Universidad Michoacan de San Nicolás de Hidalgo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas

"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Tesis:

Operadores Pseudodiferenciales

Para obtener el grado de

Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas

Presenta:

Dagoberto Mora Coria

Asesor:

Dr. Anatoli Merzon

Morelia, Michoacán, a Agosto del 2013

Agradecimientos

Comenzare mis agradecimientos a Martina Coria Mendoza, mi madre, mujer tenaz, comprensiva y amorosa; por haber dado parte de su vida por mi y que finalmente se materializa el sueño anhelado por ambos.

A mi padre Alejandro Mora Rodríguez me enseñó con el ejemplo, la forma estricta, individual, competente y la insasiable razón de saber y de develar la verdad.

A mis abuelos, Maria Refugio Rodríguez Díaz y José Mora Colín, me mostraron el amor por la pedagogía al ser preseverantes y lideres.

Al Dr. Anatoli Merzon, asesor, mentor y amigo, me mostró la estética de las matemáticas, su alcance al aplicarlas de forma efectiva. Además, por su enorme paciencia, confianza y amistad, por guiarme en el maravilloso mundo de las Matemáticas, especialmente las Ecuaciones Diferenciales y el Análisis Matemático.

A José Mora Coria y Didier Alejandro Patiño Rodríguez, mis hermanos, que han permanecido y arado hacia el mismo rumbo. Por mantener el ideal.

Al M.C.F. Alan Craiton, un mentor, me mostró pasión, y sueños materializados, en las Matemáticas y la Física, incansable su sencilles para divulgarlas por doquier.

A Guadalupe Vanessa Pérez Martínez por su perspicacia de mostrarme un sendero con cajas.

Al resto de mis hermanos, Miguel Salazar Tovar, Anahi Ramos Mata, Marían García Lemus y Pablo Venegas por continuar a mi lado.

A amigos y catedráticos por mostrar ínteres.

Concluyó, a los hombres que hicieron, hacen y harán Matemáticas.

"*Me alejo con terror de las funciones cero diferenciales*".

Índice general

Introducción **IV**

1. Distribuciones Temperadas **1**
1.1. Espacios de Schwartz $\mathcal{S}$. 1
1.2. Espacio de Función Prueba $\mathcal{D}$ 3
1.3. Espacio de Distribuciones Temperadas $\mathcal{S}'$. 11
1.4. Espacio de Distribuciones $\mathcal{D}'$. 14
1.5. Diferenciación de Distribuciones Temperadas 16
1.6. Multiplicación por Funciones Suaves 17

2. Transformada de Fourier de Distribuciones Temperadas. **20**
2.1. Definición. 20
2.2. Transformada de Fourier para Distribuciones Temperadas. 23
2.3. Teoría de Parseval-Plancherel. 24

3. Generalización de la Teoría de Distribuciones para $\mathbb{R}^n$. **26**
3.1. Definiciones y Ejemplos. 26
3.2. Diferenciación de Distribución Temperadas. 27
3.3. Transformada de Fourier para Distribuciones Temperadas. 27
3.4. Derivación de la Transformada de Fourier 28
3.5. Densidad de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. 29

4. Los Espacios Sobolev. **33**
4.1. Definición. 33
4.2. Densidad de $\mathcal{S}$ en H^s. 35
4.3. Operadores Diferenciales. 37

5. Teoremas de Sobolev **39**
5.1. Primer Teorema de Inmersión de Sobolev. 39
5.2. Teorema de Inmersión Compacta de Sobolev. 41

6. Espacios de Sobolev para $s \geq 0$ enteros. **46**

7. Ecuaciones Diferenciales Elípticas con Coeficientes Constantes. **50**

8. Operadores Pseudodiferenciales **53**
8.1. Representación de Fourier para Operadores Pseudodiferenciales 53
8.2. Clases de Simbolos y Operadores Pseudodiferenciales 54

9. Acotación de Operadores Pseudodiferenciales **60**
9.1. Prueba de Schur 60
9.2. Aplicación al Operador Multiplicación 62
9.3. Acotación de Operadores Pseudodiferenciales 63

10. Composición de Operadores Pseudodiferenciales. **66**
10.1. Teorema de Composición. 67
10.2. Composición de Operadores Diferenciales. 68
10.3. Composición de Operadores Pseudodiferenciales. 69

11. Regularizador de Ecuaciones Elípticas. **73**
11.1. Operadores Elípticos. 73
11.2. Propiedades de a^{-1}. 75
11.3. Regularizador. 78

12. Aplicaciones del Regularizador. **84**
12.1. Suavidad de la Solución. 84
12.2. Solubilidad de las Ecuaciones Elípticas. 85

Conclusión **87**

Bibliografía **88**

Introducción

El trabajo esta dedicado a la introducción de la teoría clásica de los Operadores Diferenciales Parciales Elípticos. Especificamente, en este trabajo se demuestra la existencia, suavidad y unicidad de las soluciones de la ecuación diferencial parcial $A(x, \partial)\, u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$ con coeficientes variables. Para investigar este problema se usa la teoría de los **Operadores Pseudodiferenciales**.

Ya que los operadores pseudodiferenciales actuan en los espacios de las funciones generalizadas, presento los hechos principales y necesarios para las metas de esta teoría (véase Capitulos 1-4). En particular, introdusco el espacio $\mathcal{S}'$ de las distribuciones temperadas y construimos la teoría de la transformada de Fourier en estos espacios (véase Capitulo 2 y 3). El espacio $\mathcal{S}'$ no es el espacio de Hilbert (aún no es el espacio normado). Por tanto, es necesario representar a $\mathcal{S}'$ como la unión de los espacios de Hilbert. Tal representación existe y esta dada como $\mathcal{S}' = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{R}} H^s$ donde cada H^s, llamado el espacio de Sobolev, es un espacio de Hilbert (véase Capitulo 4).

Resulta que cada operador diferencial parcial con coeficientes variables C^∞ y que satisfacen algunas condiciones adicionales (véase (11.2.21) y (11.2.22)) actuan de H^s a H^{s-m} donde m es el orden del operador A.

Los resultados principales del trabajo son los siguientes tres:

I. Todas las soluciones de la ecuación homogenea (12.2.10) donde A es fuertemente elíptico con coeficientes C^∞ y no se distinguen "mucho" de los constantes son infinitamente suaves ($u \in C^\infty$).

II. La dimensión del espacio de la solución de la ecuación (12.2.10) tiene dimensión finita.

III. La ecuación no homogenea con el operador fuertemente elíptico A y $f \in H^{s-m}$ admite solución $u \in H^s$ si f satisface un número finito de "condiciones de ortogonalidad" (véase Teorema 12.2.3).

La tesis esta organizada de la siguiente manera.

En el primer capítulo, introdujé los espacios de Schwartz $\mathcal{S}$ y el de las funciones de prueba $\mathcal{D}$. Demostré que el espacio de las funciones de prueba es denso en $\mathcal{L}^p$ y, por tanto, lo es $\mathcal{S}$. Defino el espacio de funciones generalizadas o temperadas $\mathcal{S}'$. Mostre algunos ejemplos de los elementos que pertenecen a $\mathcal{S}'$.

En el segundo capítulo, se ha definido la transformada de Fourier en los espacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$. Además, expongo la Teoría de Parseval-Plancherel.

En el tercer capítulo se generalizan los conceptos antes mencionados. Además, demuestro la densidad de las funciones de prueba $\mathcal{D}$ en los espacios Lebesgue $\mathcal{L}^p$ sobre $\mathbb{R}^n$.

En el capítulo 4, defino los espacios de Sobolev H^s y muestro que son espacios de Hilbert con embedimiento continuo a $\mathcal{S}'$. También, mostre que el espacio $\mathcal{S}$ es denso en H^s. Defino los operadores diferenciales con coeficientes constantes que actuan de H^s a H^{s-m}.

En el quinto capítulo, demuestro el Teorema de Inmersión de Sobolev que muestra la suavidad de un funcional que permanece en todos los espacios de Sobolev. Además, probé el Teorema de Inmersión Compacta de Sobolev.

En el sexto capítulo, caracterizo los espacios Sobolev para los naturales y muestro la importancia del concepto de los funcionales (véase Observación 6.0.14).

Defino los operadores elípticos y fuertemente elípticos. Muestro que el operador de Laplace y Schrödinger pertenecen a cada clase, respectivamente. Concluyo mostrando la existencia y unicidad para la ecuación diferencial parcial con coeficientes constantes para operadores fuertemente elípticos.

Continuo con la caracterización de Fourier para los Operadores Diferenciales Parciales con Coeficientes Variables. Defino la clase de simbolos S^m, los simbolos del operador diferencial, propiedades y ejemplos, y la clase $\mathcal{A}^m$ de Operadores Pseudodiferenciales.

En el noveno capítulo muestro que los Operadores Pseudodiferenciales estan bien definidos y son continuos en el espacio $\mathcal{S}$ y, similarmente, para los espacios Sobolev.

La composición de Operadores Diferenciales y Operadores Pseudodiferenciales esta bien definida. El Teorema de Composición muestra que los operadores forman una clase de operadores y la generalización de la formula de Leibniz, muy conocida en la bibliografía.

Defino al operador Regularizador R que es "casi" el inverso del operador A. Demuestro la existencia del operador Regularizador para los operadores fuertemente elípticos de orden m y con las condiciones (11.2.21) y (11.2.22).

Finalmente, demuestro los tres resultados principales del texto.

La base de este trabajo es el libro [1]. Traduje este libro y recupere todas las afirmaciones que no se han demostrado o cuyas demostraciones son muy breves. Además, anexé algunos hechos necesarios para mejorar la comprensión del texto.

Capítulo 1

Distribuciones Temperadas

1.1. Espacios de Schwartz $\mathcal{S}$.

Definición 1.1.1 *Definamos el espacio de Schwartz* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *como el espacio lineal de funciones* $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ *con las semi-normas*

$$\|\varphi\|_{\alpha,N} := \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^N |\partial_x^{\alpha}\varphi(x)| < \infty \tag{1.1.1}$$

para cualquier $\alpha, N = 0, 1, 2, ...$ *donde* $\partial_x^{\alpha}\varphi(x) = \varphi^{(\alpha)}(x)$.

Es obvio, para toda $\varphi \in \mathcal{S}$:

$$\|\varphi\|_{\alpha,K} \leq \|\varphi\|_{\alpha,N}, \text{ si } K \leq N \tag{1.1.2}$$

Notemos que

$$|\varphi_x^{\alpha}(x)| \leq (1+|x|)^{-q}\|\varphi\|_{\alpha,N}, x \in \mathbb{R} \tag{1.1.3}$$

para cualquier $q \leq N$. En efecto, $\|\varphi\|_{\alpha,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial_x^{\alpha}\varphi(x)| \geq (1+|x|)^q|\partial_x^{\alpha}\varphi(x)|$, para $q \leq N$. Multiplicando por $(1+|x|)^{-q} > 0$, obtenemos que $|\partial_x^{\alpha}\varphi(x)| \leq (1+|x|)^{-q}\|\varphi\|_{\alpha,N}, x \in \mathbb{R}$ que es lo deseado. ■

Lema 1.1.2 *(1.1.3) implica que* $|\varphi(x)| \leq (1+|x|)^{-2}\|\varphi\|_2$. *Por lo tanto,* $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. *Entonces* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

Observación 1.1.3 *Ya que* $C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^p(\mathbb{R}), p > 1$, *entonces* $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ *por Lema 1.1.2*

Lema 1.1.4 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$.

Demostración: Mostraremos que la función e^{-x^2} pertenence a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Notemos que $(e^{-x^2})^{(n)} = P(x)e^{-x^2}$ donde $P(x)$ es un polinomio. Por tanto, $(1+|x|)^m[(e^{-x^2})^{(n)}] = (1 +$

$|x|)^m P(x)e^{-x^2}$, por lo que es suficiente que $(1+|x|)^m|P(x)|e^{-x^2} \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. Si $x \geq 0$,

$$\lim_{x\to\infty}(1+|x|)^m P(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty}(1+x)^m P(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} Q(x)e^{-x^2}, \tag{1.1.4}$$

donde $Q(x) := (1+x)^m P(x)$ es un polinomio. Usando la regla de L'Hôpital, tenemos que para algún k, $(Q(x))^{(k)} = 0$, lo que implica

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(Q(x))^{(k)}}{(e^{x^2})^{(k)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{0}{R(x)e^{x^2}} = 0$$

porque $R(x)$ es un polinomio.

Similarmente para $x < 0$,

$$\lim_{x\to-\infty}(1+|x|)^m P(x)e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty}(1+x)^m P(x)e^{-x^2} = 0 \quad \blacksquare$$

Lema 1.1.5 *Para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, existe $B_N \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\varphi\|_{\alpha,N} \leq B_N \|\varphi\|_{\beta,N+\beta-\alpha}, \quad \alpha \leq \beta, 1 \leq N. \tag{1.1.5}$$

Demostración: Para $x \geq 0$:

$$|\varphi^{(\alpha)}(x)| = \left|\int_x^\infty \varphi^{(\alpha+1)}(\xi)\, d\xi\right| \leq \int_x^\infty (1+\xi)^{-N-1}\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}\, d\xi \leq \|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}\int_x^\infty (1+\xi)^{-N-1}\, d\xi$$
$$\leq B_N\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}(1+x)^{-N} = B_N(1+|x|)^{-N}\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}.$$

Para $x < 0$:

$$|\varphi^{(\alpha)}(x)| = \left|\int_{-\infty}^x \varphi^{(\alpha+1)}(\xi)\, d\xi\right| \leq \int_{-\infty}^x (1-\xi)^{-N-1}\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}\, d\xi \leq \|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}\int_{-\infty}^x (1-\xi)^{-N-1}\, d\xi$$
$$\leq B_N\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}(1-x)^{-N} = B_N(1+|x|)^{-N}\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}.$$

Por tanto, $|\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq B_N\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}(1+|x|)^{-N}$ y $\|\varphi\|_{\alpha,N} \leq B_N\|\varphi\|_{\alpha+1,N+1}$. De aquí, por inducción obtenemos (1.3.10). $\blacksquare$

Definamos la convergencia en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definición 1.1.6 *La sucesión $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ en $\mathcal{S}$ si y solo si, para cualesquier α, N*

$$\|\varphi_n(x) - \varphi(x)\|_{\alpha,N} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.1.6}$$

Proposición 1.1.7

1. *$\varphi' \in \mathcal{S}$ si $\varphi \in \mathcal{S}$.*
2. *El operador $\frac{d}{dx} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es lineal y continuo.*

Demostración: 1. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, por Definición (1.1.1), obtenemos la siguiente igualdad

$$\|\varphi'\|_{\alpha,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial_x^\alpha \varphi'(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial_x^{\alpha+1}\varphi(x)| = \|\varphi\|_{\alpha+1,N}. \tag{1.1.7}$$

Por tanto, $\|\varphi'\|_{\alpha,N} = \|\varphi\|_{\alpha+1,N} < \infty,\ \forall\ \alpha, N = 0,1,2...$, por $\varphi \in \mathcal{S}$.

2. Linealidad: obvia.

Demostraremos la continuidad. Es suficiente demostrar que $\varphi_n'(x) \to 0$ en $\mathcal{S}$ si $\varphi_n(x) \to 0$ en $\mathcal{S}$. Sea $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$, entonces $\forall \alpha, N = 0,1,2,...$ $\|\varphi_n\|_{\alpha,N} \to 0$ cuando $n \to \infty$, por Definición 1.1.6. Usando convergencia en $\mathcal{S}$ y la igualdad (1.1.7) obtenemos $\|\varphi_n'\|_{\alpha,N} = \|\varphi_n\|_{\alpha+1,N} \to 0$ cuando $n \to \infty$, para toda α, N. ∎

1.2. Espacio de Función Prueba $\mathcal{D}$

Definición 1.2.1 *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. El* ***soporte*** *de φ, es la cerradura del conjunto de los puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $\varphi(x) \neq 0$, i.e.,*

$$\text{supp } \varphi := \overline{\mathbb{R} \setminus \varphi^{-1}(0)}.$$

Definición 1.2.2 *Sea $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, decimos que φ es una* ***función prueba*** *si existe $K \subset \mathbb{R}$ compacto tal que* supp $\varphi \subseteq K$. *Nombraremos a este espacio como el espacio de las* ***funciones prueba*** *denotandolo como $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.*

Lema 1.2.3 $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$

Demostración: Definamos las siguientes funciones

$$e(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2x}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{1.2.8}$$

$$\phi(x) = e(1+x)e(1-x). \tag{1.2.9}$$

Demostraremos que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Para esto es suficiente demostrar que

1. $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$.
2. supp $\phi \subseteq [-1,1]$

1. Es evidente que $e(x) \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. El único punto donde $e(x)$ puede perder la continuidad pueden ser solamente $x = 0$, ya que $\frac{1}{2x}$ tiene singularidad en este punto.

Demostremos que $e(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ en una vecindad de $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{2x}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{2x} = 0.$$

Dado que $1 < e$, así, $\frac{1}{e} < 1$. Por tanto e es continua en 0.

Ahora probaremos que los limites laterales de las derivadas son ceros cuando $x \to 0$. Para eso es suficiente demostrar que los límites de las derivadas por la derecha son iguales a 0.

Para la primer derivada tenemos:

$$\lim_{x\to 0^+} e'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^2}}{e^{\frac{1}{2x}}} = \frac{1}{2}\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0.$$

por la regla de L'Hôpital.

Similarmente para cualquier derivada de orden k, existe polinomio $P(x)$ tal que

$$\lim_{x\to 0^+} e^{(k)}(x) = \lim_{x\to 0^+} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to +\infty} P(x)e^{-2x} = 0.$$

usando la regla de L'Hôpital.

Nos falta demostrar que las derivadas $e^{(k)}(0)$ existen y son cero. Efectivamente, para $k = 1$, por (1.2.8) es suficiente demostrar, que

$$e'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{2x}}}{2x^2} = 0.$$

Esto se cumple por la regla de L'Hôpital y del cambio de variable $\frac{1}{2x} \longleftrightarrow 2x$.

Para demostrar que $e''(0)$ existe, es suficiente demostrar que el limite correspondiente sea identicamente 0.

$$e''(0) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{e'(x) - e'(0)}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{2x^2}e^{-\frac{1}{2x}}}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{2x}} = 0$$

por las mismas razones. Por tanto $e''(0) = 0$. De igual manera, $e^{(k)}(0)$ por inducción sobre k existe y son identicamente 0. Por tanto, $e(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Dado que $e \in C^\infty(\mathbb{R})$ es continua y ϕ es el producto de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$, así ϕ es $C^\infty(\mathbb{R})$.

2. Se sigue de (1.2.9) directamente. ■

Observación 1.2.4

$\int \phi(x)\, dx \neq 0$. En efecto, se sigue de las observaciones: $\phi(0) \neq 0$, $\phi \geq 0$ y $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ■

Observación 1.2.5 *$\phi(x)$ se representa en la forma*

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & si \quad |x| \leq 1 \\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

Demostración: Se sigue de (1.2.9). ■

Definición 1.2.6 *Sea $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, decimos que la sucesión $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}$, si y sólo si, existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ compacto tal que*

1. *supp* $\varphi_n \subseteq [a,b]$

2. $D^{(k)}(\varphi_n - \varphi) \to 0$ *uniformemente en* $\mathbb{R}$ *para todas k=0,1,2 ...*

Entre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ existe una relación.

Lema 1.2.7 *1.* $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. La inclusión natural $i : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *es continua.*

Demostración: 1. Sean $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ el soporte de φ. Para cada α, N tenemos que:

$$\|\varphi\|_{\alpha,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial^\alpha\varphi(x)| = \sup_{x\in[a,b]}(1+|x|)^N|\partial^\alpha\varphi(x)| < \infty.$$

En efecto, $(1+|x|)^N|\partial^\alpha\varphi(x)|$ es una función continua, ya que las imágenes continuas de compactos es compacta, así, existen $C_{\alpha,N} \in \mathbb{R}$, $\forall\, \alpha, N$ tal que $(1+|x|)^N|\partial^\alpha\varphi(x)| \le C_{\alpha,N},\ x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2. Sea $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$, con $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Dado $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(1+|b|)^N} > 0$ existen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ y $\widetilde{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que supp $\varphi_n \subseteq [a,b]$ y

$$|\partial^\alpha(\varphi_n(x) - \varphi(x))| < \varepsilon', \text{ si } n \ge \widetilde{N}, x \in [a,b].$$

Así para $n \ge \widetilde{N}$ tenemos que

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial^\alpha(\varphi_n(x) - \varphi(x))| = \sup_{x\in[a,b]}(1+|x|)^N|\partial^\alpha(\varphi_n(x) - \varphi(x))| =$$

$$(1+|b|)^N \sup_{x\in[a,b]}|\partial^\alpha(\varphi_n(x) - \varphi(x))| < \varepsilon'(1+|b|)^N = \varepsilon.$$

Esto implica, $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}$. Además, que la inclución i es la identidad restringida a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ el cual es subconjunto de $\mathcal{S}$, por el inciso 1. Por tanto tenemos que $i(\varphi_n) = \varphi_n \to \varphi = i(\varphi)$. ∎

Definición 1.2.8 *Sean* $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $g(x) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, *para* $p \ge 1$. *Definamos la convolución de* $f * g$ *como la función*

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}} g(y)f(x-y)\,dy. \tag{1.2.11}$$

Notemos que la integral (1.2.11) converge, ya que $f(x)$ tiene soporte compacto.

Lema 1.2.9 *Sean* $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $g(x) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, *para* $p \ge 1$. *La convolución* $f * g$ *cumple las siguientes propiedades:*

1.

$$f*g \in \mathcal{L}^p, \quad \text{con } \|f*g\|_{\mathcal{L}^p} \le \|f\|_{\mathcal{L}^1}\|g\|_{\mathcal{L}^p}. \tag{1.2.12}$$

2. $f * g = g * f$

3. Si $\operatorname{supp} f \subseteq [-a, a]$ *para* $a \in \mathbb{R}$, *entonces*

$$(f * g)(x) = \int_{-a}^{a} g(y) f(x-y)\, dy = \int_{x-a}^{x+a} g(y) f(x-y)\, dy. \tag{1.2.13}$$

Demostración: *1.* Representamos $|f(x-y)g(y)|$ de la siguiente forma $|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{1-\frac{1}{p}}[|f(x-y)|^{\frac{1}{p}}|g(y)|]$. Utilizando Desigualdad de Hölder, a $\int f(x-y)g(y)\, dy$ con $p_1 = \frac{p}{p-1}$, $q_1 = p$, obtenemos

$$\begin{aligned} |f * g|^p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|^{1-\frac{1}{p}} [|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)|]\, dy \right)^p \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-y)|^{1-\frac{1}{p}} \right)^{p_1} dy \right]^{\frac{p}{p_1}} \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \right)^{q_1} dy \right]^{\frac{p}{q_1}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)|\, dy \right)^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

Integrando con respecto a x, la desigualdad $|f * g|^p \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{\mathcal{L}^p}^p = \int_{\mathbb{R}} |f * g|^p\, dx &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \int_{\mathbb{R}_x} \int_{\mathbb{R}_y} |f(x-y)||g(y)|^p\, dy\, dx \\ &= \|f\|_{\mathcal{L}^1}^{p-1} \|f\|_{\mathcal{L}^1} \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p = \|f\|_{\mathcal{L}^1}^p \|g\|_{\mathcal{L}^p}^p \end{aligned} \tag{1.2.15}$$

Por tanto, $f * g \in \mathcal{L}^p$, y se sigue la desigualdad de (1.2.12).

2. Haciendo cambio de variable $\xi = x - y$ con $d\xi = -dy$, tenemos

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y)\, dy = -\int_{\infty}^{-\infty} f(\xi) g(x-\xi)\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x-\xi)\, d\xi = (g*f)(x).$$

3. Notemos que $f(x-y) = 0$ si $y \notin [x-a, x+a]$. En efecto, $f(x-y) = 0$ si $x - y \notin [-a, a]$, lo que se cumple, si sólo si, $y \notin [x-a, x+a]$. Por tanto,

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(x-y)\, dy = \int_{x-a}^{x+a} g(y) f(x-y)\, dy.$$

■

Proposición 1.2.10 *El espacio* $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *es denso en* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *es decir,* $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Primero demostraremos el lema siguiente:

Lema 1.2.11 *Existe $\eta(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{I\!R})$ t.q. $\eta(x) = 1$ para $|x| \leq 1$.*

Demostración: Sean $C_0 = \int_{\mathrm{I\!R}} \phi(x)\, dx$, donde $\phi(x)$ esta definida por (1.2.10). Por Observación 1.2.4 $C_0 \neq 0$. Definamos

$$\lambda(x) = \frac{\phi(x)}{C_0}, \quad x \in \mathrm{I\!R}. \tag{1.2.16}$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x)\, dx = 1. \tag{1.2.17}$$

Notemos que λ es función par, por que ϕ lo es.

Definamos

$$\eta(x) = \chi_{[-2,2]} * \lambda := \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x-y)\chi(y)\, dy = \int_{-2}^{2} \lambda(x-y)\, dy \tag{1.2.18}$$

donde

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases} \tag{1.2.19}$$

función caracteristica para $[a,b]$. Demostremos que η esta bien definida. En efecto, por (1.2.19), la integral en (1.2.18) se hace por [-2,2], i.e.,

$$\eta(x) = \int_{-2}^{2} \lambda(x-y)\, dy = \int_{-2}^{2} \lambda(y-x)\, dy \tag{1.2.20}$$

por que λ es par. Notemos que $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ya que $\lambda(x) \geq 0, \;\; x \in \mathrm{I\!R}$ por (1.2.16) y

$$\int_{-2}^{2} \lambda(x)\, dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y)\, dy = 1 \tag{1.2.21}$$

por (1.2.17).

Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $\operatorname{supp} \lambda(y-x) \subseteq [-2,2]$. Esto implica que

$$\eta(x) = 1, \text{ para } x \in [-1,1]. \tag{1.2.22}$$

Cuando $|x| \geq 3$, $\operatorname{supp} \lambda(y-x)$ no intersecta el intervalo [-2,2]. Es decir,

$$\eta(x) = 0, \text{ para } |x| \geq 3. \tag{1.2.23}$$

Además, $\eta \in C^{\infty}(\mathrm{I\!R})$, dado que se puede derivar $\eta(x)$ en (1.2.20) infinitas veces, bajo el signo de la integral, usando que $\lambda(x) \in C^{\infty}(\mathrm{I\!R})$ y el teorema de la diferenciación bajo el signo de la integral, véase [2]. Lema esta demostrado. ∎

Continuaremos con la demostración de Proposición 1.2.10. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$. Considere $\varphi_n(x) := \varphi(x)\eta(x/n)$. Obviamente, $\varphi_n(x) \in \mathcal{D}(\mathrm{I\!R})$. Nos falta demostrar que $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}$, cuando $n \to \infty$. Por Definición 1.1.6 de la convergencia en $\mathcal{S}$, la afirmación es equivalente a $\forall \alpha, N = 0, 1, 2, ...$ $(1+|x|)^N |\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}[\varphi(x)(1-\eta(\frac{x}{n}))] \to 0$ uniformemente, cuando $n \to \infty$.

Notemos que por (1.2.22), (1.2.23), tenemos

$$\eta\left(\frac{x}{n}\right)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{si} \quad |x|\leq n \\ 0, & \text{si} \quad |x|\geq 3n \end{array}\right. .$$

Esto implica que

$$\varphi(x)\left[1-\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right]=\left\{\begin{array}{cl} 0, & \text{si} \quad |x|\leq n \\ \varphi(x), & \text{si} \quad |x|\geq 3n \end{array}\right. , \tag{1.2.24}$$

donde, por (1.2.21), se tiene que

$$|1-\eta(x/n)|\leq 1, \ \ n\leq |x|. \tag{1.2.25}$$

Así

$$|\varphi(x)[1-\eta(x/n)]|\leq |\varphi(x)|, \ \ n\leq |x|. \tag{1.2.26}$$

Como $\varphi\in\mathcal{S}$, por (1.1.3) existe $C\in\mathbb{R}$ tal que $|\varphi(x)|\leq\frac{C}{(1+|x|)}$, en particular, si $|x|\geq n$, obtenemos $|\varphi(x)|\leq\frac{C}{(1+n)}$.

Por tanto, tomando en cuenta (1.2.24), tenemos

$$|\varphi(x)[1-\eta(x/n)]|\leq\frac{C}{(1+n)}, \ \ x\in\mathbb{R},$$

es decir, $\varphi(x)[1-\eta(x/n)]\to 0$ uniformemente, cuando $n\to\infty$.

Similarmente

$$(1+|x|)^N\partial^\alpha\left[\varphi(x)\left[1-\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right]\right]=\left\{\begin{array}{cl} 0, & \text{si} \quad |x|\leq n \\ (1+|x|)^N\partial^\alpha\left[\varphi(x)(1-\eta(x/n))\right], & \text{si} \quad n\leq|x|\leq 3n \\ (1+|x|)^N\partial^\alpha\varphi(x), & \text{si} \quad |x|\geq 3n \end{array}\right. . \tag{1.2.27}$$

Aplicando la fórmula de derivación de Leibniz para $\varphi(x)[1-\eta(x/n)]$, obtenemos

$$\partial^\alpha[\varphi(x)[1-\eta(x/n)]]=\sum_{j=0}^{\alpha}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)\partial^j\varphi(x)\partial^{\alpha-j}(1-\eta(x/n)). \tag{1.2.28}$$

Existe $C_\beta\in\mathbb{R}$, tal que

$$|\partial^\beta(1-\eta(x/n))|\leq C_\beta, \ \ \forall n,x\in\mathbb{R}.$$

En efecto, para $\beta=0$, se sigue de (1.2.25). Para $\beta\neq 0$, existe $C_\beta\in\mathbb{R}^+$ tal que $|\partial^\beta(1-\eta(x/n))|=|\partial^{\beta-1}(-\eta(x/n))|\leq C_\beta \ \ \forall n$, ya que $|\partial^\beta\eta(\frac{x}{n})|=|\frac{1}{n^\beta}\partial^\beta\eta(\frac{x}{n})|\leq\frac{1}{n^\beta}\sup_{y\in\mathbb{R}}|\partial^\beta\eta(y)|\leq\sup_{y\in\mathbb{R}}|\partial^\beta\eta(y)|\leq C_\beta$ por (1.1.3).

Por tanto, de (1.2.28) obtenemos

$$|\partial^\alpha[\varphi(x)(1-\eta(x/n))]|\leq\sum_{j=0}^{\alpha}\left(\begin{array}{c}\alpha\\ j\end{array}\right)C_\alpha|\varphi^{(j)}(x)|, \ x\in\mathbb{R}. \tag{1.2.29}$$

Definamos $C'_\alpha = \text{máx}_{j\leq\alpha}\{\begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} C_\alpha\}$. Además, como $\varphi \in \mathcal{S}$, $\exists\, C_{j,N} \in \mathbb{R}$ tal que $|\varphi^{(j)}(x)| \leq C_{j,N}/(1+|x|)^{N+1}, 0 \leq j \leq \alpha, x \in \mathbb{R}$ por (1.1.3). Definiendo $C_{\alpha,N} = \text{máx}_{j=0,1,...,\alpha} C_{j,N}$, de modo que,$|\varphi^{(j)}(x)| \leq C_{\alpha,N}/(1+|x|)^{N+1}$, para $j = 0,1,...,\alpha$. Multiplicando la desigualdad (1.2.29) por $(1+|x|)^N$, obtenemos de aqui

$$|(1+|x|)^N \partial^\alpha \left[\varphi(x)\left[1-\eta\left(\frac{x}{n}\right)\right]\right]| \leq \frac{C'_\alpha C_{\alpha,N}(\alpha+1)}{(1+n)}, \quad n \leq |x|, \tag{1.2.30}$$

además, $(1+|x|)^N \partial^\alpha[\varphi(x)[1-\eta\left(\frac{x}{n}\right)]] = 0, \quad |x| \leq n$, ya que $\partial^\alpha[\varphi(x)(1-\eta(x/n))] = 0$ para $|x| \leq n$ por (1.2.27). Esto implica, $\|\varphi(x)(1-\eta(x/n)\|_{\alpha,N} \to 0$ cuando $n \to \infty$. $\forall \alpha, N$. Queda demostrada Proposición 1.2.10. ■

Sea ϕ de (1.2.10). Definamos para $k \in \mathbb{N}$

$$\phi_k(x) := \phi(kx). \tag{1.2.31}$$

(1.2.10) implica que

$$\operatorname{supp} \phi_k \subseteq [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]. \tag{1.2.32}$$

Sea

$$\varphi_k(x) := \frac{k}{C}\phi_k(x), \tag{1.2.33}$$

donde $C = \int \phi(\xi)\, d\xi$. Entonces $\operatorname{supp} \varphi_k \subseteq [-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$, por (1.2.32), y

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_k(\xi)\, d\xi = 1, \quad k \in \mathbb{N} \tag{1.2.34}$$

Lema 1.2.12 *Sea $f \in C([-n,n])$. Entonces para cada $a > 0$, $f_k(x) := \bar{f} * \varphi_k(x) \rightrightarrows f(x)$ sobre $[-n+a, n-a]$ cuando $k \to \infty$, donde*

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{para} \quad x \in [-n,n] \\ 0 & \textit{para} \quad x \notin [-n,n]. \end{cases}$$

Demostración: Por la continuidad uniforme de f $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \ \exists$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ si } |x-y| < \delta \ \forall \ x, y \in [-n,n]. \tag{1.2.35}$$

Notemos que por (1.2.32), $f_k(x) = \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} f(y)\varphi_k(x-y)\, dy$, con $x \in [-n+a, n-a]$, y $\frac{1}{k} < a$. Además $f(x) = \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} f(x)\varphi_k(x-y)\, dy$, con $x \in [-a,a]$ por (1.2.34). Por tanto,

$$f(x) - f_k(x) = \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} [f(x) - f(y)]\varphi_k(x-y)\, dy, \quad x \in [-n+a, n-a]. \tag{1.2.36}$$

Sea $k > \text{máx}\{\frac{1}{a}, \frac{2}{\delta}\}$. Entonces $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ para $x, y \in [-n,n]$, y $|y-x| < \frac{1}{k}$ por (1.2.35) y $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \int_{x-\frac{1}{k}}^{x+\frac{1}{k}} \varphi_k(x-y)\, dy = \varepsilon$, para $x \in [-n+a, n-a]$. Lema queda demostrado. ■

Lema 1.2.13 *$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.*

Demostración: I) Sean $f \in \mathcal{L}^2([-n,n])$, $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por continuidad absoluta de la integral de Lebesgue existe a_ε tal que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2([-n,-n+a_\varepsilon]\cup[n-a_\varepsilon,n])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.2.37}$$

Existe un sistema de polinomios ortogonales completo en $\mathcal{L}^2([-n,n])$, véase [4]. Por tanto, existe $P_\varepsilon(x)$ polinomio tal que

$$\|f - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2([-n,n])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.2.38}$$

Por el Lema 1.2.12, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq K$

$$\|P_\varepsilon - P_{\varepsilon,k}\|_{\mathcal{L}^2([-n+a_\varepsilon,n-a_\varepsilon])} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{1.2.39}$$

donde $P_{\varepsilon,k} = P_\varepsilon * \varphi_k$ y φ_k esta definida en (1.2.33). Obviamente

$$P_{\varepsilon,k} \in \mathcal{D}([-n,n]). \tag{1.2.40}$$

Sea

$$\bar{P}_{\varepsilon,k}(x) = \begin{cases} P_{\varepsilon,k}(x), & \text{si} \quad x \in [-n+a_\varepsilon, n-a_\varepsilon] \\ 0, & \text{si} \quad x \notin [-n+a_\varepsilon, n-a_\varepsilon] \end{cases}$$

Usando (1.2.38) y (1.2.39) implica que

$$\begin{aligned} \|f - \bar{P}_{\varepsilon,k}\|_{\mathcal{L}^2([-n,n])} &\leq \|f\|_{\mathcal{L}^2([-n,-n+a_\varepsilon]\cup[n-a_\varepsilon,n])} + \|f - P_\varepsilon + P_\varepsilon - \bar{P}_{\varepsilon,k}\|_{\mathcal{L}^2([-n+a_\varepsilon,n-a_\varepsilon])} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \|f - P_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^2([-n+a_\varepsilon,n-a_\varepsilon])} + \|P_\varepsilon - P_{\varepsilon,k}\|_{\mathcal{L}^2([-n+a_\varepsilon,n-a_\varepsilon])} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.2.41}$$

II) Sean $\varepsilon > 0$ y $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Por la definición de la integral de Lebesgue existe n tal que

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} < \varepsilon/2 \tag{1.2.42}$$

donde

$$f_n(x) := \begin{cases} f(x), & \text{para} \quad x \in [-n,n] \\ 0, & \text{para} \quad x \notin [-n,n]. \end{cases} \tag{1.2.43}$$

Por lo que demostramos en I) existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f - \varphi\|_{\mathcal{L}^2([-n,n])} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2.44}$$

De aquí

$$\|f - \varphi\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} \leq \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} + \|f_n - \varphi\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ya que $\|f - \varphi\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} = \|f - \varphi\|_{\mathcal{L}^2([-n,n])}$ por (1.2.43) y (1.2.40). ■

Lema 1.2.14 *$\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{L}^2$.*

Demostración: Se sigue del Lema 1.2.13. ■

1.3. Espacio de Distribuciones Temperadas $\mathcal{S}'$.

Definición 1.3.1 *Definamos a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ como el espacio de las funciones continuas en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, es decir, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es función lineal y continua en las normas (1.1.1). El funcional $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es llamado* **Distribución Temperada***. El producto escalar $< f(x), \varphi(x) >$ denota el valor del funcional $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ a una función prueba $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, es decir,*

$$< f(x), \varphi(x) > := f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{1.3.45}$$

Observación 1.3.2 *Para demostrar que un funcional lineal $f : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ es continuo es suficiente demostrar que $< f, \varphi_n > \to 0$ cuando $n \to \infty$ para cada $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$.*

Ejemplo 1.3.3 *Sea $f \in C(\mathbb{R})$ satisface acotación*

$$|f(x)| \le C(1 + |x|)^p, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.3.46}$$

con algunas constantes $C, p \in \mathbb{R}$. Consideremos el funcional

$$< f, \varphi > := \int f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{1.3.47}$$

Lema 1.3.4 *La integral (1.3.47) converge y es una Distribución Temperada.*

Demostración: I) Por (1.1.3) para $\alpha = 0, N \ge q := p + 2$ tenemos $|\varphi(x)| \le C(1 + |x|)^{-p-2}\|\varphi\|_{0,N}$, $x \in \mathbb{R}$, así (1.3.46) implica que $|f(x)\varphi(x)| \le C\|\varphi\|_{0,N}(1 + |x|)^{-2}$, por tanto, la integral (1.3.47) converge, además, $| < f, \varphi > | \le C\|\varphi\|_{0,N} \int (1 + |x|)^{-2}\, dx < \infty$.
ii) Linealidad del funcional se sigue de las propiedades de la integral.
iii) Continuidad: Si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$ cuando $n \to \infty$, entonces $\|\varphi_n\|_{\alpha,N} \to 0$. Por tanto $| < f, \varphi_n > | \le C\|\varphi_n\|_{\alpha,N} \int (1 + |x|)^{-2}dx \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Observación 1.3.5 *La cota (1.3.46) motiva el término* ***Distribución Temperada*** *para las funciones correspondientes.*

Proposición 1.3.6 *El funcional de tipo (1.3.47) es distribución temporada si:*

1. $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$
2. $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$
3. $f(x) \in L^p(\mathbb{R})$, *con* $p > 1$.

Demostración: 1. Sea $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Usando la teoría de la integral de Lebesgue y la desigualdad (1.1.1) para $\alpha = N = q = 0$, obtenemos:

$$| < f(x), \varphi(x) > | \le \int |f(x)||\varphi(x)|dx \le \|\varphi\|_{0,0} \int |f(x)|dx = \|\varphi\|_{0,0}\|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}.$$

Linealidad: se sigue de las propiedades de la integral.
Continuidad: Si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$ cuando $n \to \infty$, entonces $\|\varphi_n\|_{0,0} \to 0$. Por tanto $| < f, \varphi_n > | \leq \|f\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R})}\|\varphi_n\|_{0,0} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Ahora, continuidad se sigue de Observación 1.3.2.(En adelante demostraremos continuidad sin referirnos a Observación 1.3.2.

2. Sea $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Usando la teoría de la integral de Lebesgue, desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad (1.1.3) para φ con $\alpha = 0, q = 1, N = 1$. obtenemos:

$$| < f(x), \varphi(x) > |^2 = \left| \int f(x)\varphi(x)dx \right|^2 = \left(\int |f(x)||\varphi(x)|dx \right)^2 \leq \left(\int |\varphi(x)|^2 dx \right) \left(\int |f(x)|^2 dx \right)$$

$$\leq \left(\int (1+|x|)^{-2} \|\varphi\|_{0,1}^2 \, dx \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = C\|\varphi\|_{0,1}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 < \infty$$

donde

$$C = \int (1+|x|)^{-2} \, dx < \infty$$

por tanto

$$|< f(x), \varphi(x) >| \leq C_1 \|\varphi\|_{0,1} \|f(x)\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})} < \infty. \tag{1.3.48}$$

Linealidad: Sigue de las propiedades de la integral.
Continuidad: Si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$ cuando $n \to \infty$, entonces $\|\varphi_n\|_{0,1} \to 0$. Por tanto $| < f, \varphi_n > | \leq \|f\|_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R})}\|\varphi_n\|_{0,1} \to 0$ cuando $n \to \infty$.
3. Sean $p > 1, f(x) \in L^p(\mathbb{R})$. Usando la teoría de la integral de Lebesgue, desigualdad de Hölder y la desigualdad (1.1.3) para φ con $\alpha = 0, N = 1$ obtenemos:

$$| < f(x), \varphi(x) > | = \left| \int f(x)\varphi(x)dx \right| \leq \left(\int |\varphi(x)|^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int (1+|x|)^{\frac{-p}{p-1}} \|\varphi\|_{0,1}^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} = \|\varphi\|_{0,1} \left(\int (1+|x|)^{-\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} < \infty$$

dado que $p > p-1 > 0$, de modo que $\frac{p}{p-1} > 1$ así

$$C = \int (1+|x|)^{-\frac{p}{p-1}} < \infty,$$

por tanto

$$|< f(x), \varphi(x) >| \leq C_1 \|\varphi\|_{0,1} \|f(x)\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})} < \infty.$$

Linealidad: Se sigue de las propiedades de la integral.
Continuidad: Si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$ cuando $n \to \infty$, entonces $\|\varphi_n\|_{0,1} \to 0$. Por tanto $| < f, \varphi_n > | \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbb{R})}\|\varphi_n\|_{0,1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

Corolario 1.3.7 *La inyección natural $i : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{S}'$ es continua.*

Demostración: Es suficiente demostrar que si $f_n \to 0$ en $\mathcal{L}^2$, entonces $f_n \to 0$ en $\mathcal{S}'$. Sea $f_n \to 0$ en $\mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})$ esto implica que

$$\|f_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{1.3.49}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, por (1.3.48) tenemos

$$| < f_n, \varphi > | \leq C\|\varphi\|_{0,1}\|f_n\|_{\mathcal{L}^2(\mathrm{I\!R})} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Esto termina la demostración. ■

Proposición 1.3.8 *La función $e^x \notin \mathcal{S}'$.*

Para demostrar esta afirmación, primeramente demostraremos el siguiente lema.

Lema 1.3.9 *Sea $\psi_n(x) = e^{-x}\phi(x-n)$, con ϕ definida en (1.2.10). Entonces $\psi_n \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathrm{I\!R})$.*

Demostración: Notese que $\psi_n \in C^\infty(\mathrm{I\!R})$ con supp $\psi_n \subseteq [n-1, n+1]$. Mostraremos que $\|\psi_n\|_{\alpha,N} \to 0$, cuando $n \to \infty$. Aplicando la fórmula de derivación de Leibniz para ψ_n tenemos que

$$\psi_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{\alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) (e^{-x})^{(j)}\phi^{(\alpha-j)}(x-n).$$

De donde obtenemos la siguiente cota

$$\|\psi_n\|_{\alpha,N} = \sup_{x\in\mathrm{I\!R}}(1+|x|)^N|\psi_n^{(\alpha)}(x)| \leq (n+2)^N \sum_{j=0}^{\alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right) |(e^{-x})^{(\alpha)}||(\phi^{(\alpha-j)}(x-n))|.$$

Tenemos:

$$|(e^{-x})^{(\alpha)}| \leq e^{-(n-1)}, \text{ si } x \in [n-1, n+1]$$
$$|\phi^{(\alpha-j)}(x-n)| = |\phi^{(\alpha-j)}(x)| \leq C''_\alpha, \ \forall\, x \in \mathrm{I\!R}, j = 1, ..., \alpha.$$

Por lo tanto $\|\psi_n\|_{\alpha,N} \leq (\alpha+1)C'_\alpha C''_\alpha(n+2)^N e^{-(n-1)}$, donde $C'_\alpha = \max_{j\leq\alpha}\{\left(\begin{array}{c} \alpha \\ j \end{array} \right)\}$. Ya que, si $n \to \infty$, $(n+2)^N e^{-(n-1)} \to 0$, así $\|\psi_n\|_{\alpha,N} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por tanto $\psi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$. Lema queda demostrado. ■

Demostración de la Proposición 1.3.8. De la definición de $\psi_n(x)$ obtenemos:

$$< e^x, \psi_n(x) > = < e^x, e^{-x}\phi(x-n) > = \int_{\mathrm{I\!R}} \phi(x-n)\, dx = \int_{\mathrm{I\!R}} \phi(x)\, dx = cte \nrightarrow 0, \ \ n \to \infty.$$

por el Observación 1.3.2. Por tanto e^x no es funcional continua sobre $\mathcal{S}$. ■

Definición 1.3.10 *Definamos la topología débil en $\mathcal{S}'$. $f_n \to 0$ en $\mathcal{S}'$ sii*

$$< f_n, \varphi > \to 0, \ \ \textit{cuando } n \to \infty \ \forall\, \varphi \in \mathcal{S}. \tag{1.3.50}$$

1.4. Espacio de Distribuciones $\mathcal{D}'$.

Definición 1.4.1 *El espacio de las distribuciones $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de Schwartz, es el espacio de las funcionales lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donde la continuidad se entiende en el siguiente sentido:*

$$< f, \varphi_n > \to < f, \varphi >, \tag{1.4.51}$$

si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ en el sentido de la Definición 1.2.6.

Definición 1.4.2 *Definamos la topología débil en $\mathcal{D}'$. Decimos que $f_n \to 0$ en $\mathcal{D}'$ si para toda $\varphi \in \mathcal{D}$*

$$< f_n, \varphi > \to 0, \quad \textit{cuando } n \to \infty \tag{1.4.52}$$

Definición 1.4.3 *Sea $f \in \mathcal{S}'$. Definamos un funcional f sobre $\mathcal{D}$, que actua por la fórmula*

$$< f, \varphi > = < f, \varphi >, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.4.53}$$

Observación 1.4.4 *(1.4.53) esta bien definida, ya que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ por el Lema 1.2.7.*

En la siguiente Proposición demostraremos que (1.4.53) define un funcional $f \in \mathcal{D}'$.

Proposición 1.4.5 *1. f es lineal sobre $\mathcal{D}$,*

2. f es continua sobre $\mathcal{D}$.

Demostración: *1.* Linealidad: La Definición (1.4.53) determina un funcional lineal sobre $\mathcal{D}$. Dado que f es lineal sobre $\mathcal{S}$, y $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

2. Continuidad: si $\varphi_n \in \mathcal{D}$ y $\varphi_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ entonces $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$ por el Lema 1.2.7 inciso 2. Ya que $f \in \mathcal{S}'$, así $< f, \varphi_n > \to 0$. Esto implica que f es continua en $\mathcal{D}$, i.e., $f \in \mathcal{D}'$. ■

La Proposición 1.4.5 implica, que cuando distribución $f \in \mathcal{S}$ es una distribución de $\mathcal{D}'$. De esta manera tenemos una aplicación $i' : \mathcal{S}' \to \mathcal{D}'$. En el siguiente Lema demostraremos que i' es lineal, continua e inyectiva.

Lema 1.4.6 *1. i' es lineal,*

2. i' es continua,

3. i' es inyectiva.

Demostración: *1.* Linealidad: es evidente, dado que $i'(f) = f$.

2. Continuidad: sea $f_n \to 0$ en $\mathcal{S}'$ entonces $i'(f_n) \to 0$ en $\mathcal{D}'$. En efecto, $i'(f_n) \to 0$ en $\mathcal{D}'$ sii $< f_n, \varphi > \to 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$. Pero esto se cumple, ya que $< f_n, \varphi > \to 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ y $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

3. Inyectividad: si $i'(f) = 0$ entonces $f = 0$. En efecto, $i'(f) = 0$ entonces $< f, \varphi > = 0$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}$. Dado que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{S}$ por Proposición 1.2.10. Por tanto, $< f, \varphi > = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$. ■

Definición 1.4.7 *Para $\varphi \in \mathcal{S}$, definamos*

$$< \delta, \varphi > := \varphi(0) \tag{1.4.54}$$

Lema 1.4.8 *Probar que $\delta \in \mathcal{S}'$, es decir*

1. *δ es lineal sobre $\mathcal{S}$,*
2. *δ es continua sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración: 1. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$< \delta, \alpha\varphi_1 + \varphi_2 > = \alpha\varphi_1(0) + \varphi_2(0) = \alpha < \delta, \varphi_1 > + < \delta, \varphi_2 > .$$

2. Sea $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$, esto implica en particular que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi_n(x)| \to 0$ cuando $n \to \infty$, por Definición 1.1.6, luego $\varphi_n(0) \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, $< \delta, \varphi_n > \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

Definición 1.4.9 *Para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, definamos*

$$< pv\frac{1}{x}, \varphi > := \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right] \tag{1.4.55}$$

Lema 1.4.10 *El límite (1.4.55) existe.*

Demostración: Dada $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, entonces $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $|\psi(x)| \leq C$, $x \in [-1, 1]$. Por tanto,

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x),\ x \in [-1, 1] \tag{1.4.56}$$

ya que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ todas las integrales en la siguiente identidad convergen

$$\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \left[\frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) \right] dx = \tag{1.4.57}$$

$$C + \int_{-1}^{-\varepsilon} \psi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \psi(x)\, dx + \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx. \tag{1.4.58}$$

Cuando $\varepsilon \to 0$, $\int_{-1}^{-\varepsilon} \psi(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \psi(x)\, dx$ tiene limite ya que $\psi(x)$ es integrable sobre [-1,1] por (1.4.57). Falta demostrar que existe limite para $\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx$. Integrando

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{\varphi(0)}{x}\, dx = \varphi(0) [\ln|\varepsilon| - \ln|1|] + \varphi(0) [\ln|1| - \ln|\varepsilon|] = 0.$$

Por tanto, el límite existe. ■

Corolario 1.4.11

$$< pv\frac{1}{x}, \varphi >= \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{|x|\leq 1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\, dx \tag{1.4.59}$$

Demostración: Se sigue de (1.4.57).

Corolario 1.4.12 *$pv\frac{1}{x}$ determina una funcional lineal sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración: (1.4.59) implica que $pv\frac{1}{x}$ actua como una aplicación lineal a $\varphi \in \mathcal{S}$. En efecto, esto se obtiene de (1.4.59) sustituyendo en lugar de la función φ por la función $\alpha\varphi_1 + \varphi_2$. ■

Corolario 1.4.13 *$pv\frac{1}{x}$ es continuo sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración: Sea $\varphi_n(x) \to 0$ en $\mathcal{S}$, esto implica que $(1+|x|)\varphi_n(x) \rightrightarrows 0$ por Definición 1.1.1, obtenemos $\frac{\varphi_n(x)}{x} \to 0$ uniformemente cuando $1 \leq |x|, n \to \infty$, así

$$\int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi_n(x)}{x} \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty. \tag{1.4.60}$$

Además, $\frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x} = \varphi_n'(\xi),\ \xi \in [0,1]$ por el Teorema de Lagrange y $\varphi_n'(x) \rightrightarrows 0$ uniformemente en [-1,1] cuando $n \to \infty$ entonces

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi_n(x)-\varphi_n(0)}{x}\, dx \to 0 \ \text{ cuando } \ n \to \infty. \tag{1.4.61}$$

De (1.4.59) obtenemos que $< pv\frac{1}{x}, \varphi_n > \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

1.5. Diferenciación de Distribuciones Temperadas

Definición 1.5.1 *Para $f \in \mathcal{S}'$ definamos la derivada f' como la siguiente funcional en $\mathcal{S}$*

$$< f', \varphi > := - < f, \varphi' >, \ \ \varphi \in \mathcal{S}. \tag{1.5.62}$$

Observación 1.5.2 *La Definición 1.5.1 es correcta por que $\varphi' \in \mathcal{S}$ para toda $\varphi \in \mathcal{S}$, por la Proposición 1.1.7 inciso 1.*

Lema 1.5.3 *Si $f \in \mathcal{S}'$, entonces $f' \in \mathcal{S}'$, i. e.,*

1. *f' es lineal sobre $\mathcal{S}$,*

2. *f' es continua sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración: 1. Usando sucesivamente la definición de derivada, linealidad de la derivada, linealidad de f y la Definición 1.5.1, obtenemos

$$\begin{aligned} < f', \lambda\varphi_1 + \varphi_2 > &= - < f, (\lambda\varphi_1 + \varphi_2)' > \\ &= - < f, \lambda\varphi_1' + \varphi_2' > \\ &= -\lambda < f, \varphi_1' > - < f, \varphi_2' > \\ &= \lambda < f', \varphi_1 > + < f', \varphi_2 > . \end{aligned}$$

2. Sea $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$. Usando la Definición 1.5.1 tenemos $< f', \varphi_n >= - < f, \varphi_n' >\to 0$ ya que $\varphi_n' \to 0$ en $\mathcal{S}$ cuando $n \to \infty$. ■

Demostremos que operador $\frac{d}{dx}$ es continuo en $\mathcal{S}'$.

Lema 1.5.4 *Si $f_n \to f$ entonces $f_n' \to f'$.*

Demostración: $f_n \to f \in \mathcal{S}'$. Usando Definición 1.5.1, Definición 1.3.10 y $\varphi' \in \mathcal{S}$ $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ tenemos:

$$< f_n', \varphi >= - < f_n, \varphi' >\to - < f, \varphi' >=< f', \varphi > .$$

Por tanto, $f_n' \to f'$. ■

1.6. Multiplicación por Funciones Suaves

Consideramos las funciones suaves $M(x)$ que satisfacen

$$|M^{(k)}(x)| \leq C(k)(1 + |x|)^{p(k)}, \;\; x \in \mathbb{R}, \; k \in \mathbb{N} \tag{1.6.63}$$

con algunas constantes $C(k), p(k) \in \mathbb{R}$ para todo k=0, 1,2,...

Lema 1.6.1 *1. Todo polinomio $M(x) = \sum_{k=0}^{n} M_k x^k$ satisface (1.6.63),*

2. La función exponencial e^x no satisface acotación (1.6.63)

Demostración: *1.* Sea $M(x) = \sum_{k=0}^{n} M_k x^k = \sum_{j=0}^{n} N_j (1+x)^j$ un polinomio, notese que $|1+x| \leq 1+|x|$, así $|(1+x)^i| \leq (1+|x|)^i$ para todo i, y $(1+|x|)^j \leq (1+|x|)^i$, si $j < i$. Ademas, la k-ésima derivada de M es $M^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{N_j j!}{(j-k)!}(1+x)^{j-k}$ así obtenemos cota para $M^{(k)}(x)$.

$$|M^{(k)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{j!}{(j-k)!}|N_j|(1+|x|)^{j-k} \leq (1+|x|)^{n-k} \sum_{j=0}^{n} \frac{j!}{(j-k)!}|N_j| = C(k)(1+|x|)^{n-k}.$$

La primer afirmación esta probada.

2. Supongamos que $e^x \leq C(1+|x|)^N$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ya que por la regla de L'Hôpital $\frac{C(1+x)^N}{e^x} \to 0$, cuando $x \to \infty$, entonces existe $K > 0$ tal que $C(1+x)^N < e^x$, para $x > K$. Esto contradice a la suposición. ■

Lema 1.6.2 *Sea $M(x)$ satisface (1.6.63). Entonces*

1. *$M\varphi \in \mathcal{S}$ para $\varphi \in \mathcal{S}$*

2. *La función multiplicación $M : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es lineal y continua.*

Demostración: *1.* Por definición (1.1.1), por demostrar que $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial_x^\alpha(M(x)\varphi(x)| < \infty$ para cualquier $\alpha, N = 0, 1, 2, ...$ Aplicando la fórmula de derivación de Leibniz:

$$\partial_x^\alpha(M(x)\varphi(x)) = \sum_{j=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} M^{(j)}(x)\varphi^{(\alpha-j)}(x) \tag{1.6.64}$$

y usando (1.6.63) para $M(x)$, obtenemos la siguiente cota

$$|\partial^\alpha M(x)\varphi(x)| \leq \sum_{j=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} |M^{(j)}(x)||\varphi^{(\alpha-j)}(x)| \leq \sum_{j=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} C(j)(1+|x|)^{p(j)}|\varphi^{(\alpha-j)}(x)|. \tag{1.6.65}$$

Sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Usando (1.1.3) con $q = N + p(j)$ obtenemos $|\varphi^{(\alpha-j)}(x)| \leq (1 + |x|)^{-(N+p(j))}\|\varphi\|_{\alpha-j,N+p(j)}$, $x \in \mathbb{R}, j = 0, 1, ..., \alpha$. Luego, multiplicando a (1.6.65) por $(1+|x|)^N$, obtenemos que

$$|(1+|x|)^N\partial^\alpha(M(x)\varphi(x))| \leq (1+|x|)^N \sum_{j=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} C(j)(1+|x|)^{p(j)}|\varphi^{(\alpha-j)}(x)| \leq C_\alpha \sum_{j=0}^{\alpha} \|\varphi\|_{\alpha-j,N+p(j)}. \tag{1.6.66}$$

Donde $C_\alpha = \max_{0\leq j\leq\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ j \end{pmatrix} C(j)$. Esto implica que $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|)^N|\partial_x^\alpha(M(x)\varphi(x)| < \infty$. La afirmación *1.* se demostro.

2. Continuidad: sea $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}$ entonces $\sum_{j=0}^{\alpha} \|\varphi_n\|_{\alpha-j,N+p(j)} \to 0$. Por tanto, $\|M\varphi_n\|_{\alpha,N} \to 0$ cuando $n \to \infty$ $\forall\alpha, N$, por (1.6.66).

Finalmente, la linealidad de la función multiplicación es obvia. ■

Ahora definamos la multiplicación de funciones suaves con distribuciones temperadas.

Definición 1.6.3 *Sea $f \in \mathcal{S}'$ definamos $\forall\varphi \in \mathcal{S}$*

$$< M(x)f(x), \varphi(x) >=< f(x), M(x)\varphi(x) > . \tag{1.6.67}$$

Lema 1.6.4 *1. La funcional $M(x)f(x)$ es distribución temperada, donde $f \in \mathcal{S}'$ y M satisface (1.6.63),*

2. La función $M : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ definida como $M(f(x)) = M(x)f(x)$ donde $M(x)$ satisface la acotación (1.6.63) es lineal y continua.

Demostración: *1*. Linealidad: obvia.
Continuidad: Sea $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usando (1.6.67) entonces

$$< M(x)f(x), \varphi_n(x) >=< f(x), M(x)\varphi_n(x) >\to 0, \text{ cuando } n \to \infty, \tag{1.6.68}$$

ya que $M(x)\varphi_n(x) \to 0$ por Lema1.6.2 inciso 1 y $f \in \mathcal{S}'$. Por tanto, $Mf \in \mathcal{S}'$.
2. Sea $f_n \to f$ en $\mathcal{S}'$, por (1.6.67) tenemos

$$< M(x)f_n(x), \varphi(x) >:=< f_n(x), M(x)\varphi(x) >\to< f(x), M(x)\varphi(x) >=< M(x)f(x), \varphi(x) > . \tag{1.6.69}$$

Así $Mf_n \to Mf$ por Definición 1.3.10 de convergencia de distribuciones temperadas. ■

Capítulo 2

Transformada de Fourier de Distribuciones Temperadas.

2.1. Definición.

Definición 2.1.1 *Sea $\varphi \in \mathcal{S}$, la transformada de Fourier esta definida como*

$$F(\varphi) = \hat{\varphi}(k) := \int_{\mathbb{R}} e^{ikx}\varphi(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.1.1}$$

Ya que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ por Observacion 1.1.2, la integral (2.1.1) converge absolutamente, de modo que, esta bien definida la transformada de Fourier.

Proposición 2.1.2 *1. $\hat{\varphi}(k) \in \mathcal{S}$ para $\varphi(x) \in \mathcal{S}$,*

2. La transformada $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es lineal y continua.

Demostración: 1. Tenemos que mostrar la acotación (1.1.1) para la transformada de Fourier, pero primero demostraremos los lemas siguientes.

Lema 2.1.3

$$\|\hat{\varphi}\|_{\alpha,N} = \sup_{k\in\mathbb{R}}(1+|k|)^N|\partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)| < \infty, \quad \alpha, N = 0, 1, 2, ... \tag{2.1.2}$$

es equivalente a

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} |k|^N|\partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)| < \infty, \quad \alpha, N = 0, 1, 2, ... \tag{2.1.3}$$

Demostración: 1) Probaremos que (2.1.3) implica (2.1.2). Por la Definición 1.1.1 y desarrollando el binomio, obtenemos

$$\|\hat{\varphi}\|_{\alpha,N} = \sup_{k\in\mathbb{R}}(1+|k|)^N|\partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)| = \sup_{k\in\mathbb{R}}\left\{\left(\sum_{M=0}^{N}\binom{N}{M}|k|^M\right)|\partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)|\right\}. \tag{2.1.4}$$

Haciendo $C_N = \text{máx}_{M\leq N} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix}$ y usando (2.1.3) implica

$$\|\hat{\varphi}\|_{\alpha,N} \leq C_N \sum_{M=0}^{N} \sup_{k\in\mathbb{R}} |k|^M |\partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)| < \infty.$$

2) El hecho que (2.1.2) implica (2.1.3) es evidente. Lema esta probado. ■

Lema 2.1.4 *La transformada de Fourier cumple las siguientes fórmulas de derivación para* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

$$\partial_k \hat{\varphi}(k) = F[(ix)(\varphi(x))], \tag{2.1.5}$$

$$k\hat{\varphi}(k) = F[(i\partial_x)(\varphi(x))]. \tag{2.1.6}$$

Demostración: Usando el teorema de la derivación bajo el signo de la integral, véase,[2]. Podemos derivar la integral (2.1.1) con respecto a k, por que después de la derivación, el integrando converge absolutamente, ya que $\varphi \in \mathcal{S}$ y $x\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, esto último, por Lema 1.6.2 y Observación 1.1.2. Entonces

$$\partial_k \hat{\varphi}(k) = \int_{\mathbb{R}} (ix) e^{ikx} \varphi(x)\, dx = F[(ix)(\varphi(x))], \quad k \in \mathbb{R}\,. \tag{2.1.7}$$

La identidad (2.1.5) esta probada.

Probemos (2.1.6). Usando (2.1.1) e integación por partes obtenemos

$$F[(i\partial_x)\varphi(x)] = \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} i\varphi'(x)\, dx = i\varphi(x)e^{ikx} \mid_{-\infty}^{\infty} - i\int_{\mathbb{R}} (ik)e^{ikx}\varphi(x)\, dx. \tag{2.1.8}$$

Ya que, $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, implica $\varphi(x)e^{ikx} \mid_{-\infty}^{\infty} = 0$. Por tanto, $F[(i\partial_x)\varphi(x)] = k\hat{\varphi}(k)$. ■

Observación 2.1.5 *En la forma de operador las identidades (2.1.5) y (2.1.6) pueden ser escritas como*

$$\partial_k\, F \;=\; F\,[ix\,]\,, \quad k\,F \;=\; F\,[i\partial_x\,] \tag{2.1.9}$$

Corolario 2.1.6 *Para* $\alpha, N \in \mathbb{N}$. *Entonces* $k^N \partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k) = F[(i\partial_x)^N\, ((ix)^\alpha(\varphi(x)))]$.

Demostración: Aplicando N veces (2.1.6) a la función $(ix)^\alpha\varphi(x)$, después, aplicando α veces (2.1.6) a la función $\varphi(x)$ obtenemos

$$k^N \partial_k^\alpha \varphi\hat{(k)} = F[(i\partial_x)^N\, ((ix)^\alpha \varphi(x))]. \tag{2.1.10}$$

■

Continuaremos la demostración de Proposición 2.1.2. Demostraremos que $\forall N, \alpha\ \exists C_{N,\alpha}(\varphi) \in \mathbb{R}$ tal que $|k^N \partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)| \leq C_{N,\alpha}(\varphi),\ k \in \mathbb{R}$. La igualdad (2.1.10) puede ser escrita como

$$k^N \partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k) = \int e^{ikx} (i\partial_x)^N ((ix)^\alpha \varphi(x))\, dx. \tag{2.1.11}$$

De aquí se tiene la siguiente cota:

$$|k^N \partial_k^\alpha \hat{\varphi}(k)| \leq \int |(i\partial_x)^N((ix)^\alpha \varphi(x)|\, dx. \tag{2.1.12}$$

Aplicando la fórmula de derivación de Leibniz para $(i\partial_x)^N((ix)^\alpha\varphi(x))$, obtenemos

$$(i\partial_x)^N((ix)^\alpha\varphi(x)) = \sum_{M=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} [(i\partial_x)^M(ix)^\alpha](i\partial_x)^{N-M}\varphi(x). \tag{2.1.13}$$

De aquí

$$|(i\partial_x)^N((ix)^\alpha\varphi(x))| \leq C_N \sum_{M=0}^{N}(1+|x|)^{\alpha-M}|\varphi^{(N-M)}(x)| \leq C_{N,\alpha}(1+|x|)^\alpha \sum_{M=0}^{N}|\varphi^{(N-M)}(x)|; \tag{2.1.14}$$

ya que

$$|\varphi^{(N-M)}(x)| \leq (1+|x|)^{-\alpha-2}\|\varphi\|_{N-M,\alpha+2} \leq (1+|x|)^{-\alpha-2}\|\varphi\|_{N,M+\alpha}.$$

Por Lema 1.1.5

$$|(i\partial_x)^N(ix^\alpha\varphi(x)| \leq C_{N,\alpha}(1+|x|)^{-2}\|\varphi\|_{N,M+\alpha} \leq C_{N,\alpha}(1+|x|)^{-2}\|\varphi\|_{N,\alpha+N}. \tag{2.1.15}$$

Por (1.1.2). Sustituyendo en (2.1.12), obtenemos que

$$|k^N\partial_k^\alpha\hat{\varphi}(k)| \leq C_{N,\alpha}\|\varphi\|_{N,N+\alpha}\int_{\mathbb{R}}(1+|x|)^{-2}\, dx < \infty. \tag{2.1.16}$$

Así, implica la cota deseada.

2. Linealidad: es obvia. Continuidad:

$$\|\hat{\varphi}\|_{\alpha,N} \leq D_{\alpha,N}\|\varphi\|_{N,N+\alpha} \tag{2.1.17}$$

por (2.1.3) y (2.1.16). Ahora la continuidad sigue de la definición de la convergencia en $\mathcal{S}$. ■

Teorema 2.1.7 *Existe la Transformación de Fourier Inversa y esta dada por*

$$\varphi(x) = F^{-1}[\hat{\varphi}(k)] := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\hat{\varphi}(k)\, dk, \quad x \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{S}. \tag{2.1.18}$$

Demostración: Véase [3].

Observación 2.1.8 *Obviamente, (2.1.18) implica que*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\hat{\hat{\varphi}}(-x). \tag{2.1.19}$$

Corolario 2.1.9 *$F, F^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ son isomorfismos topologicos.*

Demostración: El hecho que F y F^{-1} son los isomorfismos lineales se sigue que $F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = I$. La continuidad de F y F^{-1} se sigue de la Proposición 2.1.2 y (2.1.19). ■

2.2. Transformada de Fourier para Distribuciones Temperadas.

Lema 2.2.1 *Para cualesquiera funciones prueba $f(x), \varphi(k) \in \mathcal{S}$, la siguiente identidad se cumple*

$$< \hat{f}(k), \varphi(k) >=< f(x), \hat{\varphi}(x) > \tag{2.2.20}$$

Demostración: Por (2.1.1) y Teorema de Fubini, obtenemos

$$< \hat{f}(k), \varphi(k) >= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x)\, dx \right) \varphi(k)\, dk \quad =$$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \varphi(k)\, dk \right) dx =< f(x), \hat{\varphi}(x) > .$$

El Lema queda demostrado. ■

El lema probado nos sugiere la siguiente definición de las transformadas de Fourier de las distribuciones temperadas.

Definición 2.2.2 *Sea $f \in \mathcal{S}'$.*

1. *Definamos la transformada de Fourier $F[f] := \hat{f}(k)$ sobre $\mathcal{S}'$ como el funcional*

$$< \hat{f}(k), \varphi(k) >=< f(x), \hat{\varphi}(x) >, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{2.2.21}$$

2. *Definamos la transformada de Furier Inversa $F^{-1}[f]$ sobre $\mathcal{S}'$ como el funcional*

$$< F^{-1} f(k), \varphi(k) >=< f(x), F^{-1}[\varphi](x) > \tag{2.2.22}$$

La Proposición 2.1.2 y Teorema 2.1.18 implican que $\hat{f}(k)$ y $F^{-1}[f]$ estan bien definidas.

Lema 2.2.3 1. *Los operadores $F, F^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ son isomorfismos algebraicos.*

2. $F \circ F^{-1} = I = F^{-1} \circ F$

Demostración: *1.* Se sigue de la teoría general de los operadores lineales y continuos ya que F y F^{-1} son isomorfismos por Corolario 2.1.9, véase [3].

2. Demostraremos $F^{-1} \circ F = I$. Usando (2.2.22) y (2.2.21) obtenemos

$$< F^{-1} \circ F[f], \varphi >=< F[f], F^{-1}[\varphi] >=< f, F \circ F^{-1}[\varphi] >=< f, \varphi > .$$

Esto implica que $F^{-1} \circ F = I$. Similarmente, $F^{-1} \circ F = I$. Lema queda demostrado. ■

2.3. Teoría de Parseval-Plancherel.

La transformada de Fourier $\hat{f}(k)$ esta definida para cualquier distribución temperada $f(x)$. Estudiaremos $\hat{f}(k)$ para funciones Lebesgue medibles $f(x) \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ con $p \geq 1$. Esto es posible, ya que $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$ para todo $p \geq 1$, por Proposición 1.3.6.

Definición 2.3.1 $C_b(\mathbb{R})$ *es el espacio de las funciones continuas y acotadas sobre* $\mathbb{R}$.

Primeramente, consideraremos la Transformada de Fourier de las funciones de $\mathcal{L}^1$.

Lema 2.3.2 *Sea* $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, *entonces su transformada de Fourier* $\hat{f}(k) \in C_b(\mathbb{R})$, *y esta dada por*

$$Ff(k) := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R} \tag{2.3.23}$$

donde identidades se mantienen en el sentido de distribuciones aunque el segundo miembro es una clásica función continua.

Demostración: Demostraremos que $\hat{f}(k) \in C_b(\mathbb{R})$, es decir, mostraremos que $\hat{f}(k)$ es acotada y continua de $k \in \mathbb{R}$. Por Definición de $\hat{f}(k)$, la integral (2.3.23) y $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ obtenemos la siguiente cota

$$|\hat{f}(k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx = \|f\|_{\mathcal{L}^1} < \infty, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{2.3.24}$$

Entonces $\hat{f}(k)$ es acotada. Demostremos continuidad: Sea $k_n \to k$ cuando $n \to \infty$, entonces, $e^{ik_nx} f(x) \to e^{ikx} f(x)$ por ser la exponencial una función continua, además, $|e^{ik_nx} f(x)| = |f(x)|$, $k \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}^1, \forall n$ Usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ik_nx} f(x)\, dx \to \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x)\, dx$$

Por tanto, $\hat{f}(k_n) \to \hat{f}(k)$ cuando $n \to \infty$.

Usando Definición 2.2.21 y Teorema de Fubini para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}$ obtenemos

$$\begin{aligned} < \hat{f}(k), \varphi(k) >=< f(x), \hat{\varphi}(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \varphi(k)\, dk \right) dx &= \\ \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ikx} f(x)\, dx \right) \varphi(k)\, dk. & \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

La comparación del primer y el último término implica (2.3.23) en el sentido de funcionales. ■

Lema 2.3.3 *[Riemann-Lebesgue][3] Sea* $f(x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. *Entonces* $\hat{f}(k) \to 0$ *cuando* $|k| \to \infty$.

Ahora consideremos p=2.

Teorema 2.3.4 *[Parseval] Para* $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$*, entonces* $\hat{f}(k) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *y se cumple la siguiente identidad:*

$$\|\hat{f}\|^2_{\mathcal{L}^2} = 2\pi \|f\|^2_{\mathcal{L}^2}. \tag{2.3.26}$$

Demostración: Primero mostraremos (2.3.26) para $f(x) \in \mathcal{S}$. Sea $f(x) \in \mathcal{S}$, entonces $\overline{\hat{f}(k)} \in \mathcal{S}$ por Proposición 2.1.2 inciso 1. Además, $\widehat{\overline{\hat{f}(k)}} = \int e^{ikx}\overline{\hat{f}(k)}\, dk = \overline{\int e^{-ikx}\hat{f}(k)\, dk} = 2\pi\overline{f(x)}$ por (2.1.18). de aquí

$$< \hat{f}(k), \overline{\hat{f}(k)} >= 2\pi < f(x), \overline{f(x)} >, \tag{2.3.27}$$

ya que $< \hat{f}, \overline{\hat{f}} >=< f, \widehat{\overline{\hat{f}}} >$ por (2.3.25). Queda demostrado la identidad (2.3.26) para $f(x) \in \mathcal{S}$.

Sea $f(x) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, existe $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{\mathcal{L}^2} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty, \tag{2.3.28}$$

por que $\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{L}^2$, véase Lema 1.2.13. La convergencia (2.3.28) implica que f_n es sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathcal{L}^2} \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty. \tag{2.3.29}$$

Aplicando (2.3.26) a (2.3.29) obtenemos que $\hat{f}_n$ es de Cauchy en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, i.e.,

$$\|\hat{f}_n(k) - \hat{f}_m(k)\|_{\mathcal{L}^2} \to 0 \text{ cuando } n, m \to \infty. \tag{2.3.30}$$

Dado que $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ es completo, existe $g(k) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ tal que

$$\|\hat{f}_n(k) - g(k)\|_{\mathcal{L}^2} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty. \tag{2.3.31}$$

Falta demostrar que $g = \hat{f}$. Tenemos,

$$f_n(x) \to f(x) \text{ cuando } n \to \infty \text{ en } \mathcal{S}', \tag{2.3.32}$$

por el Corolario 1.3.7. Similarmente, la convergencia (2.3.31) implica que

$$\hat{f}_n(k) \to g(k) \text{ cuando } n \to \infty \text{ en } \mathcal{S}'. \tag{2.3.33}$$

Además, por continuidad de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'$ por Lema 2.2.3 inciso 2, la convergencia (2.3.32) implica que

$$\hat{f}_n(k) \to \hat{f}(k) \text{ cuando } n \to \infty \text{ en } \mathcal{S}'. \tag{2.3.34}$$

Por tanto, $g = \hat{f} \in \mathcal{L}^2$.

Retomando la prueba la identidad de Parseval (2.3.26). Hemos probado, $\|\hat{f}_n\|^2 = 2\pi\|f_n\|^2$, $\forall f_n \in \mathcal{S}$. Considerando el límite $n \to \infty$. Entonces, obtenemos $\|g\|^2 = 2\pi\|f\|^2$ por (2.3.28) en el miembro de la derecha y (2.3.31) en el miembro izquierdo. Por tanto, (2.3.26) se cumple tomando en cuenta que $g = \hat{f}$. ■

Corolario 2.3.5 *La identidad de Parseval (2.3.26) implica que* $f \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ *en* $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ *es una isometría.*

Capítulo 3

Generalización de la Teoría de Distribuciones para $\mathbb{R}^n$.

3.1. Definiciones y Ejemplos.

Definamos a las funciones Prueba y Distribuciones Temperadas de n variables $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Denotemos $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, y $\partial^\alpha \varphi(x) := \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n} \varphi(x) = \varphi^{(\alpha)}(x)$ para cualquier multi indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ con $\alpha_j = 0, 1, 2, ...$ Aquí $\partial_i^{\alpha_j} \varphi(x) := \frac{\partial^{\alpha_j} \varphi(x)}{\partial x_i^{\alpha_j}}, \forall i, j$.

Definición 3.1.1 *1. Definamos $\mathcal{S} = \mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$ el espacio de las funciones $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\|\varphi\|_{\alpha,N} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^N |\partial_x^\alpha \varphi(x)| < \infty \tag{3.1.1}$$

para cualquier $N = 0, 1, 2, ...$ y multi índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ con $\alpha_i = 0, 1, ... \forall i = 1, ..., n$.

2. La sucesión $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{S}$ sii

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\alpha,N} \to 0, \quad \textit{cuando} \ \ n \to \infty. \tag{3.1.2}$$

para cualquier $N = 0, 1, 2, ...$ y multi índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ con $\alpha_i = 0, 1, ... \forall i = 1, ..., n$.

Ejemplo 3.1.2 $\mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$.

Demostración: Similarmente, que el Lema 1.1.4. La función $e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$. ■

De manera similar, el espacio de las Distribuciones Temperadas $\mathcal{S}'\ (\mathbb{R}^n)$ se define como en el caso para $n = 1$.

Ejemplo 3.1.3 *1. Sea $f \in C(\mathbb{R}^n)$ con la siguiente cota*

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^p, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1.3}$$

para algunas $C, p \in \mathbb{R}$. Definamos el funcional

$$< f, \varphi >:= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{3.1.4}$$

Entonces la integral (3.1.4) converge y es una distribución temperada.

2. *El funcional (3.1.4) es distribución temperada si $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ con $p \geq 1$.*

3. *La función delta de Dirac definida como en (1.4.54) es distribución temperada.*

3.2. Diferenciación de Distribución Temperadas.

La Diferenciación para Distribuciones Temperadas esta definida de manera similar para el caso $n = 1$.

Definición 3.2.1 *Sea $f \in \mathcal{S}'$. Definamos la derivada $\partial^\alpha f$ de la manera siguiente:*

$$< \partial^\alpha f(x), \varphi(x) >= (-1)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_s} < f(x), \partial^\alpha \varphi(x) > \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S} \tag{3.2.5}$$

para cualquier multi índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$.

3.3. Transformada de Fourier para Distribuciones Temperadas.

Definición 3.3.1 *La transformada de Fourier para las funciones prueba $\varphi \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$ esta definida por*

$$F\varphi(k) := \hat{\varphi}(k) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx}\varphi(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{R}^n, \tag{3.3.6}$$

donde $kx = k_1x_1 + ... + k_nx_n$. La Transformada Inversa de Fourier esta dada por

$$\varphi(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}\hat{\varphi}(k)\, dk, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.7}$$

Similarmente que para $n = 1$, $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ es isomorfismo topológico y

$$F^{-1}[\varphi](x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}\varphi(k)\, dk, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.3.8}$$

que también es isomorfismo topológico.

Finalmente, la transformada de Fourier $F[f]$ para distribuciones temperadas $f \in \mathcal{S}'\ (\mathbb{R}^n)$ es definida como

$$< F[f], \varphi >=< f, F[\varphi] >, \quad \varphi \in \mathcal{S} \tag{3.3.9}$$

También la transformada de Fourier inversa $F^{-1}[f]$ como

$$< F^{-1}[f], \varphi >=< f, F^{-1}[\varphi] >, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \tag{3.3.10}$$

Similarmente al Lema 2.2.3, $F, F^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ son isomorfismos algebraicos.

Lema 3.3.2 *Sea $f(x) \in \mathcal{L}^1$ $(\mathbb{R}^n)$. Entonces su transformada de Fourier $\hat{f}(k) \in C_b(\mathbb{R}^n)$ y esta dada por*

$$Ff(k) := \hat{f}(k) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{ikx} f(x)\,dx, \quad k \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3.11}$$

Teorema 3.3.3 *[Teorema de Parseval] Sea $f(x) \in \mathcal{L}^2$ $(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\hat{f}(k) \in \mathcal{L}^2$, y se cumple la identidad de Parseval (2.3.26)*

$$\|\hat{f}\|^2 = (2\pi)^n \|f\|^2. \tag{3.3.12}$$

3.4. Derivación de la Transformada de Fourier

Lema 3.4.1 *Para $f \in \mathcal{S}'$ $(\mathbb{R}^n)$, las siguientes identidades son generalización a las identidades (2.1.5) y (2.1.6)*

$$k_j \hat{f}(k) = F[i\partial_j f(x)] \tag{3.4.13}$$

$$\partial_j \hat{f}(k) = F[ix_j f(x)]. \tag{3.4.14}$$

Demostración: Para $f \in \mathcal{S}$ $(\mathbb{R}^n)$ (3.4.13) y (3.4.14) se obtienen similarmente a (2.1.5) y (2.1.6). Sea $f \in \mathcal{S}'$ $(\mathbb{R}^n)$. Para toda $\varphi \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\begin{aligned}
< k_j Ff(k), \varphi(k) > &= < Ff(k), k_j\varphi(k) > \\
&= < f(x), F(k_j\varphi(k)) > \\
&= < f(x), -i\partial_{x_j} F(\varphi(k)) > \\
&= < i\partial_{x_j} f(x), F(\varphi(k)) > \\
&= < F[i\partial_{x_j} f(x)], \varphi(k) > .
\end{aligned}$$

Aquí usamos sucesivamente (1.6.67), (2.2.20), (2.1.5), (1.5.62) y otra vez (2.2.20).

Demostremos (3.4.14). Usando (2.2.20) y (1.6.67) tenemos

$$< F[ix_j f(x)], \varphi(k) >=< ix_j f(x), \hat{\varphi}(x) >=< f(x), ix_j\hat{\varphi}(x) > . \tag{3.4.15}$$

Como $k\hat{\varphi}(k) = F[i\partial_x\varphi(x)]$ por (2.1.6) se tiene $ik\hat{\varphi}(k) = F[-\partial_x\varphi(x)]$. Aplicando la última identidad a $ix_j\hat{\varphi}(x)$ obtenemos $ix_j\hat{\varphi}(x) = F[-\partial_{k_j}\varphi(k)]$. Así para (3.4.15) obtenemos por (2.2.20)

$$< f(x), F[-\partial_{k_j}\varphi(k)] >=< \hat{f}(k), -\partial_{k_j}\varphi(k) >=< \partial_{k_j}\hat{f}(k), \varphi(k) > \tag{3.4.16}$$

donde la primera identidad se cumple por (2.2.20) y la segunda por Definición 3.2.1. Por tanto (3.4.14) se demostró. ■

3.5. Densidad de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Lema 3.5.1 *Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x, y \geq 0$. Para $p \geq 1$ existe $C(p) > 0$ tal que*

$$(x+y)^p \leq C(p)(x^p + y^p). \tag{3.5.17}$$

Demostración: La desigualdad (3.5.17) es equivalente con demostrar que existe $C(p) > 0$ tal que

$$\frac{(1+t)^p}{(1+t^p)} \leq C(p), \quad t > 0 \tag{3.5.18}$$

donde $t = \frac{y}{x}$. Ya que $\lim_{t\to\infty} \frac{(1+t)^p}{1+t^p} = 1$ existe $R > 0$ tal que $\frac{(1+t)^p}{1+t^p} \leq 2$ para $t \geq R$. Además, ya que $(1+t)^p \leq (1+R)^p$ para $0 \leq t \leq R$ y $1 \leq 1 + t^p$ para $t \geq 0$ obtenemos

$$\frac{(1+t)^p}{1+t^p} \leq (1+R)^p, \quad t \leq R. \tag{3.5.19}$$

Por tanto (3.5.18) se cumple para $C(p) = \max\{2, (1+R)^p\}$. ■

Lema 3.5.2 *Sea $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), p \geq 1$. Para $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\int_{\|x\|\geq N_\varepsilon} |u|^p dx < \varepsilon. \tag{3.5.20}$$

Demostración: Definamos

$$u_m(x) := \begin{cases} u(x), & \|x\| \leq m \\ 0, & \|x\| > m. \end{cases} \tag{3.5.21}$$

y $g_m(x) := |u(x) - u_m(x)|^p$.

1) Tenemos: $g_m(x) \to 0$ puntualmente cuando $m \to \infty$. En efecto, sean $x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $\|x\| \leq N$, entonces $g_m(x) = |u(x) - u_m(x)|^p = 0 < \varepsilon$ cuando $m \geq N$.

2) $g_m(x) \leq 2^p |u(x)|^p$, para $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, usando la desigualdad triangular y $|u_m| \leq |u|$ para $x \in \mathbb{R}^n, m \in \mathbb{N}$ tenemos $g_m(x) = |u(x) - u_m(x)|^p \leq (|u(x)| + |u_m(x)|)^p \leq 2^p |u(x)|^p$.

Usando el Teorema de Lebesgue tenemos $\displaystyle\int g_m \, dx \to 0$ cuando $m \to \infty$, es decir, $\displaystyle\int |u - u_m|^p \, dx \to 0$ cuando $m \to \infty$. Esto implica que para cada $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\int |u - u_m|^p \, dx < \varepsilon$ siempre que $m \geq M_\varepsilon$. Usando la definición de u_m dada en (3.5.21) tenemos para $m = M_\varepsilon$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u - u_{M_\varepsilon}|^p \, dx = \int_{\|x\|\leq M_\varepsilon} |u - u_{M_\varepsilon}|^p \, dx + \int_{\|x\|\geq M_\varepsilon} |u - u_{M_\varepsilon}|^p \, dx = \int_{\|x\|\geq M_\varepsilon} |u - u_{M_\varepsilon}|^p \, dx < \varepsilon.$$

Luego para $N_\varepsilon = M_\varepsilon$ se cumple (3.5.20). Lema queda demostrado. ■

Lema 3.5.3 *Sea $u_m \to u$ cuando $m \to \infty$ en $\mathcal{L}^p, p \geq 1$. Para $\varepsilon > 0$ existe $M_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\int_{\|x\| \geq M_\varepsilon} |u_m|^p \, dx < \varepsilon \;\; cuando \;\; m \geq M_\varepsilon. \tag{3.5.22}$$

Demostración: Existe $C(p) > 0$ tal que

$$|u_m|^p \leq (|u| + |u - u_m|)^p \leq C(p)(|u|^p + |u - u_m|^p), \;\; m \in \mathbb{N} \tag{3.5.23}$$

por Lema 3.5.1. Sea $\varepsilon > 0$.

Para $u \in \mathcal{L}^p$ existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\int_{\|x\| \geq N_\varepsilon} |u|^p \, dx < \frac{\varepsilon}{2C(p)}$ por Lema 3.5.2. Dado que $u_m \to u$ en $\mathcal{L}^p$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|u - u_m\|^p_{\mathcal{L}^p} < \frac{\varepsilon}{2C(p)}$ cuando $m \geq N_1$. Considerando a $M_\varepsilon = \text{máx}\{N_1, N_\varepsilon\}$ tenemos para $m \geq M_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\int_{\|x\| \geq M_\varepsilon} |u_m|^p \, dx &\leq C(p) \int_{\|x\| \geq M_\varepsilon} |u|^p \, dx + C(p) \int_{\|x\| \geq M_\varepsilon} |u - u_m|^p \, dx \\
&< C(p) \cdot \frac{\varepsilon}{2C(p)} + C(p) \int |u - u_m|^p \, dx \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + C(p) \|u - u_m\|^p_{\mathcal{L}^p} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + C(p) \cdot \frac{\varepsilon}{2C(p)} = \varepsilon.
\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Lema queda demostrado. ■

Teorema 3.5.4 *[Lebesgue] Sea $u \in \mathcal{L}^p([a, b]), p \geq 1$ y $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Entonces*

$$\int_a^b |u(t + h) - u(h)|^p \, dt \to 0, \;\; cuando \;\; h \to 0 \tag{3.5.25}$$

Demostración: Véase [8] Teorema 1.18. ■

Definamos a $\rho(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{3.5.26}$$

donde $C = \displaystyle\int_{|x| \leq 1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \, dx \neq 0$ y $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}$.

Lema 3.5.5 $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: I) $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dado que $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \to r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \in \mathbb{R}$ es $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y $\rho(r) = \phi(r)$ donde ϕ definida en (1.2.10) que es $C^\infty(\mathbb{R})$ implica que $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Es fácil obtener que las derivadas de $\phi(r)$ en 0 son identicamente 0. Por tanto $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

II) Claramente supp $\rho \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$. Esto prueba el lema. ■

Definamos $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Claramente $\rho_\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$; $\rho_\varepsilon(x) = 0$, $|x| \geq \varepsilon$ y

$$\int \rho_\varepsilon(x)\, dx = 1. \tag{3.5.27}$$

Lema 3.5.6 *Sea $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$. Entonces $u * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Por definición $(u * \rho_\varepsilon)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy$. Dado que para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ se cumple $\partial_x^\alpha \rho_\varepsilon(x-y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por Lema 3.5.5 y supp ρ_ε compacto, entonces $\partial_x^\alpha(u * \rho_\varepsilon)(x) = \int \partial_x^\alpha \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy < \infty$. Por el teorema de diferenciación bajo el signo de la integral $(u * \rho_\varepsilon)(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Lema 3.5.7 *Sea $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$. Entonces $\rho_\varepsilon * u \to u$ en $\mathcal{L}^p$ cuando $\varepsilon \to 0$.*

Demostración: Denotemos $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u$. Por Lema 1.2.9, $u_\varepsilon = \displaystyle\int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)u(x-y)\, dy$. Por (3.5.27), tenemos que

$$u_\varepsilon(x) - u(x) = \int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)u(x-y)\, dy - u(x) = \int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)[u(x-y) - u(x)]\, dy. \tag{3.5.28}$$

Obviamente $\rho_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)| = \rho_\varepsilon^{\frac{1}{q}}(y)\rho_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(y)|u(x-y) - u(x)|$ donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Usando la desigualdad de Hölder y (3.5.27) obtenemos

$$\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x) - u(x)|^p &\leq \left(\int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)|\, dy\right)^p \\
&\leq \left(\int_{|y|\leq\varepsilon} (\rho_\varepsilon^{\frac{1}{q}}(y))^q\, dy\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{|y|\leq\varepsilon} (\rho_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(y)|u(x-y) - u(x)|)^p\, dy\right) \\
&= \int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)|^p\, dy.
\end{aligned} \tag{3.5.29}$$

Consideremos $\delta(y) = \sup_{|y|\leq\varepsilon} \displaystyle\int |u(x-y) - u(x)|^p\, dx$. Usando que $\delta(y) \to 0$ si $\varepsilon \to 0$ por Teorema 3.5.4, Teorema de Foubini y (3.5.27) obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_x^n} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}_x^n}\int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)|^p\, dydx \\
&= \int_{|y|\leq\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\, dy \int_{\mathbb{R}_x^n} |u(x-y) - u(y)|^p\, dx \\
&\leq 1 \cdot \delta(y) \to 0, \quad \text{si } \varepsilon \to 0.
\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

Lema 3.5.7 se demostró. ■

Corolario 3.5.8 *Sea $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), p \geq 1$. Entonces $u_\varepsilon \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$*

Demostración: Sea $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Por Lema 3.5.7 $u_\varepsilon \to u$ en $\mathcal{L}^p$ cuando $\varepsilon \to 0$. Por tanto $\|u_\varepsilon\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u_\varepsilon - u\|_{\mathcal{L}^p} + \|u\|_{\mathcal{L}^p} < \infty$. Corolario queda demostrado. ■

Hemos demostrado que para $u \in \mathcal{L}^p, p \geq 1$ existe suceción $u_m \in \mathcal{L}^p \cap C^\infty$ tal que $u_m \to u$ en $\mathcal{L}^p$ cuando $m \to \infty$ por Corolario 3.5.8 y Lema 3.5.7.

Lema 3.5.9 *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), p \geq 1$.*

Demostración: Sea $u \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Por Lemas 3.5.6 y 3.5.7 existe $u_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \to u$ en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ cuando $m \to \infty$. Definamos $\eta_1(x) = \eta(|x|)$, donde η se define en Lema 1.2.11. Consideremos $v_m(x) := \eta_1(\frac{x}{m})u_m(x)$. Obviamente, $v_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$v_m(x) = \begin{cases} u_m(x), & |x| \leq m \\ 0, & |x| \geq 2m. \end{cases} \tag{3.5.31}$$

Basta demostrar que $v_m \to u$ en $\mathcal{L}^p$ cuando $m \to \infty$. Ya que $u_m \to u$ en $\mathcal{L}^p$ cuando $m \to \infty$ entonces para $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u - u_m\|_{\mathcal{L}^p} < \varepsilon/2 \ \text{ cuando } \ m \geq N_1. \tag{3.5.32}$$

Obviamente $\|u_m - v_m\|^p_{\mathcal{L}^p} \leq \int\limits_{\|x\| \geq m} 2^p |u_m|^p dx$. Dado que la sucesión u_m converge a u en $\mathcal{L}^p$ existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\int\limits_{\|x\| \geq N_2} |u_m|^p\, dx < (\varepsilon/4)^p$ cuando $m \geq N_2$ por Lema 3.5.3. Por tanto $\|u_m - v_m\|^p_{\mathcal{L}^p} < 2^p \cdot \frac{\varepsilon^p}{4^p} = \frac{\varepsilon^p}{2^p}$. Consideremos a $M = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ tenemos por (3.5.32)

$$\|u - v_m\|_{\mathcal{L}^p} \leq \|u - u_m\|_{\mathcal{L}^p} + \|u_m - v_m\|_{\mathcal{L}^p} < \varepsilon \ \text{ cuando } \ m \geq M. \tag{3.5.33}$$

Lema queda demostrado. ■

Corolario 3.5.10 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n), p \geq 1$.*

Capítulo 4

Los Espacios Sobolev.

Introduciremos los Espacios Sobolev y probaremos propiedades simples. Sea s un número real.

4.1. Definición.

Definición 4.1.1 *Definamos a los espacios Sobolev $H^s = H^s$ $(\mathbb{R}^n)$ como el espacio de distribuciones temperadas $f(x) \in \mathcal{S}'$ $(\mathbb{R}^n)$ tal que $(1+|k|)^s \hat{f}(k) \in \mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2$ $(\mathbb{R}^n)$, con la norma Sobolev definida como*

$$\|f\|_s := \|(1+|k|)^s \hat{f}(k)\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{4.1.1}$$

Observación 4.1.2 *Para $s = 0$, el espacio de Sobolev $H^0(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por el Teorema de Parseval 3.3.3 y*

$$\|f\|_0 = \|\hat{f}(k)\|_{\mathcal{L}^2} = (2\pi)^n \|f(x)\|_{\mathcal{L}^2} \tag{4.1.2}$$

por (3.3.12).

Lema 4.1.3 *La inyección natural $H^s \hookrightarrow \mathcal{S}'$ es continua,*

Demostración: Sean $\varphi \in \mathcal{S}$ y $f_n \to 0$ en H^s. Hay que demostrar que $< f_n, \varphi > \to 0$. Por la Definición 2.2.2 y (2.1.19)

$$< f_n(x), \varphi(x) > = < \hat{f}_n(k), F^{-1}[\varphi](k) > = < \hat{f}_n(k), \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi}(-k) > = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}_n(k)\widehat{\varphi}(-k)\, dk. \tag{4.1.3}$$

Notemos que $\widehat{\varphi}(-k) \in \mathcal{S}$ por (2.1.18) y Proposición 2.1.2. Usando la Definición 4.1.1 para $\hat{f}_n$ en (4.1.3) obtenemos

$$< \hat{f}_n(k), \frac{1}{2\pi}\widehat{\varphi}(-k) > = \frac{1}{2\pi}\int \hat{f}_n(k)\widehat{\varphi}(-k)\, dk = \frac{1}{2\pi}\int (1+|k|)^{2s}\hat{f}_n(k)(1+|k|)^{-2s}\widehat{\varphi}(-k)\, dk \to 0, \quad n \to \infty$$

por Corolario 1.3.7, ya que $(1+|k|)^{2s}\hat{f}_n(k) \to 0$ en $\mathcal{L}^2$ y $(1+|k|)^{-2s}\hat{\varphi}(-k) \in \mathcal{S}$. ∎

Observación 4.1.4 *$H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, si $s_1 > s_2$.*

Demostración: Sea $u \in H^{s_1}$. Es suficiente demostrar que $\|(1+|k|)^{s_2}\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2} < \infty$. Dado que $(1+|k|)^{s_2} \le (1+|k|)^{s_1}$ por que $s_2 < s_1$ y usando la monotonia de la Integral obtenemos

$$\|(1+|k|)^{s_2}\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2} = \int (1+|k|)^{2s_2}|\hat{u}(k)|^2\,dk \le \int (1+|k|)^{2s_1}|\hat{u}(k)|^2\,dk = \|u\|_{s_1} < \infty.$$

Por tanto, $\|(1+|k|)^{s_2}\hat{\varphi}(k)\|_{\mathcal{L}^2} < \infty$. ■

Lema 4.1.5 *Todo espacio Sobolev H^s es isomorfo al espacio de Hilbert $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. El mapeo $(1+|k|)^s F : H^s \to \mathcal{L}^2$ es continuo, y el mapeo inverso $F^{-1}(1+|k|)^{-s} : \mathcal{L}^2 \to H^s$ es también continuo.*

Demostración: *I*) Por Definición 4.1.1, $g(k) = (1+|k|)^s\hat{f}(k) \in \mathcal{L}^2$ si $f(x) \in H^s$. Más aún, $\|f(x)\|_s = \|g(k)\|_{\mathcal{L}^2}$, así

$$\|g(k)\|_{\mathcal{L}^2} \le \|f(x)\|_s. \tag{4.1.4}$$

Esto implica la continuidad del mapeo $(1+|k|)^s F : f(x) \to g(k)$ de H^s a $\mathcal{L}^2$.

II) Ya que $g(k) = (1+|k|)^s\hat{f}(k)$, tenemos $\hat{f}(k) = (1+|k|)^{-s}g(k)$ así, el mapeo inverso esta dado por $f(x) = F^{-1}\hat{f} = F^{-1}[(1+|k|)^{-s}g(k)]$. Notemos que $F^{-1}(1+|k|)^{-s} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ esta bien definido. En efecto, sea $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ entonces $(1+|k|)^{-s}f(k) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ por Proposición 1.3.6 y Lema 1.6.4. De modo que $F^{-1}[(1+|k|)^{-s}f(k)]$ existe. Falta demostrar que $F^{-1}[(1+|k|)^{-s}f(k)] \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Tenemos $[(1+|k|)^{-s}f(k)](1+|k|)^s \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por (4.1.1) y $f(k) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Para demostrar que este operador es continuo, basta con notar que $\|F^{-1}[(1+|k|)^{-s}f(k)]\|_s = \|[(1+|k|)^{-s}f(k)](1+|k|)^s\|_{\mathcal{L}^2} = \|f\|_{\mathcal{L}^2}$ así $\|F^{-1}[(1+|k|)^{-s}f(k)]\|_s \le \|f\|_{\mathcal{L}^2}$. ■

Lema 4.1.6 *Definamos la función $|\cdot|_s : H^s \to \overline{\mathbb{R}^+}$ como*

$$|u|_s = \|(1+|k|^2)^{s/2}\hat{f}(k)\|_{\mathcal{L}^2}, \quad f \in H^s. \tag{4.1.5}$$

Entonces $|\cdot|$ es norma y es equivalente a $\|\cdot\|_s$ definido en (4.1.1).

Demostración: *I*) Evidentemente $|\cdot|_s$ es norma para H^s.

II) Obviamente $2(1+|k|^2) \ge (1+|k|)^2 \ge (1+|k|^2)$. Entonces

$$(1+|k|^2)^{s/2} \ge (1+|k|)^s, \quad k \in \mathbb{R}^n, \; s < 0 \tag{4.1.6}$$

y

$$(1+|k|^2)^{s/2} \ge 2^{-s/2}(1+|k|)^s, \quad k \in \mathbb{R}^n, \; s \ge 0. \tag{4.1.7}$$

Esto implica que existe $C_1(s) > 0$ tal que

$$(1+|k|^2)^{s/2} \ge C_1(s)(1+|k|)^s, \quad k \in \mathbb{R}^n, \; s \in \mathbb{R}. \tag{4.1.8}$$

Evidentemente $(1+|k|)^2 \geq (1+|k|^2) \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2$. Entonces

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{s/2}(1+|k|)^s \geq (1+|k|^2)^{s/2}, \ \ x \in \mathbb{R}^n, \ s < 0 \tag{4.1.9}$$

y

$$(1+|k|)^s \geq (1+|k|^2)^{s/2}, \ \ k \in \mathbb{R}^n, \ s \geq 0. \tag{4.1.10}$$

Esto implica que existe $C_2(s) > 0$ tal que

$$|(1+|k|^2)^{s/2}| \leq C_2(s)(1+|k|)^s, \ \ k \in \mathbb{R}^n, \ s \in \mathbb{R}. \tag{4.1.11}$$

Usando (4.1.8) y (4.1.11) obtenemos

$$C_1(s)(1+|k|)^s \leq (1+|k|^2)^{s/2} \leq C_2(s)(1+|k|)^s, \ \ k \in \mathbb{R}^n, \ s \in \mathbb{R}.$$

Así obtenemos

$$C^2(s)\|f\|_s \leq |f|_s \leq C_1^2(s)\|f\|_s, \ \ f \in H^s.$$

Por tanto $|\cdot|_s$ y $\|\cdot\|_s$ son equivalentes. Lema queda demostrado. ■

4.2. Densidad de $\mathcal{S}$ en H^s.

Lema 4.2.1 *Sean $k \in \mathbb{R}^n$ y $P(k)$ polinomio con deg $P = m$. Cumple las siguientes propiedades*

1. *deg $\partial^\alpha P \leq m - |\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$*
2. *Existe $C > 0$ tal que $|P(k)| \leq C(1+|k|)^m$, $k \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración: *1.* Sean $\alpha \in \mathbb{N}^n$ y $P(k) = \sum_{|\beta|\leq m} C_\beta k^\beta$. Aplicando ∂^α obtenemos

$$\partial^\alpha P(k) = \sum_{|\beta|\leq m} C_\beta \partial^\alpha k^\beta = \sum_{|\beta|\leq m} C'_\beta k^{\beta-\alpha} = \sum_{|\beta|\leq m-|\alpha|} C'_\beta k^\beta.$$

Esto implica que *deg* $\partial^\alpha P \leq m - |\alpha|$.

2. Dado que $|k_i| \leq |k|$ para todo $i = 1, ..., n$, tenemos

$$|P(k)| \leq \sum_{|\beta|\leq m} |C_\beta||k_1^{\beta_1}|\cdots|k_n^{\beta_n}| \leq \sum_{|\beta|\leq m} |C_\beta||k|^{\beta_1+\ldots+\beta_n} \leq (1+|k|)^m \sum_{|\beta|\leq m} |C_\beta| \leq C(1+|k|)^m.$$

■

Lema 4.2.2 *Sea $k \in \mathbb{R}^n$. Para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe $P(k)$ polinomio tal que* $\deg P \leq |\alpha|$ *y* $\partial_k^\alpha[(1+|k|^2)^{s/2}] = P(k)(1+|k|^2)^{s/2-|\alpha|}$.

Demostración: *I*) Sean $k \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Primero demostraremos que para α_1 existe $P_1(k)$ polinomio tal que $\partial_{k_1}^{\alpha_1}[(1+|k|^2)^{s/2}] = P_1(k)(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1}$ y $deg\ P_1 \leq \alpha_1$. Usemos inducción sobre α_1. Para $\alpha_1 = 0$ es evidente con $P_1(k) = 1$. Supongamos que existe $P_1(k)$ polinomio tal que $deg\ P_1 \leq \alpha_1$ y $\partial_{k_1}^{\alpha_1}[(1+|k|^2)^{s/2}] = P_1(k)(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1}$. Esto implica que

$$\partial_{k_1}^{\alpha_1+1}[(1+|k|^2)^{s/2}] = (1+|k|^2)^{s/2-(\alpha_1+1)}[\partial_{k_1}P_1(k)(1+|k|^2)+(s-2\alpha_1)k_1P_1(k)] = (1+|k|^2)^{s/2-(\alpha_1+1)}R_1(k)$$

donde $deg\ R_1 \leq \alpha_1 + 1$.

II) Ahora demostraremos que para α_2 existe $P_2(k)$ polinomio tal que $\partial_{k_2}^{\alpha_2}[P_1(k)(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1}] = P_2(k)(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1-\alpha_2}$. Usando la regla de derivación de Leibniz y el paso anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_{k_2}^{\alpha_2}[P_1(k)(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1}] &= \sum_{j=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{j} \partial_{k_2}^{\alpha_2-j}P_1(k)\partial_{k_2}^{j}[(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1}] \\
&= \sum_{j=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{j} \partial_{k_2}^{\alpha_2-j}P_1(k)R_{1j}(k)[(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1-j}] \\
&= (1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1-\alpha_2}\sum_{j=0}^{\alpha_2} \binom{\alpha_2}{j} \partial_{k_2}^{\alpha_2-j}P_1(k)R_{1j}(k)[(1+|k|^2)^{\alpha_2-j}] \\
&= P_2(k)(1+|k|^2)^{s/2-\alpha_1-\alpha_2}
\end{aligned}$$

donde $deg\ P_2 \leq \alpha_1+\alpha_2$. Continuando así obtenemos la afirmación del Lema con $P(k) = P_n(k)$. Lema queda demostrado. ■

Corolario 4.2.3 *Para $s \in \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ existe $C(s,\alpha) > 0$ tal que*

$$|\partial_k^\alpha[(1+|k|^2)^{s/2}]| \leq C(s,\alpha)(1+|k|)^{s-|\alpha|}. \tag{4.2.12}$$

Demostración: Usando (4.1.11) haciendo cambio de parametro s por $s-2|\alpha|$ tenemos

$$(1+|k|^2)^{s/2-|\alpha|} \leq C(s,\alpha)(1+|k|)^{s-2|\alpha|},\ \ k \in \mathbb{R}^n,\ s \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{4.2.13}$$

Por Lema 4.2.2 existe $P(k)$ polinomio tal que $\partial_k^\alpha[(1+|k|^2)^{s/2}] = P(k)(1+|k|^2)^{s/2-|\alpha|}$ y $deg\ P(k) = |\alpha|$. Existe $C_1 > 0$ tal que $|P(k)| \leq C_1(1+|k|)^{|\alpha|}$ por Lema 4.2.1 inciso *2.* Por tanto

$$\begin{aligned}
|\partial_k^\alpha[1+|k|^2)^{s/2}]| &= |P(k)|(1+|k|^2)^{s/2-|\alpha|} \\
&\leq C(s,\alpha)C_1(\alpha)(1+|k|)^{|\alpha|}(1+|k|)^{s-2|\alpha|} \\
&= C_2(s,\alpha)(1+|k|)^{s-|\alpha|},\ \ k \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Corolario queda demostrado. ■

Definición 4.2.4 *Definamos $\hat{H}^s := \{u \in \mathcal{S}' |\ \hat{u} \in H^s\}$ con norma*

$$\|u\|_{\hat{H}^s} := \|\hat{u}\|_s \tag{4.2.14}$$

Teorema 4.2.5 *$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración: Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\hat{u}(k)(1+|k|)^s \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por Definición 4.1.1. Definamos $w(k) = (1+|k|^2)^{s/2}$. Obviamente $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

I) $w(k)\hat{u}(k) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n))$. Para $s \in \mathbb{R}$ existe $C(s) > 0$ tal que $|w(k)|^2 \le C(s)(1+|k|)^{2s}$, $k \in \mathbb{R}^n$ por (4.1.11). Por tanto, $\int |\hat{u}(k)w(k)|^2\, dk \le C(s) \int |\hat{u}(k)|^2(1+|k|)^{2s}\, dk = C(s)\|u\|_s^2 < \infty$.

II) Por Corolario 3.5.10 existe sucesión $\varphi_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_m(k) \to w(k)\hat{u}(k)$ en $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$.

III) Demostremos que $\frac{\varphi_m(k)}{w(k)} \to \hat{u}(k)$ en $\hat{H}^s$. Es equivalente a demostar que

$$\int |\hat{u}(k) - \frac{\varphi_m(k)}{w(k)}|^2(1+|k|)^{2s}\, dk \to 0 \text{ si } n \to \infty. \tag{4.2.15}$$

Usando (4.1.11) y (4.1.8) tenemos que para $s \in \mathbb{R}$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$(1+|k|)^{2s} \le C_1|w(k)|^2, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{4.2.16}$$

Más aún, usando *II*) tenemos

$$\int |\hat{u}(k) - \frac{\varphi_m(k)}{w(k)}|^2(1+|k|)^{2s}\, dk \le C_1^2\|\hat{u}(k)w(k) - \varphi_m(k)\|_{\mathcal{L}^2}^2.$$

Por tanto, *II*) implica (4.2.15).

IV) $\frac{\varphi_m(k)}{w(k)} \in \mathcal{S}$. Por Corolario 4.2.3, $|\partial_k^\alpha[\frac{1}{w(k)}]| \le C_2(1+|k|)^{-s-|\alpha|}$. Esto implica que $\frac{1}{w(k)}$ cumple la cota (1.6.63). Por tanto $\frac{\varphi_m(k)}{w(k)} \in \mathcal{S}$ por Lema 1.6.2.

Por lo tanto $F^{-1}[\frac{\varphi_m(k)}{w(k)}](x) \to F^{-1}[\hat{u}(k)](x) = u(x)$ si $m \to \infty$ en H^s. ∎

4.3. Operadores Diferenciales.

Definición 4.3.1 *Sean $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi índice y $k_1, ..., k_n \in \mathbb{C}$. Definamos el monomial $k^\alpha := k_1^{\alpha_1}...k_n^{\alpha_n}$ de n variables complejos, los polinomiales $A(k) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha k^\alpha$ de orden $m = 0, 1, 2, ...$ y el correspondiente operador diferencial*

$$A(\partial)u(x) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \partial^\alpha u(x). \tag{4.3.17}$$

Proposición 4.3.2 *$A(\partial)u \in \mathcal{S}'$ si $u \in \mathcal{S}'$.*

Demostración: Se sigue de los Lemas 1.5.3 y 1.6.2. ∎

Lema 4.3.3 *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $u \in H^s$. Entonces*

1. *$A(\partial)u \in H^{s-m}$,*

2. *El operador $A(\partial) : H^s \to H^{s-m}$ es lineal y continuo.*

Demostración: *1.* Por Definición 4.1.1 $A(\partial)u \in H^{s-m}$ si $(1+|k|)^{s-m}F[A(\partial)u](k) \in \mathcal{L}^2$, y

$$\|A(\partial)u\|_{s-m} = \|(1+|k|)^{s-m}F[A(\partial)u](k)\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{4.3.18}$$

Usando (3.4.13) obtenemos $F[\partial^\alpha u](k) = (-ik)^\alpha \hat{u}(k)$, así $F[A(\partial)u](k) = A(-ik)\hat{u}(k)$. Por tanto obtenemos

$$\|A(\partial)u\|_{s-m} = \|(1+|k|)^{s-m}A(-ik)\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{4.3.19}$$

2. Ya que el polinomial $A(k)$ es función continua, así el producto $(1+|k|)^{s-m}A(-ik)\hat{u}(k)$ es función medible de $k \in \mathbb{R}^n$. Más aún, $|A(-ik)| \leq C(1+|k|)^m$ para $k \in \mathbb{R}^n$, así

$$(1+|k|)^{s-m}|A(-ik)| \leq C(1+|k|)^s, \quad k \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3.20}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
\|(1+|k|)^{s-m}A(-ik)\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|)^{2(s-m)}|A(-ik)\hat{u}(k)|^2\,dk \\
&\leq C^2 \int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|)^{2s}|\hat{u}(k)|^2\,dk \\
&= C^2\|(1+|k|)^s\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2}^2 = C^2\|u\|_s^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, (4.3.19) implica que $\|A(\partial)u\|_{s-m} \leq C\|u\|_s < \infty$. Esto prueba el Lema. $\blacksquare$

Capítulo 5

Teoremas de Sobolev

5.1. Primer Teorema de Inmersión de Sobolev.

El Lema 3.3.2 puede ser reformulado para la Transformada Inversa de Fourier de la manera siguiente:

Lema 5.1.1 *Para $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $F^{-1}g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ y esta dada por*

$$F^{-1}g(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} g(k)\, dk, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1.1}$$

Ahora demostramos Primer Teorema de Inmersión de Sobolev.

Teorema 5.1.2 *[Primer Teorema de Inmersión de Sobolev] Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > n/2$. Entonces $u \in C_b(\mathbb{R}^n)$ y*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C(s)\|u\|_s. \tag{5.1.2}$$

donde $C(s) \in \mathbb{R}$. Es decir, tenemos una inmersión continua $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_b(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Paso I). Por Definición 4.1.1 para $u(x) \in H^s$ se tiene $(1+|k|)^s \hat{u}(k) \in \mathcal{L}^2$. Representando a $|\hat{u}(k)| = |(1+|k|)^{-s}(1+|k|)^s \hat{u}(k)|$ y usando Desigualdad de Cauchy, tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(k)|\, dk = \int_{\mathbb{R}^n} |(1+|k|)^{-s}(1+|k|)^s \hat{u}(k)|\, dk$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|)^{-2s}\, dk \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(1+|k|)^s \hat{u}|^2\, dk \right)^{1/2} = I(s)\|u\|_s < \infty \tag{5.1.3}$$

donde $I(s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|k|)^{-2s}\, dk \right)^{1/2} < \infty$ para $s > n/2$. Por tanto $u = F^{-1}\hat{u} \in C_b$ por Lema 5.1.1.

Paso II). Por (5.1.2), ya que $\hat{u} \in \mathcal{L}^1$ por (5.1.3) y

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} \hat{u}(k)\, dk, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{5.1.4}$$

por tanto

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|u(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{u}(k)|\,dk \leq \frac{I(s)}{(2\pi)^n}\|u\|_s.$$

por (5.1.3). Esto implica (5.1.2) con $C(s) = \frac{I(s)}{(2\pi)^n}$. ■

Observación 5.1.3 *$C(s) \to \infty$ cuando $s \to n/2$.*

Demostración: Dado que

$$C(s) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{dk}{(1+|k|)^{2s}} \leq \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r)^{2s}} \leq$$
$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^\infty \frac{dr}{(1+r)^{2s-(n-1)}} = \frac{1}{(2\pi)^n}\frac{1}{(2s-n)(1+r)^{2s-n}}\ |_0^\infty .$$

Implica que $C(s) \to \infty$ si y solo si $s \to n/2$. ■

Corolario 5.1.4 *Sea $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ con $s > n/2+k, k \geq 0$. Entonces $\partial^\alpha u(x) \in C_b(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq k$.*

En otras palabras, tenemos una inmersión continua $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_b^k(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2+k$.

Demostración: Sean $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, con $s > n/2+k, k \geq 0$. Obtenemos $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|} \subset H^{s-k}$ por Observación 4.1.4. Por tanto $\partial^\alpha u \in C_b(\mathbb{R}^n)$ por Teorema 5.1.2 ya que $s-k > n/2$. ■

Corolario 5.1.5 *$u \in C^\infty$, si $u \in H^s$, $s \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Por Corolario 5.1.4, $H^s(\mathbb{R}^n) \subset C_b^k(\mathbb{R}^n)$ si $s > n/2+k$. Esto implica que $u \in C_b^k(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}_0$, es decir, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

Corolario 5.1.6 *I) Por el Corolario 5.1.4, para $n=1$, $H^1(\mathbb{R}) \subset C_b(\mathbb{R})$ ya que $1 > 1/2$. $H^2(\mathbb{R}) \subset C_b^1(\mathbb{R})$ ya que $2 > 1/2+1, ...$*

II) Para $n=3$: $H^1(\mathbb{R}^3) \subset C_b(\mathbb{R}^3)$ ya que $2 > 3/2$. $H^3(\mathbb{R}^3) \subset C_b^1(\mathbb{R}^3)$ ya que $3 > 1/2+2, ...$

Probaremos que algunos conjuntos acotados de $H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ son precompactos en $H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ si $s_1 > s_2$. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Definición 5.1.7 *Sea $\overset{o}{H}{}^s(\Omega)$ es el subespacio de las distribuciones temperadas $u(x) \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $u(x)$ se desvanece en el complemento de $\overline{\Omega}$, i.e., $u(x) = 0$, $x \in (\overline{\Omega})^c$. La norma de $\overset{o}{H}{}^s(\Omega)$ coincide con la norma de $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

Por Definición $\overset{o}{H}{}^{s_1}(\Omega) \subset H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ así $\overset{o}{H}{}^{s_1}(\Omega) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ si $s_1 > s_2$ por Observación 4.1.4.

Lema 5.1.8 $\overset{o}{H^s}(\Omega)$ *con la norma* $\|\cdot\|_s$ *es subespacio cerrado de* $H^s(\Omega)$.

Demostración: Sea $f_n \in \overset{o}{H^s}(\Omega)$ y $f_n \to f$ en $H^s(\Omega)$ con la norma $\|\cdot\|_s$. Demostremos que $f(x) = 0$, $x \notin \overline{\Omega}$. Dado que $f_n \to f$ en $\|\cdot\|_s$ entonces $f_n \to f$ en la topología $\mathcal{S}'(\Omega)$ por Lema 4.1.3. Para $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ se tiene que $< f_n, \varphi > \to < f, \varphi >$. Ya que $f_n \in \overset{o}{H^s}(\Omega)$, entonces $< f_n, \varphi >= 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto implica que $< f, \varphi >= 0$ i.e., $f(x) = 0$, $x \notin \overline{\Omega}$. Esto prueba el lema. ■

Corolario 5.1.9 $\overset{o}{H^s}(\Omega)$ *es espacio de Hilbert.*

Demostración: Se sigue de los Lemas 5.1.8 y 4.1.5. ■

5.2. Teorema de Inmersión Compacta de Sobolev.

Definición 5.2.1 *Sea K compacto. Decimos que un subconjunto* F *de* $C(K, \mathbb{C})$ *es* **uniformemente acotado** *en K si existe una constante M tal que*

$$|f(x)| \leq M \ \ \forall f \in \mathrm{F}, \quad x \in K. \tag{5.2.5}$$

Definición 5.2.2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que un subconjunto* F *de* $C(X, \mathbb{C})$ *es* **equicontinuo** *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \ \textit{siempre que} \ \ x, y \in X, \ d(x, y) < \delta \ y \ f \in \mathrm{F}. \tag{5.2.6}$$

Lema 5.2.3 *Sea* F *un conjunto de funciones diferenciables de* $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *con derivadas uniformemente acotadas, entonces* F *es equicontinuo.*

Demostración: Sea $f \in \mathrm{F}$. Definamos a $F(t) = f(x + t(y - x))$ función continua en $[0, 1]$. Ya que $F(1) = f(y)$ y $F(0) = f(x)$ existe $\xi \in [0, 1]$ tal que $f(y) - f(x) = F(1) - F(0) = \nabla f(x + \xi(y - x)) \cdot (y - x)$. Denotemos $z = x + \xi(y - x)$. Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|\nabla f(x)| \leq M$ para $x \in \mathbb{R}^n$. Esto implica que

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x| < \varepsilon,$$

siempre que $|y - x| < \delta$ y $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Esto significa que (5.2.6) se cumple y Lema 5.2.3 esta probado. ■

Teorema 5.2.4 *(Arzelà-Ascoli)[7] Sea X un espacio métrico compacto. Un conjunto* F *en* $C(X, \mathbb{C})$ *es compacto, si y sólo sí, es cerrado, acotado y equicontinuo.*

Corolario 5.2.5 *Sea* $\mathrm{F} \subset C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *acotado y equicontinuo entonces para cada* $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ *sucesión de* F *existe* $\{u_{j'}\}$ *subsucesión tal que* $u_{j'} \rightrightarrows u$ *uniformemente sobre todo compacto en* $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Definamos $X_m = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq m\}$. Para X_1 existe $u_j^{(1)}$ subsucesión de u_j tal que $u_j^{(1)} \rightrightarrows u^{(1)}$ cuando $j \to \infty$ sobre X_1. Para X_2 existe $u_j^{(2)}$ subsucesión de $u_j^{(1)}$ tal que $u_j^{(2)} \rightrightarrows u^{(2)}$ cuando $j \to \infty$ sobre X_2. Sucesivamente, para X_m existe $u_j^{(m)}$ subsucesión de $u_j^{(m-1)}$ tal que $u_j^{(m)} \rightrightarrows u^{(m)}$ cuando $j \to \infty$ sobre X_m.

Notemos que para cada $m \in \mathbb{N}$, $u^{(m)}(x) = u^{(m-1)}(x)$ para $x \in X_{m-1}$. En efecto, esto se sigue del hecho que la sucesión $u_j^{(m)}$ es subsucesión de $u_j^{(m-1)}$. Usando el proceso diagonal, escogemos la sucesión $u_m^{(m)}$. Tenemos que $u_m^{(m)}$ es subsucesión de cada sucesión $u_j^{(m)}$ y por tanto $u_m^{(m)} \rightrightarrows u^{(m)}$ sobre X_m $\forall$ $m \in \mathbb{N}$. Tomando en cuenta la coincidencia $u^{(m)}\big|_{X_{m-1}} = u^{(m-1)}$ Vemos que existe $u(x) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tal que $u(x)\big|_{X_m} = u^{(m)}(x)$ y $u_m^{(m)} \rightrightarrows u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ sobre X_m. ■

Lema 5.2.6 *La función $\alpha(\varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon}$ es acotada para $\varepsilon \in (0,1]$, $|x| \leq M$ i.e., existe $C(M) > 0$ tal que*

$$\left|\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon}\right| \leq C(M), \quad \varepsilon \in (0,1], \quad |x| \leq M. \tag{5.2.7}$$

Demostración: Es conocido que $\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leq 1$, $y \in \mathbb{R}$. Haciendo el cambio $y = \varepsilon x$ para $\varepsilon \in (0,1]$, $x \in \mathbb{R}$, obtenemos $|\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon}| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$. Por tanto $|\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon}| \leq M$ si $|x| \leq M$. ■

Teorema 5.2.7 *(Inmersión Compacta de Sobolev) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $s_1 > s_2$. Entonces la inmersión $\overset{o}{H}{}^{s_1}(\Omega) \subset H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ es compacta, i.e., para cualquier sucesión de funciones acotadas $u_j(x) \in \overset{o}{H}{}^{s_1}(\Omega)$ existe una subsucesión $u_{j'}(x)$ convergente en $H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, i.e.,*

$$\|u_{j'} - u\|_{s_2} \to 0 \;\; \textit{cuando} \;\; j' \to \infty \tag{5.2.8}$$

donde $u(x) \in H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración: Demostraremos el Teorema para el caso $s_1 \geq 0$. El caso $s_1 < 0$ se analiza similarmente. Probaremos que $u_j(x)$ contiene una subsucesión de Cauchy $u_{j'}$ en $H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$, i.e.,

$$\|u_{j'} - u_{m'}\|_{s_2} \to 0 \;\; \text{cuando} \;\; j', m' \to \infty. \tag{5.2.9}$$

Entonces (5.2.8) se sigue, ya que $H^{s_2}(\mathbb{R}^n)$ es espacio de Hilbert por Lema 4.1.5 y por tanto completo.

Paso I) Demostremos que la suceción $u_j(x)$ es acotada en $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ i.e., existe $B_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|u_j\|_{\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)} = \int_\Omega |u_j(x)|\, dx \leq B_1 < \infty, \quad j = 1, ... \tag{5.2.10}$$

Por Definición de una sucesión acotada en $\overset{o}{H}{}^{s_1}(\Omega)$, existe $B > 0$ tal que

$$\sup_{j \in \mathbb{N}} \|u_j\|_{s_1} \leq B < \infty. \tag{5.2.11}$$

Dado que $s_1 \geq 0$ tenemos $\overset{o}{H}^{s_1}(\Omega) \subset H^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ por Observación 4.1.4. Por tanto,

$$\|u_j\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \int |u_j(x)|^2\,dx = \|u_j(x)\|_0^2 \leq \|u_j(x)\|_{s_1}^2 \leq B^2. \tag{5.2.12}$$

Más aún, tenemos

$$u_j(x) = 0, \quad x \notin \overline{\Omega} \tag{5.2.13}$$

ya que $u_j \in \overset{o}{H}^{s_1}(\Omega)$. Usando Desigualdad de Cauchy y (5.2.12) obtenemos

$$\int_\Omega |u_j(x)|\,dx \leq \left(\int_\Omega dx\right)^{1/2}\left(\int |u_j(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}}B. \tag{5.2.14}$$

Por tanto (5.2.10) se cumple con $B_1 = |\Omega|^{\frac{1}{2}}B$.

Paso II). Estudiaremos la transformada de Fourier de las funciones $u_j(x)$. Primeramente, tenemos

$$\hat{u}_j(k) = \int_\Omega e^{ikx}u_j(x)\,dx. \tag{5.2.15}$$

por Lema 3.3.2 y (5.2.13). Probemos que las derivadas parciales de las funciones $\hat{u}_l$ son acotadas, i.e.,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}^n}\left|\frac{\partial}{\partial k_i}\hat{u}_l(k)\right| \leq B_2 < \infty. \;\; i = 1,2,... \tag{5.2.16}$$

para cualquier $l = 1,...,n$. Usando Definición de la derivada parcial tenemos

$$\frac{\partial}{\partial k_l}\hat{u}_j(k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \frac{e^{i(k+\varepsilon e_l)x} - e^{ikx}}{\varepsilon}u_j(x)\,dx \tag{5.2.17}$$

donde $e_l = (0,...,1_l,...,0)$. Demostremos que el límite (5.2.17) existe y es igual a

$$\frac{\partial}{\partial k_l}\hat{u}_j(k) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial k_l}e^{ikx}u_j(x)\,dx. \tag{5.2.18}$$

Para demostrar esto vamos a usar el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue. Para aplicar este teorema necesitamos dos afirmaciones

1. $$\frac{e^{i(k+\varepsilon e_l)x} - e^{ikx}}{\varepsilon}u_j(x) \to \frac{\partial}{\partial k_l}e^{ikx}u_j(x), \quad \text{c.p.d. } x \in \Omega. \tag{5.2.19}$$

2. Existe $M(\Omega) > 0$ tal que

$$\left|\frac{e^{i(k+\varepsilon e_l)x} - e^{ikx}}{\varepsilon}u_j(x)\right| \leq M(\Omega)|u_j(x)|, \;\; x \in \Omega, \;\; \varepsilon \in (0,1]. \tag{5.2.20}$$

(5.2.19) se sigue de la definición de derivada. Demostremos la afirmación 2. Tenemos para $x_l := x \cdot e_l$

$$\left|\frac{e^{i(k+\varepsilon e_l)x} - e^{ikx}}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{e^{i\varepsilon x_l} - 1}{\varepsilon}\right| = \left|\frac{e^{i\varepsilon x_l/2} - e^{-i\varepsilon x_l/2}}{\varepsilon}\right| = \frac{2|\sin\frac{\varepsilon x_l}{2}|}{\varepsilon}. \tag{5.2.21}$$

Por Lema 5.2.6 existe $M(\Omega) > 0$ tal que

$$\left|\frac{e^{i(k+\varepsilon e_l)x} - e^{ikx}}{\varepsilon}\right| \leq M(\Omega) < \infty, \quad x \in \Omega, \quad \varepsilon \in (0, 1]$$

ya que Ω es acotado. Esto implica (5.2.20). Afirmación 2. se demostro. Por el teorema de Lebesgue, las afirmaciones 1. y 2. implica (5.2.18). Ahora (5.2.18) implica (5.2.16). En efecto

$$\left|\frac{\partial}{\partial k_i}\hat{u}_l(k)\right| = \left|\int_\Omega \frac{\partial}{\partial k_i} e^{ikx} u_l(x)\, dx\right| \leq \int_\Omega |ix_i e^{ikx} u_l(x)|\, dx \leq M(\Omega) B_1. \tag{5.2.22}$$

Por tanto (5.2.16) se cumple con $B_2 = M(\Omega)B_1$.

Paso III). Consideremos las normas en (5.2.9). Definamos $\Delta_{jm}(R)$ como

$$\Delta_{jm}(R) := \|u_j - u_m\|_{s_2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|)^{2s_2} |\hat{u}_j(k) - \hat{u}_m(k)|^2\, dk. \tag{5.2.23}$$

Separando la región de integración dentro de la bola $|k| \leq R$ y su complemento $|k| \geq R$, donde R es escogido después.

$$\Delta_{jm}(R) = \left(\int_{|k|\leq R} + \int_{|k|\geq R}\right) (1 + |k|)^{2s_2} |\hat{u}_j(k) - \hat{u}_m(k)|^2\, dk = I_{jm}(R) + J_{jm}(R). \tag{5.2.24}$$

Estimemos la segunda integral

$$\begin{aligned} J_{jm}(R) = \int_{|k|\geq R} (1 + |k|)^{2s_1} (1 + |k|)^{2s_2 - 2s_1} |\hat{u}_j(k) - \hat{u}_m(k)|^2\, dk \leq \\ (1 + R)^{2s_2 - 2s_1} \int_{|k|\geq R} (1 + |k|)^{2s_1} |\hat{u}_j(k) - \hat{u}_m(k)|^2\, dk \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

ya que $s_2 - s_1 < 0$. Por tanto, usando (5.2.11) para (5.2.25) tenemos

$$J_{jm}(R) \leq \frac{(2B)^2}{(1 + R)^{2(s_1 - s_2)}}, \quad \forall\, j, m. \tag{5.2.26}$$

Paso IV). Finalmente demostraremos (5.2.9). El conjunto $\{\hat{u}_j(k)\}_{j=1,\dots}$ es equicontinuo en $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ por (5.2.16) y Lema 5.2.3.

Además, por (5.2.10) obtenemos

$$|\hat{u}_j(k)| = \left|\int_\Omega e^{ikx} u_j(x)\, dx\right| \leq \int_\Omega |u_j(x)|\, dx \leq B_1 < \infty. \tag{5.2.27}$$

Esto muestra que $\{\hat{u}_j(k)\}_{j=1,\dots}$ es acotado en $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Así por el Corolario 5.2.5, existe subsuseción $\hat{u}_{j'}(k)$ que converge uniformemente en cada compacto $\mathbb{R}^n$. Por tanto

$$|\hat{u}_{j'}(k) - \hat{u}_{m'}(k)| \to 0, \ \text{ cuando } \ j', m' \to \infty \tag{5.2.28}$$

y la convergencia es uniforme en todo conjunto compacto de $\mathbb{R}^n_k$. En particular para $|k| \leq R$

$$\max_{|k|\leq R} |\hat{u}_{j'} - \hat{u}_{m'}| \to 0, \ \text{ cuando } \ j', m' \to \infty. \tag{5.2.29}$$

Esto implica que la primer integral en (5.2.24) converge a 0 para $R > 0$ fijo, i.e.,

$$I_{j'm'}(R) \to 0, \ \text{ cuando } \ j', m' \to \infty. \tag{5.2.30}$$

Detalladamente. Sea $\varepsilon > 0$. Por (5.2.26) existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$|J_{j'm'}(R_\varepsilon)| < \varepsilon/2, \ \ \forall j', m'. \tag{5.2.31}$$

donde $s_1 - s_2 < 0$. (5.2.30) implica que para R_ε existe N_ε tal que

$$|I_{j'm'}(R_\varepsilon)| < \varepsilon/2, \ \text{ para } \ j', m' \geq N_\varepsilon. \tag{5.2.32}$$

Además $\Delta_{j'm'}(R_\varepsilon) = I_{j'm'}(R_\varepsilon) + J_{j'm'}(R_\varepsilon)$ por (5.2.24). Por lo tanto

$$|\Delta_{j'm'}(R_\varepsilon)| \leq |I_{j'm'}(R_\varepsilon)| + |J_{j'm'}(R_\varepsilon)| < \varepsilon, \ \text{ para } \ j', m' \geq N_\varepsilon$$

por (5.2.31) y (5.2.32). ■

Capítulo 6

Espacios de Sobolev para $s \geq 0$ enteros.

Daremos una caracterización equivalente para los espacios Sobolev con $s \in \mathbb{N}$.

Definición 6.0.8 *Sea E espacio normado. Sean μ_1, μ_2 normas para E. Decimos que son equivalentes si existen $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que*

$$C_1\mu_1(x) \leq \mu_2(x) \leq C_2\mu_1(x), \quad \forall x \in E. \tag{6.0.1}$$

Lema 6.0.9 *Las normas $\|x\|_1 := \sum_{l=1}^n |x_l|$ y $\|x\|_2 := (\sum_{l=1}^n x_l^2)^{\frac{1}{2}}$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ $x \neq 0$. Sea $S = \{\frac{x}{\|x\|_1} : x \in \mathbb{R}\}$. Dado que S es cerrado y acotado implica que es compacto. Además $\|\cdot\|_2$ es función continua, lo que implica que $\|\cdot\|_2$ alcanza su máximo y su mínimo en S, i.e., existen C_1, $C_2 > 0$ tal que

$$C_1 \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 \leq C_2$$

por tanto

$$\|x\|_1 C_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 C_2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

■

Definición 6.0.10 *Sea $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ un multi índice. La función $S(k)$ se define como $S(k) := \sum_{|\alpha| \leq n} |(ik)^\alpha|^2$*

Lema 6.0.11 *$S(k) \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración: Usamos los multi índices $\alpha_l = (0, ..., 1_l, ..., 0)$ para acotar a $S(k)$ de la siguiente manera: $\sum_{|\alpha| \leq n} |(ik)^\alpha|^2 = \sum_{|\alpha| \leq n} |k^\alpha|^2 \geq \sum_{l=1}^n |k^{\alpha_l}|^2 \geq \sum_{l=0}^n k_l^2 > 0$, para cada $k \in \mathbb{R}^n$, $k \neq 0$. Además $S(0) = 1$. Por tanto $S(k) \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{R}^n$. ■

Lema 6.0.12 *Para $S(k)$ de Definición 6.0.10. Existe $B>0$ tal que*

$$B(1+|k|)^{2n} \leq S(k), \quad k \in \mathbb{R}^n \tag{6.0.2}$$

donde $|k| = (\sum_{l=1}^{n} |k_l|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Demostración: Demostraremos que para $k \in \mathbb{R}^n$ existe B tal que

$$B(1+|k|)^{2n} \leq 1+|k|^{2n}. \tag{6.0.3}$$

Dado que

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{1+|k|^{2n}}{(1+|k|)^{2n}} = 1 \tag{6.0.4}$$

existe $R>0$ tal que

$$1+|k|^{2n} \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^{2n}, \quad |k| \geq R. \tag{6.0.5}$$

Además $1 \leq 1+|k|^{2n}$ para $k \in \mathbb{R}^n$, y

$$B(1+|k|)^{2n} \leq 1. \;\; |k| \leq R \tag{6.0.6}$$

Para $B \leq \frac{1}{(1+R)^{2n}}$. Por lo tanto (6.0.3) se cumple para $B = \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{(1+R)^{2n}}\}$. ■

Lema 6.0.13 *1. Para $s \in \mathbb{N}$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio de funciones $u \in \mathcal{L}^2$ tales que $\partial^\alpha u \in \mathcal{L}^2$ para cualquier multi índice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ con $|\alpha| \leq s$.*

2. La norma Sobolev $\|u\|_s$ es equivalente a norma $|||u|||_s$ definida por

$$|||u|||_s^2 = \sum_{|\alpha|\leq s} \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2}^2. \tag{6.0.7}$$

es decir, existen $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$|||u|||_s \leq C_1 \|u\|_s, \quad \forall u \in H^s. \tag{6.0.8}$$

$$C_2 \|u\|_s \leq |||u|||_s, \quad \forall u \in H^s. \tag{6.0.9}$$

Observación 6.0.14 *I) Las derivadas $\partial^\alpha u$ de la función $u \in \mathcal{L}^2$ se entienden en el sentido de distribuciones, véase la sección 1.5 y del hecho que $\mathcal{L}^2 \subset \mathcal{S}'$ por Proposición 1.3.6.*

II) Si se trata de derivar en el sentido clásico entonces el Lema falla.

Demostración de la Observación Inciso II: I) Definamos

$$\varphi(x) = \chi_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases}$$

Como

$$|||\varphi|||_1^2 = \|\varphi\|_{\mathcal{L}^2}^2 = \int \varphi(x)^2\, dx = \int_0^1 dx = 1. \tag{6.0.10}$$

Calculando $\hat{\varphi}(k)$. Usando Definición 2.1.1 obtenemos

$$\hat{\varphi}(k) = \int_0^1 e^{ikx}\, dx = \frac{e^{ik} - 1}{ik}. \tag{6.0.11}$$

Por tanto

$$\|\varphi\|_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(k)|^2 (1 + |k|)^2\, dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|e^{ik} - 1|^2}{|ik|^2} (1 + |k|)^2\, dk.$$

Ya que $|e^{ik} - 1| = |e^{ik/2} - e^{-ik/2}| = 2|\cos(k/2)|$.

$$\|\varphi\|_1^2 = \int \frac{4|\cos(\frac{k}{2})|^2}{k^2} (1 + |k|)^2\, dk \geq 4 \int |\cos(k/2)|^2\, dk = \infty.$$

Esto significa que (4.2.2) no se cumple para $s = 1$ en virtud de (6.0.10). ■

Demostración del Lema 6.0.13: Demostremos *1.* $\partial^\alpha u \in \mathcal{L}^2$ si $u \in H^s$ y $u \in H^s$ si $\partial^\alpha u \in \mathcal{L}^2$ para cualquier $|\alpha| \leq s$.

1. En efecto, sea $m = |\alpha| \leq s$. Por Lema 4.3.3 tenemos que el operador $\partial^\alpha : H^s \to H^{s-m}$ es continuo, i.e., existe $C > 0$ tal que

$$\|\partial^\alpha u\|_{s-m} \leq C \|u\|_s, \ \ \forall u \in H^s.$$

Ya que $s - m \geq 0$, entonces $H^{s-m} \hookrightarrow \mathcal{L}^2$ y la inyección es continua. Por tanto, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2} \leq C_1 \|\partial^\alpha u\|_{s-m}.$$

Esto implica que

$$\|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2} \leq C_2 \|u\|_s, \ \ \forall u \in H^s, \ |\alpha| \leq s. \tag{6.0.12}$$

Sumando (6.0.12) con respecto del indice $\alpha, |\alpha| \leq s$ obtenemos (6.0.8).

2. Reciprocamente, consideremos $u \in \mathcal{L}^2$ tal que $\partial^\alpha u \in \mathcal{L}^2$ para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq s$. Por demostrar que $u \in H^s$ y (6.0.9) se cumple.

Por Teorema de Parseval 3.3.3, tenemos que $F[\partial^\alpha u] \in \mathcal{L}^2\ (\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, $F[\partial^\alpha u] = (-ik)^\alpha \hat{u}(k)$ por (3.4.13), así $(-ik)^\alpha \hat{u}(k) \in \mathcal{L}^2\ (\mathbb{R}^n)$. Más aún, por la Identidad de Parseval 2.3.26 tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(-ik)^\alpha \hat{u}(k)|^2\, dk = \|F[\partial^\alpha u]\|_{\mathcal{L}^2}^2 = (2\pi)^n \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2}^2 < \infty. \tag{6.0.13}$$

Haciendo la suma para $|\alpha| \leq s$ por Definición 6.0.10 obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha| \leq s} |(-ik)^\alpha|^2 \right) |\hat{u}(k)|^2\, dk = \int_{\mathbb{R}^n} S(k) |\hat{u}(k)|^2\, dk = C \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{\mathcal{L}^2} = C |||u|||_s^2 < \infty \tag{6.0.14}$$

Por Lema 6.0.11, $S(k) \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{R}^n$. Así (6.0.14) implica que la distribución temperada $\hat{u}(k)$ es función Lebesgue medible. Más aún, Lema 6.0.12, implica que

$$B \int (1 + |k|)^{2s} |\hat{u}(k)|^2 \, dk \leq \int S(k) |\hat{u}(k)|^2 \, dk < \infty. \tag{6.0.15}$$

Por tanto

$$B \|u\|_s^2 \leq C |||u|||_s^2 < \infty \tag{6.0.16}$$

por Definición (4.1.1) de la norma $\| \cdot \|_s$. Esto significa que $u \in H^s$ y la cota (6.0.9) se conserva.

$\blacksquare$

Capítulo 7

Ecuaciones Diferenciales Elípticas con Coeficientes Constantes.

Consideremos Ecuaciones Diferenciales Parciales en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes constantes

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.0.1}$$

donde $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$. Planeamos estudiar en el futuro la cuestión de existencia, unicidad y suavidad de la solución $u(x)$ de esta ecuación.

Ejemplo 7.0.15 *Consideremos la ecuación estacionaria de Schrödinger*

$$(H-E)u(x) := (-\Delta + V(x) - E)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.0.2}$$

donde $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ *es el* **operador de Laplace***,* $H = -\Delta + V(x)$ *es el* ***operador de Schrödinger,*** $V(x)$ *es la energía Potencial, y* $E \in \mathbb{C}$ *es un parametro (energía).*

La investigación del operador inverso $(H-E)^{-1} = (-\Delta+V(x)-E)^{-1}$ es el objetivo principal de la **Teoría Cuántica de Dispersión.** Aquí estudiaremos las ecuaciones con coeficientes constantes

$$Au(x) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha\partial^\alpha u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.0.3}$$

Suponemos que el lado derecho $f(x)$ es una distribución temperada, $f \in \mathcal{S}'$, y buscamos la solución de $u(x)$ también en el espacio de distribuciones temperadas, $u \in \mathcal{S}'$.

Definición 7.0.16 *El polinomial* $a(k) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(-ik)^\alpha$ *es el* ***simbolo*** *del operador diferencial A.*

En la transformada de Fourier, la ecuación (7.0.3) se convierte en

$$a(k)\hat{u}(k) = \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{R}^n \tag{7.0.4}$$

por (3.4.13).

Definición 7.0.17 *1. Un operador diferencial $A(\partial)$ es* **elíptico de orden m** *si*

$$|a(k)| > c(1+|k|)^m, \quad |k| > R, \quad k \in \mathbb{R}^n \tag{7.0.5}$$

para algunos $R > 0$ y $c > 0$.

2. Un operador diferencial $A(\partial)$ es **fuertemente elíptico de orden m** *si*

$$|a(k)| > c(1+|k|)^m, \quad k \in \mathbb{R}^n \tag{7.0.6}$$

donde $c > 0$.

Lema 7.0.18 *El operador de Laplace Δ (y $-\Delta$) es elíptico de orden 2.*

Demostración: Sea $k \in \mathbb{R}^n$. Basta con demostrar que existen $R, c > 0$ tal que

$$|k|^2 \geq c(1+|k|)^2, \quad |k| \geq R. \tag{7.0.7}$$

Es equivalente con demostrar que existen $R, c_1 > 0$ tal que

$$|k| \geq c_1(1+|k|), \quad |k| \geq R. \tag{7.0.8}$$

Dado que $\lim_{|k|\to\infty} \frac{|k|}{1+|k|} = 1$ existe $R > 0$ tal que $|k| \geq \frac{1}{2}(1+|k|)$ para $|k| \geq R$. Esto significa que (7.0.5) se cumple con $c_1 = \frac{1}{2}$. ■

Lema 7.0.19 *El operador Schrödinger $-\Delta - E$ es elíptico para todo $E \in \mathbb{C}$.*

Demostración: Sea $k \in \mathbb{R}^n$. Basta con demostrar que existe $R, c > 0$ tal que

$$|-E+|k|^2| \geq c(1+|k|)^2, \quad k \in \mathbb{R}^n \text{ con } |k| \geq R. \tag{7.0.9}$$

Dado que $\lim_{|k|\to\infty} \frac{|-E+|k|^2|}{(1+|k|)^2} = 1$, existe $R > 0$ tal que $|-E+|k|^2| \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2, \ |k| \geq R$. Por tanto (7.0.9) se cumple con $c = \frac{1}{2}$. ■

Lema 7.0.20 *El operador de Schrödinger $-\Delta - E$ es fuertemente elíptico para*

1. $E < 0$,

2. $E \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$, donde $\mathbb{R}^+ = \{\alpha : \alpha > 0\}$.

Demostración: *1.* Demostraremos que existe $c > 0$ tal que

$$|k|^2 - E \geq c(1+|k|)^2, \ k \in \mathbb{R}^n. \tag{7.0.10}$$

Sea $-E = \alpha > 0$. Demostraremos que existe $c > 0$ tal que

$$\alpha + |k|^2 \geq c(1+|k|)^2. \tag{7.0.11}$$

Dado que $\lim_{|k|\to\infty} \frac{|k|^2+\alpha}{(|k|+1)^2} = 1$ existe $R > 0$ tal que $\alpha + |k|^2 \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2$ para $|k| \geq R$. Ya que $\alpha > 0$ existe $c_1 > 0$ tal que $c_1(1+R)^2 < \alpha$. Ya que además $\alpha \leq \alpha + |k|^2$ para $k \in \mathbb{R}^n$ obtenemos

$$\alpha + |k|^2 \geq c_1(1+|k|)^2, \quad |k| \leq R. \tag{7.0.12}$$

Por tanto (7.0.11) se cumple para $c = \min\{c_1, \frac{1}{2}\}$.

2. Haciendo $E = \alpha + i\beta$ y $p = |k|^2 \geq 0$, se tiene que $|E - |k|^2|^2 = |p - \alpha - i\beta|^2 = (p-\alpha)^2 + \beta^2$. Demostraremos que

$$(p-\alpha)^2 + \beta^2 > 0, \quad \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}. \tag{7.0.13}$$

En efecto, si $\beta \neq 0$ es evidente. Sea $\beta = 0$. Ya que $p \geq 0$ y $-\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{R}^+$ obtenemos $p - \alpha > 0$. En cualquier caso (7.0.13) se cumple. Esto implica que $|E - |k|^2| > 0$, para $k \in \mathbb{R}^n$. Por tanto, para todo $R > 0$ existe $m_R > 0$ tal que

$$m_R = \min_{|k|\leq R}\{|k|^2 - E\}. \tag{7.0.14}$$

Como $m_R > 0$ existe $c_1(R) > 0$ tal que $m_R > c_1(R)(1+R)^2$. Además, ya que $\lim_{|k|\to\infty} \frac{||k|^2-E|}{(|k|+1)^2} = 1$ existe $R_1 > 0$ tal que $E - |k|^2 \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2$ para $|k| \geq R_1$. Por tanto (7.0.10) se cumple para $c = \min\{\frac{1}{2}, c_1(R)\}$. ■

Teorema 7.0.21 *Consideremos la ecuación con coeficientes constantes (7.0.3). Sea A operador fuertemente elíptico de orden m. Sean $s \in \mathbb{R}$ y $f \in H^{s-m}(\mathbb{R}^n)$. Entonces la ecuación (7.0.3) admite solución única $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y la cota siguiente se cumple*

$$\|u\|_s \leq C\|f\|_{s-m} \tag{7.0.15}$$

para algún $C > 0$.

Demostración: Aplicando la transformada de Fourier a (7.0.3) tenemos (7.0.4) donde $\hat{u}$ y $\hat{f}$ son funciones localmente integrables según Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Por tanto la solución esta dada por

$$\hat{u}(k) = \frac{\hat{f}(k)}{A(k)}, \quad \text{c.p.d. } k \in \mathbb{R}^n \tag{7.0.16}$$

donde $a(k) \neq 0$ por ser A es fuertemente elíptico y por lo tanto (7.0.6) se cumple,

Notemos que $u(x) = F^{-1}[\hat{u}(k)]$ por (2.1.18). Usando Definición 4.1.1 en (7.0.16) y Definición 7.0.17 para A obtenemos

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(1+|k|)^{2s}}{|a(k)|^2}|\hat{f}(k)|^2\,dk \leq C\int_{\mathbb{R}^n}(1+|k|)^{2(s-m)}|\hat{f}(k)|^2\,dk = C\|f\|_{s-m} < \infty. \tag{7.0.17}$$

Por tanto, (7.0.15) se cumple. ■

Corolario 7.0.22 $A : H^s \to H^{s-m}$ *es un isomorfismo para A operador fuertemente elíptico.*

Demostración: Por Lema 4.3.3 se tiene la continuidad de A y por (7.0.15) la continuidad de A^{-1}. En efecto, por $u = A^{-1}f$. ■

Más adelante extenderemos el Teorema 7.0.21 y Corolario 7.0.22 para ecuación diferencial parcial fuertemente elíptica con coeficientes variables.

Capítulo 8

Operadores Pseudodiferenciales

8.1. Representación de Fourier para Operadores Pseudodiferenciales

Consideremos la representación de Fourier para operador diferencial parcial en $\mathbb{R}^n$ con coeficientes variables

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{8.1.1}$$

donde $u \in \mathcal{S}$.

Primero consideremos el caso de coeficientes constantes: $a_\alpha(x) = a_\alpha$. Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces $Au(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha \partial^\alpha u(x)$ y $F[Au(x)] = a(k)\hat{u}(k)$, donde $a(k)$ es el simbolo del operador A. Además $a(-ik)\hat{u}(k) \in \mathcal{L}^1$ por Proposición 2.1.2, Lema 1.6.2 y Lema 1.1.2. Entonces la transformada de Fourier inversa $Au(x) = F^{-1}[a(k)\hat{u}(k)]$ puede ser escrito como la integral estandar de Fourier

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} a(k)\hat{u}(k)\, dk. \tag{8.1.2}$$

Ahora consideremos el caso de coeficientes variables (7.0.3). Aplicando (8.1.2) al operador ∂^α, tenemos

$$\partial^\alpha u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}(-ik)^\alpha \hat{u}(k)\, dk. \tag{8.1.3}$$

Mulplicando por $a_\alpha(x)$ y sumando, obtenemos

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}(-ik)^\alpha \hat{u}(k)\, dk =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(-ik)^\alpha \hat{u}(k)\, dk \tag{8.1.4}$$

esto puede ser escrito como

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx} a(x,k)\hat{u}(k)\, dk, \tag{8.1.5}$$

donde el polinomial

$$a(x,k) := \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)(-ik)^\alpha \tag{8.1.6}$$

es el simbolo del operador diferencial A.

En general, las funciones $a(x,k)$ no son necesariamente polinomios. Los operadores del tipo (8.1.5) son llamados operadores pseudodiferenciales, si $a(x,k)$ satisfacen estimaciones apropiadas que discutiremos.

8.2. Clases de Simbolos y Operadores Pseudodiferenciales

Definición 8.2.1 *Sea $m \in \mathbb{R}$. La clase de simbolos S^m consiste de las funciones $a(x,k) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tal que $a(x,k) = a^0(k) + a'(x,k)$, donde para cualesquiera multi índices α, β y $N > 0$, los términos $a^0(k)$ y $a'(x,k)$ satisfacen*

$$|\partial_k^\alpha a^0(k)| \le C(\alpha)(1+|k|)^{m-|\alpha|}, \;\; k \in \mathbb{R}^n \tag{8.2.7}$$

$$(1+|x|)^N |\partial_k^\alpha \partial_x^\beta a'(x,k)| \le C(\alpha,\beta,N)(1+|k|)^{m-|\alpha|}, \;\; x,k \in \mathbb{R}^n \tag{8.2.8}$$

para algunas $C(\alpha), C(\alpha,\beta,N) > 0$.

Lema 8.2.2 *Sea $a(x,k)$ simbolo de clase S^m. Entonces para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe $C > 0$ tal que*

$$|\partial_k^\alpha a(x,k)| \le C(1+|k|)^{m-|\alpha|}, \;\; x,k \in \mathbb{R}^n. \tag{8.2.9}$$

Demostración: Por Definición 8.2.1, $a(x,k) = a^0(k) + a'(x,k)$ donde $a^0(k)$ y $a'(x,k)$ satisfacen (8.2.7) y (8.2.8) respectivamente. Usando desigualdad triangular, (8.2.7) y (8.2.8) con $\beta = 0, \;\; N = 0$ obtenemos

$$|\partial_k^\alpha a(x,k)| \le |\partial_k^\alpha a^0(k)| + |\partial_k^\alpha a'(x,k)| \le C(\alpha)(1+|k|)^{m-|\alpha|} + C(\alpha,0,0)(1+|k|)^{m-|\alpha|} = C(1+|k|)^{m-|\alpha|}.$$

Por tanto (8.2.9) se cumple para $C = C(\alpha) + C(\alpha,0,0)$. Lema queda demostrado. ■

Lema 8.2.3 *Sea $a(x,k)$ simbolo de clase S^m. Entonces $\widehat{a'}(\xi,k)$ satisface la condición: para cada $N > 0$ existe $C(N) > 0$ tal que*

$$|\widehat{a'}(\xi,k)| \le C(N)(1+|\xi|)^{-N}(1+|k|)^m, \;\; \xi,k \in \mathbb{R}^n. \tag{8.2.10}$$

Demostración: Para $|\xi| \le 1$. tenemos que

$$\frac{1}{2^N} \le (1+|\xi|)^{-N} \tag{8.2.11}$$

(8.2.8) implica que

$$|a'(x,k)| \le C(0,0,n+1)(1+|x|)^{-n-1}(1+|k|)^m$$

Pasando a la transformada de Fourier en esta desigualdad obtenemos

$$|\widehat{a'}(\xi,k)| \leq C_1(0,0,n+1)(1+|k|)^m, \ \ \xi,k \in \mathbb{R}^n. \tag{8.2.12}$$

(8.2.11) y (8.2.12) implican que

$$|\widehat{a'}(\xi,k)| \leq C_2(0,0,n+1)(1+|\xi|)^{-N}(1+|k|)^m, \ \ |\xi| \leq 1, k \in \mathbb{R}^n. \tag{8.2.13}$$

Esto implica que basta demostrar (8.2.10) para $|\xi| \geq 1$.

(8.2.8) implica que

$$|\partial_x^{\beta_l} a'(x,k)| \leq C_l(1+|x|)^{-n-1}(1+|k|)^m \tag{8.2.14}$$

para $\beta_l = (0,...,N_l,...,0)$, $l = 1,..,n$. Aplicando la transformada de Fourier a $\partial_x^{\beta_l} a'(x,k)$ con respecto de x, usando (3.4.13) y el hecho que la función $(1+|x|)^{-n-1}$ es integrable obtenemos

$$|\xi_l^N||\widehat{a'}(\xi,k)| \leq C_l(1+|k|)^m, \ \ l = 1,...,n$$

sumando estas desigualdades con respecto de l, obtenemos

$$(|\xi_1|^N + ... + |\xi_n|^N)|\hat{a}(\xi,k)| \leq C(1+|k|)^m, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n_\xi. \tag{8.2.15}$$

Basta demostrar que para $N > 0$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$C_1(1+|\xi|)^N \leq |\xi_1|^N + ... + |\xi_n|^N, \ \ |\xi| \geq 1. \tag{8.2.16}$$

Representemos $\xi = r\eta$ donde $\eta \in \mathbb{R}^n$ con $|\eta| = 1$ y $r \geq 1$. (8.2.16) es equivalente a demostrar que para $N > 0$ existe $C_1(N) > 0$ tal que

$$C_1(N)(1+r)^N \leq r^N(|\eta_1|^N + \cdots + |\eta_n|^N). \tag{8.2.17}$$

Dado que $|\eta| = 1$ existe l tal que $\frac{1}{2n} \leq |\eta_l|^2$. Entonces

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)^N \leq |\eta_l|^N \leq |\eta_1|^N + \cdots |\eta_n|^N \tag{8.2.18}$$

Obviamente $\frac{1}{2}(1+r) \leq r$ con $r \geq 1$. Multiplicando por $\frac{1}{2^N}(1+r)^N \leq r^N$ a (8.2.18) obtenemos

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2n}}\right)^N (1+r)^N \leq r^N(|\eta_1|^N + \cdots + |\eta_n|^N).$$

Esto implica que (8.2.17) se cumple para $C_1(N) = \frac{1}{(2\sqrt{2n})^N}$. Por tanto se cumple (8.2.16) para $|\xi| \geq 1$. Lema queda demostrado. ■

Observación 8.2.4 *Obviamente si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ con $m_1 \leq m_2$, entonces la clase de símbolos S^{m_1} pertenecen a la clase de símbolos S^{m_2}.*

Lema 8.2.5 *Sean $m \in \mathbb{R}$ y $a(x,k)$ símbolo de clase S^m. Entonces $\partial_x^\alpha a(x,k)$ es de clase S^m y $\partial_k^\alpha a(x,k)$ es de clase $S^{m-|\alpha|}$, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$.*

Demostración: Si $\alpha = 0$, $\partial_x^\alpha a(x,k), \partial_k^\alpha a(x,k) \in S^m$ por hipótesis. Supongamos que $\alpha \neq 0$.

I) Demostraremos que $\partial_x^\alpha a(x,k)$ es de clase S^m. Usando Definición 8.2.1 existen $a^0(k)$ y $a'(x,k)$ con las propiedades (8.2.7) y (8.2.8) tal que $a(x,k) = a^0(k) + a'(x,k)$ por hipótesis. Esto implica que $\partial_x^\alpha a(x,k) = 0 + \partial_x^\alpha a'(x,k)$ ya que $\alpha \neq 0$. Luego, basta demostrar que $\partial_x^\alpha a'(x,k)$ satisface (8.2.8).

Dado que $a'(x,k)$ satisface (8.2.8) para toda $\alpha \in \mathbb{N}^n$ obtenemos para $\beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$ y $N > 0$

$$|(1+|x|)^N \partial_k^\gamma \partial_x^\beta [\partial_x^\alpha a'(x,k)]| = (1+|x|)^N |\partial_k^\gamma \partial_x^{\beta+\alpha} a'(x,k)| \leq C(\gamma, \beta+\alpha, N)(1+|k|)^{m-|\gamma|}, \ \ x,k \in \mathbb{R}^n$$

para alguna constante $C(\gamma, \beta+\alpha, N) > 0$. Por tanto, $\partial_x^\alpha a(x,k) \in S^m$ por Definición 8.2.1.

II) Demostraremos que $\partial_k^\alpha a(x,k)$ es de clase $S^{m-|\alpha|}$. Usando Definición 8.2.1 existen $a^0(k)$ y $a'(x,k)$ con las propiedades (8.2.7) y (8.2.8) tal que $a(x,k) = a^0(k) + a'(x,k)$ por hipótesis. Esto implica que $\partial_k^\alpha a(x,k) = \partial_k^\alpha a^0(k) + \partial_k^\alpha a'(x,k)$. Basta demostrar que para $\gamma, \beta \in \mathbb{N}^n$ y $N > 0$ existen $C_1, C_2 > 0$ tal que $|\partial_k^\gamma [\partial_k^\alpha a^0(k)]| \leq C_1(1+|k|)^{m-|\alpha|-|\gamma|}$ y $(1+|x|)^N |\partial_k^\gamma \partial_x^\beta [\partial_k^\alpha a'(x,k)]| \leq C_2(1+|k|)^{m-|\alpha|-|\gamma|}, x,k \in \mathbb{R}^n$. Usando el hecho que $a^0(k)$ satisface (8.2.7) para toda $\alpha \in \mathbb{N}^n$ obtenemos para $\gamma, \beta \in \mathbb{N}^n, N > 0$

$$|\partial_k^\gamma [\partial_k^\alpha a^0(k)]| = |\partial_k^{\gamma+\alpha} a^0(k)| \leq C(\alpha+\gamma)(1+|k|)^{m-|\alpha+\gamma|} = C(\alpha+\gamma)(1+|k|)^{m-|\alpha|-|\gamma|}, \ \ k \in \mathbb{R}^n.$$

Dado que $a'(x,k)$ satisface (8.2.8) para toda $\alpha \in \mathbb{N}^n$ obtenemos para $\partial_k^\alpha a'(x,k)$

$$|(1+|x|)^N \partial_k^\gamma \partial_x^\beta [\partial_k^\alpha a'(x,k)]| = (1+|x|)^N |\partial_k^{\gamma+\alpha} \partial_x^\beta a'(x,k)| \leq C(\gamma+\alpha, \beta, N)(1+|k|)^{m-|\alpha|-|\gamma|}, \ \ x,k \in \mathbb{R}^n$$

para algunas constantes $C(\alpha+\gamma), C(\alpha+\gamma, \beta, N) > 0$. Por tanto, $\partial_k^\alpha a(x,k)$ es de clase $S^{m-|\alpha|}$. Lema queda demostrado. ■

Ejemplo 8.2.6 *Demostrar que $w(k) = (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}} \in S^m$ $(\mathbb{R}^n)$ para todo $m \in \mathbb{R}$.*

Demostración: Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Escogemos a $a^0(k) = (1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}$ y $a'(x,k) = 0$. Para $a'(x,k)$ las cotas (8.2.8) son evidentes. Por Corolario 4.2.3 existe $C(\alpha) > 0$ tal que $|\partial_k^\alpha a^0(k)| = |\partial_k^\alpha [(1+|k|^2)^{\frac{m}{2}}]| \leq C(\alpha)(1+|k|)^{m-|\alpha|}$. Esto implica que (8.2.7) se cumple. Afirmación del ejemplo queda demostrado. ■

Lema 8.2.7 *$a_1(x,k)a_2(x,k) \in S^{m_1+m_2}$ si $a_1(x,k) \in S^{m_1}$ y $a_2(x,k) \in S^{m_2}$.*

Demostración: Sean $a_1(x,k) \in S^{m_1}$, $a_2(x,k) \in S^{m_2}$ con $a_1(x,k) = a_1^0(k) + a_1'(x,k)$, $a_2(x,k) = a_2^0(k) + a_2'(x,k)$ donde $a_1^0(k), a_2^0(k)$ y $a_1'(x,k), a_2'(x,k)$ satisfacen (8.2.7) y (8.2.8) respectivamente. Definamos $a^0(k) = a_1^0(k)a_2^0(k)$ y $a'(x,k) = a_1^0(k)a_2'(x,k) + a_2^0(k)a_1'(x,k) + a_1'(x,k)a_2'(x,k)$.

Sean $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{N}^n$. Dado que $|\alpha| \leq |\alpha - \alpha'| + |\alpha'|$ por desigualdad del triángulo y como $a_1^0(k)$ y $a_2^0(k)$ satisfacen (8.2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} |\partial_k^{\alpha'} a_1^0(k)||\partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2^0(k)| \leq C(\alpha')C_1(\alpha')(1+|k|)^{m_1-|\alpha'|}(1+|k|)^{m_2-|\alpha-\alpha'|} &= \\ C_2(\alpha')(1+|k|)^{m_1+m_2-(|\alpha|+|\alpha-\alpha'|)} &\leq \\ C_2(\alpha')(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}, \ \ k \in \mathbb{R}^n. & \end{aligned} \tag{8.2.19}$$

Usando la regla de derivación de Leibniz para $a^0(k)$ y (8.2.19) obtenemos

$$\begin{aligned} |\partial_k^\alpha a^0(k)| \leq \sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|} C_{\alpha'}^\alpha |\partial_k^{\alpha'} a_1^0(k)||\partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2^0(k)| &\leq \\ (1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|} \sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|} C_2(\alpha')C_{\alpha'}^\alpha \leq C_3(\alpha)(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}, \ \ k \in \mathbb{R}^n. & \end{aligned}$$

Esto implica que $a^0(k)$ satisface la cota (8.2.7).

Es suficiente con demostrar (8.2.8) para cada sumando $a_1^0 a_2'$, $a_1' a_2^0$ y $a_1' a_2'$. Primeramente demostraremos la cota (8.2.8) para $a_1^0(k)a_2'(x,k)$. Usando (8.2.7) para a_1^0 y (8.2.8) para a_2' obtenemos

$$\begin{aligned} (1+|x|)^N |\partial_x^{\beta'} \partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)||\partial_k^{\alpha'} a_1^0(k)| &\leq \\ C_2(\alpha', \beta', N)(1+|k|)^{m_2-|\alpha-\alpha'|}(1+|k|)^{m_1-|\alpha'|} &= \\ C_2(\alpha', \beta', N)(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}, \ \ x, k \in \mathbb{R}^n & \end{aligned} \tag{8.2.20}$$

Usando la regla de derivación de Leibniz para k, derivando respecto a x y (8.2.20) obtenemos

$$\begin{aligned} (1+|x|)^N \left|\partial_x^\beta \partial_k^\alpha a_1^0(k) a_2'(x,k)\right| = (1+|x|)^N \left|\partial_x^\beta \sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|} C_{\alpha'}^\alpha \partial_k^{\alpha'} a_1^0(k) \partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)\right| &\leq \\ \sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|} C_{\alpha'}^\alpha |\partial_k^{\alpha'} a_1^0(k)| \left[(1+|x|)^N |\partial_x^\beta \partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)|\right] &\leq \\ (1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|} \sum_{|\alpha'|\leq|\alpha|} C_2(\alpha', \beta', \beta, N) C_{\alpha'}^\alpha &\leq \\ C_3(\alpha, \beta, N)(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}, \ \ x, k \in \mathbb{R}^n. & \end{aligned} \tag{8.2.21}$$

Similarmente para $a_1'(x,k)a_2^0(k)$ se tiene

$$(1+|x|)^N \left|\partial_x^\beta \partial_k^\alpha a_2^0(k) a_1'(x,k)\right| \leq C_4(\alpha, \beta, N)(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}, \ \ x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{8.2.22}$$

Finalmente consideremos $a_1'(x,k)a_2'(x,k)$. Usando (8.2.8) para a_1' y a_2' obtenemos

$$\begin{aligned} (1+|x|)^N |\partial_x^{\beta'} \partial_k^{\alpha'} a_1'(x,k)||\partial_x^{\beta-\beta'} \partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)| &\leq \\ (1+|x|)^N |\partial_x^{\beta'} \partial_k^{\alpha'} a_1'(x,k)|(1+|x|)^N |\partial_x^{\beta-\beta'} \partial_k^{\alpha-\alpha} a_2'(x,k)| &\leq \\ C_5(\alpha', \beta', N)(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}, \ \ x, k \in \mathbb{R}^n. & \end{aligned} \tag{8.2.23}$$

Usando la regla de derivación de Leibniz para k, regla de derivación de Leibniz para x y (8.2.23) obtenemos

$$(1+|x|)^N \left|\partial_x^\beta \partial_k^\alpha a_1'(x,k)a_2'(x,k)\right| = (1+|x|)^N \left|\partial_x^\beta \sum_{|\alpha'|\le|\alpha|} C_{\alpha'}^{\alpha} \partial^{\alpha'} a_1'(x,k)\partial^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)\right| \le$$

$$(1+|x|)^{2N} \sum_{\substack{|\alpha'|\le|\alpha| \\ |\beta'|\le|\beta|}} C_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} |\partial_x^{\beta'}\partial_k^{\alpha'} a_1'(x,k)||\partial_x^{\beta-\beta'}\partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)| \le$$

$$\sum_{\substack{|\alpha'|\le|\alpha| \\ |\beta'|\le|\beta|}} C_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} (1+|x|)^N|\partial_x^{\beta'}\partial_k^{\alpha'} a_1'(x,k)|(1+|x|)^N|\partial_x^{\beta-\beta'}\partial_k^{\alpha-\alpha'} a_2'(x,k)| \le$$

$$(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|} \sum_{\substack{|\alpha'|\le|\alpha| \\ |\beta'|\le|\beta|}} C_{\beta'}^{\beta} C_{\alpha'}^{\alpha} C_5(\alpha',\beta',N) = C_6(\alpha,\beta,N)(1+|k|)^{m_1+m_2-|\alpha|}. \quad (8.2.24)$$

Esto implica que $a_1'(x,k)a_2'(x,k)$ satisface (8.2.8). Por tanto, $a'(x,k)$ satisface (8.2.8) por (8.2.21), (8.2.22) y (8.2.24). ∎

Lema 8.2.8 *Sea A definido como en (8.1.5) donde el símbolo $a(x,k) \in S^m$. Entonces el operador A esta definido sobre las funciones de prueba $u(x)$ de clase $\mathcal{S}$ ($\mathbb{R}^n$).*

Demostración: Sea $u \in \mathcal{S}$. Por demostrar que para $\beta \in \mathbb{N}^n$ y $N > 0$

$$(1+|x|)^N|\partial_x^\beta Au(x)| < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.2.25)$$

Dado que $a(x,k) = a^0(k) + a'(x,k)$ tenemos que

$$Au(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a(x,k)\hat{u}(k)\,dk =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a^0(k)\hat{u}(k)\,dk + \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a'(x,k)\hat{u}(k)\,dk = A^0u(x) + A'u(x) \quad (8.2.26)$$

Basta demostrar que A^0u y $A'u \in \mathcal{S}$.

1) Sean $\hat{u}(k) \in \mathcal{S}$ y $a^0(k)$ satisface (8.2.7) entonces $a^0(k)\hat{u}(k) \in \mathcal{S}$ por Lema 1.6.2 inciso *1.* Esto implica que $A^0u = F^{-1}[a^0(k)\hat{u}(k)] \in \mathcal{S}$ por (2.1.18) y (3.3.8). Por tanto $A^0u \in \mathcal{S}$.

II) Dado que $\hat{u} \in \mathcal{S}$ entonces $|\hat{u}(k)| \le C_{0,m}(1+|k|)^{-m}$ para alguna $C_{0,m} > 0$ y usando (8.2.8) con $\alpha = \beta = 0$ y $N > n$ para $a(x,k)$ se tiene

$$|\hat{u}(k)a(x,k)| \le C_{0,m}C(0,0,N)(1+|x|)^{-N}, \quad x,k \in \mathbb{R}^n. \quad (8.2.27)$$

Además, ya que

$$\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-N}\,dx \le \int_0^\infty \frac{r^{n-1}\,dr}{(1+r)^N} \le \int_0^\infty (1+r)^{-N+n-1}\,dr \quad (8.2.28)$$

la integral converge si $-N+n-1 \leq -2$, es equivalente a $N \geq n+1$.

Por tanto, el integrando de $A'u$ converge con respecto de x para $N > n$.

III) Usando la regla de derivación de Leibniz, (8.2.8) para $a(x,k)$ con $\alpha = 0$ y $\hat{u} \in \mathcal{S}$ obtenemos para $A'u$.

$$(1+|x|)^N |\partial_x^\beta A'u(x)| \leq \frac{(1+|x|)^N}{(2\pi)^n} \int \left[\sum_{|\beta'| \leq |\beta|} C_{\beta'}^{\beta} |(-ik)|^{\beta'} |\partial_x^{\beta-\beta'} a'(x,k)| \right] |\hat{u}(k)| \, dk \quad \leq$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int \left[\sum_{|\beta'| \leq |\beta|} C_{\beta'}^{\beta} (1+|k|)^{|\beta'|} C(0,\beta',N)(1+|k|)^m \right] |\hat{u}(k)| \, dk \quad \leq$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int |\hat{u}(k)|(1+|k|)^{m+|\beta|} \sum_{|\beta'| \leq \|beta|} C_{\beta'}^{\beta} C(0,\beta',N) \, dk. \quad (8.2.29)$$

Dado que $\hat{u} \in \mathcal{S}$ entonces $|\hat{u}(k)| \leq \|\hat{u}\|_{0,m+|\beta|+N}(1+|k|)^{-m-|\beta|-N}$, esto implica

$$(1+|x|)^N |\partial_x^\beta A'u| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} C_1(0,\beta,N) \|\hat{u}\|_{0,m+|\beta|+N} \int \frac{dk}{(1+|k|)^N}. \quad (8.2.30)$$

Para $N > n$, se tiene $(1+|x|)^N |\partial_k^\beta A'u(x)| \leq C$, $x \in \mathbb{R}^n$. Esto demuestra el Lema. ■

Definición 8.2.9 *Sea $m \in \mathbb{R}$. Sea A definido en (8.1.5). Decimos que es A un* **Operador Pseudodiferencial** *de clase $\mathcal{A}^m$ si $a(x,k) \in S^m$.*

Capítulo 9

Acotación de Operadores Pseudodiferenciales

9.1. Prueba de Schur

Teorema 9.1.1 *Sean* $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ *espacios de Banach. Sea* $S \subset E$ *denso en* E *y* $T : S \to F$ *lineal y continua. Entonces existe* $\tilde{T}$: $E \to F$ *tal que* $\tilde{T}$ *lineal, continua y* $\tilde{T}|_S = T$.

Demostración: Para $x \in E$ existe $x_n \in S$ tal que $x_n \to x$. Definamos $\tilde{\mathrm{T}}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$.

I) Demostraremos que el límite existe. Sea $\varepsilon > 0$ existe N$\in \mathbb{N}$ tal que $\|Tx_n - Tx_m\|_F = \|T(x_n - x_m)\|_F \leq \|T\|\|x_n - x_m\|_E < \varepsilon$ si $n, m \geq$ N, ya que x_n es de Cauchy y T es lineal y continua. Esto implica que Tx_n es de Cauchy y en virtud de completitud de F existe $y \in F$ tal que $Tx_n \to y$. Es claro que $\tilde{\mathrm{T}}x = y$.

II) Sean $x_n \to x$ y $x'_n \to x'$. Si $Tx_n \to y$ y $Tx'_n \to y'$ entonces $y = y'$. Para $\varepsilon/2 > 0$ existe N$\in \mathbb{N}$ tal que $\|Tx_n - y\|_F < \varepsilon/2$ y $\|Tx'_n - y'\|_F < \varepsilon/2$ si $n \geq$ N por hipótesis, de modo que, $\|Tx_n - Tx'_n\|_F \leq \|Tx_n - \tilde{\mathrm{T}}\ x\|_F + \|\tilde{\mathrm{T}}\ x - Tx'_n\|_F < \varepsilon$. Esto implica que, $Tx_n - Tx'_n \to 0$. Por tanto, $y - y' = 0$.

III) La Linealidad de $\tilde{\mathrm{T}}$ es obvia.

IV) Sea $x_n \to 0$ en E. Para $n \in \mathbb{N}$ existe $x_k^{(n)} \in S$ tal que $x_k^{(n)} \to x_n$, por densidad de S. Esto implica, para $n \in \mathbb{N}$ existe $K'_n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_k^{(n)} - x_n\|_E < \frac{1}{n}$, si $k \geq K'_n$. Además, existe $K''_n \in \mathbb{N}$ tal que $\|\tilde{\mathrm{T}}x_n - Tx_k^{(n)}\|_F < \frac{1}{n}$, si $k \geq K''_n$, por definición de $\tilde{\mathrm{T}}$. Considerando $K_n = \max\{K'_n, K''_n\}$, se cumple para $k \geq K_n : \|x_k^{(n)}\|_E \leq \|x_k^{(n)} - x_n\|_E + \|x_n\|_E < \frac{1}{n} + \|x_n\|_E \to 0$ si $n \to \infty$. Entonces $Tx_k^{(n)} \to 0$ si $n \to \infty$. Esto implica $\|\tilde{\mathrm{T}}x_n\|_F \leq \|\tilde{\mathrm{T}}x_n - Tx_k^{(n)}\|_F + \|Tx_k^{(n)}\|_F < \frac{1}{n} + \|Tx_k^{(n)}\|_F \to 0$, si $n \to \infty$. Por tanto, $\tilde{\mathrm{T}}x_n \to 0$ si $n \to \infty$.

V) Finalmente $\tilde{\mathrm{T}}|_S = T$. Para $x \in S$ consideremos $x_n = x$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ entonces $\tilde{\mathrm{T}}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. ■

Discutiremos la acotacion de los operadores pseudodiferenciales en los espacios Sobolev.

Definición 9.1.2 *Definamos el operador integral T definido para $v(k) \in \mathcal{S}\ (\mathbb{R}^n)$ como*

$$Tv(k) = \int_{\mathbb{R}^n} T(k,k')v(k')\,dk', \quad k \in \mathbb{R}^n. \tag{9.1.1}$$

donde $T(k,k')$ es el núcleo integral.

Lema 9.1.3 *Sea el núcleo integral $T(k,k')$ satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(k,k')|\ dk' \leq C < \infty, \quad k \in \mathbb{R}^n \tag{9.1.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(k,k')|\ dk \leq C < \infty, \quad k' \in \mathbb{R}^n \tag{9.1.3}$$

para alguna $C > 0$. Entonces $Tv(k) \in \mathcal{L}^2$ si $v \in \mathcal{S}$ y

$$\|Tv\|_{\mathcal{L}^2} \leq C\|v\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{9.1.4}$$

Demostración: Haciendo $|T(k,k')v(k')| = |T(k,k')|^{\frac{1}{2}}|T(k,k')|^{\frac{1}{2}}|v(k')|$, usando desigualdad de Cauchy y (9.1.2) obtenemos

$$\begin{aligned} |Tv(k)|^2 \leq \left(\int |T(k,k')v(k')|\ dk'\right)^2 &= \left(\int |T(k,k')|^{\frac{1}{2}}|T(k,k')|^{\frac{1}{2}}|v(k')|\ dk'\right)^2 \\ \leq \left(\int |T(k,k')|\ dk'\right)\left(\int |T(k,k')||v(k')|^2\ dk'\right) &\leq C\int |T(k,k')||v(k')|^2\ dk'. \end{aligned} \tag{9.1.5}$$

Integrando (9.1.5) con respecto a k y utilizando teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int |Tv(k)|^2\ dk &\leq C\int\left(\int |T(k,k')||v(k')|^2\ dk'\right)\ dk = \\ &\leq C\int\left(\int |T(k,k')|\ dk\right)|v(k')|^2\ dk'. \end{aligned} \tag{9.1.6}$$

Usando (9.1.3) obtenemos

$$\int |Tv(k)|^2\ dk \leq C^2\int |v(k')|^2\ dk' \tag{9.1.7}$$

esto implica (9.1.4). Lema queda demostrado. ■

Corolario 9.1.4 *[Prueba de Schur] Con las condiciones (9.1.2) y (9.1.3), el operador integral T admite extensión única $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}^2$ como operador acotado $T : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$.*

Demostración: Se sigue de (9.1.4) y Teorema 9.1.1 ya que $\mathcal{S}$ es denso en $\mathcal{L}^2$. ■

9.2. Aplicación al Operador Multiplicación

Lema 9.2.1 *[Desigualdad de Peetre] Para cualquier $s \in \mathbb{R}$ existe $C(s) > 0$ tal que*

$$\frac{(1+|k|)^s}{(1+|k'|)^s} \leq C(s)(1+|k-k'|)^{|s|}, \quad k, k' \in \mathbb{R}^n. \tag{9.2.8}$$

Demostración: I) Sea $s > 0$. Usando desigualdad triangular se cumple $1+|k| \leq 1+|k'|+|k-k'| \leq 1+|k'|+|k-k'|+|k'||k-k'| = (1+|k'|)(1+|k-k'|)$ esto implica que $(1+|k|)^s \leq (1+|k-k'|)^s(1+|k'|)^s$. Por tanto (9.2.8) para $s > 0$.

Para $s < 0$. Basta demostrar que $(1+|k'|)^{-s} \leq (1+|k'-k|)^{-s}(1+|k|)^s$. En efecto, usando desigualdad triangular se cumple $1+|k'| \leq 1+|k'-k|+|k| \leq 1+|k'-k|+|k|+|k||k'-k| = (1+|k'-k|)(1+|k|)$ esto implica que $(1+|k'|)^{-s} \leq (1+|k'-k|)^{-s}(1+|k|)^{-s}$. Por tanto (9.2.8) para $s < 0$. ■

Consideremos el operador multiplicación $M : v(x) \to a(x)v(x)$ por una función prueba $a(x) \in \mathcal{S}$.

Lema 9.2.2 *Sea $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $M : H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ es continuo para $s \geq 0$.*

Demostración: Por el Teorema 4.2.5 de densidad de $\mathcal{S}$ en H^s es suficiente demostrar la cota

$$\|a(x)u(x)\|_s \leq C(s)\|u(x)\|_s, \quad u \in \mathcal{S}. \tag{9.2.9}$$

Por Definición 4.1.1

$$\|a(x)u(x)\|_s^2 = \|(1+|k|)^s F[au](k)\|_{\mathcal{L}^2}^2. \tag{9.2.10}$$

Usando la transformada de Fourier para $a(x)u(x)$, la transformada Inversa de Fourier y Teorema de Fubini obtenemos

$$F[au](k) = \int e^{ikx}a(x)u(x)\,dx = \int e^{ikx}a(x)\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ik'x}\hat{u}(k')\,dk'\right)dx =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int\left(\int e^{i(k-k')x}a(x)\,dx\right)\hat{u}(k')\,dk' = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \hat{a}(k-k')\hat{u}(k')\,dk'. \tag{9.2.11}$$

Esto implica que (9.2.10) es de la forma

$$\|a(x)u(x)\|_s^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|(1+|k|)^s \int \hat{a}(k-k')\hat{u}(k')\,dk'\|_{\mathcal{L}^2}^2. \tag{9.2.12}$$

Así, la cota (9.2.9) puede ser escrita en la forma

$$\|(1+|k|)^s \int \hat{a}(k-k')\hat{u}(k')\,dk'\|_{\mathcal{L}^2} \leq C(s)\|(1+|k'|)^2\hat{u}(k')\|_{\mathcal{L}^2} \tag{9.2.13}$$

denotando $v(k') := (1+|k'|)^s\hat{u}(k')$, reescribimos (9.2.13) como

$$\|(1+|k|)^s \int \hat{a}(k-k')\frac{v(k')}{(1+|k'|)^s}\,dk'\|_{\mathcal{L}^2} \leq C(s)\|\hat{v}(k')\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{9.2.14}$$

Esta cota es equivalente para acotación en $\mathcal{L}^2$ del operador integral con nucleo integral

$$S(k,k') = (1+|k|)^s \frac{\hat{a}(k-k')}{(1+|k'|)^s} = \hat{a}(k-k')\frac{(1+|k|)^s}{(1+|k'|)^s}. \tag{9.2.15}$$

Basta demostrar las acotaciones (9.1.2) y (9.1.3) para (9.2.15). Ya que $\hat{a} \in \mathcal{S}$ existe $C_N > 0$ tal que $|\hat{a}(k-k')| \leq C(N)(1+|k-k'|)^{-N}$ para cualquier $N > 0$. Usando la desigualdad de Peetre (9.2.8) obtenemos de (9.2.15)

$$|S(k,k')| \leq C(s)C_N(1+|k-k'|)^{|s|-N}. \tag{9.2.16}$$

Considerando $|s| - N < -n$ se obtiene (9.1.2) y (9.1.3) para $T(k,k') = S(k,k')$. Usando la Prueba de Schur (Corolario 9.1.4) obtenemos la acotación del operador integral con el núcleo $S(k,k')$. Esto prueba el Lema. ■

9.3. Acotación de Operadores Pseudodiferenciales

Teorema 9.3.1 *Sean $m \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}^m$ definido en (8.1.5). Entonces $Au \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y para $s \in \mathbb{R}$ existe $C(s) > 0$ tal que*

$$\|Au\|_{s-m} \leq C(s)\|u\|_s. \tag{9.3.17}$$

Demostración: I) Usando Definición 8.2.1, reescribimos a Au como

$$\begin{aligned} Au(x) = A^0u(x) \quad &+ \quad A'u(x,k) = \\ \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a^0(k)\hat{u}(k)\,dk \quad &+ \quad \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a'(x,k)\hat{u}(k)\,dk, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{9.3.18}$$

Es suficiente con demostrarla cota (9.3.17) para cada término.

II) Por Definición de A^0u se tiene que $F[A^0u](k) = F[F^{-1}[a^0\hat{u}]](k) = a^0(k)\hat{u}(k)$. Además, dado que $a^0(k)$ satisface (8.2.7) se tiene que $|a^0(k)| \leq C(0)(1+|k|)^m$ con $\alpha = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned} \|A^0u\|_{s-m} = \|(1+|k|)^{s-m}F[A^0u](k)\|_{\mathcal{L}^2} = \|(1+|k|)^{s-m}a^0\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2} \quad &\leq \\ C(0)\|(1+|k|)^s\hat{u}\|_{\mathcal{L}^2} = C(0)\|u\|_s. & \end{aligned} \tag{9.3.19}$$

II) Demostremos que $A'u \in \mathcal{L}^1$. En efecto, usando (8.2.8) con $\beta = \alpha = 0$ tenemos $|a'(x,k)| \leq C(N)(1+|x|)^{-N}(1+|k|)^m$ para $N > 0$. Además ya que $\hat{u} \in \mathcal{S}$ entonces $|\hat{u}(k)| \leq C(M)(1+|k|)^{-M}$ para $M > 0$ y

$$|a'(x,k)\hat{u}(k)| \leq C(M)C(N)(1+|x|)^{-N}(1+|k|)^{m-M}. \tag{9.3.20}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned} |A'u| = \left|\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a'(x,k)\hat{u}(k)\,dk\right| \quad &\leq \\ \frac{1}{(2\pi)^n}C(N)C(M)(1+|x|)^{-N}\int(1+|k|)^{m-M}\,dk \leq C_1(N,M)(1+|x|)^{-N} & \end{aligned} \tag{9.3.21}$$

tomando M suficientemente grande tal que $m - M < -n$. Por tanto, (9.3.21) implica que $A'u \in \mathcal{L}^1$ para $N > n$. Aplicando Lema 3.3.2 y Teorema de Fubini se obtiene

$$
\begin{aligned}
F[A'u](k) = \int e^{ikx} A'u(x)\, dx &= \int e^{ikx} \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ik'x} a'(x,k')\hat{u}(k')\, dk' \right) dx \\
= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left(\int e^{i(k-k')x} a'(x,k')\, dx \right) \hat{u}(k')\, dk' &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int a'(k-k',k')\hat{u}(k')\, dk'. \qquad (9.3.22)
\end{aligned}
$$

III) Usando la Definición de norma de Sobolev para $A'u$ y (9.3.22) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\|A'u\|_{s-m} = \|(1+|k|)^{s-m} F[A'u](k)\|_{\mathcal{L}^2} &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| (1+|k|)^{s-m} \int a'(k-k',k')\hat{u}(k')dk' \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| \int \frac{(1+|k|)^{s-m}}{(1+|k'|)^s} \hat{a}'(k-k',k')(1+|k'|)^s \hat{u}(k')\, dk' \right\|_{\mathcal{L}^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| \int S(k,k') v(k')\, dk' \right\|_{\mathcal{L}^2} \qquad (9.3.23)
\end{aligned}
$$

donde $S(k,k') = \frac{(1+|k|)^{s-m}}{(1+|k'|)^s} \hat{a}'(k-k',k')$ y $v(k') = (1+|k'|)^s \hat{u}(k')$.

IV) Demostraremos que $S(k,k')$ satisface las cotas (9.1.2) y (9.1.3). En efecto, ya que $\hat{a}'(k-k',k')$ satisface (8.2.8) se tiene que

$$
|\hat{a}'(k-k',k')| \le C(N)(1+|k-k'|)^{-N}(1+|k'|)^{-m}, \quad N > 0. \qquad (9.3.24)
$$

Usando las desigualdades (9.3.24) y de Peetre con $s-m$ en vez de s para $S(k,k')$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
|S(k,k')| &= \left| \frac{(1+|k|)^{s-m}}{(1+|k'|)^s} \hat{a}'(k-k',k') \right| \\
&\le C(N) \frac{(1+|k|)^{s-m}}{(1+|k'|)^s} (1+|k-k'|)^{-N}(1+|k'|)^m \\
&= C(N) \frac{(1+|k|)^{s-m}}{(1+|k'|)^{s-m}} (1+|k-k'|)^N \\
&\le C(N)(1+|k-k'|)^{-N+|s-m|} \qquad (9.3.25)
\end{aligned}
$$

Esto implica que

$$
\int |S(k,k')|\, dk \le C(N) \int (1+|k-k'|)^{-N+|s-m|} dk < C_1(N), \quad \text{si} \quad -N+|s-m| < -n \quad (9.3.26)
$$

y

$$
\int |S(k,k')|\, dk' \le C(N) \int (1+|k-k'|)^{-N+|s-m|} dk' < C_1(N), \quad \text{si} \quad -N+|s-m| < -n. \quad (9.3.27)
$$

V) Finalmente, usando Lema (9.1.3) en (9.3.23) y que $v(k') = (1+|k'|)^s \hat{u}(k')$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|A'u(x)\|_{s-m} = \frac{1}{(2\pi)^n} \left\| \int S(k,k')v(k')dk' \right\|_{\mathcal{L}^2} &\leq C_3(N)\|v(k)\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= C_3(N)\|(1+|k'|)^s \hat{u}(k')\|_{\mathcal{L}^2} \\ &= C_3\|u\|_s. \end{aligned} \tag{9.3.28}$$

Esto implica que $A'u$ cumple la cota (9.3.17). Lema queda demostrado. ■

Corolario 9.3.2 *Sean $m, s \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}^m$ definido en (8.1.5) para $u \in \mathcal{S}$. Entonces, para cualquier $s \in \mathbb{R}$, el operador A se extiende a un operador $H^s \to H^{s-m}$ y es continuo.*

Demostración: Esto se sigue del hecho que $S \subset H^s$ es denso en H^s (Teorema 4.2.5) y (9.3.17). ■

Capítulo 10

Composición de Operadores Pseudodiferenciales.

Lema 10.0.3 *Sean* $k, k' \in \mathbb{R}^n,\ m \in \mathbb{R},\ N > 0$. *Entonces para* $M > 0$ *suficientemente grande existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}(1+|k'+t(k-k')|)^{m-N} dt \right] (1+|k-k'|)^{N-M} dk \leq C(1+|k'|)^{m-N}. \quad (10.0.1)$$

Demostración: Separando la región de integración de la manera siguiente

1. $|k-k'| < |k'|/2$
2. $|k-k'| > |k'|/2$.

Para 1., tenemos que existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1(1+|k'|)^{m-N} \leq (1+|k'+t(k-k')|)^{m-N} \leq C_2(1+|k'|)^{m-N} \quad (10.0.2)$$

ya que para $t \in [0,1]$ $\frac{1}{2}|k'| \leq |k'+t(k-k')| \leq \frac{3}{2}|k'|$. Multiplicando por $(1-t)^{N-1}$ la segunda desigualdad de (10.0.2) e integrando con respecto de t obtenemos

$$\int_0^1 (1-t)^{N-1}(1+|k'+t(k-k')|)^{m-N} dt \leq C_3(1+|k'|)^{m-N}.$$

Multiplicando esta desigualdad por $(1+|k-k'|)^{N-M}$ e integrando con respecto de k en la región 1., obtenemos

$$\int_{|k-k'|<|k'|/2} \left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}(1+|k'+t(k-k')|)^{m-N}\, dt \right] (1+|k-k'|)^{N-M}\, dk \leq$$

$$C_3(1+|k'|)^{m-N} \int_{|k-k'|<|k'|/2} (1+|k-k'|)^{N-M}\, dk \leq C_3(1+|k'|)^{m-N} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|k-k'|)^{N-M}\, dk \leq$$

$$C_4(1+|k'|)^{m-N}.$$

ya que $\int(1+|k-k'|)^{N-M}\,dk \le C$ para $N-M<-n$. Por tanto, se cumple (10.0.1) para 1.

Para 2., dado que $|k'+t(k-k')| \le |k'|+|t||(k-k')| \le 3|k-k'|$ entonces

$$(1+|k'+t(k-k')|)^{m-N} \le C'(1+|k-k'|)^{|m-N|}. \tag{10.0.3}$$

Multiplicando esta desigualdad por $(1-t)^{N-1}$ e integrando con respecto a t obtenemos

$$\int_0^1 (1-t)^{N-1}(1+|k'+t(k-k')|)^{m-N}dt \le C''(1+|k-k'|)^{|m-N|}.$$

Sea M tal que

$$|m-N|+N-M+n<0. \tag{10.0.4}$$

Multiplicando por $(1+|k-k'|)^{N-M}$ e integrando con respecto a k en la región 2., obtenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|k-k'|>|k'|/2}\left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}(1+|k'+t(k-k')|)^{m-N}\,dt\right](1+|k-k'|)^{N-M}\,dk \le \\
&C_2\int_{|k-k'|>|k'|/2}(1+|k-k'|)^{|m-N|+N-M}\,dk = C_3\int_{|k'|/2}^{\infty}(1+r)^{|m-N|+N-M}r^{n-1}\,dr = \\
&\qquad\le C_4(1+r)^{|m-N|+N-M+n}\Big|_{|k'|/2}^{\infty} \\
&\qquad= C_5(1+|k'|/2)^{|m-N|+N-M+n}
\end{aligned}$$

donde la interal converge por (10.0.4). Por tanto, la integral (10.0.1) esta acotada por $C_4(1+|k'|)^{m-N}$ si M satisface que $|m-N|+N-M+n<m-N$. ■

Consideraremos la composición de operadores diferenciales A_1 y A_2 de clase $\mathcal{A}^{m_1}$ y $\mathcal{A}^{m_2}$ respectivamente.

10.1. Teorema de Composición.

Teorema 10.1.1 *Sean $a_1(x,k)$ y $a_2(x,k)$ símbolos de los operadores diferenciales A_1 y A_2 pertenecientes a las clases S^{m_1} y S^{m_2} respectivamente. Entonces, el operador $A=A_1A_2$ pertenece a la clase $\mathcal{A}^{m_1+m_2}$, y el símbolo $a(x,k)$ admite expanción asintótica (generalización de la formula de Leibniz)*

$$a(x,k)=\sum_{|\gamma|\ge 0}\frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma a_1(x,k)\partial_x^\gamma a_2(x,k). \tag{10.1.5}$$

Discutamos el significado de la expansión asintótica (10.1.5): por definición, para cada $N>0$, la expansión finita se cumple

$$a(x,k)=\sum_{|\gamma|\ge 0}^{N-1}\frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma a_1(x,k)\partial_x^\gamma a_2(x,k)+R_N(x,k) \tag{10.1.6}$$

donde el residuo R_N pertenece a la clase $S^{m_1+m_2-N}$.

Consideremos las propiedades de todos los términos en la expansión asintótica. Usando Lema 8.2.5 tenemos que para $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $(i\partial_k)^\alpha a_1(x,k)$ pertenece a la clase $S^{m_1-|\alpha|}$ y $\partial_x^\alpha a_2(x,k)$ pertenece a la clase S^{m_2}. Por tanto,

$$(i\partial_k)^\alpha a_1(x,k)\partial_x^\alpha a_2(x,k) \in S^{m_1+m_2-|\alpha|} \tag{10.1.7}$$

por Lema 8.2.7.

10.2. Composición de Operadores Diferenciales.

Sean A_1 y A_2 operadores diferenciales en dimensión $n = 1$:

$$A_l u(x) = \sum_{\alpha_l \le m_l} a_{l\alpha_l}(x)\partial_x^{\alpha_l} u(x), \quad l = 1, 2. \tag{10.2.8}$$

La composición $A = A_1 A_2$ es:

$$Au(x) := A_1 A_2 u(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 \le m_1 \\ \alpha_2 \le m_2}} a_{1\alpha_1}(x)\partial_x^{\alpha_1}[a_{2\alpha_2}(x)\partial_x^{\alpha_2} u(x)]. \tag{10.2.9}$$

Obviamente A es un operador diferencial. Usando regla de derivación de Leibniz tenemos

$$Au(x) = \sum_{\substack{\alpha_1 \le m_1 \\ \alpha_2 \le m_2}} a_{1\alpha_1}(x) \sum_{\gamma \le \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma \end{pmatrix} \partial_x^\gamma a_{2\alpha_2}(x)\partial_x^{\alpha_2+\alpha_1-\gamma} u(x). \tag{10.2.10}$$

Usando (8.1.6) obtenemos el simbolo de la composición

$$a(x,k) = \sum_{\substack{\alpha_1 \le m_1 \\ \alpha_2 \le m_2}} a_{1\alpha_1}(x) \sum_{\gamma \le \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma \end{pmatrix} \partial_x^\gamma a_{2\alpha_2}(x)(-ik)^{\alpha_2+\alpha_1-\gamma}. \tag{10.2.11}$$

Demostraremos que el simbolo de (10.2.11) es de la forma (10.1.6). Usando $(-ik)^{\alpha-\gamma} = \frac{(\alpha-\gamma)!}{\alpha!}(i\partial_k)^\gamma[(-ik)^\alpha]$, intercambiando el orden de la suma, la suma de las derivadas es la derivada de la suma obtenemos

$$\begin{aligned} a(x,k) \quad &= \sum_{\substack{\alpha_1 \le m_1 \\ \alpha_2 \le m_2}} a_{1\alpha_1}(x) \sum_{\gamma \le \alpha_1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \gamma \end{pmatrix} \partial_x^\gamma a_{2\alpha_2}(x)(-ik)^{\alpha_2+\alpha_1-\gamma} \\ &= \sum_{\gamma \le \alpha_1} \sum_{\alpha_1 \le m_1} \frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma[(-ik)^{\alpha_1}]a_{1\alpha_1}(x) \sum_{\alpha_2 \le m_2} \partial_x^\gamma a_{2\alpha_2}(x)(-ik)^{\alpha_2} \end{aligned}$$

$$= \sum_{\gamma\leq\alpha_1} \frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma \sum_{\alpha_1\leq m_1} (-ik)^{\alpha_1} a_{1\alpha_1}(x)\partial_x^\gamma \sum_{\alpha_2\leq m_2} a_{2\alpha_2}(x)(-ik)^{\alpha_2}$$

$$= \sum_{\gamma\leq\alpha_1}^{m_1} \frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma a_1(x,k)\partial_x^\gamma a_2(x,k). \qquad (10.2.12)$$

con $a_1(x,k) = \sum_{\alpha_1\leq m_1} a_{1\alpha_1}(x)(-ik)^{\alpha_1}$ y $a_2(x,k) = \sum_{\alpha_2\leq m_2} a_{2\alpha_2}(x)(-ik)^{\alpha_2}$. Por tanto, el simbolo de A coincide con (10.1.6) con $N-1 = m_1$, y $R_N = 0$ ya que $(i\partial_k)^\gamma a_1(x,k) = 0$ para $\gamma > m_1$. ■

Ahora demostraremos (10.1.6) para operadores pseudodiferenciales A_1 y A_2.

10.3. Composición de Operadores Pseudodiferenciales.

I) Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Por definición de operador pseudodiferencial (8.1.5) para A_1A_2 tenemos

$$A_1A_2u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{A_2u}(k)\,dk. \qquad (10.3.13)$$

Dado que $a_2(x,k) = a_2^0(k) + a_2'(x,k)$ tenemos que $A_1A_2u = A_1A_2^0u + A_1A_2'u$ donde $A_2^0u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_2^0(k)\hat{u}(k)\,dk$ y

$$A_2'u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_2'(x,k)\hat{u}(k)\,dk. \qquad (10.3.14)$$

Es suficiente con demostrar (10.1.5) para cada término.

II) Consideremos el término $A_1A_2^0$. Dado que $\widehat{A_2^0u}(k) = a_2^0(k)\hat{u}(k)$ obtenemos para $A_1A_2^0u$

$$A_1A_2^0u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_1(x,k)a_2^0(k)\hat{u}(k)\,dk. \qquad (10.3.15)$$

Esto implica que $A_1A_2^0$ es un operador pseudodiferencial con símbolo $a^0(x,k) = a_1(x,k)a_2^0(k)$ por Definición 8.2.9 y (8.1.5). Demostremos que $a^0(x,k)$ tiene la forma (10.1.5). Para $\gamma = 0$, $(i\partial_k)^\gamma a_1(x,k)\partial_x^\gamma a_2^0(k) = a_1(x,k)a_2^0(k)$. Para $|\gamma| > 0$, $\partial_x^\gamma a_2^0(k) = 0$. Por tanto, $a^0(x,k)$ cumple (10.1.6).

III) Nos queda estudiar el término A_1A_2' :

$$A_1A_2'u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{A_2'u}(k)\,dk. \qquad (10.3.16)$$

Calculemos el símbolo de la composición A_1A_2'. Primeramente calculemos la transformada de Fourier de $A_2'u$. Usando la definición de $A_2'u$ en (10.3.14), aplicando la transformada de Fourier a A'_2u, Teorema de Fubini y usando que $a'_2(x,.k')$ decrece rapidamente con respecto a x por (8.2.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{A'_2u}(k) &= \int e^{ikx}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ik'x}a'_2(x,k')\hat{u}(k')\,dk'\right)\,dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\left(\int e^{i(k-k')x}a'_2(x,k')\,dx\right)\hat{u}(k')\,dk' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{a'_2}(k-k',k')\hat{u}(k')\,dk'. \qquad (10.3.17)
\end{aligned}$$

Para $a_1(x,k)$ existe $C>0$ tal que

$$|a_1(x,k)| \leq C(1+|k|)^{m_1} \qquad (10.3.18)$$

por Lema 8.2.2 con $\alpha = 0$. Para $M_2 > 0$ existe $C(M_2) > 0$ tal que

$$|\widehat{a'_2}(k-k',k')| \leq C(M_2)(1+|k-k'|)^{-M_2}(1+|k'|)^{m_2} \qquad (10.3.19)$$

por Lema 8.2.3. Dado que $\hat{u} \in \mathcal{S}$, entonces para $M_3 > 0$ existe $C(M_3) > 0$ tal que $|\hat{u}(k')| \leq C(M_3)(1+|k'|)^{-M_3}$. Usando (10.3.18), (10.3.19) obtenemos

$$|e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{a'_2}(k-k',k')\hat{u}(k')| \leq CC(M_2)C(M_3)(1+|k|)^{m_1}(1+|k-k'|)^{-M_2}(1+|k'|)^{m_2-M_3}.$$

Dado que $(1+|k|)^{m_1} \leq C(m_1)(1+|k-k'|)^{|m_1|}(1+|k'|)^{m_1}$ por Desigualdad de Peetre (9.2.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
|e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{a'}_2(k-k',k')\hat{u}(k')| &\leq C(M_2,M_3)(1+|k'|)^{m_1}(1+|k-k'|)^{|m_1|-M_2}(1+|k'|)^{m_2-M_3} \\
&= C(M_2,M_3)(1+|k-k'|)^{|m_1|-M_2}(1+|k'|)^{m_1+m_2-M_3}
\end{aligned}$$

Esto implica que $e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{a'}_2(k-k',k')\hat{u}(k')$ es sumable con respecto a k y k' si $|m_1| - M_2 < -n$ y $m_1+m_2-M_3 < -n$. Por tanto, usando (10.3.16), (10.3.17) y el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
A_1A'_2u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{A'_2u}(k)\,dk \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_1(x,k)\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int \widehat{a'_2}(k-k',k')\hat{u}(k')\,dk'\right)\,dk \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}a_1(x,k)\widehat{a'_2}(k-k',k')\,dk\right)\hat{u}(k')\,dk' \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ik'x}\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(k-k')x}a_1(x,k)\widehat{a'_2}(k-k',k')\,dk\right)\hat{u}(k')\,dk'.
\end{aligned}$$

Por Definición 8.2.9 tenemos que el símbolo del operador pseudodiferencial $A_1A'_2$ es

$$a'(x,k') = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(k-k')x}a_1(x,k)\widehat{a'_2}(k-k',k')\,dk. \qquad (10.3.20)$$

Demostremos que el símbolo $a'(x,k')$ esta bien definido. Usando (10.3.18) para $a_1(x,k)$, (10.3.19) para $\widehat{a'_2}(k-k',k')$ y desigualdad de Peetre (9.2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} |a_1(x,k)\widehat{a'_2}(k-k',k')| \le CC(M_2)(1+|k|)^{m_1}(1+|k-k'|)^{-M_2}(1+|k'|)^{m_2} &\le \\ C(M_2,m_1)(1+|k-k'|)^{|m_1|}(1+|k'|)^{m_1}(1+|k-k'|)^{-M_2}(1+|k'|)^{m_2} &= \\ C(M_2,m_1)(1+|k-k'|)^{|m_1|-M_2}(1+|k'|)^{m_1+m_2}. \end{aligned}$$

Esto implica que $a_1(x,k')\widehat{a'_2}(k-k',k')$ es sumable con respecto a k siempre que $|m_1|-M_2 < -n$. Por tanto $a'(x,k)$ esta bien definido.

IV) Demostremos que el símbolo $a'(x,k')$ satisface (10.1.5). Dado que $a_1(x,k')$ es un símbolo de clase S^{m_1} entonces $a_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Por esto $a_1(x,k)$ acepta la siguiente representación en series de Taylor con respecto a k y centro en k' :

$$a_1(x,k) = \sum_{|\gamma|=0}^{N-1} \frac{1}{\gamma!}\partial_k^\gamma a_1(x,k')(k-k')^\gamma + r_N(x,k,k') \tag{10.3.21}$$

donde el residuo $r_N(x,k,k')$ es representado en la forma de Cauchy

$$r_N(x,k,k') = \sum_{|\gamma|=N} \frac{1}{\gamma!}\left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}\partial_k^\gamma a_1(x,k'+t(k-k'))\,dt\right](k-k')^\gamma. \tag{10.3.22}$$

Reemplazando (10.3.21) en (10.3.20) obtenemos

$$\begin{aligned} a'(x,k') &= \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{|\gamma|=0}^{N-1} \frac{1}{\gamma!}\partial_k^\gamma a_1(x,k')\int e^{-i(k-k')x}(k-k')^\gamma \widehat{a'}_2(k-k',k')\,dk \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(k-k')x} r_N(x,k,k')\widehat{a'_2}(k-k',k')\,dk. \end{aligned} \tag{10.3.23}$$

Demostremos que el primer sumando en (10.3.23) coincide con la suma finita de (10.1.5). Dado que para $N>0$ existe $C(N)>0$ tal que $|\widehat{a'_2}(k-k',k')| \le C(N)(1+|k-k'|)^{-N}(1+|k'|)^{m_2}$ por Lema 8.2.3 y claramente $|(k-k')^\gamma| \le C|k-k'|^{|\gamma|} \le C(1+|k-k'|)^{|\gamma|}$ obtenemos que

$$|(k-k')^\gamma||\widehat{a'}_2(k-k',k')| \le C'(1+|k-k'|)^{-N+|\gamma|}(1+|k'|)^{m_2}. \tag{10.3.24}$$

Esto implca que $(k-k')^\gamma \widehat{a'}_2(k-k',k') \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n_k)$ si $-N+|\gamma| < -n$. Usando Lema 3.3.2, (3.3.11) y Lema 3.4.1 tenemos

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(k-k')x}(k-k')^\gamma \widehat{a'}_2(k-k',k')\,dk = (i\partial_x)^\gamma F^{-1}[\widehat{a'}_2](x,k') = (i\partial_x)^\gamma a'_2(x,k'). \tag{10.3.25}$$

Esto implica que el primer sumando de (10.3.23) coincide con la expanción finita de (10.1.5).

V) Nos falta demostrar que $R_N(x,k') \in S^{m_1+m_2-N}$ donde

$$R_N(x,k') = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-i(k-k')x} r_N(x,k,k')\widehat{a'}_2(k-k',k')\, dk. \tag{10.3.26}$$

Representemos $R_N(x,k') = R_N^0(k') + R_N'(x,k')$ donde $R_N^0(k') = 0$ y $R_N'(x,k') = R_N(x,k')$. Obviamente $R_N^0(k')$ satisface (8.2.7). Basta demostrar que $R_N'(x,k')$ satisface (8.2.8) para $N_1 \geq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Supongamos que $N_1 = 0$ y $\alpha = \beta = 0$. Claramente $|(k-k')^\gamma| \leq |k-k'|^{|\gamma|} \leq (1+|k-k'|)^{|\gamma|}$. Por Lema 8.2.2, para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ existe $C > 0$ tal que $|\partial_k^\gamma a_1(x,k'+t(k-k')| \leq C(1+|k'+t(k-k')|)^{m_1-|\gamma|}$ así obtendremos para $r_N(x,k,k')$ de (10.3.22)

$$\begin{aligned}|r_N(x,k,k')| &\leq \sum_{|\gamma|=N}\frac{1}{\gamma!}\left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}|\partial_k^\gamma a_1(x,k'+t(k-k'))|\, dt\right]|(k-k')^\gamma| \quad \leq \\ &\leq \sum_{|\gamma|=N}\frac{1}{\gamma!}\left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}C(1+|k'+t(k-k')|^{m_1-|\gamma|}\, dt\right](1+|k-k'|)^{|\gamma|} \\ &= C'\left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}(1+|k'+t(k-k'))^{m_1-N}\, dt\right](1+|k-k'|)^N \end{aligned} \tag{10.3.27}$$

Por Lema 8.2.3, para $M_2 > 0$ existe $C(M_2) > 0$ tal que $|\widehat{a_2'}(k-k',k')| \leq C(M_2)(1+|k-k'|)^{-M_2}(1+|k'|)^{m_2}$. Usando (10.3.27) y Lema 10.0.3 tenemos

$$\begin{aligned}|R_N(x,k')| &\leq C_1\int |r_N(x,k,k')||\widehat{a_2'}(k-k',k')|\, dk \\ &\leq C_1(1+|k'|)^{m_2}\int\left[\int_0^1 (1-t)^{N-1}|1+|k'+t(k-k')|^{m_1-N}dt\right](1+|k-k'|)^{N-M_2}\, dk \\ &\leq C''(1+|k'|)^{m_1+m_2-N}. \end{aligned} \tag{10.3.28}$$

Esto implica que R_N' satisface (8.2.8) para $N_1 = 0$, $\alpha = 0 = \beta$. Para los demás parámetros se demuestra similarmente. Teorema demostrado. ■

Capítulo 11

Regularizador de Ecuaciones Elípticas.

11.1. Operadores Elípticos.

Sea A operador diferencial parcial con coeficientes variables:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) \tag{11.1.1}$$

cuyo símbolo es

$$a(x,k) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)(-ik)^\alpha. \tag{11.1.2}$$

En la sección siguiente, estudiaremos las cuestiones de existencia, unicidad y suavidad de la solución $u(x)$ para la ecuación diferencial parcial en $\mathbb{R}^n$.

$$Au(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{11.1.3}$$

para operadores Elípticos y Fuertemente Elípticos.

Definición 11.1.1 *1. Decimos que un operador diferencial A es* **Elíptico de orden** *m si existen $R, c > 0$ tales que*

$$|a(x,k)| > c(1 + |k|)^m, \quad |k| \geq R, \quad x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.1.4}$$

2. Decimos que A es **Fuertemente Elíptico de orden** *m si existe $c > 0$ tal que*

$$|a(x,k)| > c(1 + |k|)^m, \quad x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.1.5}$$

Lema 11.1.2 *Sea $V(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces el operador de Schrödinger $-\Delta + V(x) - E$ es elíptico de orden 2 para $E \in \mathbb{C}$.*

Demostración: Demostremos que existen $R, c > 0$ tales que $|a(x,k)| := ||k|^2 + V(x) - E| \geq c(1+|k|)^2$, $|k| \geq R$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dado que $V(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ existe $C_1 > 0$ tal que $|V(x)| \leq C_1$, $x \in \mathbb{R}^n$ así tendremos que $|V(x) - E| \leq |V(x)| + |E| \leq C_1 + |E| =: C_2$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dado que

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{|k|^2 - C_2}{(|k|+1)^2} = 1$$

existe $R > 0$ tal que

$$|k|^2 - C_2 \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2, \text{ para } |k| \geq R.$$

Usando esta desigualdad obtenemos

$$|a(x,k)| \geq |k|^2 - |V(x) - E| \geq |k|^2 - C_2 \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2, \ |k| \geq R, \ x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.1.6}$$

De aquí obtenemos que $a(x,k)$ satisface (11.1.4) con $c = \frac{1}{2}$ para $x \in \mathbb{R}^n$, $|k| \geq R$. Por tanto, el operador de Schrödinger es elíptico de orden 2. ■

Lema 11.1.3 *Sea $V(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ con $V \geq 0$. Entonces el operador de Schrödinger $-\Delta + V(x) - E$ es fuertemente elíptico de orden 2 para*

1. *$E < 0$.*
2. *$E \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$.*

Demostración: *1.* Ya que $V(x) \geq 0$, $|a(x,k)| := |k|^2 + V(x) - E \geq |k|^2 - E \geq c(1+|k|)^2$, $x, k \in \mathbb{R}^n$. por (7.0.10). Por lo tanto, el operador de Schrödinger es fuertemente elíptico de orden 2 para $E < 0$ según (11.1.5).

2. Sea $E := E_1 + iE_2 \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^+}$. Para $E_2 = 0$ la afirmación esta demostrada en *1.* Falta demostrarla para $|E_2| > 0$. En este caso tenemos

$$|a(x,k)| \geq |\operatorname{Im} a(x,k)| = |E_2| > 0, \ x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.1.7}$$

Por otro lado,

$$|a(x,k)| = ||k|^2 + V(x) - E_1 - iE_2| \geq ||k|^2 + V(x) - E_1| \geq ||k|^2 - E_1|, \ x, k \in \mathbb{R}^n \tag{11.1.8}$$

dado que $V(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Ya que $\lim_{|k|\to\infty} \frac{|k|^2 - E_1}{(1+|k|)^2} = 1$ entonces existe $R > 0$ tal que $||k|^2 - E_1| \geq \frac{1}{2}(1+|k|)^2$, $|k| \geq R$. Usando (11.1.7) obtenemos

$$|a(x,k)| \geq |E_2| \geq \frac{|E_2|}{(1+R)^2}(1+|k|)^2 = c_1(1+|k|)^2, \ |k| \leq R, \ x, k \in \mathbb{R}^n \tag{11.1.9}$$

donde $c_1 = \frac{|E_2|}{(1+R)^2}$. Por tanto (11.1.5) se cumple con $c = \min\{\frac{1}{2}, \frac{|E_2|}{(1+R)^2}\}$. Lema queda demostrado. ■

11.2. Propiedades de a^{-1}.

Lema 11.2.1 *Sean* $P(k) = \sum_{|\alpha|\leq p} a_\alpha k^\alpha$ *y* $Q(k) = \sum_{|\beta|\leq q} b_\beta k^\beta$ *polinomios con* $a_\alpha, b_\beta \in \mathbb{C}$ *y* $q - p = r \geq 0$. *Supongamos que* $Q(k) \neq 0,\ k \in \mathbb{R}^n$. *Entonces para* $\gamma \in \mathbb{N}_0$ *se cumple* $\partial_k^\gamma \left[\frac{P(k)}{Q(k)}\right] = \frac{P_1(k)}{Q_1(k)}$ *donde*

1.
$$Q_1(k) = Q(k)^M \ \ \textit{para algún} \ \ M \in \mathbb{N}_0 \tag{11.2.10}$$

2.
$$\deg Q_1 - \deg P_1 \geq r + |\gamma|. \tag{11.2.11}$$

Demostración: Inducción sobre $|\gamma|$. Para $\gamma = 0$ es evidente. Supongamos que se cumple para $|\gamma| = \gamma_0$. Entonces
$$\partial_k^\gamma \left[\frac{P(k)}{Q(k)}\right] = \frac{P_1(k)}{Q_1(k)} \tag{11.2.12}$$
con $\deg P_1 = p_1$ y $\deg Q_1 = q_1$,
$$Q_1(k) = Q^M(k), \ \text{ para algún } \ M \in \mathbb{N}_0 \tag{11.2.13}$$
y
$$q_1 - p_1 \geq r + \gamma_0. \tag{11.2.14}$$

Sea $\gamma_1 = \gamma + e_i$ donde $e_i = (0, ..., 0, 1_i, 0, .., 0)$ con 1 esta en el i-ésimo lugar, $i = 1, ..., n$. Derivando $\frac{P_1(k)}{Q_1(k)}$ con respecto a k_i obtenemos
$$\partial_k^{\gamma_1} \left[\frac{P(k)}{Q(k)}\right] = \partial_{k_i} \left[\frac{P_1(k)}{Q_1(k)}\right] = \frac{\partial_{k_i} P_1(k) \cdot Q_1(k) - P_1(k) \cdot \partial_{k_i} Q_1(k)}{Q_1(k)^2} =: \frac{P_2(k)}{Q_2(k)}$$
Obviamente, $Q_2(k) = Q(k)^{2M}$ con $\deg Q_2 = 2q_1$ y $\deg P_2 \leq p_1 - 1 + q_1$. Esto implica que $\deg Q_2 - \deg P_2 \geq 2q_1 - p_1 + 1 - q_1 \geq q_1 + 1 - p_1 = r + \gamma_0 + 1 = r + |\gamma| + 1$ por (11.2.14). Por tanto se cumple (11.2.14) para $|\gamma| = \gamma_0 k + 1$. Lema queda demostrado. ■

Corolario 11.2.2 *Sea* $a(x, k) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) k^\alpha$ *fuertemente elíptico de orden* m *con* $a_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^n)$. *Entonces*
$$\left|\partial_k^\gamma \left[\frac{1}{a(x,k)}\right]\right| \leq C(1 + |k|)^{-m-|\gamma|}, \ \ x, k \in \mathbb{R}^n, \ \gamma \in \mathbb{N}_0. \tag{11.2.15}$$

Demostración: Sea
$$\partial_k^\gamma \left[\frac{1}{a(x,k)}\right] = \frac{P(x,k)}{Q(x,k)} \tag{11.2.16}$$
con $\deg P = p$ y $\deg Q = q$. Ya que $a_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^n), \ \alpha \in \mathbb{N}_0$ tenemos
$$|P(x,k)| \leq C(1 + |k|)^p, \ \ x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.2.17}$$

Usando definición de $a(x,k)$, Lema 11.2.1 y el hecho que $r = \deg a - 0 = m$ obtenemos

$$p \leq q - m - |\gamma|. \tag{11.2.18}$$

De aquí

$$|P(x,k)| \leq C(1+|k|)^{q-m-|\gamma|}, \;\; x,k \in \mathbb{R}^n \tag{11.2.19}$$

por (11.2.17). Además $Q(x,k) = a(x,k)^M$ para algún $M \in \mathbb{N}_0$ por Lema 11.2.1. Obviamente $q = mM$. Esto implican que

$$|Q(x,k)| > c(1+|k|)^{mM} = c(1+|k|)^q, \;\; x,k \in \mathbb{R}^n \tag{11.2.20}$$

ya que $a(x,k)$ es fuertemente elíptico. Y ahora (11.2.19) y (11.2.20) implica que

$$\left|\frac{P(x,k)}{Q(x,k)}\right| \leq C(1+|k|)^{q-m-|\gamma|}\frac{1}{c}(1+|k|)^{-q} = C_1(1+|k|)^{-m-|\gamma|}, \;\; x,k \in \mathbb{R}^n$$

donde $C_1 = C/c$. Esto concluye la demostración. ■

Lema 11.2.3 *Sea $a(x,k) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)k^\alpha$ fuertemente elíptico con*

$$a_\alpha(x) = a_\alpha^0 + a'_\alpha(x), \; a'_\alpha \in \mathcal{S}, \;\; a_\alpha^0 \in \mathbb{C}. \tag{11.2.21}$$

Entonces $a^0(k) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha k^\alpha$ es fuertemente elíptico, es decir,

$$a^0(k) \neq 0, \;\; k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.2.22}$$

Demostración: Usando (11.2.21) reescribimos a $a(x,k)$ como

$$a(x,k) = a^0(k) + \sum_{|\alpha|\leq m} a'_\alpha(x)k^\alpha. \tag{11.2.23}$$

Supongamos que existe $k_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $a^0(k_0) = 0$. De aquí $a(x,k_0) = \sum_{|\alpha|\leq m} a'_\alpha(x)k_0^\alpha$. Por (11.2.21), $\sum_{|\alpha|\leq m} a'_\alpha(x)k_0^\alpha \to 0$ para $|k| \to \infty$. Esto implica que $a(x,k)$ no satisface (11.1.5), contradiciendo la suposición. Por tanto, $a^0(k)$ es fuertemente elíptico. ■

Lema 11.2.4 *Sea $a(x,k) := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)k^\alpha \in S^m$ fuertemente elíptico de orden m que cumple (11.2.21) y (11.2.22). Definamos*

$$r(x,k) := \frac{1}{a(x,k)}, \;\; r^0(k) := \frac{1}{a^0(k)} \tag{11.2.24}$$

y

$$r'(x,k) := \frac{1}{a(x,k)} - \frac{1}{a^0(k)} = \frac{-a'(x,k)}{a^0(k)a(x,k)}. \tag{11.2.25}$$

Entonces

$$|\partial_k^\gamma r^0(k)| \leq C(\gamma)(1+|k|)^{-m-|\gamma|}, \; k \in \mathbb{R}^n \tag{11.2.26}$$

y

$$(1+|x|)^N|\partial_x^\beta\partial_k^\gamma r'(x,k)| \leq C(\gamma,\beta,N)(1+|k|)^{-m-|\gamma|}, \;\; x,k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.2.27}$$

Demostración: *I*) La desigualdad (11.2.26) se sigue de Corolario 11.2.2 y Lema 11.2.3.

II) Demostremos que

$$|\partial_k^\gamma r'(x,k)| \le C(\gamma)(1+|k|)^{-m-|\gamma|}, \quad x,k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.2.28}$$

Usando (11.2.21), (11.2.22) y (11.2.24) tenemos

$$r'(x,k) = 0, \quad |x| \ge R. \tag{11.2.29}$$

Esto implica que (11.2.28) se cumple para $|x| \ge R,\ k \in \mathbb{R}^n$.

Dado que $\deg a' \le m$, $\deg a^0 = m$ por definición de a^0 y $\deg a = m$ por definición de a implica que $\deg(aa^0) - \deg a' \ge m$.

Ahora, Lema 11.2.1 implica que

$$\partial_k^\gamma [r'(x,k)] = \frac{P_1(x,k)}{Q_1(x,k)} \tag{11.2.30}$$

con

$$q_1 - p_1 \ge m + |\gamma| \tag{11.2.31}$$

donde $q_1 = \deg Q_1$, $p_1 = \deg P_1$ y

$$Q_1(x,k) = (a(x,k)a^0(k))^M, \quad \text{para algún} \ \ M \in \mathbb{N}_0. \tag{11.2.32}$$

Notese que los coeficientes de los polinomios $P_1(x,k)$ y $Q_1(x,k)$ son acotados ya que los coeficientes de $a(x,k)$ lo son. Esto implica que

$$|P_1(x,k)| \le C(1+|k|)^{p_1}, \ |x| \le R, \ k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.2.33}$$

Por otro lado,

$$|Q_1(x,k)| > c(1+|k|)^{q_1}, \ |x| \le R, \ x,k \in \mathbb{R}^n \tag{11.2.34}$$

por (11.2.32) ya que a y a^0 son fuertemente elípticos. Entonces de (11.2.30), (11.2.33) y (11.2.34) obtenemos (11.2.28) para $|x| \le R$. Por tanto, (11.2.28) se cumple para $x,k \in \mathbb{R}^n$.

III) Demostremos (11.2.27).

1. Demostremos que para $\beta \in \mathbb{N}_0$ si

$$\partial_x^\beta \left[\frac{P_1(x,k)}{Q_1(x,k)}\right] = \frac{P_\beta(x,k)}{Q_\beta(x,k)} \tag{11.2.35}$$

entonces

$$q_\beta - p_\beta \ge q_1 - p_1 \tag{11.2.36}$$

donde $\deg P_\beta = p_\beta$, $\ \deg Q_\beta = q_\beta$ y

$$Q_\beta(x,k) = [a(x,k)\cdot a^0(k)]^{M_\beta}, \quad \text{para algún} \ \ M_\beta \in \mathbb{N}_0. \tag{11.2.37}$$

Demostremos por inducción sobre $|\beta|$. Para $\beta = 0$ es obvio. Supongamos que (11.2.36) se cumple para $|\beta| = \beta_0$. Demostremos (11.2.36) para $|\beta| = \beta_0 + 1$. Sea $\beta' = \beta + e_i$ donde

$e_1i = (0, ..., 0, 1_i, 0, ..., 0)$ con 1 en el i-ésimo lugar, $i = 1, ..., n$. Derivando (11.2.35) ambos lados respecto a x_i obtenemos

$$\partial_x^{\beta'}\left[\frac{P_1(x,k)}{Q_1(x,k)}\right] = \partial_{x_i}\left[\frac{P_\beta(x,k)}{Q_\beta(x,k)}\right] = \frac{[\partial_{x_i}P_\beta(x,k)]\cdot Q_\beta(x,k) - P_\beta(x,k)\cdot[\partial_{x_i}Q_\beta(x,k)]}{Q_\beta^2(x,k)} =: \frac{P_{\beta'}(x,k)}{Q_{\beta'}(x,k)}.$$

Sean $p_{\beta'} = \deg P_{\beta'}$ y $q_{\beta'} = \deg Q_{\beta'}$. Obviamente $q_{\beta'} = 2q_\beta$ y $p_{\beta'} \le q_\beta + p_\beta$. Esto implica

$$q_{\beta'} - p_{\beta'} \ge q_\beta - p_\beta \ge q_1 - p_1$$

por la hipótesis de inducción. Por tanto (11.2.36) se cumple para β'.

2. Para $|x| \ge R$, la desigualdad (11.2.27) se cumple por (11.2.29). Demostresmos (11.2.27) para $|x| \le R$.

Por (11.2.30) y (11.2.35) tenemos

$$|\partial_x^\beta \partial_k^\gamma r'(x,k)| = \left|\frac{P_\beta(x,k)}{Q_\beta(x,k)}\right| \le C_R(\gamma,\beta)(1+|k|)^{p_\beta - q_\beta}, \quad |x| \le R, k \in \mathbb{R}^n \tag{11.2.38}$$

ya que $Q_\beta(x,k)$ es fuertemente elíptico por (11.2.37) y los coeficientes de $P_\beta(x,k)$ son acotados para $|x| \le R$. Esto implica que

$$|\partial_x^\beta \partial_k^\gamma r'(x,k)| \le C_R(\gamma,\beta)(1+|k|)^{-m-|\gamma|}, \quad |x| \le R, k \in \mathbb{R}^n$$

por (11.2.31) y (11.2.36). Finalmente

$$|\partial_x^\beta \partial_k^\gamma r'(x,k)| \le C_R(\beta,\gamma,N)(1+|x|)^{-N}(1+|k|)^{-m-|\gamma|}, \quad |x| \le R, \ x,k \in \mathbb{R}^n$$

donde $C_R(\gamma,\beta,N) \ge C_R(\gamma,\beta)(1+R)^N$. Por lo tanto se cumple (11.2.27). Lema queda demostrado. ■

Corolario 11.2.5 *Sea $A \in \mathcal{A}^m$ operador pseudodiferencial fuertemente elíptico de orden m con simbolo $a(x,k)$ que satisface (11.2.21) y (11.2.22). Entonces el operador pseudodiferencial R con simbolo $r(x,k) = a(x,k)^{-1}$ pertenece a la clase $\mathcal{A}^{-m}$, de modo que $R : H^{s-m} \to H^s$ y continuo.*

Demostración: Dado que $r(x,k) \in S^{-m}$ por Lema 11.2.4 y Definición 8.2.1 implica que $R \in \mathcal{A}^{-m}$ por Definición 8.2.9 y (8.1.5). Por tanto R actua de $H^{s-m} \to H^s$ y es continuo por Corolario 9.3.2. ■

11.3. Regularizador.

Sean $A \in \mathcal{A}^m$ operador pseudodiferencial fuertemente elíptico de orden m con símbolo $a(x,k)$ que satisface (11.2.21) y (11.2.22) y R operador pseudodiferencial con símbolo $r(x,k) = a(x,k)^{-1}$. Definamos el operador composición $C = RA$ con símbolo

$$c(x,k) = \sum_{|\gamma| \ge 0} \frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma r(x,k)\partial_x^\gamma a(x,k) \tag{11.3.39}$$

que se entiende en el sentido (10.1.6) y los operadores pseudodiferenciales $C_\gamma, \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^n$ con símbolos

$$c_\gamma(x,k) = \frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma r(x,k)\partial_x^\gamma a(x,k), \quad \gamma \in \mathbb{N}_0^n. \tag{11.3.40}$$

Lema 11.3.1 *1. Los símbolos $c_\gamma \in S^{-1}$ para $|\gamma| \geq 1$.*

2. Para cada $N > 0$ existe $R_N(x,k) \in S^{-N}$ tal que

$$c(x,k) = \sum_{|\gamma|\geq 0}^{N-1} c_\gamma(x,k) + R_N(x,k) \tag{11.3.41}$$

y el operador D_N con el símbolo R_N pertenece a $\mathcal{A}^{-N}$.

Demostración: *1.* Ya que $r(x,k) \in S^{-m}$ por Corolario 11.2.5 entonces $c_\gamma \in C^{-|\gamma|}$ por (10.1.7). Por tanto, $c_\gamma \in S^{-1}$ por Observación 8.2.4 ya que $|\gamma| \geq 1$.

2. El desarrollo asintótico (10.1.6) aplicado a (11.3.39) implica que para $N > 0$ existe $R_N \in S^{-N}$ tal que (11.3.41) se cumple. Esto demuestra la afirmación *2.* ■

Lema 11.3.2 *Sea $s \in \mathbb{R}$. Definamos $\Lambda^s : H^s \to \mathcal{L}^2$ operador pseudodiferencial con símbolo $w(k) = (1+|k|^2)^{s/2}$ como*

$$\Lambda^s u(x) := F^{-1}[w(k)\hat{u}(k)], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in H^s. \tag{11.3.42}$$

Entonces Λ^s es isomorfismo.

Demostración: *I*) Demostraremos que $\Lambda^s u \in \mathcal{L}^2$ si $u \in H^s$. Por Definición 4.1.1 tenemos $(1+|k|)^s\hat{u}(k) \in \mathcal{L}^2$. Entonces $(1+|k|^2)^{s/2}\hat{u}(k) \in \mathcal{L}^2$ por Corolario 4.2.3 con $\alpha = 0$. Por tanto, por el Teorema de Parseval (Teorema 3.3.3), $\Lambda^s u \in \mathcal{L}^2$.

II) Linealidad de Λ^s es obvia.

III) Continuidad de Λ^s. Basta demostrar que existe $C(s) > 0$ tal que

$$\|\Lambda^s u\|_{\mathcal{L}^2} \leq C(s)\|u\|_s, \quad u \in H^s, \ s \in \mathbb{R}. \tag{11.3.43}$$

Usando (3.3.12) y (4.2.12) con $\alpha = 0$ obtenemos

$$\|\Lambda^s u\|_{\mathcal{L}^2} = \|F^{-1}[w(k)\hat{u}(k)]\|_{\mathcal{L}^2} = \|w(k)\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C(s)\|(1+|k|)^s\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2} = C(s)\|u\|_s. \tag{11.3.44}$$

Por tanto, Λ^s es continuo.

IV) Demostraremos que Λ^{-s} esta bien definido, es lineal y continuo.

Sea $u \in \mathcal{L}^2$. Dado que $w^{-1} \in \mathcal{S}'$ por Lema 1.6.2 y $\hat{u}(k) \in \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{S}'$ implica que $\frac{1}{w(k)}\hat{u}(k) \in \mathcal{S}'$. Por tanto, $F^{-1}[\frac{1}{w(k)}\hat{u}(k)] \in \mathcal{S}'$ por Definición 2.2.2.

Usando Definición 4.1.1, desigualdad (4.1.11) y (3.3.12) obtenemos

$$\|\Lambda^{-s}u\|_s = \|(1+|k|)^s(1+|k|^2)^{-s/2}\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2} \leq C_1(s)\|\hat{u}(k)\|_{\mathcal{L}^2} = C_2(s)\|u\|_{\mathcal{L}^2}. \tag{11.3.45}$$

Esto implica que $\Lambda^{-s}u \in H^s$. Por tanto, $\Lambda^{-s} : \mathcal{L}^2 \to H^s$ esta bien definido. La linealidad obviamente y la cota (11.3.45) muestra que Λ^{-s} es continuo.

Demostremos que Λ^{-s} es el operador inverso de Λ^s. Usando sucesivamente la Transformada de Fourier Inversa obtenemos

$$\Lambda^s[\Lambda^{-s}[u]] = F^{-1}[(1+|k|^2)^{s/2}\widehat{\Lambda^{-s}u}] = F^{-1}[(1+|k|^2)^{s/2}(1+|k|^2)^{-s/2}\hat{u}] = F^{-1}[\hat{u}] = u.$$

Esto implica que $\Lambda^s \circ \Lambda^{-s} = I$ y similarmente $\Lambda^{-s} \circ \Lambda^s = I$. Lema queda demostrado. ■

Comencemos con la definición de "Regularizador" R de un operador A el cual es el concepto central de la tesis por que es el "*casi inverso*" de A en el siguiente sentido.

Definición 11.3.3 *Sean $m, s \in \mathbb{R}$. Un operador R es llamado* **Regularizador** *del operador $A \in \mathcal{A}^m$ si*

I. $R \in \mathcal{A}^{-m}$ operador pseudodiferencial.

II. $RA = I + T$ y $AR = I + \mathcal{T}$, donde $T, \mathcal{T} \in \mathcal{A}^{-1}$ operadores pseudodiferenciales.

III. $T : H^s \to H^s$ y $\mathcal{T} : H^{s+1} \to H^{s+1}$ son operadores compactos.

Teorema 11.3.4 *Sea $A \in \mathcal{A}^m$ operador diferencial fuertemente elíptico de orden m con símbolo $a(x,k)$ que satisface (11.2.21) y (11.2.22). Definamos el operador R como*

$$Rf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-ikx} r(x,k) \hat{f}(k)\, dk, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{11.3.46}$$

donde el símbolo es

$$r(x,k) := a(x,k)^{-1}, \quad x, k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.3.47}$$

Entonces R es el regularizador de A.

Demostración: Sean $A \in \mathcal{A}^m$ operador diferencial fuertemente elíptico de orden m con símbolo $a(x,k)$ y R definido en (11.3.46).

1. Por Corolario 11.2.5 tenemos que $R \in \mathcal{A}^{-m}$.

2. Demostraremos la afirmación para RA ya que para AR es similar. Sea C definido en Lema 11.3.1. Por (11.3.41), $c(x,k) = 1 + R_1(x,k)$. Definamos el operador T con simbolo R_1. Obviamente, $T \in \mathcal{A}^{-1}$ por Definición 8.2.9.

3. Primeramente demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 11.3.5 *El operador pseudodiferencial T actua de H^s a H^{s+1} para $s \in \mathbb{R}$ y $T : H^s \to H^s$ es compacto.*

Demostración: T actua de H^s a H^{s+1} por Corolario 9.3.2 ya que $T \in \mathcal{A}^{-1}$ para $s \in \mathbb{R}$. Demostremos que $T : H^s \to H^s$ es compacto.

Usando (11.2.21) y (11.2.22) obtenemos

$$a(x,k) = a^0(k), \quad |x| \geq R, \; k \in \mathbb{R}^n \tag{11.3.48}$$

y

$$r(x,k) = r^0(k), \quad |x| \geq R, \; k \in \mathbb{R}^n. \tag{11.3.49}$$

Para demostrar que $T : H^s \to H^s$ es compacto es suficiente demostar las dos siguientes afirmaciones.

Lema 11.3.6 *Sean los operadores pseudodiferenciales C_γ con simbolo $c_\gamma(x,k)$ definidos en (11.3.40). Entonces $C_\gamma : H^s \to H^s$ es compacto para $|\gamma| \geq 1$.*

Demostración: Es suficiente demostrar que para cada suceción $u_j \in H^s$ acotada existe subsucesión $C_\gamma u_{j'} \in H^s$ tal que

$$\|C_\gamma u_{j'} - v\|_s \to 0, \;\; j' \to \infty \tag{11.3.50}$$

para alguna $v \in H^s$.

Los operadores $C_\gamma \in \mathcal{A}^{-1}$ por Lema 11.3.1 inciso 1. Entonces $C_\gamma : H^s \to H^{s+1}$ es continuo por Corolario 9.3.2. Por tanto, la sucesión $C_\gamma u_j$ es acotada ya que u_j es acotada.

Usando (11.3.48) obtenemos

$$C_\gamma u_j(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{-ikx}\frac{1}{\gamma!}(i\partial_k)^\gamma r(x,k)\partial_x^\gamma a(x,k)\hat{u}_j(k)\, dk = 0, \; |x| \geq R. \tag{11.3.51}$$

Esto implica que $C_\gamma u_j \in \overset{o}{H}{}^{s+1}(\Omega)$ donde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | |x| \leq R\}$ por Definición 5.1.7.

Por Teorema de Inmersión Compacta de Sobolev 5.2.7 existe subsucesión $C_\gamma u_{j'} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $v \in H^s$ tal que (11.3.50) se cumple. Lema queda demostrado. ∎

Proposición 11.3.7 *Sea el operador pseudodiferencial D_N con simbolo R_N definido en Lema 11.3.1. Entonces, para $N > 0$ suficientemente grande, $D_N : H^s \to H^s$ es compacto.*

Demostración: Sean sucesión $u_j \in \mathcal{L}^2$ acotada y el operador pseudodiferencial Λ^s definido en Lema 11.3.2.

I) Por Lema 11.3.2, Λ^{-1} es el operador inverso del operador Λ^s. De aquí, reescribimos $D_N = \Lambda^{-s}\Lambda^s D_N \Lambda^{-s}\Lambda^s = \Lambda^{-s}K\Lambda^s$ donde $K := \Lambda^s D_N \Lambda^{-s}$.

Notemos que el operador K opera de $\mathcal{L}^2$ en $\mathcal{L}^2$ y es continuo. En efecto, ya que $\Lambda^{-s} : \mathcal{L}^2 \to H^s$ es continuo por Lema 11.3.2, $D_N : H^s \to H^s$ y es continuo por Corolario 9.3.2 y $\Lambda^s : H^s \to \mathcal{L}^2$ es continuo por Lema 11.3.2 entonces K es el operador $\mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ y es continuo como la composición de operadores continuos.

Es suficiente demostrar que $K : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ es compacto. En este caso $D_N = \Lambda^{-s}K\Lambda^s : H^s \to H^s$ es compacto. Demostremos esta afirmación.

Ya que el operador $\Lambda^s : H^s \to \mathcal{L}^2$ es continuo y la sucesión u_j es acotada entonces $\Lambda^s u_j$ es acotada en $\mathcal{L}^2$. De aquí, la sucesión $K\Lambda^s u_j$ contiene una subsucesión $K\Lambda^s u_{j'}$ que converge en $\mathcal{L}^2$ por la suposición que K es compacto. Por tanto, $\Lambda^{-s}K\Lambda^s u_{j'}$ converge en H^s ya que el operador $\Lambda^{-s} : \mathcal{L}^2 \to H^s$ es continuo. Esto demuestra que $D_N : H^s \to H^s$ es compacto.

De esta manera, nos falta demostrar que $K : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ es compacto. Para eso demostremos el siguiente lema.

Lema 11.3.8 *Sea el operador pseudodiferencial $K := \Lambda^s D_N \Lambda^{-s}$. Entonces*

$$\widehat{K}u(k) = (1+|k|^2)^{s/2}\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(k-k')x}(1+|k'|^2)^{-s/2}\widehat{R_N}(k-k',k')\hat{u}(k')\, dk', \;\; x \in \mathbb{R}^n \tag{11.3.52}$$

y $K : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ es compacto para $N > 0$ suficientemente grande.

Demostración: Sean $R_N(x,k)$ el simbolo de D_N, $w_{-s}(k) = (1+|k|^2)^{-s/2}$ y $w_s(k) = (1+|k|^2)^{s/2}$ los simbolos de Λ^{-s} y Λ^s, respectivamente. Definamos $\lambda(x,k)$ el simbolo de la composición $D_N\Lambda^{-s}$.

I) Calculemos $\lambda(x,k)$. Por Definición 8.2.9 tenemos

$$D_N\Lambda^{-s}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}R_N(x,k)\widehat{\Lambda^{-s}u}(k)\,dk, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{11.3.53}$$

Usando la definición de Λ^{-s} obtenemos

$$\widehat{\Lambda^{-s}u}(k) = w_{-s}(k)\hat{u}(k). \tag{11.3.54}$$

Sustituyendo (11.3.54) en (11.3.53) obtenemos

$$D_N\Lambda^{-s}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}R_N(x,k)w_{-s}(k)\hat{u}(k)\,dk, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{11.3.55}$$

Esto implica que el simbolo de la composición $D_N\Lambda^{-s}$ es

$$\lambda(x,k) = R_N(x,k)w_{-s}(k) \tag{11.3.56}$$

por Definición 8.2.9.

II) Por (10.3.17) y (11.3.56) tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{D_N\Lambda^{-s}u}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{\lambda}(k-k',k')\hat{u}(k')\,dk'\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{R_N}(k-k',k')w_{-s}(k')\hat{u}(k')\,dk' \end{aligned}\tag{11.3.57}$$

Usando la definición de K y Definición 8.2.9 obtenemos

$$\begin{aligned} Ku(x) &= \Lambda^s D_N\Lambda^{-s}u(x)\\ &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ikx}w_s(k)\widehat{D_N\Lambda^{-s}}u(k)\,dk\\ &= F^{-1}\left[w_s(k)\widehat{D_N\Lambda^{-s}}u(k)\right]. \end{aligned}\tag{11.3.58}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}\widehat{Ku}(k) &= w_s(k)\widehat{D_N\Lambda^{-s}}u(k)\\ &= w_s(k)\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{R_N}(k-k',k')w_{-s}(k')\hat{u}(k')\,dk'\end{aligned}$$

Por tanto, (11.3.52) esta demostrado. ■

III) El núcleo integral $\Upsilon(k,k') := (1+|k|^2)^{s/2}\widehat{R_N}(k-k',k')(1+|k'|^2)^{-s/2}$ del operador K admite la siguiente cota

$$|\Upsilon(k,k')| \le C(s,N,M)(1+|k-k'|)^{-M+|s|}(1+|k'|)^{-N}, \quad k,k'\in\mathbb{R}^n,\ s\in\mathbb{R},\ N,M>0 \tag{11.3.59}$$

para algun $C(s,N,M) > 0$. En efecto, usando (9.3.24) para $\hat{R_N}(k-k',k')$, (4.2.12) para $(1+|k|^2)^{s/2}$ con $\alpha = 0$, (4.2.12) para $(1+|k'|^2)^{s/2}$ con $\alpha = 0$ y la desigualdad de Peetre (9.2.8) obtenemos

$$\begin{aligned} |\Upsilon(k,k')| &\leq C_1(s)(1+|k|)^s C(M)(1+|k-k'|)^{-M}(1+|k'|)^{-N} C_2(s)(1+|k'|)^{-s} \\ &\leq C_1(s,N,M)C(s)(1+|k-k'|)^{-M+|s|}(1+|k'|)^{-N}, \quad k,k' \in \mathbb{R}^n, \ s \in \mathbb{R}, \ N, M > 0 \end{aligned} \tag{11.3.60}$$

Esto prueba que (11.3.59) se cumple. Entonces el operador K operador pertenece a la clase de **Operadores de clase Hilbert-Schmidt** ya que el núcleo $\Upsilon(k,k')$ satisface

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |\Upsilon(k,k')|^2 \, dk \, dk' < \infty \tag{11.3.61}$$

si $2(-M+|s|) < -n$ y $-2N < -n$. Por tanto, $K : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ es compacto. Lema queda demostrado. ■

El Lema 11.3.8 concluye la demostración de la Preposición 11.3.7. Por tanto, Teorema 11.3.4 esta demostrado. ■

Capítulo 12

Aplicaciones del Regularizador.

12.1. Suavidad de la Solución.

Lema 12.1.1 *[Lema de Schauder] Sean $A \in \mathcal{A}^m$ fuertemente elíptico de orden m con simbolo a que satisface (11.2.21) y (11.2.22) y $u \in H^s$ solución de la ecuación (11.1.3) donde $f \in H^t,\ t \in \mathbb{R}$. Entonces $u \in H^{t+m}$.*

Demostración: Sean $A \in \mathcal{A}^m$ fuertemente elíptico de orden m y $u \in H^s$ solución de la ecuación (11.1.3) donde $f \in H^t,\ t \in \mathbb{R}$.

I) Supongamos $t + m \leq s$. Por Observación 4.1.4, $u \in H^{t+m}$. En este caso la afirmación queda demostrada.

II) Supongamos $t + m > s$. Definamos $j := t + m - s > 0$. Sin perdida de generalidad, supongamos $j \in \mathbb{N}_0$ para simplificar la demostración. Obviamente

$$j + s = t + m. \tag{12.1.1}$$

Basta demostrar que $\|u\|_{s+j} < \infty$.

Demostremos esto por inducción sobre j, que es equivalente a la inducción sobre t.

Sea $j = 1$. En este caso $t = s + 1 - m$ y $f \in H^{s+1-m}$. Dado que $A \in \mathcal{A}^m$ es fuertemente elíptico de orden m existe $R \in \mathcal{A}^{-m}$ operador regularizador por Teorema 11.3.4.

Aplicando el regularizador, (veáse Defición 11.3.3), a (11.1.3) tenemos $Rf = RAu = u + Tu$ donde $T \in \mathcal{A}^{-1}$.

Por Teorema 9.3.1, para $\mathcal{A}^{-m}$, la desigualdad (9.3.17) implica que $\|Rf\|_{s+m} \leq C(s)\|f\|_s,\ s \in \mathbb{R}$. Esto implica que

$$\|Rf\|_s \leq C_1(s)\|f\|_{s-m}, \quad s, m \in \mathbb{R}. \tag{12.1.2}$$

Similarmente (9.3.17) implica

$$\|Tu\|_s \leq C_2(s)\|u\|_{s-1}, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{12.1.3}$$

Reescribiendo a u como $u = Rf - Tu$, usando (12.1.2) y (12.1.3) tenemos la cota siguiente

$$\|u\|_s \leq \|Rf\|_s + \|Tu\|_s \leq C_1(s)\|f\|_{s-m} + C_2(s)\|u\|_{s-1}, \quad s, m \in \mathbb{R}. \tag{12.1.4}$$

Esto implica que
$$\|u\|_{s+1} \leq C_1(s)\|f\|_{s+1-m} + C_2(s)\|u\|_s, \quad s, m \in \mathbb{R}. \tag{12.1.5}$$

Esta estimación se llama la **Estimación a priori de Schauder**, ella se cumple para la solución u de (11.1.3).

Ella implica por (12.1.1) y $j = 1$ que
$$\|u\|_{s+1} \leq C(t)\|f\|_t + C'(s)\|u\|_s < \infty$$
ya que $f \in H^t$ y $u \in H^s$. Por tanto, para $j = 1$ se cumple la afirmación ya que $u \in H^{s+1} = H^{t+m}$ por 12.1.1.

Supongamos que para $j = l$ se cumple la afirmación, es decir,
$$\|u\|_{s+l} < \infty \tag{12.1.6}$$
demostremos esto para $j = l + 1$. En este caso, $f \in H^t$ con
$$t = s + l + 1 - m \tag{12.1.7}$$
por (12.1.1). Cambiando s por $s + l$ en (12.1.5) obtenemos
$$\|u\|_{s+l+1} \leq C_1(s)\|f\|_{s+l+1-m} + C_2(s)\|u\|_{s+l}.$$
Por tanto, $\|u\|_{s+l+1} < \infty$ ya que $f \in H^t$ por (12.1.7) y $u \in H^{s+l}$ por (12.1.6). Entonces, $u \in H^{s+l+1} = H^{t+m}$ por (12.1.7. Lema queda demostrado. ■

Corolario 12.1.2 *[Lema de Weyl] Sean $s, m \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}^m$ fuertemente elíptico de orden m. Si $u \in H^s$ solución de (11.1.3) con $f = 0$, la ecuación homogénea, entonces $u \in C^\infty$.*

Demostración: Ya que $u \in H^s$ y $f = 0 \in H^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$ entonces $u \in H^{m+t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por Lema 12.1.1 (Lema de Schauder). Esto implica que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ por Corolario 5.1.5. ■

12.2. Solubilidad de las Ecuaciones Elípticas.

Teorema 12.2.1 *Sean X y Y espacios Banach. Si $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ compacto y $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ entonces $\dim \mathcal{N}(T + \lambda I) < \infty$.*

Demostración: Véase [3] Teorema 4.18. ■

Teorema 12.2.2 *Sean X y Y espacios Hilbert. Sean $T : X \to Y$ operador compacto y $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ fijo. Consideremos*
$$(\lambda I - T)x = y \tag{12.2.8}$$
y
$$(\lambda I - T^*)x^* = 0 \tag{12.2.9}$$
donde T^* es el operador conjugado a T. Entonces, la ecuación (12.2.8) tiene soluciones, si y sólo si, y es ortogonal a todas las soluciones de la ecuación (12.2.9).

Demostración: Véase [9] Teorema 8. ■

Teorema 12.2.3 *Sean $s \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{A}^m$ fuertemente elíptico de orden m con símbolo a que satisface (11.2.21) y (11.2.22). Consideremos la ecuación (11.1.3) con coeficientes variables.*

1. *Las soluciones de la ecuación homogénea*

$$Au(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{12.2.10}$$

constituye un espacio de dimensión finita en H^s, $s \in \mathbb{R}$.

2. *La ecuación no-homogénea de (11.1.3) con $f \in H^{s-m}$ admite solución $u \in H^s$ si f satisface un número finito de "condiciones de ortogonalidad" del tipo*

$$L_j f = 0, \quad j = 1, .., M \tag{12.2.11}$$

donde L_j son funcionales lineales continuos en H^{s-m}.

Demostración: Sea $A \in \mathcal{A}^m$ fuertemente elíptico de orden m con simbolo a que satisface (11.2.21) y (11.2.22). Por Teorema 11.3.4 existe $R \in \mathcal{A}^{-m}$ operador regularizador.

Demostremos *1.* Aplicando el regularizador R a (12.2.10) obtenemos

$$RAu = u + Tu = 0 \tag{12.2.12}$$

donde $T \in \mathcal{A}^{-1}$ compacto en H^s por Definición 11.3.3. Dado que T es compacto en H^s entonces $dim\, \mathcal{N}(I+T) = dim\{u|(I+T)u = 0\} < \infty$ por Teorema 12.2.1. Por tanto, el espacio lineal de las soluciones u es de dimensión finita.

2. Vamos a buscar las soluciones para (11.1.3) en la forma $u = Rg$. Sustituyendo $u = Rg$ en (11.1.3) obtenemos

$$ARg = g + \mathcal{T}g = f \tag{12.2.13}$$

donde $\mathcal{T} \in \mathcal{A}^{-1}$ operador compacto en H^{s-m} por Definición 11.3.3 inciso 2. Esto implica que la ecuación $g + \mathcal{T}g = f$ admite una solución $g \in H^{s-m}$ si f satisface un número finito de "condiciones de ortogonalidad" del tipo (12.2.11) por Teorema 12.2.2, (Segundo Teorema de Fredholm). Por tanto $u = Rg$ es solución para (11.1.3) por (12.2.13). Teorema queda demostrado. ■

Conclusión

En esta tesis se construyo la teoría de Operadores Pseudodiferenciales para investigar las ecuaciones diferenciales parciales fuertemente elípticas con coeficientes variables. Se construye el operador pseudodiferencial R que es el regularizador para el operador diferencial fuertemente elíptico.

Usando este operador demuestro suavidad de las soluciones y la propiedad de Fredholm.

Bibliografía

[1] Komech, A. I., “*Lectures on Elliptic Partial Differential Equations*”, Vienna University, Vienna, 2006.

[2] Bartle, G. R., "*Elements of Integration*", Jonh Wiley & Sons. Inc., New York, 1966.

[3] Rudin, W., "*Functional Analysis*", McGraw-Hill, Inc., 1973.

[4] Kolmogorov, A.N., Fomin S.V., "*Measure Lebesgue Integrals and Hilbert Space*", Mir, Moscu, 1960.

[5] Kolmogorov, A.N., Fomin S.V., "*Elementos de la Teoría de Funciones y del Analisis Funcional*", Mir, Moscu, 1975.

[6] Hasser, N. B., Sullivan, J. A., "*Análisis Real*", Trillas, México, 1978.

[7] Dieudonnè, J., "*Foundations of Modern Analysis*", Academic Press, New York And London, 1969.

[8] Stein, E. M., C. Weis., "*Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*", Princeton, 1971.

[9] Renardy M., Rogers R. C. “*An Introduction to Partial Differential Equations*”, Springer, 2004.