubierta finita digamos $\chi_{x1}^{-1}(U_1), \ldots, \chi_{xn}^{-1}(U_n)$. Claramente $\chi_{x1}^{-1}(V_{x1}) \cap \ldots \cap \chi_{xn}^{-1}(V_{xn})$ es una vecindad abierta de el punto x. Más aún $\chi_{x1}^{-1}(V_{x1}) \cap \ldots \cap \chi_{xn}^{-1}(V_{xn}) \subset U$. Con esto concluimos que la base de la topología inducida por G^*, también es base para la topología de G.

$\square$

Definición 1.2.25. Diremos que V es *vecindad compacta* de x, si $x \in int(V)$ y V es compacta.

Definición 1.2.26. Un grupo topológico G es *localmente compacto* si para cada U vecindad abierta de la identidad existe V vecindad compacta de la identidad tal que $V \subset U$.

Como las traslaciones son homeomorfismos, podemos decir que G es *localmente compacto* si para cada $x \in G$ y cada U vecindad de la identidad, existe V vecindad compacta, de la identidad tal que $xV \subset xU$.

Observación 1.2.27. Sea G grupo topológico localmente compacto y abeliano, entonces para cada H subgrupo de G, G/H es localmente compacto.

Demostración. Sea U vecindad abierta de e en G/H, entonces $p^{-1}(U)$ es abierto en G y vecindad de e, como G es localmente compacto existe $K \subset p^{-1}(U)$ compacto, tal que $e \in int(K)$. Entonces $p(e) \in p(int(K)) \subset p(K)$ y gracias a la Observación 1.2.21, la proyección p es abierta y por lo tanto $p(int(K))$ es abierto. Más aún, como p es continua, $p(K)$ es compacto y $p(K) \subset U$.

$\square$

El objetivo de los siguientes resultados es probar la existencia de homomorfismos continuos no triviales de un grupo topológico localmente compacto y abeliano G al toro $\mathbb{T}$, es decir, vamos a probar que si $b \in G$ y $b \neq e$ entonces existe $f : G \to \mathbb{T}$ homomorfismo continuo tal que $f(b) \neq 1$.

Para lograr esto asumiremos que este resultado se tiene para grupos topológicos compactos (ver Teorema 1.2.23).

Teorema 1.2.28. *Sea G grupo topológico T_0 con elemento identidad 0, localmente compacto y no compacto tal que G contiene un subgrupo denso cíclico, digamos $\langle x\rangle$ para algún $x \in G$, entonces G es discreto e isomorfo al grupo de los enteros $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Supongamos que G no es discreto.
Si $\langle x\rangle$ es finito, como $\langle x\rangle$ es denso en G entonces $\langle x\rangle = G$ y por lo tanto G es discreto.
Si $\langle x\rangle$ hereda de G la topología discreta, como $\langle x\rangle$ es denso en G entonces $\langle x\rangle = G$, pues de lo contrario existe $g \in G$ tal que $g \notin \langle x\rangle$, como $\langle x\rangle$ es abierto, tenemos por el Lema 1.2.14 que $\langle x\rangle$ es cerrado. Así $G \setminus \langle x\rangle$ es una vecindad abierta de g que no intersecta a $\langle x\rangle$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto G es discreto.

Ahora supongamos que $\langle x\rangle$ no hereda bajo G la topología discreta y que $\langle x\rangle$ es infinito en G, por lo tanto $\langle x\rangle \cong \mathbb{Z}$, pues $\mathbb{Z}$ es el único grupo cíclico infinito. Podemos pensar que $\mathbb{Z}$ es un subgrupo denso en G. Definamos $N = \{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}$ y $P = \{n \in \mathbb{Z} \mid n > 0\}$, afirmamos que N y P son densos en G. Como $\mathbb{Z}$ es subgrupo denso en G y N es la imagén de P bajo la función de tomar inversos, basta probar que P es denso en $\mathbb{Z}$. Sabemos por (iii) de la Proposición 1.2.9 que G tiene una base de vecindades simétricas de la identidad y $\mathbb{Z}$ es denso en G se tiene que $0 \in \overline{P}$, ahora como las traslaciones son continuas $n \in \overline{n+P}$ para cada $n \in \mathbb{Z}$ y si $n > 0$ entonces $\overline{n+P} \subset \overline{P}$, es decir $n \in \overline{P}$ para $n > 0$.
Ahora si $n < 0$ definimos $P_n = \{k \in P \mid |n| < k\}$, entonces el conjunto $n + (P \setminus P_n)$ es finito, pues $P \setminus P_n$ es finito y $n \notin n + (P \setminus P_n)$ pues $P \setminus P_n = \{1, 2 \ldots, -n\}$, entonces tenemos que $n \in \overline{n + P_n}$ y nuevamente $n + P_n \subset P$, por lo tanto $n \in \overline{P}$. Concluimos entonces que P y N son densos en $\mathbb{Z}$ y por lo tanto en G. Con esto ya tenemos las herramientas para probar que G es discreto, probaremos que si G no es discreto entonces es compacto y esto será una contradicción.

Sea U vecindad simétrica de la identidad y consideremos $\beta = \{n+U \mid n \in N\}$. Afirmamos que β es una cubierta abierta para G. Sea $g \in G$, entonces

$g+U$ es una vecindad abierta de g y como N es denso en G existe $j \in N$ tal que $j \in g+U$, es decir, existe u tal que $j = g+u$ por lo que $g = j-u$ y como U es simétrica $g \in j+U$. De igual manera el conjunto $\{n+U \mid n \in P\}$ es cubierta abierta para G por la razón anterior. Sea U vecindad simétrica de la identidad en G fija y tal que $\overline{U}$ es compacta, esto lo podemos hacer pues por hipótesis G es localmente compacto, como $\{n+U \mid n \in N\}$ es cubierta para G, entonces es cubierta para $\overline{U}$, por lo tanto existe $K \subset N$ finito tal que $\overline{U} \subset \bigcup\{n+U \mid n \in K\}$. Sea $m = \text{máx}\{|n| \mid n \in K\}$, claramente $m \in P$. Sea $Y = \bigcup\{n+U \mid 1 \leq n \leq m\}$, fácilmente se ve que

$$\overline{Y} = \bigcup\{\overline{n+U} \mid 1 \leq n \leq m\} = \bigcup\{n+\overline{U} \mid 1 \leq n \leq m\},$$

por lo tanto $\overline{Y}$ es compacto. Probaremos que $Y = G$. Sea $g \in G$ y sea $n_g = \text{mín}\{n \in P \mid g \in n+U\}$, entonces $g = n_g + a$ para algún $a \in U$ y como $U \subset \overline{U}$ y $\overline{U}$ es compacto, existe $j \in K$ tal que $a \in j+U$, es decir $g \in n_g + j + U$, como $K \subset N$ se tiene que $n_g + j \notin P$, pues si $n_g + j > 0$ como $j < 0$ se tiene que $n_g + j < n_g$ lo cual es una contradicción pues n_g es el mínimo que cumple que $g \in n_g + U$. Entonces $n_g \leq |j| \leq m$ (pues $j < 0$ y $n_g < -j$), por lo tanto $g \in Y$, por lo que $G = Y$ y por lo tanto G es compacto, lo cual es una contradicción. Por lo tanto G es discreto.

□

Definición 1.2.29. Sea G grupo topológico, diremos que G es *compactamente generado* si existe $F \subset G$ compacto tal que G es el subgrupo más pequeño que contiene a F, o dicho de otro modo F genera a G. Definimos el *grado de no compacidad* de G como el cardinal más pequeño κ tal que $G = F + \langle K \rangle$ para algún conjunto K de cardinalidad κ. Diremos que el *grado de no compacidad* de un grupo topológico G es *finito*, si existe $F \subset G$ compacto y un subconjunto finito $K \subset G$ tal que $F + \langle K \rangle = G$. El grado de no compacidad de un grupo topológico G lo denotaremos por $dnc(G)$.

Observación 1.2.30. Claramente $dnc(G) = 0$ si y sólo si G es compacto.

Teorema 1.2.31. *Para cualquier grupo topológico abeliano compactamente generado y localmente compacto su grado de no compacidad es finito.*

Demostración. Sea $F \subset G$ fijo y compacto tal que $\langle F \rangle = G$, como G es localmente compacto podemos pensar que F es la cerradura de una vecindad abierta U de la identidad. El conjunto $F+F$ es compacto pues la operación

μ en G es continua, por lo tanto manda compactos a compactos y $\mu(F,F) = F+F$, entonces existe $K \subset G$ finito tal que podemos cubrir a $F+F$ con $K+U$, es decir $F+F \subset K+U \subset K+F$ pues $F = \overline{U}$. Definamos $F_0 = F$ y $F_{n+1} = F_n + F$ para cada $n \in \mathbb{N}$, claramente $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, pues F genera a G. Sea $H = \langle K \rangle$, entonces $F_1 = F+F \subset K+F \subset H+F$ y en general $F_n \subset H+F$ lo cual demostraremos por inducción. Ya probamos que $F_1 \subset H+F$, supongamos que $F_n \subset H+F$, entonces $F_{n+1} = F_n + F \subset H+F+F \subset H+H+F$ y como H es subgrupo de G, entonces $H+H = H$, por lo tanto $F_{n+1} \subset H+F$. Concluimos que $F_n \subset H+F$ para cada $n \in \mathbb{N}$, como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ entonces $G \subset F+H$ y se tiene que $F+H \subset G$, por lo tanto $G = F+H$ y recordemos que $H = \langle K \rangle$ y K es finito. Concluimos que el grado de no compacidad de G es finito.

□

Proposición 1.2.32. *Sea G grupo topológico localmente compacto y abeliano tal que su grado de no compacidad es finito y sea $b \in G$ distinto de la identidad. Entonces existe un grupo topológico localmente compacto y abeliano G_b tal que su grado de no compacidad es cero o menor que el grado de no compacidad de G y existe un homomorfismo abierto y continuo $p : G \to G_b$ tal que $p(b) \neq e$.*

Demostración. Sea $m = dnc(G)$; por definición de compactamente generado, existe $K \subset G$ finito y $F \subset G$ compacto tal que $|K| = m$ y $G = F + \langle K \rangle$. Si $m = 0$ entonces $|K| = 0$ y por lo tanto G es compacto, así considerando la identidad en G, $I_G : G \to G$ se tiene $I_G(b) = b \neq e$.

Supongamos ahora que $m > 0$. Sea $M = K \setminus \{a\}$ y sea $H_a = \langle a \rangle$ entonces $|M| < |K|$ y H_a es un subgrupo cerrado de G. Afirmamos que H_a no es compacto, pues si lo fuera entonces $\varphi = F + H_a$ es compacto (esto pues la operación en G es continua) y $\varphi + H_M = G$ donde $H_M = \langle K \setminus \{a\} \rangle$, por lo tanto $dnc(G) \leq |M| < K < m$, lo cual es una contradicción.

Podemos afirmar entonces por el Teorema 1.2.28 que $H_a = \langle a \rangle$ es un subgrupo de G infinito, cerrado y discreto. Sea H subgrupo infinito de H_a tal que $b \notin H$ y consideremos $p : G \to G/H$ el homomorfismo cociente. Claramente $p(b) \neq e$ pues $b \notin H$ y por la Observación 1.2.27, tenemos que G/H es localmente compacto. Entonces $p(H_a) \cong H_a/H$ es finito y por lo tanto compacto, pues H_a es cíclico y H es un subgrupo infinito de H_a. Entonces $B = p(F) + p(H_a)$ es compacto pues p es continua, por lo que

$$p(G) = G/H = p(F + \langle K \rangle) = p(F + \langle a \rangle + \langle M \rangle) = p(F) + p(\langle a \rangle) + p(\langle M \rangle)$$

y como $B = p(F) + p(H_a)$ entonces $p(G) = B + p(\langle M\rangle)$, por lo tanto como $p(\langle M\rangle)$ es generado por $p(M)$ en G/H, entonces $dnc(G/H) \leq |p(M)| \leq |M| < m$, por lo tanto $dnc(G/H) < dnc(G)$.

En conclusión $G_b = G/H$ es el grupo buscado y $p : G \to G/H$ es el homomorfismo abierto y continuo que se deseaba.

□

Proposición 1.2.33. *Sea G grupo topológico localmente compacto, abeliano y de grado de no compacidad finito y sea $b \in G$ distinto de la identidad, entonces existe un grupo topológico compacto y abeliano G_b y un homomorfismo continuo $p : G \to G_b$ tal que $p(b) \neq e$.*

Demostración. Sea $m = dnc(G)$, podemos aplicar la Proposición 1.2.32 m veces, llamemos G_{bi} a el grupo obtenido en el i–ésimo paso y $p_i : G \to G_{bi}$ a el homomorfismo correspondiente obtenido en la prueba de la Proposición 1.2.32. En algún paso el grado $dnc(G_{bi})$ es cero, es decir G_{bi} es compacto, y el homomorfismo buscado es la composición de los homomorfismos continuos p_j con $0 < j \leq i$.

□

Teorema 1.2.34. *Para cualquier grupo topológico localmente compacto y abeliano y cualquier $b \in G$ distinto de la identidad, existe $f : G \to \mathbb{T}$ homomorfismo continuo tal que $f(b) \neq 1$.*

Demostración. Sea G_1 subgrupo de G abierto y cerrado tal que es compactamente generado (el cual existe pues para cada subconjunto F de G compacto, $\langle F\rangle$ es compactamente generado).

Caso 1. Si $b \in G_1$. Consideremos G/G_1 el cual es discreto gracias a la Proposición 1.2.19 y consideremos $p : G \to G/G_1$ el mapeo cociente, claramente $p(b) \neq e$, pues $b \notin G_1$ y como G/G_1 es discreto y abeliano, por el Corolario 1.1.10, existe $h : G/G_1 \to \mathbb{T}$ tal que $h(p(b)) \neq 1$ y h es continua, por lo tanto $f = h \circ p : G \to \mathbb{T}$ es el homomorfismo continuo deseado.

Caso 2. Si $b \in G_1$ por el Teorema 1.2.31 como G_1 es localmente compacto su grado de no compacidad es finito, y por la Proposición 1.2.33 existen un grupo compacto G_b y un homomorfismo continuo $p : G \to G_b$ tal que $p(b) \neq 1$. Por el Teorema 1.2.23, existe un homomorfismo $p_1 : G_b \to \mathbb{T}$, con $p_1(p(b)) \neq 1$. Sea $g = p \circ p_1 : G_1 \to \mathbb{T}$, claramente g es continua. Sabemos que el toro es divisible y por el Teorema 1.1.8, existe un homomorfismo f que extiende a g. Como G_1 es abierto y cerrado y g es continua, entonces f es continua.

□

Observación 1.2.35. A partir de el Teorema 1.2.34 podemos concluir que para todo $a, b \in G$ con $a \neq b$, existe un homomorfismo continuo $f :\to \mathbb{T}$ tal que $f(a) \neq f(b)$.

Demostración. Consideremos ab^{-1}, este punto es distinto de la identidad pues de lo contrario tendríamos $b^{-1} = a^{-1}$ y así $a = b$. Entonces $ab^{-1} \neq e$ y por el Teorema 1.2.34 existe un homomorfismo continuo $f : G \to \mathbb{T}$ tal que $f(ab^{-1}) \neq 1$ por lo que $f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \neq 1$ y así $f(a) \neq f(b)$.

□

1.3 Grupos precompactos

Definición 1.3.1. Un subconjunto B de un grupo topológico G es llamado *precompacto* si para cada vecindad de la identidad V existe $F \subset G$ finito tal que $B \subset FV$ y $B \subset VF$. De igual manera un grupo topológico G es precompacto si para cada vecindad V de la identidad existe $F_1, F_2 \subset G$ finitos tal que $G = F_1V$ y $G = VF_2$.

En general en esta sección para probar que un subconjunto o un grupo es precompacto sólo probaremos la primer contención de la definición, ya que en general la segunda contención es análoga. Sólo en caso de ser necesario probaremos ambas contenciones.

Observación 1.3.2. Todo subconjunto compacto B de un grupo topológico G es precompacto.

Demostración. Sea U vecindad de la identidad y consideremos la cubierta abierta BU para B, entonces $B \subset BU$ y como B es compacto, existe $F_1 \subset B$ finito tal que $B \subset F_1U$, es decir, B es precompacto. De igual manera $B \subset UF_2$, para $F_2 \subset B$ finito. Por lo tanto tomando $F = F_1 \cup F_2$, tenemos que $B \subset UF$ y $B \subset FU$.

□

Lema 1.3.3. *Sea G grupo topológico y sea $B \subset G$ precompacto y D denso en B. Entonces para cada U vecindad de la identidad en G existe $K \subset D$ finito tal que $B \subset KU$ y $B \subset UK$.*

Demostración. Sea U vecindad de la identidad. Sea V vecindad simétrica de la identidad tal que $V^2 \subset U$ esto lo podemos hacer gracias a la Proposición 1.2.9. Como B es precompacto, para la vecindad V existe $F \subset G$ finito tal que $B \subset FV$ y $B \subset VF$. Si $x \in F$ y se tiene que $B \cap xV \neq \emptyset$, entonces $D \cap xV \neq \emptyset$ (pues D es denso en B) y escojamos $y_x \in D \cap xV$. El conjunto

$$K_1 = \{y_x \mid x \in F \text{ y } B \cap xV \neq \emptyset\} \subset D,$$

satisface que $B \subset K_1U$. Para esto sea $b \in B$, entonces existe $x \in F$ tal que $b \in xV$, claramente $b \in B \cap xV$ y así $y_x \in xV$, por lo tanto $y_x^{-1} \in V^{-1}x^{-1}$, por lo que $y_x^{-1}x \in V^{-1}$ y como V es simétrica $y_x^{-1}x \in V$, tenemos

$$b \in xV = y_x(y_x^{-1}x)V \subset y_xV^2 \subset y_xU \subset K_1U.$$

Con esto concluimos que $B \subset K_1U$. Por otro lado probar que existe $K_2 \subset D$ tal que $B \subset UK_2$ se hace de manera análoga, y por lo tanto tomando $K = K_1 \cup K_2 \subset D$ tenemos lo deseado.

$\square$

Lema 1.3.4. *Si un conjunto B contiene un subconjunto denso y precompacto, entonces B también es precompacto, es decir, la cerradura de un precompacto es precompacto.*

Demostración. Sea D subconjunto denso precompacto de B y sea U vecindad de la identidad, tomemos V vecindad de la identidad tal que $V^2 \subset U$, como D es precompacto existe $F \subset G$ finito tal que $D \subset FV$ y $D \subset VF$. Afirmamos que $B \subset UF \cap FU$. Sea $b \in B$ entonces $D \cap bV \neq \emptyset$. Escojamos $y \in D \cap bV$, nótese que $y \in D$, por lo que $y \in xV$ para algún $x \in F$. Como $y \in bV$ tenemos que $b \in yV^{-1} \subset (xV)V^{-1} = xV^2 \subset xU$, por lo tanto $b \in xU$, es decir $B \subset FU$. Probar que $B \subset UF$ se hace de manera análoga.

$\square$

Lema 1.3.5. *Todo subgrupo H de un grupo topológico precompacto G, es precompacto.*

Demostración. Sea U vecindad de la identidad en H y consideremos V vecindad de la identidad en G tal que $U = V \cap H$, claramente H es un subconjunto precompacto de G, por lo tanto usando el Lema 1.3.3 existe $F \subset H$ finito tal que $H \subset FV \cap VF$, afirmamos que $H \subset FU \cap UF$. Sea $x \in H$, sabemos que existen $f \in F$ y $v \in V$ tales que $x = fv$, como $x \in H$ y $v \in V$ se tiene que $v = f^{-1}x \in V \cap H = U$ lo cual implica $x \in fU$, por lo que $x \in FU$. La otra parte de la demostración es análoga. Entonces H es precompacto.

$\square$

1.4 Filtros y ultrafiltros

Definición 1.4.1. Un *filtro* en un conjunto G es una familia no vacía $\mathcal{F}$ de subconjuntos de G que satisface:
i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
ii) si $U, V \in \mathcal{F}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$,
iii) si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subset W$ con $W \subset G$ entonces $W \in \mathcal{F}$.

Definición 1.4.2. Diremos que un filtro $\mathcal{F}$ es *ultrafiltro* si $\mathcal{F}$ es un filtro maximal respecto a la contención.

Proposición 1.4.3. *Sea G un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un filtro en G. Entonces existe $\mathcal{F}'$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los filtros $\mathcal{G}_i$ que contienen a $\mathcal{F}$. Nótese que esta familia está parcialmente ordenada por la contención. Sea $\{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$ una cadena de elementos de $\mathcal{B}$, esta cadena está acotada pues la unión $\bigcup_{i \in I} G_i = \mathcal{G}_i$ es un filtro y es cota superior de la cadena $\{\mathcal{G}_i \mid i \in I\}$. Concluimos que cada cadena en la familia $\mathcal{B}$ está acotado superiormente por la unión de sus elementos y aplicando el Lema de Zorn, concluimos que la familia $\mathcal{B}$ tiene elemento maximal, es decir existe $\mathcal{F}'$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$.

□

Lema 1.4.4. *Sea $\mathcal{F}$ ultrafiltro en algún conjunto X y sea $U \subset X$ tal que $U \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, entonces $U \in \mathcal{F}$.*

Demostración. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $U \notin \mathcal{F}$ y consideremos la familia $\mathcal{G} = \{W \subset X \mid U \cap F \subset W \text{ y } F \in \mathcal{F}\}$.
Para la familia $\mathcal{G}$ se tienen las siguientes afirmaciones.
i) La familia $\mathcal{G}$ forma un filtro. Sea $W_1, W_2 \in \mathcal{G}$ entonces existen $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ tal que $U \cap F_1 \subset W_1$ y $U \cap F_2 \subset W_2$ por lo tanto $U \cap F_1 \cap U \cap F_2 = U \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{G}$ pues $U \cap (F_1 \cap F_2)$ se contiene a sí mismo y por lo tanto $U \cap (F_1 \cap F_2) \subset W_1 \cap W_2$ es decir $W_1 \cap W_2 \in \mathcal{G}$.

Por otro lado si $A \subset X$ y $W \in \mathcal{G}$ tal que $W \subset A$ entonces existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $U \cap F \subset W$ por lo tanto $U \cap F \subset A$ y entonces $A \in \mathcal{G}$.
ii) Se tiene que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y $U \in \mathcal{G}$. Esto se da por la definición del filtro $\mathcal{G}$ pues $U \cap F \subset F$ para todo $F \in \mathcal{F}$, es decir $F \in \mathcal{G}$. De igual manera $U \cap F \subset U$, es decir, $U \in \mathcal{G}$.

En resumen encontramos un filtro $\mathcal{G}$ distinto de $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ esto contradice la maximalidad de $\mathcal{F}$, por lo tanto $U \in \mathcal{F}$.

$\square$

Capítulo 2

Completación de Raĭkov

2.1 Motivación

De ahora en adelante G denotará un grupo topólogico y e será su elemento identidad y recordemos que los grupos topológicos que utilizaremos en este capítulo son T_0.
Sabemos que un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy converge. Extenderemos esta noción de completitud a grupos topológicos donde diremos que un grupo topológico es completo (Raĭkov completo) si todo filtro Cauchy converge. Además daremos la construcción de la completación de un grupo topológico G, la cual llamaremos G^* y algunas propiedades de este grupo. También realizaremos una analogía entre esta completación y la realizada en espacios métricos.

Primero daremos algunas definiciones y propiedades de filtros en grupos topológicos que serán necesarias para la construcción de G^*.

Definición 2.1.1. Un *filtro* $\mathcal{F}$ en G es una familia no vacia de subconjuntos de G que satisface:

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
ii) si $U, V \in \mathcal{F}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$,
iii) si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subset W \subset G$, entonces $W \in \mathcal{F}$.

Diremos que $\mathcal{F}$ es un *filtro abierto* si $\mathcal{F}$ es un filtro y está formado por subconjuntos abiertos de G.

Una propiedad importante del sistema de vecindades abiertas de un punto es el hecho de que forman un filtro abierto.

Lema 2.1.2. *Para cada $x \in G$ la familia $\mathcal{N}_x$ (de vecindades abiertas de x) es un filtro abierto.*

Demostración. Claramente $\mathcal{N}_x$ es una familia de abiertos.
Sean $U, V \in \mathcal{N}_x$, es decir $x \in U$ y $x \in V$, por lo que $x \in U \cap V$, por lo tanto $U \cap V \in \mathcal{N}_x$. Sea $U \in \mathcal{N}_x$ y $W \subset G$ abierto tal que $U \subset W$, tenemos que $x \in U \subset W$ por lo que $x \in W$ y así $W \in \mathcal{N}_x$.

□

Definición 2.1.3. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G es llamada *base de filtro* si para cualesquiera $U, V \in \mathcal{A}$ existe $W \in \mathcal{A}$ tal que $W \subset U \cap V$.
Una *base de filtro abierto* es una base de filtro formada por subconjuntos abiertos de G.

Definición 2.1.4. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de G, definimos $o(\mathcal{A})$ como la familia de todos los subconjuntos abiertos de G que contienen al menos un elemento de $\mathcal{A}$.

Proposición 2.1.5. *Si $\mathcal{F}$ es base de filtro abierto, entonces $o(\mathcal{F})$ es un filtro abierto que contiene a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq o(\mathcal{F})$ y que $o(\mathcal{F})$ consta de conjuntos abiertos.
Veamos que $o(\mathcal{F})$ es filtro:
Sean $U, V \in o(\mathcal{F})$, existen subconjuntos $A, B \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset U$ y $B \subset V$ entonces $A \cap B \subset U \cap V$. Por ser $\mathcal{F}$ base de filtro, existe un $W \in \mathcal{F}$ tal que $W \subset A \cap B$ por lo que $W \subset U \cap V$ y así $U \cap V \in o(\mathcal{F})$.
Sea $U \in o(\mathcal{F})$ y $W \subset G$ abierto tal que $U \subset W$. Entonces existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset U \subset W$ por lo tanto $A \subset W$ y así $W \in o(\mathcal{F})$.

□

La siguiente definición nos da la analogía entre ser una sucesión de Cauchy en un espacio métrico y ser un filtro Cauchy en un grupo topológico. La clave es la siguiente. Las bolas de radio ϵ alrededor de un punto forman una base para el filtro de vecindades de ese punto. Así pues las vecindades de la identidad pueden hacer el papel de los $\epsilon > 0$ en espacios métricos.

Definición 2.1.6. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de un grupo topológico G es llamada *familia Cauchy* si para cada vecindad V de $e \in G$, existen $a, b \in G$ y conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ tal que

$$A \subset aV \quad \text{y} \quad B \subset Vb.$$

Nótese que la propiedad de ser familia Cauchy la hacemos por la izquierda y por la derecha ya que nuestro grupo topológico G puede no ser abeliano.

Una propiedad clara de ser filtro Cauchy es:

Lema 2.1.7. *Un filtro abierto $\mathcal{F}$, es Cauchy si y sólo si para cada vecindad de la identidad V existen $a, b \in G$ tal que $aV, Vb \in \mathcal{F}$.*

Demostración. $\Rightarrow]$ Como $\mathcal{F}$ es filtro abierto y Cauchy, existen $a, b \in G$ y $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset aV$ y $B \subset Vb$ lo cual implica que $aV, Vb \in \mathcal{F}$.
$\Leftarrow]$ El regreso es trivial pues aV se contiene a sí mismo.

□

De alguna manera la Definición 2.1.6 nos hace pensar que en $\mathcal{A}$ tenemos subconjuntos de G "de todos los tamaños tan pequeños como queramos".

El ser familia Cauchy es análogo a ser sucesión de Cauchy en el sentido de que para cada vecindad del neutro tenemos subconjuntos de este "tamaño o menor" y si además es filtro, sus elementos siempre se intersectan, es decir, de algún modo se podría decir que sus elementos se van acercando entre sí.

Proposición 2.1.8. *Si $\mathcal{A}$ es familia Cauchy, entonces $o(\mathcal{A})$ es familia Cauchy.*

Demostración. Sea V vecindad de la identidad e, por ser $\mathcal{A}$ familia Cauchy existen $a, b \in G$ y $A, B \in \mathcal{A}$ tales que $A \subset aV$ y $B \subset Vb$ como aV y Vb son abiertos que contienen a A y B respectivamente, entonces $aV, Vb \in o(\mathcal{A})$ y por el Lema 2.1.7, $o(\mathcal{A})$ es Cauchy.

□

Definición 2.1.9. Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G es *mallada* si para cada $B \in \mathcal{A}$ existe $A \in \mathcal{A}$ y existen vecindades de la identidad U, V tales que

$$UAV \subset B.$$

Nuevamente la propiedad de ser familia mallada la realizamos por la izquierda y por la derecha ya que el grupo topológico G podría no ser abeliano.

La analogía de la definición anterior en los espacios métricos es que dado un abierto A, existe $x_0 \in A$ y números $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que $\bigcup_{x \in B_\epsilon(x_0)} B_\delta(x) \subset A$. Es decir, podemos pensar que una familia mallada es aquella donde dado cualquier elemento, existe otro que al "engordarlo" no se sale del elemento inicial.

Proposición 2.1.10. *Si $\mathcal{A}$ es familia mallada de abiertos, entonces $o(\mathcal{A})$ también es familia mallada de abiertos.*

Demostración. Sea $B \in o(\mathcal{A})$, por la Definición 2.1.4 existe $A \in \mathcal{A}$ abierto tal que $A \subset B$, como $\mathcal{A}$ es familia mallada de abiertos para A existen $B_1 \in \mathcal{A}$ y vecindades de la identidad U, V tales que $UB_1V \subset A$. Como $B_1 \subset o(A)$ (pues se contiene a sí mismo) y $A \subset B$ se tiene $UB_1V \subset A \subset B$; por lo tanto, $o(\mathcal{A})$ es familia mallada de abiertos.

□

Proposición 2.1.11. *Para cualquier filtro $\mathcal{F}$ se tiene*

$$o(o(\mathcal{F})) = o(\mathcal{F}).$$

Demostración. $\supset]$ esta contención es trivial pues $o(\mathcal{F})$ esta contenido en sí mismo.
$\subset]$ Sea $U \in o(o(\mathcal{F}))$ abierto, entonces por definición existe $W \in o(\mathcal{F})$ abierto tal que $W \subset U$ pero nuevamente existe $F \subset \mathcal{F}$ tal que $F \subset W$ por lo que $F \subset W \subset U$, entonces $U \in o(\mathcal{F})$.

□

2.2 Filtros canónicos

En esta sección estudiaremos la familia de todos los filtros abiertos de un grupo topológico G que son Cauchy y mallados los cuales conformarán a nuestro conjunto G^*.

Recordemos la definición de espacio métrico completo.

Definición 2.2.1. Una completación de un espacio métrico X es un espacio métrico completo X^* y un encanje isométrico $f : X \to X^*$ tal que $f(X)$ es denso en X^*.

En nuestro caso nos gustaría tener el mismo tipo de identificación entre un grupo topológico y su completación. Así que definiremos una función $i : G \to G^*$ tal que i sea un isomorfismo topológico de grupos bajo la topología con la cual dotaremos a G^* y cumpla que la imagen $i(G)$ sea un subconjunto denso en G^*.

Pedimos que i sea un isomorfismo topológico ya que el ser homomorfismo de grupos preserva la estructura de grupo del mismo modo que una isométria preserva la estructura de espacio métrico.

La siguiente definición es crucial en la construcción del espacio G^*.

Definición 2.2.2. Diremos que un filtro abierto es *filtro canónico* si es una familia de subconjuntos de G que es Cauchy y mallado.

Podemos resumir las Proposiciones 2.1.5, 2.1.8 y 2.1.10 en la siguiente proposición:

Proposición 2.2.3. *Si $\mathcal{F}$ es base de filtro abierto que es Cauchy y mallado, entonces $o(\mathcal{F})$ es un filtro canónico que contiene a $\mathcal{F}$.*

Demostración. Es claro por la Proposición 2.1.5 que $\mathcal{F} \subseteq o(\mathcal{F})$. Que $o(\mathcal{F})$ es Cauchy se da por la Proposición 2.1.8 y que $o(\mathcal{F})$ es mallado por la Proposición 2.1.10 por lo que $o(\mathcal{F})$ es filtro canónico.

□

Notación 2.2.4. Llamaremos $\mathcal{N}_x$ al sistema de vecindades abiertas del punto x en G, es decir

$$\mathcal{N}_x = \{U \in \tau \mid x \in U\}, \text{ donde } \tau \text{ es la topología de } G.$$

El interés por el sistema de vecindades de un punto es que forman un filtro que es Cauchy y mallado y por ser familia de abiertos será filtro canónico.

Observación 2.2.5. Para cada $x \in G$ con G un grupo topológico, la familia $\mathcal{N}_x$ es un filtro canónico.

Demostración. $\mathcal{N}_x$ es filtro abierto gracias al Lema 2.1.2. Veamos que es filtro Cauchy. Sea V vecindad de $e \in G$ y consideremos $U_x, V_x \in \mathcal{N}_x$ vecindades de x tales que

$$x^{-1}U_x \subset V, \qquad V_x x^{-1} \subset V,$$

Esto se puede hacer por la Proposición 1.2.9, entonces

$$U_x \subset xV \quad y \quad V_x \subset Vx,$$

que es lo que se quería.

Ahora veamos que es filtro mallado. Sea $U \in \mathcal{N}_x$ y consideremos $x^{-1}U$ vecindad de la identidad, como el producto en G es continuo existen V, W vecindades de la identidad tales que $VW \subset x^{-1}U$ ahora para V existen V_1, W_1 vecindades de la identidad tales que $V_1W_1 \subset V$, por lo tanto $V_1W_1W \subset VW \subset x^{-1}U$, entonces $V_1(xW_1)W \subset U$.

□

2.3 Completación de Raĭkov

Ahora retomamos el objetivo principal de este capítulo. construir un grupo topológico G^* en el cual todo filtro Cauchy converge y además dar un isomorfismo topológico $i : G \to G^*$ tal que G^* contenga a $i(G)$ como subgrupo denso. Comenzaremos por definir la familia G^* y la función $i : G \to G^*$.

Definición 2.3.1. Diremos que un filtro Cauchy $\mathcal{F}$ en G *converge a un punto* $x \in G$ si para cada vecindad U de x se tiene que $U \in \mathcal{F}$, *i.e.* $\mathcal{F}$ converge a x si $\mathcal{F}$ tiene al sistema de vecindades $\mathcal{N}_x$ de x como subconjunto.

La definición que viene a continuación es una de las más importantes de este capítulo pues daremos la condición para que un grupo topológico sea completo.

Definición 2.3.2. Diremos que un grupo topológico G es *Raĭkov completo* si todo filtro Cauchy converge.

Definición 2.3.3. Para cada grupo topológico G llamaremos G^* a la familia formada por todos los filtros canónicos en G.

Definición 2.3.4. Recordando que para cada $x \in G$ se tiene que $\mathcal{N}_x$ es un filtro canónico (Observación 2.2.5) definimos

$$\begin{array}{rcl} i : G & \longrightarrow & G^* \\ x & \longmapsto & \mathcal{N}_x. \end{array}$$

Observación 2.3.5. Nótese que por la Proposición 1.2.9 para cualesquiera dos puntos distintos en G podemos hallar vecindades de alguno de ellos que no sea vecindad del otro, es decir los grupos topológicos que estamos considerando son espacios T_0, con esto la función $i : G \to G^*$ es inyectiva.

La familia G^* será la completación de Raĭkov de el grupo topológico G. Para esto necesitamos hacer a G^* un grupo topológico y que además sea Raĭkov completo. La construcción será como sigue: definiremos en G^* una operación que lo haga un grupo y le daremos una topología τ^* la cual lo haga grupo topológico. Despues veremos que realmente G^* cumple con la propiedad de que todo filtro Cauchy converge, lo cual lo hace Raĭkov completo. Más aun la topología τ^* debe cumplir que la función $i : G \to G^*$ sea un isomorfismo topológico.

Para definir el producto en G^* daremos algunas definiciones preliminares.

Definición 2.3.6. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias de subconjuntos de un grupo topológico G definimos

$$[\mathcal{AB}] = \{AB \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}.$$

Enunciaremos algunas propiedades que se obtienen a partir de la definición anterior.

Proposición 2.3.7. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son bases de filtro abiertas, entonces $[\mathcal{AB}]$ es base de filtro abierto.*

Demostración. Claramente $[\mathcal{AB}]$ es una familia de abiertos. Para probar que es base de filtro sean $U, V \in [\mathcal{AB}]$ entonces $U = A_0B_0$ y $V = A_1B_1$ con $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$ y $B_0, B_1 \in \mathcal{B}$, así

$$U \cap V = A_0B_0 \cap A_1B_1 \supseteq (A_0 \cap A_1)(B_0 \cap B_1)$$

y como $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ son base de filtro existen A, B tal que $A \subset A_0 \cap A_1$ y $B \subset B_0 \cap B_1$, por lo tanto $AB \subset U \cap V$.

□

Proposición 2.3.8. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias malladas de abiertos, entonces $[\mathcal{AB}]$ también lo es.*

Demostración. Sea $W = AB \in [\mathcal{AB}]$, como $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias malladas existen U_1, V_1 y U_2, V_2 vecindades de la identidad y conjuntos A_1, B_1 en $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ respectivamente tal que

$$U_1A_1V_1 \subset A \quad U_2B_1V_2 \subset B$$

entonces

$$U_1A_1B_1V_2 \subset U_1A_1V_1U_2B_1V_2$$

y como $A_1B_1 \in [\mathcal{AB}]$ y $U_1, V_2 \in \mathcal{N}_e$ concluimos que $[\mathcal{AB}]$ es mallado.

□

Proposición 2.3.9. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias Cauchy, entonces $[\mathcal{AB}]$ también es familia Cauchy.*

Demostración. Sea U vecindad de la identidad y consideremos V vecindad de la identidad tal que $V^2 \subset U$. Como $\mathcal{B}$ es Cauchy existen $B \subset \mathcal{B}$ y $b \in G$ tales que $B \subset bV$, ahora para la vecindad de la identidad bVb^{-1} existen $A \in \mathcal{A}$ y $a \in G$ tales que $A \subset a(bVb^{-1})$, entonces

$$AB \subset a(bVb^{-1})(bV) \subset abV^2 \subset abU$$

y como $AB \in [\mathcal{A}\mathcal{B}]$ concluimos que $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$ es mallado. La prueba de que $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$ es Cauchy por la derecha es análoga.

□

Lema 2.3.10. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son filtros canónicos, entonces $[\mathcal{A}\mathcal{B}]$ es un filtro abierto que es Cauchy y mallado y además $o([\mathcal{A}\mathcal{B}])$ es un filtro canónico.*

Demostración. Este hecho se sigue de las Proposiciones 2.3.7, 2.3.8 y 2.3.9. Que $o([\mathcal{A}\mathcal{B}])$ es canónico se da por la Proposición 2.2.3.

□

Definición 2.3.11. Dados $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in G^*$, es decir dos filtros canónicos en G, definiremos el *producto* en G^* como

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = o([\mathcal{F}\mathcal{G}]).$$

Notemos que gracias al Lema 2.3.10 el producto $o([\mathcal{F}\mathcal{G}])$ es un filtro canónico, es decir la operación $\cdot$ es cerrada en G^*.

La operación $\cdot$ definida anteriormente hace a G^* un grupo lo cual provaremos a continuación.

1. *El producto $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = o([\mathcal{F}\mathcal{G}])$ en G^* es asociativo.* Esta afirmación se sigue del siguiente hecho:

Proposición 2.3.12. *Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son bases de filtro abiertos, entonces $o([\mathcal{F}\mathcal{G}]) = o([o(\mathcal{F})o(\mathcal{G})])$.*

Demostración. $\supseteq]$ Sea $U \in o(o(\mathcal{F})o(\mathcal{G}))$ entonces existe $A \in o(\mathcal{F})$ y $B \in o(\mathcal{G})$ tal que $AB \subset U$ esto implica que existen $P \in \mathcal{F}$ y $Q \in \mathcal{G}$ tal que $P \subset A$ y $Q \subset B$ por lo que $PQ \subset AB \subset U$ de donde $U \in o(\mathcal{F}\mathcal{G})$.
$\subseteq]$ Nótese que $[\mathcal{F}\mathcal{G}] \subset [o(\mathcal{F})o(\mathcal{G})]$ y por lo tanto $o([\mathcal{F}\mathcal{G}]) \subset o([o(\mathcal{F})o(\mathcal{G})])$.

□

Entonces aplicado a nuestro caso $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}) \cdot \mathcal{H} = o([(\mathcal{F}\mathcal{G})\mathcal{H}])$ y por la Proposición 2.3.12 esto es igual a

$$o([o(\mathcal{F}\mathcal{G})o(\mathcal{H})]) = o([o(o([\mathcal{F}\mathcal{G}]))o(H)]) = o([o([\mathcal{F}\mathcal{G}])o(H)])$$

y por la Observación 2.1.11 esto es igual a

$$o([o[(\mathcal{F})o(\mathcal{G})]o(\mathcal{H})]) = o([o(\mathcal{F})o(\mathcal{G})o(\mathcal{H})])$$

y a partir de esta última igualdad se sigue la asociatividad.
2. *El filtro canónico $\mathcal{N}_e$ es el elemento neutro en G^*.* Para probar esta afirmación necesitaremos de nuevas definiciones y propiedades.

Definición 2.3.13. Dos bases de filtro $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son *sincrónicas* si para cada $A \in \mathcal{F}$ y cada $B \in \mathcal{G}$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$.

Algunas propiedades que vamos a usar de los filtros sincrónicos son las siguientes.

Lema 2.3.14. *Si $\mathcal{F}$ es filtro canónico y $\mathcal{G}$ es un filtro Cauchy abierto sincrónico con $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{F}$, como $\mathcal{F}$ es mallado existen $P \in \mathcal{F}$ y vecindades de la identidad U' y V' tales que $U'PV' \subset U$. Fijando $e \in U'$ se tiene que $PV' \subset U$. Por la Proposición 1.2.9 podemos hallar W vecindad de e tal que $WW^{-1} \subset V'$. Ahora como $\mathcal{G}$ es filtro Cauchy existen $b \in G$ y $A \in \mathcal{G}$ tales que $A \subset bW$ y entonces $bW \in \mathcal{G}$. Además los filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son sincrónicos por lo que $bW \cap P \neq \emptyset$, entonces $b \in PW^{-1}$ y se tiene que $bW \subset PW^{-1}W \subset PV' \subset U$, entonces $bW \subset U$ por lo que $U \in \mathcal{G}$, así $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. □

Claramente de este lema se concluye el siguiente corolario:

Corolario 2.3.15. *Si dos filtros canónicos son sincrónicos entonces coinciden. Por otro lado si dos filtros canónicos $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ son distintos, entonces existen $A \in \mathcal{F}$ y $B \in \mathcal{G}$ tales que $A \cap B = \emptyset$.*

Ahora sí probaremos que el filtro canónico $\mathcal{N}_e$ es el neutro de G^*.

Proposición 2.3.16. *Para cada filtro canónico $\mathcal{F} \in G^*$ se tiene*

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{N}_e = \mathcal{F} = \mathcal{N}_e \cdot \mathcal{F}.$$

Demostración. Como $e \in U$ para cada $U \in \mathcal{N}_e$, se tiene que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} \cdot \mathcal{N}_e = o([\mathcal{F}\mathcal{N}_e])$ y por la Proposición 2.2.3, $o([\mathcal{F}\mathcal{N}_e])$ es filtro canónico. Así $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}\cdot\mathcal{N}_e$ son dos filtro canónicos que son sincrónicos y por lo tanto coinciden gracias al Corolario 2.3.15. La demostración de la segunda igualdad es análoga. □

3. *Para cada $\mathcal{F} \in G^*$, existe su inverso.*

Definamos el inverso de cada filtro canónico $\mathcal{F} \in G^*$ como sigue

Definición 2.3.17. Para cada filtro canónico $\mathcal{F} \in G^*$ definimos $\mathcal{F}^{-1}$ como

$$\mathcal{F}^{-1} = \{A^{-1} \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

Claramente $\mathcal{F}^{-1} \in G^*$. Más aún tenemos:

Proposición 2.3.18. *1. $(\mathcal{N}_x)^{-1} = \mathcal{N}_{x^{-1}}$ para cada $x \in G$.*
2. $\mathcal{N}_x \cdot \mathcal{N}_y = \mathcal{N}_{xy}$ para todo $x, y \in G$.

Demostración. La afirmación (1) es clara pues si U es vecindad de x se tiene por el Corolario 1.2.6 que U^{-1} es vecindad de x^{-1}, entonces solo demostraremos (2).
$\subseteq$] Sea $U \in \mathcal{N}_x \cdot \mathcal{N}_y = o([\mathcal{N}_x\mathcal{N}_y])$, entonces existen $A \in \mathcal{N}_x$ y $B \in \mathcal{N}_y$ tales que $AB \subset U$, por la Proposición 1.2.6 AB es vecindad de xy y como $\mathcal{N}_{xy}$ es filtro se tiene que $U \in \mathcal{N}_{xy}$.
$\supseteq$] Sea $U \in \mathcal{N}_{xy}$ por la Proposición 1.2.9 existen $A \in \mathcal{N}_x$ y $B \in \mathcal{N}_y$ tales que $AB \subset U$, por lo tanto $U \in o([\mathcal{N}_x\mathcal{N}_y]) = \mathcal{N}_x \cdot \mathcal{N}_y$.

□

Para probar que realmente $\mathcal{F}^{-1}$ es el inverso de $\mathcal{F}$ necesitaremos la siguiente equivalencia de filtro Cauchy.

Lema 2.3.19. *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de G es Cauchy si y sólo si para cada vecindad de la identidad U, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $AA^{-1} \subset U$ y $A^{-1}A \subset U$.*

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que la familia $\mathcal{A}$ es Cauchy y sea $U \in \mathcal{N}_e$; por la Proposición 1.2.9 podemos hallar $V \in \mathcal{N}_e$ tal que $VV^{-1} \subset U$. Como $\mathcal{A}$ es Cauchy existen $A \in \mathcal{A}$ y $a \in G$ tales que $A \subset Va$ por lo que $AA^{-1} \subset Vaa^{-1}V^{-1} = VV^{-1} \subset U$ por lo tanto $AA^{-1} \subset U$. Análogamente seprueba que $A^{-1}A \subset U$.
$\Leftarrow$] Supongamos que para cada $U \in \mathcal{N}_e$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $AA^{-1} \subset U$. Como $A \neq \emptyset$ tomemos $a \in A$ fijo. Entonces $Aa^{-1} \subset U$ por lo que $A \subset Ua$. Análogamente se prueba que existe a tal que $A \subset aU$. □

Proposición 2.3.20. *Para cada $\mathcal{F} \in G^*$ se tiene*

$$\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{N}_e = \mathcal{F}^{-1} \cdot \mathcal{F}.$$

Demostración. Si $U \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1}$ claramente $U \in \mathcal{N}_e$. Por otro lado sea $U \in \mathcal{N}_e$ como $\mathcal{F}$ es filtro canónico por el Lema 2.3.19 existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AA^{-1} \subset U$ por lo que $U \in o([\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}]) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^{-1}$. La segunda igualdad es análoga a ésta. □

Gracias a la Definición 2.3.11 y a las Proposiciones 2.3.12, 2.3.16 y 2.3.20 podemos concluir que la familia G^* es un grupo dotado con la operación $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} = o([\mathcal{F}\mathcal{G}])$.

Ahora definiremos en G^* una topología τ^* que lo vuelva grupo topológico, es decir, que haga a la operación de producto en G^* continua y también a la operación de tomar inversos. Más aún; nos gustaría que con esta topología la función i de la Definición 2.3.4 sea un isomorfismo topológico.

Sea G un grupo topológico con topología τ y sea G^* la familia formada por todos los filtros canónicos en G. Definiremos una base para una topología τ^* en G^* como sigue.

Definición 2.3.21. Para cada $U \in \tau$, es decir abierto en G definimos

$$U^* = \{\mathcal{F} \in G^* \mid U \in \mathcal{F}\}. \tag{2.1}$$

Afirmamos que la familia $\mathscr{B} = \{U^* \mid U \in \tau\}$ forma una base para la topología τ^* que estamos buscando. Para probar esto primero demostraremos algunos hechos.

Observación 2.3.22. Notemos que para todo filtro canónico $\mathcal{F} \in G^*$ se tiene que $\mathcal{F} \in U^*$ si y sólo si $U \in \mathcal{F}$.

Proposición 2.3.23. *Para cualesquiera U y V abiertos en G tenemos*
i) $U^* \cap i(G) = i(U)$,
ii) $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$.

Demostración. Para (i) sea $\mathcal{F} \in U^* \cap i(G)$ sabemos que $U \in \mathcal{F}$ y también tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{N}_x$ para algún $x \in G$, por lo que $\mathcal{F} \in i(U)$. Por otro lado si $\mathcal{N}_x \in i(U)$ para algún $x \in U$, se tiene que $U \in \mathcal{N}_x$ y por lo tanto $\mathcal{N}_x \in U^*$. Claramente $\mathcal{N}_x \in i(G)$. Para probar (ii) tomemos $\mathcal{F} \in U^* \cap V^*$ entonces $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{F}$ por lo que $U \cap V \in \mathcal{F}$ y así $\mathcal{F} \in (U \cap V)^*$. □

Por la proposición anterior se tiene que $\mathscr{B} = \{U^* \mid U \in \tau\}$ forma una base para una topología τ^* en G^* pues si $\mathcal{F} \in G^*$ entonces para cualquier $U \in \mathcal{F}$ se tiene que $\mathcal{F} \in U^*$, por otro lado para U^* y V^* básicos se tiene $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$. Por la Observación 2.3.22 tenemos que $G^* = \bigcup_{U \in \tau} U^*$.

Ahora probaremos que con la topología generada por esta base las operaciones de producto e inverso en G^* son continuas.

Recordemos que el producto y la inversa en G^* estan dados por

$$\begin{array}{rcl} \cdot = \mu : G^* \times G^* & \longrightarrow & G^* \\ (\mathcal{F}, \mathcal{G}) & \longmapsto & o([\mathcal{F}\mathcal{G}]), \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} I : G^* & \longrightarrow & G^* \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \mathcal{F}^{-1}. \end{array}$$

Para ver que el producto es continuo sean $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in G^*$ filtros canónicos y sea W^* abierto básico que contiene al producto $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$ en G^*. Entonces $W \in \mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$. Por la definición 2.3.11, existen $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{G}$ tales que $UV \subset W$ nuevamente se tiene que $\mathcal{F} \in U^*$ y $\mathcal{G} \in V^*$. Afirmamos que $U^* \cdot V^* \subset W^*$. Sean $\mathcal{F} \in U^*$ y $\mathcal{G} \in V^*$ es decir $U \in \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{G}$, entonces $UV \in [\mathcal{F}\mathcal{G}]$ por lo que $W \in o([\mathcal{F}\mathcal{G}]) = \mathcal{F} \cdot \mathcal{G}$; es decir, $\mathcal{F} \cdot \mathcal{G} \in W^*$. Por lo tanto $U^* \cdot V^* \subset W^*$. Concluimos que la operación $\cdot$ en G^* es continua.

Probar que la inversa es continua es fácil pues se tiene la siguiente igualdad

$$(U^*)^{-1} = (U^{-1})^*.$$

Sólo falta demostrar que realmente la función $i : G \to G^*$ es un isomorfismo topológico sobre su imagen $i(G)$. Recordemos que i es homomorfismo en su imagen $i(G)$, por la Proposición 2.3.18 y es biyección sobre su imagen pues los grupos topológicos que estamos considerando son T_0. Que i y su inversa i^{-1} son continuas se sigue de la Proposición 2.3.23, pues para cada básico de $i(G)$ digamos $U^* \cap i(G)$ se tiene que $i(U) = U^* \cap i(G)$, la continuidad de la inversa i^{-1} es análoga.

En resumen con las cosas desarrolladas anteriormente se puede concluir que G está identificado con $i(G)$ bajo el isomorfismo topológico i. Que G está encajado densamente en G^* se tiene porque para cada básico no vacío $U^* \in \mathscr{B}$ y para cada punto $x \in U$ el filtro canónico $\mathcal{N}_x$ tiene a U como elemento, es decir, por la Observación 2.3.22 $\mathcal{N}_x \in U^*$.

Lo único que nos queda por probar es que realmente G^* satisface que todo filtro Cauchy converge. Para esto primero veamos otras propiedades que cumple el espacio G^* las cuales nos serán de gran ayuda para lograr nuestro objetivo.

Hasta este momento los filtros canónicos que conocemos son pocos: los triviales y los sistemas de vecindades $\mathcal{N}_x$. Mostraremos cómo construir filtros canónicos partiendo de un filtro Cauchy. Esto será útil cuando construyamos el límite de un filtro Cauchy en el grupo topológico G^*.

Definición 2.3.24. Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de G. Llamaremos $s(\mathcal{A})$ a la familia formada por todos los subconjuntos de G que tienen la forma UAV, con U y V vecindades de la identidad y $A \in \mathcal{A}$ y definimos $c(\mathcal{A}) = o(s(\mathcal{A}))$.

Lo importante de la familia definida anteriormente es que si $\mathcal{A}$ es filtro Cauchy, entonces $c(\mathcal{A})$ forma un filtro canónico.

Proposición 2.3.25. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro Cauchy abierto en G, entonces $c(\mathcal{F})$ es un filtro canónico en G y $c(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$.*

Demostración. Como $\mathcal{F}$ es un filtro Cauchy en G, es claro que la familia $s(\mathcal{F})$ es una base de filtro abierta y que $s(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. Veamos que la familia $s(\mathcal{F})$ es mallada. Sea $A \in S(\mathcal{F})$, sabemos que A se ve de la forma UPV con $U, V \in \mathcal{N}_e$ y $P \in \mathcal{F}$, sabemos por la Proposición 1.2.9 que podemos hallar $U_1, V_1 \in \mathcal{N}_e$ tales que $U_1^2 \subset U$ y $V_1^2 \subset V$, entonces $B = U_1PV_1 \in s(\mathcal{F})$, por lo que $U_1BV_1 = U_1^2PV_1^2 \subset UPV = A$, por lo tanto $s(\mathcal{F})$ es mallado.

Ahora veamos que $s(\mathcal{F})$ es Cauchy. Sea V una vecindad de la identidad. Nuevamente por la Proposición 1.2.9 podemos hallar $W \in \mathcal{N}_e$ tal que $W^3 \subset V$. Como $\mathcal{F}$ es un filtro Cauchy para W existen $b \in G$ y $A \in \mathcal{F}$ tales que $A \subset Wb$, es decir, $Wb \in \mathcal{F}$. Entonces $b^{-1}Wb$ es una vecindad de la identidad y $W(Wb)b^{-1}Wb \subset W^3b$ es un elemento de $s(\mathcal{F})$, pero $W^3b \subset Vb$, con esto $s(\mathcal{F})$ es Cauchy. En conclusión por la Proposición 2.2.3 afirmamos que $c(\mathcal{F}) = o(s(\mathcal{F}))$ es un filtro canónico. Por otro lado, como $\mathcal{F}$ es un filtro abierto y $s(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$, tenemos $c(\mathcal{F}) = o(s(\mathcal{F})) \subset o(\mathcal{F})$, por la Proposición 2.1.5 tenemos $o(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$, por lo tanto $c(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$. □

Proposición 2.3.26. *Sea G subgrupo denso de un grupo topológico H y sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto en H. Definimos la restricción de $\mathcal{F}$ a G como*

$$\mathcal{F}_G = \{W \cap G \mid W \in \mathcal{F}\}.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

1. $\mathcal{F}_G$ es un filtro abierto en G el cual es sincrónico con $\mathcal{F}$.

2. Si $\mathcal{F}$ es Cauchy en H, entonces $\mathcal{F}_G$ es Cauchy en G.

3. Si $\mathcal{F}_G$ converge en G, entonces $\mathcal{F}$ converge en H al mismo punto que $\mathcal{F}_G$.

4. Si $\mathcal{F}$ es canónico en H, entonces $\mathcal{F}_G$ es canónico en G.

Demostración. Para (1) claramente el filtro $\mathcal{F}_G$ es abierto. Que son sincrónicos se sigue del hecho de que G es denso en H.
Para probar (2) recordemos que otra forma de ser filtro Cauchy esta dada en la Proposición 2.3.19. Sea W vecindad de la identidad en G por definición sabemos que existe U vecindad de la identidad en H tal que $W = U \cap G$. Por ser $\mathcal{F}$ filtro Cauchy, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $AA^{-1} \subset U$ y $A^{-1}A \subset U$, consideremos $P = A \cap G$ entonces $P \in \mathcal{F}_G$ y $PP^{-1} = (A \cap G)(A^{-1} \cap G) = AA^{-1} \cap G \subset U \cap G = W$, por lo tanto $PP^{-1} \subset W$. La demostración de $P^{-1}P \subset W$ es análoga. Por la tanto si $\mathcal{F}$ es filtro Cauchy en H entonces $\mathcal{F}_G$ es filtro Cauchy en G.
Para la demostración de (3) supongamos que el filtro $\mathcal{F}_G$ converge en G al punto x y sea U vecindad de x en H, como $\mathcal{F}_G$ converge a x, sabemos que para toda $U \in \mathcal{N}_x(H)$, $u \cap G \in \mathcal{F}_G$. Supongamos que $\mathcal{F}$ no converge en H a le punto x, por lo tanto existe $W \in \mathcal{N}_x(H)$, tal que $W \notin \mathcal{F}$, entonces $W \cap G \notin \mathcal{F}_G$ y esto es una contradicción. Concluimos que el filtro $\mathcal{F}$ también converge a x.
Para la prueba de (4) solo nos falta ver que si el filtro $\mathcal{F}$ es mallado en H entonces $\mathcal{F}_G$ es mallado en G.

Sea $U \in \mathcal{F}_G$, entonces existe $W \in \mathcal{F}$ tal que $U = W \cap G$, como $\mathcal{F}$ sí es mallado sabemos que existen $U_1, V_1 \in \mathcal{N}_e(H)$ y existe $W' \in \mathcal{F}$ tales que $U_1 W' V_1 \subset W$. Afiramamos que $U_1 \cap G$, $V_1 \cap G$ y $W' \cap G$ sirven. Tenemos que

$$(U_1 \cap G)(W' \cap G)(V_1 \cap G) \subset (U_1 W' V_1) \cap G \subseteq W \cap G = U.$$

□

Un lema que nos hace falta para completar la proposición anterior es:

Lema 2.3.27. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro Cauchy en G y el filtro $o(\mathcal{F})$ converge en G, entonces el filtro $\mathcal{F}$ converge en G.*

Demostración. Como $o(\mathcal{F})$ converge digamos al punto $x \in G$, sabemos que para cada vecindad U de x en G se tiene que $U \in o(\mathcal{F})$ esto implica que existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \subset U$ y como $\mathcal{F}$ es filtro, $U \in \mathcal{F}$. Por lo tanto $\mathcal{F}$ converge y lo hace al mismo punto que $o(\mathcal{F})$.

□

Con esto ya tenemos todas las herramientas para probar que el espacio G^* es Raĭkov completo, es decir, probaremos que todo filtro Cauchy en G^* converge.

Proposición 2.3.28. *Todo filtro Cauchy $\mathcal{F}$ en G^* converge.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.26 y por el Lema 2.3.27 basta considerar $\mathcal{F}$ un filtro Cauchy abierto en G^*. Sabemos que cualquier grupo G está identificado en G^* por la imagen de $i : G \to G^*$. Entonces podemos pensar que G es denso en G^*. Sea $\mathcal{F}_G$ el filtro $\mathcal{F}$ restringido a G, tenemos por la Proposición 2.3.26 que $\mathcal{F}_G$ es un filtro abierto sincrónico con $\mathcal{F}$ y como $\mathcal{F}$ es Cauchy en G^*, entonces $\mathcal{F}_G$ también es Cauchy en G. Sea $\mathcal{H} = c(\mathcal{F}_G)$, sabemos por la Proposición 2.3.25 que $\mathcal{H}$ es un filtro canónico en G y que $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_G$. Afirmamos que el filtro $\mathcal{F}_G$ converge a $\mathcal{H}$.

Sea U^* un abierto básico de $\mathcal{H}$ en G^*, tenemos por la Observación 2.3.22 $U \in \mathcal{H}$ y como $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}_G$, $U \in \mathcal{F}_G$. Más aún $i(U) \subset U^*$, entonces podemos concluir que $U^* \in \mathcal{F}_G$, es decir, el filtro $\mathcal{F}_G$ converge al punto $\mathcal{H}$ en G y nuevamente por la Proposición 2.3.26, como G es denso en G^* el filtro $\mathcal{F}$ converge en G^*, además converge al mismo punto $\mathcal{H}$ al que converge $\mathcal{F}_G$.

□

Para concluir esta sección resumiremos el trabajo realizado en el siguiente Teorema el cual nos da la propiedad universal de la completación de Raĭkov de un grupo topológico G.

Teorema 2.3.29. *Para todo grupo topológico G, existen un grupo topológico G^* que es Raĭkov completo y un isomorfismo topológico $i : G \to G^*$ tales que $i(G)$ es denso en G^*.*

2.4 Teoremas afines

Nos gustaría que de alguna manera la completación de Raĭkov de un grupo topológico G sea única. Probaremos que esto es cierto salvo isomorfismos topológicos Resumiremos esto en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.1. *Sea G grupo topológico y sea H_1, H_2 dos grupos topológicos que son Raĭkov completos y tales que G es subgrupo topológico denso de cada uno de ellos. Entonces existe un isomorfismo topológico*

$$\varphi : H_1 \longrightarrow H_2 \quad \textit{tal que} \quad \varphi|_G = Id_G.$$

Para probar este teorema primero probaremos tres hechos no muy difíciles.

Lema 2.4.2. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo continuo y sea $\mathcal{F}$ un filtro Cauchy en G, entonces $f(\mathcal{F}) = \{B \subset H \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}\}$ es un filtro Cauchy en H.*

Demostración. 1. *$f(\mathcal{F})$ es filtro.* Sea $B \in f(\mathcal{F})$ y $W \subset H$ tal que $B \subset W$. Por definición $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, nótese que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(W)$ y como $\mathcal{F}$ es filtro $f^{-1}(W) \in \mathcal{F}$, por lo tanto $w \in f(\mathcal{F})$. Sean $A, B \in f(\mathcal{F})$, sabemos que $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ estan en $\mathcal{F}$, por lo que $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$. Como $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$, concluimos que $f^{-1}(A \cap B) \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in f(\mathcal{F})$.
2. *$f(\mathcal{F})$ es Cauchy.* Sea $U \in \mathcal{N}_e(H)$ entonces como f es continua $f^{-1}(U) \in \mathcal{N}_e(G)$, por lo tanto existen $A \in \mathcal{F}$ y algún $a \in G$ tales que $A \subset af^{-1}(U)$ por lo que $f(A) \subset f(af^{-1}(U)) \subset f(a)U$ es decir $f(A) \subset f(a)U$. Afirmamos que $f(A) \in f(\mathcal{F})$. Por definición de $f(\mathcal{F})$ basta ver que $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{F}$. Sabemos que $A \subset f^{-1}(f(A))$ y también sabemos que $A \in \mathcal{F}$, por lo tanto $f^{-1}(f(A)) \in \mathcal{F}$, es decir, $f(A) \in f(\mathcal{F})$. Con esto concluimos que el filtro $f(\mathcal{F})$ es filtro Cauchy.

□

Proposición 2.4.3. *Sea G un subgrupo denso de un grupo topológico H y sea $f : G \to R$ un homomorfismo continuo tal que R es Raĭkov completo, entonces f admite una extensión $f^* : H \to R$ continua.*

Demostración. Para cada $z \in H$ consideremos el filtro formado por su sistema de vecindades $\mathcal{F} = \mathcal{N}_z$ y consideremos $\mathcal{F}_G = \{U \cap G \mid U \in \mathcal{N}_z\}$. Por la Proposición 2.2.5 sabemos que $\mathcal{N}_z$ es un filtro canónico, gracias a la Proposición 2.3.26 se tiene que $\mathcal{F}_G$ es filtro Cauchy y por la Proposición 2.4.2 el filtro $f(\mathcal{F}_G)$ es un filtro Cauchy en R. Al ser R Raĭkov completo el filtro $f(\mathcal{F}_G)$ converge a algun punto $y \in R$. Definiremos $f^*(z) = y$ donde y es como se describío anteriormente. Claramente f^* está bien definida pues los grupos topológicos son T_0, más aún f^* restringida a G coincide con f pues para cada punto $x \in G$ la imagen de $\mathcal{N}_x(G)$ converge a $f(x)$.
1. *f^* es continua.* Supongamos que f^* no es continua entonces existe $C \subset H$ tal que $f^*(\overline{C})$ no está contenido en $\overline{f^*(C)}$, es decir, existe $x \in \overline{C}$ tal que $f^*(x) \notin \overline{f^*(C)}$. Como todo grupo topológico T_0 es regular (por la Proposición 1.2.11) existe U abierto tal que $\overline{f^*(C)} \subset U$ y existe V vecindad abierta de $f(x)$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Sea $W \in \mathcal{N}_x(G)$, tal que $f(W) \subset V$ tal W existe pues f es continua. Consideremos $W' \in \mathcal{N}_x(H)$ tal que $W = W' \cap G$. Como $W' \in \mathcal{N}_x(H)$, entonces $W' \cap C \neq \emptyset$ pues $x \in \overline{C}$ y así W es vecindad de

algún punto $p \in G$ (pues G es denso en H). Por lo tanto $f^*(p) \in \overline{f(W)}$ y como U es vecindad de $f^*(p)$ (esto por que $\overline{f^*(C)} \subset U$) tenemos que $f^*(W) = f(W) \cap U \neq \emptyset$, lo cual es una contradicción pues $f^*(W) \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.
2.f^* *es homomorfismo.* Supongamos que f^* no es homomorfismo, es decir existen $a, b \in H$ tales que $f^*(ab) \neq f^*(a)f^*(b)$. Sean O, W vecindades de $f^*(ab)$ y $f^*(a)f^*(b)$ respectivamente, tales que $O \cap W = \emptyset$. Como el producto en H es continuo, existen U vecindad de $f^*(a)$ y V vecindad de $f^*(b)$ tales que $UV \subset W$ Por (1) ya sabemos que f^* es continua entonces existen U_1 vecindad de a y V_1 vecindad de b tales que $f^*(U_1) \subset U$ y $f^*(V_1) \subset V$. Más aún podemos tomar U_1, V_1 de manera que $f^*(U_1V_1) \subset O$, esto pues f^* también es continua en el punto ab. Sabemos que G es subgrupo denso de H, entonces existen puntos $a_1 \in U_1 \cap G$ y $b_1 \in V_1 \cap G$ y como f^* coincide con f en G tenemos

$$f^*(a_1b_1) = f(a_1b_1) = f(a_1)f(b_1) = f^*(a_1)f^*(b_1) \in f^*(U_1)f^*(V_1) \subset UV \subset W,$$

entonces $f^*(a_1b_1) \in W$. Por otro lado $f^*(a_1b_1) \in f^*(U_1V_1) \subset O$ lo cual es una contradicción pues $O \cap W = \emptyset$. Por lo tanto f^* es homomorfismo.

□

Gracias a este resultado podemos comenzar a obtener algunos de los teoremas de extensión en grupos topológicos que son Raĭkov completos.

Proposición 2.4.4. *Sea $f : G \to H$ un isomorfismo topológico y supongamos que G es subgrupo denso de un Raĭkov completo G^* y también supongamos que H es subgrupo denso de un Raĭkov completo H^*, entonces f admite una extensión a un isomorfismo topológico $f^* : G^* \to H^*$.*

Demostración. Primero como H es subgrupo denso de H^* pensemos a f con codominio H^*, es decir, $f : G \to H^*$. Como H^* es Raĭkov completo, entonces por la Proposición 2.4.3 f puede extenderse a $\varphi : G^* \to H^*$. Ahora como la inversa f^{-1} es continua pensando a f^{-1} con codominio G^*, es decir $f^{-1} : H \to G^*$ y como G^* es Raĭkov completo, por la Proposición 2.4.3, sabemos que f^{-1} admite una extensión $\phi : H^* \to G^*$. Entonces para $\varphi \circ \phi : G^* \to G^*$ se tiene que $(\varphi \circ \phi)|_G = Id_G$. De igual manera para $\phi \circ \varphi : H^* \to H^*$ se tiene que $(\phi \circ \varphi)|_H = Id_H$. Por lo tanto $\varphi : G^* \to H^*$ es un isomorfismo topológico.

□

Con esto tenemos todas las herramientas necesarias para probar el Teorema 2.4.1, lo cual haremos a continuación

Demostración. Prueba del Teorema 2.4.1. Gracias a la Proposición 2.4.4 y considerando la identidad $Id_G : G \to G$ entonces podemos extenderla a $Id^* : H_1 \to H_2$ y tal que $Id^*|_G = Id_G$ lo cual es claro.

□

Finalmente podemos afirmar que la completación de Raĭkov G^* de cualquier grupo topológico G existe, además es única salvo isomorfismo topológico y también podemos dar el isomorfismo topológico i de un grupo G a su completación de Raĭkov. Así que de ahora en adelante denotaremos a la completación de Raĭkov de un grupo topológico G por ρG. Algunos resultados obtenidos gracias al Teorema 2.4.1 se enlistan a continuación.

Corolario 2.4.5. *Para todo grupo topológico G se tiene*
i) $\rho\rho G = \rho G$,
ii) G es Raĭkov completo si y sólo si $\rho G = G$.

Demostración. Para probar (i) recordemos que cualquier grupo topológico G esta encajado densamente en su completación ρG bajo el isomorfismo topológico i de la Definición 2.3.4. Podemos pensar entonces que G es denso en ρG, por otro lado ρG esta encajado densamente en su completación $\rho\rho G$, por lo tanto G es denso en $\rho\rho G$. Entonces por el Teorema 2.4.1, se tiene que ρG y $\rho\rho G$ son isomorfos topológicamente isomorfos.

Para probar (ii) supongamos que G es Raĭkov completo, como G es denso en sí mismo y G es denso en su completación ρG, por el Teorema 2.4.1, se tiene que $G = \rho G$. Por otro lado si $G = \rho G$, etntonces todo filtro Cauchy en G lo podemos pensar como un filtro en ρG, como ρG es Raiĭkov completo dicho filtro converge en $\rho G = G$, por lo tanto G es Raiĭkov completo.

□

Corolario 2.4.6. *Sea H subgrupo denso de G, entonces existe un isomorfismo topológico $i_G : G \to \rho H$ a un subgrupo de ρH tal que $i_G(h) = h$ para cada $h \in H$.*

Demostración. Como H es subgrupo denso de G y de su completación ρH y G es subgrupo denso de su completación ρG entonces por el Teorema 2.4.4 existe un isomorfismo topológico $\varphi : \rho G \to \rho H$ tal que $\varphi(h) = h$ para cada

$h \in H$ (esto pues H es denso en ρG), y así tomando la restricción a G tenemos que $i_G = \varphi|_G$ es la función deseada.

□

Corolario 2.4.7. *Todo homomorfismo continuo $f : G \to H$ se puede extender a $f^* : \rho G \to \rho H$, con f^* un homomorfismo continua.*

Demostración. Pensemos a f con codominio ρH, nótese que f sigue siendo continua. Por la Proposición 2.4.3 f se puede extender a un homomorfismo continuo $f^* : \rho G \to \rho H$.

□

Lema 2.4.8. *Sea G Raĭkov completo y sea K subgrupo cerrado de G, entonces K es Raĭkov completo.*

Demostración. Supongamos que K no es Raĭkov completo, es decir existe un filtro Cauchy $\mathcal{F}$ que no converge en K, consideremos la familia de conjuntos $W \subset G$, tal que W contiene a algún elemento del filtro $\mathcal{F}$ y tomemos la familia $\mathcal{G} = \mathcal{F} \cup \{W \subset G \mid W$ contiene a algún elemento de $\mathcal{F}\}$. Afirmamos que $\mathcal{G}$ es un filtro Cauchy en G. Claramente si $A, B \in \mathcal{G}$ tenemos $A \cap B \in \mathcal{G}$ y si $U \subset W \subset G$ tal que $U \in \mathcal{G}$, entonces $W \in \mathcal{G}$ por la construcción de $\mathcal{G}$.

Veamos que $\mathcal{G}$ es filtro Cauchy. Sea U vecindad de la identidad en G, sabemos que para $U \cap K$ existe $A \in \mathcal{F}$ y $a \in K$ tal que $A \subset a(U \cap K)$, entonces $A \in \mathcal{G}$ y $A \subset a(U \cap K) \subset aU$, por lo tanto $\mathcal{G}$ es Cauchy. Ahora como G sí es Raĭkov completo, el filtro $\mathcal{G}$ converge digamos a un punto $y \in G$ tal que $y \notin K$, por la Proposición 1.2.11 como K es cerrado, existen U_1 y V_1 abiertos ajenos tal que $K \subset U_1$ y V_1 es vecindad de y. El abierto V_1 lo podemos tomar de manera que $V_1 \notin \mathcal{F}$ por lo que $V_1 \notin \mathcal{G}$ lo cual es una contradicción pues el filtro $\mathcal{G}$ converge a y. □

Corolario 2.4.9. *Sean $f : G \to H$ un homomorfismo continuo de grupos topológicos y D subgrupo denso de G. Si $f|_D : D \to f(D)$ es un isomorfismo topológico de D en $f(D)$, entonces f es un isomorfismo topológico de G a $f(G)$.*

Demostración. Por el Corolario 2.4.7 f se puede extender a un homomorfismo continuo $f^* : \rho G \to \rho H$. Sea $E = f(D)$ y consideremos $K = \overline{f(D)}$ con la cerradura tomada en H, por ser K cerrado y ρH Raĭkov completo aplicando el Lema 2.4.8 tenemos que K es Raĭkov completo. Ahora como D es denso en G, entonces D es denso en ρG. Así por la Proposición 2.4.3 $f|_D$ admite una extensión $g^* : \rho G \to K$ tal que g^* es un isomorfismo topológico, notemos que $g^*|_D = f^*|_D = f|_D$ y como D es denso en ρG, g^* y f^* coinciden, es decir, f^* es un isomorfismo topológico de ρG a K y como $f^*|_G = f$ tenemos que f es un isomorfismo topológico de G en $f(G)$.

□

La condición de ser grupo topológico es necesaria para el corolario anterior. Un ejemplo de esto es:

Ejemplo 2.4.10. Consideremos

$$\begin{array}{rcl} f : I = [0,1] \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{T} \\ x & \longmapsto & e^{2\pi i x}, \end{array}$$

$(0,1)$ es denso en $[0,1]$ y $f|_{(0,1)}$ es homeomorfismo de $(0,1)$ a $\mathbb{T} \setminus \{1\}$, pero $f : [0,1] \to \mathbb{T}$ no es homeomorfismo.

Un resultado importante de la completación de Raĭkov es que si el grupo G es metrizable entonces su completación de Raĭkov también lo será. Para probar esto haremos uso de los siguientes resultados.

Lema 2.4.11. *Sea G grupo topológico y sea H subgrupo de G denso tal que H es primero– numerable, entonces G también es primero–numerable.*

Demostración. Sea $\mathscr{B}$ base numerable de la identidad en H. Sea $U_n \in \mathscr{B}$ entonces $U_n = V_n \cap H$ para algún V_n vecindad de e en X. Probaremos que $\mathscr{C} = \{V_n : U_n = V_n \cap H\}$ forma una base numerable para la identidad en G. Sea O vecindad de e arbitraria. Escojamos W tal que $\overline{W} \subset O$. esto es posible por el Lema 1.2.10, para $W \cap H$, existe $U_n \in \mathscr{B}$ tal que $U_n \subset W \cap H$, es decir, existe $V_n \in \mathscr{C}$ tal que $U_n = V_n \cap H \subset W \cap H$, tenemos que $\overline{U_n} = \overline{V_n} \subset \overline{W} \subset O$, por lo tanto $V_n \subset \overline{V_n} \subset O$.

□

Proposición 2.4.12. *Sea H subgrupo metrizable de un grupo topológico G, entonces $\overline{H}$ (la cerradura de H en G) es un subgrupo metrizable de G.*

Demostración. Como H es cerrado bajo productos se tiene que $H^2 \subset H$ y por (i) del Lema 1.2.13 tenemos que $(\overline{H})^2 \subset \overline{H^2} \subset \overline{H}$, es decir, para toda $x, y \in \overline{H}$ se tiene que $xy \in \overline{H}$.

Por otro lado. Como H es cerrado bajo inversos entonces $H^{-1} \subset H$ y por (ii) del Lema 1.2.13 tenemos que $\overline{H^{-1}} \subset (\overline{H})^{-1} \subset \overline{H}$, es decir, si $x \in \overline{H}$ entonces $x^{-1} \in \overline{H}$. Por lo tanto $\overline{H}$ es subgrupo de G.

Gracias al Lema 2.4.11 para todo subgrupo H de un grupo topológico G tal que H es primero–numerable se tiene que $\overline{H}$ es primero–numerable.

Como $\overline{H}$ es primero–numerable entonces gracias al Teorema de G. Birkhoff y S. Kakutani [4] podemos concluir que el subgrupo $\overline{H}$ es metrizable. □

Entonces como la cerradura de un subgrupo metrizable es metrizable tenemos:

Corolario 2.4.13. *Si G es grupo topológico metrizable, entonces su completación de Raĭkov ρG también es metrizable.*

Demostración. Como G es denso en su completación de Raĭkov ρG, entonces por la Proposición 2.4.12 $\rho G = \overline{G}$ es metrizable.

□

Es bien conocido que el producto numerable de espacios métricos completos es completo. En el caso de los grupos topológicos Raĭkov completos, se tiene una propiedad más fuerte como lo muestra el siguiente Teorema.

Teorema 2.4.14. *El producto arbitrario de grupos topológicos Raĭkov completos es Raĭkov completo.*

Demostración. La prueba tiene un poco de semejanza a la realizada para el Teorema de Tychonoff de espacios compactos. Sea $G = \prod_{i \in I} G_i$ con G_i Raĭkov completo para cada $i \in I$ y G dotado con la topología producto. Sea $\mathcal{F}$ un filtro Cauchy en G nos gustaria probar que el filtro $\mathcal{F}$ converge en G.

Sabemos por la Proposición 1.4.3 que existe $\mathcal{G}$ ultrafiltro tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ recordemos que el filtro $\mathcal{G}$ es filtro Cauchy. Consideremos la proyección

$$\begin{array}{rcl} \pi_i : G = \prod\limits_{i \in I} G_i & \longrightarrow & G_i \\ (x_\alpha)_{\alpha \in I} & \longmapsto & x_i, \end{array}$$

Sabemos que π_i es un homomorfismo continuo y por el Lema 2.4.2 $\mathcal{G}_i = \pi_i(\mathcal{G})$ es un filtro Cauchy en G_i. Como cada G_i es Raĭkov completo, el filtro $\mathcal{G}_i$ converge a un punto $b_i \in G_i$, consideremos $b \in G$ tal que $\pi_i(b) = b_i$ para cada $i \in I$. Observemos que $\pi_i^{-1}(V) \cap W \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{N}_{b_i}$ y para todo $W \in \mathcal{G}$, pues $\pi_i(\mathcal{G}) \cap V \neq \emptyset$ para toda $V \in \mathcal{N}_{b_i}$ debido a que $\pi_i(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_i$ converge al punto b_i.

Afirmación. El filtro $\mathcal{G}$ converge al punto b en G. Sea O vecindad de b en $G = \prod_{i\in I} G_i$, por la definición de la topología producto como O es abierto, existe U vecindad de b tal que $U \subset O$ y U tiene la forma $U = \pi_{i1}^{-1}(U_i) \cap \ldots \cap \pi_{ik}^{-1}(U_k)$ con U_k vecindad de b_{ik} en G_{ik} y con $ik \in I$. Llamemos $O_k = \pi_{ik}^{-1}(U_k)$, es decir $U = O_1 \cap \ldots \cap O_k$. Por la observación hecha anteriormente se tiene que $O_k \cap W \neq \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G}$ es ultrafiltro se tiene por el Lemma 1.4.4 que $O_n \in \mathcal{G}$ para toda $n \leq k$, por lo tanto $U = O_1 \cap \ldots \cap O_k \in \mathcal{G}$ es decir el filtro $\mathcal{G}$ converge al punto b. Ahora como $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ y para toda O vecindad de b se tiene que O intersecta a todos los elementos de $\mathcal{G}$ es decir O intersecta a todos los elementos de $\mathcal{F}$, entonces b es un punto de acumulación del filtro $\mathcal{F}$. Por lo tanto como el filtro $\mathcal{F}$ es un filtro Cauchy entonces $\mathcal{F}$ converge a b. Es decir el producto $G = \prod_{i\in I} G_i$ es Raĭkov completo.

□

Corolario 2.4.15. *Sea $G = \prod_{i\in I} G_i$ el producto de grupos topológicos G_i con $i \in I$, entonces hay un isomorfismo topológico entre ρG y el producto $\prod_{i\in I} \rho G_i$.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 2.4.14 que $H = \prod_{i\in I} \rho G_i$ es Raĭkov completo y que $G = \prod_{i\in I} G_i$ es denso en H, entonces G es denso en ρG y G es denso en H, así por el Teorema 2.4.1 existe un isomorfismo topológico entre ρG y H. □

Un resultado que también comparten los grupos topológicos con los espacios métricos es que los espacios localmente compactos son completos.

Proposición 2.4.16. *Todo grupo topológico G localmente compacto es Raĭkov completo.*

Demostración. El grupo G es un subgrupo abierto de su completación de Raĭkov ρG, pues para cada $x \in G$ existe una vecindad compacta V de x tal que $x \in int(V)$, por lo tanto G es abierto en ρG. Como todo subgrupo abierto es cerrado en sí mismo entonces G es un subgrupo denso cerrado de ρG es decir $G = \rho G$.

□

2.5 Grupos precompactos y completación de Raĭkov

En esta sección daremos algunas propiedades y caracterizaciones de grupos topológicos precompactos las cuales están ampliamente relacionados con la completación de Raĭkov y nos serán de gran ayuda en el siguiente capítulo. Los enunciaremos y demostraremos a continuación.

Una caracterización de los grupos precompactos que son compactos se obtiene gracias a la completación de Raĭkov se enuncia a continuación.

Proposición 2.5.1. *Si B es un subconjunto cerrado y precompacto de un grupo topológico Raĭkov completo G, entonces B es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro en B, queremos probar que $\mathcal{F}$ converge en B. Sea $\mathcal{G}$ ultrafiltro en G tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ el cual sabemos que existe gracias a la Proposición 1.4.3. Sea U vecindad de la identidad en G. Como B es precompacto existen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} a_i U$, sabemos que $B \in \mathcal{G}$ por lo que $a_i U \in \mathcal{G}$ para algún $1 \leq i \leq n$. Esto demuestra que $\mathcal{G}$ es Cauchy. Como $\mathcal{G}$ es un filtro Cauchy en G el cual es Raĭkov completo, entonces $\mathcal{G}$ converge a algún $x \in G$, como B es cerrado en G y $B \in \mathcal{G}$ entonces $x \in B$, pues si no como los grupos topológicos son espacios regulares podemos hallar abiertos ajenos U y V tales que $B \subset U$ y $x \in V$, lo cual implica que $B \cap U = \emptyset$ y esto es una contradicción. Por lo tanto $x \in B$ y así el ultrafiltro $\mathcal{F}$ converge en B. En conclusión B es compacto.

□

El teorema que sigue se obtiene de los Lemas 1.3.3, 1.3.4 y de la Proposición 2.5.1 y nos da otra caracterización de los conjuntos precompactos la cual necesitaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 2.5.2. *Un subconjunto B de un grupo topológico G es precompacto si y sólo si la cerradura de B tomada en la completación de Raĭkov ρG de G es compacta.*

Demostración. $\Leftarrow$] Supongamos que $\overline{B}$ (la cerradura de B en ρG) es compacta y por lo tanto precompacta. Sea U vecindad de la identidad en G y consideremos V vecindad de la identidad en ρG, tal que $U = V \cap G$, como B es denso en $\overline{B}$, por el Lema 1.3.3 podemos hallar $F \subset B$ finito tal que $\overline{B} \subset VF \cap FV$, esto implica que $B \subset UF \cap FU$. Para probarlo sea $b \in B$,

entonces como $B \subset \overline{B} \subset VF \cap FV$ y $F \subset B$, existe $x \in F$ y $v \in V$ tal que $b = xv$, por lo que $v = x^{-1}b \in B^{-1}B \subset G$, de donde se concluye que $v \in G$, es decir $v \in G \cap V = U$, por lo tanto $B \subset FU$. Análogamente se prueba que $B \subset UF$. Concluimos que B es precompacto.
$\Rightarrow]$ Por otro lado supongamos que B es precompacto en G, entonces B es precompacto en ρG. Por el Lemma 1.3.4 el conjunto $\overline{B}$ es cerrado en ρG, por lo tanto por la Proposición 2.5.1, $\overline{B}$ es compacto en ρG.

□

Ahora veremos dos formas de caracterizar a los grupos topológicos precompactos.

Teorema 2.5.3. *Un grupo topológico G es compacto si y sólo si G es precompacto y Raĭkov completo.*

Demostración. Supongamos que G es compacto, por la Observación 1.3.2, G es precompacto y por ser G compacto, G es cerrado en su completación de Raĭkov ρG y por el Lema 2.4.8, G es Raĭkov completo.

Por otro lado supongamos que G es precompacto y Raĭkov completo, por lo tanto G es cerrado y aplicando la Proposición 2.5.1, concluimos que G es compacto.

□

Teorema 2.5.4. *Un grupo topológico G es precompacto si y sólo si su completación de Raĭkov ρG es compacto.*

Demostración. Supongamos que G es precompacto, por el Lema 1.3.4 se tiene que ρG también es precompacto pues contiene a G como sugrupo denso, por el Teorema 2.5.3 ρG es compacto.

Ahora supongamos que ρG es compacto, entonces ρG es precompacto y por la Proposición 1.3.5, tenemos que G es precompacto.

□

Capítulo 3

Compactación de Bohr

3.1 Motivación

En este capítulo estudiaremos una compactación de un grupo topológico, que tiene gran parecido a la Compactación de Stone-Čech realizada para espacios topológicos completamente regulares. Introduciremos la topología de Bohr y veremos algunas de las características que cumplen los grupos topológicos al dotarlos con esta nueva topología. Veremos también que esta topología de Bohr es la maxima que hace precompacto al grupo y veremos algunos resultados de extensión de homomorfismos continuos. En especial, haremos un análisis de la Compactación de Bohr de grupos topológicos discretos.

3.2 Topología de Bohr

De ahora en adelante G denotará un grupo topológico y e será su elemento identidad. Durante este capítulo consideraremos grupos topológicos que podrían no ser T_0. En general cuando digamos vecindad del punto x, nos referimos a una vecindad abierta de x y sólo en caso de ser necesario haremos énfasis en esto.

Definición 3.2.1. Llamaremos *carácter* de G a un homomorfismo χ de un grupo topológico G al toro $\mathbb{T}$. Denotaremos por G^* a la familia formada por todos los caracteres continuos del grupo G.

Una de las definiciones principales de este capítulo es la topología de Bohr la cual esta definida como sigue:

Definición 3.2.2. Diremos que la topología τ es la inducida por una familia de funciones $\{f_\alpha : G \to G_\alpha, \alpha \in I\}$, si el conjunto $\{f_\alpha^{-1}(U) \mid U \text{ abierto de } G_\alpha\}$ forma una subbase para τ, es decir, τ es la topología mínima que hace continuas a todas las funciones $\{f_\alpha \mid \alpha \in I\}$. Sea G un grupo topológico y sea G^* la familia de todos los caracteres continuos de G. Llamaremos *topología de Bohr* a la topología inducida por la familia G^* y la denotaremos por $\tau_b(G)$. Al grupo G dotado con esta nueva topología lo denotaremos por G^+.

Algunas de las siguientes observaciones son inmediatas a partir de la definición anterior.

Observación 3.2.3. La topología de Bohr de G es la topología de grupo más gruesa que cumple con $(G^+)^* = G^*$, es decir, la topología de Bohr $\tau_b(G)$ hace que permanezcan continuos todos los caracteres continuos de G al dotar a G con la topolgía $\tau_b(G)$. Además es la más gruesa que cumple esto pues si cambiamos o quitamos alguno de sus elementos esto hace discontinuo a algún carácter de G, es decir, otra topología más gruesa que $\tau_b(G)$ hace discontinuo a algun carácter.

Observación 3.2.4. La topología de Bohr $\tau_b(G)$ es más gruesa que la topología original y el grupo G^+ (el grupo G dotado con la topología $\tau_b(G)$) es precompacto.

Demostración. Es claro que la topología de Bohr es más gruesa que la topología original. Veamos que G^+ es precompacto. Sea U vecindad de la identidad en G^+, sea $\chi : G \to \mathbb{T}$ un carácter continuo y tomemos $\overline{\chi(G)}$ el cual es compacto. Consideremos $V \subset \mathbb{T}$ vecindad de la identidad tal que $\chi^{-1}(V) \subset U$. Como $\mathbb{T}$ es compacto, entonces es precompacto por la Observación 1.3.2, por lo tanto existe $F \subset \mathbb{T}$ finito tal que $\overline{\chi(G)} \subset FV$ y tomando $F' = \{x_i \in \chi^{-1}(y_i) \mid y_i \in F\}$, claramente $G^+ \subset F'U$. $\square$

Definición 3.2.5. Denotemos por $r_G : G \to \mathbb{T}^{G^*}$ al producto diagonal de la familia G^*, es decir $r_G = (\chi_i)_{\chi_i \in G^*}$. Para toda $x \in G$, $r_G(x) \in \mathbb{T}^{G^*}$, es decir, $r_G(x) : G^* \to \mathbb{T}$ y está dado por $r_G(\chi) = \chi(x)$.

Observación 3.2.6. Notese que gracias al Teorema de Tychonoff el conjunto $\mathbb{T}^{G^*}$ es compacto, también observemos que $r_G : G \to \mathbb{T}^{G^*}$ es un homomorfismo continuo (pues lo es entrada a entrada) y que r_G es monomorfismo si y sólo si la familia G^* *separa puntos* de G, es decir, si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in G$ existe $\chi \in G^*$ tal que $\chi(x) \neq \chi(y)$.

Definición 3.2.7. Consideremos la cerradura de $r_G(G)$ en $\mathbb{T}^{G^*}$ y definimos $bG = \overline{r_G(G)}$. Llamamos a bG la *compactación de Bohr* de el grupo topológico G.

Observación 3.2.8. Claramente la compactación bG de un grupo topológico G es un espacio Hausdorff y también bG es compacto, pues bG es cerrado en el compacto $\mathbb{T}^{G^*}$.

En general el producto diagonal r_G de la Definición 3.2.5 podría no ser monomorfismo, pero si el grupo G es localmente compacto entonces G^* separa puntos.

Proposición 3.2.9. *Para cualquier grupo topológico localmente compacto y abeliano la función $r_G : G \to bG$ es un monomorfismo continuo. Entonces con la topología de Bohr $\tau_b(G)$, el grupo G^+ es precompacto y Hausdorff.*

Demostración. Por la Observación 3.2.4 el grupo G^+ es precompacto. Como G es localmente compacto y abeliano, por el Teorema 1.2.34 existe un homomorfismo continuo f no trivial de G al toro, es decir, para todo $g \in G$ distinto de la identidad, existe $f : G \to \mathbb{T}$ homomorfismo continuo tal que $f(g) \neq 1$. Entonces G^* separa puntos y por lo tanto r_G es un monomorfismo. Veamos que G^+ es Hausdorff. Sean $x, y \in G^+$ tales que $x \neq y$. Por el Teorema 1.2.34 existe un homomorfismo continuo $f : G \to \mathbb{T}$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Como $\mathbb{T}$ es Hausdorff, existen U y V vecindades de $f(x)$ y $f(y)$, respectivamente, tales que $U \cap V = \emptyset$. Claramente $f^{-1}(U)$ y $f^{-1}(V)$ son vecindades abiertas de x y y, respectivamente, pues f es continua y $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$. Por lo tanto G^+ es Hausdorff. $\square$

Observación 3.2.10. Notese que si G es localmente compacto, entonces $r_G : G \to bG$ es un isomorfismo que además es un encanje topológico, es decir, r_G es un homeomorfismo de G en su imagen $r_G(G)$.

Demostración. Ya sabemos por la Proposición 3.2.9 que r_G es un homomorfismo continuo e inyectivo y claramente es sobreyectivo en su imagen, por lo que sólo falta probar que r_G tiene inversa continua, o visto de otro modo basta ver que r_G es abierto. Denotemos por $\pi_f : \mathbb{T}^{G^*} \to \mathbb{T}$ la proyección que a cada $(x_f)_{f \in G^*}$ lo mapea a la coordenada $f--$ésima $\in \mathbb{T}$. Notemos que para $f : G \to \mathbb{T}$ carácter continuo de G, se tiene $f = \pi_f \circ r_G$. Basta probar que $r_G(U)$ es abierto para cada subbásico $U = f^{-1}(V)$, con V abierto en $\mathbb{T}$. Notemos que

$$U = f^{-1}(V) = (\pi_f \circ r_G)^{-1}(V) = r_G^{-1}(\pi_f^{-1}(V)),$$

aplicando r_G en ambos lados de la igualdad, tenemos $r_G(U) = \pi_f^{-1}(V)$ pues r_G es suprayectiva en su imagen. Como π_f es continua, tenemos que $r_G(U)$ es abierto. Por lo tanto r_G es un isomorfismo topológico entre G y $r_G(G)$.

□

Observación 3.2.11. Si G es un grupo topológico compacto, entonces G es isomorfo a su compactación de Bohr.

Demostración. Notese que $r_G(G)$ es compacto en $\mathbb{T}^{G^*}$ (pues r_G es continua). Como $\mathbb{T}^{G^*}$ es Hausdorff, concluimos por lo tanto que $r_G(G)$ es cerrado, es decir, $bG = \overline{r_G(G)} = r_G(G)$. El homomorfismo r_G es inyectivo gracias a que un compacto es localmente compacto y a la Proposición 3.2.9. Es sobreyectivo pues $bG = r_G(G)$, por lo tanto r_G es el isomorfismo buscado.

□

Hemos descrito la topología de Bohr $\tau_b(G)$ para cualquier grupo topológico G. Ahora comenzaremos a ver algunas de sus propiedades, comenzando con la preservación de homomorfismos continuos.

Proposición 3.2.12. *Sea G grupo topológico abeliano, entonces todo homomorfismo continuo $f : G \to K$, con K un grupo topológico Hausdorff compacto, permanece continuo considerado del grupo G^+ a K.*

Demostración. Nótese que la cerradura de $f(G)$ en K es un subgrupo abeliano y compacto, por lo que podemos suponer que K es abeliano. Para cada carácter continuo $\chi : K \to \mathbb{T}$, obtenemos un carácter continuo $\chi \circ f : G \to \mathbb{T}$, por lo tanto por la Proposición 1.2.24, la topología en K es la inducida por la familia de todos los caracteres continuos de K. Sea U abierto básico de K, es decir, existen $\chi_1, \ldots, \chi_n : K \to \mathbb{T}$ homomorfismos continuos y existen $V_1, \ldots, V_n \subset \mathbb{T}$ abiertos, tales que $U = \bigcap_{i=1}^n \chi_i^{-1}(V_i)$. Entonces $f^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^n (\chi_i \circ f)^{-1}(V_i)$. Como cada $\chi_i \circ f$ es un carácter continuo de G, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n (\chi_i \circ f)^{-1}(V_i)$ es abierto en G^+. Concluimos que $f^{-1}(U)$ es abierto y por lo tanto f es continua.

□

Ahora daremos una caracterización de la topología de Bohr.

Proposición 3.2.13. *La topología de Bohr $\tau_b(G)$ de un grupo topológico abeliano G, es la máxima topología de grupo que hace precompacto a G y que es más gruesa que la topología original de G.*

Demostración. Por la Observación 3.2.4, $\tau_b(G)$ es más gruesa que la topología original y que $\tau_b(G)$ hace precompacto a G^+.

Veamos que es la maxima. Sea t una topología arbitraria de G más gruesa que la topología original y que hace precompacto a G. Denotemos por G_t al grupo G dotado con la topología t. Sea $N = \overline{\{e\}}$ la cerradura del elemento identidad en G_t y consideremos el homomorfismo canónico $p : G_t \to G_t/N$. Por la Proposición 1.2.22, tenemos que para todo F subconjunto de G cerrado $p^{-1}(p(F)) = F$. También gracias a la Proposición 1.2.22 tenemos que el grupo cociente G_t/N es Hausdorff. Veamos que G_t/N es precompacto. La topología t cumple con ser precompacta para G, para ver que G_t/N es precompacto basta ver que para cada U vecindad de $e \in G/N$, existe un subconjunto finito F de G/N tal que $G/N \subseteq UF$. Tenemos que $p^{-1}(U)$ es vecindad de la identidad en G_t el cual sí es precompacto, es decir, existe $K \subset G$ finito tal que $G = UK$. Tomando $p(K)$ el cual es finito en G/N se tiene lo deseado. Sea $H = G/N$, tenemos que H es Hausdorff y precompacto. Por el Teorema 2.5.4 la completación de Raĭkov ρH es un grupo Hausdorff compacto.

Sea $Id : G \to G_t$ el homomorfismo identidad y consideremos $f = p \circ Id : G \to H$, claramente Id es continua pues t es una topología mas gruesa que la topología original de G y por lo tanto f es continua de G a el subgrupo denso H de ρH. Como ρH es compacto, por la Proposición 3.2.12, el homomorfismo $f : G^+ \to \rho H$ permanece continuo y como $f(G) \subset H$, podemos decir que f es continua considerada de G^+ en H. Sea $F \subset G_t$ cerrado como $p : G_t \to H$ es continuo y se da la igualdad $p^{-1}(p(F)) = F$, tenemos que $p(F)$ es cerrado. Para esto sabemos que $p(F)$ es cerrado si y sólo si $H \setminus p(F)$ es abierto y $H \setminus p(F)$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(H \setminus p(F))$ es abierto en G_t. Claramente $p^{-1}(H \setminus p(F)) = p^{-1}(H) \setminus p^{-1}(p(F)) = G_t \setminus F$ el cual es abierto pues F es cerrado, por lo tanto $p(F)$ es cerrado en H. Ahora como $f : G^+ \to H$ es continuo el conjunto $Id^{-1}(F) = f^{-1}(p(F))$ es cerrado pues $p(F)$ lo es, por lo tanto $Id : G^+ \to G_t$ es continua, es decir, t es una topología más gruesa que la topología de Bohr $\tau_b(G)$. Entonces $\tau_b(G)$ es la máxima topología de grupo que es más gruesa que la topología original y hace precompacto al grupo G. □

Corolario 3.2.14. *Si G es un grupo topológico abeliano y precompacto entonces $G^+ = G$.*

Demostración. Claramente la topología de Bohr $\tau_b(G)$ es más gruesa que la topología original de G. Como G es precompacto y $\tau_b(G)$ es la maxima topología que hace a G precompacto se tiene que la topología original es más gruesa que $\tau_b(G)$. Con esto concluimos que la topología original de G y la topología de Bohr coinciden. $\square$

Notación 3.2.15. Dado un homomorfismo $f : G \to H$ definimos $f^+ : G^+ \to H^+$, como el homomorfismo f pero desde el grupo G dotado con la topología de Bohr al grupo H dotado con la topología de Bohr.

Proposición 3.2.16. *Si $f : G \to H$ es un homomorfismo continuo de grupos topológicos abelianos, entonces $f^+ : G^+ \to H^+$ es un homomorfismo continuo.*

Demostración. Observemos que para cada carácter continuo $\chi : H \to \mathbb{T}$, tenemos un carácter continuo en G dado por $\chi \circ f : G \to \mathbb{T}$. Sea U abierto básico de H^+, es decir, existen $\chi_1, \ldots, \chi_n : H \to \mathbb{T}$ homomorfismos continuos y existen $V_1, \ldots, V_n \subset \mathbb{T}$ abiertos, tales que $U = \bigcap_{i=1}^n \chi_i^{-1}(V_i)$, entonces $(f^+)^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^n (\chi_i \circ f)^{-1}(V_i)$. Como cada $\chi_i \circ f$ es un carácter continuo de G, se tiene que $\bigcap_{i=1}^n (\chi_i \circ f)^{-1}(V_i)$ es abierto en G^+, es decir $(f^+)^{-1}(U)$ es abierto en G^+ y por lo tanto f^+ es continua.

$\square$

Definición 3.2.17. Si un grupo topológico G esta dotado con la topología discreta (como en la Definición 1.2.15) denotaremos por $G^\#$ al grupo G dotado con la topología de Bohr, es decir, la topología inducida por todos los caracteres de G.

Corolario 3.2.18. *$G^\#$ es un grupo topológico precompacto y Hausdorff para todo grupo topológico G discreto. Más aún $r_G : G^\# \to bG$ es un isomorfismo topológico y $r_G(G^\#)$ es denso en bG.*

Demostración. Este hecho es claro pues todo grupo topológico discreto es localmente compacto y por la Proposición 3.2.9 concluimos que $G^\#$ es precompacto y Hausdorff. Más aún r_G es continua y $r_G(G)$ es denso en bG. Para ver que la inversa de r_G es continua, basta ver que r_G es abierta. Sea U subbásico de $G^\#$, entonces U tiene la forma $U = \bigcap_{i=1}^n \chi_i^{-1}(V_i)$, para algunos $\chi_i \in G^*$ y algunos abiertos V_i del toro. Claramente $r_G(U) = \bigcap_{i=1}^n r_G \circ \chi_i^{-1}(V_i)$, lo cual es abierto por la definición de r_G. Por lo tanto r_G es un encaje topológico en su imagen que además es un isomorfismo.

$\square$

El siguiente corolario se obtiene a partir de las propiedades que cumple la completación de Raĭkov.

Corolario 3.2.19. *Sea G grupo topológico abeliano y discreto. Entonces todo homomorfismo $f : G \to H$, con H un grupo topológico precompacto, permanece continuo considerado de $G^{\#}$ a H.*

Demostración. Como G es discreto, tenemos que f es continua. Consideremos ρH la completación de Raĭkov de H. Pensemos a f con codominio ρH, como ρH es compacto tenemos por la Proposición 3.2.12 que el homomorfismo $f : G^{\#} \to \rho H$ es continuo. Concluimos que $f : G^{\#} \to H$ es continuo.

□

Definición 3.2.20. Dado un homomorfismo de grupos topológico abelianos discretos $f : G \to H$, denotaremos por $f^{\#}$ a el homomorfismo f, pero considerado de $G^{\#}$ a $H^{\#}$.

Proposición 3.2.21. *Para todo homomorfismo de grupos abelianos discretos $f : G \to H$, el homomorfismo $f^{\#} : G^{\#} \to H^{\#}$ es continuo. Más aún si f es sobreyectiva, entonces $f^{\#}$ es abierta.*

Demostración. Como el grupo $H^{\#}$ es precompacto, tenemos por el Corolario 3.2.19 que $f^{\#}$ es continua. Por otro lado supongamos que $f(G) = H$. Sea K el núcleo de f y consideremos $\pi : G^{\#} \to G^{\#}/K^{\#}$ el homomorfismo cociente. Por el Primer Teorema de Isomorfismo (ver [3]) existe un isomorfismo $i : G^{\#}/K^{\#} \to H^{\#}$ tal que $f^{\#} = i \circ \pi$. Afirmamamos que i es un isomorfismo topológico. Sea $U \subset H$ abierto, tenemos que $i^{-1}(U) = \pi((f^{\#})^{-1}(U))$. Como $f^{\#}$ es continua y por la Observación 1.2.21, π es abierta. Concluimos que $i^{-1}(U)$ es abierto. Por lo tanto i es continua. Ahora como el cociente $G^{\#}/K^{\#}$ es precompacto, tenemos que $i^{-1} : H^{\#} \to G^{\#}/K^{\#}$ es continua por el Corolario 3.2.19. Entonces i es un isomorfismo topológico y por lo tanto i es abierta. Concluimos por la igualdad $f^{\#} = i \circ \pi$ que $f^{\#}$ es abierta.

□

Podemos pensar en general que al tomar un grupo topológico abeliano G en el cual la familia G^* separa puntos de G, el dotarlo con la topología de Bohr nos da un grupo topológico abeliano, hausdorff y precompacto.

Definición 3.2.22. Una asignación F de una categoria $\mathscr{A}$ a otra categoria $\mathscr{B}$ es llamado functor covariante si:

i) A cada objeto A de la categoria $\mathscr{A}$, le asocia un objeto $F(A)$ en la categoria $\mathscr{B}$.
ii) Asocia a cada morfismo $f : A \to B$ en $\mathscr{A}$, un morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ en $\mathscr{B}$.
iii) Se cumple que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ para todos los homomorfismos $f : G \to H$ y $g : H \to K$.

Definición 3.2.23. Un grupo topológico G es llamado *maximal casi–periódico* si el correspondiente grupo G^+ es Hausdorff, o equivalentemente, si la familia G^* separa puntos de G.

Por lo que sabemos hasta ahora, los grupos topológicos localmente compactos son un ejemplo de grupos maximales casi–periódicos. Más aún, todo grupo topológico abeliano discreto es maximal casi–periódico.

Proposición 3.2.24. *Los functores $^+$ y $^\#$ son functores covariantes de las categorías de los grupos maximal casi–periódicos y grupos abelianos discretos, respectivamente, a la categoría de grupos topológicos abelianos, discretos y Hausdorff.*

Demostración. Recordemos por la Proposición 3.2.16 y por la Proposición 3.2.20 que si $f : G \to H$ es un homomorfismo continuo, entonces $f^+ : G^+ \to H^+$ es un homomorfismo continuo. Esto nos dice que el functor $^+$ es covariante. De igual manera si $f : G \to H$ es un homomorfismo continuo, entonces $f^\# : G^\# \to H^\#$ es un homomorfismo continuo.

También hay que notar por definición del functor $^+$ que para homomorfismos continuos $f : G \to H$ y $g : H \to K$ de grupos abelianos, tenemos que $(g \circ f)^+ = f^+ \circ g^+$ es un homomorfismo continuo de G^+ a K^+. En particular si los grupos G, H, K son discretos, entonces $(g \circ f)^\# = g^\# \circ f^\#$ es un homomorfismo continuo de $G^\#$ a $K^\#$.

$\square$

A continuación veremos tres propiedades de grupos abelianos relacionados con la topología de Bohr.

Proposición 3.2.25. *Sea H un subgrupo de un grupo abeliano y discreto G. Se cumplen las siguientes propiedades.*
i) H es un subgrupo cerrado de $G^\#$.
ii) $H^\#$ es un subgrupo topológico de $G^\#$.
iii) $(G/H)^\# = G^\#/H^\#$.

Demostración. Sea $\pi : G \to G/H$ el homomorfismo canónico. Para probar (i), sabemos por el Corolario 3.2.18 que $(G/H)^{\#}$ es Hausdorff, por lo que gracias a el Corolario 3.2.19 el homomorfismo π es continuo. Entonces ker $\pi = H$ y por el Lema 1.2.20 el grupo H es cerrado en G^*.

Para tener la prueba de (ii) nos gustaría ver que la topología de Bohr en $H^{\#}$ y la topología que H hereda como subespacio de $G^{\#}$ coinciden. Notese que cada carácter en G, al restringirlo a H, es un carácter en H. Entonces la topología de Bohr $\tau_b(H)$ de $H^{\#}$ es más fina que la topología que H hereda de $G^{\#}$. Por otro lado como el grupo $\mathbb{T}$ es divisible, tenemos por el Teorema 1.1.8 que cada carácter en H, puede ser extendido a un carácter en G. Esto nos dice que la topología de Bohr $\tau_b(G)$, es más gruesa que la topología que H hereda de $G^{\#}$. Por lo tanto ambas topologías coinciden.

Ahora vamos a probar (iii). Notese que los grupos $(G/H)^{\#}$ y $G^{\#}/H^{\#}$ son isomorfos bajo la identidad, pues la topología de Bohr altera la estructura topológica, no la de grupo. Por (i) $H^{\#}$ es un subgrupo cerrado de $G^{\#}$, tenemos que $G^{\#}/H^{\#}$ es Hausdorff y precompacto. Que es precompacto se da por que $G^{\#}$ lo es. Para ver que es Hausdorff como $H^{\#}$ es cerrado, cualesquiera dos elementos distintos $gH^{\#}$ y $g'H^{\#}$ se pueden separar por vecindades abiertas de $G^{\#}/H^{\#}$. Entonces por el Corolario 3.2.19, el homomorfismo identidad $i : (G/H)^{\#} \to G^{\#}/H^{\#}$ es continuo pues como H es cerrado, G/H es discreto. Falta probar que la inversa de i es continua. Sea $p : G^{\#} \to G^{\#}/H^{\#}$ el homomorfismo canónico a $G^{\#}/H^{\#}$ y $\pi^{\#} : G^{\#} \to (G/H)^{\#}$ el homomorfismo canónico a $(G/H)^{\#}$. Claramente se tiene que $p = i \circ \pi^{\#}$ Si U es un abierto de $(G/H)^{\#}$, tenemos que $i(U) = p((\pi^{\#})^{-1}(U))$, más aún como $\pi^{\#}$ es continua y p es abierta, concluimos que $i(U)$ es abierto en $G^{\#}/H^{\#}$. Por lo tanto i es un isomorfismo topológico. □

A partir de esta proposición podemos decir entonces que el functor $^{\#}$ "respeta" subgrupos y cocientes de grupos abelianos discretos.

Corolario 3.2.26. *Si H es un subgrupo de un grupo abeliano discreto G, entonces la compactación de Bohr de H es topológicamente isomorfa a la cerradura de H tomada en la compactación de Bohr bG de G.*

Demostración. Gracias al Corolario 3.2.18, podemos pensar que el grupo H es un subgrupo topológico denso de bH. Sea $K = (\overline{H})_{bG}$, entonces K es compacto. Sabemos que H es un subgrupo denso de $(\overline{H})_{bG} = K$. Del Teorema 2.5.3 los grupos compactos son precompactos y Raĭkov completos, en nuesto caso K y bH son Raĭkov completos. Por ser H subgrupo denso en

K y en bH, por le Teorema 2.4.1, existe un isomorfismo topológico entre K y bH. □

Ahora veremos que el functor $^{\#}$ preserva productos finitos.

Proposición 3.2.27. *Sea $G = H_1 \times \ldots \times H_n$ un producto de grupos abelianos discretos. Entonces la identidad $i : G^{\#} \to H_1^{\#} \times \ldots \times H_n^{\#}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Claramente i es un isomorfismo. El producto $H_1^{\#} \times \ldots \times H_n^{\#}$ es precompacto pues cada $H_i^{\#}$ lo es. Por el Corolario 3.2.19 el isomorfismo i es continuo. Por otro lado, para cada $1 \leq k \leq n$, consideremos $j_k : H_k \to H_1 \times \ldots \times H_n$ la proyección al producto. Si φ es un carácter continuo en $G^{\#}$, definimos $\varphi_k = \varphi \circ j_k : H_k \to \mathbb{T}$. Tenemos que φ_k es un carácter continuo en H_k pues j_k es un homomorfismo continuo. Por lo tanto φ_k es un carácter continuo en $H_k^{\#}$, gracias al Corolario 3.2.19. Definimos $\phi : H_1^{\#} \times \ldots \times H_n^{\#} \to \mathbb{T}$ como $\phi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k)$, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Como cada φ_k es un carácter continuo, tenemos que ϕ es un carácter continuo. Además $\varphi = \phi$, pues por definición ϕ hace a $x = (x_1, \ldots, x_n)$ lo mismo φ solo que viéndolo entrada por entrada. En conclusión todo carácter continuo en $G^{\#}$ es un carácter continuo en $H_1^{\#} \times \ldots \times H_n^{\#}$. Por lo tanto i tiene inversa continua, es decir, $i^{-1} : H_1^{\#} \times \ldots \times H_n^{\#} \to G^{\#}$ es continua. □

Corolario 3.2.28. *Sea $G = G_1 \times G_2$, un producto de grupos topológicos abelianos discretos. Entonces los grupos bG y $bG_1 \times bG_2$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Sabemos por el Corolario 3.2.18 que $G^{\#}$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo denso de la compactación bG de G. De igual manera $G^{\#}$ es un subgrupo denso de $bG_1 \times bG_2$. Como los grupos compactos son Raĭkov completos. Por el Teorema 2.4.1, los grupos bG y $bG_1 \times bG_2$ son topológicamente isomorfos.

□

Comenzaremos ahora a dar algunas caracterizaciones de la cardinalidad de un grupo G relacionada con la compactación de Bohr.

Denotaremos por $tor(G)$ a el *subgrupo de torsión* de G que consta de todos los elementos de orden finito. Claramente el grupo cociente $G/tor(G)$ es *libre de torsión*, es decir, todos sus elementos no nulos son de orden infinito.

Definición 3.2.29. Sea G grupo abeliano y sea $n \in \mathbb{Z}^+$. Definimos $G[n] = \{x \in G \mid nx = 0\}$. Claramente $G[n]$ es un subgrupo de G y el orden de cada elemento $x \in G[n]$ divide a n.

Definición 3.2.30. Supongamos que A es un subconjunto no vacío de un grupo abeliano G. Si para cualesquiera elementos distintos $a_1, \ldots, a_n \in A$ y cualesquiera $m_1, \ldots, m_n$ enteros, la igualdad $m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n = e$, implica que $m_i a_i = e$ para cada $1 \leq i \leq n$, decimos que A es un *subconjunto independiente* de G.

Fácilmente por el Lema de Zorn, podemos concluir que todo subconjunto independiente, está contenido en un subconjunto maximal independiente.

Definición 3.2.31. Sea G un grupo, definimos el *rango de torsión libre* $r_0(G)$ como la cardinalidad de un subconjunto maximal independiente formado por elementos de orden infinito. De igual manera definimos el *p–rango* de G, $r_p(G)$, como la cardinalidad de un subconjunto maximal independiente, formado por elementos de orden alguna potencia de p, con p primo.

Para ver que el rango libre de torsión esta bien definido, tenemos que ver que la cardinalidad de dos subconjuntos independientes de un grupo G coincide. Esto lo probaremos en el siguiente Lema.

Lema 3.2.32. *. Sea G grupo abeliano, dos subconjuntos maximales independientes consistentes de elementos de orden alguna potencia de p (p primo) tienen la misma cardinalidad.*

Demostración. Sea A subconjunto maximal independiente de elementos de orden potencia de p. Si reemplazamos cada elemento de A que tenga orden mayor que p por un múltiplo conveniente, lo que obtenemos es un subconjunto independiente A_0 que tiene elementos de orden p y $|A| = |A_0|$. Si $g \in G[p] \setminus A$, entonces $A \cup \{g\}$ es dependiente y tenemos que la relación $mg + \sum_{i=1}^{n} m_i a_i = e$, con $a_i \in A$, m y $m_i \in \mathbb{Z}$, cumple que $mg \neq e$. Como $pg = e$, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} pm_i a_i = e$ implica que $pm_i a_i = e$ para toda $i = 1, \ldots, n$. Tenemos que $m_i a_i \in \langle A_0 \rangle$, por lo que $mg \in \langle A_0 \rangle$, de donde $g \in \langle A_0 \rangle$. Por lo tanto $G[p] = \langle A_0 \rangle$, por lo tanto $|\langle A \rangle| = |G[p]|$.

□

Lema 3.2.33. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos abelianos. Si f es sobreyectiva, entonces $r_0(H) \leq r_0(G)$.*

Demostración. Sea B un subconjunto de H maximal independiente, con elementos de orden infinito. Sea $A \subset G$ tal que $f(A) = B$ y f restringida a A es inyectiva. Dicha conjunto A existe pues de lo contrario para todo $A \subset G$, existen $a, b \in A$ tales que $a \neq b$ pero que $f(a) = f(b)$, por lo que $f(a) - f(b) = e$, esto es una contradicción a la independencia de B. Como $f|_A$ es biyectiva, tenemos que $|A| = |B|$. Más aún A es independiente en G, para esto, sean $a_1, \ldots a_n \in A$ y $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, supongamos que $m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n = e$ pero que algún $m_i a_i \neq e$. Consideremos $f(a_1), \ldots, f(a_n) \in B$, tenemos que $m_1 f(a_1) + \ldots + m_n f(a_n) = e$, implica $m_i f(a_i) = e$, para toda $i < n$, es decir $f(m_i a_i) = e$ y esto es una contradicción a la inyectividad de f. Por lo tanto A es independiente en G. También cada elemento de A tiene orden infinito, pues si no, existe $a \in A$ tal que $ma = e$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, esto implica que $f(ma) = mf(a) = e$, lo que contradice que todos los elementos de B sean de orden infinito. Entonces $r_0(H) \leq r_0(G)$.

□

Definición 3.2.34. Sea G grupo abeliano. Dado un primo p denotamos por G_p, a todos los elementos de G que tienen orden una potencia de p. Llamaremos G_p la *p–componente primaria* de G o la *componente primaria* cuando no sea necesario especificar p. Si $G = G_p$, para algún primo p, llamaremos a G un *p–grupo de torsión*.

Un grupo abeliano de torsión G (*i.e* todos sus elementos son de orden finito), es de *torsión acotada* si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $nx = e$, para todo $x \in G$.

Claramente a partir de esta definición tenemos que $r_p(G) = r_p(G_p)$.

Teorema 3.2.35. *Todo grupo abeliano de torsión G, con elemento neutro 0, es la suma directa de sus componentes primarias.*

Demostración. Llamaremos $\mathbb{P}$ al conjunto de todos los números primos.
Primero veamos que $G = \sum_{p \in \mathbb{P}} G_p$. Sea $x \in G$ y sea n el orden de x. Entonces n se puede expresar como $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$, con p_i primos distintos y $k_i > 0$. Para cada $i \leq m$, llamemos $N_i = \frac{n}{p_i^{k_i}}$, tenemos que $N_1, \ldots, N_m$ son primos relativos entre sí y por lo tanto podemos expresar al 1 como combinación lineal de ellos, $s_1 N_1 + \cdots + s_m N_m = 1$. Sea $y_i = s_i N_i x$, se cumple que $p_i y_i = s_i n x = 0$, pues n es el orden de x, entonces $y_i \in G_{p_i}$ para cada $0 < i \leq m$. Por lo tanto $x = s_1 N_1 x + \cdots + s_m N_m x = y_1 + \cdots + y_m \in G_{p_1} + \cdots + G_{p_m}$. Concluimos que $x \in G_{p_1} + \cdots + G_{p_m}$. Veamos ahora que

$G_p \cap (G_{q_1} + \cdots + G_{q_k}) = \{0\}$. Sea $x = y_1 + \cdots + y_k$, con $x \in G_p$ y $y_i \in G_{q_i}$, para $i \leq k$. Entonces el orden de x es una potencia de p, mientras que el orden de $y_1 + \cdots + y_k$ es $q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k}$. Entonces $x = 0$. Por lo tanto $G = \oplus_{p \in \mathbb{P}} G_p$.

□

Lema 3.2.36. *Sea G un p–grupo de torsión abeliano no numerable. Entonces $|G| = |G[p]|$.*

Demostración. Sea $\varphi : G \to G$ dada por $\varphi(g) = pg$. Claramente $ker\ \varphi = G[p]$. Cosideremos la secuencia de subgrupos $H_1 = G[p]$ y $H_{n+1} = \varphi^{-1}(H_n)$. Notese que $H_1 \subset H_2 \subset \cdots$, pues por ejemplo

$$\varphi^{-1}(H_1) = \{x \in G \mid \varphi(x) \in H_1 = G[p]\} = \{x \in G \mid p^2 x = 0\}.$$

En general por inducción podemos concluir que $H_n = G[p^n]$. Observemos que si $g, h \in G$ y $\varphi(h) = ph = g$, entonces $\varphi^{-1}(g) = h + G[p]$, por lo que $|\varphi^{-1}(g)| \leq |G[p]|$. Sea $\tau = |H_1| \leq \tau \cdot \omega$. Supongamos que $|H_n| \leq \tau \cdot \omega$. Probaremos por inducción que $|H_n| \leq \tau \cdot \omega$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por la observación hecha anteriormente

$$|H_{n+1}| = |\varphi^{-1}(H_n)| \leq |G[p]||H_n| \leq \tau \cdot \omega.$$

Concluimos que $|H_n| \leq \tau \cdot \omega$ para toda n. Por ser G un p–grupo tenemos que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$. Al ser G no numerable, ocurre que $|G| \geq \omega$. Por otro lado $|G| = |\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n| = \tau \cdot \omega \cdot \omega = \tau \cdot \omega$, por lo tanto $|G| = \tau = |G[p]|$.

□

Corolario 3.2.37. *Todo p–grupo de torsión G, no numerable satisface que $r_p(G) = |G|$.*

Demostración. Por el Lema 3.2.36, tenemos que $|G| = |G[p]|$. Sea $A \subset G[p]$ un subconjunto maximal independiente del grupo $G[p]$. Afirmamos que A es también un subconjunto maximal independiente en G. Claramente A es independiente en G. Para ver que es maximal sea $b \in G \setminus A$, entonces el orden de b es de la forma p^r, es decir, $b^{p^r} = e$, lo cual se ve como $(b^{p^{r-1}})^p = e$, entonces $b \in G[p]$ y por ser A maximal en $G[p]$, tenemos que $A \cup \{b\}$ es dependiente. En conclusión queremos probar que $|A| = |G[p]|$. Tenemos que para cada $x \in G[p] \setminus A$, el conjunto $A \cup \{x\}$ es dependiente, es decir, $nx \in \langle A \rangle$, con n un entero no múltiplo de p. Como $(n, p) = 1$, tenemos que existen a y b enteros tales que $an + bp = 1$, por lo que $xan + bpx = x$, como

$x \in G[p]$, $x = anx \in \langle A \rangle$, entonces $G[p] \subset \langle A \rangle$. Por otro lado como A es un subconjunto de $G[p]$, tenemos que $\langle A \rangle \subset G[p]$. Por lo tanto, $G[p] = \langle A \rangle$.

Por hipotesis G es no numerable y como $|G[p]| = |G|$, concluimos que $\langle A \rangle$ es no numerable, de donde A es no numerable, pues si lo fuera $\langle A \rangle$ sería numerable. Entoneces $|A| = |\langle A \rangle| = |G[p]| = |G|$. En conclusión $r_p(G) = |G|$.

□

Definición 3.2.38. Para cualquier grupo abeliano G, definimos el *rango* de G (a veces llamado rango total) como:

$$r(G) = r_0(G) + \sum_{p \in \mathbb{P}} r_p(G),$$

donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de los números primos.

Claramente $r(G) = r_0(G)$ si G es un grupo de libre de torsión, también $r(G) = r_p(G)$ si G es un p–grupo.

Al igual que el rango libre de torsión y el p–rango de un grupo abeliano G, nos gustaría que el rango total de G sea la cardinalidad de un subconjunto maximal independiente, además nos gustaría que este rango no dependa de subconjuntos maximales independientes A_p o A_0.

Lema 3.2.39. *Sea A_0 un subconjunto maximal independiente de un grupo abeliano G, con elementos de orden infinito y para cada $p \in \mathbb{P}$, sea A_p un subconjunto maximal independiente del subgrupo G_p de G. Entonces $A = A_0 \cup \bigcup_{p \in \mathbb{P}} A_p$ es maximal independiente en G.*

Demostración. Claramente A es independiente pues para cada colección de elementos de A, $a_1 \ldots, a_n \in A$, tenemos:
Si $a_i \in A_0$ o $a_i \in A_p$ para toda i, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{n} m_i a_i = e$, implica $m_i a_i = e$.
Por otro lado, si A no fuera independiente y tenemos que $a_i \in A_{p_i}$, como cada A_{p_i} es ajeno con A_{p_j}, $i \neq j$, concluimos que A es independiente. Sea $x \in G \setminus A$.
Caso 1. Supongamos que $x \in tor(G)$. Por el Teorema 3.2.35, tenemos que x se ve de la forma $x = y_1 + \ldots + y_n$, con $y_i \in G_{p_i}$, para cada $i \leq n$. Sea $p_i^{s_i}$ el orden de cada y_i. Por ser A_{p_i} independiente, se tiene que $y_i \in A_{p_i}$ o que el conjunto $A_{p_i} \cup \{y_i\}$ es dependiente, en el primer caso tomando $m = 1$, tenemos que $my = y \in \langle A_{p_i} \rangle$, en el segundo caso como el orden de y_i es

$p_i^{s_i}$, tenemos que existe $m_i < p_i^{s_i}$, tal que $m_i y_i \in \langle A_{p_i} \rangle$. Sea $M = m_1 \cdots m_n$. Como $m_i y_i \in \langle A_{p_i} \rangle$, tenemos que $M y_i \in \langle A_{p_i} \rangle$, para cada $i \leq n$, Así tenemos que

$$Mx = My_1 + \ldots + My_n \in \langle A_{p_i} + \ldots + A_{p_n} \rangle \subset \langle A \rangle.$$

Como el orden de x es $ord(x) = p_i^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$, entonces $M = m_1 \cdots m_n < ord(x)$, concluimos que $Mx \neq 0$, es decir, para la combinación $Mx - My_1 - \ldots - My_n = 0$, tenemos que $Mx \neq 0$, por lo tanto $A \cup \{x\}$ es dependiente y así A es maximal.
Caso 2. Si $x \notin torG$. Entonces $A_0 \cup \{x\}$ es dependiente y así $A \cup \{x\}$ es dependiente. Por lo tanto A es un subconjunto maximal independiente en G.

□

En el siguiente resultado veremos que el grado de un grupo abeliano G, coincide con la cardinalidad de un subconjunto maximal independiente B de G.

Proposición 3.2.40. *Sea B subconjunto maximal independiente en un grupo abeliano G. Entonces $r(G) = |B|$.*

Demostración. Sea A_0, A_p y A como el el Lema 3.2.39. Por definición sabemos que $r_0(G) = |A_0|$ y que $r_p(G) = |A_p|$. Como $A_0 \cap A_p = \emptyset$ y $A_p \cap A_q = \emptyset$ para $p, q \in \mathbb{P}$ distintos, tenemos que

$$r(G) = r_0(G) + \sum_{p \in \mathbb{P}} r_p(G) = |A_0| + \sum_{p \in \mathbb{P}} |A_p|.$$

Concluimos que $r(G) = |A|$, y Por 3.2.32, $r(G)$ no depende de el subconjunto independiente que escojamos, tenemos que $|A| = |B| = r(G)$.

□

Al igual que el rango libre de torsión, nos gustaría que el rango de un subgrupo es más pequeño que le del grupo, veamos este echo en el siguiente corolario.

Corolario 3.2.41. *Si H es un subgrupo de un grupo abeliano G, entonces $r(H) \leq r(G)$.*

Demostración. Sea B un subconjunto de H maximal independiente, pensando a B como subconjunto de G, por el Lema de Zorn, existe A subconjunto de G maximal independiente, tal que $B \subset A$. Por la Proposición 3.2.40 tenemos que $r(H) = |B| \leq |A| = r(G)$.

□

Proposición 3.2.42. *Sea G grupo no numerable, entonces G contiene un subconjunto independiente A, tal que $|A| = |G|$. Por lo tanto $r(G) = |G|$.*

Demostración. Nuevamente sean A_0, A_p y A como el el Lema 3.2.39. Sabemos que $A = A_0 \cup \bigcup_{p\in\mathbb{P}} A_p$ es maximal independiente en G. Ya tenemos que $|A| \leq |G|$. Nos gustaría probar que $|A| \geq |G|$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que $|A| < |G|$. Como A es independiente, para cada $x \neq 0$ existe $n \in \mathbb{Z}$, tal que $0 \neq nx \in \langle A \rangle$. Notese que $|\langle A \rangle| \leq |A| \cdot \omega < |G|$, la primer desigualdad es clara pues el grupo $\langle A \rangle$ es combinaciones lineales de múltiplos enteros de elementos de A, la segunda desigualdad se tiene por que G es no numerable. Por el Lema del Palomar (o principio de casillas), podemos hallar un elemento no nulo $g \in \langle A \rangle$ y un entero $m \neq 0$ y un conjunto $D \subset G$, tales que $|D| > |A| \cdot \omega$ y $mx = g$, para cada $x \in D$. Para cada $x_0 \in D$ se tiene que $m(x - x_0) = 0$, por lo tanto $|D| \leq |G[m]|$. Por el Teorema 3.2.35 el grupo $H = G[m]$ es la suma de sus componentes primarias H_p, notese que p corre sobre todos los divisores primos de m. Entonces tenemos que $|H| = |H_p|$ para algún primo p. Como H_p es un p-grupo de torsión y $|H| \geq D \geq |A| \cdot \omega$, concluimos que H es no numerable y gracias al Corolario 3.2.37, tenemos

$$r_p(H_p) = |H_p| = |H| \geq |D|,$$

entonces $|A_p| = r_p(H_p) \geq |D| \geq |A| \geq |A_p|$, es una contradicción. Por lo tanto $|A| = |G|$ y por la Proposición 3.2.40, concluimos que $r(G) = |G|$.

□

Nuevamente hablemos de la topología de Bohr de un grupo discreto.

Proposición 3.2.43. *Sea G grupo topológico abeliano, entonces todo subconjunto independiente de G es cerrado y discreto en $G^{\#}$.*

Demostración. Sea A subconjunto independiente de G, y sea $x \in A$. Por (i) de la Proposición 3.2.25 tenemos que el grupo $H_x = \langle A \setminus \{x\} \rangle$ es cerrado en $G^{\#}$, además $A \cap (G \setminus H_x) = \{x\}$, es decir el punto x es aislado y por el Lema 1.2.16 tenemos que A es discreto en $G^{\#}$. Para probar que A es cerrado, sea

$y \in \overline{A}$, entonces $y \in \overline{A} \subset \overline{\langle A \rangle} = \langle A \rangle$, pues en $G^{\#}$ el grupo $\langle A \rangle$ es cerrado por la Proposición 3.2.25. Entonces podemos hallar un subconjunto finito B de A, tal que $y \in \langle B \rangle$, por lo que $U = G \setminus \langle A \setminus B \rangle$ es abierto pues $\langle A \setminus B \rangle$ es cerrado en $G^{\#}$, más aún $y \in U$ y $U \cap A \subset B$, es decir, $|U \cap A| < \omega$, por lo tanto A es cerrado en $G^{\#}$.

$\square$

Corolario 3.2.44. *Sea G grupo abeliano discreto. Entonces $G^{\#}$ continene un subconjunto cerrado y discreto de tamaño $|G|$.*

Demostración. Si G es no numerable, tenemos por la Proposicion 3.2.42 que existe subconjunto independiente de tamaño G y por la Proposición 3.2.43, tenemos que A es cerrado y discreto. El caso en el que G es finito es trivial. Supongamos ahora que G es numerable. Como todo grupo topológico compacto es finito o no numerable. Gracias a [1](5.2.7) concluimos que $G^{\#}$ no puede ser compacto. Por lo tanto $G^{\#}$ es numerable y así Lindelöf. Concluimos que G no es numerablemente compacto. Entonces para una cubierta numerable de G, no podemos hallar subcubierta finita, por cada abierto de la cubierta U, tomemos un punto (cuando sea posible) de ese abierto pero que no sea parte de los elementos de la cubierta que contiene U. Esto nos da un subconjuntos infinito, discreto y cerrado.

$\square$

Bibliografía

[1] A. Arhangel'skii, M. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press, (2008).

[2] D. Dikranjan, S. Stoyanov, *An elementary aproach to Haar integration and Pontryagin duality in locally compact abelian groups.*

[3] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice-hall, (1971).

[4] Raimond A. Struble, *Metric in Locally Compact Groups*, Compositio Mathematica, tomo 28,(1974).

[5] S. Willard, *General Topology*, Addison Wesley, (1970).

Índice Alfabético