



UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

**GENERACIÓN DE CAMPOS ELÉCTRICOS PERIÓDICOS POR
MEDIO DE CAPACITORES ONDULADOS**

TESIS

Para obtener el grado de

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

SARA DELGADO GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
ALBERTO MENDOZA SUÁREZ

CO-ASESOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

Morelia, Michoacán, Septiembre de 2013

RESUMEN

En este trabajo de tesis se propone un modelo de capacitor en condiciones electrostáticas, con extensión infinita y con una geometría periódica en una cierta dirección. Esto último se realiza considerando placas conductoras con una ondulación periódica. La geometría del sistema propuesto fue inspirada por ciertos trabajos acerca de guías de ondas y cristales fotónicos. Las propiedades eléctricas del capacitor se calculan empleando métodos numéricos integrales, que tienen alguna semejanza con métodos para tratar ciertos problemas de cristales fotónicos. Uno de los métodos numéricos propuestos lo llamamos “aproximado” y es útil para encontrar propiedades cuando se toman suficientes periodos en el capacitor. Este método da “efectos de borde” debido a que se desprecian ciertas contribuciones. Otro de los métodos numéricos lo llamamos “riguroso” y es válido para el capacitor de tamaño infinito. Precisamente, la periodicidad permite tratar al capacitor en base al concepto de “celda unitaria”, que corresponde a un periodo del capacitor. Estos métodos permiten caracterizar a nuestro sistema ya que en el capacitor podemos calcular: el campo eléctrico, el potencial electrostático, la capacitancia, etc. También, se propone un método numérico de diferencias finitas que permite encontrar trayectorias de partículas cargadas lanzadas a través del capacitor. El cálculo de trayectorias es necesario para estudiar fenómenos tal como el caos clásico para este tipo de sistemas.

ABSTRACT

In this thesis work we propose a capacitor model in electrostatic conditions, with an infinite size and with a periodic geometry in a certain direction. The latter is realized considering conducting surfaces with periodic ripples. The geometry of the proposed system was inspired by works on waveguides and photonic crystals. The electrical properties of the capacitor are calculated using integral numerical methods. These methods are similar to methods for certain photonic crystals problems. One is called “approximate” and is useful to find properties when we take sufficient periods of the capacitor. This method gives “edge effects” due to certain contributions that are not taken into account. Another numerical method is called “rigorous” and it is valid for a capacitor of infinite size. In fact, the periodicity allows us to consider the concept of “unit cell”, which corresponds to a period of the capacitor. The employed methods allow us to characterize our system, since it can be calculated the electric field, the electrostatic potential, the capacitance, etc. Moreover, we propose a finite difference numerical method to find trayectories of charged particles moving through the capacitor. Calculation of particle trajectories is necessary to study phenomena such as the classical chaos for this kind of systems.

Dedicatorias

Mi dedicación especial en el presente trabajo de tesis está dirigida a mis padres Rogelio Delgado Zaragoza y Sara González Morales, por haberme dado el regalo de la vida y educarme en valores y principios de rectitud para con la sociedad y nuestra madre patria.

También dedico este trabajo a mi núcleo familiar, así como a mis amistades más sinceras que estuvieron conmigo en los momentos y circunstancias complejas; y que me dieron su solidaridad fraterna para arribar a esta meta.

Dedico este trabajo a todos aquellos Maestros que desde de mis Estudios en la Primaria, y hasta ahora en la carrera profesional me dieron lo mejor de sí, para que hoy llegue a titularme como licenciada en Ciencias Físico-Matemáticas en esta institución educativa.

Con especial cariño la dedico a los conocimientos adquiridos a lo largo de toda mi escolástica y muy en especial en esta carrera que son un firme cimiento que sostendrá mi ejercicio profesional durante todo el camino de mi vida, ya que el espíritu patriótico, cívico y ético que han sembrado en mi ser han establecido en mí, los valores permanentes para llevar con dignidad la Bandera Nicolaita.

Mi dedicación especial a la invaluable labor que hacen todos los integrantes de nuestra magna Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.

Fraternalmente:

SARA DELGADO GONZÁLEZ

Agradecimientos

El presente trabajo fue posible llevarlo a cabo, gracias a su arduo apoyo, a su incansable paciencia y a su gran motivación del Dr. Alberto Mendoza Suárez y del Dr. Héctor Pérez Aguilar, quien con sus conocimientos, experiencia, correcciones y aportaciones dedicados a la realización de esta tesis se llegó hasta la meta; es por ello, que les doy mi más amplia gratitud.

Agradezco en forma especial a los sinodales, quienes me hicieron las correcciones y observaciones de mi trabajo de tesis, me refiero al M.C. Gabriel Arroyo, al Dr. Eduardo Tututi y al Dr. Fernando Ramírez, integrantes de mi jurado, quienes cordialmente aceptaron colaborar para la culminación de dicho trabajo y llegar hasta su objetivo final.

A la institución de educación, la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, donde en su espacio fue mi segunda casa y fue la fuente donde adquirí los conocimientos más elementales para poder desarrollarme como profesionista y servir a la sociedad con principios y valores de rectitud, probidad, anteponiendo siempre los intereses de la sociedad a los personales; y en el aspecto académico obtuve los conocimientos integrales de la carrera que fueron aprendidos en sus aulas con la opción de elegir una actividad profesional llevando los principios y el valor de un Nicolaita, es por ello mi agradecimiento total a la máxima casa de estudios de nuestro estado, la U.M.S.N.H.

También me es propicio agradecer a todos y cada uno de los catedráticos en el transcurso de la carrera, quienes pusieron su mejor empeño para que una servidora tuviera los conocimientos necesarios de cada materia que ellos impartían, así como sus sabios consejos sobre la profesión y sobre la vida.

De igual forma deseo agradecer con mucho afecto y especial cariño a mi familia,

padres, hermanos y demás familiares más cercanos quienes me dieron una palabra de aliento y me motivaron a seguir con mucho empeño en mis estudios en la Primaria, Secundaria, Preparatoria y Licenciatura; para ellos, de corazón mi eterno agradecimiento.

También agradezco a todos aquellos amigos que en el transcurso de mi vida han estado siempre conmigo, en los momentos más difíciles y que me han dado su mano sin esperar nada a cambio y que ha sido parte importante para que me decidiera a realizar este trabajo de tesis.

Deseándoles lo mejor.

Sinceramente:

SARA DELGADO GONZÁLEZ

Contenido

	Página
Resumen	i
Abstract	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	vi
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	x
I. INTRODUCCIÓN	1
II. DESCRIPCIÓN TEÓRICA DEL MÉTODO INTEGRAL	6
II.1. Método de la Ecuación Integral	6
II.1.1. Consideraciones preliminares	6
II.1.2. Las funciones fuente	12
II.1.3. Discretización de las ecuaciones integrales	13
II.2. Método numérico aproximado	16
II.3. Método numérico riguroso	18
III. POTENCIAL ELECTROSTÁTICO EN UN CAPACITOR CON PLACAS ONDULADAS	21
III.1. Resultados comparativos de ambos métodos numéricos	21
III.1.1. Capacitor con placas planas paralelas	21
III.1.2. Capacitor con placas onduladas	31
IV. TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA EN UN CAPACITOR CON PLACAS ONDULADAS	39
IV.1. Descripción del método de diferencias finitas	40
IV.1.1. Trayectoria de la partícula en un capacitor con placas planas y paralelas	42
IV.1.2. Trayectoria de la partícula en un capacitor con placas onduladas	43
V. CONCLUSIONES	46
REFERENCIAS	48

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Izquierda: Esquema del proceso de fabricación de arreglos de nanocapacitores de AZnO/Al ₂ O ₃ /AZnO. Derecha: Imágenes transversales de los arreglos de nanocapacitores incrustados en una plantilla de aluminio sobre el silicio. Las imágenes fueron tomadas de la Ref. (Li <i>et al.</i> , 2012).	4
2	Sistema electrostático formado por dos placas conductoras corrugadas de extensión infinita.	7
3	Diagrama de dos placas con perfiles sinusoidales infinitos.	7
4	Sistema con placas planas infinitas y paralelas.	9
5	Campo eléctrico uniforme en el capacitor plano.	9
6	Geometría para el teorema de Green bidimensional.	11
7	Elección del punto de observación muy cerca de la superficie representado por \vec{r}	12
8	Contorno finito formado por dos superficies conductoras finitas y dos segmentos de recta.	17
9	Contorno de integración para el método numérico aproximado.	19
10	Potencial electrostático calculado analíticamente en un capacitor de placas planas y paralelas para una longitud $L_x = \pi$ cm representado por (a) colores entre $-0.5 V$ y $0.5 V$ y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$	25
11	Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = \pi/2$ cm representado por (a) colores entre $-0.5 V$ y $0.5 V$ y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$	26

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
12	Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = \pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$	27
13	Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = 2\pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$	28
14	Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = 3\pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$	29
15	Potencial electrostático calculado numéricamente por el método riguroso en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = \pi/2$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$	32
16	(a) Potencial electrostático en el capacitor de una placa ondulada con amplitud $A = 0.3b$ y una placa plana usando el método riguroso para $L_x = 10\pi$ cm. Potencial electrostático utilizando el método aproximado para las longitudes (b) $L_x = 2\pi$ cm, (c) 6π cm y (d) 10π cm.	35
17	(a) Potencial electrostático para un sólo periodo usando el método riguroso. Potencial electrostático de la parte central del capacitor utilizando el método aproximado para las longitudes (b) $L_x = 2\pi$ cm, (c) 6π cm y (d) 10π cm.	36

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página	
18	Potencial electrostático para un valor de (a) $x = x_1 = 0.05$ cm y (b) $x = x_2 = L_x/2$ para la longitud $L_x = 2\pi$ cm, y (c) $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) $x = x_2 = L_x/2$ para la longitud $L_x = 6\pi$ cm por los métodos riguroso (línea sólida) y aproximado (línea punteada).	37
19	Potencial de un capacitor formado por una superficie plana y una ondulada de amplitud (a) $A = 0.1b$, (b) $A = 0.2b$, (c) $A = 0.3b$ y (d) $A = 0.4b$. El campo eléctrico está representado por las flechas.	38
20	Componentes de la fuerza en las direcciones (a) x y (b) y . Componentes de la velocidad en las direcciones (c) x y (d) y para una partícula colocada en la posición inicial ($x_0 = 0$ cm, $y_0 = 0.75b$) y velocidad inicial ($v_{0x} = 1.5$ cm/s, $v_{0y} = 0.0$ cm/s).	43
21	Trayectoria de una partícula en un capacitor de placas plano paralelas para el caso analítico (línea sólida) y numérico (línea punteada). (a) Partícula colocada en $y = 0.75b$ con velocidad inicial $v_{0x} = 1.5$ cm/s y $v_{0y} = 0.0$ cm/s. (b) Partícula colocada en $y = 0.5b$ con velocidad inicial $v_{0x} = 1.0$ cm/s y $v_{0y} = 0.75$ cm/s.	44
22	Trayectoria de una partícula en un capacitor con una placa plano paralela y otra placa ondulada para el caso analítico (línea sólida) y numérico (línea punteada). La partícula está colocada en $y = 0.5b$ con velocidad inicial $v_{0x} = 0.76$ cm/s y $v_{0y} = 0.66$ cm/s con amplitud (a) $A = 0.2b$ y (b) $A = 0.3b$	45

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Capacitancia calculada numérica (C_L^A) y analíticamente (C_L^E) con su error porcentual entre el cálculo numérico aproximado y el analítico para diferentes longitudes L_x	24
II	Capacitancia calculada numérica (C_L^A) y analíticamente (C_L^E) con su error porcentual entre el cálculo numérico riguroso y el analítico para diferentes longitudes L_x	30
III	Capacitancia calculada numéricamente con el método riguroso (C_L^R) y aproximado (C_L^A) con su error porcentual para diferentes longitudes L_x	33

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

El concepto de cristal es bien conocido en la Física del Estado Sólido (Kittel, 2005; Ashcroft y Mermin, 1976). El cristal está formado por un conjunto discreto e infinito de puntos fijos en el espacio que forma un arreglo periódico. La periodicidad es tal que todos los puntos de la red son equivalentes en el sentido de que tienen los mismos alrededores. Este concepto es una idealización para un conjunto muy grande de átomos, cuyas posiciones promedio corresponden aproximadamente a las posiciones de los puntos de alguna estructura cristalina dada. Esa periodicidad da lugar al cumplimiento del teorema de Bloch para la función de onda asociada a los electrones. En este teorema se involucra el llamado “vector de Bloch” y resulta que el material tiene asociada una “relación de dispersión”, dada por una relación funcional entre la energía de los electrones en el material y el vector de Bloch. Esa relación conforma la llamada “estructura de bandas”, cuyo conocimiento es la base del entendimiento de diversos fenómenos físicos relacionados con el efecto del volumen del material. Por supuesto que para llegar a comprender al material como sistema físico también hay que estudiar efectos de superficie.

Recientemente, el concepto de cristal se ha usado en el ambiente de otras ondas que

no son las cuánticas. Tenemos el caso de los cristales fotónicos que están formados por distribuciones esparcidoras de luz (u otras ondas electromagnéticas), que forman arreglos periódicos (Yablonovitch, 1987; John, 1987; Joannopoulos *et al.*, 2008). También se tienen cristales fonónicos para la propagación de las ondas acústicas (Srivastava, 1990). El común denominador en todos los casos mencionados es la periodicidad de los arreglos y la existencia de su relación de dispersión correspondiente.

Los materiales cristalinos son sistemas complejos que son modelados y responden a ciertas ecuaciones. Los métodos de solución de las ecuaciones conducen en algunos casos particulares a soluciones exactas, aunque en general más bien se requieren métodos numéricos para resolverlas (Jackson, 1999). Ya sea en el caso cuántico o electromagnético, la ecuación de Helmholtz suele hacer su aparición y hay que saber resolverla. Por supuesto, un caso especial de esta ecuación, en la aproximación cuasiestática, es la ecuación de Laplace. Los métodos de solución para ésta resultan ser un buen antecedente para intentar resolver la ecuación de Helmholtz. Debe tomarse en cuenta que los métodos de los que hablamos son métodos especializados que deben ofrecer soluciones para sistemas periódicos infinitos, que es lo que supone en primera instancia el modelo y sin cuyo supuesto pierde sentido el concepto de cristal y sus fructíferas consecuencias (Lourtioz *et al.*, 2008; Sukhoivanov y Guryev, 2009). Por dicho nivel de especialización, los métodos de solución de los que hablamos no forman parte de la instrucción básica de un físico, sino que más bien aparecen en revistas de investigación y son objeto de estudio y desarrollo continuo.

En los materiales cristalinos los electrones están sujetos a una energía potencial aproximadamente periódica. Esta proviene de la interacción de los electrones con los núcleos atómicos y de la interacción con otros electrones. En primera aproximación la interacción entre un núcleo y un electrón es de tipo electrostático, de manera que el

campo de potencial al que esta sujeto un electrón dado tiene una forma característica.

Actualmente, la tecnología es capaz de manipular la materia en la escala nanométrica en un grado sorprendente. Se pueden fabricar arreglos que para ciertas aplicaciones pueden ser modeladas como “nano-superficies” y se pueden establecer diferencias de potencial eléctrico entre ellas, a la manera como lo podemos hacer fácilmente en la escala macroscópica al fabricar, por ejemplo, capacitores (Chang *et al.*, 2010; Son *et al.*, 2010). Como ejemplo se muestra en la figura 1 la fabricación de arreglos de nanocapacitores de $\text{AlZnO}/\text{Al}_2\text{O}_3/\text{AlZnO}$ sobre un sustrato de silicio para grandes aplicaciones de almacenamiento de la energía (ver Ref. (Li *et al.*, 2012)). Si consideramos nano-capacitores que provean cierto campo eléctrico o potencial electrostático entre sus placas, resulta que considerando un nano-capacitor formado por superficies periódicas se puede establecer un potencial periódico para electrones en forma distinta a la convencional. Nuestra capacidad de fabricar casi cualquier estructura a nivel nanométrico nos abre las puertas para establecer nuevos potenciales periódicos que den lugar a nano-cristales con interesantes propiedades físicas.

En este trabajo de tesis nos proponemos estudiar las propiedades de un capacitor con una placa conductora ondulada y con otra placa plana, que se asumen de extensión infinita y en condiciones electrostáticas. La geometría considerada es de tal forma que da lugar a que el sistema sea periódico y entonces tenemos algo así como un cristal de capacitores conectados en paralelo. Nos referimos a este sistema como “capacitor con estructura cristalina”. La periodicidad la tomaremos en forma estricta, aunque físicamente no pueda existir un sistema de extensión infinita como el propuesto. De todas maneras, implementaremos un método riguroso para resolver numéricamente el problema y dejaremos establecido, numéricamente, el potencial electrostático que aparece en nuestro sistema. Aclaremos que en este caso no se tiene el cumplimiento del teo-

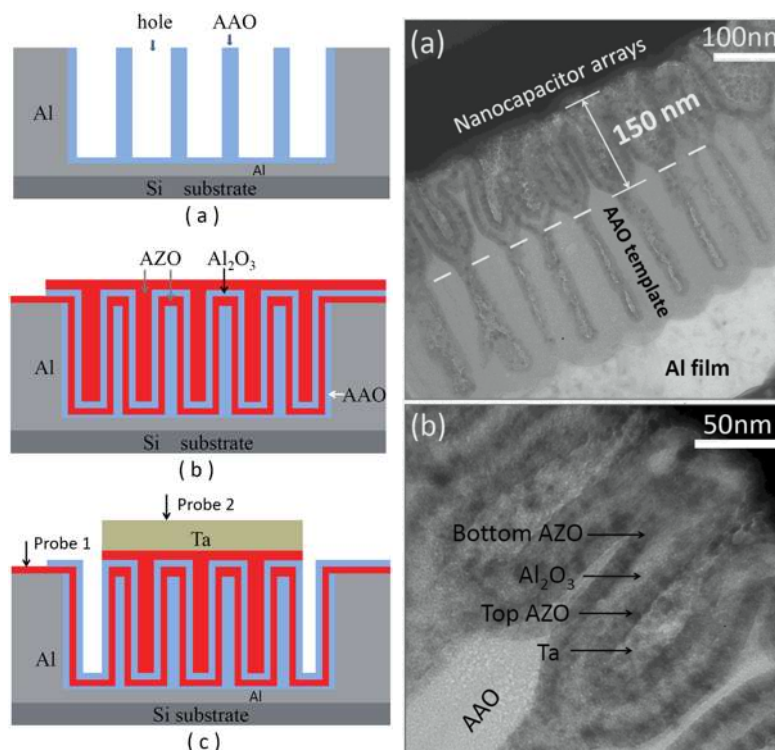


Figura 1. Izquierda: Esquema del proceso de fabricación de arreglos de nanocapacitores de AZnO/Al₂O₃/AZnO. Derecha: Imágenes transversales de los arreglos de nanocapacitores incrustados en una plantilla de aluminio sobre el silicio. Las imágenes fueron tomadas de la Ref. (Li *et al.*, 2012).

rema de Bloch y tampoco una estructura de bandas para el sistema estudiado, porque la ecuación básica del modelo es la ecuación de Laplace (y no la de Helmholtz).

Los métodos numéricos que se presentan en esta tesis son métodos integrales que desarrollamos inspirados por métodos que ya se han publicado y que permiten resolver ciertos problemas de cristales fotónicos (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006, 2007, 2011). Creemos que este trabajo nos dará ideas que en un futuro aplicaremos al estudio de cristales fotónicos y fonónicos.

La geometría del capacitor estudiado correspondiente a la placa ondulada se ha usado para establecer túneles clásicos para la transmisión de partículas. Resulta que en ciertas condiciones, la superficie ondulada es básica para que aparezcan propiedades caóticas en el sistema (Herrera-González *et al.*, 2011). Esto nos da idea para establecer

un sistema aún más interesante: la transmisión de partículas cargadas por un capacitor con una placa ondulada periódica (y por lo tanto infinita). Creemos que, aunada a la geometría, la inhomogeneidad del campo eléctrico que se tiene en este caso podría alterar de forma interesante las propiedades caóticas, que corresponden a partículas sin carga eléctrica. Avanzamos en este problema obteniendo trayectorias de partículas cargadas por medio de un método numérico basado en diferencias finitas.

El desarrollo de este trabajo es como sigue: en el capítulo II se presenta el sistema a estudiar y dos métodos numéricos útiles para resolver el problema planteado; uno de estos es “aproximado” y el otro “riguroso”. En el capítulo III se comparan los resultados de ambos métodos y se discute la aplicación de cada uno; también, se caracteriza el capacitor con estructura cristalina. En el capítulo IV se propone un método numérico para encontrar trayectorias de partículas cargadas que se mueven en el interior del capacitor. Finalmente, en el capítulo V se dan las conclusiones de este trabajo.

Capítulo II

DESCRIPCIÓN TEÓRICA DEL MÉTODO INTEGRAL

En este capítulo se presenta una breve descripción del método de la ecuación integral para enfocarnos sobre los aspectos relevantes del problema a tratar en el resto de la tesis. Posteriormente, se analizan dos casos del método integral. El primer método que es aproximado permite estudiar el capacitor de placas planas paralelas con una extensión suficientemente grande pero finita. Y el segundo método es riguroso para estudiar el capacitor como un sistema periódico e infinito.

II.1. Método de la Ecuación Integral

II.1.1. Consideraciones preliminares

Consideremos un sistema electrostático formado por dos placas conductoras de extensión infinita, una ondulada y otra plana, tal como se representa en la Fig. 2.

Se considera que las superficies conductoras son homogéneas en una cierta dirección de simetría, es decir, en la dirección z . Además, el sistema es periódico en la dirección x . Otra forma de entender este tipo de superficies es considerar una función en el plano

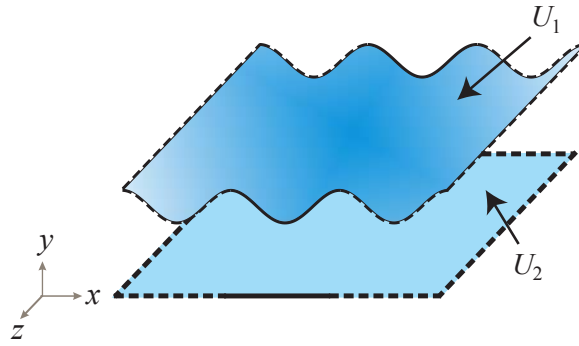


Figura 2. Sistema electrostático formado por dos placas conductoras corrugadas de extensión infinita.

$x - y$ (por ejemplo) que se traslada a lo largo del eje z , generando de esta manera a la superficie considerada. La región entre las placas se supone vacía. Se establece un potencial U_1 en la placa superior y otro U_2 en la inferior, de manera que la diferencia de potencial (constante) es $\Delta U = U_2 - U_1$.

Debido a la simetría de las superficies consideradas el potencial electrostático, U , no puede depender de la dirección de simetría z , por lo que podemos tratar el problema en dos dimensiones usando una sección transversal tal como se muestra en la Fig. 3 por medio de los perfiles (funciones) correspondientes a las superficies.

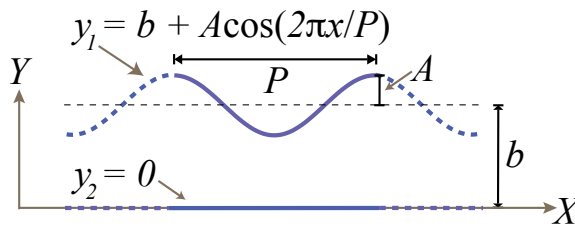


Figura 3. Diagrama de dos placas con perfiles sinusoidales infinitos.

Las superficies promedio de las placas son planos infinitos paralelos y separados por una distancia b . La corrugación de las superficies es representada por medio de las funciones $y_1(x) = b + A \cos(2\pi x/P)$ y $y_2(x) = 0$, para la superficie superior y para la inferior, respectivamente. En las funciones anteriores, A representa la amplitud del

perfil ondulado en forma armónica y P es su periodo. Enfatizamos que la propiedad geométrica básica de este sistema es que es periódico en la dirección x , con periodo P .

Como es bien conocido, en la región vacía las ecuaciones de campo electrostáticas son

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \text{y} \quad \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (1)$$

La segunda implica que existe el potencial escalar, U , tal que el campo eléctrico se puede representar por

$$\vec{E} = -\nabla U(x, y). \quad (2)$$

Combinando con la ley de Gauss resulta que el potencial electrostático satisface la ecuación de Laplace bidimensional

$$\nabla^2 U(x, y) = 0, \quad (3)$$

además de las condiciones a la frontera dadas en las superficies conductoras, las cuales previamente fueron mencionadas en la Fig. 2 y podemos escribirlas como

$$U(x, y) \big|_{y_1(x)} = U_1 \quad \text{y} \quad U(x, y) \big|_{y_2(x)} = U_2. \quad (4)$$

Nuestro problema básico es encontrar el potencial en la región vacía entre las placas conductoras. Una vez encontrado el potencial se pueden hallar otras propiedades del sistema tal como el campo eléctrico o la capacitancia.

La solución del problema para el potencial $U(x, y)$ es exacta en el caso de placas planas (sin ondulación) y esto nos sirve como “calibración” para el caso general de superficies onduladas, que da lugar a un problema en el que tendremos que conformarnos con soluciones numéricas. El caso de superficies planas se representa en la Fig. 4, en

donde estrictamente se considera la geometría de un capacitor idealizado de placas infinitas.

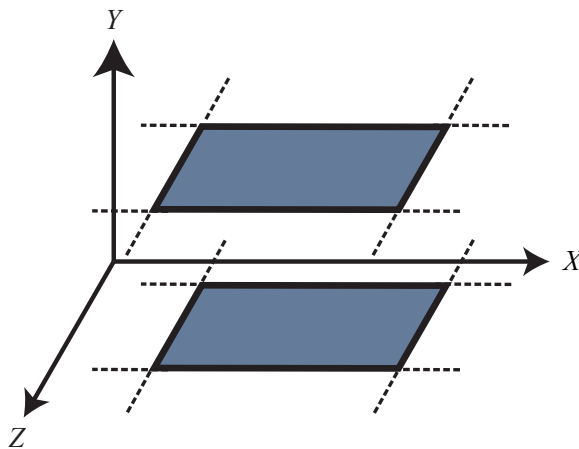


Figura 4. Sistema con placas planas infinitas y paralelas.

En este caso resolvemos el problema fácilmente obteniéndose que

$$U(x, y) = - \left(\frac{U_2 - U_1}{b} \right) y + U_2 = - \frac{\Delta U}{b} y + U_2, \quad (5)$$

la cual es una función que obviamente satisface la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera: $U(x, y = b) = U_1$ y $U(x, y = 0) = U_2$. En este caso se tiene un campo eléctrico uniforme con líneas de campo verticales, cuya magnitud está dada por $E = \Delta U/b$, asumiendo que $U_2 > U_1$, como se ilustra en la Fig. 5. El campo mostrado en la

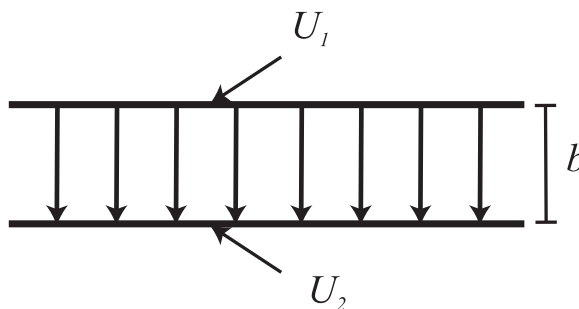


Figura 5. Campo eléctrico uniforme en el capacitor plano.

Fig. 5 está dirigido desde la placa que tiene el potencial más alto hacia la placa con el

potencial más bajo.

Una propiedad importante es la capacitancia, correspondiente a una porción finita de las placas de área A , dada por $C = Q/|\Delta U|$, donde Q es la carga eléctrica de la superficie conductora cargada positivamente. Resulta que $C = \epsilon_0 A/b$, donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío.

En el caso de capacitores con superficies onduladas en general no existen soluciones exactas para el problema del potencial por lo que debemos resolver el problema numéricamente. A continuación delinearemos un método numérico que nos permitirá resolver el problema planteado y que es original en este trabajo de tesis, aunque tiene mucho en común con los métodos presentados en las Refs. (Mendoza-Suárez *et al.*, 2011; Pérez-Aguilar *et al.*, 2013).

Para tratar de resolver el problema planteado, consideremos una función de Green, $G(x, y; X, Y)$, que depende de las coordenadas cartesianas de un punto que puede considerarse como “punto de observación”, (x, y) , y otro que puede denominarse “punto fuente”, (X, Y) . La función de Green se define como cualquier solución de la ecuación

$$\nabla^2 G(x, y; X, Y) = -\delta(x - X, y - Y) \quad (6)$$

donde $\delta(x - X, y - Y)$ representa a la función delta de Dirac. Recordemos que esta función es nula para $(x, y) \neq (X, Y)$, infinita en $(x, y) = (X, Y)$, pero su integral $\int \int \delta(x - X, y - Y) dX dY$, rodeando al punto de observación (x, y) , es igual a 1. Es conocido (Arfken *et al.*, 2013) que una solución de la Ec. (6) es

$$G(x, y; X, Y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2}. \quad (7)$$

La interpretación física de esta función es que se trata de un potencial electrostático producido en el punto de observación (x, y) y generado por una distribución de carga eléctrica lineal y uniforme, cuya densidad lineal de carga estaría dada por $\lambda = \epsilon_0$. Esta

distribución estaría extendida a lo largo del eje z y pasaría por el punto fuente (X, Y) .

Un teorema importante es el teorema de Green bidimensional, que podemos aplicarlo al par de funciones U y G . Este teorema establece una relación entre una integral de superficie y una de línea y lo podemos formular como sigue

$$\int_R (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) da = \oint_C \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (8)$$

donde R es un dominio de las funciones U y G ; C es un contorno cerrado que sirve como frontera del dominio R y que puede estar formado por puntos tanto en un dominio finito como en uno infinito; $\partial U / \partial n = \nabla G \cdot \hat{n}$ es la derivada normal de G y análogamente para U ; \hat{n} es el vector en el plano $x - y$ que es normal al contorno C y que apunta hacia afuera de la región; da es el diferencial de superficie y ds es el diferencial de longitud de arco (ver Fig. 6). Sustituyendo las Ecs. (3) y (6) en la Ec. (8) se obtiene

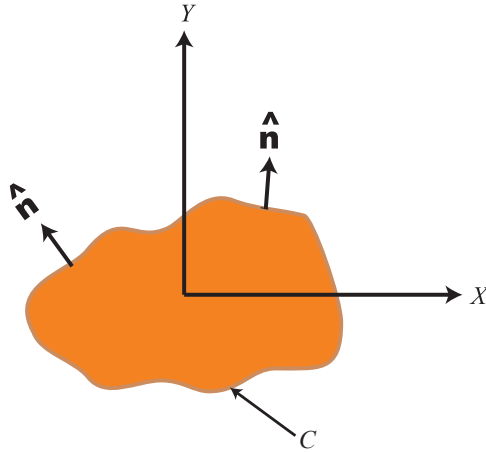


Figura 6. Geometría para el teorema de Green bidimensional.

$$\oint_C \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{\partial G}{\partial n} U \right) ds = \begin{cases} U(x, y), & \text{si } (x, y) \text{ está en } R \\ 0, & \text{si } (x, y) \text{ no está en } R \end{cases}. \quad (9)$$

A partir de la Ec. (9) se puede formular métodos numéricos que nos permiten encontrar el potencial $U(x, y)$ en la región R , que en nuestro caso es simplemente la región vacía entre las superficies conductoras.

II.1.2. Las funciones fuente

Note que el potencial buscado y su derivada normal aparecen dentro de una integral y el potencial mismo está despejado en un caso del lado derecho de la Ec. (9). Esta ecuación nos puede servir para encontrar lo que llamaremos “fuentes” representadas por U y $\partial U/\partial n$. Esto se logra evaluando la integral de línea en puntos de observación afuera de la región R por lo que dicha integral es igual a cero en este caso. Una vez encontradas las fuentes, la Ec. (9) también nos sirve para encontrar el potencial $U(x, y)$, obviamente en puntos de observación adentro de R .

Para encontrar las fuentes que aparecen en la Ec. (9) usamos el caso en que el punto de observación, (x, y) , está afuera de la región R . Específicamente, usaremos puntos que estén infinitesimalmente separados del perfil C , tal como lo muestra la Fig. 7. De esta manera, podemos escribir el punto de observación como

$$(x, y) = (X + \varepsilon n_x, Y + \varepsilon n_y), \quad (10)$$

donde ε es un infitesimal positivo, (n_x, n_y) representa a la normal hacia afuera de la superficie y (X, Y) es un vector del perfil C . Con esta elección obtenemos una ecuación

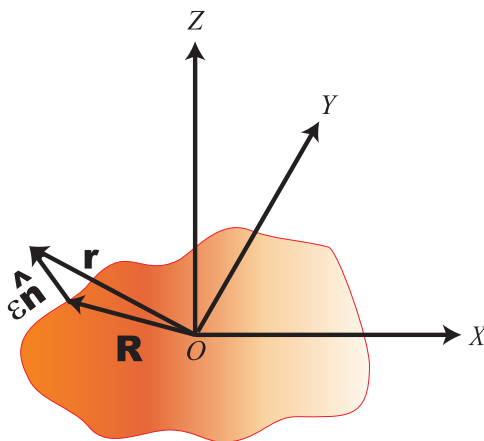


Figura 7. Elección del punto de observación muy cerca de la superficie representado por \vec{r} .

integral a resolver expresada por

$$\oint_C G \frac{\partial U}{\partial n} ds = \oint_C \frac{\partial G}{\partial n} U ds. \quad (11)$$

En la Ec. (11) tenemos como posibles funciones incógnitas al potencial U y a su derivada normal $\partial U/\partial n$. Recordamos que la función de Green G es conocida y debido a esto su derivada normal $\partial G/\partial n$ es también una función conocida. Debe aclararse que las integrales dependen del parámetro ε y que en algún momento debe tomarse el límite cuando el infinitésimo ε tiende a cero.

II.1.3. Discretización de las ecuaciones integrales

Las integrales que estamos considerando son integrales de línea y, en primera instancia, la variable de integración es el parámetro de longitud de arco s . Debido a esto conviene representar los integrandos en términos de dicho parámetro y para hacerlo consideremos una representación paramétrica de los puntos que conforman el perfil C . Se toman formas paramétricas de las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario $(X(s), Y(s))$ y de sus derivadas de primer $(X'(s), Y'(s))$ y segundo $(X''(s), Y''(s))$ orden, donde se supone que todas estas funciones son continuas al menos por tramos. Para avanzar en la solución numérica del problema realizamos una cierta discretización. Para esto elegimos n puntos igualmente espaciados sobre cada perfil. La distancia entre dos puntos consecutivos a lo largo de la curva es denotada por Δs . Podemos asociar a los puntos parámetros correspondientes de longitud de arco, s_1, s_2, \dots, s_n , que sirven para representar a los n puntos en la forma: $(X(s_1), Y(s_1)), (X(s_2), Y(s_2)), \dots, (X(s_n), Y(s_n))$. Suponemos que igualmente las n longitudes de arco consideradas nos permiten calcular el valor de las derivadas de primer y segundo orden en los puntos del muestreo.

Asumiendo Δs suficientemente pequeño, las integrales que aparecen en la Ec. (11) se pueden representar por sumas sobre pequeños intervalos. Como muestra para una de ellas se hace la aproximación rectangular

$$\oint_C G \frac{\partial U}{\partial n} ds \simeq \sum_{j=1}^n L_{ij} F_j, \quad (12)$$

donde $F_j = \partial U / \partial n|_{s=s_j}$ es la derivada normal del potencial electrostático evaluada en el j -ésimo punto y los L_{ij} representan a elementos de matriz, definidos por la expresión integral

$$L_{ij} = \int_{s_j - \Delta s/2}^{s_j + \Delta s/2} G(X_i + \varepsilon n_{xi} - X, Y_i + \varepsilon n_{yi} - Y) ds. \quad (13)$$

Por supuesto que en la integral de la expresión anterior hay que tomar el límite cuando ε tiende a 0.

La otra integral que aparece en la Ec. (11) puede aproximarse por

$$\oint_C \frac{\partial G}{\partial n} U ds \simeq \sum_{j=1}^n N_{ij} U_j, \quad (14)$$

donde U_j es el potencial electrostático evaluado en el j -ésimo punto y los N_{ij} representan a elementos de matriz, definidos por la expresión

$$N_{ij} = \int_{s_j - \Delta s/2}^{s_j + \Delta s/2} \frac{\partial G}{\partial n} (X_i + \varepsilon n_{xi} - X, Y_i + \varepsilon n_{yi} - Y) ds. \quad (15)$$

En la Ec. (15) también hay que tomar el límite cuando ε tiende a 0.

Esbozemos brevemente algunos detalles de la manera como se procede para calcular los elementos de matriz, L_{ij} y N_{ij} .

Se encuentra que para los elementos L_{ij} puede intercambiarse el orden entre el límite y la integral y aplicarse directamente el límite dentro de la integral, por lo que se obtiene

$$L_{ij} = \int_{s_j - \Delta s/2}^{s_j + \Delta s/2} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \ln \sqrt{(X_i - X(s))^2 + (Y_i - Y(s))^2} ds. \quad (16)$$

Debe tomarse en cuenta que las funciones paramétricas son arbitrarias en el formalismo general por lo que la integral anterior no se puede resolver exactamente. Para el caso de los elementos que están fuera de la diagonal ($i \neq j$), se toma en cuenta que el intervalo de integración es suficientemente pequeño, y representamos la integral por una simple aproximación rectangular

$$L_{ij} = -\frac{\Delta s}{2\pi} \ln \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}. \quad (17)$$

En el caso de los elementos de la diagonal ($i = j$) el integrando tiene una singularidad en el punto medio del intervalo de integración por lo que hay que integrar adecuadamente dicha singularidad. Afortunadamente la singularidad es integrable como se muestra a continuación. Haciendo el cambio de variable $u = s - s_j$ podemos escribir

$$L_{jj} = \int_{-\Delta s/2}^{+\Delta s/2} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \ln \sqrt{(X_j - X(u + s_j))^2 + (Y_j - Y(u + s_j))^2} du. \quad (18)$$

Consideremos las expansiones en serie de Taylor en términos del parámetro pequeño u y a primer orden

$$X(u + s_j) \simeq X_j + X'_j u \quad y \quad Y(u + s_j) \simeq Y_j + Y'_j u, \quad (19)$$

donde X_j y Y_j son las funciones paramétricas evaluadas en $s = s_j$, y X'_j y Y'_j son las primeras derivadas evaluadas en ese mismo valor de la longitud de arco. Además, debido a la relación $ds^2 = dX^2 + dY^2$ se obtiene que en un punto arbitrario

$$X'^2 + Y'^2 = 1. \quad (20)$$

Sustituyendo en la Ec. (18) se obtiene

$$L_{jj} = \int_{-\Delta s/2}^{+\Delta s/2} \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \ln |u| du. \quad (21)$$

Tomando en cuenta que el integrando es una función par, desarrollamos la integral

$$L_{jj} = \left(-\frac{1}{\pi}\right) \int_0^{+\Delta s/2} \ln(u) du = \left(-\frac{1}{\pi}\right) [u \ln(u) - u]_0^{\Delta s/2} = -\frac{\Delta s}{2\pi} \ln\left(\frac{\Delta s}{2e}\right). \quad (22)$$

Finalmente, de las Ecs. (21) y (22) podemos representar a los elementos de matriz L_{ij} por

$$L_{ij} = -\frac{\Delta s}{2\pi} \begin{cases} \ln \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, & \text{si } i \neq j \\ \ln\left(\frac{\Delta s}{2e}\right), & \text{si } i = j \end{cases}. \quad (23)$$

Para el cálculo de los elementos de matriz N_{ij} debemos de tener más cuidado, particularmente en el caso de los elementos de matriz de la diagonal. En este caso el límite cuando ϵ tiende a 0 debe tomarse hasta después de la integración (ver Ref. (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006)). El resultado para N_{ij} se puede expresar como

$$N_{ij} = \begin{cases} \frac{\Delta s}{2\pi} \frac{[-(X_i - X_j)Y_j' + (Y_i - Y_j)X_j']}{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}, & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} (X_j'Y_j'' - X_j''Y_j'), & \text{si } i = j \end{cases}, \quad (24)$$

donde X_j'' y Y_j'' son las derivadas de segundo orden evaluadas en $s = s_j$.

La ecuación integral dada por la Ec. (11) puede tratarse de varias maneras para obtener una solución numérica del problema. Entre los intereses de este trabajo está la comparación de dos métodos numéricos de solución: uno “aproximado” y otro “riguroso”. Ambos métodos tienen mucho en común y se exponen a continuación.

II.2. Método numérico aproximado

Para esto hay que considerar especialmente que el sistema estudiado en este trabajo tiene una extensión infinita a lo largo de las placas (dirección x), por lo que la longitud de arco total del contorno C necesitado es infinita. Esto por supuesto representa una complicación. Se sabe que algunos resultados para el capacitor de placas planas, paralelas e infinitas se pueden usar como buena aproximación para un capacitor de placas

planas, paralelas y finitas, siempre que la distancia entre las placas sea relativamente pequeña en este último caso. Análogamente, consideremos una aproximación en donde el contorno C abarca solamente una región suficientemente grande pero por supuesto finita. La geometría considerada para este caso se muestra en la Fig. 8.

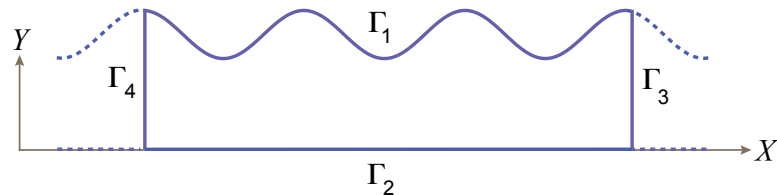


Figura 8. Contorno finito formado por dos superficies conductoras finitas y dos segmentos de recta.

Intentemos aplicar la Ec. (9) exclusivamente al contorno finito C formado por dos perfiles correspondientes a superficies conductoras finitas y por dos segmentos de recta verticales que sirven como frontera (bidimensional). Se trata de una curva cerrada C formada por los perfiles Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 , que solamente abarca longitudes finitas. No hay que olvidar que nuestro capacitor (Fig. 5) tiene placas conductoras extendidas infinitamente en las direcciones x y z . Estrictamente hablando, el contorno cerrado C debería estar formado por perfiles de longitud infinita sobre los conductores del capacitor y cerrado por perfiles formados por puntos al infinito. Estos últimos perfiles serían segmentos de recta paralelos al eje y . Sin embargo, la incapacidad computacional para tomar un muestreo con un número infinito de puntos, entre otros detalles, hacen necesario cortar el contorno usando algún criterio de aproximación. Veremos que obtenemos buena aproximación al problema con tal de que los perfiles Γ_1 y Γ_2 tengan una longitud (proyectada en dirección x) que sea suficientemente grande en relación a la distancia promedio entre las placas conductoras y, como condición extra, se desprecian las contribuciones a las integrales de los perfiles verticales Γ_3 y Γ_4 . Ya comentaremos más adelante cuando veamos los resultados numéricos al respecto. Particularmente, al

despreciar las integrales sobre los perfiles verticales aparecen efectos espurios de borde. Sin embargo, por ejemplo para el cálculo de de la capacitancia del sistema, que es una propiedad del sistema como un todo, los efectos de borde pueden ser muy pequeños.

En este caso la ecuación integral (Ec. (11)) puede escribirse como

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2} G \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2} \frac{\partial G}{\partial n} U ds. \quad (25)$$

En esta ecuación la incógnita es la derivada normal $\partial U/\partial n$, ya que el potencial U es conocido sobre las superficies conductoras. Sustituyendo las integrales en términos de sumatorias sobre pequeños intervalos y utilizando una discretización de los perfiles Γ_1 y Γ_2 , podemos sustituir la ecuacion anterior por un sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones algebraicas

$$\sum_{j=1}^{n_1+n_2} L_{ij} F_j = b_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2, \quad (26)$$

donde el término inhomogéneo, b_i , está dado por

$$b_i = U_1 \sum_{j=1}^{n_1} N_{ij} + U_2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} N_{ij} \quad (27)$$

y los enteros n_1 y n_2 son los números de puntos sobre Γ_1 y Γ_2 , respectivamente. Los elementos de matriz L_{ij} y N_{ij} están dados por las Ecs. (23) y (24).

II.3. Método numérico riguroso

Recientemente A. Mendoza-Suárez *et al.* han propuesto una serie de trabajos en los que estudian sistemas periódicos infinitos, tales como cristales fotónicos y guías de ondas (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006, 2007, 2011; Pérez-Aguilar *et al.*, 2013). Proponemos un método de solución aplicando la Ec. (9) a lo que llamaremos una “celda unitaria” del capacitor de extensión infinita. La celda unitaria usada es representada en la Fig. 9 y es

un concepto análogo al que aparece en la Física del Estado Sólido (Kittel, 2005). Para nuestro caso, sencillamente es una región básica tal que el sistema es una repetición de una infinidad de estas celdas unitarias; unas trasladadas respecto a las otras por medio de un vector de traslación $nP\hat{x}$, donde n es un número entero y \hat{x} es un vector unitario en la dirección x .

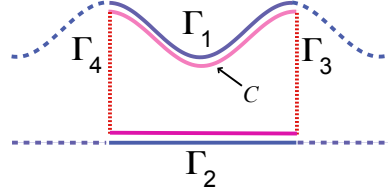


Figura 9. Contorno de integración para el método numérico aproximado.

Las condiciones frontera en los perfiles armónicos están dados por la Ec. (4) y las condiciones frontera en los perfiles rectos verticales son condiciones de periodicidad que se pueden expresar por

$$U(x, y) = U(x + P, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial n}(x, y) = -\frac{\partial U}{\partial n}(x + P, y). \quad (28)$$

El signo negativo en la condición de la derecha es debido a que las normales (hacia afuera de la celda unitaria) de los perfiles verticales (izquierdo y derecho) son antiparalelas.

En este caso la ecuación integral (Ec. (11)) puede escribirse como

$$\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} G \frac{\partial U}{\partial n} ds = \int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4} \frac{\partial G}{\partial n} U ds. \quad (29)$$

Sustituyendo las integrales en términos de sumatorias sobre pequeños intervalos y utilizando una discretización de los perfiles Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 , podemos sustituir la Ec. (29)

por un sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_1} L_{ij(1)} F_{j(1)} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} L_{ij(2)} F_{j(2)} + \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} (L_{ij(3)} - L_{ij(4)}) F_{j(3)} \\ - \sum_{j=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3} (N_{ij(3)} + N_{ij(4)}) U_{j(3)} = b_i, \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \dots, n_1 + n_2 + n_3 + n_4,$ (30)

donde en este caso el término inhomogéneo, b_i , está dado por

$$b_i = U_1 \sum_{j=1}^{n_1} N_{ij} + U_2 \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} N_{ij} \quad (31)$$

y los enteros n_1 , n_2 , n_3 y n_4 son los números de puntos sobre Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 respectivamente, con $n_1 = n_2$ y $n_3 = n_4$. Una precisión es que, por ejemplo, los símbolos $L_{ij(3)}$ representan a elementos de matriz dados por la Ec. (23) pero calculados usando puntos j ubicados sobre el contorno Γ_3 , mientras que los $L_{ij(4)}$ representan a elementos de matriz (dados por la Ec. (23)) pero con puntos j ubicados sobre el contorno Γ_4 . También, por ejemplo, $U_{j(3)}$ representa al potencial en puntos j ubicados sobre el contorno Γ_3 . Note que, en nuestro sistema de ecuaciones, el número de ecuaciones ($n_1 + n_2 + n_3 + n_4$) coincide con el número de incógnitas por lo que en principio es posible obtener una solución numérica única.

En el siguiente capítulo mostraremos resultados numéricos correspondientes a estos dos métodos desarrollados.

Capítulo III

POTENCIAL ELECTROSTÁTICO EN UN CAPACITOR CON PLACAS ONDULADAS

En este capítulo presentamos un estudio numérico del sistema propuesto en esta tesis. Comparamos resultados correspondientes a cada uno de los dos métodos propuestos en el capítulo anterior. Los resultados se presentan para el potencial electrostático en un capacitor con placas planas y paralelas y en un capacitor con placas onduladas periódicas.

III.1. Resultados comparativos de ambos métodos numéricos

III.1.1. Capacitor con placas planas paralelas

Primeramente mostraremos que nuestros métodos numéricos reproducen razonablemente bien el caso de dos placas conductoras, paralelas e idealmente de extensión infinita. Al asumir que las placas están a una cierta diferencia de potencial y en condiciones electrostáticas tenemos el caso de un capacitor con propiedades bien conocidas.

Recordemos que de acuerdo a la Ec. (5) el potencial electrostático en el caso considerado está dado por $U(x, y) = \frac{\Delta U}{b}y + U_1$. Esto nos dice que el campo eléctrico es uniforme y lo representamos por

$$\vec{E} = -\nabla U(x, y) = -\hat{y}\partial U/\partial y = -\hat{y}\Delta U/b, \quad (32)$$

donde \hat{y} es un vector unitario en la dirección positiva del eje y (ver Fig. 6). Otro resultado bien conocido es que la capacitancia, C , está definida por el cociente entre la carga positiva, Q , ubicada sobre la placa conductora con más alto potencial y el valor absoluto de la diferencia de potencial entre las placas, $|\Delta U|$, esto es $C = Q/|\Delta U|$. El resultado para el capacitor de placas planas es $C = \varepsilon_0 L_x L_z/b$ con ε_0 la permitividad del medio aislante entre las placas conductoras (en nuestro problema es el vacío); L_x y L_z representan longitudes finitas sobre cualquiera de las superficies planas conductoras a lo largo de las direcciones x y z . Debe aclararse que aunque nuestro modelo supone placas de extensión infinita, una capacitancia finita solamente se obtiene si nosotros calculamos C para una superficie finita de área $L_x L_z$. Otra consideración que necesitamos hacer proviene del hecho de que por la simetría de nuestro sistema en la dirección z nuestro formalismo es básicamente bidimensional (en el plano $x - y$). Conviene entonces definir la capacitancia por unidad de longitud, C_L , en la forma

$$C_L = \frac{C}{L_z}. \quad (33)$$

En el caso del capacitor de placas planas se obtiene en forma exacta como $C_L^E = \varepsilon_0 L_x/b$; que tomando en cuenta el valor de la permitividad en el vacío puede reescribirse como

$$C_L^E = \frac{1}{4\pi} \frac{10}{8.99} \frac{L_x}{b} \text{ pF/cm}. \quad (34)$$

Un picofaradio (pF) es la billonésima parte (10^{-12}) de un faradio (F). En este trabajo de tesis se asume el sistema de unidades internacional, excepto en el caso de las

longitudes que se consideran en centímetros (cm).

La capacitancia calculada numéricamente se puede obtener por

$$C_L^A = \frac{Q}{L_z |\Delta U|} = \frac{1}{4\pi} \frac{10}{8.99} \left(\frac{\Delta s}{|\Delta U|} \sum_{j=1}^{n_1} F_{j(1)} \right) \text{ pF/cm}, \quad (35)$$

ya que la fuente $F = \partial U / \partial n = \sigma / \varepsilon_0$, donde σ es la densidad de carga eléctrica en la superficie conductora cargada positivamente. La sumatoria que aparece en la Ec. (38) es proporcional a la carga eléctrica, Q , en dicha superficie.

En las simulaciones numéricas que se presentan enseguida suponemos una distancia entre placas $b = \pi$ cm; una longitud de arco de los contornos Γ_1 y Γ_2 variable y representada por $L_x = \alpha 2\pi$ cm, donde el parámetro α es algún número real útil para expresar longitudes relativamente pequeñas o grandes en relación al parámetro b ; un intervalo de discretización medio $\Delta s = 0.025$ cm. Finalmente se asume una diferencia de potencial $|\Delta U| = 1$ V, calculada por medio de la elección $U_1 = 0.5$ V y $U_2 = -0.5$ V.

A continuación se muestran las desviaciones de la aplicación del Método Numérico Aproximado por medio del cálculo de la capacitancia (por unidad de longitud) del sistema formado por conductores planos y paralelos. En la tabla I, C_L denota a la capacitancia calculada numéricamente; C_L^E es la capacitancia calculada analíticamente con la Ec. (34); y $Err = 100\% |C_L^A - C_L^E| / C_L^E$ es el error porcentual entre el cálculo numérico y el analítico.

Para entender los resultados de la tabla I se deberá considerar que, teóricamente, la aproximación numérica debe ser mejor entre más pequeña sea la distancia relativa (b/L_x) que separa los planos conductores. Esto porque la aproximación de campo eléctrico uniforme se cumple mejor en el caso señalado en una región más grande entre los conductores. Los resultados de la tabla I son consistentes con este hecho. Para alcanzar un error porcentual razonablemente pequeño debemos hacer que $b/L_x \leq 1/10$. De

Tabla I. Capacitancia calculada numérica (C_L^A) y analíticamente (C_L^E) con su error porcentual entre el cálculo numérico aproximado y el analítico para diferentes longitudes L_x .

b (cm)	L_x (cm)	C_L^A (pF/cm)	C_L^E (pF/cm)	Err (%)
π	$\pi/2$	0.0758	0.0442	71.36
π	π	0.1191	0.0885	34.56
π	2π	0.2067	0.1770	16.75
π	3π	0.2948	0.2655	11.02
π	10π	0.9139	0.8851	3.25

hecho para $L_x = 10b$ ($= 10\pi$ cm) resulta que $C_L^A = 0.9139$ pF/cm, $C_L^E = 0.8851$ pF/cm y $Err = 3.25\%$, que es por supuesto ya un error razonablemente pequeño.

Es conveniente representar el potencial electrostático para los casos mostrados en la tabla I. En la Fig. 10 se muestra el potencial para el capacitor plano calculado de forma analítica y utilizando diferentes representaciones, se considera una longitud $L_x = \pi$ cm.

En la Fig. 10(a) se muestra el potencial electrostático en el capacitor de placas planas y paralelas, donde los colores representan el valor del potencial (entre -0.5 V y 0.5 V). En la Fig. 10(b) la gráfica se realiza en base a líneas de nivel, que son líneas en las que potencial electrostático es constante, que por supuesto son horizontales. En la Fig. 10(c) se grafica el potencial contra la posición en la dirección y , esto para un valor de x constante y cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm. Finalmente, la Fig. 10(d) muestra el potencial contra la posición en la dirección y , para un valor de x constante y en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$. Todas esas representaciones permiten llegar a concluir que el campo eléctrico es perfectamente uniforme y que las condiciones de frontera para el potencial se satisfacen.

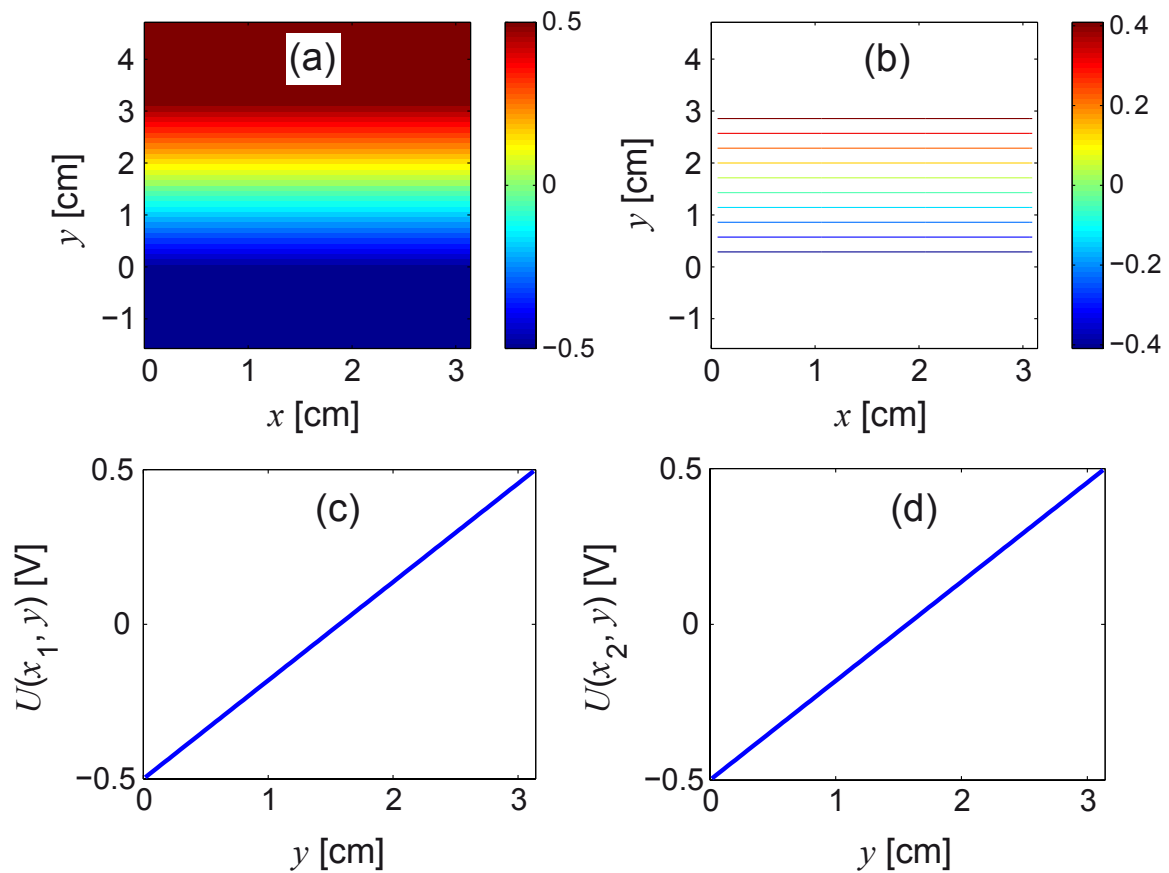


Figura 10. Potencial electrostático calculado analíticamente en un capacitor de placas planas y paralelas para una longitud $L_x = \pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$.

En la Fig. 11 aparece el potencial para el capacitor plano calculado con el método numérico aproximado para una longitud $L_x = \pi/2$ cm.

Las Figs. 11(a)-(d) son representaciones análogas a las correspondientes en la Fig. 11(a)-(d). Debido a que el capacitor es muy ancho no se obtiene una buena aproximación para la capacitancia por unidad de longitud, C_L , ya que el error porcentual en este caso es 71.36%, que por supuesto es un error grande. Sin embargo, el comportamiento general del potencial en la región entre las placas no es malo, como puede apreciarse de la Fig. 11. Esto excepto en regiones cercanas a los extremos del sistema finito donde se

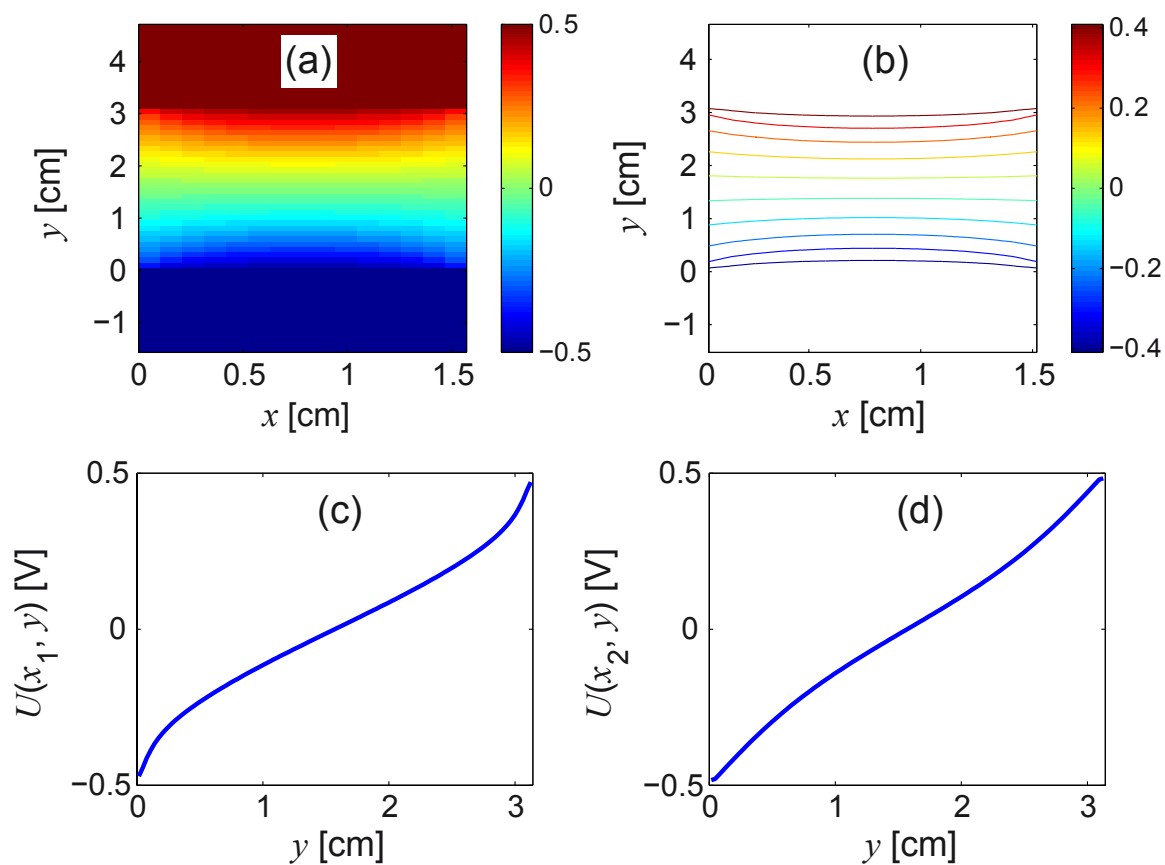


Figura 11. Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = \pi/2$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$.

aprecian los llamados “efectos de borde”, que son debidos a que calculamos integrales sobre superficies de longitud finita, siendo que nuestro sistema propuesto tiene longitud infinita. Podemos concluir que en este caso el método numérico aproximado no es aplicable con la precisión requerida para el cálculo de la capacitancia.

En la Fig. 12 aparece el potencial para el capacitor plano calculado con el método numérico aproximado cuya longitud $L_x = \pi$ cm.

Las Figs. 12(a)-(d) son representaciones análogas a las correspondientes en la Fig. 10(a)-(d). Aunque el canal no es angosto en la parte central del capacitor tenemos una

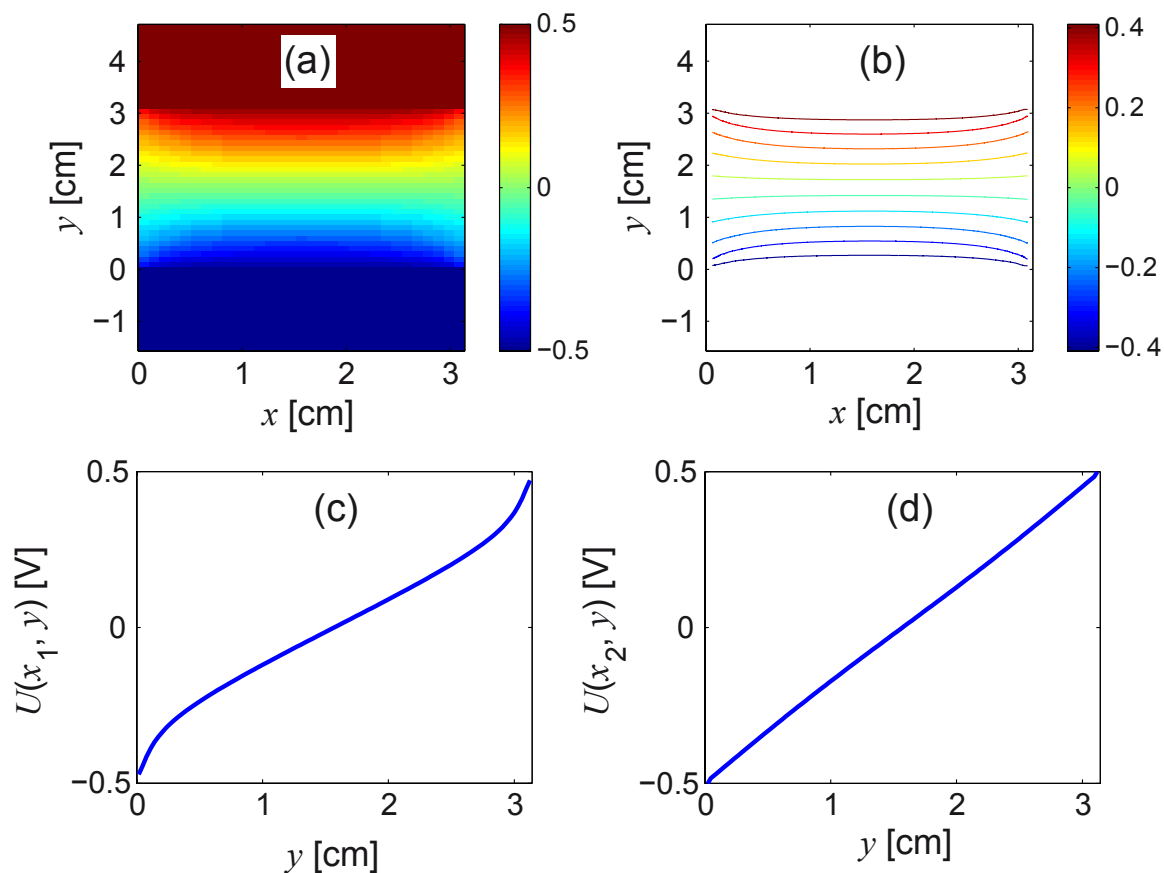


Figura 12. Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = \pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$.

buena aproximación al resultado exacto (ver Fig. 12(d)). El resto de las Figs. (12(a)-(c)) muestran particularmente los efectos de borde. Recuérdese que en este caso el error en la capacitancia es 34.56% , que es todavía grande. Podemos concluir que también en este caso el método numérico aproximado no es aplicable con la aproximación requerida.

En la Fig. 13 aparece el potencial para el capacitor plano calculado con el método numérico aproximado con una longitud $L_x = 2\pi$ cm.

Las Figs. 13(a)-(d) son representaciones análogas a las correspondientes en la Fig. 10(a)-(d). En este caso el capacitor empieza a ser angosto y no solamente en la parte

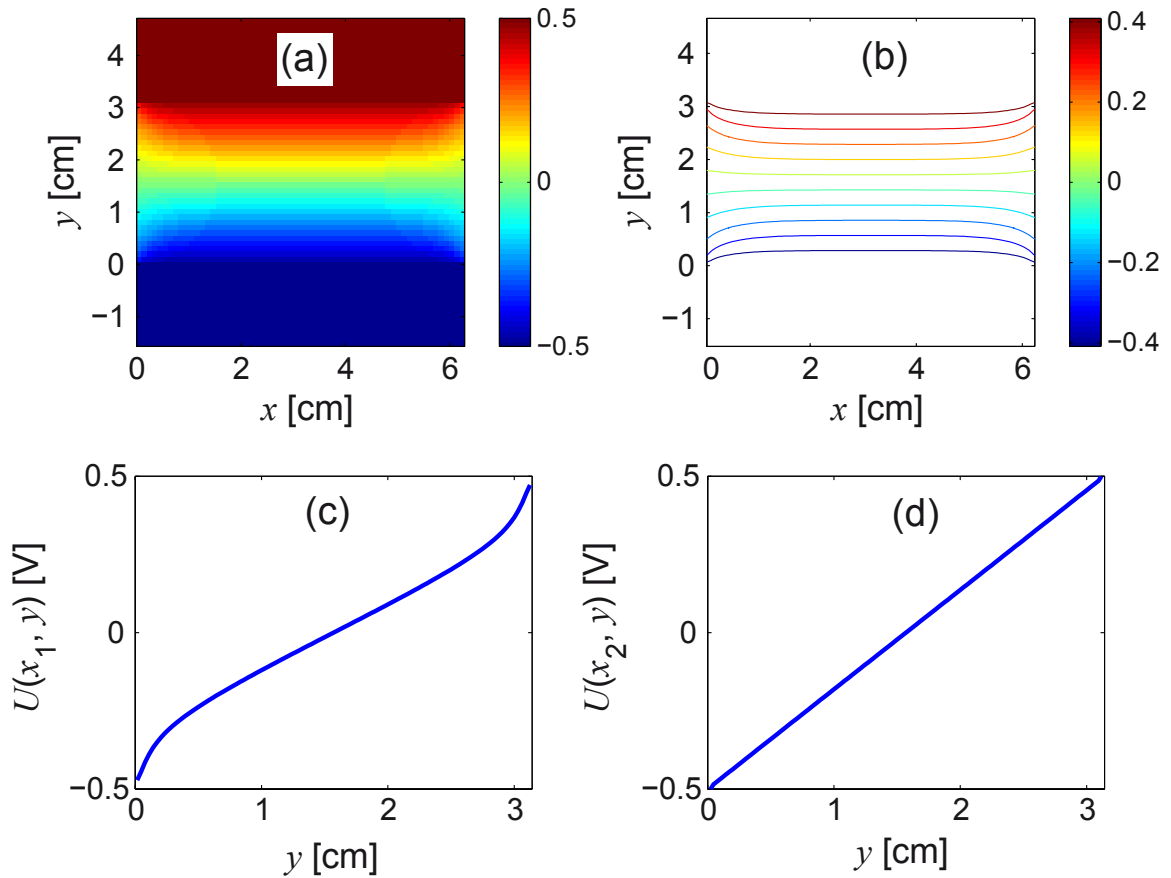


Figura 13. Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = 2\pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$.

central del capacitor tenemos una buena aproximación sino en una región más amplia. Las Figs. (13(a)-(c)) muestran efectos de borde moderados y bien delimitados. De acuerdo con la tabla I el error en la capacitancia es 16.75%, que ya no es tan grande. Para esta longitud del sistema el método numérico aproximado todavía no es muy preciso.

Finalmente, en la Fig. 14 aparece el potencial para el capacitor plano calculado con el método numérico aproximado para una longitud $L_x = 3\pi$ cm.

Las Figs. 14(a)-(d) son representaciones análogas a las correspondientes en la Fig.

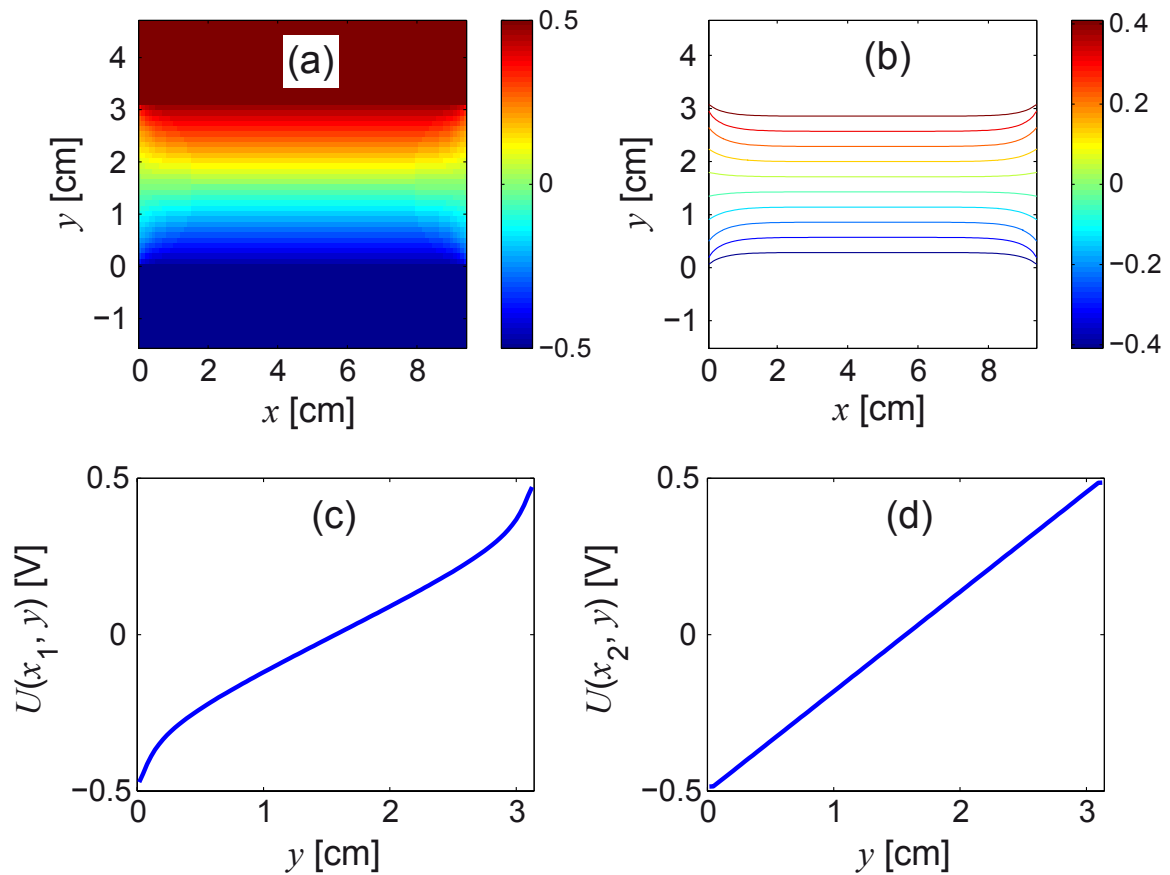


Figura 14. Potencial electrostático calculado numéricamente por el método aproximado en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = 3\pi$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$.

10(a)-(d). En este caso el ancho del canal es relativamente pequeño como para tener prácticamente un “buen resultado”, en cuanto a la capacitancia se refiere. Entendemos por “buen resultado” a que el error sea “aceptable”; es decir, menor o igual al 10% ya que para muchos investigadores que realizan simulaciones numéricas lo admiten. De la tabla I el error en la capacitancia es 11.02%, que apenas se pasa del 10%. De acuerdo a ese criterio, para esta longitud del sistema el método numérico aproximado es aplicable, y razonablemente preciso. Agregamos que, como se hizo notar inmediatamente después de la tabla I, para longitudes L_x suficientemente grandes el error porcentual en la

capacitancia se puede hacer lo suficientemente pequeño como para estar de acuerdo con una mayor exigencia en la precisión. De hecho para $L_x = 10b$ ($= 10\pi$ cm) la tabla I muestra un error del 3.25%, que es por supuesto ya un error razonablemente pequeño. No agregamos la figura correspondiente a este caso porque es casi indistinguible de la Fig. 14, que está bien linealizada en gran parte de la región R pero de todas maneras siempre aparecen claramente los efectos de borde.

Es importante para los fines de nuestro trabajo de tesis comparar los resultados calculados por medio del método numérico aproximado con los correspondientes del método numérico riguroso. Recordamos una vez más que el modelo propuesto para capacitor tiene longitud infinita, porque queremos estudiar el caso de un capacitor perfectamente periódico. El método riguroso presumiblemente da resultados en este caso.

En la tabla II se muestran los resultados correspondientes a los de la tabla I, pero ésta vez utilizando el método numérico riguroso.

Tabla II. Capacitancia calculada numérica (C_L^A) y analíticamente (C_L^E) con su error porcentual entre el cálculo numérico riguroso y el analítico para diferentes longitudes L_x .

b (cm)	L_x (cm)	C_L^R (pF/cm)	C_L^E (pF/cm)	Err (%)
π	$\pi/2$	0.046	0.044	4.94
π	π	0.090	0.088	2.62
π	2π	0.179	0.177	1.36
π	3π	0.267	0.265	0.91
π	10π	0.887	0.885	0.30

Teóricamente el método numérico riguroso debe trabajar bien independientemente del valor del cociente b/L_x , ya que el método pretende calcular el potencial para un

capacitor de longitud literalmente infinita. En todos los casos presentados en la tabla II se nota una buena concordancia entre el resultado analítico y el numérico. Aparece una ligera tendencia a mejorar porcentualmente el resultado a medida que disminuye el cociente b/L_x , aunque esto depende sobre todo de la forma en que definimos el error porcentual y de la elección del parámetro Δs . Resulta que para $L_x = 10b$ ($= 10\pi$ cm) se obtiene que $C_L^R = 0.887$ pF/cm, $C_L^E = 0.885$ pF/cm y $Err = 0.30\%$, que es un error realmente pequeño.

En la Fig. 15 aparece el potencial para el capacitor plano calculado con el método numérico riguroso para una longitud $L_x = \pi/2$ cm.

Las Figs. 15(a)-(d) son representaciones análogas a las correspondientes en la Fig. 10(a)-(d). Como se aprecia cualitativamente, en este caso el método numérico usado (el riguroso) no requiere que el ancho del capacitor sea grande para dar un buen resultado. La aplicación de las condiciones de periodicidad en las fronteras entre celdas unitarias contiguas le da robustez al método numérico y el resultado de campo eléctrico uniforme es evidente a partir de las gráficas de potencial presentadas. Note la ausencia de efectos de borde en este caso. Para longitudes mayores de la celda unitaria el resultado gráfico no se distingue del presentado en la Fig. 15 por lo que no es necesaria alguna otra gráfica al respecto.

III.1.2. Capacitor con placas onduladas

Consideremos ahora el caso de superficies onduladas (no planas). En el caso de un sistema de longitud finita en la dirección x , dada por L_x , el método numérico aproximado ofrece una respuesta para el potencial electrostático. De acuerdo al estudio numérico anterior se esperan buenos resultados cuando L_x sea suficientemente grande, excepto cerca de los bordes (izquierdo y derecho) del sistema. En el caso en que el sistema se

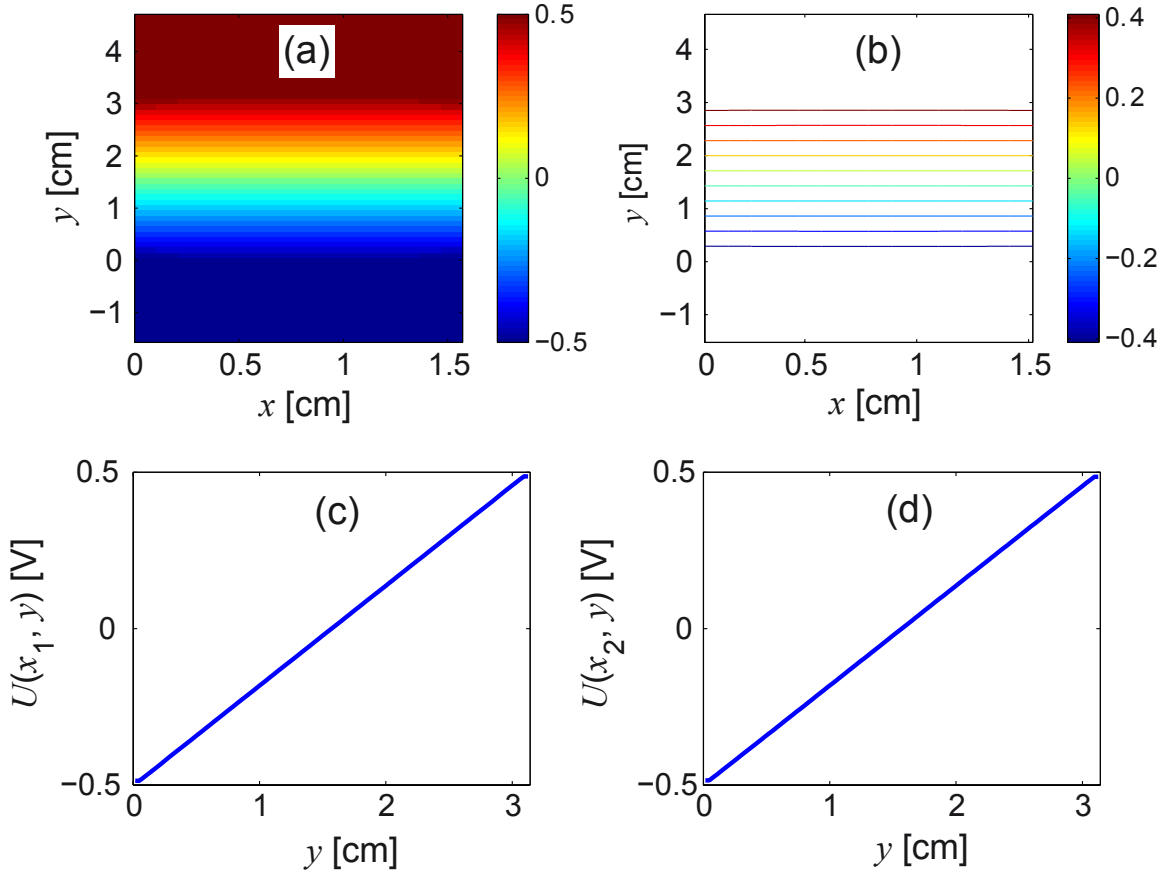


Figura 15. Potencial electrostático calculado numéricamente por el método riguroso en un capacitor de placas planas y paralelas para la longitud $L_x = \pi/2$ cm representado por (a) colores entre -0.5 V y 0.5 V y (b) en líneas de contorno. El potencial como función de la posición en la dirección y para un valor de x constante (c) cercano al borde izquierdo, dado por $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$.

considere infinitamente extendido y perfectamente periódico, con periodo P , el método numérico riguroso es aplicable para el cálculo del potencial u otras propiedades electrostáticas. Recientemente en Mendoza-Suárez *et al.* (2011) se mostró que una guía de ondas periódica, con la geometría que estamos considerando en este trabajo, se comporta como cristal fotónico en cuanto a la propagación de ondas electromagnéticas por el interior de la guía se refiere. En ese trabajo se consideró el caso infinito como cristal perfecto y el finito (suficientemente largo) como un cristal truncado. Es conocido que algunas propiedades del cristal truncado corresponden a las del cristal perfecto, por

ejemplo la ubicación de bandas de frecuencia prohibidas en el caso truncado (finito) corresponden en buena medida a las calculadas para un cristal perfecto. Análogamente a lo anterior, en el trabajo presente esperamos que algunas propiedades del caso infinito correspondan con buena aproximación a las de un capacitor finito suficientemente largo.

Considerando nuestro modelo de capacitor perfectamente cristalino (periódico) queremos estudiar si algunas de sus propiedades corresponden a las de un capacitor cristalino truncado. Veremos efectivamente que éste es el caso.

En la tabla III se muestran los resultados comparativos entre ambos métodos numéricos para el cálculo de la capacitancia de un capacitor con una placa ondulada armónicamente (la superior) y otra plana (la inferior). La amplitud de la ondulación armónica fue $A = 0.3b$, con $b = \pi$ cm y, para el método aproximado, se tomó una longitud L_x variable conforme lo indica la siguiente tabla.

Tabla III. Capacitancia calculada numéricamente con el método riguroso (C_L^R) y aproximado (C_L^A) con su error porcentual para diferentes longitudes L_x .

b (cm)	L_x (cm)	C_L^A (pF/cm)	C_L^R (pF/cm)	Err (%)
π	2π	0.228	1.010	77.40
π	4π	0.432	1.010	57.19
π	6π	0.634	1.010	37.19
π	10π	1.037	1.010	2.69

En la tabla III, C_L^A representa la capacitancia por unidad de longitud calculada por el método numérico aproximado y C_L^R a la calculada por el método numérico riguroso. Nótese que a medida que crece la longitud del capacitor, tomada en cuenta por el método aproximado, el error porcentual entre ambos métodos numéricos disminuye. Ya para $L_x = 10\pi$ cm este error es apenas del 2.69 %, mostrando que el método aproximado

se comporta conforme a lo esperado. En este caso el error porcentual se define por $Err = 100\% |C_L^A - C_L^R| / C_L^R$.

Es conveniente representar el potencial electrostático para los casos mostrados en la tabla III. En la Fig. 16 se ilustra el potencial para el capacitor ondulado calculado por los métodos riguroso y aproximado. En la Fig. 16(a) se muestra el potencial electrostático en el capacitor de una placa ondulada con amplitud $A = 0.3b$ y una placa plana usando el método riguroso para $L_x = 10\pi$ cm. En las Figs. 16(b)-(d) se presentan los potenciales electrostáticos dentro del capacitor utilizando el método aproximado para las longitudes $L_x = 2\pi$ cm, 6π cm y 10π cm, respectivamente.

Todas esas representaciones permiten observar el cumplimiento de las condiciones de frontera en los conductores ($U_1 = 0.5$ V y $U_2 = -0.5$ V para la superficie superior y para la inferior, respectivamente). Nótese la buena concordancia cualitativa entre las Figs. 16 (a) y (d), obtenidas por el método riguroso y el aproximado con L_x suficientemente grande.

Para una comparación más clara, en la Fig. 17 se muestra el potencial en base a líneas de nivel para los mismos casos anteriores pero exclusivamente en la celda unitaria central de cada caso. En la Fig. 17(a) se muestra el potencial electrostático para un sólo periodo usando el método riguroso. En las Figs. 17(b)-(d) se presentan los potenciales electrostáticos de la parte central del capacitor utilizando el método aproximado para las longitudes $L_x = 2\pi$ cm, 6π cm y 10π cm, respectivamente. En la Fig. 17(b) se observan efectos de borde propios del método aproximado. Estos efectos están ausentes en las Figs. 17(c)-(d) por lo que se observa que el potencial en esa celda central es prácticamente el mismo.

Para cuantificar lo dicho en la Fig. 18(a) se grafica el potencial contra la posición en la dirección y , esto para un valor de x constante y cercano al borde izquierdo, dado por

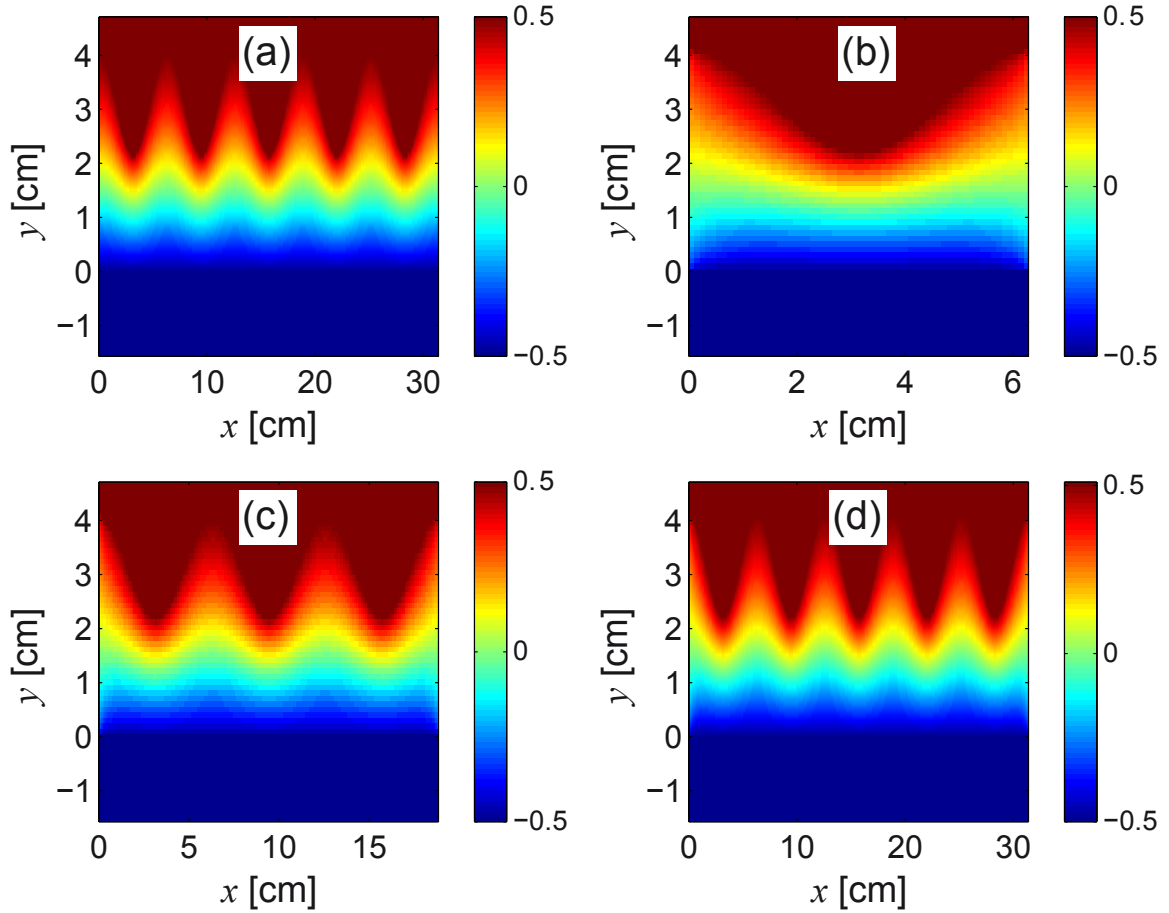


Figura 16. (a) Potencial electrostático en el capacitor de una placa ondulada con amplitud $A = 0.3b$ y una placa plana usando el método riguroso para $L_x = 10\pi$ cm. Potencial electrostático utilizando el método aproximado para las longitudes (b) $L_x = 2\pi$ cm, (c) 6π cm y (d) 10π cm.

$x = x_1 = 0.05$ cm por los métodos riguroso (línea sólida) y aproximado (línea punteada). El error cuadrático medio entre ambos resultados es de 0.08 V, que ya es pequeño. La Fig. 18(b) muestra el potencial contra la posición en la dirección y , para un valor de x constante y en la parte media de la región, dado por $x = x_2 = L_x/2$ para la longitud $L_x = 2\pi$ cm. Para este caso el error cuadrático medio es de 0.0034 V. Similarmente para la longitud $L_x = 6\pi$ cm se muestran los potenciales para $x = x_1 = 0.05$ cm (Fig. 18(c)) y $x = x_2 = L_x/2$ (Fig. 18(d)) con los errores cuadráticos medios de 0.00096 V y 0.0033 V.

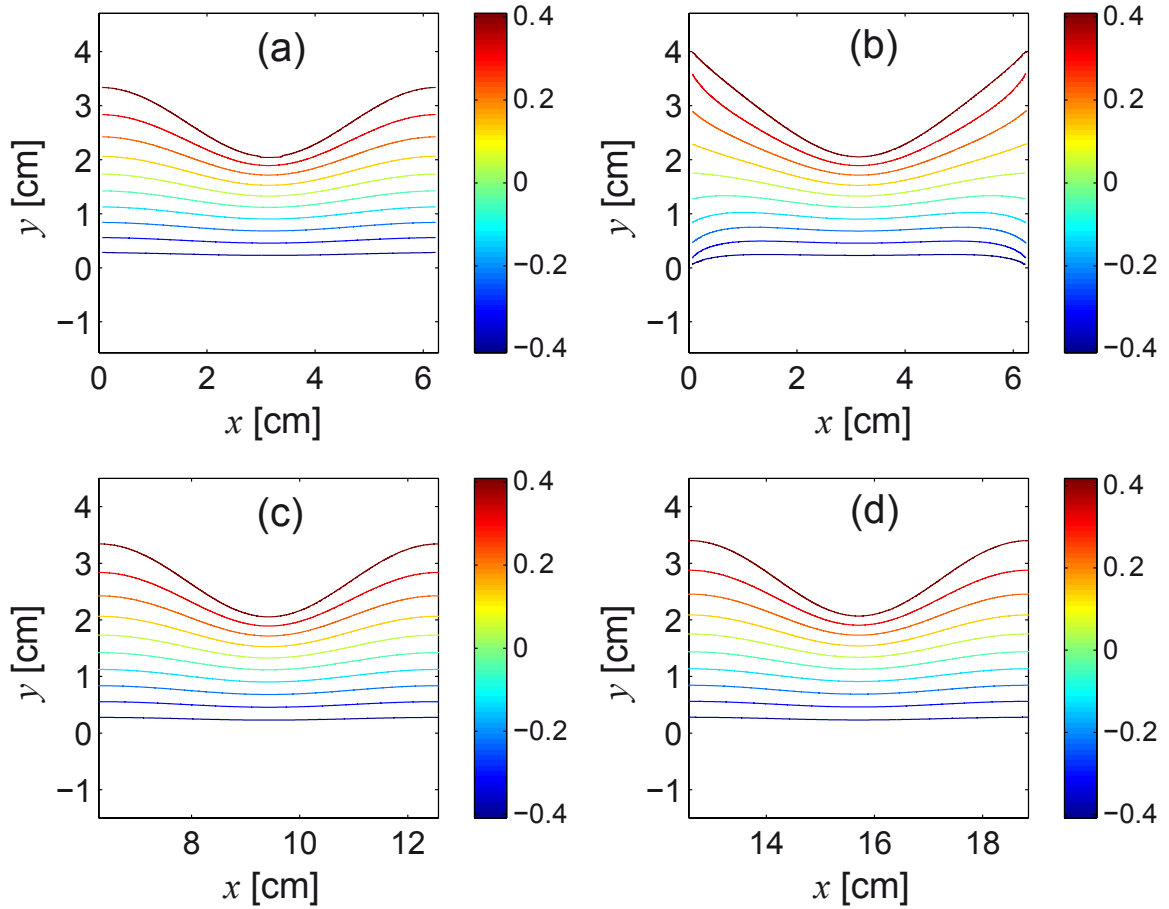


Figura 17. (a) Potencial electrostático para un sólo periodo usando el método riguroso. Potencial electrostático de la parte central del capacitor utilizando el método aproximado para las longitudes (b) $L_x = 2\pi$ cm, (c) 6π cm y (d) 10π cm.

Todas esas representaciones permiten concluir que el método aproximado es bueno para calcular lo que sucede en la parte central del capacitor supuesto infinito. También vale lo inverso: ya que todos los capacitores reales son de tamaño finito, el método riguroso permite calcular propiedades en la parte central con tal de que la distancia entre las placas conductoras sea suficientemente pequeña. Debe tomarse en cuenta que para un buen cálculo se tiene que el método aproximado requiere más poder computacional porque se necesita un muestreo de puntos sobre varias celdas unitarias, comparado con el método riguroso en donde basta siempre con el muestreo en una sola celda unitaria.

Finalmente en cuanto a la caracterización del capacitor ondulado se refiere, se con-

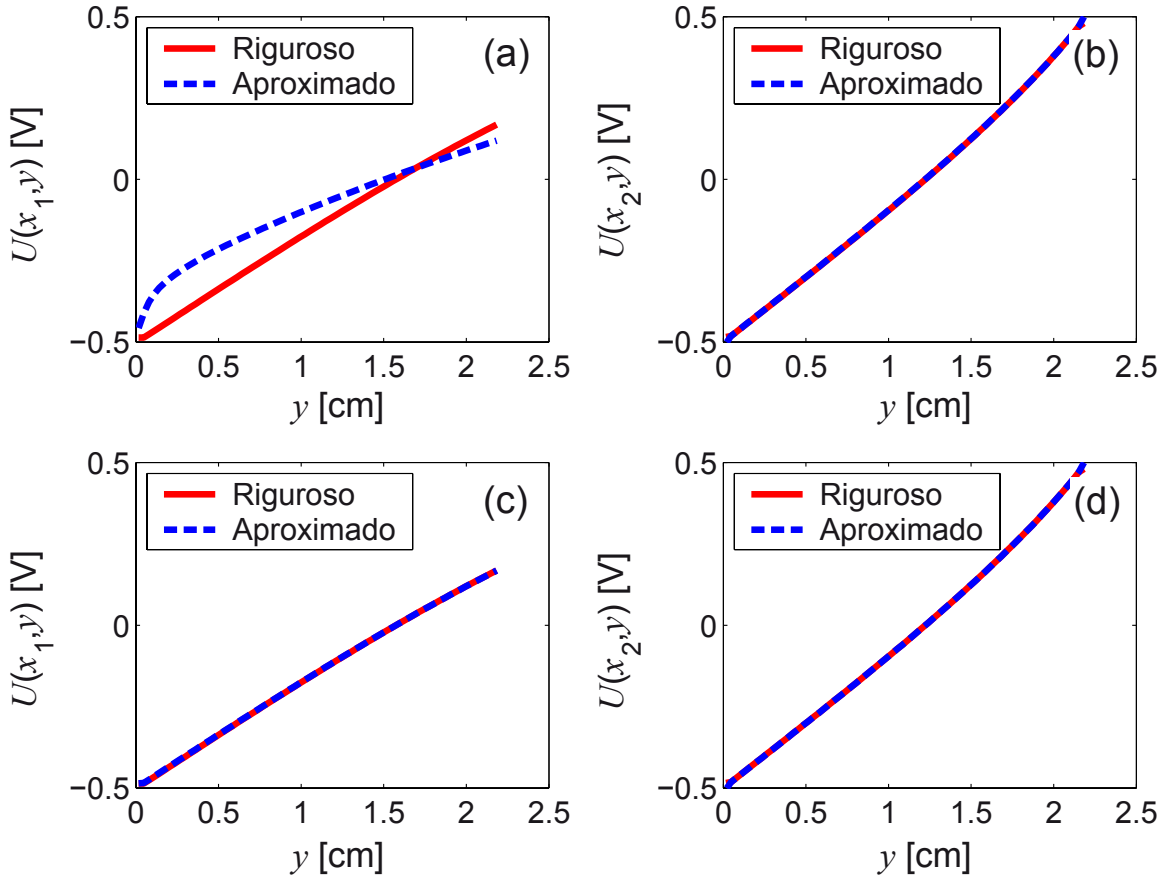


Figura 18. Potencial electrostático para un valor de (a) $x = x_1 = 0.05$ cm y (b) $x = x_2 = L_x/2$ para la longitud $L_x = 2\pi$ cm, y (c) $x = x_1 = 0.05$ cm y (d) $x = x_2 = L_x/2$ para la longitud $L_x = 6\pi$ cm por los métodos riguroso (línea sólida) y aproximado (línea punteada).

sidera el campo eléctrico en un capacitor que es periódico en la dirección horizontal x (ver Fig. 3). Esto para varias amplitudes de la ondulación armónica. En la Fig. 19 se muestran las líneas de nivel y el campo eléctrico para un capacitor con los siguientes parámetros: la distancia promedio entre las superficies es $b = \pi$ cm, el periodo $P = 2\pi$ cm y la amplitud de la superficie ondulada $A = 0.1b$ (Fig. 19(a)), $A = 0.2b$ (Fig. 19(b)), $A = 0.3b$ (Fig. 19(c)) y $A = 0.4b$ (Fig. 19(d)). En todos los casos se realizaron los cálculos usando el método numérico riguroso.

Observamos en las Figs. 19(a)-(d) que la presencia de la ondulación crea un campo eléctrico inhomogéneo que contrasta con el caso plano (Fig. 15(a)). Claramente la

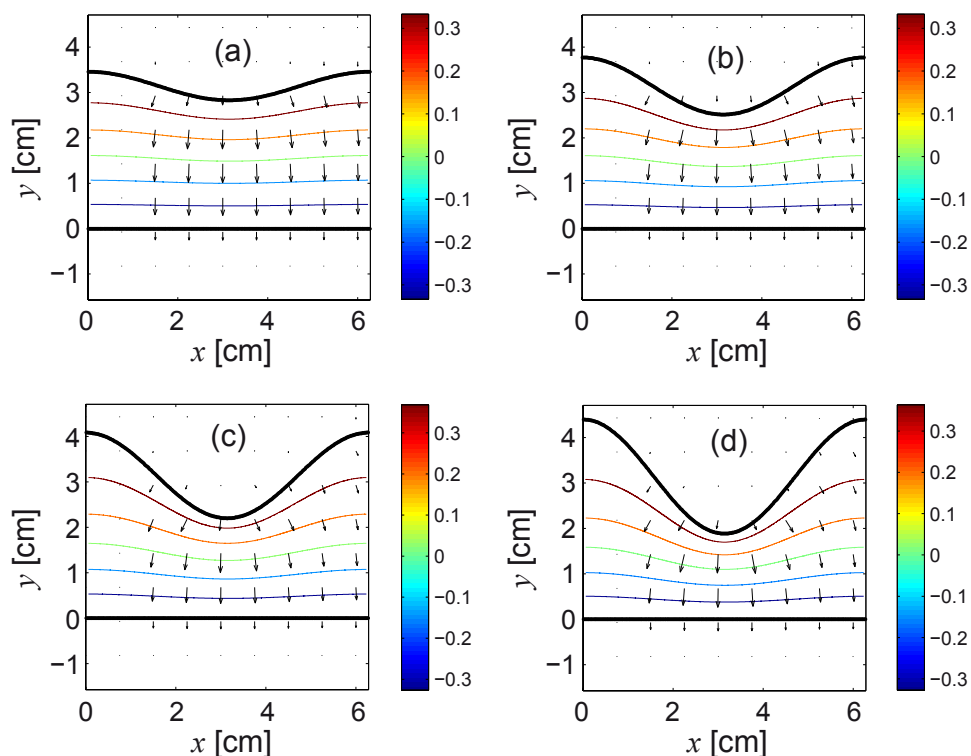


Figura 19. Potencial de un capacitor formado por una superficie plana y una ondulada de amplitud (a) $A = 0.1b$, (b) $A = 0.2b$, (c) $A = 0.3b$ y (d) $A = 0.4b$. El campo eléctrico está representado por las flechas.

dirección del campo eléctrico es perpendicular a las líneas de nivel del potencial y, por supuesto, perpendicular a las superficies conductoras, tal como se espera de un campo eléctrico correctamente calculado. Este campo podría emplearse para ciertas aplicaciones en donde se requiera la presencia de un campo más bien no uniforme, por alguna razón. En lo que sigue veremos una de estas posibles aplicaciones.

Capítulo IV

TRAYECTORIA DE UNA PARTÍCULA EN UN CAPACITOR CON PLACAS ONDULADAS

Hasta ahora hemos obtenido las propiedades eléctricas en un cierto sistema que representa a un capacitor con placas conductoras supuestamente infinitas. Particularmente, hemos supuesto que el sistema es periódico en una cierta dirección x . Debido a esta propiedad resulta que el potencial electrostático obtenido también es periódico y una partícula cargada estaría expuesta a esta característica por lo que sería interesante estudiar el tipo de trayectorias clásicas que se pueden obtener, con una variedad de condiciones iniciales. Por ejemplo, puede uno cuestionarse acerca de si las trayectorias terminan por ser periódicas o no. La geometría del capacitor considerado puede usarse para modelar un túnel por el que transitan partículas clásicas y resulta que para ciertos parámetros se presenta el fenómeno del caos clásico (Herrera-González *et al.*, 2011). Esto cuando las partículas se mueven libremente en el interior del túnel porque digamos son partículas sin carga eléctrica. Considerando ahora partículas cargadas moviéndose por el túnel en donde está establecido un potencial inhomogéneo dependiente de la posición de la partícula, la cuestión es ¿cómo afecta tanto la periodicidad como la inho-

mogeneidad a las trayectorias clásicas y particularmente al fenómeno de caos? Aunque estas preguntas podrían ser contestadas en un trabajo futuro queremos en esta tesis dejar un antecedente del cálculo de las trayectorias de partículas cargadas en la región vacía del capacitor considerado en el trabajo presente.

IV.1. Descripción del método de diferencias finitas

Debido a que en general el cálculo del potencial solo puede realizarse numéricamente se tiene que las trayectorias también solamente pueden calcularse de esa manera. El método numérico que usaremos es uno de “diferencias finitas” que es verdaderamente simple, pero eficaz.

Consideremos el problema de habiendo encontrado (numéricamente) el potencial $U(x, y)$, queremos calcular (numéricamente) la trayectoria de una partícula cargada; esta trayectoria representada por la función del tiempo $\vec{r}(t)$, dadas las condiciones iniciales de posición y velocidad: $\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$ y $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$, respectivamente. Para encontrar la trayectoria consideramos la segunda ley de Newton,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}, \quad (36)$$

donde m es la masa de la partícula, $d^2 \vec{r}/dt^2$ es su aceleración y \vec{F} es la fuerza total que actúa sobre ésta. Consideramos el caso en que la única fuerza que actúa sobre la partícula es una fuerza eléctrica dada por

$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (37)$$

donde q es la carga de la partícula y \vec{E} es el campo eléctrico en la región vacía entre las placas conductoras. Debemos precisar que lo anterior es válido mientras la partícula no

choca con alguna de las placas, porque cuando choca aparece una fuerza extra impulsiva que habría que considerar. Un modelo usual para considerar el impacto es suponer que se realiza un choque elástico por lo que la partícula tiene una energía cinética después del impacto igual a la que tenía antes del impacto; y, además, localmente rebota cumpliendo una “ley de la reflexión” en donde el ángulo de reflexión es igual al de incidencia.

Recordemos que el campo eléctrico \vec{E} se puede obtener por medio de la relación $\vec{E} = -\nabla U(x, y)$. Conocida la fuerza debido al campo eléctrico ($\vec{F} = q\vec{E}$) y las condiciones iniciales se puede resolver numéricamente la segunda ley de Newton, $m d^2\vec{r}/dt^2 = \vec{F}$, por el método de diferencias finitas. Esto nos permite calcular la trayectoria de una partícula de masa m con carga eléctrica q cuyas condiciones iniciales de posición y velocidad son dadas.

Las ecuaciones básicas para dicho método son:

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{v} \quad \text{o bien,} \quad \vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \vec{v}(t + \Delta t/2) \Delta t \quad (38)$$

y

$$m \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \vec{F} \quad \text{o bien,} \quad \vec{v}(t + \Delta t/2 + \Delta t) = \vec{v}(t + \Delta t/2) + \frac{\vec{F}(t + \Delta t)}{m} \Delta t, \quad (39)$$

donde \vec{r} es el vector de posición de la partícula en el plano $x-y$. En las ecuaciones anteriores Δt es un “paso” en el tiempo suficientemente pequeño como para que la trayectoria obtenida numéricamente tenga un aspecto de curva continua a la hora de ser representada. Para esto basta con elegir a Δt como una cantidad pequeña en relación a un tiempo característico en el sistema. Por ejemplo, si se resuelve el caso de una partícula con movimiento periódico de periodo τ , entonces podría ser $\Delta t = \tau/200$ una elección adecuada. Las Ecs. (38) y (39) permiten encontrar la posición y velocidad en un tiempo “futuro” dando estas propiedades en un tiempo “presente”; además, el cálculo de la posición y la velocidad deben estar “defasados” en un tiempo $\Delta t/2$ para

darle estabilidad numérica al método.

Para realizar un “chequeo” del método numérico propuesto para calcular trayectorias consideremos el caso de un capacitor de placas planas y paralelas, en donde está establecido un campo eléctrico supuesto constante de magnitud E , dirigido en la dirección vertical “hacia abajo”. En este caso la trayectoria de la partícula está dada en forma exacta por

$$(x(t), y(t)) = \left(x_0 + v_{0x}t, y_0 + v_{0y}t - \frac{qE}{2m}t^2 \right). \quad (40)$$

Para el caso del capacitor plano paralelo considerado en la Fig. 15(a), se tomó en cuenta un campo eléctrico $E = (U_1 - U_2)/b = 1/\pi \text{ V/cm}$ y una partícula de masa $m = 0.001 \text{ kg}$ con una carga $q = 0.001 \text{ C}$. La partícula fue colocada en la posición inicial $(x_0 = 0 \text{ cm}, y_0 = 0.75b)$ donde $b = \pi \text{ cm}$ con una velocidad inicial $(v_{0x} = 1.5 \text{ cm/s}, v_{0y} = 0.0 \text{ cm/s})$. Bajo estas condiciones iniciales las componentes de la fuerza y la velocidad obtenidas por medio de las ecuaciones (38), (39) y (40) se muestran en la Fig. 20.

IV.1.1. Trayectoria de la partícula en un capacitor con placas planas y paralelas

En la Fig. 21, presentamos las trayectorias de la partícula bajo la influencia del campo eléctrico para el caso analítico (línea sólida) y numérico (línea punteada). Para el capacitor de placas plano paralelas la trayectoria de la partícula, con las condiciones iniciales correspondientes a las de la Fig. 20, se muestra en la Fig. 21(a); y en la Fig. 21(b) se muestra la trayectoria de la partícula colocada inicialmente en $(x_0 = 0 \text{ cm}, y_0 = 0.5b)$ con una velocidad inicial $(v_{0x} = 1.0 \text{ cm/s}, v_{0y} = 0.75 \text{ cm/s})$.

Note la buena concordancia entre los dos métodos de cálculo empleados para obtener

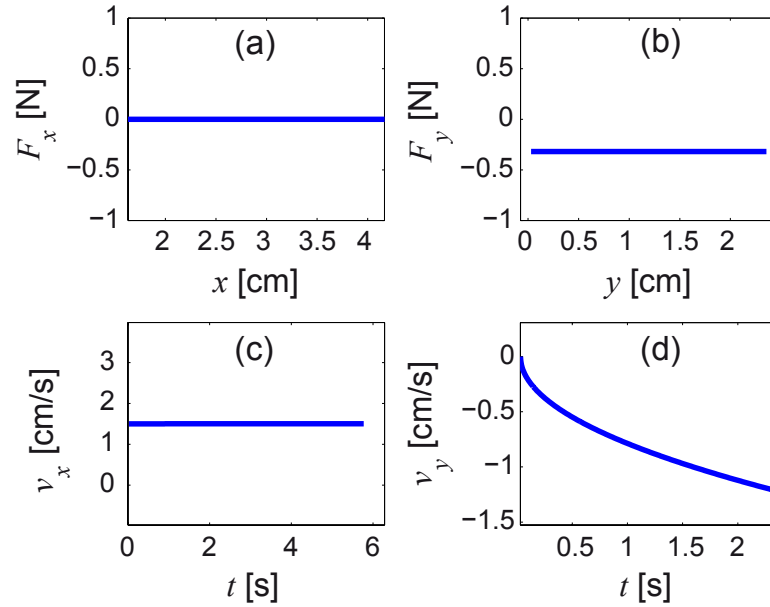


Figura 20. Componentes de la fuerza en las direcciones (a) x y (b) y . Componentes de la velocidad en las direcciones (c) x y (d) y para una partícula colocada en la posición inicial ($x_0 = 0$ cm, $y_0 = 0.75b$) y velocidad inicial ($v_{0x} = 1.5$ cm/s, $v_{0y} = 0.0$ cm/s).

las Figs. 21(a)-(b) por lo que al menos para este caso el método numérico es confiable. Podemos esperar que en el caso ondulado el cálculo numérico también nos dé buenos resultados aunque ya no tenemos soluciones exactas para realizar una comparación.

IV.1.2. Trayectoria de la partícula en un capacitor con placas onduladas

En la Fig. 22 se muestran las trayectorias de la partícula colocada en ($x_0 = 0$ cm, $y_0 = 0.5b$) con una velocidad inicial ($v_{0x} = 0.76$ cm/s, $v_{0y} = 0.66$ cm/s) para el capacitor con una placa plana y otra placa ondulada con amplitud $A = 0.2b$ (Fig. 22(a)) y $A = 0.3b$ (Fig. 22(b)). Las trayectorias en línea sólida fueron calculadas suponiendo nuevamente un campo constante de magnitud $E = 1/\pi$ V/cm (como si las placas fueran planas) y se compararon dichas trayectorias con las trayectorias en línea punteada, obtenidas numéricamente para el campo inhomogéneo generado por la diferencia de potencial

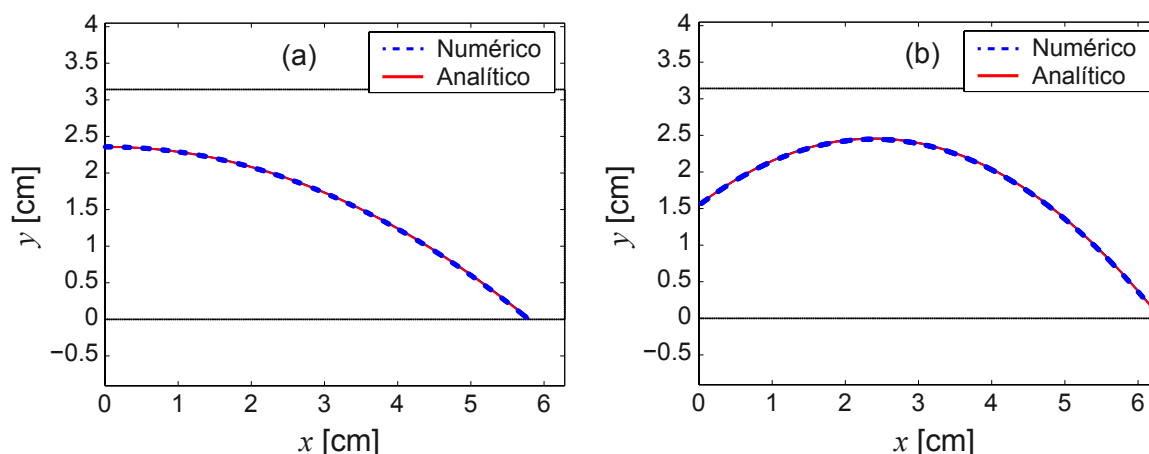


Figura 21. Trayectoria de una partícula en un capacitor de placas plano paralelas para el caso analítico (línea sólida) y numérico (línea punteada). (a) Partícula colocada en $y = 0.75b$ con velocidad inicial $v_{0x} = 1.5$ cm/s y $v_{0y} = 0.0$ cm/s. (b) Partícula colocada en $y = 0.5b$ con velocidad inicial $v_{0x} = 1.0$ cm/s y $v_{0y} = 0.75$ cm/s.

entre las placas conductoras: una ondulada y la otra plana.

En la Fig. 22 se observa que las trayectorias cambian de manera importante debido a la inhomogeneidad del campo eléctrico. Nótese que el cálculo de las trayectorias se realizó hasta aproximadamente las posiciones de impacto de la partícula. A partir de ahí se consideraría algún modelo para el “rebote de la partícula” considerando la fuerza impulsiva que resulta del impacto de una partícula clásica con una superficie dura y muy masiva.

Con lo anteriormente expuesto hemos mostrado que podemos calcular trayectorias de partículas cargadas en la región del potencial eléctrico inhomogéneo. Esto es básico para abordar un problema del estudio de propiedades mecánicas de partículas cargadas clásicas moviéndose por el interior del capacitor ondulado y periódico. Recordando que la geometría del sistema considerado ha dado lugar a la aparición del fenómeno de caos clásico, es interesante considerar cómo afecta la inhomogeneidad del campo eléctrico a dicho fenómeno, pero esto podría ser motivo de un trabajo futuro que tendría la posibilidad de ser publicable.

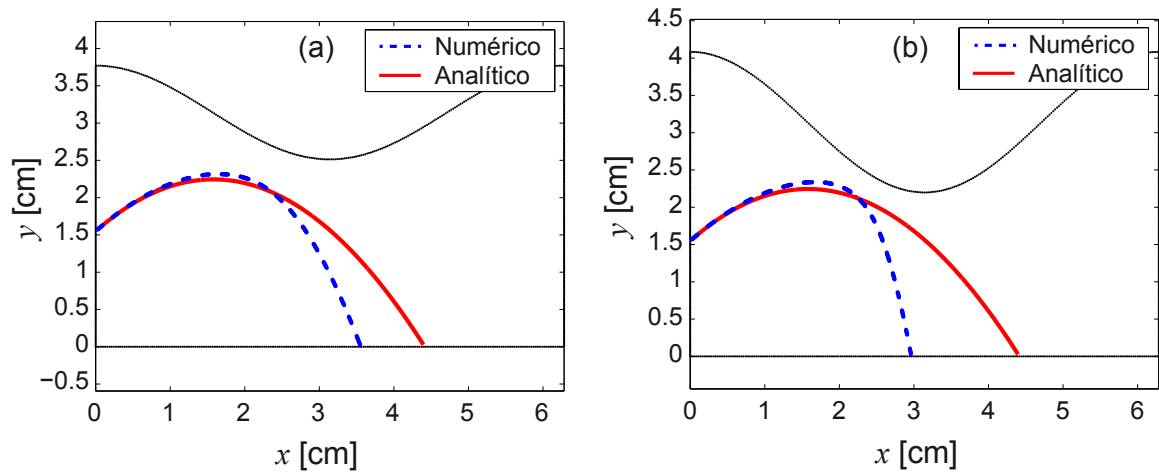


Figura 22. Trayectoria de una partícula en un capacitor con una placa plano paralela y otra placa ondulada para el caso analítico (línea sólida) y numérico (línea punteada). La partícula está colocada en $y = 0.5b$ con velocidad inicial $v_{0x} = 0.76$ cm/s y $v_{0y} = 0.66$ cm/s con amplitud (a) $A = 0.2b$ y (b) $A = 0.3b$.

Capítulo V

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones de este trabajo son:

1. Propusimos métodos numéricos integrales que permiten calcular propiedades electrostáticas de un capacitor cuyo modelo supone superficies periódicas.
2. Uno de los métodos numéricos propuestos lo llamamos “aproximado” y es útil para encontrar propiedades cuando se toman suficientes periodos en el capacitor. Este método da “efectos de borde” debido a que se desprecian ciertas contribuciones y dichos efectos se pueden considerar “espurios”.
3. Otro de los métodos numéricos lo llamamos “riguroso” y es válido para el capacitor infinito. Precisamente la periodicidad permite tratar al capacitor en base al concepto de celda unitaria, que corresponde a un periodo del capacitor. Para esto se usan condiciones de periodicidad en la frontera entre celdas unitarias contiguas.
4. Nuestros métodos permiten caracterizar nuestro sistema ya que en el capacitor podemos calcular: el campo eléctrico, el potencial electrostático, la capacitancia, etc.

5. Propusimos un método numérico de diferencias finitas que permite encontrar trayectorias de partículas cargadas lanzadas individualmente en el interior del capacitor. El cálculo de trayectorias es básico para el estudio de fenómenos como el caos clásico para este tipo de sistemas.

Referencias

- Arfken, G. B., Weber, H. J., y Harris, F. E. (2013). *Mathematical methods for physicists*. Elsevier, USA, séptima edición. Págs. 1206.
- Ashcroft, N. W. y Mermin, N. D. (1976). *Solid State Physics*. Harcourt College Publishing, Orlando, primera edición. Págs. 826.
- Chang, S. W., Oh, J., Boles, S. T., y Thompson, C. V. (2010). Fabrication of silicon nanopillar-based nanocapacitor arrays. *Appl. Phys. Lett.*, **96**(15): 153108–153110.
- Herrera-González, I., Arroyo-Correa, G., Mendoza-Suárez, A., y Tututi, E. S. (2011). Study of the resistivity in a channel with dephased ripples. *International Journal of Modern Physics B*, **25**(5): 683–698.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc., USA, tercera edición. Págs. 810.
- Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., N., W. J., y Meade, R. D. (2008). *Photonic Crystals: Molding the Flow of Light*. Princeton University Press, New York, primera edición. Págs. 283.
- John, S. (1987). Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, **58**(23): 2486–2489.
- Kittel, C. (2005). *Introducción a la física del estado sólido*. John Wiley and Sons, Inc., USA, octava edición. Págs. 680.
- Li, L. J., Zhu, B., Ding, S. J., Lu, H. L., Sun, Q. Q., Jiang, A., Zhang, D. W., y Zhu, C. (2012). Three-dimensional AlZnO/Al₂O₃/AlZnO nanocapacitor arrays on Si substrate for energy storage. *Nanoscale Res. Lett.*, **7**(544): 1–5.
- Lourtioz, J. M., Benisty, H., Berger, V., Gerard, J. M., Maystre, D., y Tchelnokov, A. (2008). *Photonic Crystals - Towards Nanoscale Photonic Devices*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, primera edición. Págs. 512.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and twodimensional photonic crystals. *J. Opt. Soc. Am. B*, **23**(10): 2249–2256.
- Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2007). Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive lefthanded materials and dielectrics in the unit cell. *J. Opt. Soc. Am. B*, **24**(12): 3091–3098.

- Mendoza-Suárez, A., Pérez-Aguilar, H., y Villa-Villa, F. (2011). Optical response of a perfect conductor waveguide that behaves as a photonic crystal. *Prog. Electromagn. Res.*, **121**: 433–452.
- Pérez-Aguilar, H., Mendoza-Suárez, A., Tututi, E. S., y Herrera-González, I. F. (2013). Disordered field patterns in a waveguide with periodic surfaces. *Prog. Electromagn. Res. B*, **48**: 329–346.
- Son, J. Y., Shin, Y. H., Kim, H., y Jang, H. M. (2010). NiO Resistive Random Access Memory Nanocapacitor Array on Graphene. *ACS nano*, **4**(5): 2655–2658.
- Srivastava, G. P. (1990). *The Physics of Phonons*. IOP, Philadelphia, primera edición. Págs. 421.
- Sukhoivanov, I. A. y Guryev, I. V. (2009). *Photonic Crystals - Physics and Practical Modeling*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, primera edición. Págs. 242.
- Yablonovitch, E. (1987). Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, **58**(20): 2059–2062.