UNIVERSIDAD MICHOACANA
DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Dualidad de Pontryagin en grupos topológicos localmente compactos

T E S I S

para obtener el título de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Autor:
Héctor Alonso Barriga Acosta

Asesor:
Doctor en filosofía de las Matemáticas,
Fernando Hernández Hernández

Julio, 2013
Morelia, Michoacán

Dedico este trabajo a mi familia

Agradecimientos

Para escribir estas líneas esperé a despertar en un día de aquellos en que uno amanece muy feliz. Con mucho entusiasmo agradezco la vida que se me ha dado y mucho más agradezco a las personas con las que me tocó vivirla. De algún modo el apoyo de las personas provoca cierta felicidad cuando uno se propone a realizar algo o tomar decisiones. Tal vez dar las gracias no es tan significativo como toda la ayuda que ciertas personas me han otorgado pero por lo pronto les pago con mi tesis y con la alegría que me ha regalado este proyecto.

Le agradezco infinitamente a mi madre hermosa por haberme soportado y alimentado estos años, y no dudo que lo siga haciendo. Le agradezco todo el sacrificio que ha hecho por mi y mis hermanos, por la crianza que me dió y por su coraje y valentía ante la adversidad de la vida. *Gracias mamá por darme todo tu amor*. También quiero agradecer a mis hermanos que, aunque nunca supieron qué es lo que hacía, siempre estuvieron al pendiende de mi progreso. Agradezco a mi cuñada y sus hijos que me han traído júbilo a mis días tan sólo con verlos.

Sé que el haber logrado terminar mi tesis es una satisfacción para mi familia, en especial para mi padre que debido a su apoyo, las cosas no pudieron resultarme más simples de ejecutar. Te doy gracias por respetarme en cada decisión que he tomado y por tratar de dirigirme hacia un camino con menos obstáculos que el tuyo.

Agradezco las enseñanzas de mi asesor, su paciencia y su tiempo. Agradezco fuertemente su confianza y credibilidad en mí. Agradezco su honestidad amistosa y su amistad honesta, y sobre todo, TODO!

Agradezco también con mucho aprecio a mi mesa sinodal por sus recomendaciones y las ganas de apoyarme, haciendo como siempre un trabajo excelente.

Por su compañía, consejos y ratos de alegría, agradezco a los "hijos", a los "amiguines", a los "tortolos", a mis maestros de TKD, a mis "profes", a los "ájale machín", a los "ponten", a los Acosta, a los "barriguillas", a mi querida amiga y novia, y a mi compañero canino.

Espero algún día con el producto de mi esfuerzo devolverles la satisfación que todos me han regalado. ***A mi gente, gracias!***

Introducción

En los últimos siglos se han desarrollado profundamente dos ramas fundamentales de las matemáticas: Topología y Álgebra. La topología estudia los conceptos de cercanía, comparación y clasificacion de objetos, incluso la noción de límite e infinitud. Por otro lado, el álgebra analiza las operaciones naturales y las interacciones entre las mismas. También busca generalizar la aritmética a objetos con estructuras más abstractas. Estas nociones se han formalizado con el paso del tiempo por medio de propiedades con las que puede ser atribuido un cuerpo u objeto.

Aunque estas áreas conforman gran parte de las matemáticas, tienden a desarrollarse muy bien de manera independiente. Sin embargo, en dominios más avanzados de las matemáticas como el análisis funcional, sistemas dinámicos, teoría de representación, entre otras, el álgebra y la topología comienzan a hacer contacto de manera natural. Muchos de los objetos más importantes en las matemáticas conllevan una mezcla de estructuras algebráicas y topológicas. Espacios topológicos de funciones, espacios vectoriales topológicos, campos topológicos, grupos de tranformaciones y *grupos topológicos* son objetos de este estilo. Como su nombre lo indica, un grupo topológico es un grupo dotado de una topología de tal manera que se relacione con las operaciones presentes en el grupo: se pide que las funciones tomar inverso y la multiplicación del grupo sean continuas.

Mucha de la investigación realizada en la segunda mitad del siglo XX se enfoca a varios temas del álgebra topológica. En particular, la teoría de grupos topológicos tuvo una especial atención en su progreso alcanzando los límites de la clase de los grupos localmente compactos. Algunos participantes de este desarrollo son A. D. Alexandroff, M. Markov, S. Kakutani, A. N. Kolmogorov, E. van Kampen , W. W. Comfort, L. S. Pontryagin, entre otros.

L. S. Pontryagin (1908-1988) además de establecer las bases de la teoría de los grupos topológicos, contribuyó a desarrollar la teoría de dualidad en sus trabajos matemáticos tempranos en 1934. Su tratamiento se basó en los grupos que son segundo numerables y compactos o discretos. Esto fue mejorado para cubrir a los grupos localmente compactos por E. van Kampen (1908-1942) en 1935 y por A. Weyl (1906-1998) en 1953.

El principal resultado (la dualidad) derivado de los trabajos de Lev Pontryagin cita que todo grupo topológico abeliano localmente compacto es topológicamente isomorfo a su grupo *doble dual*. La teoría de dualidad de Pontryagin tiene gran cantidad de aplicaciones en el análisis armónico y en el desarrollo de la teoría misma.

Cabe mencionar que la teoría de dualidad reluce como uno de los principales resultados en la mayoría de artículos o textos de investigación que respectan a la teoría de los grupos topológicos. Sin embargo, no hay un camino fácil para desarrollar dicha teoría. En el excelente libro de E. Hewitt y K. Ross [EH79], se presenta la teoría, pero con un camino que recurre a la noción de la integral definida en un grupo topológico: la medida de Haar. El desarrollo de esta integral que presenta el libro es muy elaborado por lo que requiere de mucha paciencia comprender la lectura. A diferencia de [EH79], el libro de A. Aranhel'skii y M. Tkachenko [AA08] también hace un intento en el desarrollo de la dualidad pero éste es incompleto. Un tercer gran libro es de D. Dikranjan [DD89] en el cual se presenta una idea de su procedimiento, aunque muchos resultados son presentados como ejercicios; además de que la idea misma requiere de conociemientos relativamente avanzados como la teoría de categorías.

No obstante, la teoría no detiene su efectividad y constantemente se está tratando de pulir y mejorar su desarrollo. Hoy en día ya existen herramientas potentes que se pueden utilizar para acortar resultados más débiles. Es así como nace la motivación de este trabajo. Se elaboró una evaluación entre diversos textos procurando recopilar los resultados más relevantes, y en ocasiones más elementales, que nos pudieran llevar de manera directa hacia los puntos clave de la teoría de dualidad.

En esta tesis se presenta entonces un desarrollo completo para la demostración del teorema de dualidad de Pontryagin, tratando de equilibrar que la lectura sea fluida, comprensible y considerablemente limpia. La manera en que se procedió fue plantear en principio todos lo resultados básicos de la teoría de grupos topológicos. De forma en que se avanza dentro del contexto el lector observará nuevos conceptos que ayudarán a comprender de manera ordenada lo que se requiere. En seguida se establece la existencia de *caracteres* no triviales lo que significa la inyectividad del isomorfismo topológico que deseamos. También se decidió recurrir a la teoría de estructura en grupos topológicos localmente compactos para comprenderlos de mejor manera. Finalmente se realiza la prueba completa recopilando los pasos previos concluyendo que el isomorfismo topológico mencionado sea suprayectivo.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Con el propósito de realizar una demostración legible del Teorema de Dualidad de Pontryagin, que dice que todo grupo topológico localmente compacto es topológicamente isomorfo a su grupo doble dual, presentaremos una serie de proposiciones y/o lemas que nos permitirán avanzar de manera directa hacia los puntos clave de dicha demostración. Para esto, en la primera sección recordamos algunas observaciones y propiedades básicas en la teoría de grupos topológicos. En la Sección 1.2 introducimos el concepto de grupo dual de un grupo topológico y los primeros resultados derivados de este concepto.

1.1 ⧫ Propiedades de los grupos topológicos

Comenzando a adquirir las nociones con las que trabajaremos recomendamos como base de lectura [Mun02] y [Eng89]. Supondremos que los conceptos de Topología tales como continuidad, compacidad, convergencia, ya son sabidos y los utilizaremos de manera fluida. También utilizaremos el lenguaje de redes que se observa en A.1 aunque si el lector desea puede consultar [Eng89, p. 49]. En el área de Teoría de Grupos trataremos los conceptos de subgrupos normales, grupos cociente, proyecciones, grupos cíclicos, grupos finitamente generados, etc. Estos recursos se pueden adquirir en [Rot02].

1.1 Definición. Sea G un conjunto que es un grupo y un espacio topológico con topología τ. Supóngase que:

(a) La función ***multiplicación*** $\alpha : G \times G \to G$ dada por $\alpha(a, b) = ab$, con $a, b \in G$, es continua.

(b) La función ***inversión*** $\beta : G \to G$ dada por $\beta(a) = a^{-1}$, con $a \in G$, es continua.

Entonces (G, τ) será un ***grupo topológico***.

En términos de conjuntos abiertos, la condición (a) afirma que para cada vecindad U de $x * y$, existen vecindades V, W de x, y, respectivamente, tales que $V * W \subseteq U$, donde $*$ es la operación del grupo G. La condición (b) afirma que para cada vecindad U de x^{-1}, existe una vecindad V de x tal que $V^{-1} \subseteq U$. Note que un grupo G dotado con la topología discreta siempre es un grupo topológico y nos vamos a referir a éste como ***grupo discreto***. Supondremos que siempre que escribimos "grupo compacto", "grupo T_0", ..., nos referimos a un grupo topológico que como espacio topológico es "compacto", "T_0",...

En la mayoría de los casos G denotará un grupo topológico, e será su elemento identidad y $\mathcal{U}(g)$ denotará un sistema de vecindades para el elemento $g \in G$. También diremos que H es un subgrupo de G con $H \leqslant G$ y que H es un subgrupo normal de G con $H \lhd G$. Para un grupo arbitrario, no se usará notación para el signo de operación y la manera de operar sus elementos será regularmente por la izquierda. Si el grupo es abeliano, la manera de operar sus elementos será indistinta, usualmente se usará el signo de operación $+$ y su elemento identidad será 0.

Es fácil darse cuenta de que si H es un subgrupo de un grupo topológico G, entonces H es un grupo topológico con la topología relativa como subespacio de G, debido a que las funciones multiplicación e inversión siguen siendo continuas cuando se restringen a H. También, de la Definición 1.1 uno puede verificar que las traslaciones tanto izquierda como derecha por un elemento $g \in G$, son homeomorfismos de G. También la inversión es un homeomorfismo. De este hecho se desprende la siguiente propiedad para un grupo topológico G y un elemento arbitrario g de G. Para cualquier sistema de vecindades $\mathcal{U}(e)$ del espacio G en e, la familia $\mathcal{U}_g(e) = \{gU : U \in \mathcal{U}(e)\}$ es un sistema de vecindades de G en g. Por lo tanto, la familia

$$\mathcal{U} = \{gU : U \in \mathcal{U}(e), g \in G\},$$

forma un sistema de vecindades para cada elemento del espacio G.

Recordemos también que un espacio X es ***homogéneo*** si para cualesquiera dos puntos $x, y \in X$, existe un homeomorfismo f de X tal que $f(x) = y$. Note que todo grupo topológico es homogéneo, lo que nos lleva a comenzar con los hechos más basicos pero no menos importantes de la teoría de grupos topológicos.

1.2 Proposición. *Sean G un grupo topológico y A y B subconjuntos no vacíos de G. Entonces:*

(a) Si A es abierto y B es arbitrario, entonces AB es abierto.

(b) Si A y B son compactos, entonces AB es compacto.

(c) Si A es cerrado y B es compacto, entonces AB es cerrado.

Demostración. Note que el orden en la forma de operar A con B es indistinto para los resultados, es decir, se cumple lo mismo para BA.

(a) Como A es abierto, así lo es Ab, donde $b \in B$, pues las traslaciones son homeomorfismos. Así, $AB = \bigcup\{Ab : b \in B\}$ es abierto.

(b) Si A y B son compactos, $A \times B$ es compacto. Como la función multiplicación es continua, entonces AB es compacto.

(c) Tomemos una red $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ de elementos de AB tal que x_α converge a $x_0 \in G$. Para ver que AB es cerrado basta ver que $x_0 \in AB$. Para cada $\alpha \in D$ se tiene que $x_\alpha = a_\alpha b_\alpha$ donde $a_\alpha \in A$ y $b_\alpha \in B$. Como B es compacto, existe $b_0 \in B$ y una subred $\{b_\beta : \beta \in E\}$ de b_α tal que b_β converge a b_0. En particular, x_β converge a x_0. También es claro que $\{(x_\beta, b_\beta) : \beta \in E\}$ es una red de elementos de $G \times G$ que converge a (x_0, b_0). Ahora la red $a_\beta = x_\beta b_\beta^{-1}$ converge a $x_0 b_0^{-1}$ pues es la composición de la función continua $(u, v) \mapsto uv^{-1}$ aplicada a los elementos (x_β, b_β). Como A es cerrado, $x_0 b_0^{-1} \in A$. Y así, $x_0 = (x_0 b_0^{-1}) b_0 \in AB$. ■

1.3 Proposición. *Sea $f : G \to H$ un homomorfismo entre grupos topológicos. Si f es continua en el elemento $e \in G$, entonces f es continua.*

Demostración. Sean $e_G \in G, e_H \in H$ los elementos identidad en G y H, respectivamente. Sea x un elemento arbitrario de G y O una vecindad de $y = f(x) \in H$. Como las traslaciones son homeomorfismos, $y^{-1}O$ es una vecindad de e_H. Como f es continua en e_G, existe una vecindad V de e_G tal que $f(V) \subseteq y^{-1}O$. Nuevamente como las traslaciones son homeomorfismos, xV es una vecindad de x y así, $f(xV) = f(x)f(V) \subseteq yy^{-1}O = O$. ■

1.4 Teorema. *Sea G un grupo topológico. Entonces:*

(a) Para cada $U \in \mathcal{U}(e)$, existe $V \in \mathcal{U}(e)$ tal que $V^2 \subseteq U$.

(b) Para cada $U \in \mathcal{U}(e)$, existe $V \in \mathcal{U}(e)$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

(c) Para cada $U \in \mathcal{U}(e)$ y cada $x \in U$, existe $V \in \mathcal{U}(e)$ tal que $xV \subseteq U$.

(d) Para cada $U \in \mathcal{U}(e)$ y cada $x \in G$, existe $V \in \mathcal{U}(e)$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$.

Inversamente, sea G un grupo y $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G con la propiedad de la intersección finita que cumplen con $(a), (b), (c), (d)$. Entonces la familia de conjuntos $\{xU : U \in \mathcal{U}, x \in G\}$ forma una subbase para una topología para G. Bajo esta topología, G se convierte en grupo topológico.

Demostración. Si G es un grupo topológico, los incisos (a) y (b) son inmediatos por el hecho de que las funciones multiplicación e inversión son continuas. El inciso (c) afirma que U es abierto para cada $U \in \mathcal{U}(e)$. El inciso (d) se verifica del hecho de que la función conjugación $x \mapsto axa^{-1}$ es un homeomorfismo sobre G.

Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos de G con la propiedad de la intersección finita que cumplen con (a),(b),(c) y (d). Entonces para cada $U \in \mathcal{U}$ existen $V, W \in \mathcal{U}$ tales que $V^2 \subseteq U$ y $W^{-1} \subseteq V$. Como $V \cap W \neq \emptyset$ se sigue que $e \in VW^{-1} \subseteq V^2 \subseteq U$. Es decir, todo elemento de $\mathcal{U}$ contiene al elemento e.

Consideremos a $\widetilde{\mathcal{U}} = \{\bigcap_{k=1}^{n} U_k : U_k \in \mathcal{U}\}$. Ahora para $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}$ existen $V_1, \ldots, V_n \in \mathcal{U}$ tales que $V_k^2 \subseteq U_k$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Así, se obtiene que

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)^2 \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} V_k^2 \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} U_k,$$

y por tanto la propiedad (a) la cumple la familia $\widetilde{\mathcal{U}}$. Como

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)^{-1} = \bigcap_{k=1}^{n} V_k^{-1},$$

la propiedad (b) también la cumple $\widetilde{\mathcal{U}}$. También se tiene que

$$x\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} xV_k \qquad \text{y} \qquad x\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right)x^{-1} = \bigcap_{k=1}^{n} xV_kx^{-1},$$

por lo que las propiedades (c) y (d) las satisface $\widetilde{\mathcal{U}}$.

Se afirma entonces por definición de subbase, que los conjuntos no vacíos $\bigcap_{k=1}^{n}(x_kU_k)$, donde $x_k \in G$ y $U_k \in \mathcal{U}$, forman una base para una topología para G. En efecto, sean $y \in \bigcap_{j=1}^{n}(x_kU_k)$ y $V_k \in \mathcal{U}$ tales que $x_k^{-1}yV_k \subseteq U_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Esto es posible por (c). Entonces

$$y\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n}(yV_k) \subseteq \bigcap_{k=1}^{n}(x_kU_k).$$

Así, los conjuntos de la forma $y\widetilde{U}$, donde $y \in G$ y $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$, forman una base abierta en y, para cada $y \in G$.

Para ver que G es un grupo topológico bajo esta topología, sean $a, b \in G$ y $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}$. Por (a) y (d) para $\widetilde{\mathcal{U}}$, existen $\widetilde{V}, \widetilde{W} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ tales que $(b^{-1}\widetilde{W}b)\widetilde{V} \subseteq \widetilde{U}$. Así, $(a\widetilde{W})(b\widetilde{V}) \subseteq ab\widetilde{U}$, es decir, la función multiplicación es continua. Ahora sea $x \in G$. Por (b) y (d) para $\widetilde{\mathcal{U}}$, existe $\widetilde{V} \in \widetilde{\mathcal{U}}$ tal que $x\widetilde{V}x^{-1} \subseteq \widetilde{U}$ y $\widetilde{V}^{-1} \subseteq \widetilde{U}$. Por lo tanto, $(x\widetilde{V})^{-1} = x^{-1}(x\widetilde{V}x^{-1})^{-1} \subseteq x^{-1}\widetilde{U}$, es decir, la función inversión es continua. ■

1.5 Proposición. *Todo grupo topológico G cuenta con una base abierta en e que consiste de vecindades U tales que $U = U^{-1}$ (vecindades con esta propiedad se llaman* ***simétricas****).*

Demostración. Sea U una vecindad arbitraria de e. Consideremos al conjunto no vacío $V = U \cap U^{-1}$. Es claro que V es una vecindad de e, $V = V^{-1}$ y $V \subseteq U$. ■

1.6 Corolario. *Sea G es un grupo topológico. Para cada vecindad U de e, existe una vecindad V de e tal que $\overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Sea U una vecindad de e y V una vecindad simétrica de e tal que $V^2 \subseteq U$. Esto es posible por el Teorema 1.4. Así, si $x \in \overline{V}$ entonces xV es una vecindad de x y por tanto, $(xV) \cap V \neq \emptyset$. Esto implica que existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $xv_1 = v_2$ y por tanto $x = v_2 v_1^{-1} \in V^2 \subseteq U$. ■

1.7 Corolario. *Un grupo topológico G es localmente compacto si y sólo si para todo $x \in G$ existe una vecindad U de x tal que $\overline{U}$ es compacto.*

Demostración. Se sigue directamente del Corolario 1.6 y la homogeneidad de G. ■

1.8 Teorema. *Si G un grupo T_0, entonces G es regular y por tanto Hausdorff.*

Demostración. Por el Corolario 1.6, se cumple la regularidad en el elemento identidad $e \in G$. Dado que las traslaciones son homeomorfismos junto con la hipótesis de que G es T_0, se tiene entonces la regularidad en todo G. Además, un espacio regular siempre es Hausdorff. ■

1.9 Proposición. *Sean G un grupo topológico, U una vecindad de e y F un subconjunto compacto de G. Entonces existe una vecindad V de e tal que $xVx^{-1} \subseteq U$ para cada $x \in F$.*

Demostración. Sea W una vecindad simétrica de e tal que $W^3 \subseteq U$. Como $F \subseteq \bigcup_{x \in F} Wx$ y F es compacto, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n Wx_i$. Sea $V = \bigcap_{i=1}^n x_i^{-1} W x_i$. Es claro que V es una vecindad de e y que $x_i V x_i^{-1} \subseteq W$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Si $x \in F$, entonces $x \in Wx_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Así, $x = wx_i$, donde $w \in W$ y por lo tanto,

$$xVx^{-1} = wx_i V x_i^{-1} w^{-1} \subseteq wWw^{-1} \subseteq W^3 \subseteq U.$$

■

1.10 Proposición. *Sean G un grupo topológico, F un subconjunto compacto de G y U un subconjunto abierto de G tales que $F \subseteq U$. Entonces existe una vecindad V de e tal que $(VF) \cup (FV) \subseteq U$. Además, si G es localmente compacto, entonces V puede ser elegida de tal manera que $\overline{(VF) \cup (FV)}$ es compacto.*

Demostración. Para cada $x \in F$, por Teorema 1.4 existen vecindades V_x, W_x de e tales que $xW_x \subseteq U$ y $V_x^2 \subseteq W_x$. Por la compacidad de F, existen elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}$. Consideremos al abierto no vacío $V_1 = \bigcap_{i=1}^n V_i$. Entonces,

$$FV_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i} V_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i V_{x_i}^2 \subseteq \bigcup_{i=1}^n x_i W_{x_i} \subseteq U.$$

Análogamente, existe una vecindad V_2 de e tal que $V_2 F \subseteq U$. Tomemos ahora la vecindad $V = V_1 \cap V_2$ de e y así, $(VF) \cup (FV) \subseteq U$.

Si G es localmente compacto, el Corolario 1.7 nos permite tomar V de tal manera que $\overline{V}$ sea compacto. Por la Proposición 1.2, $F\overline{V}$ y $\overline{V}F$ son cerrados y compactos. Note ahora que FV es un subconjunto de $F\overline{V}$, que es cerrado. Así, $\overline{FV}$ es compacto y análogamente $\overline{VF}$ también lo es. Por tanto, $\overline{(VF) \cup (FV)}$ es compacto. ■

1.11 Proposición. *Sean A y B subconjuntos de un grupo topológico G. Entonces:*

(a) $(\overline{A})(\overline{B}) \subseteq \overline{AB}$.

(b) $\overline{(A^{-1})} = (\overline{A})^{-1}$.

(c) $\overline{xAy} = x\overline{A}y$ *para cada* $x, y \in G$.

Demostración. (a) Sean $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{B}$ y U una vecindad de e. Por la continuidad de la función multiplicación, existe una vecindad V de e tal que $(xV)(yV) \subseteq xyU$. Como xV y yV son vecindades de x y y, respectivamente, existen $a \in A \cap (xV)$ y $b \in B \cap (yV)$. Así, $ab \in (AB) \cap (xyU)$ y finalmente, $xy \in \overline{AB}$.

(b) Como la función $g \mapsto g^{-1}$ es un homeomorfismo, se sigue que $A^{-1} \subseteq (\overline{A})^{-1}$ y por tanto $\overline{(A^{-1})} \subseteq \overline{(\overline{A})^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$. Por otro lado, si $g \in (\overline{A})^{-1}$, es decir, si $g^{-1} \in (\overline{A})$, entonces cada vecindad U de g^{-1} intersecta a A. Esto implica que U^{-1} intersecta a A^{-1}. Ahora como U es vecindad de g si y sólo si U^{-1} es vecindad de g^{-1}, se tiene que $g \in \overline{A^{-1}}$.

(c) Es análogo al inciso (a) por el hecho de que la función $g \mapsto xgy$ es un homeomorfismo de G. ■

1.12 Corolario. *Si H es un subgrupo o subgrupo normal de un grupo topológico G, entonces $\overline{H}$ es un subgrupo o subgrupo normal, respectivamente, de G.*

Demostración. Se H es un subgrupo de G. Entonces $H^2 \subseteq H$ y por el inciso (a) de la Proposición 1.11, $(\overline{H})^2 \subseteq \overline{H^2} \subseteq \overline{H}$. También se tiene que $H^{-1} \subseteq H$ y por el inciso (b) de la misma proposición, $\overline{H^{-1}} = \overline{H}^{-1} \subseteq \overline{H}$. La prueba para el subgrupo normal se usa el inciso (c) de la misma proposición. ■

1.13 Proposición. *Sea $H \leqslant G$. Entonces:*

(a) H es abierto sí y sólo si el interior de H, denotado con $int(H)$, es no vacío.

(b) Si H es abierto entonces también es cerrado.

Demostración. (a) La condición suficiente es trivial. Supongamos ahora que existe $x \in int(H)$. Entonces existe una vecindad $U \in \mathcal{U}(e)$ tal que $xU \subseteq H$. Ahora para cada $y \in H$, tenemos que

$$yU = yx^{-1}xU \subseteq yx^{-1}H = H.$$

(b) Si H es abierto, entonces xH es abierto para cada $x \in G$. Por tanto $H' = \bigcup\{xH : x \notin H\}$ es abierto. Note que H' coincide con $G \setminus H$. Así, H es cerrado. ■

1.14 Proposición. *Un subgrupo H de un grupo topológico G es discreto si y sólo si H contiene un punto aislado.*

Demostración. Si H es discreto, por definición todos sus puntos son aislados. Supongamos ahora que x es un punto aislado de H respecto a la topología relativa a H. Entonces existe una vecindad U de e, en la topología de G, tal que $(xU) \cap H = \{x\}$. Además, para cada $y \in H$ se tiene que

$$(yU) \cap H = (yU) \cap (yx^{-1}H) = yx^{-1}((xU) \cap H) = \{y\}.$$

Por tanto, cada punto de H es aislado y así, H es discreto. ■

1.15 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G tal que $\overline{U} \cap H$ es cerrado en G para alguna vecindad U de e. Entonces H es cerrado.*

Demostración. Sea U una vecindad de e tal que $\overline{U} \cap H$ es cerrado en G. Sea V una vecindad simétrica de e en G tal que $V^2 \subseteq U$. Ahora sea $x \in H$ y $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ una red de elementos de H, donde D es un conjunto dirigido, tal que x_α converge a x. Como xV es vecindad de x, existe $\alpha_0 \in D$ tal que $x_\alpha \in xV$ para toda $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$. Ahora, $x^{-1} \in \overline{H}$ por el Corolario 1.12 y por tanto, existe $y \in (Vx^{-1}) \cap H$. Así, para $\alpha \succcurlyeq \alpha_0$ se tiene que $yx_\alpha \in (Vx^{-1})(xV) = V^2 \subseteq U$, lo que implica que $yx_\alpha \in \overline{U} \cap H$. Como $\overline{U} \cap H$ es cerrado y la red yx_α converge a yx, entonces $yx \in \overline{U} \cap H \subseteq H$. Por lo tanto, $x = y^{-1}yx \in H$, es decir, $\overline{H} \subseteq H$. ■

1.16 Proposición. *Sea G un grupo T_0 y H un subgrupo discreto de G en su topología relativa. Entonces H es cerrado.*

Demostración. Sea U una vecindad de $e \in G$ tal que $U \cap H = \{e\}$. Por el Corolario 1.6, existe una vecindad V de e tal que $\overline{V} \subseteq U$. Así, $\overline{V} \cap H = \{e\}$ que es cerrado pues G es Hausdorff (Teorema 1.8). Entonces por la Proposición 1.15, H es cerrado. ■

1.17 Teorema. *Sea G un grupo T_0 y H un subgrupo de G que es localmente compacto en su topología relativa. Entonces H es cerrado.*

Demostración. Sea U una vecindad de e en G tal que $\overline{U} \cap H$ es compacto en H, y por tanto en G. Como G es Hausdorff (Teorema 1.8), $\overline{U} \cap H$ es cerrado en G. Por la Proposición 1.15, H es cerrado. ■

Una observación que se puede verificar rápidamente es que si $U \in \mathcal{U}(e)$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty}(U \cup U^{-1})^n$ es un subgrupo abierto de G y por la Proposición 1.13, también es cerrado. Aprovechando la notación, diremos que un grupo topológico G es ***compactamente generado*** si existe un subconjunto compacto F de G que lo genera, es decir, si $G = \{e\} \bigcup_{n=1}^{\infty}(F \cup F^{-1})^n$. Se tienen entonces las siguientes proposiciones.

1.18 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces son equivalentes:*

(*a*) *G es compactamente generado.*

(*b*) *Existe $U \subseteq G$ tal que $\overline{U}$ es compacto y genera a G.*

(*c*) *Existe $U \in \mathcal{U}(e)$ tal que $\overline{U}$ es compacto y genera a G.*

Demostración. Claramente (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (c) Supongamos que G es compactamente generado. Existe un subconjunto compacto F de G que genera a G. Note que $F \cup \{e\}$ también es compacto. Por la Proposición 1.10, se pueden escoger a los abiertos $V \in \mathcal{U}(e)$ y $U = (V(F \cup \{e\})) \cup ((F \cup \{e\})V)$ tales que $\overline{U}$ es compacto. Ahora es claro que $e \in U$ y $\overline{U}$ genera a G. ■

1.19 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto y F un subconjunto compacto de G. Entonces hay un subgrupo H de G que es abierto, cerrado y compactamente generado tal que $F \subseteq H$.*

Demostración. Al igual que en la demostración de la Proposición 1.18, consideremos a los abiertos $V \in \mathcal{U}(e)$ y $U = (V(F \cup \{e\})) \cup ((F \cup \{x\})V)$ tales que $\overline{U}$ es compacto. Considere ahora al subgrupo abierto, y por tanto cerrado por la Proposición 1.13,

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (U \cup U^{-1})^n.$$

Note que por el hecho de que H es cerrado junto con el resultado de la Proposición 1.11, se tiene que $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{U} \cup \overline{U}^{-1})^n$. Por lo tanto, H es compactamente generado y $F \subseteq H$. ■

A continuación trabajaremos con el espacio cociente de G por un subgrupo H y enunciaremos algunos resultados consecuencia de la teoría de grupos. Consideremos la ***proyección canónica*** $\pi : G \longrightarrow G/H$, que a cada elemento $x \in G$ lo manda a la clase $\{xH\}$. Se introduce al espacio cociente la topología $\Theta(G/H)$ que es tal que

$$\{uH : u \in U\} \in \Theta(G/H) \text{ si y sólo si } UH \text{ es abierto en } G.$$

Es fácil ver que bajo esta topología, π es abierta y continua. También si $a \in G$, nos apoyaremos en la función

$$\begin{aligned} \psi_a : G/H &\longrightarrow G/H, \\ (xH) &\mapsto (axH). \end{aligned}$$

Dado el hecho que $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$, se deduce que ψ_a es un homeomorfismo del espacio G/H. La función π no necesariamente es cerrada y en la próxima proposición veremos bajo qué condiciones lo es.

1.20 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo compacto de G. Entonces la proyección canónica π es cerrada.*

Demostración. Sea A un subconjunto cerrado de G. Veremos que el complemento de $\pi(A)$ es abierto en G/H. Considere un elemento $x \in G$ tal que $xH \notin \pi(A)$; entonces $x \notin AH$. Como AH es cerrado en G por la Proposición 1.2, existe una vecindad abierta U de x tal que $U \cap (AH) = \emptyset$. Así, $\pi(U) = \{uH : u \in U\}$ es una vecindad abierta de xH en G/H y es tal que $\pi(U) \cap \pi(A) = \emptyset$. Por lo tanto, $\pi(A)$ es cerrado en G/H. ■

1.21 Proposición. *Sean G un grupo topológico, H un subgrupo de G y $U, V \in \mathcal{U}(e)$ tales que $V^{-1}V \subseteq U$. Entonces $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$.*

Demostración. Sea $xH \in \overline{\pi(V)} \subseteq G/H$. Note que el abierto $\{vxH : v \in V\}$ es vecindad de xH y por tanto su intersección con $\pi(V)$ es no vacía, es decir, existen $v, w \in V$ tales que $vxH = wH$. Consecuentemente,

$$xH = v^{-1}wH \in \{yH : y \in V^{-1}V\} \subseteq \{uH : u \in U\}.$$

■

1.22 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Entonces:*

(*a*) *G/H es discreto si y sólo si H es abierto en G.*

(*b*) *Si H es cerrado entonces G/H es regular.*

(*c*) *Si G/H es espacio T_0 entonces H es cerrado.*

Demostración. (a) Si G/H es discreto, es claro que H es abierto en G pues π es continua. Si suponemos que H es abierto en G entonces aH es abierto en G para cada $a \in G$. Entonces G/H es discreto por el hecho de que π es abierta.

(b) Si H es cerrado, entonces aH es cerrado para cada $a \in G$. Ahora fije $a \in G$ y note que el conjunto $(aH)' = \bigcup\{xH : xH \neq aH\}$ es abierto en G y por ser π abierta, se deduce que $\{aH\}$ es cerrado en G/H. Así, G/H es un espacio T_1. Ahora tomando vecindades $U, V \in \mathcal{U}(e)$ tales que $V^{-1}V \subseteq U$, se obtiene $\overline{\pi(V)} \subseteq \pi(U)$ (Proposición 1.21), y por tanto $\overline{\pi(aV)} \subseteq \pi(aU)$. Así, por definición de $\Theta(G/H)$, G/H es un espacio T_3.

(c) Ahora supongamos que G/H es un espacio T_0. Veremos que G/H es de hecho un espacio Hausdorff. Sean $aH, bH \in G/H$ tales que $aH \neq bH$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}(e)$ tal que $aH \in \pi(aU)$ y $bH \notin \pi(aU)$. Por la Proposición 1.21, existe $V \in \mathcal{U}(e)$ tal que $\overline{\pi(aV)} \subseteq \pi(aU)$. Entonces $\pi(aV)$ y $(G/H) \setminus \overline{\pi(aV)}$ son dos abiertos ajenos en G/H y cumplen que $aH \in \pi(aV)$ y $bH \in (G/H) \setminus \overline{\pi(aV)}$. Así, G/H es T_2 que implica T_1. Consecuentemente $H = \pi^{-1}(\{H\})$ es cerrado en G. ■

1.23 Lema. *Sea X un espacio topológico que tiene la propiedad de que para cada $x \in X$ y cada vecindad U de x, existe una vecindad V de x tal que $\overline{V} \subseteq U$. Entonces:*

(a) La clausura de un subconjunto compacto de X es compacta.

(b) Si f es una función continua de un espacio topológico Y a X, se tiene que si $A \subseteq Y$ tiene clausura compacta, entonces $f(A)$ también tiene clausura compacta.

Demostración. (a) Sea A un subconjunto compacto de X. Para mostrar que $\overline{A}$ es compacto, basta ver que toda cubierta abierta de A también es cubierta para $\overline{A}$. Tómese una cubierta abierta $\mathcal{V}$ para A. Considere al abierto $W = \bigcup\{V : V \in \mathcal{V}\}$. Por hipóstesis, para cada $x \in A$ existe una vecindad V_x de x tal que $\overline{V_x} \subseteq W$. Por compacidad de A, existen $x_0, \ldots, x_n$ tales que $A \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} V_{x_i}$. Esto implica que

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{i=0}^{n} \overline{V_{x_i}} \subseteq W.$$

Así, $\overline{A}$ es cubierto por $\mathcal{V}$.

(b) Sea $A \subseteq Y$ tal que $\overline{A}$ es compacto. Entonces $f(\overline{A})$ es compacto y por (a), $\overline{f(\overline{A})}$ también es compacto. Como $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})}$, entonces $\overline{f(A)}$ es compacto. ■

1.24 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto y H un subgrupo de G. Entonces G/H es localmente compacto.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema 1.2 y la Proposición 1.4, para cada $U \in \mathcal{U}(e)$ siempre es posible encontrar $V \in \mathcal{U}(e)$ tal que $VV^{-1} \subseteq U$. Sea $x \in G$. Por la Proposición 1.21, $\overline{\pi(xV)} \subseteq \pi(xU)$. Así, G/H cumple con las hipótesis del Lema 1.23. Sean $W \in \mathcal{U}(e)$ con $\overline{W}$ compacta y $aH \in G/H$, entonces $aH \in \pi(aW)$ y $\overline{\pi(aW)}$ es compacto por inciso el (b) del Lema 1.23. Así, G/H es localmente compacto. ■

1.25 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Sea $U \in \mathcal{U}(e)$ simétrica tal que $(\overline{\overline{U}^3}) \cap H$ es compacto. Supongamos que $\{xH : x \in X\}$ es cerrado y compacto con $\{xH : x \in X\} \subseteq \{uH : u \in U\}$. Entonces $\overline{U} \cap (XH)$ es cerrado y compacto en G.*

Demostración. Considere la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Entonces $XH = \pi^{-1}(\{xH : x \in X\})$ es cerrado pues π es continua. Por tanto, $\overline{U} \cap (XH)$ es cerrado en G. Ahora supongamos que $\overline{U} \cap (XH)$ no es compacto, entonces existe una red $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ de elementos de $\overline{U} \cap (XH)$, donde D es un conjunto dirigido, tal que ninguna subred converge a algún punto de $\overline{U} \cap (XH)$. Ahora como $\overline{U} \cap (XH)$ es cerrado, se sigue que

$$(\forall a \in G)(x_\beta \nrightarrow a), \tag{1.1}$$

donde $\{x_\beta : \beta \in E\}$ es cualquier subred de $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$.

Por otro lado, $x_\alpha H \in \{xH : x \in X\}$, y por su compacidad, existen $x_0 \in X$ y una subred $\{x_\beta : \beta \in E\}$ tales que $x_\beta H$ converge a $x_0 H$ en la topología de G/H.

Por hipótesis, $x_0 H = u_0 H$ para algún $u_0 \in U$. Hagámos $A = (\overline{\overline{U}^3})$. Por la fórmula (1.1), es claro que x_β no tiene subred que converja a algún punto de $u_0(A \cap H)$, es decir, ningún punto de $u_0(A \cap H)$ es punto de acumulación. Así que para cada $x \in u_0(A \cap H)$ existen $U_x \in \mathcal{U}(e)$ y $\beta_x \in E$ tales que si $\beta \succcurlyeq \beta_x$, entonces

$$x_\beta \notin U_x x. \tag{1.2}$$

También por el Teorema 1.4, para cada $x \in u_0(A \cap H)$ existe $V_x \in \mathcal{U}(e)$ tal que $V_x^2 \subseteq U_x$. Como $u_0(A \cap H)$ es compacto por hipótesis, existen $x_1, \ldots x_n \in u_0(A \cap H)$ tales que

$$u_0(A \cap H) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} x_i. \tag{1.3}$$

Tómese una vecindad simétrica V de e tal que $V \subseteq (\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}) \cap U$. Note que $\{vu_0 H : v \in V\}$ es vecindad de $u_0 H$ en el espacio G/H. Por lo tanto, existe $\beta_0 \in E$ tal que si $\beta \succcurlyeq \beta_0$, entonces $x_\beta H \in \{vu_0 H : v \in V\}$. Sea $\gamma \in E$ tal que $\gamma \succcurlyeq \beta_0$ y $\gamma \succcurlyeq \beta_{x_i}$ para toda $i = 1 \ldots n$. Entonces existe $v \in V$ tal que $x_\gamma H = vu_0 H$ y así,

$$h = u_0^{-1} v^{-1} x_\gamma \in UV\overline{U} \subseteq \overline{U}^3 \subseteq A.$$

Esto implica que $u_0 h \in u_0(A \cap H)$. Dada la contención de (1.3), existe $k \in \{1, 2 \ldots n\}$ tal que

$$x_\gamma = vu_0 h \in VV_{x_k} x_k \subseteq V_{x_k}^2 x_k \subseteq U_{x_k} x_k,$$

pero esto es imposible por la elección de γ y la relación (1.2). ■

Observe que si en la Proposición 1.25 suponemos que H es compacto y tomamos $U = G$, entonces si $\{xH : x \in X\}$ es compacto en G/H, se tiene que XH es compacto en G.

1.26 Proposición. *Si G es localmente compacto y el subconjunto $\{yH : y \in Y\}$ de G/H es cerrado y compacto, entonces existe un subconjunto F de G cerrado y compacto tal que $\{yH : y \in Y\} = \{xH : x \in F\}$.*

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}(e)$ tal que $\overline{U}$ es compacto (Corolario 1.7). Entonces $\{\pi(gU) : g \in G\}$ es una cubierta abierta para G/H. Por compacidad de $\{yH : y \in Y\}$, existen $g_0, \ldots, g_n$ tales que $\{yH : y \in Y\} \subseteq \bigcup_{i=0}^n \pi(g_i U)$. Tomando

$$F = (\textstyle\bigcup_{i=0}^n \overline{g_i U}) \cap \pi^{-1}(\{yH : y \in Y\}),$$

entonces F es cerrado, compacto y cumple con la igualdad requerida. ■

1.27 Proposición. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo de G. Si H y G/H son compactos, entonces G es compacto. Si H y G/H son localmente compactos, entonces G es localmente compacto.*

Demostración. Suponer que H y G/H son compactos. Tomando $U = X = G$ y aplicando la Proposición 1.25, obtenemos que $G = \overline{G} \cap H$ es compacto.

Supongamos ahora que H y G/H son localmente compactos. Sea V una vecindad simétrica de e en G tal que $\overline{V} \cap H$ es compacto. Considere una vecindad simétrica U de e tal que $\overline{U}^3 \subseteq V$ (vea los resultados de las proposiciones 1.4, 1.5 y 1.6). Claramente $\overline{(\overline{U})^3 \cap H}$ es compacto. Sea W una vecindad de e tal que $\overline{\{xH : x \in W\}}$ es compacto en G/H. Por Proposición 1.21, existe una vecindad W_0 de e en G tal que $\overline{\pi(W_0)} \subseteq \pi(U)$, es decir,

$$\overline{\{xH : x \in W_0\}} \subseteq \{uH : u \in U\}.$$

Considere un subconjunto X de G para el cual

$$\{xH : x \in X\} = \overline{\{xH : x \in W \cap W_0\}}.$$

Claramente $\{xH : x \in X\}$ es compacto en G/H y

$$\{xH : x \in X\} \subseteq \overline{\{xH : x \in W_0\}} \subseteq \{xH : x \in U\}.$$

Por la Proposición 1.25, $\overline{U} \cap (XH)$ es compacto y cerrado en G. Además,

$$e \in U \cap ((W \cap W_0)H) \subseteq \overline{U} \cap (XH).$$

Así, e tiene una vecindad con clausura compacta, es decir, G es localmente compacto. ■

1.28 Observación. Podemos considerar el hecho de que H sea un subgrupo normal de G. Aplicando el Teorema 1.4 a la familia de conjuntos $\Theta(G/H)$, es posible ver que el espacio G/H es un grupo topológico con la topología $\Theta(G/H)$. Así, la función continua y abierta $\pi : G \longrightarrow G/H$ resulta ser también un homomorfismo de grupos topológicos.

También nos favorecerá trabajar con funciones entre grupos topológicos que por su estructura algebráica, podemos utilizar resultados de la teoría de grupos.

1.29 Definición. Sean $G, \widetilde{G}$ dos grupos topológicos y $f : G \longrightarrow \widetilde{G}$ una función que es un isomorfismo y un homeomorfismo. Entonces diremos que f es un ***isomorfismo topológico*** entre G y $\widetilde{G}$. También diremos que $G, \widetilde{G}$ son ***topológicamente isomorfos*** si existe un isomorfismo topológico entre ellos.

Si $G, \widetilde{G}$ son dos grupos topológicos y $f : G \longrightarrow \widetilde{G}$ es un homomorfismo continuo y abierto con $H = f^{-1}(\widetilde{e}) = Ker(f)$, entonces es fácil darse cuenta que $H \lhd G$ y $f^{-1}(\widetilde{x})$ son exactamente las clases de H en G. Note que por el Primer Teorema de Isomorfismo, la función $\Phi : \widetilde{G} \longrightarrow G/H$ dada por

$\widetilde{x} \mapsto f^{-1}(\widetilde{x})$ es un isomorfismo y más aun, como f es abierto y continuo, Φ es un isomorfismo topológico.

Ahora diremos que un espacio X es ***numerablemente compacto de manera local*** (NCL), si para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}(x)$ tal que $\overline{U}$ es ***numerablemente compacto*** (NC). También, un grupo D es ***divisible*** si $D^{(n)} = D$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 1$. Denotaremos por G^0 al grupo trivial.

1.30 Proposición. *Sea X un espacio T_3 y NCL. Entonces X no es la unión numerable de subconjuntos cerrados con interior vacío.*

Demostración. Supongamos que X sí es de la forma $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, donde A_n es cerrado y $int(A_n) = \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Si $D_n = X \setminus A_n$, entonces D_n es denso y abierto en X para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomemos ahora un abierto $U_0 \subseteq D_0$ tal que $\overline{U}_0$ es NC. Por regularidad de X, existe un abierto no vacío $U_1 \subseteq X$ tal que $\overline{U}_1 \subseteq U_0 \cap D_1$ y recursivamente podemos tomar un abierto no vacío $U_n \subseteq X$ tal que $\overline{U}_n \subseteq U_{n-1} \cap D_n$. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \subseteq U_n$.

1.30.1 Afirmación. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U}_n \neq \emptyset$.

Si la intersección fuera vacía, entonces $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X \setminus \overline{U}_n$ y como $\overline{U}_0$ es NC, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{U}_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} X \setminus \overline{U}_{n_i} \subseteq X \setminus \overline{U}_{n_k},$$

contradiciendo la construcción de los U_n. Por tanto,

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{U}_n \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} D_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} X \setminus A_n,$$

lo cual implica que $X \neq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. ■

1.31 Proposición. *Sea G un grupo localmente compacto y σ-compacto, es decir, G es de la forma $G = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, con A_n compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Sean $\widetilde{G}$ un grupo T_0 y NCL y $f : G \to \widetilde{G}$ un homomorfismo continuo y suprayectivo. Entonces f es abierto.*

Demostración. Supongamos en esta demostración que $\mathcal{U}(e), \widetilde{\mathcal{U}}(\widetilde{e})$ denotan un sistema de vecindades simétricas para las identidades $e \in G$ y $\widetilde{e} \in \widetilde{G}$, respectivamente. Suponer también que para cada $U \in \mathcal{U}(e)$ existe $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathcal{U}}(\widetilde{e})$ tal que

$$\widetilde{U} \subseteq f(U). \tag{1.4}$$

Lo que nos indica (1.4), es que f es abierta en vecindades de e. Pero por homogeneidad de G, f será abierta en todo G y con esto quedaría demostrada la proposición. Procedamos entonces a probar (1.4).

Sean $U, V \in \mathcal{U}(e)$ tales que $\overline{V}$ es compacto y

$$(\overline{V})^{-1}\overline{V} \subseteq U. \tag{1.5}$$

Esto es posible por el Teorema 1.4 y el Corolario 1.6. Entonces $\{gV : g \in G\}$ es una cubierta abierta para G. Dado que G es σ-compacto, existen elementos $g_n \in G$ con $n \in \mathbb{N}$, tales que

$$G = \bigcup_{n=0}^{\infty} g_n V = \bigcup_{n=0}^{\infty} g_n \overline{V}.$$

Lo anterior es cierto pues los conjuntos compactos A_n son cubiertos por sólo una cantidad finita de conjuntos de la forma gV, donde $g \in G$. Ahora por ser f homomorfismo suprayectivo, se sigue que

$$\widetilde{G} = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(g_n \overline{V}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(g_n) f(\overline{V}).$$

Como cada $g_n\overline{V}$ es compacto, entonces $f(g_n)f(\overline{V})$ es compacto y es cerrado pues $\widetilde{G}$ es un espacio T_0 y por tanto Hausdorff por la Proposición 1.8. Además, $int(f(\overline{V})) \neq \emptyset$ pues de lo contrario G sería la unión de subconjuntos cerrados con interior vacío pero por la Proposición 1.30, esto es imposible.

Consideremos al abierto $int(f(\overline{V})) = \widetilde{V} \subseteq \widetilde{G}$. Tómese ahora $\widetilde{x} \in \widetilde{V}$ y $x \in f^{-1}(\widetilde{x}) \cap \overline{V}$. Por la relación (1.5) se tiene que $e \in x^{-1}\overline{V} \subseteq U$ y así,

$$\widetilde{x}^{-1}\widetilde{V} = \widetilde{x}^{-1} f(\overline{V}) \subseteq (f(x))^{-1} f(\overline{V}) = f(x^{-1}) f(\overline{V}) = f(x^{-1}\overline{V}) \subseteq f(U).$$

■

1.32 Proposición. *Sean H un subgrupo normal de G y A cualquier subgrupo de G. Considere al isomorfismo inducido por el Segundo Teorema de Isomorfismo*

$$\begin{aligned} \varphi : (AH)/H &\to A/(A \cap H), \\ aH &\mapsto a(A \cap H). \end{aligned}$$

Entonces φ es abierta.

Demostración. Un subconjunto abierto de $(AH)/H$ es de la forma $\{xH : x \in X\}$, donde $X \subseteq A$, tal que XH es abierto en AH como subespacio de G. Note que $\varphi(\{xH : x \in X\}) = \{x(A \cap H) : x \in X)\}$ y como $X(A \cap H) = A \cap (XH)$, se sigue que $X(A \cap H)$ es abierto en A como subespacio de G. Por tanto, $\{x(A \cap H) : x \in X\}$ es abierto en $A/(A \cap H)$. ■

1.33 Proposición. *En las hipótesis de la Proposición 1.32, supóngase además que A es localmente compacto y σ-compacto, H cerrado y AH localmente compacto. Entonces φ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Por la Proposición 1.32, sólo basta ver que φ es continua. Consideremos la proyección natural restringida al subgrupo A de G,

$$\pi \restriction_A : A \to (AH)/H.$$

Como AH es localmente compacto y H es cerrado, entonces por las proposiciones 1.22 y 1.24, AH/H es un grupo topológico regular localmente compacto y junto con la Proposición 1.31, se tiene que $\pi \restriction_A$ es un homomorfismo continuo y abierto de A a AH/H.

Ahora sea $\{y(A \cap H) : y \in Y\}$ abierto en $A/(A \cap H)$ con $Y \subseteq A$, es decir, $Y(A \cap H)$ es abierto en A. Entonces $\pi \restriction_A (Y(A \cap H)) = \{yH : y \in Y\}$ es abierto en AH/H. Por otro lado, $\varphi^{-1}(\{y(A \cap H) : y \in Y\}) = \{yH : y \in Y\}$ y así, φ es continua y por tanto un isomorfismo topológico. ■

1.34 Proposición. *Sea $f : G \to \widetilde{G}$ un homomorfismo abierto, continuo y suprayectivo entre grupos topológicos. Sean $\widetilde{H} \lhd \widetilde{G}$, $H = f^{-1}(\widetilde{H})$ y $N = f^{-1}(\widetilde{e})$. Entonces G/H, $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ y $(G/N)/(H/N)$ son topológicamente isomorfos.*

Demostración. Sabiendo que la proyección canónica $\pi : \widetilde{G} \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$ es un homomorfismo continuo y abierto, se tiene que $\pi \circ f : G \to \widetilde{G}/\widetilde{H}$ también es un homomorfismo continuo, suprayectivo y abierto con $ker(\pi \circ f) = H$. Por tanto, G/H y $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ son topológicamente isomorfos. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, la función $\Phi : \widetilde{G} \to G/N$ dada por $\widetilde{x} \mapsto f^{-1}(\widetilde{x})$ es un isomorfismo topológico y la imagen de $\widetilde{H}$ bajo Φ es H/N. Por lo tanto, $\widetilde{G}/\widetilde{H}$ y $(G/N)/(H/N)$ son isomorfos de manera topológica. ■

1.35 Proposición. *Sea H un subgrupo compacto normal de G y G/H compactamente generado, entonces G es compactamente generado.*

Demostración. Sea $\{xH : x \in X\}$ un subconjunto compacto que genera a G/H. Por la observación después de la Proposición 1.25 se tiene que XH es compacto en G. Así, $(XH) \cup H$ también es compacto y genera a G pues la proyección canónica π es un homomorfismo suprayectivo. ■

1.36 Proposición. *Sea H un subgrupo de un grupo abeliano G. Si $h_0 : H \to D$ es un homomorfismo, donde D es un grupo abeliano divisible, entonces h_0 se puede extender a un homomorfismo h sobre todo G. Además, si $a \in G \setminus H$ y D contiene elementos con orden arbitrario, entonces la extensión se puede realizar de tal forma que $h(a) \neq 0 \in D$.*

Demostración. Sea H_1 el subgrupo de G generado por $H \cup \{a\}$. Claramente, $H_1 = \{g + na : g \in H, n \in \mathbb{Z}\}$. Dos casos son posibles:

(I) Existe un entero positivo n tal que $na \in H$.

(II) $na \notin H$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, con $n \neq 0$.

En el caso (I), sea $m = min\{n \in \mathbb{N} : na \in H\}$. Entonces para cada entero n que cumple que $na \in H$, m divide a n. Como $a \notin H$, $m > 1$. Elíjase un elemento $d \in D$ con $md = h_0(ma)$. Esto es posible pues D es divisible. Además, si D contiene elementos de arbitrarios órdenes, entonces podemos asumir que $d \neq 0 \in D$. Ahora para $g + na \in H_1$, definimos

$$h_1(g + na) = h_0(g) + nd.$$

Para ver que $h_1 : H_1 \to D$ está bien definida, consideremos dos representaciones $g_1 + n_1 a = g_2 + n_2 a$ de un elemento en H_1. Por la elección de m, $(n_2 - n_1)a = g_1 - g_2 \in H$ implica que m divide a $n_2 - n_1$. Entonces $n_2 - n_1 = km$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Así,

$$(n_2 - n_1)d = kmd = kh_0(ma) = h_0(n_2 a - n_1 a),$$

pues h_0 es un homomorfismo. Así, las igualdades

$$\begin{aligned} h_0(g_2) + n_2 d &= h_0(g_2) + h_0(n_2 a - n_1 a) + n_1 d \\ &= h_0(g_2 + n_2 a - n_1 a) + n_1 d = h_0(g_1) + n_1 d \end{aligned}$$

muestran que h_1 está bien definida. También es claro ver que h_1 es un homomorfismo. Si D contiene elementos de orden arbitrario, entonces $h_1(a) = d \neq 0 \in D$.

Para el caso (II), tomemos un elemento no trivial arbitrario $d \in D$. Definiendo h_1 como antes, sigue siendo un homomorfismo de H_1 a D. En este caso, h_1 está bien definida por el hecho de que cada elemento de H_1 tiene una única representación como una suma $g+na$, donde $g \in H$ y $n \in \mathbb{Z}$.

De esta manera, el homomorfismo h_0 se ha extendido al subgrupo más grande H_1. Ahora, si G es generado por H y un subconjunto numerable de G, la prueba se puede realizar por inducción usando la construcción de h_1. O de cualquier manera, en un caso general, podemos aplicar el Lema de Zorn. ■

1.2 ⧫ El grupo dual

De ahora en adelante supondremos que todo grupo es un espacio T_0, y por lo tanto Hausdorff en virtud de la Proposición 1.8. También es de nuestro interés trabajar con los espacios cociente de la forma G/H, y más aún, queremos que estos espacios sean grupos topológicos. La Observación 1.28 nos sugiere que estos grupos son topológicos cuando el subgrupo H es normal en el grupo topológico G. Note que si G es abeliano, el papel que juega la normalidad de un subgrupo es indistinto al de cualquier otro. Es por ello que asumiremos siempre, o en la mayoría de los casos, que todo grupo es abeliano.

Por otro lado, en esta sección nos vamos a familiarizar con la notación que se usará en los capítulos posteriores de esta tesis. Consideremos al conjunto $\mathbb{T}$ que consiste de aquellos elementos en $\mathbb{C}$ cuyo módulo es 1, es decir, el circulo unitario. Note que $\mathbb{T}$ es un grupo abeliano divisible con el producto de los complejos. Si G es un grupo, denotamos por G^* al grupo de todos los homomorfismos de G a $\mathbb{T}$. A un elemento de G^* lo llamaremos ***caracter***. El ***caracter trivial***, es decir, aquel caracter que a todo G lo manda al $1 \in \mathbb{C}$ será denotado por ϵ_1.

Sea Y un espacio topológico, X un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de X. Para $F \in \mathcal{F}$ y un subconjunto abierto U de Y, denotamos por $W_{X,Y}(F,U)$ el conjunto de todas las funciones $f : X \to Y$ tales que $f(F) \subseteq U$. La familia

$$\{W_{X,Y}(F,U) : F \in \mathcal{F}, U \text{ abierto en } Y\}$$

es una subbase para una topología $\tau_{\mathcal{F}}$ del producto Y^X, la cual es llamada ***topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos de*** $\mathcal{F}$.

Si $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subconjuntos finitos de X, $\tau_{\mathcal{F}}$ es la llamada ***topología de la convergencia puntual***. Si $X \in \mathcal{F}$, $\tau_{\mathcal{F}}$ es la ***topología de la convergencia uniforme***. Si X es también un espacio topológico y $\mathcal{F}$ es la familia de todos los subconjuntos compactos de X, entonces $\tau_{\mathcal{F}}$ es la famosa ***topología compacto-abierta***.

Para un grupo topológico abeliano G, se denotará por $\widehat{G}$ al grupo de todos los homomorfismos continuos de G a $\mathbb{T}$, con la composición como operación y dotado con la topología compacto-abierta. En el contexto de grupos topológicos, a la topología compacto-abierta también se le conoce como ***topología de Pontryagin*** o ***P-topología***. Bajo este mismo contexto, a los conjuntos $W_{G,\mathbb{T}}(K,U)$ los denotaremos por $W_G(K,U)$, e incluso si no hay confusión como $W(K,U)$, donde K es un subconjunto compacto de G y U es un subconjunto abierto de $\mathbb{T}$.

Es claro que $\widehat{G}$ es un subgrupo del grupo G^*, cuando G es un grupo topológico. En particular, $\widehat{G} = G^*$ cuando G es discreto. Además, el útil Teorema 1.4 permite que la P-topología sea una topología de grupo para $\widehat{G}$ y por tanto, $\widehat{G}$ es un grupo topológico. A $\widehat{G}$ se le llama el ***grupo de Pontryagin*** o ***grupo dual*** de G. Entonces siempre dotaremos a $\widehat{G}$ con la topología compacto-abierta.

Dependiendo del contexto y la facilidad para manipular la notación, será conveniente (en ocasiones) escribir a los conjuntos $W_G(K,U)$, donde K es un subconjunto compacto de G y U es una vecindad abierta de $1 \in \mathbb{T}$, como

$$W_G(K,\varepsilon) = \{\chi \in \widehat{G} : |Arg(\chi(x))| < \varepsilon, x \in K\},$$

para algún real positivo ε. Así, $W_G(K, \frac{\pi}{2})$ es una vecindad de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$. También para fines prácticos, para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k \geqslant 1$, definimos a

$$\Lambda_k = \left\{ t \in \mathbb{T} : |Arg(t)| < \frac{\pi}{2k} \right\}.$$

Claramente, ningún conjunto de este estilo contiene subgrupos propios no triviales de $\mathbb{T}$.

1.37 Proposición. *Si G es un grupo abeliano y $x \in G$, con $x \neq 0$, entonces existe $\chi \in G^*$ tal que $\chi(x) \neq 1 \in \mathbb{T}$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de la Proposición 1.36 y el hecho de que $\mathbb{T}$ es un grupo divisible y contiene elementos con arbitrarios órdenes. ■

1.38 Proposición. *(a) Sea $t \in \mathbb{T}$ y $k \in \mathbb{N}$. Entonces $t \in \Lambda_k$ siempre que $t, t^2, \ldots, t^k \in \Lambda_1$.*

(b) Sea G un grupo abeliano. Entonces el caracter $\chi \in G^*$ es continuo si y sólo si $\chi^{-1}(\Lambda_1)$ es una vecindad de $0 \in G$.

(c) La familia de conjuntos $\{W(K, \Lambda_1) : K$ subconjunto compacto de $G\}$ es una base de vecindades de $0 \in G$.

Demostración. (a) Sean $t \in \mathbb{T}$ y $k \in \mathbb{N}$. Note que $|Arg(t^l)| = l|Arg(t)| < \frac{\pi}{2}$ para cada $l = 1, 2, \ldots, k$. Así, $|Arg(t)| < \frac{\pi}{2l}$ con $l = 1, 2, \ldots, k$. Entonces, $t \in \Lambda_k$.

(b) La ida es trivial. Ahora, es claro que los conjuntos Λ_k, con $k \in \mathbb{N}$, forman un sistema de vecindades abiertas de $1 \in \mathbb{T}$. Tomemos entonces una vecindad abierta U de $0 \in G$ tal que $U \subseteq \chi^{-1}(\Lambda_1)$. Queremos ver que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe una vecindad abierta V de $0 \in G$ tal que $V \subseteq \chi^{-1}(\Lambda_k)$. En efecto, por el Teorema 1.4, existe una vecindad abierta V de $0 \in G$ tal que $\underbrace{V + V + \ldots + V}_{k-\text{veces}} \subseteq U$. Es claro entonces que para cada $j = 1, 2, \ldots, k$ y cualquier $v \in V$, $\chi(v)^j \in \Lambda_1$ y por el inciso (a), $\chi(v) \in \Lambda_k$. Así, $V \subseteq \chi(\Lambda_k)$ lo cual muestra que χ es continuo.

(c) Tómese cualquier vecindad $W(K, \Lambda_k)$ de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$, donde K es una vecindad compacta de $0 \in G$ y $k \in \mathbb{N}$. Consideremos al subconjunto compacto $L = \underbrace{K + K + \ldots + K}_{k-\text{veces}}$ de G en virtud de la Proposición 1.2. Sean $\chi \in W(L, \Lambda_1)$ y $x \in K$. Para cada $s = 1, 2, \ldots, k$, $\chi(sx) = \chi^s(x) \in \Lambda_1$ pues $sx \in L$. Nuevamente por el inciso (a), $\chi(x) \in \Lambda_k$, es decir, $W(L, \Lambda_1) \subseteq W(K, \Lambda_k)$. ■

1.39 Proposición. *(a) Si G es un grupo abeliano discreto, entonces su grupo dual $\widehat{G}$ es compacto.*

(b) Si G es un grupo abeliano compacto, entonces $\widehat{G}$ es discreto.

(c) Si G es un grupo abeliano localmente compacto, entonces $\widehat{G}$ es localmente compacto. Más precisamente, si U es una vecindad compacta de $0 \in G$, entonces $W_G(U, \overline{\Lambda}_4)$ es una vecindad compacta de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$.

Demostración. (a) Como G es discreto, entonces $\widehat{G} = G^*$. Ahora note que G^* es un subgrupo cerrado del producto $\mathbb{T}^G$. En efecto, sea $\chi \in \overline{G^*}$ y una red $\{\chi_\alpha : \alpha \in A\}$ de elementos de G^* tal que χ_α converge a χ. Es fácil ver que χ es un homomorfismo, es decir, $\chi \in G^*$.

Ahora la topología compacto-abierta de $\widehat{G}$ coincide con la topología de la convergencia puntual. Así, $\widehat{G}$ es un subgrupo topológico del grupo compacto $\mathbb{T}^G$. Por tanto, $\widehat{G}$ es compacto.

(b) Si G es compacto, entonces $W_G(G, \Lambda_1) = \{\epsilon_1\}$ pues el único subgrupo de $\mathbb{T}$ contenido en Λ_1 es $\{1\} \subseteq \mathbb{T}$. Así, $\widehat{G}$ es discreto.

(c) Supongamos ahora que G es localmente compacto. Sea U una vecindad de $0 \in G$ tal que $\overline{U}$ es compacto. Veremos que $W_0 = W_G(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ es una vecindad compacta de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$. Denotemos por G_d al grupo G equipado con la topología discreta. Entonces $G^* = \widehat{(G_d)}$ es compacto de acuerdo al inciso (a). Ahora, $W = W_{G_d}(\overline{U}, \overline{\Lambda}_4)$ es un subconjunto simétrico cerrado de G^*, así que la topología τ inducida por G^* sobre W es compacta. Además se tiene la contención trivial $W \subseteq W_0$. Por otro lado, $W \subseteq \widehat{G}$ por el inciso (b) de la Proposición 1.38, y así, $W = W_0$.

Ahora sólo basta mostrar que la topología $\mathcal{T}$ inducida por $\widehat{G}$ sobre W coincide con τ. Claramente $\tau \subseteq \mathcal{T}$ pues la topología compacto-abierta es más fina que la topología de la convergencia puntual. Para establecer la otra contención, tomemos un subconjunto compacto arbitrario K de G y $k \in \mathbb{N}$. Debemos mostrar que para cada $\alpha \in W$,

$$W_1 = (\alpha + W_G(K, \Lambda_k)) \cap W$$

es una vecindad abierta de α en (W, τ). Elíjase una vecindad abierta V de $0 \in G$ tal que $2kV \subseteq U$. Entonces si $\xi \in G^*$ satisface $\xi(\overline{U}) \subseteq \overline{\Lambda}_2$, tambien satisface $\xi(V) \subseteq \Lambda_{2k}$ en virtud del inciso (a) de la Proposición 1.38. Dado que K es compacto, existe un subconjunto finito F de G tal que $K \subseteq F + V$. Entonces

$$W_2 = (\alpha + W_{G_d}(F, \Lambda_{2k})) \cap W$$

es una τ-vecindad de α contenida en W_1. En efecto, sea $\chi \in W_2$, es decir, $\chi = \alpha + \xi$ con $\xi \in G^*$, $\xi(F) \subseteq \Lambda_{2k}$ y $\alpha + \xi \in W$. Entonces, $\xi \in W + W$ y por tanto, $\xi(\overline{U}) \subseteq \overline{\Lambda}_2$. Por el comentario antes citado, $\xi(V) \subseteq \Lambda_{2k}$, y así,

$$\xi(K) \subseteq \xi(F + V) \subseteq \Lambda_{2k} + \Lambda_{2k} = \Lambda_k.$$

Como $\xi(V) \subseteq \Lambda_1$, ξ es continuo y finalmente, $\xi \in W_G(K, \Lambda_k)$. ∎

Capítulo 2

Existencia de suficientes caracteres continuos no triviales

El propósito principal de este capítulo es establecer la existencia de caracteres continuos de un grupo topológico localmente compacto que separen puntos de éste. Para ello, en la Sección 2.1 se plantea la existencia de suficientes caracteres de un grupo abeliano discreto. Posteriormente, se pretende generalizar este resultado a grupos abelianos compactos y finalmente a grupos abelianos localmente compactos, como se verá en la Sección 2.2.

2.1 ⧫ Lema de Bogolioubоff y Lema de Følner

En esta sección presentaremos dos importantes resultados conocidos como Lema de Bogolioubоff y Lema de Følner. El Lema de Bogolioubоff establece la existencia de suficientes caracteres para un grupo abeliano finito, mientras que el Lema de Følner la extiende a un grupo abeliano discreto arbitrario. Se pretende que los detalles de las técnicas mostradas en las demostraciones de los teoremas sean claros, con el mismo espíritu que en el artículo [DD11].

2.1 Proposición. *Sea G un grupo abeliano finito y $\varphi, \chi \in G^*$. Entonces:*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} = \begin{cases} 1 & si\ \ \varphi = \chi; \\ 0 & si\ \ \varphi \neq \chi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Además, para $x, y \in G$, se tiene que

$$\frac{1}{|G^*|}\sum_{\chi\in G^*}\chi(x)\overline{\chi(y)} = \begin{cases} 1 & si\ \ x = y; \\ 0 & si\ \ x \neq y. \end{cases} \tag{2.2}$$

Demostración. La primera igualdad en (2.1) es inmediata. Para la segunda, existe $z \in G$ tal que $\varphi(z) \neq \chi(z)$. Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} &= (\varphi(z)\chi(z)^{-1})\sum_{x\in G}\varphi(x-z)\overline{\chi(x-z)} \\ &= (\varphi(z)\chi(z)^{-1})\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)},\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$[1-(\varphi(z)\chi(z)^{-1})]\sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} = 0.$$

Así, la segunda igualdad de (2.1) se verifica.

También la primera igualdad de (2.9) es inmediata. La prueba para la segunda igualdad de (2.9) se hace igual que en (2.1) sabiendo que si $x \neq y$ son elementos de G, entonces por la Proposición 1.37, existe $\chi_0 \in G^*$ tal que $\chi_0(x) \neq \chi_0(y)$. ■

Para una función f definida en G con valores complejos y $\chi \in G^*$, definimos

$$c_\chi = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{\chi(x)}. \tag{2.3}$$

Este número es llamado el ***coeficiente de Fourier*** de f correspondiente al caracter χ. La siguiente proposición refleja una útil relación entre una función y su coeficiente de Fourier.

2.2 Proposición. *Sean G un grupo abeliano finito, f una función definida en G y c_χ el coeficiente de Fourier de f respecto a un elemento fijo $\chi \in G^*$. Entonces:*

(a) Para cada $x \in G$,

$$f(x) = \sum_{\chi \in G^*} c_\chi \chi(x). \tag{2.4}$$

(b) Para cada familia de numeros complejos $\{a_\chi : \chi \in G^*\}$ que satisfacen

$$f(x) = \sum_{\chi \in G^*} a_\chi \chi(x), \tag{2.5}$$

siempre que $x \in G$, se tiene que $a_\chi = c_\chi$ para cada $\chi \in G^*$.

(c) Si g es una función sobre G con valores complejos y con coeficiente de Fourier d_χ, entonces

$$\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \overline{f(y)} g(x+y) = \sum_{\chi \in G^*} \overline{c_\chi} d_\chi \chi(x), \tag{2.6}$$

para cada $x \in G$.

(d) Se cumple la igualdad

$$\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2. \tag{2.7}$$

Demostración. (a) Tomemos un elemento fijo $x \in G$. Entonces por (2.9) y la definición del coeficiente de Fourier (2.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \in G^*} c_\chi \chi(x) &= \sum_{\chi \in G^*} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) \overline{\chi(y)} \chi(x) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) \sum_{\chi \in G^*} \overline{\chi(y)} \chi(x) = \frac{|G^*|}{|G|} f(x). \end{aligned} \tag{2.8}$$

La igualdad (2.8) es válida para toda función $f : G \to \mathbb{C}$, en particular, cuando $f = 1$ es el homomorfismo trivial, podemos aplicar la igualdad (2.1) a su coeficiente de Fourier para obtener que

$$c_\chi = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi = f; \\ 0 & \text{si } \chi \neq f. \end{cases} \tag{2.9}$$

Por tanto, $|G^*| = |G|$, lo cual prueba la igualdad de (2.4).

(b) Por las igualdades (2.1), (2.3) y (2.5),

$$\begin{aligned} c_\chi &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{\chi(x)} = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_{\varphi\in G^*} a_\varphi \varphi(x)\right)\overline{\chi(x)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi\in G^*} a_\varphi \sum_{x\in G}\varphi(x)\overline{\chi(x)} = a_\chi, \end{aligned}$$

lo que prueba este inciso.

(c) De acuerdo al inciso (a),

$$g(x) = \sum_{\varphi\in G^*} d_\varphi \varphi(x),$$

para cada $x \in G$. Es por ello que

$$\begin{aligned} \sum_{y\in G}\overline{f(y)}g(x+y) &= \sum_{y\in G}\left[\sum_{\chi\in G^*}\overline{c_\chi}\overline{\chi(y)}\right]\left[\sum_{\varphi\in G^*} d_\varphi\varphi(x)\varphi(y)\right] \\ &= \sum_{\chi\in G^*}\sum_{\varphi\in G^*}\overline{c_\chi} d_\varphi \varphi(x)\sum_{y\in G}\overline{\chi(y)}\varphi(y) \\ &= |G|\sum_{\chi\in G^*}\overline{c_\chi} d_\chi \chi(x). \end{aligned}$$

(d) La igualdad (2.7) se puede obtener por la igualdad (2.6), poniendo $g = f$ y $x = 0$. ■

Para un subconjunto E de un grupo abeliano G usaremos las siguientes abreviaciones :

$$E_{(2)} = E - E,\;\; E_{(4)} = E - E + E - E,\;\; E_{(6)} = E - E + E - E + E - E,\;\; \text{etc.}$$

También si $q : G \to H$ es un homomorfismo entre grupos y $E \subseteq G$, se cumple $q(E_{(2n)}) = q(E)_{(2n)}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, si $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ son caracteres de un grupo abeliano y δ es un real positivo, hacemos la notación

$$U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta) = \{x \in G : |Arg(\chi_i)| < \delta, i = 1, 2\ldots, n\}.$$

2.3 Proposición (Lema de Bogoliouboff). *Si G es un grupo abeliano finito y E es un subconjunto no vacío de G, entonces existen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in G^*$, donde m es la parte entera de $(\frac{|G|}{|E|})^2$, tales que $U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$.*

Demostración. Denotemos por f la función característica de E en G. De acuerdo a la Proposición 2.2, la igualdad (2.4) se cumple para los coeficientes de Fourier de f. Consideremos la funciones

$$g(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} f(y) f(x+y)$$

y

$$h(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} g(y) g(x+y)$$

definidas sobre G. Como los valores de f y g son reales, se sigue de la igualdad (2.6) que

$$g(x) = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2 \chi(x), \qquad (x \in G)$$

y

$$h(x) = \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^4 \chi(x), \qquad (x \in G). \tag{2.10}$$

Por la construcción de f y g, $x \in G$ es tal que $g(x) > 0$ si y sólo si existe $y \in E$ de tal forma que $x + y \in E$, es decir, $x \in E - E$. De la misma manera, $h(x) > 0$ si y sólo si $x \in E_{(4)}$. Por tanto, para probar esta proposición es suficiente encontrar caracteres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in G^*$ tales que para cada $x \in G$, $x \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \frac{\pi}{2})$ implique que $h(x) > 0$.

Para esto, ordenemos los coeficientes de Fourier de f como:

$$|c_{\chi_0}| \geqslant |c_{\chi_1}| \geqslant \ldots \geqslant |c_{\chi_k}| \geqslant \ldots \tag{2.11}$$

Note que χ_0 necesariamente es el caracter trivial y $c_{\chi_0} = \frac{|E|}{|G|}$. Como h tiene valores reales, por (2.10) y el orden de (2.11),

$$h(x) \geqslant \left(\frac{|E|}{|G|} \right)^4 - \sum_{k \geqslant m+1} |c_{\chi_k}|^4 \tag{2.12}$$

para toda $m \in \mathbb{N}$. Por otro lado, la igualdad (2.7) nos dice que

$$\sum_{i=0}^{k} |c_{\chi_i}|^2 \leqslant \sum_{\chi \in G^*} |c_\chi|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} |f(x)|^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in E} 1 = \frac{|E|}{|G|},$$

para cada $k \geqslant 0$, por lo que (2.11) nos da

$$(k+1)|c_{\chi_k}|^2 \leqslant \frac{|E|}{|G|}.$$

Obtenemos así,

$$\sum_{k\geqslant m+1} |c_{\chi_k}|^4 \leqslant \left(\frac{|E|}{|G|}\right)^2 \sum_{k\geqslant m+1} \frac{1}{(k+1)^2}$$
$$< \left(\frac{|E|}{|G|}\right)^2 \sum_{k\geqslant m+1} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{|E|}{|G|}\right)^2 \frac{1}{m+1}.$$

Ahora en virtud de la desigualdad (2.12),

$$h(x) > \left(\frac{|E|}{|G|}\right)^2 \left[\left(\frac{|E|}{|G|}\right)^2 - \frac{1}{m+1}\right]$$

para toda $m = 0, 1, \ldots$

Ahora es claro que para tener $h(x) > 0$, es suficiente tomar m como la parte entera de $(\frac{|G|}{|E|})^2$. ∎

2.4 Definición. Un subconjunto X de un grupo topológico abeliano G es ***grande*** si existe un subconjunto finito F de G tal que $G = F + X$. Se dice que X es ***k-grande*** si $|F| \leqslant k$.

2.5 Proposición. *Sean G un grupo abeliano y B un subconjunto grande de G. Entonces el conjunto $B_{(2)} \cap H$ es un conjunto grande respecto a H para cualquier subgrupo H de G. Además, si $g \in G$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $ng \in B_{(2)}$.*

Demostración. Sean F un subconjunto finito de G tal que $G = B + F$ y H un subgrupo de G. Para cada $f \in F$, elíjase un elemento arbitrario $a_f \in (f + B) \cap H$, si es que esta intersección es no vacía; de otra manera, elíjase un elemento arbitrario $a_f \in H$. Note que para cada $x \in H$, existe $f_0 \in F$ tal que $x \in f_0 + B$ pues B es grande. Así que es posible elejir $a_{f_0} \in f_0 + B$. Entonces, $x - a_{f_0} \in B_{(2)} \cap H$, es decir, $x \in (B_{(2)} \cap H) + a_{f_0}$. Por lo tanto,

$$H \subseteq (B_{(2)}) \cap H + \{a_f : f \in F\}.$$

Esto prueba la primera afirmación de la proposición.

Para la segunda afirmación, se sigue del principio de las casillas que existe $f \in F$ tal que $f + B$ contiene una infinidad de elementos de la forma ng, donde $n \in \mathbb{N}$. Si $ng, mg \in B + f$, entonces $(n - m)g = ng - mg \in B_{(2)}$, por lo que $B_{(2)}$ contiene elementos de la forma ng para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. ■

2.6 Proposición. *Sea G un grupo abeliano. Para caracteres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in G^*$, con $n \in \mathbb{N}$, y $\delta > 0$, todo conjunto de la forma $U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta)$ es grande en G.*

Demostración. Consideremos el homomorfismo $h : G \to \mathbb{T}^n$, dado por $h(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_n(x))$. Ahora, el conjunto

$$B = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{T}^n : |z_i - 1| < \delta/2,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

es un producto cartesiano del conjunto grande $\{z \in \mathbb{T} : |z - 1| < \delta/2\}$ de $\mathbb{T}$, pues $\mathbb{T}$ es compacto. Es ahora claro que B es grande en $\mathbb{T}^n$. La Proposición 2.5 muestra que $B_{(2)} \cap h(G)$ es grande en $h(G)$. Además, $B_{(2)}$ está contenido en el conjunto

$$C = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{T}^n : |z_i - 1| < \delta,\ i = 1, 2, \ldots, n\},$$

así, $C \cap h(G)$ es grande en $h(G)$. Por tanto,

$$U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta) = h^{-1}(C)$$

es grande en G. ■

2.7 Proposición. *Sean F un grupo abeliano y $r, t \in \mathbb{N}$. Consideremos al grupo abeliano discreto $A = \mathbb{Z}^r \times F$. Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, sean*

$$A_n = (-n, n]^r \times F, \quad N = 2tn\mathbb{Z}^r \times \{0\}$$

y $\pi : A \to A/N$ la proyección canónica. Si $B \subseteq A_n$, entonces cada $a \in A_n$ tal que $\pi(a) \in \pi(B)_{(4)}$ satisface

$$a \in \begin{cases} B_{(4)}, & si \quad t > 2; \\ B_{(4)} + \{0, \pm 2n \pm 4n\}^r \times \{0\}, & si \quad t \in \{1, 2\}. \end{cases} \tag{2.13}$$

Demostración. Por la hipótesis $\pi(a) \in \pi(B)_{(4)} = \pi(B_{(4)})$, se sigue que existen $b_1, b_2, b_3, b_4 \in B$ y $c = (c_1, c_2, \ldots, c_r, 0) \in N$ tales que $a = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + c$. El hecho de que $c = a - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 \in (A_n)_{(4)} + A_n$ implica que $|c_i| \leqslant 5n$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Si $t \geqslant 3$ entonces $c = 0$ pues $2tn|c_i$ para cada i. Si $t < 3$, entonces $c_i \in \{0, \pm 2n, \pm 4n\}$ para cada i. ■

2.8 Proposición (Lema de Bogoliouboff-Følner)**.** *Sea A un grupo abeliano finitamente generado y sea r el rango de A. Si k es un entero positivo y V es un subconjunto k-grande de A, entonces existen caracteres $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s \in A^*$, donde $s = 3^{2r}k^2$, tales que $U_A(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$.*

Demostración. Fijemos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño para que la parte entera de $\frac{3^{2r}k^2}{(1-k\varepsilon)^2}$ sea s. Como A es finitamente generado, podemos identificar A con $\mathbb{Z}^r \times F$, donde F es un grupo abeliano finito, véase en [Rot94, p. 319]. Hagamos nuevamente $A_n = (-n, n]^r \times F$, para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

2.8.1 Afirmación. Para cada $a = (a_1, a_2, \ldots, a_r; f) \in A$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|(A_n - a) \cap A_n| = |F| \cdot \prod_{i=1}^{r}(2n - |a_i|)$, para toda $n > m$.

Para esto denotemos con A'_{n_i} al intervalo $(-n, n]$ de la $i-$ésima entrada de A_n con $n \in \mathbb{N}$ y $i = 1, 2, \ldots, r$; es decir, $A_n = A'_{n_1} \times A'_{n_2} \times \ldots \times A'_{n_r} \times F$. Ahora procedamos por inducción sobre r.

Si $r = 1$ fijémos $m \geqslant a_1$, donde podemos suponer que a_1 es positivo, y así, $(A'_{m_1} - a_1) = (-m - a_1, m - a_1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |(A'_{m_1} - a_1) \cap A'_{m_1}| &= |(-m - a_1, m - a_1] \cap (-m, m]| \\ &= m + (m - a_1) = (2m - a_1). \end{aligned}$$

Consecuentemente se tiene que

$$|(A'_{m_1} - a_1) \cap A'_{m_1} \times (F - f)| = |(-m - a_1, m - a_1] \cap (-m, m] \times F|,$$

y así,

$$|(A_m - a) \cap A_m| = (2m - a_1)|F| = |F| \cdot \prod_{i=1}^{1}(2m - |a_i|).$$

Supongamos ahora que la igualdad es válida para $r = k - 1 \in \mathbb{N}$ y veamos que se cumple para $r = k$. Por lo anterior, se sigue que existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|(A_n - a) \cap A_n| = |F| \cdot \prod_{i=1}^{k-1}(2n - |a_i|)$, para toda $n > m_0$. Tomemos $m = max\{m_0+1, |a_k|\}$. Otra vez sin perdida de generalidad podemos asumir que a_k es un entero positivo. Por la elección de m, tenemos que

$$|(A'_{m_i} - a_i) \cap A'_{m_i}| = |(-m - a_i, m - a_i] \cap (-m, m]| = (2m - |a_i|),$$

para toda $i = 1, 2 \ldots, k$, y por lo tanto, $|(A_n - a) \cap A_n| = |F| \cdot \prod_{i=1}^{k}(2n - |a_i|)$ para toda $n > m$. Se ha probado la Afirmación 2.8.1.

Observe que

$$|A_n| = |F|(2n)^r \quad \text{y} \quad \frac{|(A_n - a) \cap A_n|}{|A_n|} = \frac{\prod_{i=1}^{r}(2n - |a_i|)}{(2n)^r} \leqslant 1,$$

por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(A_n - a) \cap A_n|}{|A_n|} = 1 \tag{2.14}$$

para cada $a \in A$.

2.8.2 Afirmación. Veremos ahora que para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, se cumple que $|V \cap A_n| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|$.

Como V es un subconjunto k-grande, existen $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$ tales que $A = \bigcup_{j=1}^{k}(a_j + V)$. También se tiene del límite (2.14) que existe $M > m$, donde ahora $m = max\{|a_{j_l}| : l = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, k\}$, tal que $|(A_n - a_j) \cap A_n| > (1 - \varepsilon)|A_n|$ para toda $n > M$, y así,

$$\varepsilon|A_n| > |A_n| - |(A_n - a_j) \cap A_n| \geqslant |(A_n - a_j) \setminus A_n| \tag{2.15}$$

para toda $j = 1, 2, \ldots, k$. Por otro lado, $A_n = \bigcup_{j=1}^{k}(a_j + V) \cap A_n$ implica que $|A_n| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |(a_j + V) \cap A_n|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por lo que existe $j_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que

$$\frac{1}{k}|A_n| \leqslant |(a_{j_0} + V) \cap A_n| = |V \cap (A_n - a_{j_0})|,$$

pues $x \in (a_{j_0} + V) \cap A_n$ es de la forma $x = a_{j_0} + v$ para algún $v \in V$, y esto sucede si y sólo si $v = x - a_{j_0} \in V \cap (A_n - a_{j_0})$. Así es como se consigue que $|(a_{j_0} + V) \cap A_n| = |V \cap (A_n - a_{j_0})|$.

También, $v \in V \cap (A_n - a_{j_i})$ es de la forma $v = x - a_{j_0}$ con $x \in A_n$. Si se da el caso en que $x - a_{j_0} \in A_n$, entonces $v \in V \cap A_n$. Si $x - a_{j_0} \notin A_n$, queda $x - a_{j_0} \in (A_n - a_{j_0}) \setminus A_n$. De cualquier manera, $V \cap (A_n - a_{j_i}) \subseteq (V \cap A_n) \cup ((A_n - a_{j_0}) \setminus A_n)$ y por la relación (2.15), se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}|A_n| &\leqslant |V \cap (A_n - a_{j_0})| \leqslant |(V \cap A_n)| + |(A_n - a_{j_0}) \setminus A_n| \\ &< |(V \cap A_n)| + \varepsilon|A_n|.\end{aligned}$$

Queda probada la Afirmación 2.8.2.

Ahora, para $n \geqslant M$ sean $G = A/(6n\mathbb{Z}^r \times \{0\})$ y $E = \pi(V \cap A_n)$ donde $\pi : A \to G$ es la proyección canónica. Observe que $(A_n - A_n) \cap ker(\pi) = \{0\}$ pues si suponemos que existen $x, y \in A_n$ con $x \neq y$, tales que $x - y \in (A_n - A_n) \cap ker(\pi)$, entonces $6n\mathbb{Z}^r \times \{0\} = \pi(x - y) = x - y + 6n\mathbb{Z}^r \times \{0\}$ y esto ocurre si y sólo si $x - y \in 6n\mathbb{Z}^r$, si y sólo si $6n|x_i - y_i$, si y sólo si $x_i - y_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, r$. Consecuentemente $\pi \restriction_{A_n}$ es inyectiva. Por la Afirmación 2.8.2, resulta que

$$|E| = |V \cap A_n| > (\tfrac{1}{k} - \varepsilon)|A_n| = (\tfrac{1}{k} - \varepsilon)(2n)^r|F|,$$

y así,

$$\frac{|G|}{|E|} \leqslant \frac{(6n)^r|F|}{(\frac{1}{k} - \varepsilon)(2n)^r|F|} = \frac{3^r k}{1 - k\varepsilon}.$$

Por la elección de ε, se cumple que la parte entera de $(\frac{|G|}{|E|})^2$ es menor o igual a s. Apliquemos en seguida la Proposición 2.3 para encontrar s caracteres $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{s,n} \in G^*$ tales que

$$U_G(\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{s,n}; \tfrac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}.$$

Para $j = 1, 2, \ldots, s$, sea $\varrho_{j,n} = \xi_{j,n} \circ \pi \in A^*$. Si tomamos un elemento $a \in A_n \cap U_A(\varrho_{1,n}, \varrho_{2,n}, \ldots, \varrho_{s,n}; \frac{\pi}{2})$, entonces

$$\pi(a) \in U_G(\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{s,n}; \tfrac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)} = \pi(V \cap A_n)_{(4)}.$$

Así, para $B = V \cap A_n \subseteq A_n$ y $t = 3$ podemos aplicar la Proposición 2.7 y obtener $a \in V_{(4)}$. Por lo tanto, $A_n \cap U_A(\varrho_{1,n}, \varrho_{2,n}, \ldots, \varrho_{s,n}; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$ para toda $n \geqslant N$ que satisface (2.14).

Desde luego que A^* es metrizable pues A^* está contenido en $\mathbb{T}^A$ que es un espacio metrizable. Ya que A es discreto, por Proposición 1.39, A^* es compacto. Así que para $i = 1$, existe una subsucesión de naturales mayores que M, $S_1 = \{n_l : l \in \mathbb{N}\}$ tal que $\varrho_1(a) = \lim_{l\to\infty} \varrho_{1,n_l}(a)$ para cada $a \in A$. Ahora para $i = 2$ existe una subsucesión $S_2 = \{n_{l_\alpha} : \alpha \in \mathbb{N}\}$ de S_1 tal que $\varrho_2(a) = \lim_{\alpha\to\infty} \varrho_{2,n_{l_\alpha}}(a)$ para cada $a \in A$. Podemos hacer esto s pasos para obtener finalmente una sucesión de naturales $\{n_\beta : \beta \in \mathbb{N}\}$ tal que $\varrho_i(a) = \lim_{\beta\to\infty} \varrho_{i,n_\beta}(a)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$ y cada $a \in A$.

2.8.3 Afirmación. $U_A(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$.

En efecto, tómese $a \in U_A(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s; \frac{\pi}{2})$. Como $A = \bigcup_{\beta=j}^{\infty} A_{n_\beta}$, para cada $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existe $n_0 \geqslant M$ tal que $a \in A_{n_0}$. Dado que $\varrho_i(a) = \lim_{\beta\to\infty} \varrho_{i,n_\beta}(a)$ para $i = 1, 2, \ldots, s$, podemos escoger $\beta \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $n_\beta \geqslant n_0$ y $|Arg(\varrho_{i,n_\beta}(a))| < \frac{\pi}{2}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, s$, es decir, para que $a \in A_{n_\beta} \cap U_A(\varrho_{1,n_\beta}, \varrho_{2,n_\beta}, \ldots, \varrho_{s,n_\beta}; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$, lo cual prueba la afirmación. ■

Un caso más general es en el que podemos eliminar la dependencia del número de caracteres s, aunque para esto debemos pagar el precio tomando el conjunto "más grande" $V_{(8)}$ en vez de $V_{(4)}$, lo cual se expresa en la siguiente proposición para grupos abelianos finitamente generados.

2.9 Proposición. *Sea A un grupo abeliano finitamente generado. Si k es un entero positivo y V es un subconjunto k-grande de A, entonces existen caracteres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in A^*$, donde $m = k^2$, tales que $U_A(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$.*

Demostración. Sean A un grupo abeliano finitamente generado, k un entero positivo y $m = k^2$. Sea r el rango de A y $s = 3^{2r}k^2$. Por la Proposición 2.8, existen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s \in A^*$ tales que $U_A(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(4)}$. Nuevamente como se ve en [Rot94, p. 319], podemos suponer que A es de la forma $\mathbb{Z}^r \times F$, donde F es un grupo abeliano finito.

Para cada $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y $n \in \mathbb{N}$, defínase el homomorfismo $i_t : \mathbb{Z} \to A$ dado por

$$i_t(n) = (\underbrace{0, \ldots, n}_{t}, 0, \ldots, 0; 0) \in A.$$

Claramente i_t es inyectiva para cada $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Entonces cada $\kappa_{j,t} = \varrho_j \circ i_t$, donde $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$, es un caracter de $\mathbb{Z}$. Por la Proposición 2.6, el subconjunto

$$L = U_{\mathbb{Z}}(\{\kappa_{j,t} : t \in \{1, 2, \ldots, r\}, j \in \{1, 2, \ldots, s\}\}; \tfrac{\pi}{8r})$$

de $\mathbb{Z}$ es grande, y por tanto infinito. Sea $L' = \bigcup_{t=1}^{r} i_t(L)$, es decir, el conjunto de elementos en A de la forma $i_t(n)$ con $n \in L$ y $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Por la construcción de los caracteres $\kappa_{j,t}$, $L' \subseteq U_A(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s; \frac{\pi}{8r})$. Así,

$$L'_{(4r)} \subseteq U_A(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_s; \pi/2) \subseteq V_{(4)}. \tag{2.16}$$

Otra vez tomando $A_n = (-n, n]^r \times F$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\varepsilon > 0$ tan pequeño para que $\varepsilon < \frac{1}{6k^4}$, entonces la parte entera de $(\frac{k}{1-k\varepsilon})^2$ es k^2 y como en la prueba de la Afirmación 2.8.1, obtenemos $|V \cap A_n| > (\frac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. De hecho, podemos tomar suficientemente grandes $n \in L$. Nuevamente sean

$$G_n = A/(2n\mathbb{Z}^r \times \{0\}) \cong \mathbb{Z}_{2n}^r \times F \qquad \text{y} \qquad E = \pi(V \cap A_n) \subseteq G_n,$$

donde $\pi : A \to G_n$ es la proyección canónica. Probando como se hizo en la Proposición 2.8 que $(A_n - A_n) \cap ker(\pi) = \{0\}$, obtenemos que $\pi \restriction A_n$ es inyectiva. Así que hay biyección entre A_n y G_n por un lado, y por otro lado π induce una biyección entre E y $V \cap A_n$. Por lo tanto,

$$|A_n| = |G_n| = |F|(2n)^r, \qquad |E| = |V \cap A_n| > (\tfrac{1}{k} - \varepsilon)|A_n|,$$

y así,

$$\left(\frac{|G_n|}{|E|}\right)^2 \leqslant \left(\frac{k}{1 - k\varepsilon}\right)^2.$$

Esto implica que la parte entera de $(\frac{|G_n|}{|E|})^2$ es menor o igual que k^2. Apliquemos la Proposición 2.3 al grupo finito G_n para conseguir los caracteres $\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{m,n} \in G_n^*$, con $m = k^2$, tales que $U_{G_n}(\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{m,n}; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)}$.

Consideremos $\chi_{j,n} = \xi_{j,n} \circ \pi \in A^*$ para $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Por construcción de los caracteres $\chi_{j,n}$, si $a \in A_n \cap U_A(\chi_{1,n}, \chi_{2,n}, \ldots, \chi_{m,n}; \frac{\pi}{2})$, entonces

$\pi(a) \in U_{G_n}(\xi_{1,n}, \xi_{2,n}, \ldots, \xi_{m,n}; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(4)} = \pi(V \cap A_n)_{(4)}$. De la Proposición 2.7 con $t = 1$, deducimos que $a \in (V \cap A_n)_{(4)} + \{0, \pm 2n, \pm 4n\}^r \times \{0\}$. Note ahora que por la elección de $n \in L$ y la relación (2.16), se tiene que $\{0, \pm 2n, \pm 4n\}^r \times \{0\} \subseteq L'_{(4r)} \subseteq V_{(4)}$, es decir, $a \in (V \cap A_n)_{(4)} + V_{(4)} \subseteq V_{(8)}$. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \cap U_A(\chi_{1,n}, \chi_{2,n}, \ldots, \chi_{m,n}; \tfrac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}.$$

Por los mismos argumentos que en la prueba de la Afirmación 2.8.3, existen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in A^*$ tales que

$$U_A(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \tfrac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}.$$

■

2.10 Proposición (Lema de Følner)**.** *Sea A un grupo abeliano discreto. Si k es un entero positivo y V es un subconjunto k-grande de A, entonces existen caracteres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in A^*$, donde $m = k^2$, tales que $U_A(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$.*

Demostración. Dado que V es un subconjunto k-grande de A, existen elementos $g_1, g_2, \ldots, g_k \in A$ tales que $A = \bigcup_{i=1}^{k}(g_i + V)$. Supongamos que G es un subgrupo abeliano finitamente generado de A que contiene a $g_1, g_2, \ldots, g_k$ que, al menos existe tal subgrupo generado por estos elementos. Note que $G = \bigcup_{i=1}^{k}(g_i + V \cap G)$, y por lo tanto $V \cap G$ es un subconjunto k-grande de G. Podemos aplicar la Proposición 2.9 para obtener $\chi_{1,G}, \ldots, \chi_{m,G} \in G^*$, donde $m = k^2$, tales que

$$U_G(\chi_{1,G}, \ldots, \chi_{m,G}; \tfrac{\pi}{2}) \subseteq (V \cap G)_{(8)} \subseteq V_{(8)}.$$

Recordando la Proposición 1.36, podemos extender $\chi_{i,G}$ a un caracter de A^* para cada $i = 1, 2, \ldots, m$. Así, podemos asumir que $\chi_{1,G}, \ldots, \chi_{m,G} \in A^*$ y claramente se obtiene que

$$G \cap U_A(\chi_{1,G}, \ldots, \chi_{m,G}; \frac{\pi}{2}) = U_G(\chi_{1,G}, \ldots, \chi_{m,G}; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}. \tag{2.17}$$

Denotemos por $\mathcal{G}$ a la familia de todos los subgrupos abelianos finitamente generados de A que contienen a $g_1, g_2, \ldots, g_k$. Evidentemente $\mathcal{G}$ es no vacía y es un conjunto $\subseteq$ -dirigido. Así, obtenemos m redes $\{\chi_{i,G} : G \in \mathcal{G}\} \subseteq A^*$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Por la Proposición 1.39, A^* es compacto. Para $i = 1$, existen un subconjunto $\mathcal{G}_1$ de $\mathcal{G}$ y una subred $\{\chi_{1,G_1} : G_1 \in \mathcal{G}_1\}$ de $\{\chi_{1,G} : G \in \mathcal{G}\}$ tales que χ_{1,G_1} converge a χ_1. Ahora para $i = 2$, existen un subconjunto $\mathcal{G}_2$ de $\mathcal{G}_1$ y una subred $\{\chi_{2,G_2} : G_2 \in \mathcal{G}_2\}$ de $\{\chi_{1,G_1} : G \in \mathcal{G}_1\}$ tales que χ_{2,G_2} converge a χ_2. Podemos hacer esto m pasos para obtener finalmente un subconjunto $\mathcal{G}_m$ de $\mathcal{G}$ y una subred $\{\chi_{i,G_m} : G_m \in \mathcal{G}_m\}$ de $\{\chi_{i,G} : G \in \mathcal{G}\}$ tales que χ_{i,G_m} converge a χ_i, para cada $i = 1, 2 \ldots, m$. Así, por ser límites los caracteres χ_i y la relación (2.17), podemos concluir como lo hemos hecho en las proposiciones previas que $U_A(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq V_{(8)}$. ■

2.2 ⧫ Grupos Precompactos, Lema de Prodanov, Teorema de Følner y Teorema de Peter–Weyl

Hacemos una parada para introducir el concepto de topologías precompactas para un grupo topológico. La precompacidad nos ayudará a caracterizar ciertas propiedades de los grupos topológicos y se usarán a lo largo de esta sección. El Lema de Prodanov es una herramienta útil debido a las numerosas consecuencias que desprende. El Teorema de Følner generaliza el resultado del Lema de Følner a grupos abelianos con cualquier topología de grupo. Finalmente el Teorema de Peter-Weyl nos servirá para llegar al objetivo de este capítulo.

2.11 Definición. Un grupo topológico G es ***totalmente acotado*** si cada subconjunto abierto no vacío U de G es grande. Un grupo topológico que es totalmente acotado y Hausdorff será ***precompacto***.

Observe que todo grupo compacto (Hausdorff) es precompacto. Ahora, si H es una familia de caracteres de un grupo abeliano G, entonces por el Teorema 1.4, la familia

$$\{U_G(\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_n; \delta) : \delta > 0, \chi_i \in H, i = 0, 1, 2, \ldots, n, n \in \mathbb{N}\}$$

genera una topología de grupo $\mathcal{T}_H$ para G. Es fácil darse cuenta de que esta topología es la más gruesa que hace que cada caracter de H sea continuo. Diremos que los caracteres de H ***separan los puntos*** de G si para cada $x \in G$ con $x \neq 0$, existe un caracter $\chi \in H$ tal que $\chi(x) \neq 1$.

2.12 Proposición. *Sea H una familia de caracteres de un grupo abeliano G. Entonces los caracteres de H separan puntos de G si y sólo si $\mathcal{T}_H$ es Hausdorff.*

Demostración. Por la homogeneidad de G, basta ver la propiedad Hausdorff en el elemento $0 \in G$. Supongamos que H separa los puntos de G. Sea $x \in G$ con $x \neq 0$. Existe $\chi \in H$ tal que $\chi(x) \neq 1 \in \mathbb{T}$. Consideremos $\delta = \frac{|Arg(\chi(x))|}{2}$ y entonces los abiertos $U_G(\chi;\delta)$ y $x + U_G(\chi;\delta)$ son vecindades de 0 y x, respectivamente, y son ajenas. Por tanto $\mathcal{T}_H$ es Hausdorff.

Si $\mathcal{T}_H$ es Hausdorff, entonces para cada $x \in G$, con $x \neq 0$, existen $\delta > 0$ y $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in H$ tales que $U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta)$ es vecindad de 0 con $x \notin U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta)$. Por tanto $\chi_i(x) \neq 1 \in \mathbb{T}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Es decir, H separa los puntos de G. ■

2.13 Proposición. *Sea G un grupo abeliano. Entonces:*

(*a*) *Todas las topologías de la forma $\mathcal{T}_H$, donde H es un subgrupo de G^*, son totalmente acotadas.*

(*b*) *$\mathcal{T}_H$ es precompacto si y sólo si H separa puntos de G. En particular, $\mathcal{T}_{G^*}$ es precompacto.*

Demostración. (a) Se sigue de la Proposición 2.6.

(b) Si $\mathcal{T}_H$ es precompacto, entonces es Hausdorff y por la proposición anterior, H separa los puntos de G. Además, si H separa los puntos de G, por la proposición anterior $\mathcal{T}_H$ es precompacto pues es Hausdorff y totalmente acotada. También observe que G^* separa puntos de G por el Corolario 1.37. ■

2.14 Proposición (Lema de Prodanov)**.** *Sean G un grupo topológico abeliano, U un subconjunto abierto de G, f una función compleja sobre U y M un subconjunto cerrado y convexo de $\mathbb{C}$. Sean $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k \in G^*$. Supóngase que $c_1, c_2, \ldots c_k \in \mathbb{C}$ son tales que $\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_j(x) - f(x) \in M$ para cada $x \in U$. Si $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\} = \{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\} \cap \widehat{G}$ con $n \leqslant k$, entonces $\sum_{j=1}^{n} c_j \chi_j(x) - f(x) \in M$ para cada $x \in U$.*

Demostración. Si todos los caracteres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ son continuos no hay nada qué probar. Vamos a asumir entonces que $\chi_k \in G^*$ es discontinuo. Así, existe una red $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ de elementos de G, donde D es un conjunto dirigido, tal que x_α converge a $0 \in G$ y también existen $y_1, y_2 \ldots, y_k \in \mathbb{T}$ tales que $\chi_j(x_\alpha)$ converge a y_j para cada $j = 1, 2, \ldots, k$, pero con $y_k \neq 1$. Note que $y_j = 1 \in \mathbb{T}$ cuando χ_j es continuo.

Considere $\sum_{j=1}^{k} c_j\chi_j(x+tx_\alpha) - f(x+tx_\alpha)$ donde $t \in \mathbb{Z}$. Como U es una vecindad de x y x_α converge a 0, entonces $x + x_\alpha$ converge a x y así, $x + x_\alpha \in U$ para α suficientemente grande. Entonces por hipótesis,

$$\sum_{j=1}^{k} c_j\chi_j(x)\chi_j(tx_\alpha) - f(x+tx_\alpha) \in M$$

para α suficientemente grande. Así, sacando el límite sobre α se obtiene que $\sum_{j=1}^{k} c_j\chi_j(x)y_j^t - f(x) \in M$, para todo $x \in U$ y $t \in \mathbb{Z}$, pues f es continua y M es cerrado. Fijemos ahora cualquier $n \in \mathbb{N}$. Por la convexidad de M, se cumple que

$$\frac{1}{n+1}\sum_{t=0}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j\chi_j(x)y_j^t - f(x)\right) \in M.$$

Note que $\sum_{t=0}^{n} y_k^t = \frac{1-y_k^{n+1}}{1-y_k}$ pues $y_k \neq 1$. Así,

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{j_n}\chi_j(x)\right) + \left(\frac{c_k}{n+1}\cdot\frac{1-y_k^{n+1}}{1-y_k}\chi_k(x)\right) - f(x) \in M,$$

para todo $x \in U$, donde $c_{j_n} = \frac{\sum_{t=0}^{n} c_j y_j^t}{n+1}$. Ahora para cada $j = 1, 2, \ldots, k-1$, se tiene que

- $|c_{j_n}| \leqslant |c_j|\frac{\sum_{t=0}^{n}|y_j|^t}{n+1} = |c_j|$ pues $|y_j| = 1$, y
- si $y_j = 1$, entonces $c_{j_n} = c_j$.

Dado que la sucesión $\{c_{jn} : n \in \mathbb{N}\}$ es acotada por $|c_j|$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1$, se puede encontrar, como antes se ha hecho, una subsucesión de naturales $\{n_m : m \in \mathbb{N}\}$ tal que todos los límites $c_j' = \lim_{m\to\infty} c_{jn_m}$ existen para cada $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Por otro lado, $|y_k| = 1$ y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_k}{n+1}\cdot\frac{1-y_k^{n+1}}{1-y_k} = 0.$$

Por lo tanto tomando el límite $m \to \infty$ en

$$\left(\sum_{j=1}^{k-1} c_{jn_m}\chi_j(x)\right) + \left(\frac{c_k}{n_m+1}\cdot\frac{1-y_k^{n_m+1}}{1-y_k}\chi_k(x)\right) - f(x) \in M,$$

nos queda,

$$\sum_{j=1}^{k-1} c'_j \chi_j(x) - f(x) \in M \text{ para cada } x \in U. \tag{2.18}$$

Además, $c'_j = c_j$ para $j = 1, 2, \ldots, k-1$ tal que χ_j sea continuo. La condicion (2.18) se concluye desde las hipótesis y remueve el caracter discontinuo χ_k. Podemos iterar este procedimiento una cantidad finita de veces para remover todos los caracteres discontinuos, dejando la sumatoria con sólo los coeficientes de los caracteres continuos que es lo que se quería probar. ∎

En lo siguiente enunciaremos el Teorema de Stone-Weierstrass que lo necesitaremos para probar una forma local del mismo, aunque su demostración se puede ver en [Eng89, p. 144].

Si X es un conjunto, denotaremos con $B(X)$ al conjunto de todas las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ acotadas. Así, para $f \in B(X)$ definimos la ***norma del supremo***

$$\|f\| = sup\{f(x) : x \in X\}.$$

Si X es un espacio topológico, $C(X)$ denotará al conjunto que consiste de todas las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ continuas. Note que si X es un espacio topológico compacto, $\|\cdot\|$ sí es norma para $C(X)$.

Un ***álgebra*** sobre un campo $\mathbb{K}$ o una $\mathbb{K}$-***álgebra*** es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ dotado con una operación binaria que es bilineal y distributiva respecto a la suma. Un álgebra también puede definirse más generalmente sobre un anillo unitario: se necesita de una norma $\|\cdot\|$ sobre el álgebra y una operación binaria como la del comentario previo.

Para nuestras siguientes proposiciones consideraremos a la $\mathbb{C}$-álgebra de funciones, donde las funciones van de un espacio topológico compacto X al campo de los complejos $\mathbb{C}$, el neutro multiplicativo será la función constante 1 y dotado con la norma del supremo $\|\cdot\|$ citada anteriormente.

2.15 Teorema (Teorema de Stone-Weierstrass)**.** *Sea X un espacio topológico compacto. Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}$-subálgebra de $C(X)$ tal que contiene todas las funciones constantes y es cerrada bajo conjugación. Entonces $\mathcal{A}$ es densa en $C(X)$ para la norma $\|\cdot\|$ si y sólo si $\mathcal{A}$ separa los puntos de X.*

2.16 Proposición. *Sea X un espacio topológico compacto y $f \in C(X)$. Entonces f puede ser uniformemente aproximada por elementos de una $\mathbb{C}$-subalgebra $\mathcal{A}$ de $C(X)$ que contiene todas las constantes y es cerrada bajo conjugación si y sólo si $\mathcal{A}$ separa los puntos de X separados por f.*

Demostración. La ida es inmediata a partir del Teorema de Stone-Weiestrass. Ahora, denote por $\Psi : X \to \mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ la función proyección diagonal de la familia $\mathcal{A}$, es decir, $\Psi(x) = (f_\alpha(x), \ldots)$ donde $f_\alpha, \ldots \in \mathcal{A}$. Dado que cada $g \in \mathcal{A}$ es continua, entonces Ψ es continua y por tanto, $Y = \Psi(X)$ es un subespacio compacto de $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$. Por la compacidad de X, la topología de subespacio de Y coincide con la topología cociente de la función $\Psi : X \to Y$. Así, $x \sim y$ con $x, y \in X$ si y sólo si $\Psi(x) = \Psi(y)$, es decir, si $g(x) = g(y)$ para toda $g \in \mathcal{A}$.

2.16.1 Afirmación. Si $h : X \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $h(x) = h(y)$ para cada par $x, y \in X$ con $x \sim y$, entonces se puede factorizar como $h = \overline{h} \circ \Psi$, donde $\overline{h} \in C(Y)$.

En efecto, si $\varphi \in Y$ y $x, y \in \Psi^{-1}(\varphi)$, entonces $x \sim y$. Por lo tanto $\overline{h} : Y \to \mathbb{C}$ dada por $\overline{h}(\varphi) = h(x)$, donde $x \in \Psi^{-1}(\varphi)$, está bien definida. Para ver que $\overline{h}$ es continua, tomemos un subconjunto cerrado F de $\mathbb{C}$. Queremos que $\overline{h}^{-1}(F)$ sea cerrado en Y. Por la continuidad de h, $h^{-1}(F) = (\overline{h} \circ \Psi)^{-1}(F) = \Psi^{-1} \circ \overline{h}^{-1}(F)$ es cerrado en X. Como X es compacto, también lo es $\Psi^{-1} \circ \overline{h}^{-1}(F)$. Dado que Ψ es continua, $\Psi(\Psi^{-1} \circ \overline{h}^{-1}(F))$ es compacto en Y. Note que Y es un subconjunto del espacio Hausdorff $\mathbb{C}^{\mathcal{A}}$ y por tanto, Y es Hausdorff. Se tiene entonces que $\Psi(\Psi^{-1} \circ \overline{h}^{-1}(F)) = \overline{h}^{-1}(F)$ es cerrado en Y.

En particular, la Afirmación 2.16.1 es cierta para cada $g \in \mathcal{A}$ y para f por hipótesis. Sea $\overline{\mathcal{A}}$ la $\mathbb{C}$-subalgebra $\{\overline{h} : h \in \mathcal{A}\}$ de $C(Y)$. Necesariamente $\overline{\mathcal{A}}$ es cerrada bajo conjugación y contiene todas las funciones constantes pues así lo es $\mathcal{A}$. Además, $\overline{\mathcal{A}}$ separa los puntos de Y pues si $y, y' \in Y$ con $y \neq y'$, entonces existen $x, x' \in X$ tales que $y = \Psi(x) \neq \Psi(x') = y'$, por lo que $x \nsim x'$. Así, existe $h \in \mathcal{A}$ tal que $\overline{h}(y) = h(x) \neq h(x') = \overline{h}(y')$. Por lo tanto podemos aplicar el Teorema de Stone-Weierstrass a Y y $\overline{\mathcal{A}}$ para deducir que se puede aproximar uniformemente la función $\overline{f}$ por funciones de $\overline{\mathcal{A}}$. Como consecuencia de la continuidad podemos aproximar uniformemente la función f por funciones de $\mathcal{A}$. ■

2.17 Proposición. *Sea G un grupo abeliano, H un grupo de caracteres de G, X es un subconjunto de G y f es una función compleja acotada sobre X.*

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Se puede aproximar uniformemente a f por una combinación lineal de elementos de H con coeficientes complejos.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$, existen $\delta > 0$ y $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in H$, para algún $n \in \mathbb{N}$, tales que si $x - y \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta)$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para cada $x, y \in X$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $\varepsilon > 0$. Por (a), existen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ y $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in H$ tales que $\| \sum_{i=1}^n c_i\chi_i - f\| < \frac{\varepsilon}{4}$, es decir, $| \sum_{i=1}^n c_i\chi_i(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$ para cada $x \in X$. Si $y \in X$, se tiene que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(y)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |c_i||\chi_i(x) - \chi_i(y)|,$$

y que

$$|\chi_i(x) - \chi_i(y)| = |\chi_i(x)\chi_i(y)^{-1} - 1| = |\chi_i(x - y) - 1|,$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $c = max\{|c_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Si consideramos que $\delta = \frac{\varepsilon}{2nc}$ y $x - y \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n; \delta)$, entonces $\sum_{i=1}^n |c_i||\chi_i(x) - \chi_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$, y en particular, $| \sum_{i=1}^n c_i\chi_i(x) - \sum_{i=1}^n c_i\chi_i(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora por desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(x)| + |\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(x) - \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(y)| + \\ + |\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i(y) - f(y)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Sea βX la compactificación de Stone-Čech de X cuando lo dotamos con la topología discreta. Si $F : X \to \mathbb{C}$ es una función acotada, existe una única extensión continua $F^\beta : \beta X \to \mathbb{C}$ de F. Sea

$$\mathcal{S} = \{g \in C(\beta X) : g = \sum_{i=1}^{n} c_i\chi_i^\beta,\ \chi_i \in H,\ c_i \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Por la unicidad de cada extensión se tiene que $\chi_i^\beta\chi_j^\beta = (\chi_i\chi_j)^\beta$ para cualesquiera $\chi_i, \chi_j \in H$ y así, $\mathcal{S}$ es cerrada bajo sumas y producto, es decir,

$\mathcal{S}$ es una subálgebra de $C(\beta X)$. También es claro que $\mathcal{S}$ contiene todas las funciones constantes pues la función constante 1 está en H. Además, como $\chi\overline{\chi} = 1$, entonces $(\chi\overline{\chi})^\beta = \chi^\beta(\overline{\chi})^\beta = 1$, es decir, $(\overline{\chi})^\beta = (\chi^{-1})^\beta = \overline{\chi^\beta}$ y al ser H un grupo, $\mathcal{S}$ es cerrado bajo conjugación.

Ahora veremos que $\mathcal{S}$ separa los puntos de βX separados por f^β para poder aplicar la forma local del Teorema de Stone-Weierstrass, la Proposición 2.16. Sean $x, y \in \beta X$ tales que $f^\beta(x) \neq f^\beta(y)$. Consideremos dos redes $\{x_\alpha : \alpha \in D\}, \{y_\alpha : \alpha \in D\}$ de elementos en X, donde D es un conjunto dirigido, tales que x_α converge a x y y_α converge a y. Como f^β es continua, $f(x_\alpha)$ converge a $f^\beta(x)$, $f(y_\alpha)$ converge a $f^\beta(y)$ y existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)| \geqslant \varepsilon$ para α suficientemente grande. Por (b), existen $\delta > 0$ y $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k \in H$ tales que para cada par de elementos $u, v \in X$, $u - v \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k; \delta)$ implica que $|f(u) - f(v)| < \varepsilon$. Si suponemos que $\chi_j^\beta(x) = \chi_j^\beta(y)$ para toda $j = 1, 2, \ldots, k$, entonces $x_\alpha - y_\alpha \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k; \delta)$ para α suficientemente grande. Esto implica que $|f(x_\alpha) - f(y_\alpha)| < \varepsilon$ que es una contradicción. Así que cada par de puntos de βX que son separados por f^β también son separados por $\mathcal{S}$.

Dado que βX es compacto, apliquemos la Proposición 2.16 a $\mathcal{S}$ y f^β, y así, f^β puede ser aproximado uniformemente por funciones de $\mathcal{S}$. Para concluir note que si $g = \sum c_j \chi_j^\beta$ entonces $g \restriction_X = \sum c_j \chi_j$, es decir, f puede ser aproximada uniformemente por una combinación lineal de caracteres en H. ∎

2.18 Teorema (Teorema de Følner)**.** *Sea G un grupo topológico abeliano. Si k es un entero positivo y E es un subconjunto k-grande de G, entonces para cada vecindad abierta U de $0 \in G$, existen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in \widehat{G}$, donde $m = k^2$, y $\delta > 0$ tales que*

$$U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \delta) \subseteq U - U + E_{(8)}. \tag{2.19}$$

Demostración. Por el Lema de Følner 2.10, existen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \in G^*$ tales que $U_G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(8)}$, donde el caracter φ_i puede ser discontinuo para $i = 1, 2, \ldots, m$. Nuestra intención es usar el Lema de Prodanov para reemplazar los caracteres discontinuos por continuos con la paga de cambiar $E_{(8)}$ por $U - U + E_{(8)}$.

2.18.1 Afirmación. El conjunto $C := \overline{E_{(8)} + U} \subseteq E_{(8)} + U - U$.

En efecto, sea $x \in \overline{E_{(8)} + U}$. Consideremos la vecindad abierta $x + U$ de x y entonces $(x+U) \cap (E_{(8)} + U) \neq \emptyset$. Un elemento en dicha intersección es de la forma $x + u = e + u'$, donde $e \in E_{(8)}$ y $u, u' \in U$. Así, $x = e + u - u' \in E_{(8)} + U - U$.

Ahora considere al conjunto abierto $X = U \cup (G \setminus C)$ y la función continua $f : X \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in U; \\ 1 & \text{si } x \in G \setminus C. \end{cases} \tag{2.20}$$

Sea H el subgrupo de G^* generado por $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$. Tomemos $x, y \in X$ tales que $x - y \in U_G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m; \frac{\pi}{2})$. Así que si $y \in U$, entonces $x \in E_{(8)} + U \subseteq C$ y consecuentemente $x \notin G \setminus C$, o en otras palabras, $x \in U$. Análogamente, $x \in U$ implica $y \in U$. Así, $f(x) = f(y)$ siempre que $x - y \in U_G(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m; \frac{\pi}{2}) \subseteq E_{(8)}$. Así, la Proposición 2.17 nos dice que podemos aproximar uniformemente a la función f por una combinación lineal de caracteres de H con coeficientes complejos, es decir, podemos encontrar productos de caracteres $\xi_\alpha = \varphi_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot \varphi_m^{a_m}$, con $\alpha = (a_1, \ldots, a_m) \in A$, para algún subconjunto A de $\mathbb{Z}^m$, y $c_\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $|\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \xi_\alpha(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{3}$ para cada $x \in X$. Si $x = 0 \in X$, resulta que $\xi_\alpha(x) = 1 \in \mathbb{T}$ y $|\sum_{\alpha \in A} c_\alpha| \leqslant \frac{1}{3}$. Así $|\sum_{\alpha \in A} c_\alpha| - 1 \leqslant -\frac{2}{3}$, o lo que es equivalente,

$$\frac{2}{3} \leqslant 1 - |\sum_{\alpha \in A} c_\alpha| \leqslant |1 - \sum_{\alpha \in A} c_\alpha| = |\sum_{\alpha \in A} c_\alpha - 1|. \tag{2.21}$$

Dado que $X \subseteq G$ es abierto y f es continua, podemos aplicar la Proposición 2.14 al conjunto convexo $M = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant \frac{1}{3}\}$ y sin pérdida de generalidad podemos asumir que ξ_α es continuo para toda $\alpha \in A$.

Como H tiene m generadores, el subgrupo $H' = H \cap \widehat{G}$ de H tiene a lo más m generadores $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in H'$. Así, $\xi_{\alpha_s} = \chi_1^{s_1(\alpha)} \cdot \ldots \cdot \chi_m^{s_m(\alpha)}$ para apropiados $s_1(\alpha), \ldots, s_m(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Escoja $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| < \frac{1}{3}$. Entonces existe $\delta > 0$ suficientemente pequeño para que $|\xi_{\alpha_s}(x) - 1| \leqslant \varepsilon$ siempre que $x \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \delta)$.

2.18.2 Afirmación. La relación (2.19) se cumple para el δ ya elegido.

Con esto ya habremos acabado. En efecto, supongamos que existe $x \in U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \delta) \setminus (U - U + E_{(8)})$. Entonces por la Afirmación 2.18.1,

$x \in G \setminus C$ y por (2.20), $f(x) = 1$. Así,

$$\begin{aligned}|\sum_{\alpha \in A} c_\alpha - 1| &\leqslant |\sum_{\alpha \in A} c_\alpha (1 - \xi_\alpha(x))| + |\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \xi_\alpha(x) - f(x)| \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{\alpha \in A} |c_\alpha| + \frac{1}{3} < \frac{2}{3},\end{aligned}$$

que contradice (2.21). ■

2.19 Proposición. *Sea (G, τ) un grupo topológico abeliano. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) τ es precompacta.

(b) Existe un grupo H de caracteres continuos de G que separan los puntos de G y tales que $\tau = \mathcal{T}_H$.

Demostración. $(b) \Rightarrow (a)$ Se sigue inmediatamente de la Proposición 2.13. $(a) \Rightarrow (b)$ Consideremos $H = \widehat{(G, \tau)}$, entonces se tiene que $\mathcal{T}_H \subseteq \tau$. Ahora sea U una vecindad abierta de $0 \in G$. Por el Teorema 1.4, siempre es posible encontrar una vecindad abierta V de 0 tal que $V_{(10)} \subseteq U$. Como τ es precompacta, V es un conjunto grande y por el Teorema 2.18, existen m caracteres continuos $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m$ de G, donde $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tales que

$$U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \delta) \subseteq V - V + V_{(8)} = V_{(10)} \subseteq U$$

para algún $\delta > 0$. Por lo tanto, $U \in \mathcal{T}_H$ y $\tau \subseteq \mathcal{T}_H$. Con esto obtenemos la igualdad $\tau = \mathcal{T}_H$ y como τ es precompacta por hipótesis, la Proposición 2.13 permite que H separe los puntos de G. ■

2.20 Proposición (Teorema de Peter-Weyl)**.** *Si G es un grupo abeliano compacto, entonces $\widehat{G}$ separa los puntos de G.*

Demostración. Sea τ la topología de G. Dado que todo grupo compacto es precompacto y por la Proposición 2.19, existe un grupo H de caracteres continuos de G que separa los puntos de G y tal que $\tau = \mathcal{T}_H$. Como $H \subseteq \widehat{G}$, es claro que $\widehat{G}$ también separa los puntos de G. ■

2.21 Proposición. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto tal que el subgrupo $\langle x \rangle$ generado por x es denso en G para algún $x \in G$. Entonces G es discreto o compacto.*

Demostración. Sea $x \in G$ tal que $\langle x \rangle$ es denso en G. Supongamos que la topología inducida sobre $\langle x \rangle$ es discreta. Por la Proposición 1.16, $\langle x \rangle$ es cerrado y por lo tanto, $G = \langle x \rangle$ es discreto.

Supongamos ahora que la topología inducida sobre $\langle x \rangle$ por G no es discreta. Entonces $\langle x \rangle$ es infinito y por tanto algebráicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\langle x \rangle = \mathbb{Z} \subseteq G$ y así, $\mathbb{Z}$ es denso en G.

2.21.1 Afirmación. $\mathbb{Z}$ es precompacto en la topología inducida por G.

Primero, note que todo subconjunto no vacío abierto de $\mathbb{Z}$ contiene enteros arbitrariamente grandes. De otra manera, existiría un subconjunto abierto U de $\mathbb{Z}$ que contiene un elemento maximal, entonces $U \cap (-U)$ es un abierto finito. Dado que G es localmente compacto y por tanto regular, en particular, los puntos son cerrados y con esto se obtiene una contradicción a la suposición de que la topología inducida no era discreta.

Ahora, sea U una vecindad compacta de $0 \in G$. Queremos encontrar un sunconjunto finito $F \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $(U \cap \mathbb{Z}) + F = \mathbb{Z}$, es decir, queremos ver que $U \cap \mathbb{Z}$ es grande en $\mathbb{Z}$.

Sea V una vecindad abierta de $0 \in G$ con $V - V \subseteq U$. Como U es compacta, existen $g_1, g_2, \ldots, g_m \in G$ tales que

$$U \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (g_j + V). \tag{2.22}$$

Por la relación (2.22), para cada $j = 1, 2, \ldots, m$ el conjunto $g_j + V$ contiene elementos arbitrariamente grandes de $\mathbb{Z}$. En particular, existe $n_j \in \mathbb{Z}$, con $n_j > 0$, tal que $n_j \in g_j + V$, o lo que es lo mismo, $g_j \in n_j - V$ para cada $j = 1, 2, \ldots, m$. Así,

$$U \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (g_j + V) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (n_j + V - V) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (n_j + U),$$

y por tanto,

$$U \cap \mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} (n_j + U \cap \mathbb{Z}). \tag{2.23}$$

Tomemos $N = max\{n_1, \ldots, n_m\}$ y $F = \{1, 2, \ldots, N\}$. Dado $t \in \mathbb{Z}$, queremos ver que $t \in (U \cap \mathbb{Z}) + F$. Como $U \cap \mathbb{Z}$ contiene enteros arbitrariamente grandes, $s_0 = min\{s \in U : s \geqslant t\}$ está bien definido y $s_0 \geqslant t$. Entonces (2.23) implica que $s_0 = n_j + u_0$ para algún $j = 1, 2, \ldots, m$ y $u_0 \in U \cap \mathbb{Z}$. Como $u_0 = s_0 - n_j < s_0$, se cumple que $u_0 \leqslant t \leqslant s_0$. Así, $t = k + u_0$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n_j$, y por tanto, $t \in U \cap \mathbb{Z} + \{k\} \subseteq U \cap \mathbb{Z} + F$. Con esto se concluye que $\mathbb{Z} = U \cap \mathbb{Z} + F$.

Ahora, podemos asumir que U tiene cerradura compacta y así,

$$\mathbb{Z} = U \cap \mathbb{Z} + F \subseteq \overline{U} + F.$$

Como $\overline{U} + F$ es un subconjunto denso cerrado y compacto (Proposición 1.2), entonces $G = \overline{U} + F$ es compacto. ■

2.22 Proposición. *Todo grupo abeliano localmente compacto y compactamente generado G tiene un subgrupo $H \cong \mathbb{Z}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y es tal que G/H es compacto.*

Demostración. (I) Supongamos primero que existen $g_1, g_2, \ldots, g_m \in G$ tales que $G = \overline{\langle g_1, g_2, \ldots, g_m\rangle}$. Vamos a proceder por inducción sobre m. Para $m = 1$ podemos aplicar la Proposición 2.21 como sigue: si G es infinito y discreto tomemos $H = G$; si G es compacto, tomemos $H = \{0\}$. Supóngase ahora que la propiedad es válidad para $m \geqslant 1$ y veamos que se mantiene válida si $G = \overline{\langle g_1, g_2, \ldots, g_m, g_{m+1}\rangle}$. Si cada $J_i = \overline{\langle g_i\rangle}$ es compacto, entonces $G = J_1 + \ldots + J_{m+1}$ también es compacto y tomemos $H = \{0\}$. Si $\langle g_{m+1}\rangle$ es discreto, consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G_1 = G/\langle g_{m+1}\rangle$. Note que G_1 tiene un subgrupo denso con m generadores, a saber, el subgrupo generado por $g_1 + \langle g_{m+1}\rangle, \ldots, g_m + \langle g_{m+1}\rangle$. Así, por hipótesis de inducción, existe un subgrupo discreto H_1 de G_1 tal que $H_1 \cong \mathbb{Z}^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ y G_1/H_1 es compacto. Note que por la Proposición 1.16, H_1 es cerrado. Entonces $H = \pi^{-1}(H_1)$ es un subgrupo cerrado y también es numerable pues la preimagen de un elemento de H_1 es numerable y H_1 es numerable.

Ahora si H no es discreto, existe un punto de acumulación $z \in H$. Por la compacidad local de H existe una vecindad compacta U_z de z, entonces o bien U_z contiene una cantidad finita de elementos de H o bien U_z contiene una cantidad no numerable de elementos de H. De cualquier manera esto es imposible pues H es numerable y supusimos que H no era discreto, así que H debe ser discreto. Como $H/\langle g_{m+1}\rangle \cong \mathbb{Z}^n$, se sigue que $H \cong \mathbb{Z}^{n+1}$. Por el Tercer Teorema de Isomorfía, $G/H \cong (G/\langle g_{m+1}\rangle)/(H/\langle g_{m+1}\rangle) \cong G_1/H_1$ es compacto.

(II) Consideremos ahora el caso general. Existe un subconjunto compacto K de G que lo genera. Consideremos una vecindad compacta U de $0 \in G$. Note que $K' = (K+U) - (K+U)$ es una vecindad simétrica compacta de 0 (Proposición 1.2). Entonces $K' + K'$ es también compacto y por tanto existe un subconjunto finito F de G tal que $K'+K' \subseteq K'+F$. Así, $nK' \subseteq K'+(n-1)F$ para cada $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. La última propiedad indica que $G = K' + \langle F \rangle$. Por tanto, para la proyección canónica $\pi : G \to G/\overline{\langle F \rangle}$ se tiene que $\pi(G) = \pi(K) = G/\overline{\langle F \rangle}$, es decir, $G/\overline{\langle F \rangle}$ es compacto. Por (I), existe un subgrupo discreto H de $\overline{\langle F \rangle}$ isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, tal que $\overline{\langle F \rangle}/H$ es compacto. Por la Proposición 1.27 y el Tercer Teorema de Isomorfía, G/H es compacto. ■

2.23 Teorema. *Si G es un grupo abeliano localmente compacto, entonces $\widehat{G}$ separa los puntos de G.*

Demostración. Sean $x \in G \setminus \{0\}$ y V una vecindad compacta de $0 \in G$. Entonces $G_1 = \langle V + \{x\} \rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} n(V + \{x\})$ es un subgrupo abierto (y por tanto cerrado) compactamente generado de G. En particular, G_1 es localmente compacto. Por Proposición 2.22, existe un subgrupo discreto H de G_1 tal que $H \cong \mathbb{Z}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y G_1/H compacto. Note que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} nH = \{0\}$, y por tanto, existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $x \notin nH$. Como H/nH es finito, el cociente $G_2 = G_1/nH$ es compacto. Considere ahora la proyección canónica $\pi : G_1 \to G_2$ y note que $\pi(x) = y \neq 0 \in G_2$. Por la Proposición 2.20, existe un caracter continuo $\xi \in \widehat{G}$ tal que $\xi(y) \neq 0$. Consecuentemente, $\chi = \xi \circ \pi \in \widehat{G_1}$ y es tal que $\chi(x) \neq 0$. Como $\mathbb{T}$ es divisible, la Proposición 1.36 dice que existe $\overline{\chi} \in \widehat{G}$ tal que $\overline{\chi} \restriction_{G_1} = \chi$. Por la Proposición 1.3 y dado que G_1 es abierto en G, se tiene que $\overline{\chi}$ es una extensión continua de χ y por lo tanto $\overline{\chi}(x) \neq 0$. ■

Capítulo 3

Dualidad de Pontryagin

Hemos ya desarrollado teoría bastante importante y ningún resultado de las secciones anteriores es despreciable para este capítulo. Sin embargo, necesitaremos manipular un poco más la teoría de dualidad. En la Sección 3.1, establecemos el teorema de dualidad para grupos discretos y grupos compactos. En la Sección 3.2, se calculan formalmente los grupos duales de ciertos grupos importantes y familiares para el lector. Esto será de utilidad para dar estructura a ciertos grupos topológicos. Finalmente se verifica la dualidad para grupos localmente compactos en el último apartado.

3.1 ⧫ Teoría de dualidad en grupos discretos y grupos compactos

La motivación de esta pequeña sección es demostrar el teorema de Pontryagin-Van Kampen que dice que todo grupo topológico compacto es topológicamente isomorfo a su grupo doble dual. El teorema de Pontryagin-Van Kampen es entonces un caso particular de nuestro principal objetivo que es extender dicho teorema a la clase de los grupos localmente compactos. Cabe mencionar que los enunciados que necesitaremos son consecuencia del Lema de Prodanov 2.14, que nos permite dotar al grupo G, con el que trabajamos, de cualquier topología de grupo; por ejemplo, la topología indiscreta.

Ya que hemos definido al grupo dual de un grupo $G \in \mathcal{L}$, podemos definir a $\pounds(G)$ como el conjunto que consiste de todas las combinaciones lineales de caracteres continuos de G con coeficientes en $\mathbb{C}$. También definimos a $\pounds_0(G)$ de manera similar a $\pounds(G)$ pero con las combinaciones lineales de caracteres continuos no triviales.

3.1 Corolario. *Sean (G, τ) un grupo abeliano, $g \in \pounds_0(G)$ y M un subconjunto convexo cerrado de $\mathbb{C}$. Si $g(x) - c \in M$ para algún $c \in M$ y cada $x \in G$, entonces $-c \in M$.*

Demostración. Supóngase que $g(x) = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i(x)$ para algunos $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ y caracteres no triviales $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k \in \widehat{G}$. Note que χ_i es continuo con la topología τ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Dotemos ahora a G con la topología indiscreta. Así, nigún caracter χ_i es continuo. Apliquemos el Lema de Prodanov 2.14 con G indiscreto, $U = G$ y f la función constante $-c$, por tanto $-c \in M$. ■

Tomando a M como el disco de radio $\varepsilon > 0$ centrado en el origen obtenemos el siguiente corolario:

3.2 Corolario. *Sean (G, τ) un grupo abeliano, $g \in \pounds_0(G)$ y $\varepsilon > 0$. Si $\|g(x) + c\| < \varepsilon$ para algún $c \in \mathbb{C}$ y todo $x \in G$, entonces $|c| < \varepsilon$.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del corolario anterior. ■

3.3 Corolario. *Sean (G, τ) un grupo abeliano y $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k \in \widehat{G}$ caracteres distintos, entonces $\|\chi_0 - \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i\| \geqslant 1$ para cada k-tupla de números complejos $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $\varepsilon = \| \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i - \chi_0\|$. Por hipótesis, $\xi_i = \chi_i \chi_0^{-1}$ es un caracter continuo no trivial para cada $i = 1, 2, \ldots, k$. Así que por la construcción de cada ξ_i y la elección de ε, se tiene que $g = \sum_{i=1}^{k} c_i \xi_i \in \pounds_0$ y $\|g(x) - 1\| = \| \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i \chi_0^{-1} - 1\| \leqslant \varepsilon$. Entonces $|1| \leqslant \varepsilon$ por el Corolario 3.2. ■

3.4 Corolario. *Sean (G, τ) un grupo abeliano y $\chi \in \widehat{G}$ tales que existen $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k \in \widehat{G}$ y $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ de tal forma que $\| \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_i - \chi\| \leqslant \frac{1}{2}$. Entonces $\chi = \chi_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Demostración. La afirmación es clara por el Corolario 3.3, pues si $\chi \neq \chi_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces $\|\chi - \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_i\| \geqslant 1$ contradiciendo nuestras hipótesis. ∎

3.5 Corolario. *Sea (G, τ) un grupo abeliano. Entonces $H = \widehat{(G, \mathcal{T}_H)}$ para cada $H \leqslant G^*$.*

Demostración. Claramente $H \subseteq \widehat{(G, \mathcal{T}_H)}$. Ahora sea $\chi \in \widehat{(G, \mathcal{T}_H)}$. Para cada $\varepsilon > 0$ fijo, el conjunto $O = \{a \in \mathbb{T} : |a - 1| < \varepsilon\}$ es una vecindad abierta de $1 \in \mathbb{T}$. Por definición de $\mathcal{T}_H$ y la continuidad de χ, existen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in H$ y $\delta > 0$ tales que $\chi(U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \delta)) \subseteq O$. Ahora, si $x - y \in (U_G(\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m; \delta)$ entonces $\chi(x - y) \in O$, es decir, $|\chi(x) - \chi(y)| = |\chi(x)\chi^{-1}(y) - 1| < \varepsilon$. En otras palabras, χ satisface la condición (b) de la Proposición 2.17 aplicada para $X = G$. Así, existen diferentes elementos $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_m \in H$ y $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ tales que $\|\sum_{i=1}^{m} c_i\chi_i - \chi\| \leqslant \frac{1}{2}$. Nuestro Corolario 3.4 sugiere que $\chi = \chi_i$ para algún $i = 1, 2, \ldots, m$, por tanto $\chi \in H$. ∎

3.6 Proposición. *Sea G un grupo abeliano. Entonces la aplicación $H \overset{T}{\mapsto} \mathcal{T}_H$ es una biyección que preserva el orden entre subgrupos $H \leqslant G^*$ y topologías de grupo totalmente acotadas sobre G.*

Demostración. La condición (a) de la Proposición 2.19 nos dice que todas las topologías $\mathcal{T}_H$ son totalmente acotadas. Note que T es suprayectiva pues si τ es una topología totalmente acotada (y por tanto precompacta), entonces por el inciso (b) de la Proposición 2.19, existe $H \leqslant \widehat{G}$ tal que $\tau = \mathcal{T}_H$. También se tiene que T es inyectiva pues si $\mathcal{T}_{H_1} = \mathcal{T}_{H_2}$ con $H_1, H_2 \leqslant G^*$, entonces por el Corolario 3.6, $H_1 = H_2$. Así, T es una biyección. Claramente $\mathcal{T}_{H_1} \subseteq \mathcal{T}_{H_2}$ siempre que $H_1 \subseteq H_2$ por lo que T preserva el orden. ∎

3.7 Corolario. *Si (G, τ) es un grupo abeliano compacto y H es un subgrupo de $\widehat{G}$ que separa puntos de G, entonces $H = \widehat{G}$.*

Demostración. Por la Proposición 2.19, $\tau = \mathcal{T}_{\widehat{G}}$. Como $\mathcal{T}_H \subseteq \mathcal{T}_{\widehat{G}}$ y $\mathcal{T}_H$ es Hausdorff, con la Proposición 3.6 obtenemos $\mathcal{T}_H = \mathcal{T}_{\widehat{G}}$. Aplicando de nuevo la Proposición 3.6 se concluye que $H = \widehat{G}$. ∎

3.8 Definición. Para un elemento fijo $x \in G$, donde $G \in \mathcal{L}$, definimos la función $\widehat{x} : \widehat{G} \to \mathbb{T}$ dada por $\widehat{x}(\chi) = \chi(x)$. También podemos definir a la función

$$\begin{aligned} \omega_G : G &\to \widehat{\widehat{G}}; \\ x &\mapsto \widehat{x}. \end{aligned}$$

3.9 Teorema. *La función $\omega_G : G \to \omega_G(G) \subseteq \widehat{\widehat{G}}$ es un isomorfismo continuo.*

Demostración. Para $\chi, \varphi \in \widehat{G}$ y $x \in G$, tenemos que $\widehat{x}(\chi\varphi) = \chi\varphi(x) = \chi(x)\varphi(x) = \widehat{x}(\chi)\widehat{x}(\varphi)$. Es claro que $\widehat{x}$ es continuo pues $|\widehat{x}(\chi) - \widehat{x}(\varphi)| < \varepsilon$ siempre que $\chi\varphi^{-1} \in W_G(\{x\}, \varepsilon)$. Así, $\omega_G(x) = \widehat{x}$ es efectivamente un elemento de $\widehat{\widehat{G}}$.

Note ahora que ω_G es un homomorfismo pues si $x, y \in G$ y $\xi \in \widehat{G}$, entonces

$$\omega_G(xy)(\xi) = \xi(xy) = \xi(x)\xi(y) = (\omega_G(x)(\xi))(\omega_G(y)(\xi)).$$

Como ξ es arbitraria, entonces $\omega_G(xy) = \omega_G(x)\omega_G(y)$. También se tiene que ω_G es inyectiva pues si $x, y \in G$ son distintos, entonces el Teorema 2.23 nos dice que existe $\chi_0 \in \widehat{G}$ tal que $\chi_0(x) \neq \chi_0(y)$, es decir, $\widehat{x} \neq \widehat{y}$. Así, ω_G es un isomorfismo de G a $\omega_G(G)$.

Para ver que ω_G es continuo es suficiente probar que es continuo en $0 \in G$ de acuerdo a la Proposición 1.3. Sea Γ un subconjunto compacto de $\widehat{G}$ y $\varepsilon > 0$. Elíjase una vecindad U de $0 \in G$ tal que $\overline{U}$ es compacto, y considere la vecindad $W_G(\overline{U}, \varepsilon/2)$ de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$. Como Γ es compacto, existen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n \in \widehat{G}$ tales que

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \chi_i \, W_G\left(\overline{U}, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Sea V una vecindad de $0 \in G$ de tal forma que $V \subseteq U$ y $|\chi_i(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in V$ y $i = 1, 2, \ldots, n$. Esto es posible porque cada χ_i es continuo. Ahora si $x \in V$ y $\chi \in \Gamma$, entonces $|\chi_i(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ y $|\chi_i(x) - \chi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ par algún i. Así, $|\chi(x) - 1| < \varepsilon$, es decir, $|\widehat{x}(\chi) - 1| < \varepsilon$ para todo $\chi \in \Gamma$. En otras palabra, $\omega_G(V) \subseteq W_{\widehat{G}}(\Gamma, \varepsilon)$. ■

3.10 Teorema. *Si G es un grupo abeliano discreto o compacto, entonces $\omega_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. En virtud de la Proposición 3.9, lo único que veremos es que ω_G es suprayectiva y abierta, en ambos casos.

Si G es discreto, entonces por la Proposición 1.39, el grupo $\widehat{G}$ es compacto. Dado que ω_G es inyectiva, el subgrupo $\omega_G(G)$ de $\widehat{\widehat{G}}$ separa los puntos de $\widehat{G}$ y por el Corolario 3.5, se tiene que $\omega_G(G) = \widehat{\widehat{G}}$. De nuevo por la Proposición 1.39, $\widehat{\widehat{G}}$ es discreto y por tanto ω_G es abierta, es decir, ω_G es un isomorfismo topológico.

Veamos ahora el caso en que G es compacto. Por la compacidad de G, $\omega_G(G) = K$ es un subgrupo cerrado de $\widehat{\widehat{G}}$ pues este último es Hausdorff. Note también que ω_G es cerrada. Así, $\omega_G : G \to K$ es un isomorfismo topológico. Supongamos para un contradicción que $K \neq \widehat{\widehat{G}}$. Entonces $\widehat{\widehat{G}}/K$ es un grupo compacto no trivial por la Proposición 1.39. Aplicando el Teorema de Peter-Weyl 2.20 a $\widehat{\widehat{G}}/K$ se obtiene que existe un elemento no trivial $\xi \in \widehat{\widehat{\widehat{G}}}$ tal que $\xi(K) = 1$. Como $\widehat{G}$ es discreto por la Proposición 1.39, entonces el caso anterior indica que $\omega_{\widehat{G}} : \widehat{G} \to \widehat{\widehat{\widehat{G}}}$ es un isomorfismo topológico. Así, debe existir $\chi \in \widehat{G}$ tal que $\xi = \omega_{\widehat{G}}(\chi)$. Ahora para cada $x \in G$, uno obtiene que $\omega_G(x) \in K$, por tanto

$$1 = \xi(\omega_G(x)) = \omega_{\widehat{G}}(\chi)(\omega_G(x)) = \omega_G(x)(\chi) = \chi(x).$$

Es decir, $\chi = \epsilon_1 \in \widehat{G}$ y consecuentemente $\xi = \epsilon_1 \in \widehat{\widehat{\widehat{G}}}$ lo cual es una contradicción. Por tanto $K = \widehat{\widehat{G}}$. ■

3.2 ♦ Teoría de estructura para grupos abelianos localmente compactos

3.11 Definición. Un ***grupo abeliano localmente compacto elemental*** es un grupo topológico que es isomorfo de manera topológica a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \times \mathbb{T}^s \times F$, donde $n, m, s \in \mathbb{N}$ y F es un grupo abeliano finito. Si $n = m = 0$, el grupo será ***compacto elemental***.

3.12 Definición. Sea G un grupo abeliano localmente compacto y M un subconjunto no vacío de G. El conjunto

$$A(\widehat{G}, M) = \{\chi \in \widehat{G} : \chi(M) = \{1\} \in \mathbb{T}\}$$

se llama el ***aniquilador*** de M en G.

3.13 Proposición. *Para un grupo abeliano localmente compacto G y un subconjunto no vacío M de G se tiene lo siguiente:*

(a) $A(\widehat{G}, M)$ *es un subgrupo cerrado de* $\widehat{G}$.

(b) $A(\widehat{G}, \overline{\langle M\rangle}) = A_G(M)$.

(c) $A(\widehat{G}, G) = \{\epsilon_1\}$.

(d) Si H es un subgrupo compacto de G, entonces $A(\widehat{G}, H)$ es abierto.

(e) $A(\widehat{G}, \{0\}) = \widehat{G}$.

(f) $A(\widehat{G}, M_1) \subseteq A(\widehat{G}, M_2)$ *siempre que* $M_2 \subseteq M_1$.

Demostración. (a) Es claro que $A(\widehat{G}, M)$ es un subgrupo de $\widehat{G}$. Consideremos ahora a $\chi \in \widehat{G} \setminus A(\widehat{G}, M)$. Entonces existe $m \in M$ tal que $\chi(m) \neq 1 \in \mathbb{T}$. Tomemos una vecindad abierta U_m de $\chi(m)$ tal que $1 \notin U_m$. Por lo tanto el abierto $W(\{m\}, U_m)$ de la topología compacto-abierta de $\widehat{G}$ es una vecindad de χ y es tal que $W_G(\{m\}, U_m) \cap A(\widehat{G}, M) = \emptyset$.

(b) Claramente $A(\widehat{G}, M) \subseteq A(\widehat{G}, \overline{\langle M\rangle})$. Ahora si $\chi \in \widehat{G}$ es tal que $\chi(M) = \{1\}$, entonces $\chi(\langle M\rangle) = \{1\}$ y por continuidad $\chi(\overline{\langle M\rangle}) = \{1\}$.

(c) Este inciso es trivial desde que $\widehat{G}$ separa los puntos de G por el Teorema 2.23.

(d) Veremos que $W_G(H, \Lambda_1) = A(\widehat{G}, H)$. En efecto, es claro que $A(\widehat{G}, H) \subseteq W_G(H, \Lambda_1)$. También se tiene que $\mathbb{T}$ no acepta subgrupos propios no triviales dentro de Λ_1.

Los incisos (e) y (f) son triviales. ■

3.14 Proposición. *Sea K un subgrupo compacto de un grupo localmente compacto G. Entonces todo caracter continuo sobre K se puede extender a un caracter continuo sobre G.*

Demostración. Denotemos por H al subgrupo de $\widehat{K}$ que consiste de aquellos caracteres continuos de K que se pueden extender continuamente a todo G. Por el Teorema 2.23, los caracteres continuos de G separan los puntos de G; en particular, sus restricciones a K separan los puntos de K. Por el Corolario 3.7, $H = \widehat{K}$. ■

3.15 Proposición. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto y H un subgrupo abierto de G. La función $\sigma : \widehat{G} \to \widehat{H}$ dada por $\sigma(\chi) = \chi \restriction_H$, es un homomorfismo continuo, abierto y suprayectivo con kernel $A(\widehat{G}, H)$. Así, $\widehat{H}$ es topológicamente isomorfo a $\widehat{G}/A(\widehat{G}, H)$.*

Demostración. Es obvio que σ es un homomorfismo pues simplemente se restringe el dominio de definición de cada $\chi \in \widehat{G}$. La Proposición 1.36 y el hecho de que H es abierto implican que σ es suprayectiva. Si E es un subconjunto compacto de H, entonces

$$\{\chi \in \widehat{H} : |Arg(\chi(x))| < \varepsilon, x \in E\} = W_G(E, \varepsilon).$$

Como E es compacto en G, σ es continuo.

3.15.1 Afirmación. Veremos que σ es abierta y con esto acabaríamos la prueba.

Por el inciso (c) de la Proposición 1.39, es posible encontrar una vecindad compacta U de $0 \in G$ de tal forma que $W_G(U, \overline{\Lambda}_4)$ es compacto en $\widehat{G}$. En particular, podemos suponer que $U \subseteq H$.

Afirmamos ahora que $\overline{W_G(U, \Lambda_4)} \subseteq W_G(U, \overline{\Lambda}_4)$. Supongamos que existen $\chi \in \overline{W_G(U, \Lambda_4)}$ y $g \in G$ tales que $|Arg(\chi(g))| > \frac{\pi}{8}$. Entonces podemos tomarnos una red $\{\chi_\alpha : \alpha \in A\}$ de elementos en $W_G(U, \Lambda_4)$, donde A es un conjunto dirigido, tal que χ_α converge a χ. Así, existe un $\alpha_0 \in A$ para el cual la distancia entre $\chi_\alpha(g)$ y $\chi(g)$ es tan pequeña como queramos siempre y cuando $\alpha_0 \preccurlyeq \alpha$. Esto es una contradicción al hecho de que $\chi_\alpha \in W_G(U, \Lambda_4)$ para todo $\alpha \in A$.

Así, $W_G(U, \Lambda_4)$ es un subconjunto abierto de $\widehat{G}$ con clausura compacta. Ahora sean $\widehat{G}_1$ y $\widehat{H}_1$ lo subgrupos de $\widehat{G}$ y $\widehat{H}$, respectivamente, generados por $W_G(U, \Lambda_4)$ y $W_H(U, \Lambda_4)$. La igualdad obvia $\sigma(W_G(U, \Lambda_4)) = W_H(U, \Lambda_4)$ implica que $\sigma(\widehat{G}_1) = \widehat{H}_1$. Como $\widehat{G}_1$ es σ-compacto, pues todo subgrupo abierto es también cerrado por Proposición 1.13, el Teorema 1.31 muestra que $\sigma : \widehat{G}_1 \to \widehat{H}_1$ es una función abierta. Como $\widehat{G}_1$ y $\widehat{H}_1$ son subgrupos abiertos de $\widehat{G}$ y $\widehat{H}$, respectivamente, una variante de la Proposición 1.3 sugiere que σ es una función abierta de $\widehat{G}$ a $\widehat{H}$. Claramente $ker(\sigma) = A(\widehat{G}, H)$, por lo que $\widehat{G}/A(\widehat{G}, H)$ es topológicamente isomorfo a $\widehat{H}$. ■

3.16 Proposición. *Sean G un grupo abeliano localmente compacto, H un subgrupo cerrado de G y $\pi : G \to G/H$ la proyección canónica. Entonces* *la función* $\rho : \widehat{G/H} \to A(\widehat{G}, H)$ *dada por* $\rho(\psi) = \psi \circ \pi$*, es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Como π es un homomorfismo continuo y $\pi^{-1}(\{H\}) = H$, es claro que $\psi \circ \pi \in A(\widehat{G}, H)$ para todo $\psi \in \widehat{G/H}$. Como $(\psi_1\psi_2) \circ \pi = (\psi_1 \circ \pi)(\psi_2 \circ \pi)$, ρ es un homomorfismo. Un caracter $\chi_1 \in A(\widehat{G}, H)$ es constante en cada clase xH, y así, la función ψ_1 definida sobre G/H dada por $\psi_1(xH) = \chi_1(x)$, está bien definida y claramanete es un homomorfismo.

Ahora para $\varepsilon > 0$, existe una vecindad U de $0 \in G$ tal que $|\chi_1(x) - 1| < \varepsilon$ para todo $x \in U$. El subconjunto $\{xH : x \in U\}$ de G/H es una vecindad de $\{H\}$ para el cual $|\psi_1(xH) - 1| < \varepsilon$. Así, ψ_1 es continuo en $\{H\}$ y por tanto continuo en todo G/H. Como $\chi_1 = \psi_1 \circ \pi$ se tiene que ρ es suprayectiva. Es claro también que $\psi \circ \pi = \epsilon_1$ sólo si $\psi = \epsilon_1$, con esto obtenemos que ρ es un isomorfismo continuo.

Finalmente para ver que ρ es abierta, tómese un subconjunto compacto F de G, entonces $\{xH : x \in F\}$ es un subconjunto compacto de G/H. Además, cada subconjunto compacto de G/H tiene esta forma por la Proposición 1.26. Por tanto se obtiene,

$$\rho(W_{G/H}(F, \varepsilon)) = W_G(F, \varepsilon) \cap A(\widehat{G}, H).$$

Así, ρ lleva básicos abiertos de $0 \in \widehat{G/H}$ a básicos abiertos de $0 \in A(\widehat{G}, H)$ y ρ es un isomorfismo topológico. ■

3.17 Proposición. *Sean* $G_1, G_2 \dots, G_n$ *grupos abelianos localmente compactos. Para cada* $(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in \Pi_{i=1}^n \widehat{G_i}$*, considere la función*

$$\begin{gathered}[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n] : \Pi_{i=1}^n G_i \longrightarrow \mathbb{T}, \\ (g_1, g_2, \dots, g_n) \longmapsto \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)\dots\chi_n(g_n).\end{gathered}$$

Entonces la función

$$\begin{gathered}A : \Pi_{i=1}^n \widehat{G_i} \longrightarrow \widehat{\Pi_{i=1}^n G_i}, \\ (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \mapsto [\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n],\end{gathered}$$

es un isomorfismo topológico.

Demostración. Es claro que la función $[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n]$ es continua pues χ_i es continuo para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Por otro lado, se puede probar fácilmente por inducción sobre n que A es inyectiva. Veamos que A es suprayectiva. Sea $\psi \in \widehat{\Pi_{i=1}^{n} G_i}$. Para cada $(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in \Pi_{i=1}^{n} G_i$ tenemos que

$$\psi(g_1, g_2, \ldots, g_n) = \psi(g_1, e_2, \ldots, e_n)\psi(e_1, g_2, \ldots, e_n) \ldots \psi(e_1, e_2, \ldots g_n),$$

donde e_i denota el elemento identidad para el grupo G_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Si definimos al caracter

$$\chi_i : G_i \longrightarrow \mathbb{T},$$
$$g_i \mapsto \psi(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, g_i, e_{i+1}, \ldots, e_n);$$

se cumple que $\chi_i \in \widehat{G_i}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\psi = [\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n]$. Así, A es suprayectiva.

Para la continuidad de A considere una vecindad abierta $W(F, \Lambda_1)$ del elemento trivial del grupo dual de $\Pi_{i=1}^{n} G_i$, donde F es un subconjunto compacto de $\Pi_{i=1}^{n} G_i$. Así, consideremos al subconjunto compacto $F_i = p_i(F)$ de G_i, donde $i = 1, 2, \ldots, n$ y p_i es la proyección coordenada en la entrada i. Por tanto, $W(F_i, \Lambda_n)$ es una vecindad abierta del elemento trivial de $\widehat{G_i}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Consecuentemente,

$$A(\Pi_{i=1}^{n} W(F_i, \Lambda_n)) \subseteq W(F, \Lambda_1)$$

Finalmente A será abierta pues si $W(F_i, \varepsilon_i)$ es una vecindad del elemento trivial de $\widehat{G_i}$, con $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $F = \Pi_{i=1}^{n} F_i$ es compacto y considerando $\varepsilon = min\{\varepsilon_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$, obtenemos

$$W(F, \varepsilon) \subseteq A(\Pi_{i=1}^{n} W(F_i, \varepsilon_i)).$$

Finalmente, A es un isomorfismo topológico. ■

Después de los siguientes lemas presentaremos siete importantes ejemplos de grupos duales y uno más que queda fuera de la clase de los grupos localmente compactos que es el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$. El ejemplo de los racionales muestra que existen grupos topológicos que no son localmente compactos y que no son topológicamente isomorfos a su doble dual.

La dualidad de los grupos del primer ejemplo serán de gran ayuda para establecer una estructura para grupos topológicos abstractos. También, para nuestros confines solamente presentaremos el grupo dual de $\mathbb{Q}$ cuando está dotado con la topología relativa como se muestra en el segundo ejemplo, aunque en el artículo [San03] se presentan los grupos duales de $\mathbb{Q}$ cuando está dotado con diferentes topologías como la discreta, que es el caso trivial; la topología p-ádica y la topología de Borh.

3.18 Lema. *Sea G un grupo topológico y H un subgrupo denso en G. Entonces todos caracter continuo de H se puede extender a un caracter continuo de G.*

Demostración. Sea $\chi \in \widehat{H}$. Para cada $x \in G = \overline{H}$, existe una red $\{x_\alpha : \alpha \in D\}$ de elementos en H que converge a x. Así, para cada $x \in G$ podemos definir

$$\chi(x) = \lim_{\alpha \in D} \chi(x_\alpha).$$

Es claro que (χ) es un homomorfismo y es continuo, es decir, es un caracter continuo de $\widehat{G}$. ∎

3.19 Lema. *Si H es un subgrupo cerrado propio del grupo $\mathbb{R}$. Entonces $H = \{0\}$ o $H = \langle r \rangle$ para algún $r \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Como H es un subconjunto propio y cerrado de $\mathbb{R}$, existe un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ tal que $I \cap H = \emptyset$. Sea afirma que H es discreto. Por la Proposición 1.14, basta ver que H cuenta con un punto aislado. Existe $x \in I$ tal que $0 \in x + I$. Ahora supóngase que existe $y \in H \cap (x + I)$ con $y \neq 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $ny \in I$, contradiciendo que $H \cap I = \emptyset$. Así, H es discreto. Tomemos ahora $h = inf\{h' \in H : h' > 0\}$. Note que $h > 0$ y así, $H = \langle h \rangle$. ∎

3.20 Ejemplo. (1) Consideremos al grupo $\mathbb{T}$. La función $exp(it) \mapsto exp(it)$, con $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, es claramente un caracter continuo de $\mathbb{T}$ y separa sus puntos. Así, el grupo libre generado por un elemento $\langle exp(it) \rangle$ es un subgrupo de $\widehat{\mathbb{T}}$ que separa los puntos de $\mathbb{T}$ y por el Corolario 3.7, $\langle exp(it) \rangle = \widehat{\mathbb{T}}$. Dado que $\widehat{\mathbb{T}}$ es discreto en virtud de la Proposición 1.39, entonces $\widehat{\mathbb{T}}$ es topológicamente isomorfo al grupo discreto $\mathbb{Z}$.

(2) Ahora tomemos en cuenta al grupo $\mathbb{Z}$. El Teorema 3.9 nos dice que $\mathbb{T}$ y $\widehat{\widehat{\mathbb{T}}}$ son topológicamente isomorfos y dado que $\mathbb{Z} \cong \widehat{\mathbb{T}}$ por (1), se obtiene que $\widehat{\mathbb{Z}}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}$.

(3) Sea $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$ y considere a $\mathbb{Z}_m$. La aplicación $k \mapsto exp(\frac{2\pi ik}{m})$, donde $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, es un caracter continuo de $\mathbb{Z}_m$ que separa sus puntos. Como en (1), se ve que cada caracter de $\mathbb{Z}_m$ tiene la forma $k \mapsto exp(\frac{2\pi ilk}{m})$ donde $0 \leqslant l \leqslant m-1$. Así, $\widehat{\mathbb{Z}_m}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}_m$.

(4) Sea G un grupo abeliano finito. De acuerdo con [Rot02, Th. 6.11], $G = \mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_k}$, para enteros $m_i > 1$, con $i = 1, 2, \ldots, k$, y cada uno como potencia de un primo. Por el inciso (3) y la Proposición 3.17, $\widehat{G}$ es topológicamente isomorfo a G.

(5) Para el grupo aditivo $\mathbb{R}$, tomemos un elemento fijo $y \in \mathbb{R}$. La función $\chi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ dada por $x \mapsto exp(iyx)$, es claramente un caracter continuo de $\mathbb{R}$. Lo que veremos es que todo elemento $\chi \in \widehat{\mathbb{R}}$ tiene esta forma. Claro que $ker(\chi)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$ pues χ es contunio. Por el Lema 3.19, tenemos que $ker(\chi) = \{0\}$, $ker(\chi) = \mathbb{R}$ o $ker(\chi) = \langle r \rangle$ para algún $r \in \mathbb{R}$.

Si $ker(\chi) = \mathbb{R}$ entonces $\chi = \epsilon_1$, es decir, $\chi = \chi_0$.

En el caso en que $ker(\chi) = \{0\}$, se tiene que $\chi([0, 1])$ es una vecindad conexa y compacta de $1 \in \mathbb{T}$. Así, $\chi([0, 1])$ o bien es un arco de $\mathbb{T}$ o bien es simplemente $\{1\}$. Pero en este caso, $\chi([0, 1])$ no es $\{1\}$ por nuestra suposición previa. Así, para $m \in \mathbb{Z}$ suficientemente grande, existe $a \in (0, 1]$ tal que $\chi(a) = exp(\frac{2\pi i}{m})$, lo cual implica que $\chi(ma) = 1$, contradiciendo nuestra suposición.

Finalmente podemos suponer que $ker(\chi) = \langle r \rangle$ para algún $r \in \mathbb{R}$, incluso podemos asumir que $r > 0$. Como

$$1 = \chi(r) = \chi\left(2 \cdot \frac{r}{2}\right) = \chi\left(\frac{r}{2}\right)^2$$

y $0 < \frac{r}{2} < r$, obtenemos que $\chi(\frac{r}{2}) = -1$. Por tanto también se tiene que $\chi(\frac{r}{4})^2 = \chi(\frac{r}{2}) = -1$, es decir, $\chi(\frac{r}{4}) = exp(\frac{\pi i}{2})$ o $\chi(\frac{r}{4}) = -exp(\frac{\pi i}{2})$. Si la segunda igualdad se cumple, podemos fijarnos en $\overline{\chi}$ y así, sin pérdida de generalidad, consideraremos que $\chi(\frac{r}{4}) = exp(\frac{\pi i}{2})$.

3.20.1 Afirmación. Se cumple que $\chi(\frac{r}{2^k}) = exp(\frac{2\pi i}{2^k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ya vimos que para $k = 0, 1, 2$, se cumple la igualdad. Supongamos que se preserva para un $n \in \mathbb{N}$ fijo. Así tendremos o bien que

$$\chi\left(\frac{r}{2^{n+1}}\right) = exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n+1}}\right),$$

o bien,

$$\chi\left(\frac{r}{2^{n+1}}\right) = -exp\left(\frac{2\pi i}{2^{n+1}}\right).$$

Si la segunda igualdad se cumple, entonces $\chi([\frac{r}{2^{n+1}}, \frac{r}{2^n}])$ es una vecindad conexa y compacta o bien de 1, o bien de -1 en $\mathbb{T}$. Así, debe existir algún $a \in (\frac{r}{2^{n+1}}, \frac{r}{2^n})$ de tal forma que $\chi(a) = 1$ o $\chi(a) = -1$. De cualquier manera, $\chi(2a) = 1$ y $0 < 2a < \frac{r}{2^{n-1}} \leqslant r$. Esto nos lleva a cotradecir el hecho de que r es el real positivo más pequeño tal que $\chi(r) = 1$. Así, $\chi(\frac{r}{2^{n+1}}) = exp(\frac{2\pi i}{2^{n+1}})$.

Es ahora obvio que $\chi(dr) = exp(2\pi id)$ para cualquier número racional diádico d. Por la continuidad de χ tendremos que $\chi(xr) = exp(ix2\pi r)$ para cualquier real $x \in \mathbb{R}$, o de manera equivalente,

$$\chi(x) = exp\left(ix\left(\frac{2\pi}{r}\right)\right) = \chi_{\frac{2\pi}{r}}(x).$$

También es fácil ver, como lo hemos hecho anteriormente ($\chi_{(y+z)} = \chi_y\chi_z$, $\chi_{-y} = \chi_y^{-1}$), que la aplicación $y \mapsto \chi_y$ es un isomorfismo así que el grupo aditivo $\mathbb{R}$ es isomorfo a $\widehat{\mathbb{R}}$. Para ver que $f(y) = \chi_y$ es un homeomorfismo note que las topologías de $\mathbb{R}$ y $\widehat{\mathbb{R}}$ concuerdan en cierta manera, pues si $W_{\mathbb{R}}([-a,a], \Lambda_1)$ es una vecindad abierta de $\epsilon_1 \in \widehat{\mathbb{R}}$, entonces $f((-\frac{1}{4a}, \frac{1}{4a})) = W_{\mathbb{R}}([-a,a], \Lambda_1)$. Así, $f : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}$ es un isomorfismo topológico.

(6) En virtud del inciso (5) y la Proposición 3.17, se tiene para cada $n \in \mathbb{N}$, $\widehat{\mathbb{R}^n}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

(7) El grupo doble dual $\widehat{\widehat{\mathbb{R}}}$ se puede identificar topológicamente con $\mathbb{R}$. En efecto, a partir del inciso (5), cada caracter continuo de $\mathbb{R}$ es de la forma $x \mapsto exp(ixy) = \chi_y$, para algún $y \in \mathbb{R}$, y la aplicación $y \mapsto \chi_y$ es un isomorfismo topológico de $\widehat{\mathbb{R}}$ a $\mathbb{R}$. Así, cada elemento en $\widehat{\widehat{\mathbb{R}}}$ es de la forma $\chi_y \mapsto exp(i\alpha y)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Esto es precisamente el caracter $\omega_{\mathbb{R}}(\alpha)$ operado sobre el grupo dual $\widehat{\mathbb{R}}$. Así, el homomorfismo $\omega_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \widehat{\widehat{\mathbb{R}}}$ es suprayectivo. Como $\mathbb{R}$ es σ-compacto, el Teorema 3.9 y la Proposición 1.31 confirman que $\omega_{\mathbb{R}}$ es un isomorfismo topológico.

3.21 Ejemplo. En este ejemplo se verifica que el grupo dual de los racionales $\mathbb{Q}$ es topológicamente isomorfo al grupo aditivo de los reales $\mathbb{R}$.

Sea $\Lambda_\varepsilon = \{t \in \mathbb{T} : |Arg(t)| < \varepsilon\}$. Consideremos la aplicación restricción

$$\begin{aligned} \rho : \widehat{\mathbb{R}} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{Q}}, \\ \chi &\mapsto \chi\restriction_{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Es claro que ρ es un homomorfismo. Ahora como $\overline{\mathbb{Q}} = \widehat{\mathbb{R}}$, se deduce que ρ es inyectiva, y también por el Lema 3.18, es suprayectiva. Así, ρ es un isomorfismo algebráico entre $\widehat{\mathbb{R}}$ y $\widehat{\mathbb{Q}}$.

Ahora consideremos el isomorfismo topológico

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\longrightarrow \widehat{\mathbb{R}}, \\ r &\mapsto \chi_r, \end{aligned}$$

donde $\chi_r(x) = e^{i\pi r x}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, véase Ejemplo 5) 3.20. Note que la composición $\theta = \rho \circ \gamma$ es un isomorfismo algebráico de $\mathbb{R}$ a $\widehat{\mathbb{Q}}$. Resta ver que θ es homeomorfismo.

Para ver que θ es continua tomemos un subconjunto compacto K de $\mathbb{Q}$ y $\varepsilon > 0$; y así, $W_{\mathbb{Q}}(K, \varepsilon)$ es una vecindad de $\epsilon_1 \in \widehat{\mathbb{Q}}$. Como K es compacto en $\mathbb{Q}$, K es acotado, es decir, existe $M > 0$ tal que $|x| < M$ para todo $x \in K$. Consideremos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ y $r \in (-\delta, \delta)$. Como $\theta(r)(x) = \chi_r \restriction_{\mathbb{Q}} (x) = e^{i\pi r x}$ y para todo $x \in K$ se tiene que $|rx| = |r||x| < \delta M = \varepsilon$, resulta que $\theta(r)(x) \in \Lambda_\varepsilon$ para cada $x \in K$, en otras palabras, $\theta(r) \in W_{\mathbb{Q}}(K, \varepsilon)$. Por tanto, $\theta((-\delta, \delta)) \subseteq W_{\mathbb{Q}}(K, \varepsilon)$.

Para observar que θ es abierta, la idea es tomar una abierto básico $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ de $0 \in \mathbb{R}$, con $n \geqslant 4$ entero. Si tomamos al subconjunto compacto $K = \{0, 1, -1\} \cup \{\frac{1}{2m} : m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ de $\mathbb{Q}$, entonces $W_{\mathbb{Q}}(K, 1/n)$ es una vecindad de $\epsilon_1 \in \widehat{\mathbb{Q}}$. Sean $\chi \in W_{\mathbb{Q}}(K, 1/n)$ y $r \in \mathbb{R}$, con $\chi \neq \epsilon_1$ y $r \neq 0$, respectivamente, tales que $\theta(r) = \chi_r \restriction_{\mathbb{Q}} = \chi$. Con estas herramientas se puede verificar fácilmente, por medio de un par de cuentas, que $|r| < \frac{1}{n}$, tal y como se ve en el interesante artículo [San03]. Así, $r \in (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Por lo que si $\theta(r) = \chi_r \restriction_{\mathbb{Q}} = \chi \in W_{\mathbb{Q}}(K, 1/n)$, resulta que $W_{\mathbb{Q}}(K, 1/n) \subseteq \theta((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$.

3.22 Proposición. *Sean $N_1, N_2, \ldots, N_m$ subgrupos de un grupo topológico abeliano G con las siguientes propiedades:*

(a) $\sum_{i=1}^{m} N_i = G$.

(b) $(\sum_{i=1}^{k} N_i) \cap N_{k+1} = \{0\}$, *donde* $k = 1, 2, \ldots, m-1$.

(c) Si U_j es una vecindad de 0 en N_j en la topología relativa, con $j = 1, 2, \ldots, m$, entonces $\sum_{i=1}^{m} U_i$ contiene una vecindad de 0 en G.

Entonces G es topológicamente isomorfo a $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$.

Demostración. Las condiciones (a) y (b) implican que cada $g \in G$ se puede escribir de manera única como la suma $y_1 + y_2 + \ldots + y_m$, donde $y_i \in N_i$ y $i = 1, 2, \ldots, m$. Consideremos a la función

$$f : N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m \longrightarrow G;$$
$$(y_1, \ldots, y_m) \mapsto y_1 + y_2 + \ldots + y_m.$$

Claramente f es un isomorfismo algebráico por el comentario inicial. La continuidad de f está dada porque la función multiplicación de la Definición 1.1 es continua y la continuidad de f^{-1} está garantizada por la condición (c). Así, f es un isomorfismo topológico. ■

3.23 Proposición. *Sean G un grupo abeliano NCL y $N_1, N_2, \ldots, N_m$ subgrupos localmente compactos y σ-compactos de G que satisfacen las condiciones (a) y (b) de la Proposición 3.22. Entonces G es topológicamente isomorfo a $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$.*

Demostración. La función $f : N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m \to G$ de la Proposición 3.22, es un isomorfismo continuo y suprayectivo, pues se cumple (a) y (b). Note que por hipótesis, $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$ un grupo localmente compacto y σ-compacto. Por tanto, en virtud de la Proposición 1.31, f es abierta. ■

3.24 Proposición. *Sean G un grupo topológico abeliano con elemento identidad 0, H un subgrupo de G y $f : G \to H$ un homomorfismo continuo suprayectivo tal que $f(h) = h$ para todo $h \in H$. Entonces H es cerrado, G es topológicamente isomorfo a $H \times f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(0)$ es topológicamente isomorfo a G/H.*

Demostración. Sea $L = f^{-1}(0)$. Claro que L es un subgrupo cerrado de G. Para $x \in G$ se tiene que $x = f(x) - f(x) + x \in H + L$, pues $f(-f(x) + x) = -f(f(x)) + f(x) = 0$. Así, $G = H + L$. Ahora es claro que $H \cap L = \{0\}$ pues $f \restriction_H$ es la función identidad. Sean U_1, U_2 vecindades arbitrarias de $0 \in G$ y V y W vecindades simétricas de $0 \in G$ tales que $V + V \subseteq U_1 \cap U_2$, $W \subseteq V$ y $f(W) \subseteq H \cap V$. Todo esto es posible por el Teorema 1.4. Note que $W \subseteq (U_1 \cap H) + (U_2 \cap L)$. Aplicando la Proposición 3.22 obtenemos que G es topológicamente isomorfo a $H \times L$, y así, también L es topológicamente isomorfo a G/H. ■

3.25 Proposición. *Sea G un grupo topológico abeliano y H un subgrupo abierto divisible de G. Entonces G es topológicamente isomorfo a $H \times (G/H)$.*

Demostración. Por la Proposición 1.36, el homomorfismo identidad $f : H \to H$ admite una extensión $\widetilde{f}$ a todo G. En virtud de la Proposición 1.3, esta extensión es continua dado que H es abierto. Aplicando la Proposición 3.24 obtenemos lo que se quería. ■

Supondremos en la siguiente proposición que la operación en G es la multiplicativa y su elemento identidad es $e \in G$.

3.26 Proposición. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto que tiene un subgrupo discreto N con un número finito de generadores tales que G/N es compacto elemental. Entonces G es localmente compacto elemental.*

Demostración. (I) Primero supongamos que G es conexo. Entonces G/N también es conexo pues es la imagen de una función continua sobre un espacio conexo. Así, podemos pensar que G/N es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^p$. Dado que $\mathbb{T}^p \cong \mathbb{R}^p/\mathbb{Z}^p$, podemos considerar las proyecciones canónicas $\pi_G : G \to \mathbb{T}^p$ y $\pi_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^p \to \mathbb{T}^p$. Por ser N y $\mathbb{Z}^p$ subgrupos discretos de G y $\mathbb{R}^p$, respectivamente, existen vecindades V de $0 \in G$ y U de $0 \in \mathbb{R}^p$ tales que las proyecciones canónicas $\pi_G \restriction V$ y $\pi_{\mathbb{R}} \restriction U$ son inyectivas.

3.26.1 Afirmación. Se pueden escoger a V y a U de tal manera que $\pi_G(V) = \pi_{\mathbb{R}}(U)$.

En efecto, tómese una vecindad simétrica U_0 de $0 \in \mathbb{R}^p$ tal que $(U_0 + U_0) \cap \mathbb{Z}^p = \{0\}$. Entonces tomemos una vecindad simétrica V_0 de $0 \in G$ tal que $V_0^2 \cap N = \{0\}$ y $\pi_G(V) \subseteq \pi_{\mathbb{R}}(U_0)$. Finalmente tome $U \subseteq U_0 \cap \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(\pi_G(V_0))$ y $V = V_0 \cap \pi_G^{-1}(\pi_{\mathbb{R}}(U))$. Es posible elegir todas estas vecindades de acuerdo al Teorema 1.4. Así, queda probada la afirmación.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $U = \mathbb{B}_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^p$ para algún $\varepsilon > 0$. Ahora para $x \in U$, sea $\phi(x)$ el único elemento de $V \subseteq G$ tal que $\pi_{\mathbb{R}}(x) = \pi_G(\phi(x))$. Note que si $x, y, x+y \in U$, entonces $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ y que $\phi(-x) = \phi(x)^{-1}$. Así, $\phi : U \to V \subseteq G$ es un isomorfismo algebráico.

Ahora extenderemos ϕ a $\Phi : \mathbb{R}^p \to G$ de la siguiente manera. Para cada $x \in \mathbb{R}^p$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $y \in U$ tales que $ny = x$. Entonces pongámos $\Phi(x) = \Phi(y)^n$. Para ver que Φ sigue bien definida, considere que $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ y $y_1, y_2 \in U$ con $n_1 y_1 = n_2 y_2$. Ahora, si n_1 o n_2 es igual a cero, entonces $\Phi(n_1y_1) = \Phi(n_2y_2) = 0 \in G$. Y si ambos n_1 y n_2 son distintos de cero, entonces $\frac{ky_1}{n_2} \in U$ para $k = 0, \pm 1, \dots, \pm n_2$, y entonces tenemos que $\Phi(y_1) = (\Phi(\frac{y_1}{n_2}))^{n_2}$. De manera similar obtenemos $\Phi(y_2) = (\Phi(\frac{y_2}{n_1}))^{n_1}$. Así,

$$\Phi(y_1)^{n_1} = (\Phi(\frac{y_1}{n_2}))^{n_2 n_1} = (\Phi(\frac{y_2}{n_1}))^{n_1 n_2} = \Phi(y_2)^{n_2}.$$

Por la Proposición 1.3, es claro que $\Phi : \mathbb{R}^p \to G$ es un homomorfismo abierto y continuo. Además, $\Phi(\mathbb{R}^p)$ es un subgrupo abierto, y por tanto cerrado de G (Proposición 1.13), pero G es conexo, así que $\Phi(\mathbb{R}^p) = G$.

Dado que $\pi_G \circ \Phi(x) = \pi_{\mathbb{R}}(x)$ para $x \in U$ y U genera a $\mathbb{R}^p$, entonces $\pi_g \circ \Phi = \pi_{\mathbb{R}}$. Note que $ker(\Phi)$ es un subgrupo de $ker(\pi_{\mathbb{R}}) = \mathbb{Z}^p$. Si $ker(\Phi) = \{0\}$, entonces G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^p$. Supóngase que $ker(\Phi) \neq \{0\}$. Por A.4, podemos encontrar una base de elementos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ para $\mathbb{Z}^p$ y enteros positivos $d_1, d_2, \dots, d_k$, con $1 \leqslant k \leqslant p$, tales que $d_1\beta_1, d_2\beta_2, \dots, d_k\beta_k$ son generadores independientes de $ker(\Phi)$. Como $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ son generadores independientes de $\mathbb{Z}^p$, los elementos $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ son una base para $\mathbb{R}^p$ como espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Así, las clases $y + ker(\Phi)$ contienen elementos de la forma $x_1\beta_1 + \ldots + x_p\beta_p$, donde $0 \leqslant x_1 < d_1, \dots, 0 \leqslant x_k < d_k$, y $x_{k+1}, \dots, x_p$ son numeros reales arbitrarios. Además, elementos distintos de este tipo caen en clases distintas de $\mathbb{R}^p$ respecto a $ker(\Phi)$. Se sigue entonces que G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{p-k}$.

(II) Sea ahora G cualquier grupo que satisface las hipótesis de la proposición. Sin pérdida de generalidad, podemos tomar $G/N = \mathbb{T}^r \times F_0$, donde F_0 es un grupo finito. Sean $\pi : G \to G/N$ la proyección canónica y $\rho : \mathbb{T}^r \times F_0 \to \mathbb{T}^r$ la proyección a coordenada. Entonces $\rho \circ \pi$ es un homomorfismo continuo, abierto y suprayectivo de G a $\mathbb{T}^r$. Por la estructura de G/N, se deduce que $M = ker(\rho \circ \pi)$ es una unión finita de distintas clases: $M = N \cup x_1N \cup \ldots \cup x_lN$. Por la Proposición 1.16, N es cerrado en G y así, cada x_iN también es cerrado y no contiene a $0 \in G$. Por tanto, M es un subgrupo discreto de G con un número finito de generadores.

Consideremos al grupo $G/M = \mathbb{T}^r$. Si $r = 0$, es decir, $M = G$, entonces G es un grupo discreto finitamente generado y como se ve en [Rot94, p. 319], G es de la forma $\mathbb{Z}^c \times F_1$, donde c es un entero no negativo y F_1 un grupo abeliano finito.

Finalmente supongamos que $r > 0$. Como M es discreto, $\rho \circ \pi$ es biyectiva para alguna vecindad U de $0 \in G$. Así, $\rho \circ \pi$ es un homeomorfismo sobre U pues ya era continuo y abierto. Como $\mathbb{T}^r$ es localmente conexo, podemos asumir que U es una vecindad simétrica y conexa de $0 \in G$. Como la función multiplicación de la Definición 1.1 es continua, se sigue que nU es también conexo pues es la imagen de $\underbrace{U \times U \times \ldots \times U}_{n-veces}$ bajo la función multiplicación. Así, $\bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ es un subgrupo abierto y conexo de G. Por la Proposición 1.13, $\bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ también es cerrado; así, $C = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ es la componente conexa de $0 \in G$. Dado que $\mathbb{T}^r$ también es conexo, es generado por la vecindad $\rho \circ \pi(U)$ de $1 \in \mathbb{T}^r$. Así, $\mathbb{T}^r = \rho \circ \pi(C) = \rho \circ \pi(G)$ y por la Proposición 1.32, $\mathbb{T}^r = C/(C \cap M)$. Como C es conexo, podemos aplicar el paso (I) para ver que C es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{r-k}$, donde k es un entero no negativo menor o igual a r.

Como $\rho \circ \pi(C) = \rho \circ \pi(G)$, claramente $G = C + M$. Por el Primer Teorema de Isomorfismo, $G/C = CM/C$ es algebráicamente isomorfo a $M/(M \cap C)$. Además, como CM/C y $M/(M \cap C)$ son discretos, este isomorfismo algebráico es automáticamente un isomorfismo topológico. Se sigue que G/C es finitamente generado. Por el resultado en [Rot94, p. 319], G/C es de la forma $\mathbb{Z}^c \times F_1$, donde c es un entero no negativo y F_1 un grupo abeliano finito. Como C es abierto y divisible, la Proposición 3.25 muestra que G es topológicamente isomorfo a $C \times (G/C)$ y por tanto a $\mathbb{Z}^c \times F_1 \times \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{r-k}$, es decir, G es un grupo localmente compacto elemental. ∎

3.27 Proposición. *Sean G un grupo abeliano discreto y $W_G(F, \varepsilon)$ una vecindad de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$. Entonces existe un subgrupo finitamente generado H de G tal que $A(\widehat{G}, H) \subseteq W_G(F, \varepsilon)$.*

Demostración. Este resultado es trivial pues si G es discreto, entonces F es finito. Así $H = \langle F \rangle$ es el subgrupo de G que nos sirve. ∎

3.28 Proposición. *Sea G un grupo abeliano compacto y U una vecindad de $0 \in G$. Entonces existe un subgrupo cerrado H de G contenido en U tal que G/H es un grupo compacto elemental.*

Demostración. Elija cualquier subgrupo finitamente generado Z del grupo discreto $\widehat{G}$. Por lo visto en [Rot94, p. 319], podemos identificar a Z con

$\mathbb{Z}^a \times F$, donde a es un entero positivo y F un grupo abeliano finito. Por la Proposición 3.17 y los ejemplos 3.20 (b) y (d), $\widehat{Z}$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^a \times F$. Por el Teorema 3.10, $\omega_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ es un isomorfismo topológico. Por la Proposición 3.15, $\widehat{Z}$ es topológicamente isomorfo a $\omega_G(G)/A(\omega_G(G), Z) = \widehat{\widehat{G}}/A(\widehat{\widehat{G}}, Z)$ y por la Proposición 3.27, la vecindad $\omega_G(U)$ de $\omega_G(0) \in \widehat{\widehat{G}}$ contiene un subgrupo de la forma $A(\omega_G(G), Z)$. Además, los aniquiladores son cerrados por el inciso (a) de la Proposición 3.13. ■

3.29 Proposición. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto y compactamente generado. Entonces toda vecindad U de $0 \in G$ contiene a un subgrupo compacto H de G tal que G/H es un grupo localmente compacto elemental.*

Demostración. Por la Proposición 2.22, existe una subgrupo discreto finitamente generado N de G tal que G/N es compacto. Sea W una vecindad simétrica de $0 \in G$ con $\overline{W}$ compacto, $W \subseteq U$ y $W^3 \cap N = \{0\}$. Consideremos la proyección canónica $\pi : G \to G/N$. Como $\pi(W)$ es abierto, la Proposición 3.28 nos dice que existe un subgrupo cerrado $K \subseteq \pi(W)$ de G/N tal que $(G/N)/K$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^a \times F$, donde a es un entero positivo y F un grupo abeliano finito. Tome $K_0 = \pi^{-1}(K)$ y $H = W \cap K_0$.

3.29.1 Afirmación. $\pi(H) = K$.

Es claro que $\pi(H) \subseteq K$. Ahora si $k \in K$, existe $w \in W$ tal que $k = \pi(w) \in K$. Esto implica que $w \in K_0$ y por lo tanto, $k = \pi(w) \in \pi(W \cap K_0) = \pi(H)$.

Ahora como $\pi \restriction_{\overline{W}}$ es biyectiva y $\overline{W}$ es compacto, entonces π es un homeomorfismo de $\overline{W}$ a $\pi(\overline{W})$. En particular, π es un homeomorfismo de H a $\pi(H) = K$. Como K es compacto, H es compacto.

3.29.2 Afirmación. H es un subgrupo de G.

Si $x, y \in H$, entonces xy^{-1} está en el subgrupo K_0 y la Afirmación 3.29.1 sugiere que $\pi(h) = \pi(xy^{-1})$ para algún $h \in H$. Esto implica que $xy^{-1}h^{-1} \in N$, pero también $xy^{-1}h^{-1} \in HH^{-1}H^{-1} \subseteq W^3$, es decir, $xy^{-1}h^{-1} = 0 \in G$ por lo que $xy^{-1} = h \in H$.

Consideremos la proyección canónica $\pi_H : G \to G/H$. Para finalizar la prueba es suficiente, por la Proposición 3.26, demostrar que $\pi_H(N)$ es un subgrupo discreto de G/H y que $(G/H)/\pi_H(N)$ es un grupo compacto elemental, justo como lo es $(G/N)/K$. Note que $\pi_H(N)$ es finitamente generado pues así lo es N.

3.29.3 Afirmación. $K_0 = NH$.

Si $h \in H$ y $x \in N$, entonces $\pi(xh) = \pi(h) \in \pi(H) = K$, y así, $xh \in K_0$. Recíprocamente si $x \in K_0$, entonces existe $h \in H$ tal que $\pi(x) = \pi(h)$ y por lo tanto, $x = xh^{-1}h \in NH$. Ahora por la Proposición 1.34, $(G/H)/\pi_H(N)$ es topológicamente isomorfo a $G/\pi_H^{-1}(\pi_H(N))$ y similarmente, $(G/N)/K$ con $G/\pi^{-1}(K) = G/K_0$. Como $\pi_H^{-1}(\pi_H(N)) = HN = K_0$, $(G/H)/\pi_H(N)$ es isomorfo topológicamente a $(G/N)/K$, es decir, $(G/H)/\pi_H(N)$ es un grupo compacto elemental.

3.29.4 Afirmación. Finalmente $\pi_H(N)$ es discreto.

Note que $N \cap H \subseteq N \cap W \subseteq N \cap W^3 = \{0\} \subseteq G$. Además, $(G \setminus N) \cup \{0\}$ es un conjunto abierto que contiene al compacto H. Por Proposición 1.10, existe una vecindad V de $0 \in G$ tal que $VH \subseteq (G \setminus N) \cup \{0\}$. Con esto tendemos que

$$(VH) \cap N = \{0\}.$$

Lo anterior implica que $\pi_H(V) \cap \pi_H(N) = \{H\}$. En efecto, si $vH = xH$, donde $v \in V$ y $x \in N$, entonces $vh = x$ para algún $h \in H$ y por tanto $vh = x = 0 \in G$. Con esto se tiene que G/H es un grupo localmente compacto elemental. ■

3.30 Proposición. *Sean G un grupo abeliano y H un subgrupo de G. Supongamos que $G/H = \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$, donde a y b son enteros no negativos y F un grupo abeliano compacto. Si $\pi : G \to G/H$ es la proyección canónica, entonces todo subgrupo compacto de G está contenido en $\pi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times F)$.*

Demostración. Si E es un subgrupo compacto de G, entonces $\pi(E)$ es un subgrupo compacto de G/H. Es claro que $\pi(E) \subseteq \{0\} \times \{0\} \times F$ pues los subgrupos compactos de $\mathbb{R}^a$ y $\mathbb{Z}^b$ son los triviales, entonces $E \subseteq \pi^{-1}(\{0\} \times \{0\} \times F)$. ■

3.31 Teorema (Teorema de Estructura)**.** *Todo grupo abeliano localmente compacto y compactamente generado G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$, donde a y b son enteros no negativos y F un grupo abeliano compacto.*

Demostración. En virtud de la Proposición 3.29, existe un subgrupo compacto H de G tal que G/H es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$, con a y b enteros positivos y F un grupo abeliano compacto. Para fines prácticos pensaremos que $G/H = \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$. También identificaremos a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b$ con $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times \{0\}$ y a F con el subgrupo $\{0\} \times \{0\} \times F$ (creemos que la notación no se confunde respecto a los elementos identidad de cada grupo). Consideremos a la proyección canónica $\pi : G \to G/H$. Si $M = \pi^{-1}(F)$, entonces M es compacto por la observación después de la Proposición 1.25 y de hecho, M es el subgrupo compacto más grande de G por la Proposición 3.30. A causa de la Proposición 1.34, G/M es topológicamente isomorfo a $(\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F)/F$ y por tanto a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b$.

Denotemos por $\mathcal{Y}$ la familia de todos los subgrupos cerrados L de G tales que $G = LM$. Ordenamos parcialmente a $\mathcal{Y}$ por:

$$L_1 \preccurlyeq L_2 \text{ si y sólo si } L_2 \subseteq L_1.$$

Es claro que G es un elemento de $\mathcal{Y}$ así que $\mathcal{Y}$ es no vacío. Tomemos una $\preccurlyeq$-cadena $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$ de $\mathcal{Y}$. Sea $L = \bigcap_{\alpha\in a} L_\alpha$. Es claro que L es un subgrupo cerrado de G y $L \subseteq L_\alpha$ para todo $\alpha \in A$. Para ver que $L \in \mathcal{Y}$, considere $x \in G$. Ahora dirigimos al conjunto A como, $\alpha \preccurlyeq \alpha'$ siempre que $L_\alpha \preccurlyeq L_{\alpha'}$. Para cada $\alpha \in A$, tenemos que $G = L_\alpha M$ por lo cual $x = l_\alpha m_\alpha$ donde $l_\alpha \in L_\alpha$ y $m_\alpha \in M$. Así, $\{m_\alpha : \alpha \in A\}$ es una red de elementos de M y por compacidad, existe una subred convergente $\{n_\beta : \beta \in B\}$. Denotemos por m_0 al límite de n_β. Sea $\gamma : E \to A$ una función que hace que $n_\beta = m_{\gamma(\beta)}$ con $\beta \in E$. Tome cualquier $\alpha_0 \in A$, entonces existe $\beta_0 \in E$ tal que $\alpha_0 \preccurlyeq \gamma(\beta)$ siempre que $\beta_0 \preccurlyeq \beta$. Así para $\beta \succcurlyeq \beta_0$,

$$xn_\beta^{-1} = xm_{\gamma(\beta)}^{-1} = l_{\gamma(\beta)} \in L_{\gamma(\beta)} \subseteq L_{\alpha_0}$$

Como L_{α_0} es cerrado, se tiene que la red $\{xn_\beta^{-1} : \beta \in E\}$ converge a $xm_0^{-1} \in L_{\alpha_0}$. Como α_0 era arbitrario, tenemos que $xm_0^{-1} \in \bigcap_{\alpha\in A} L_\alpha = L$. Consecuentemente $xm_0^{-1}m_0 \in LM$. Así, $G = LM$ y L es una cota superior para $\{L_\alpha : \alpha \in A\}$.

Por el Lema de Zorn, existen un elemento maximal $L_0 \in \mathcal{Y}$ y claro que $G = L_0 M$. Ahora veremos que $L_0 \cap M = \{0\}$. Supongamos que existe un elemento $z \in L_0 \cap M$ distinto de $0 \in G$. Tome una vecindad U de 0 tal que $z \notin U$. Note que por ser compactamente generado, G es σ-compacto y su subgrupo cerrado L_0 también lo es. Por la Proposición 1.33, $L_0/(L_0 \cap M)$ es topológicamente isomorfo a $L_0M/M = G/M$ y por tanto a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b$. En particular, $L_0M/M = G/M$ es compactamente generado. Como $L_0 \cap M$ es compacto, la Proposición 1.35 muestra que L_0 es compactamente generado. Aplicando la Proposición 3.29, existe un subgrupo compacto H_0 de L_0 tal que $H_0 \subseteq L_0 \cap U$ y L_0/H_0 es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^{a_0} \times \mathbb{Z}^{b_0} \times F_0$ con a_0, b_0 enteros no negativos y F_0 grupo abeliano compacto. Denote por $\pi_0 : L_0 \to L_0/H_0$ la proyección canónica. Sean $L_1 = \pi_0^{-1}(\mathbb{R}^{a_0} \times \mathbb{Z}^{b_0})$ y $M_0 = \pi_0^{-1}(F_0)$. Es trivial que $L_1 \subseteq L_0$, $L_1 \cap M_0 = H_0$ y $L_0 = L_1M_0$. La Proposición 3.30 nos dice que todo subgrupo compacto de L_0 está contenido en M_0, en particular,

$$L_1 \cap M = L_1 \cap (L_1 \cap M) \subseteq L_1 \cap M_0 = H_0 \subseteq U.$$

Así, z no pertenece a $L_1 \cap M$ pero como $z \in M$, se sigue que $z \notin L_1$. En otras palabras, L_1 está contenido propiamente en L_0. Nuevamente el comentario posterior a la Proposición 1.25 afirma que M_0 es compacto y así, MM_0 es un subgrupo compacto de G (Proposición 1.2). Por otro lado, $M_0M = M$ pues M contiene a cualquier subgrupo compacto de G. Esto último implica que

$$G = L_0M = L_1M_0M = L_1M.$$

Así, $L_1 \in \mathcal{Y}$, pero $L_0 \npreceq L_1$ pues $L_1 \subsetneq L_0$. Esto contradice la maximalidad de L_0, por lo que $L_0 \cap M = \{0\}$. Por la observación previa, vemos que L_0 es topológicamente isomorfo a G/M y por tanto a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b$. Finalmente por la Proposición 3.23, G es topológicamente isomorfo a $L_0 \times M$ y por tanto a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times M$ con M compacto. ■

3.3 ♦ Teorema de dualidad para grupos topológicos abelianos localmente compactos

Finalmente presentamos nuestro principal teorema. La idea de la demostración es primero probar el caso particular cuando el grupo topológico G es locamente compacto y compactamente generado, esto con ayuda de los ejemplos 3.20. Después se introduce el caso general y se observa que el homomorfismo ω_G es un isomorfismo topológico a su imagen. Se concluye en seguida que ω_G es suprayectiva. Todos estos pasos van de la mano con los principales resultados de las secciones anteriores.

3.32 Teorema. *Para cualquier grupo abeliano localmente compacto el homomorfismo $\omega_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ es un isomorfismo topológico.*

Demostración. Por el Teorema 3.9, basta ver que ω_G es abierta y suprayectiva.

(I) Primero consideremos el caso en que G es compactamente generado, en el cual el Teorema de Estructura 3.31 nos dice que G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$ para enteros no negativos a y b y un grupo abeliano compacto F. Por el Ejemplo 3.20 (7), $\mathbb{R}$ es topológicamente isomorfo a su grupo doble dual y por el Teorema 3.10, $\mathbb{Z}$ y F también tienen esta propiedad. La Proposición 3.17, nos muestra que la función ω_G definida para $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times F$ aplica este grupo suprayectivamente a su grupo doble dual. Finalmente por la Proposición 1.31 y dado que G es σ-compacto, $\omega_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ es un isomorfismo topológico.

(II) Supongamos ahora que G es cualquier grupo abeliano localmente compacto. Sea H un subgrupo de G abierto compactamente generado y podemos suponer que H contiene a cualquier subconjunto compacto fijo de G (Proposición 1.19).

Se planea ver que $\omega_G(H) = A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H))$. Para cada $h \in H$, es claro que $\omega_G(h) \in A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H))$. Supóngase que $f \in A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H))$. Si $\chi, \chi_0 \in \widehat{G}$ y $\chi \restriction_H = \chi_0 \restriction_H$, entonces $\chi\chi_0^{-1}(h) = 1 \in \mathbb{T}$ para todo $h \in H$, es decir, $f(\chi\chi_0) = 1 \in \mathbb{T}$ y por tanto, $f(\chi) = f(\chi_0)$. Por la Proposición 3.15, todo caracter $\varphi \in \widehat{H}$ es de la forma $\chi \restriction_H$ para algún $\chi \in \widehat{G}$. Por tanto, obetenemos un caracter bien definido $f_0 \in \widehat{\widehat{H}}$ dado por $f_0(\varphi) = f(\chi)$, donde $\chi \restriction_H = \varphi$. Es claro que f_0 es continua por el hecho de que la función $\chi \mapsto \chi \restriction_H$ es abierta; nuevamente por la Proposición 3.15. Ahora por (I), podemos decir que $f(\chi) = \chi(h)$ para algún $h \in H$ y todo $\chi \in \widehat{G}$. Así, ω_G lleva a H suprayectivamente al subgrupo $A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H))$ de $\widehat{\widehat{G}}$. Como H es abierto, G/H es discreto de acuerdo a la Proposición 1.22. Por la Proposicicón 1.39, $\widehat{G/H}$ es compacto así como $A(\widehat{G}, H)$ por la Proposición 3.16. El aniquilador de un subgrupo compacto es abierto por la Proposición 3.13, y así, $\omega_G(H) = A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H))$ es un subgrupo abierto de $\widehat{\widehat{G}}$. Nuevamente aplicando el Teorema 1.31, ω_G es un isomorfismo topológico de H a $A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H)) \subseteq \widehat{\widehat{G}}$. Por la Proposición 1.3 y por ser H abierto, ω_G es un isomorfismo topológico de G a $\omega_G(G)$.

(III) Para completar la prueba basta ver que ω_G es suprayectiva. Lo probaremos viendo que para cada $f \in \widehat{\widehat{G}}$, existe un H como en (II) para el cual $f \in \omega_G(H)$. Sea $W_G(F, \varepsilon)$ una vecindad de $\epsilon_1 \in \widehat{G}$ tal que $|Arg(f(\chi))| < \frac{\pi}{2}$ para todo $\chi \in W_G(F, \varepsilon)$. Sea U una vecindad simétrica de $0 \in G$ con cerradura compacta. Sea $H_1 = \langle U \rangle$ el subgrupo de G generado por U. Entonces H_1 es un subgrupo abierto compactamente generado de G. Denotemos por $\rho : \widehat{G/H_1} \to A(\widehat{G}, H_1)$ el isomorfismo topológico dado en la Proposición 3.16. Por la Proposición 1.22, G/H_1 es discreto y de acuerdo con la Proposición 3.27, contiene un subgrupo C con un número finito de generadores $x_1H_1, x_2H_1, \ldots, x_nH_1$ tales que

$$A(\widehat{G/H_1}, C) \subseteq \rho^{-1}(W_G(F, \varepsilon) \cap A(\widehat{G}, H_1)).$$

Como $K = \overline{U} \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ es compacto, entonces por la Proposición 1.19, sea H el subgrupo abierto, cerrado y compactamente generado de G que contiene a K.

Finalmente, si $\chi \in A(\widehat{G}, H)$, entonces $\chi(H_1) = \{1\}$ y $\chi(x_j) = 1 \in \mathbb{T}$ para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. Por lo tanto, $\chi \in A(\widehat{G}, H_1)$ y $\rho^{-1}(\chi) \in (A(\widehat{G/H_1}, C))$. Se sigue que $\chi \in W_G(F, \varepsilon)$. Así, $|Arg(f(\chi))| < \frac{\pi}{2}$ para todo $\chi \in A(\widehat{G}, H) \leqslant \widehat{G}$, lo que implica que $f(\chi) = 1 \in \mathbb{T}$, para todo $\chi \in A(\widehat{G}, H)$, pues no existen subgrupos propios de $\mathbb{T}$ dentro de Λ_1. Esto es, $f \in A(\widehat{\widehat{G}}, A(\widehat{G}, H)) = \omega_G(H)$. ■

Apéndice

Aquí presentamos el concepto de red y resultados relevantes, así como dos proposiciones más referentes a la Teoría de Grupos, no se demostrarán pero las pruebas se pueden encontrar en [EH79, A.26-27].

A.1 Definición. Sea D un conjunto no vacío.

- Un orden parcial $\preccurlyeq$ ***dirige*** a D si para cada $\alpha, \beta \in D$, existe $\gamma \in D$ tal que $\alpha \preccurlyeq \gamma$ y $\beta \preccurlyeq \gamma$.
- Una ***red*** $x_\alpha = x(\alpha)$ es cualquier función definida en un conjunto dirigido. Una red y_β, con dominio E, es una ***subred*** de x_α con dominio D, si existe una función $f : E \to D$ tal que:
  - $y_\beta = x_{f(\beta)}$ para cada $\beta \in E$;
  - para cada $\alpha \in D$ existe $\beta \in E$ de tal forma que $\alpha \preccurlyeq f(\gamma)$ siempre que $\beta \preccurlyeq \gamma$.
- Sea x_α una red de un conjunto dirigido D a un espacio topológico X. Se dice que la red x_α ***converge*** a un elemento $x \in X$ si para cada vecindad U de x, existe $\beta \in D$ de tal manera que si $\alpha \in D$ con $\beta \preccurlyeq \alpha$, entonces $x_\alpha \in U$.
- Un punto $x \in X$ es un ***punto de acumulación*** de la red x_α si para cada vecindad U de x y cada $\beta \in D$, existe $\gamma \in D$ tal que $\beta \preccurlyeq \gamma$ y $x_\gamma \in D$.
- Una red x_α con dominio D, ***está en*** X si $x_\alpha \in X$ para todo $\alpha \in D$.

A.2 Proposición. *Sea X un espacio topológico.*

- *Si A es un subconjunto de X, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una red en A que converge a x.*

- *El espacio X es compacto si y sólo si cada red en X contiene una subred que converge a algún punto de X.*
- *El espacio X es Hausdorff si y sólo si cada red en X converge a lo más a un punto de X.*
- *Un punto $x \in X$ es de acumulación de una red x_α si y sólo si existe una subred de x_α que converge a x.*
- *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos. Entonces f es continua si y sólo si para cada red x_α en X ue converge a $x \in X$ se tiene que la red $f(x_\alpha)$ en Y converge a $f(x)$.*

A.3 Definición. Sea G un grupo arbitrario.

- Un subconjunto finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de G es ***independiente*** si no contiene al elemento identidad $e \in G$ y si $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n} = e$ implica que $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = e$, donde cada k_i es un entero.
- Se dice que un subconjunto infinito L de G es independiente si cada subconjunto finito de L es independiente.
- Si un subconjunto independiente L de G genera a G, se dice que L es una ***base*** de G.

A.4 Proposición. *Sean n un entero positivo y H un subgrupo no trivial de $\mathbb{Z}^n$. Entonces existe una base $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en $\mathbb{Z}^n$ y una sucesión $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\}$ de enteros positivos tales que*

(a) $r \leqslant n$;

(b) $\{k_1x_1, k_2x_2, \ldots, k_rx_r\}$ *es una base para* H;

(c) k_i *divide a* k_{i+1} *para toda* $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

A.5 Teorema. *Un grupo finitamente generado G es isomorfo con el producto directo de un número finito de grupos cíclicos, donde cada factor es infinito o tiene orden una potencia de algún primo.*

Notación

$\mathbb{N}$	El conjunto de los números naturales: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	El conjunto de los números enteros.
$\mathbb{R}$	El conjunto de los números reales.
$\mathbb{C}$	El conjunto de lo números complejos.
$\mathbb{T}$	El circulo unitario como grupo multiplicativo en $\mathbb{C}$.
$\langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle$	El grupo generado por $x_1, x_2, \dots x_n$.
$\widehat{G}$	El grupo dual de G.
ϵ_1	El caracter trivial.
$\pounds(G)$	El conjunto de combinaciones lineales de caracteres continuos de G.

Bibliografía

[AA08] Alexander Arhangel'skii, Mikhail Tkachenko: *Topological Groups and Relates Structures*, volumen 1. Atlantis Press, 2008.

[DD89] D. Dikranjan, L. Stoyanov, Iv. Prodanov: *Topological Groups: Characters, Dualities and Minimal Groups Topologies.* Marcel Dekker Inc., 1989.

[DD11] Dikran Dikranjan, Luchezar Stoyanov: *An elementary approach to Haar integration and Pontryagin duality in locally compact abelian groups.* Topology and its applications, 2011.

[EH79] Edwin Hewitt, Kennth A. Ross: *Abstract Harmonic Analysis*, volumen 1. Springer-Verlag, 1979.

[Eng89] Engelking, Rizsard: *General Topology*, volumen 6. Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[Mun02] Munkres, James R.: *Topología.* Pearson Education, 2002.

[Rot94] Rotman, Joseph J.: *An Introduction to the Theory of Groups.* Springer-Verlag, 1994.

[Rot02] Rotman, Joseph J.: *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall, 2002.

[San03] Sanz, Elena Cillero: *Caracteres del grupo aditivo de los racionales.* Revista de la Real Academia de Ciencias, 2003.

Índice alfabético