UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

Pruebas de consistencia y espacios selectivamente separables

TESIS

Que para obtener el título de:
LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS.

Presenta:
Luis Fernando Martínez Ortiz

Asesor:
Doctor en ciencias matemáticas Fernando Hernández Hernández

Morelia, Michoacán, México
Enero 2014

Agradecimientos

Agradezco:

A mis padres y mi hermano, que si me extiendo a detallar todo lo que les debo agradecer habría más agradecimientos que tesis. Por estar siempre ahí, por su apoyo absoluto e incondicional en cualquier cosa que decida hacer.

A todos mis profesores, porque de todos me llevo algo. En especial:

A Fer, porque por alguna razón que aún no logro entender decidiste prestar atención a aquel confundido estudiante de cálculo I que no sabía factorizar ni que "hasta" se escribe con "h" y desde entonces siempre has estado ahí. Por acompañarme en la aventura de escribir esta tesis que si contiene ya un poco más que una factorización es en gran parte gracias a tu paciencia y dedicación al enseñar matemáticas. Por todos esos consejos y todo el apoyo sin los cuales difícilmente podría haber llegado hasta este punto. Por ser un amigo como pocos.

A David, por tu paciencia y estar siempre dispuesto a atender mis dudas. Por todos esos buenos consejos. Por tu amistad.

A Karina, por estar siempre dispuesta a ir más allá de los temarios para satisfacer nuestra curiosidad, porque después de aquel curso de inteligencia artificial la computación se volvió una de mis pasiones. Por tu amistad.

A mis sinodales Armando Sepúlbeda, Luis Valero y Jorege Luis López por tuda su ayuda en la titulación.

A todos mis amigos de la facultad: Luis Eduardo Puente, Eduardo Medina, Sergio, Antonio Corona, Ana Lucia, Carlos Mendoza, Arturo Antonio Martínez, Khépani Raya, Juan salvador Lucas, Miguel Gaspar, Jonathan Cancino. Por su amistad, por supuesto; por todos esos momentos que hemos compartido y también por esas pláticas de matemáticas que tuve con algunos de ellos y en algo ayudaron a esta tesis.

A Ivette y Edgar Esteban, también por su amistad y todas esas tardes que compartimos.

A todos mis amigos en general.

Índice general

Resumen

La tesis consiste en dos partes: se concentra primero en los fundamentos del forcing, técnica utilizada para hacer pruebas de consistencia, exponiendo los teoremas clásicos en el tema para después hacer una exposición general de la técnica del forcing. En la segunda parte se introducen los espacios topológicos selectivamente separables y hacemos una breve exposición de ellos para después mostrar un par de ejemplos de la aplicación del forcing en la topología haciendo un dos de pruebas de consistencia de enunciados sobre espacios selectivamente separables.

Palabras clave:

Topología, Forcing, Consistencia, Conjuntos, Selectivamente separable.

Abstract

The thesis consists of two parts: first focuses on the basics of forcing, technique used to make consistency proofs, giving the classical theorems on the subject and then make an overview of the technique of forcing. In the second part selective separable topological spaces are introduced and we make a brief description of them and then show a pair of examples of the application of forcing in the topology doing a two of proofs of consistency of statements on selective separability spaces.

keywords:

Topology, Forcing, consistence, Sets, Selective separability.

Introducción

En 1963 Cohen demuestra que la hipótesis del continuo es independiente de ZF, de su demostración se extrae una técnica general y flexible para hacer pruebas de consistencia, el forcing.

El objetivo final de la tesis es hacer pruebas de consistencia en topología general utilizando para ello el forcing.

En la primera parte de la tesis se da una exposición de los resultados que fundamentan el forcing y se hace una breve exposición de la técnica del forcing el cuál será utilizado para lograr nuestro objetivo.

Posteriormente exponemos los espacios selectivamente separables que son una clase especial de espacios topológicos. Una pregunta interesante que surgió en esta área es saber cuándo el producto de dos espacios Fréchet es selectivamente separable. Un avance en este sentido ha sido demostrar que suponer que el producto de dos espacios Fréchet y numerables es selectivamente separable es consistente con los axiomas de ZF. Nuestro objetivo final es exponer la demostración de dicha afirmación.

Capítulo 1

Los fundamentos del forcing

En este primer capítulo nos proponemos principalmente estudiar la teoría que sirve de cimiento para el forcing, herramienta que utilizaremos para conseguir dicho objetivo; no obstante, trataremos algunos temas de forma un poco más detallada de lo que la única meta de fundamentar el forcing nos lo exigiría, las razones para esto son varias, la primera y más importante: el trabajo futuro que pretendemos exponer en topología requiere de ciertos teoremas que, si sólo pensamos en fundamentar el forcing, no serían necesarios; en ocasiones, también, el motivo para exponer un poco más de lo estrictamente necesario puede ser agregar algo de contexto al tema en discusión o exponer cosas que den una comprensión más profunda de lo que se está tratando.

A lo largo del capítulo enunciaremos varios de los teoremas clásicos de la lógica y teoría de conjuntos, ellos se pueden encontrar en la mayoría de los libros de nivel medio-avanzado de las citadas áreas, nosotros hemos tratado de dar a estos resultados un orden y contexto que los dirija hacia el forcing.

Suponemos que el lector ya ha tomado al menos un curso de teoría de conjuntos y de lógica sintáctica por lo que usamos libremente varios resultados y definiciones de estas áreas como lo son, por dar algunos ejemplos: los números ordinales, los cardinales, toda el álgebra de conjuntos, los teoremas de inducción y recursión sobre los ordinales, la definición de lenguaje formal y teoría formal, las tautologías, fórmulas universalmente verdaderas, teorema de la deducción y los teoremas de correctud y completitud de la lógica matemática de primer orden. Para quién busque consultar estos temas recomendamos Mendelson (2009) para lo referente a la lógica y Hernández (2011), Kunen (1980) para la teoría de conjuntos.

Sección 1.1

La lógica sintáctica de la teoría de conjuntos

Un dios ha nacido. Otros mueren. La realidad:
que no ha venido ni se ha ido: un cambio de error.
Tenemos ahora otra eternidad,
y siempre lo pasado fue mejor.
Ciega, la ciencia trabaja en el inútil suelo.
Loca, la fé vive el sueño de su culto.
Un nuevo dios es una palabra -o un nuevo sonido.
No busques ni tampoco creas: todo está oculto.

Fernando Pessoa.
Versión de Rafael Díaz Borbón.

Intuitivamente parece conveniente pensar que un conjunto es una colección de objetos que tienen una propiedad en común, no obstante; como es bien sabido, "definir" de esta forma el concepto de conjunto origina que éste sea contradictorio; si, por ejemplo, permitimos que la colección de todos los conjuntos sea un conjunto, estaremos cayendo en una contradicción.

No hemos podido dar una definición satisfactoria de conjunto pero, gracias a la lógica simbólica, esto no significó un impedimento para fundamentar las matemáticas en los conjuntos.

Sabemos que la lógica sintáctica trata de mera manipulación de símbolos que carecen de todo significado mediante la aplicación de reglas de inferencia bien definidas y fijas de antemano; sus fórmulas, totalmente carentes de contenido, nada dicen. Y es esto precisamente de lo que nos vamos a valer para poder trabajar con conjuntos: al dar una teoría formal de conjuntos en la lógica matemática de primer orden no nos tenemos que preocupar por decir qué es un conjunto, pues podemos pensar como conjunto simplemente a una variable del lenguaje de la teoría de conjuntos.

Asumimos que, de hecho, el lector ha estudiado ya lo que se debería tratar en esta sección. Así, en lugar de dedicarnos a dar definiciones con todo rigor y demostrar los teoremas necesarios, nos dedicaremos únicamente a quedar de acuerdo en notación y aclarar algunos puntos conceptuales que podrían crear confusión más adelante en el desarrollo de este trabajo.

1.1.1 La teoría de conjuntos y su lenguaje

Para la demostración de algún teorema que se presenta más adelante será necesario tener claro cuales son los axiomas del cálculo de predicados con los que estamos trabajando. Como se sabe existen varias axiomatizaciones que se pueden dar para un cálculo de predicados de la lógica de primer orden, lo importante es que éste resulte correcto y completo con lo cual será equivalente a cualquier otro cálculo que también satisfaga los teorema de completitud y correctud . Nosotros optamos por usar la axiomatización expuesta en el libro de Elliott Mendelson Mendelson (2009).

Definición 1.1.1 Para α, β y γ fórmulas bien formadas, los axiomas del cálculo de predicados son:

A1 $\alpha \to (\beta \to \alpha)$;

A2 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$;

A3 $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$;

A4 $\forall x_i \ \alpha(x_i) \to \alpha(t)$ donde t es un termino libre para x_i en α;

A5 $\forall x_i \ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x_i \ \beta)$ Si α no contiene ocurrencias libres de x_i.

Además trabajaremos con las reglas de inferencia:

- *Modus ponenes (MP)*

$$\begin{array}{l} \alpha \to \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

- *Regla de generalización (GEN).*

$$\begin{array}{l} \beta \\ \hline \forall x_i \beta \end{array}$$

Los axiomas $A1$, $A2$ y $A3$ junto con la regla de inferencia MP forman una teoría correcta y completa del cálculo proposicional, en consecuencia todas las tautologías son deducibles en nuestro sistema. De igual forma, con los axiomas del $A1$ al $A5$, es posible probar como regla derivada, entre muchas más, el teorema de la deducción.

Recordemos que el lenguaje formal de la teoría de conjuntos, ZF, es un lenguaje de la lógica de predicados de primer orden cuyo tipo contiene únicamente un símbolo predicativo binario denotado por $\in$. Denotaremos por $\mathscr{L}_m$ a este lenguaje formal.

Al ser la lógica de predicados de primer orden el instrumento con el cual se formaliza la matemática resulta importante que ésta no esté fundamentada o definida dentro de alguna teoría matemática; así pues, la lógica con la que trabajamos y, por tanto, el lenguaje $\mathscr{L}_m$, son algo que existe fuera de toda teoría matemática. De esta forma podemos definir ZF sobre $\mathscr{L}_m$ y al trabajar en ZF los resultados obtenidos estarán avalados por todo el rigor de la lógica simbólica.

Sin embargo, nuestro propósito no es sólo poder trabajar dentro de la teoría de conjuntos, sino que también pretendemos estudiar la teoría de conjuntos en sí, y lo queremos hacer con rigor matemático. ¿Cómo hacer esto? ¿Cómo hablar, por ejemplo, del axioma del conjunto potencia dentro de ZF si ZF habla de conjuntos y no de fórmulas? Por el contrario: son la fórmulas el instrumento que utiliza la teoría de conjuntos para hablar. Resulta evidente que se tiene que hacer algo más para poder probar teoremas sobre la teoría de conjuntos dentro de la misma teoría de conjuntos.

Una forma de evadir este inconveniente es "emular" la teoría de conjuntos dentro de la teoría de conjuntos, los detalles de como se hace esto serán omitidos pues no es el exponerlos el propósito de esta tesis, a grandes rasgos lo que se hace es: Una vez sentadas la bases de una teoría de conjuntos dentro de la lógica simbólica metamatemática procedemos a definir la lógica simbólica dentro de ZF. En este contexto el lenguaje formal de la teoría de conjuntos es, pues, una quíntupla ordenada $\mathscr{L}_f = (\neg, \rightarrow, \forall, x, \in)$ donde $\neg, \rightarrow, \forall, \in$ son conjuntos cualesquiera pero distintos dos a dos y $x = \{x_n : n \in \omega\}$ es una sucesión de conjuntos distintos dos a dos en la que no aparece ninguno de los conjuntos que fueron asignados a los símbolos $\neg, \rightarrow, \forall, \in$. Con un poco de trabajo se puede definir las fórmulas bien formadas de la teoría de conjuntos como sucesiones finitas de símbolos de su lenguaje, así las formulas serán también conjuntos.

Ahora debemos tener cuidado de qué se debe entender por una fórmula φ de el lenguaje de la teoría de conjuntos, pues podemos estar hablando de la fórmula, φ, metamatemática o de la misma fórmula, en el sentido que es la misma sucesión de símbolos, pero la que sí es un conjunto y, por tanto, un objeto matemático. Para evitar esta confusión representaremos por $\ulcorner\varphi\urcorner$ a la representación matemática de la fórmula metamatemática φ. Del mismo modo, si Γ es una colección de fórmulas de $\mathscr{L}_m$, representaremos por $\ulcorner\Gamma\urcorner$ al conjunto de fórmulas de la forma $\ulcorner\varphi\urcorner$ tales que φ está en Γ; en particular $\ulcorner ZF\urcorner$ representará a la teoría de conjuntos que es un objeto matemático dentro de ZF.

Es claro que, cuando estemos trabajando totalmente dentro de la teoría de conjuntos y ésta no es en sí el objeto de nuestro estudio, resulta irrelevante si se está trabajando en ZF o en $\ulcorner ZF\urcorner$, pues todo lo que se pueda hacer en una se puede hacer de igual manera en la otra. Luego, distinguir entre ambas formas de pensar a la teoría de conjuntos, cuando no se está estudiando a la teoría de conjuntos en sí, resulta ser una complicación sin sentido. Por esta razón, cuando el contexto lo permita, trabajaremos simplemente en ZF sin preocuparnos de más.

1.1.2 Clases propias en ZF

Al trabajar dentro ZF (y con un poco de fe) nos libramos de las contradicciones intrínsecas al concepto intuitivo de conjunto. Ahora los conjuntos son las variables de el lenguaje de ZF. No obstante, hay ciertas colecciones de objetos a las que resultaría útil poder tratar como si fueran conjuntos y no lo son. Un ejemplo de esto es la "colección" de todos los números ordinales.

Más en general, dada una formula $\varphi(x)$ del lenguaje de la teoría de conjuntos que tiene a x por variable libre nos gustaría poder trabajar con la colección de todos los conjuntos que satisfacen la fórmula $\varphi(x)$. Por demás está decir que esta colección no siempre resulta ser un conjunto.

Todo lo anteriormente mencionado motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.2 Dada una fórmula bien formada del lenguaje de la teoría de conjuntos llamaremos *clase propia* a la colección metamatemática de todos los conjuntos que satisfacen φ. Abusando de la notación conjuntista, denotaremos tal colección por $\{x : \varphi(x)\}$.

Nótese que $z \in \{x : \varphi(x)\}$ no es más que una forma de abreviar $\varphi(z)$ con la cual sí podemos trabajar formalmente. Así pues, trabajar con clases propias no es más que abreviar fórmulas de la teoría de conjuntos con lo cual, en última instancia, obtendremos deducciones perfectamente válidas dentro de ZF al usar las clases propias de forma adecuada.

Otro punto importante es que las colecciones metamatemáticas de la que pretendemos hablar con las clases propias, en general, escapan a nuestra intuición, y son cosas a las que, como una totalidad, ni siquiera podemos dar sentido. Por esto hay que tener claro que el verdadero valor teórico del concepto de clase propia se encuentra a nivel puramente sintáctico.

Una de las clases propias que más utilizaremos y resulta por de más interesante estudiar es la clase de todos los conjuntos la cual denotaremos por $\mathbf{V}$; en éste caso $\mathbf{V} = \{x : x = x\}$. También utilizaremos la clase $\mathbf{R}$ de los conjuntos regulares; aquí $\mathbf{R} = \{x : x \notin x\}$. Finalmente, como ya se mencionó, trabajaremos con la clase de todos los número ordinales, la cual denotamos por ON.

Diremos que X es una *clase* si X es, o bien una clase propia o bien un conjunto.

Sección 1.2

Sobre la teoría de conjuntos y su consistencia

> *Después de llevarlo todo a la más idílica existencia, de repente llegaron los matemáticos, esos que siempre andan hozando más adentro, y cayeron en cuenta de que en la base de todo el asunto debía haber algo que no encajaba de ninguna manera; de hecho, miraron debajo y encontraron que todo el edificio estaba en el aire. Pero las maquinas corren. A ese respecto, hay que suponer que nuestra existencia es un pálido duende, la vivimos, pero, propiamente hablando, sólo sobre la base de un error sin el que no habría surgido. Hoy, no hay posibilidad de otro sentimiento tan fantástico como el del matemático.*

Robert Musil,
Ensayos y conferencias.

Si bien ya se usaba en cierta forma el concepto de conjunto en las matemáticas, no es sino hasta Cantor cuando éste toma un carácter central. Sin embargo, con Cantor, conjunto aún es algo poco claro y depende en gran medida de la intuición del matemático, prueba de ello es la siguiente cita tomada del trabajo titulado "Contribuciones a la fundamentación de la teoría de los conjuntos transfinitos"

> Entendemos por 'conjunto' cualquier reunión en un todo M de determinados objetos bien distinguidos m de nuestra intuición o nuestro pensamiento (llamados elementos de M). - G. Cantor.

Poco después llega Hilbert; él propone abstraer, o mejor dicho: mecanizar, el concepto de conjunto, tan ampliamente estudiado por Cantor, en la lógica simbólica para no tener que renunciar a él. Su pensamiento cambia de forma definitiva la matemática y en poco tiempo parece que su objetivo de una matemática formal completa y mecánica tendría éxito. El mismo Gödel demuestra, en su tesis doctoral, la completud semántica del cálculo de predicados lo cual le da un nuevo brillo y refuerza las esperanzas de Hilbert y su escuela.

Sin embargo, al poco tiempo, Gödel descubre sus famosos teoremas de incompletud y queda así establecido: Si la aritmética de Peano es consistente existe un enunciado verdadera de la aritmética que no es demostrable, ni él ni su negación, en la teoría. Esto pone tácitamente fuera de nuestro alcance la tan ansiada meta de Hilbert, pues este resultado se puede generalizar a teorías recursivas capaces de hablar de la aritmética lo cual nos permite decir:

Teorema 1.2.1
En caso de ser ZF consistente existen enunciados de su lenguaje que son independientes de ella, es decir, existe φ enunciado de ZF tal que $ZF \nvdash \varphi$ y $ZF \nvdash \neg\varphi$.

Lejos de ser, estos enunciados, rebuscados ejemplos de los lógicos por los cuales los matemáticos no se tengan que preocupar, varios de ellos han surgido en matemáticas de forma natural y su estudio a resultado fundamental para el desarrollo de la matemática moderna, por citar un par de ejemplos, de entre los muchos que hay, podemos mencionar a CH y AC. Más aún, a partir del segundo teorema de incompletud de Gödel se puede deducir que, en ZF, el enunciado que dice: ZF es consistente, resulta ser un ejemplo de enunciado independiente, es decir:

Teorema 1.2.2
Si ZF es consistente, ésta no podría probar su propia consistencia.

Así queda dicho de forma definitiva, la teoría de conjuntos, y por tanto toda la matemática que se fundamente en ella, no es capaz de demostrar su consistencia, a menos, claro, que ésta no sea consistente. Gödel fue ese que hozó más adentro y vio que, efectivamente, el edificio está en el aire; pero no es menos cierto, aún así las maquinas corren.

El legado de Gödel cambiaría de forma definitiva la matemática en todos los sentidos; de todas sus consecuencias tal vez lo que más resalta es poner fin a la posibilidad de una matemática, fundamentada en la lógica, que sea completa; pero no todo es oscuridad, pues también abre la puerta a la imaginación del matemático permitiendo crear diversas teorías matemáticas cada cual con sus propias consecuencias; le da un lugar distinguido a la intuición que nos ayudará a decidir si aceptamos o no cierta afirmación como verdadera y todas las consecuencias que esto conlleva; inyecta a las matemáticas un poco de controversia y nosotros podemos disfrutar de toda la pasión que esto genera.

Después de todo, Hilbert lo logró: hoy podemos trabajar con conjuntos más allá de toda ambigüedad, y aún lo podemos citar fuerte y claro:

> Nadie podrá expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros. - D. Hilbert.

Sección 1.3

El colapso de Mostowski

Yo acumulo números inmensos,
montañas de millones,
pongo tiempo sobre tiempo y mundo sobre mundo en montones,
y cuando desde la espantosa altura
con el vértigo vuelvo a mirara hacia ti,
todo poderío del número, aumentado miles de veces,
todavía no es ni una parte tuya.
Yo lo aparto, y tú estás todo ante mí.

Albrecht Von Halle.

Nota: Durante toda la sección utilizaremos únicamente relaciones binarias, por lo que al trabajar con una relación R sobre alguna clase A, se sobre entiende que R es una relación binaria.

Definición 1.3.1 Sea R una relación sobre una clase A. Un elemento $x_0 \in A$ es R-*minimal* si y sólo si

$$\neg \exists y \ (y \in A \wedge yRx_0).$$

R es *bien fundada en* A si para todo $X \subseteq A$ no vacío existe un $y_0 \in X$ que es R-minimal en X.

Notemos que si una relación R sobre una clase A es bien fundada, entonces no puede ser reflexiva; esto ya que, si existe $x_0 \in A$ tal que $x_0 R x_0$, entonces $\{x_0\}$ no tiene elemento minimal. Además se debe cumplir que $\neg \exists x, y \in A \ (xRy \wedge yRx)$, en caso contrarío $\{x, y\}$ no tendría elemento minimal. Este último hecho se puede generalizar para ver que no existen cadenas de la forma $x_0 R x_1 R \ldots R x_n R x_0$.

Recordemos que el *axioma de buena fundación* es la afirmación:

$$\forall x(x \neq \phi \rightarrow \exists y \in x\ (x \cap y = \phi)).$$

Éste es, probablemente, el axioma más técnico de la teoría de conjuntos y postula que ciertos conjuntos no existen; por ejemplo, un conjunto X tal que $X \in X$ no puede existir, pues de hacerlo el conjunto $\{X\}$ violaría el axioma de fundación. De forma similar se puede demostrar que cadenas de la forma $X_0 \in X_1 \in \cdots \in X_n$ no pueden existir.

Si bien la mayoría de la matemática se puede desarrollar sin el axioma de fundación, en la teoría de conjuntos y específicamente para el desarrollo del forcing, este axioma resulta de importancia central.

Es fácil adivinar que el axioma de fundación y el concepto de relaciones bien fundadas están íntimamente relacionados, tal y como se ve en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1
El axioma de buena fundación es equivalente a que la relación de pertenencia, $\in$, sea bien fundad.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que se satisface el axioma de fundación. Entonces, dado un conjunto, basta tomar el testigo que nos ofrece el axioma de fundación y éste será un $\in$-minimal.

$\Leftarrow$] Sea X un conjunto y supongamos que $\in$ está bien fundada sobre X, entonces elijamos y_0 $\in$-minimal en X y así $y_0 \cap X \neq \phi$. $\square$

Definición 1.3.2 Sea R una relación sobre una clase A. si $y \in A$ sea $pred_R(y) = \{x : xRy\}$. Decimos que R es *set-like* sobre A si $pred_R(x)$ es un conjunto para cada $x \in A$.

Por supuesto, la anterior definición es, en realidad, un esquema de definición dado a nivel metateórico, recordemos que ésta es la única forma de trabajar con clases propias. También es obvio que si A es un conjunto, entonces R es trivialmente set-like. Si $A = \mathbf{V}$ y $R = \ \in$, entonces $pred_R(x) = x$; se hace evidente que $\in$ es set-like en $\mathbf{V}$.

Definición 1.3.3 Sea R una relación set-like y bien fundada sobre una clase A. Definimos la *función colapsante de Mostowski*, $M_A^R : A \rightarrow \mathbf{V}$, por:

$$M_A^R(x) = \{M_A^R(y) : y \in A \wedge yRx\}.$$

Como es costumbre, cuando el contexto no se preste a confusión, omitiremos el subíndice y/o supraíndice en la notación de la función M_A^R. Al rango de M_A^R lo denotaremos por $\mathscr{M}_A^R$ y lo llamaremos *colapso de Mostowski*; cuando sea posible, haremos el mismo abuso de notación que con M_A^R.

Proposición 1.3.1
Si R es una relación set-like y bien fundada sobre una clase A, entonces $\mathscr{M}_A^R$ es transitiva y bien fundada, además:

$$\forall xy \in A\ (xRy \to M_A^R(x) \in M_A^R(y)). \tag{1.1}$$

Demostración. El que se cumpla 1.1 es inmediato de la definición de M_A^R.
Para probar la transitividad, elijamos $y_0 \in x_0 \in \mathscr{M}_A^R$. Por definición debe existir $a_0 \in A$ de modo que $x_0 = M_A^R(a_0)$ y debe existir $b_0 \in A$, con $b_0 R a_0$, tal que $y_0 = M_A^R(b_0)$. De aquí es inmediato que $y_0 \in \mathscr{M}_A^R$.
Finalmente, para probar que $\mathscr{M}_A^R$ es bien fundada. Sea $X \subseteq \mathscr{M}_A^R$ con X no vacío. Como $(M_A^R)^{-1}[X]$ es una clase no vacía de A, ésta debe tener un elemento minimal, sea x_0 tal elemento. Afirmamos que $M_A^R(x_0)$ es un minimal de X; para probarlo veamos que $X \cap M_A^R(x_0)$ es vacío. En efecto, si existe $y_0 \in M_A^R(x_0) \cap X$, entonces debe existir $a_0 \in A$ tal que $a_0 R x_0$ y $M_A^R(a_0) = y_0$; entonces $a_0 \in (M_A^R)^{-1}[X]$, lo cual contradice la minimalidad de x_0. $\square$

Nosotros estamos interesado especialmente que los casos cuando la función colapsante M_A^R es biyectiva. Para poder determinar cuando ocurre esto hace falta una definición más.

Definición 1.3.4 Una relación R es *extensional* sobre una clase A si:

$$\forall xy \in A\ (\forall a \in A(aRx \leftrightarrow aRy) \to x = y).$$

Nótese que esta definición es una generalización de el axioma de extensionalidad a relaciones arbitrarias.

Proposición 1.3.2
Sea R una relación extensional, bien fundada y que es set-like sobre una clase A. Entonces $M_A^R : A \to \mathscr{M}_A^R$ es biyectiva y además:

$$\forall x, y \in A\ (xRy \leftrightarrow M_A^R(x) \in M_A^R(y)). \tag{1.2}$$

Demostración. Supongamos que M_A^R no es inyectiva y consideremos el siguiente conjunto:

$$X = \{x \in A : \forall y \in A\ (x \neq y \wedge M_A^R(x) = M_A^R(y))\}.$$

Sea x_0 un elemento minimal de X. Entonces existe $y_0 \in A$ tal que $x_0 \neq y_0$ y $M_A^R(x_0) = M_A^R(y_0)$. Ahora, usando que R es extensional, podemos tomar $z \in A$ tal que:

$$(zRx_0 \wedge \neg zRy_0) \vee (zRy_0 \wedge \neg zRx_0).$$

Analicemos ambos casos.
Si $zRx_0 \wedge \neg zRy_0$, entonces $M_A^R(z) \in M_A^R(x_0) = M_A^R(y_0)$, luego, por definición de $M_A^R(y_0)$, debemos tener que, para cierto $a \in A$, $M_A^R(z) = M_A^R(a)$. Además, ya que $\neg zRy_0$, tenemos $a \neq z$, es decir, $z \in X$ y zRx_0, lo cual es una contradicción.
Si $zRy_0 \wedge \neg zRx_0$, entonces $M_A^R(z) \in M_A^R(y_0) = M_A^R(x_0)$, por tanto $M_A^R(z) = M_A^R(w)$, para algún $w \in A$ tal que wRx, además $w \neq z$; de lo cual se sigue que $w \in X$, contradiciendo la minimalidad de x_0. Con esto queda probada la biyectividad.

Finalmente, para ver que 1.2 se satisface notemos que, si $M_A^R(x_0) \in M_A^R(y_0)$, entonces tenemos que $M_A^R(x_0) = M_A^R(u)$, para algún $u \in A$, con uRy. Como M_A^R es biyectiva se debe tener $x_0 = u$, luego uRy_0. □

Finalmente podemos enunciar el teorema que motiva la presente sección.

Teorema 1.3.2
Si R es una relación bien fundada, extensional, y set-like sobre una clase A, existe una clase transitiva B y una función $M : A \to B$ biyectiva tal que:

$$\forall x, y \in A\ (xRy \leftrightarrow M(x) \in M(y)).$$

El teorema ya ha sido demostrado con las proposiciones previas; notemos que el teorema lo que hace es un morfismo entre la clase A y otra clase que es transitiva. Nosotros utilizaremos esto para poder obtener ciertos modelos transitivos que nos serán de gran utilidad.

Sección 1.4

Modelos y la teoría de conjuntos

> *Hay períodos en los que el hombre racional y el hombre intuitivo caminan juntos; el uno angustiado ante la intuición, el otro mofándose de la abstracción; es tan irracional el último como poco artístico el primero. Ambos ansían dominar la vida: éste sabiendo afrontar las necesidades más imperiosas mediante prevención, prudencia y regularidad; aquel sin ver, como "héroe desbordante de alegría", esas necesidades y tomando como real solamente la vida disfrazada de apariencia y belleza.*

F. Nietzsche.

Si bien es necesario hacer algo de lógica simbólica de forma metamatemática, la lógica no podrá desplegar su verdadero poder hasta ser fundamentada en las matemáticas, esto se debe principalmente al concepto de modelo.

En principio, la función de los modelos es dar semántica a la teoría, es decir, interpretar sus símbolos; por ejemplo: cuando pensamos en la fórmula $\forall x \exists y\ (x < y)$ ésta, por sí sola, es una secuencia de símbolos que nada dicen; ahora, si pensamos a x y y como números naturales, la fórmula adquiere significado, nos está diciendo que para cada número natural x que elijamos ha de existir otro número natural y que es estrictamente más grande que él; lo cual, sabemos, es cierto. En este caso diríamos que los números naturales son un modelo para la fórmula $\forall x \exists y\ (x < y)$.

Ahora nos proponemos dar modelos para la teoría de conjuntos lo cual pareciera implicar que vamos a dar un significado a las variables de la teoría de conjuntos, es decir, vamos a decir que debemos entender por un conjunto, ¿es esto posible? Cuando decimos que vamos a interpretar las variables de la aritmética de Peano como números naturales todos entendemos exactamente lo mismo, y es que los números naturales son algo completamente determinado en la metateória: a pesar de no poder decir que es el numero 3 todos pensamos en lo mismo al hablar de él, las verdades aritmética que se refieran a él serán las mismas sin importar quien las esté enunciando. Con los conjuntos no ocurre lo mismo: si bien podemos encontrar colecciones que más allá de toda duda deberían ser conjuntos; los números naturales, por ejemplo; también es posible hablar de colecciones que, depende a quién preguntemos, según la intuición, tales colecciones deberían ser conjuntos, pero considerarlos como tales nos da como resultado una teoría contradictoria; el conjunto de todos los conjuntos, por ejemplo.

Lo que haremos, en cierta forma, es usar la misma teoría para dar semántica a la teoría, de forma que, en última instancia, todo se puede reducir a la sintaxis, y aún así podremos pensar que hemos dado semántica a la teoría de forma satisfactoria. Aunque por momentos esto pueda parecer muy artificioso, también es bastante sorprendente e ingenioso; en cierto sentido, vamos a dar una respuesta, satisfactoria para la mayoría de los fines prácticos, a una pregunta que de antemano sabemos no tiene respuesta.

A continuación diremos formalmente lo que debemos entender por modelo para segmento finito de $\ulcorner ZF \urcorner$ y daremos algunos ejemplos, la razón para trabajar con segmentos finitos de $\ulcorner ZF \urcorner$ y no con $\ulcorner ZF \urcorner$ es que encontrar un modelo para una teoría es equivalente a probar la consistencia de la teoría, luego, los teoremas de incompletud nos dicen que no deberíamos desgastarnos mucho buscando que ZF demuestre tener modelos para $\ulcorner ZF \urcorner$.

1.4.1 Modelos para segmentos de $\ulcorner ZF \urcorner$

Entenderemos por segmento de $\ulcorner ZF \urcorner$ a una teoría formal con el mismo lenguaje que la teoría de conjuntos y cuyos axiomas están contenidos propiamente en el conjunto de axiomas de $\ulcorner ZF \urcorner$.

Definición 1.4.1 Un modelo estándar para el lenguaje $\mathscr{L}_t$ de la teoría de conjuntos, $\ulcorner ZF \urcorner$, es una dupla $M = (A, R)$ donde A es un conjunto y $R \subseteq A^2$ es una relación binaria de modo tal que $x \in y$ si y sólo si $(x, y) \in R$; es decir, $R = \in\restriction_A$. Al conjunto A se le llama universo de discurso (o simplemente universo) del modelo M. Como es costumbre, abusando de la notación cuando esto no cause confusión, utilizaremos la misma letra para representar a el modelo y a su universo.

El siguiente paso es decir cuándo un modelo satisface una fórmula. Para poder hacerlo necesitamos, antes, la siguiente definición.

Definición 1.4.2 Sea $M = (A, \in\restriction_A)$ un modelo de $\mathscr{L}_t$ y sea $var_M = \{x_n : n \in \omega\}$ el conjunto de variables de $\mathscr{L}$. Una valoración para M es una función

$s : var_M \to A$.

Así, pues, una valoración es simplemente una función que asigna a cada variable del lenguaje $\mathscr{L}_t$ un conjunto. Como ya se dijo, los modelos pretenden dar un significado la sintaxis de la teoría, ahora en vez de pensar sólo en una variable de la teoría formal podemos pensar en el conjunto que le fue asignado a tal variable; no podemos, sin embargo, pasar por alto que estamos usando ZF para darle semántica a $\ulcorner ZF \urcorner$ sin haber antes dado un significado (dotado de semántica) a las variables de ZF. Esto se hará aún más evidente cuando estudiemos el concepto de relativización. Algo similar se hizo al darle significado al símbolo $\in$ en la definición 1.4.1

Ya estamos en condiciones de definir la noción de verdad.

Definición 1.4.3 *(de verdad de Tarski)* Consideremos un modelo $M = (A, \in\restriction_A)$ para el lenguaje $\mathscr{L}_t$, una valoración s para M y tomemos dos conjuntos cuales quiera V y F que no aparezcan en A. Entonces definimos recursivamente la función val_M, cuyo dominio son las fórmulas de $\mathscr{L}_t$ y toma valores en el conjunto $\{V, F\}$, de la siguiente forma:

- $val_M(x \in\restriction_A y)[s] = V$ si y sólo si $s(x) \in s(y)$;
- $val_M(\neg\varphi)[s] = V$ si y sólo si $val_M(\varphi)[s] = F$;
- $val_M(\varphi \to \psi)[s] = F$ si y sólo si $val_M(\varphi)[s] = F$ y $val_M(\psi)[s] = V$;
- $val_M(\forall x\ \varphi)[s] = V$ si y sólo si $val_M(\varphi)(a)[s(x/a)] = V$ para toda $a \in A$; donde $s(x/a)$ es la función que toma los mismo valores que s excepto en x donde toma el valor a.

Diremos que el modelo M *satisface* la fórmula φ según la interpretación s cuando $val_M(\varphi) = V$. Cuando M satisface una fórmula sin importar cual sea la valoración decimos que la fórmula es *verdadera* según M.

Sólo para ser congruentes con la notación usual, se da la siguiente definición.

Definición 1.4.4 Si M es un modelo de algún segmento de $\ulcorner ZF \urcorner$ y φ una fórmula de $\mathscr{L}_t$, escribiremos $M \vDash \varphi[s]$ si M satisface φ según s y entenderemos por $M \vDash \varphi$ que φ es verdadera según M. Finalmente, para Γ un conjunto de enunciados de $\mathscr{L}_t$, escribiremos $M \vDash \Gamma$ si M hace verdadera a cada γ en Γ.

La definición de val_M, como ya se dijo, está justificada por el teorema de recursión, en este caso se aplica sobre la relación R definida por $(\varphi_0, s)R(\varphi_1, s)$

si y sólo si φ_0 es una subfórmula propia de φ_1. Para poder aplicar el teorema de recursión es necesario que R sea bien fundada y set-like; es evidente que R es bien fundada. Para que R sea set-like es necesario que las formulas y las asignaciones sean conjuntos, sabemos que las fórmulas bien formadas siempre resultan ser conjuntos, luego basta ver bajo qué condiciones la asignación serán un conjunto para saber bajo qué condiciones R es set-like; por la propia definición de función, la asignación será un conjunto cuando el universo de discurso del modelo, el cual es el dominio de la asignación, sea un conjunto. Esto nos deja claro que no es posible considerar clases propias como modelos con la definición anterior pues en ese caso ésta carecería de sentido. En resumen: si N es una clase propia entonces $N \vDash \varphi$ no tiene sentido pues la función $\vDash$ no está definida.

Basta revisar el punto dos de la definición de verdad de Tarski para ver que de ella se sigue de forma inmediata el siguiente resultado.

Teorema 1.4.1
Sea $\Gamma \subset \ulcorner ZF \urcorner$, si $\vdash_{ZF} \exists M\ (M \vDash \Gamma)$ y ZF es consistente, entonces Γ es consistente.

El recíproco del teorema anterior también se cumple aunque demostrarlo requiere algo más de trabajo. Su demostración puede ser encontrada en cualquier libro de teoría de modelos.

Ya que tenemos la definición de modelo para segmento de $\ulcorner ZF \urcorner$ sería conveniente contar con algunos ejemplos de modelos. Para esto presentamos la conocida *jerarquía de von Neumann*. Ésta se construye por recursión sobre los ordinales. En realidad parece ser el camino más natural para armarnos de un buen arsenal de conjuntos usando sólo los axiomas que tenemos a disposición: partimos del conjunto vacío y avanzamos utilizando el axioma del conjunto potencia. Los detalles se dan a continuación.

Definición 1.4.5 Definimos los conjuntos V_α, mediante recursión sobre la clase de los número ordinales, como sigue

- $V_0 = \phi$;
- $V_{\alpha+1} = \mathscr{P}(V_\alpha)$, si α es sucesor;
- $V_\gamma = \bigcup_{\alpha<\gamma} V_\alpha$, si γ es límite.

Consideremos ahora a:

$$V = \bigcup_{\gamma \in ON} V_\gamma$$

Se puede demostrar que: si x es un conjunto, entonces existe $\alpha \in ON$ tal que $x \in V_\alpha$. Así V es precisamente la clase propia que habíamos definido mediante la fórmula $x = x$, es decir, $V = \mathbf{V}$.
En la sección 1,4,4 veremos que, para cada conjunto finito, Γ, de axiomas de $\ulcorner ZF \urcorner$ existe un cardinal γ de modo tal que $V_\gamma \models \Gamma$.

Pasemos a dar algunos ejemplos más de modelos para segmentos de $\ulcorner ZF \urcorner$, para poder hacerlo es necesario dar algunas definiciones.

Definición 1.4.6 Para cada conjunto x, por recursión sobre la clase de los ordinales, definimos la función $ct(x)$ de la siguiente manera:

- $ct_0(x) = x$;
- $\forall n \in \omega \ (ct_{n+1}(x) = \bigcup_{y \in ct_n(x)} y)$;
- $ct(x) = \bigcup_{n \in \omega} ct_n(x)$.

$cl(x)$ se conoce como la clausura transitiva de x, en siguiente teorema hará más evidente a que se debe tal nombre.

Teorema 1.4.2
Si x es un conjunto se tiene.

1. $x \subseteq ct(x)$;
2. $ct(x)$ es un conjunto transitivo.
3. Si $x \subseteq T$ y T es una clase transitiva, entonces $ct(x) \subseteq T$;
4. $ct(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} ct(y)$;
5. x es transitivo si y sólo si $x = ct(x)$.

No presentamos una demostración del teorema anterior pues ésta es completamente técnica por lo que no aporta mucho más.

Definición 1.4.7 Sean γ un cardinal. Se define H_γ como:

$$H_\gamma = \{x : |ct(x)| < \gamma\}.$$

A H_γ se le conoce como la familia de los conjuntos hereditariamente menores que γ, aunque no lo sea del todo evidente a partir de la definición, los H_γ son conjuntos y no clases propias, de hecho se cumple que $H_\alpha \subseteq V_\alpha$ para cada α y para $\alpha = \aleph_0$ la igualdad se da. Nosotros nos interesamos en los H_γ principalmente gracias al siguiente teorema.

Teorema 1.4.3
Sea θ un cardinal regular no numerable, entonces H_θ es un modelo para $\ulcorner ZF \urcorner$ menos el axioma del conjunto potencia.

1.4.2 Submodelos elementales

Los submodelos elementales constituyen una de las herramientas más poderosas que la teoría de modelos aporta. Basta dar una hojeada a las revistas de topología de los últimos años para entender la importancia que éstos están tomado en el desarrollo de la topología de conjuntos. Durante el resto la tesis los submodelos elementales jugarán un papel protagónico en varias ocasiones y tendremos así oportunidad de mostrar algunos ejemplos de su uso en la topología y en la teoría de conjuntos.

Definición 1.4.8 Sean $\mathscr{A} = (A, \in_{\restriction_A})$ y $\mathscr{U} = (U, \in_{\restriction_U})$ dos modelos de $\mathscr{L}_t$ de modo tal que $A \subseteq U$. Diremos que $\mathscr{A}$ es un submodelo elemental de $\mathscr{U}$, y lo denotaremos por $\mathscr{A} \preceq \mathscr{U}$, si para toda fórmula $\varphi(v_0, \ldots v_n)$ de $\mathscr{L}_t$ y para cada sucesión finita $a_0, a_1, \ldots a_n$ de elementos en A se cumple que

$$\mathscr{A} \models \varphi[m_0, \ldots m_n] \text{ si y sólo si } \mathscr{B} \models \varphi[m_0, \ldots m_n]$$

Como ya se había dicho, en está tesis estamos interesados en los submodelos elementales principalmente por sus aplicaciones a la topología. Ya que no es posible encontrar un modelo para $\ulcorner ZF \urcorner$ en ZF debemos optar por trabajar con un modelo de una parte "suficientemente rica" de $\ulcorner ZF \urcorner$; es decir, elegir un modelo para un segmento de $\ulcorner ZF \urcorner$ que contenga todos los axiomas que necesitemos. Cuando uno está trabajando en un problema determinado en topología, en general, es posible encontrar un cardinal θ de modo que todos los conjuntos a utilizar en el estudio de tal problema se encuentren ya en H_θ, esto resulta de gran utilidad, pues en este caso no resulta relevante que H_θ no modele el axioma del conjunto potencia y, como ya sabemos, H_θ modela el resto de los axiomas de ZF. Es por este motivo que nos encontramos particularmente interesados en los submodelos elementales de H_θ para alguna θ suficientemente grande.

Pacemos ahora a estudiar algunas de las propiedades más relevantes de los submodelos elementales. Primero notemos que si $M \preceq H_\theta$ y un conjunto X es definible en H_θ a partir sólo de parámetros que están en M, entonces $X \in M$.

A continuación daremos un criterio que en la práctica resulta muy útil para distinguir submodelos elementales, su importancia radica en que reduce el probar que un modelo es submodelo elemental de otro a encontrar sólo un testigo adecuado para cada fórmula existencial, reduciendo así en gran medida el trabajo que se debe realizar.

Teorema 1.4.4 *(Criterio de Tarski-Vaught)*
Sean M y N modelos para $\mathscr{L}_t$ con $N \subseteq M$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $N \preceq M$

2. Para cada fórmula de $\mathscr{L}_t$ que es de la forma $\exists x\psi$ cuyas variables libres se encuentran entre $x_0, x_1, \ldots, x_s$, para cada $l < s$, y para cualesquiera parámetros $n_o, n_1, \ldots n_{l-1}, n_{l+1}, \ldots, n_s \in N$, si

$$M \vDash \exists x\psi[n_o, n_1, \ldots, n_{l-1}, n_{l+1}, \ldots, n_s]$$

entonces existe $n \in N$ tal que

$$M \vDash \psi[n_o, n_1, \ldots, n_{l-1}, n, n_{l+1}, \ldots, n_s].$$

Demostración. $1 \Rightarrow 2]$ Esta parte se sigue fácilmente de la definición de submodelo elemental. Supongamos que $N \prec M$ y que

$$M \vDash \exists x\psi[n_o, n_1, \ldots, n_{l-1}, n_{l+1}, \ldots, n_s]$$

entonces, por elementaridad tendremos que

$$N \vDash \exists x\psi[n_o, n_1, \ldots, n_{l-1}, n_{l+1}, \ldots, n_s]$$

Por tanto, debe existir $n \in N$ de modo tal que

$$N \vDash \psi[n_o, n_1, \ldots, n_{l-1}, n, n_{l+1}, \ldots, n_s]$$

Y, finalmente, usando nuevamente que N es submodelo elemental de M obtenemos el resultado buscado.

$2 \Rightarrow 1]$ Ahora supongamos que: M y N son modelos para $\mathscr{L}_t$ con $N \subseteq M$ y ψ es una fórmula de $\mathscr{L}_t$ cuyas variables libres se encuentran entre $x_0, x_1, \ldots, x_s$;

definamos, además, a v_ψ como la afirmación:

"Para todo $(n_0, \dots, n_s) \in N^s$, $N \vDash \psi[n_0, \dots, n_s]$ si y sólo si $M \vDash \psi[n_0, \dots, n_s]$".

Probaremos por inducción sobre la complejidad de ψ que v_ψ se cumple para cada ψ fórmula de $\mathscr{L}_t$. Si ψ es atómica entonces es de la forma $x \in y$ y sabemos que $\in\restriction_N \subseteq \in\restriction_M$ lo cual hace evidente que v_ψ se verifica. Si v_ψ y v_φ se se cumplen, entonces $v_{\neg\varphi}$ y $v_{\psi\to\varphi}$ se siguen de forma inmediata debido a la definición de $\vDash$. Por último supongamos que ψ es de la forma $\exists x\varphi$ y v_φ se cumple.
Primero supongamos que

$$N \vDash \exists x\varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

Entonces, para alguna $n \in N$ se tiene

$$N \vDash \varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

y, por hipótesis de inducción, tendremos que

$$M \vDash \varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

pero, entonces

$$M \vDash \exists x\varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

Si, por el contrario, partimos de

$$M \vDash \exists x\varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

entonces, por (2), tendremos que existe $n \in N$ tal que

$$N \vDash \varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

y, por hipótesis de inducción

$$M \vDash \varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

sólo resta usar la definición de $\vDash$ para poder concluir que

$$M \vDash \exists x\varphi[n_0, \dots, n_{l-1}, n_{l+1}, \dots, n_s]$$

$\square$

Algo que muchas veces resulta de fundamental importancia a la hora de usar los submodelos elementales es poder controlar su cardinalidad. Esto lo podemos hacer gracias a uno de los teoremas clásicos de la teoría de modelos, el que presentamos en seguida es un caso particular de éste, considerando sólo modelos estándar para segmentos de $\ulcorner ZF \urcorner$.

Teorema 1.4.5 *(Löwenheim-Skolem)*
Sean M modelo para algún segmento de $\ulcorner ZF \urcorner$ y tomemos $X \subseteq M$ un conjunto arbitrario, entonces existe $N \preceq M$ tal que $X \subseteq N$ y además $|N| = |X| + \aleph_0$.

Nos abstendremos de dar una prueba para el teorema de Löwenheim-Skolem pues hacerlo requiere entrar en tecnicismos de la teoría de modelos que van más allá de los propósitos de esta tesis. El lector interesado en la demostración la podrá encontrar en cualquier libro de teoría de modelos respetable. Pasemos a dar una definición más.

Definición 1.4.9 Sea α un ordinal. Una *cadena elemental* de longitud α es una familia de modelos para un mismo segmento de $\ulcorner ZF \urcorner$, $\{M_\beta : \beta < \alpha\}$, tal que $M_\beta \prec M_\gamma$ siempre que $\beta < \gamma < \alpha$.

Las cadenas elementales resultan importantes debido a su buen comportamiento respecto a la unión tal como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.4.6 *(de la cadena elemental)*
Supongamos que $\{M_\beta : \beta < \alpha\}$ es una cadena elemental. Entonces $\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ es un modelo de $\mathscr{L}_t$ y

$$M_\gamma \prec \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta \text{ para cada } \gamma < \alpha. \tag{1.3}$$

Corolario 1.4.1
Sea $\{M_\gamma : \gamma < \alpha\}$ una cadena bajo la inclusión de submodelos elementales de H_θ, para algún cardinal regular θ; es decir, $\beta < \gamma < \alpha$ implica que $M_\beta \subseteq M_\gamma$ y $M_\beta \prec H_\theta$. Entonces $\{M_\gamma : \gamma < \alpha\}$ es una cadena elemental y

$$\bigcup_{\gamma<\alpha} M_\gamma \prec H_\theta.$$

En ocasiones resulta útil saber que cierto elemento de un submodelo elemental está también contenido en él, pretendemos ahora dar un par de teoremas en este sentido.

Teorema 1.4.7
Sea κ un cardinal infinito. Para cualquier cardinal regular $\theta \geqslant 2^\kappa$ y cualquier $X \subseteq H_\theta$ con $|X| \leqslant 2^\kappa$, existe $M \prec H_\theta$ tal que $X \subseteq M$, $|M| \leqslant 2^\kappa$ y además M es cerrado bajo κ-sucesiones; esto es, $M^\kappa \subseteq M$.

Demostración. Sea $M_0 \prec H_\theta$ con $X \subseteq M_0$ y para cada $\alpha \in ON$ con $\alpha < \kappa^+$ tomemos $M_\alpha \prec H_\theta$ tal que, para cada $\beta < \alpha$, $M_\beta \cup M_\beta^\kappa \subseteq M_\alpha$ y además

$|M_\alpha| \leqslant 2^\kappa$; lo anterior se puede hacer aplicando el teorema de Löwenheim-Skolem en repetidas ocasiones. Ahora hagamos

$$M = \bigcup\{M_\alpha : \alpha < \kappa^+\}.$$

Entonces $M \prec H_\theta$ y claramente $X \subseteq M$, $|M| \leqslant 2^\kappa$. Para ver que M es cerrado bajo κ-sucesiones, supongamos que $f : \kappa \to M$; nótese que al existir $\beta \in \kappa^+$ tal que $f(\alpha) \in M_\beta$ para todo $\alpha \in \beta$, se sigue que $f \in M^\kappa_{\beta+1}$ y así $f \in M$. □

Teorema 1.4.8
Sea κ un cardinal regular, y tomemos $M \prec H_\theta$ de modo que $\kappa \in M$ y $\kappa \subseteq M$. Entonces para cada $X \in M$ con $|X| \leqslant \kappa$, X es un subconjunto de M.

Demostración. Si $|X| \leqslant \kappa$, entonces $H_\theta \vDash$ "$\exists f : \kappa \to X$ y f es sobreyectiva", ya que $X, \kappa \in M$ por elementaridad se debe tener que $M \vDash$ "$\exists f : \kappa \to X$ y f es sobreyectiva". Y, ya que f es sobreyectiva, tenemos $M \vDash ran(f) = X$ el cual es un elemento de M; para ver que $X \subseteq M$, notemos que $dom(f) = \kappa$ sí está contenido en M, además, para cada $x_0 \in X$ existe $\alpha \in \kappa$ de modo tal que $(\alpha, x_0) \in f$ y, ya que M modela que f es la función que es, se debe tener que $M \vDash \exists x\ ((\alpha, x) \in f)$ por lo cual podemos tomar $y_0 \in M$ tal que $(\alpha, y_0) \in f$. Como H_θ modela que f es función y además $H_\theta \vDash (\alpha, x_0) \in f$ podemos concluir que $H_\theta \vDash x_0 = y_0$; por tanto $x_0 \in M$, como queríamos. □

Corolario 1.4.2
Si $M \prec H_\theta$, donde θ es un cardinal regular. Entonces cada elemento numerable de M está contenido en M.

Demostración. Por el teorema anterior, basta notar que $\omega \in M$ lo cual se sigue de que cada natura es definible con elementos de M. □

1.4.3 Relativización: Clases propias como modelos

El título de la presente sección en realidad es motivado por un abuso de notación que propondremos más adelante, nosotros ya hemos definido el concepto de modelo y sabemos, además, que resulta imposible considerar clases propias como universo de discurso para un modelo. Aquí pretendemos desarrollar herramientas que nos permitan usar las clases propias "casi" como si fueran modelos.

Estamos en el mes de octubre de 1935 y Gödel informa a von Neumann que ha logrado demostrar la consistencia del axioma de elección relativa a la consistencia de los axiomas de ZF. Ésta constituiría la contribución más importante a la teoría de conjuntos desde su creación con Cantor y su axiomatización con Zermelo, Fraenkel y Skolem, y el primer avance real para dar solución a la mítica hipótesis del continuo propuesta por Cantor.

Aunque no de forma literal, en esta sección presentamos algunos de los resultados que llevan a Gödel a demostrar la consistencia del axioma de elección; él define el universo de los conjuntos construibles, el cual es una clase propia en ZF, y lo utiliza de forma muy similar a como se utilizaría un modelo. Es ese "utilizar una clase propia como modelo" que ideo Gödel, lo que pretendemos estudiar a continuación.

Pacemos a dar la definición central de esta sección.

Definición 1.4.10 Sea $M(x)$ una fórmula de $\mathscr{L}_m$ cuya única variable libre es x y consideremos a φ también una fórmula de $\mathscr{L}_m$. Definimos la relativización de φ respecto a M como sigue:

- Si ψ es atómica, entonces:
$$(x \in y)^M = x \in y$$
- Si ψ es de la forma $\gamma \rightarrow \varphi$, entonces:
$$(\gamma \rightarrow \varphi)^M = \gamma^M \rightarrow \varphi^M$$
- Si ψ es de la forma $\neg\varphi$, entonces:
$$(\neg\varphi)^M = \neg\varphi^M$$
- Si ψ es de la forma $\forall x\varphi$, entonces:
$$(\forall x\varphi)^M = \forall x\ (x \in M \rightarrow \varphi^M)$$
- Si ψ es de la forma $\exists x\varphi$, entonces:
$$(\exists x\varphi)^M = \exists x\ (x \in M \wedge \varphi^M)$$

Cuando Γ sea una colección de fórmulas, Γ^M representará la colección de todas las fórmulas de Γ relativizadas a M.

Evidentemente la definición que hemos dado es metateórica, más precisamente, estamos dando un algoritmo para, dadas dos fórmulas de $\mathscr{L}_m$, obtener una nueva fórmula, también de $\mathscr{L}_m$. Otro punto importante a tener presente es que ahora estamos trabajando en el lenguaje metamatemático de la teoría de conjuntos; de aquí que sea imprescindible hablar de colecciones de fórmulas y no de conjuntos de fórmulas.

Notar también que la definición de relativización es dada a un nivel completamente sintáctico. Recordemos que cuando M es una clase propia lo que hacemos al escribir $x \in M$ es, en realidad, abreviar una fórmula de $\mathscr{L}_m$ que sí tiene sentido; así, por ejemplo, en los últimos dos casos de la definición, si $M = \{x : \rho(x)\}$, estaríamos cambiando cada ocurrencia de la forma $\forall x \in M$ por $\forall x\ (\rho(x) \to \dots)$ y cada ocurrencia de $\exists x \in M$ por $\exists x\ (\rho(x) \wedge \dots)$. Cuando M describe un conjunto lo único que se hace es restringir las variables a tomar valores sólo en el conjunto dado (pues en este caso $x \in M \leftrightarrow M(x)$). Es evidente que en ambos casos el valor de verdad de la fórmula ahora es relativo a la clase M quien restringe los cuantificadores a tomar valores en cierta colección de conjuntos.

Los siguientes teoremas nos permitirán entender mejor la importancia del concepto de relativización y el sentido en que lo pretendemos usar.

Lema 1.4.1
La relativización de uno de los axiomas $A1$, $A2$ o $A3$ de la definición 1.1.1 es nuevamente un axioma del mismo tipo.

Demostración. Inmediato de la definición de relativización. □

Lema 1.4.2
El axioma $A5$ de la definición 1.1.1 es un teorema lógico.

Demostración. La relativización de $A5$ es

$$\forall x\ (M(x) \to (\alpha \to \beta)^M) \to (\alpha^M \to \forall x(M(x) \to \beta^M))$$

donde x no tiene ocurrencias libres en α. De lo cual se sigue que:

$$\forall x\ (M(x) \to \alpha^M \to \beta^M) \to (\alpha^M \to \forall x(M(x) \to \beta^M))$$

Veamos que se puede deducir. Para mejorar la legibilidad haremos $\psi \equiv \forall x\ (M(x) \to \alpha^M \to \beta^M)$.

1	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	$\forall x\ (M(x) \to \alpha^M \to \beta^M)$	hipótesis
2	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	$\forall x\ (M(x) \to \alpha^M \to \beta^M) \to M(x) \to \alpha^M \to \beta^M)$	$A4$
3	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	$M(x) \to \alpha^M \to \beta^M$	MP a 1 y 2
4	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	$M(x)$	hipótesis
5	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	$\alpha^M \to \beta^M$	MP 3 y 4
6	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	α^M	hipótesis
7	$M(x), \alpha^M, \psi \vdash$	β^M	MP 5 y 6
8	$\alpha^M, \psi \vdash$	$M(x) \to \beta^M$	Teo. deducción 7
9	$\psi \vdash$	$\forall x(M(x) \to \beta^M)$	GEN a 8

Y usando una vez más el teorema de la deducción se obtiene el resultado buscado. □

Lema 1.4.3
Respecto al Axioma $A4$ de la definición 1.1.1 se tiene que: si t es un término libre para x en M y en φ entonces

$$M(t) \vdash \forall x\ (M(x) \to \varphi^M(x)) \to \varphi^M(t)$$

Como se aprecia, requerimos de la hipótesis $M(t)$ para demostrar como teorema la relativización del axioma $A4$, esto tiene sentido pues, si nos estamos restringiendo a trabajar en M el término en cuestión t debería estar en M para poder hablar de él.

El siguiente teorema nos muestra que la relativización preserva la deducción de fórmulas. Si bien ya se podía ver, con este teorema será aún más evidente que la relativización se comporta de forma muy similar a los modelos.

Teorema 1.4.9
Sean Γ una colección finita de fórmulas de $\mathscr{L}_m$ cuyas variables libres se encuentran entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$ y φ una fórmula de $\mathscr{L}_m$ también con variables libres en $x_0, x_1, \ldots, x_n$; supongamos que $\Gamma \vdash \varphi$. Si $M(x)$ es una fórmula cuya única variable libre es x, entonces

$$M(x_0), \ldots, M(x_n), \Gamma^M \vdash \varphi^M$$

Demostración. Sea $\varphi_1, \ldots, \varphi_m = \varphi$ una deducción para φ con premisas en Γ. Haremos la prueba por inducción sobre las fórmulas φ_i.

Para la base de la inducción: si $\varphi_0 \in \Gamma$ trivialmente $\Gamma^M \vdash \varphi^M$ y si φ es un axioma, el resultado se sigue de los anteriores lemas ya demostrados.

Para el paso inductivo: supongamos que ya se tiene el teorema demostrado para φ_{s-1} y veamos que también es válido para φ_s. Se distingue los siguientes casos:

- Si φ_s es un axioma o $\varphi_s \in \Gamma$ el resultado se sigue de igual forma que en la base de la inducción.

- Si φ_s se obtiene por MP de las fórmulas φ_l y φ_r, donde $l, r < s$ y $\varphi_r \equiv \varphi_l \to \varphi_s$. Por hipótesis de inducción tenemos $M(x_0), \ldots, M(x_n), \Gamma^M \vdash \varphi_l^M$ y $M(x_0), \ldots, M(x_n), \Gamma^M \vdash (\varphi_l \to \varphi_s)^M$. Ya que $(\varphi_l \to \varphi_s)^M$ es igual a $\varphi_l^M \to \varphi_s^M$ el resultado se sigue de una simple aplicación de MP.

- Si φ_s se obtiene por GEN de φ_l entonces $\varphi_s \equiv \forall x_r\ \varphi_l(x_r)$. Si x_r es una de las variables libres de φ_l entonces, por hipótesis de inducción, $M(x_0), \ldots, M(x_r), \ldots, M(x_n), \Gamma^M \vdash \varphi_l^M(x_r)$ luego, por el teorema de la deducción tendremos que:

$$M(x_0), \ldots, M(x_n), \Gamma^M \vdash M(x_r) \to \varphi_l^M(x_r)$$

  y aplicando GEN se tiene:

$$M(x_0), \ldots, M(x_n), \Gamma^M \vdash \forall x_r (M(x_r) \to \varphi_l^M(x_r))$$

□

Un caso especial que merece mención a parte es cuando todas las fórmulas en cuestión son enunciados.

Corolario 1.4.3
Sean φ un enunciado y Γ una colección de enunciados del lenguaje $\mathscr{L}_m$, Sea también M es una fórmula de $\mathscr{L}_m$ cuya única variable libre es x. Entonces tendremos que

$$\text{Si } \Gamma \vdash \varphi \text{ entonces } \Gamma^M \vdash \varphi^M.$$

Demostración. Si todas la variables de una fórmula están cuantificadas, por la definición misma de relativización, éstas ya están restringidas a M. □

Finalmente llegamos al teorema estelar de la sección.

Teorema 1.4.10
Sean T una colección de enunciados de $\mathscr{L}_m$ y φ otro enunciado del mismo lenguaje. Sea, además, M una fórmula de $\mathscr{L}_m$ cuya única variable libre es x. Supongamos que $T \vdash T^M$ y $T \vdash \varphi^M$. Entonces, si T es consistente también lo será $T + \varphi$.

Demostración. Supongamos que al agregar φ a T ésta deja de ser consistente, entonces existe un enunciado ψ de modo tal que $T + \varphi \vdash (\neg\psi \wedge \psi)$, por el corolario 1.4.3 se tendrá $T^M + \varphi^M \vdash (\neg\psi \wedge \psi)^M$, por tanto $T^M + \varphi^M \vdash \neg\psi^M \wedge \psi^M$ y ya que $T \vdash T^M \wedge \varphi^M$ concluimos que $T \vdash \neg\psi^M \wedge \psi^M$, lo cual va en contradicción con suponer a T consistente. □

Notemos que con el teorema anterior estamos en posibilidad de hacer pruebas de consistencia relativa de forma completamente sintáctica. Éste teorema es, básicamente, un algoritmo que nos permite, dada una contradicción en $T+\varphi$, construir también una contradicción en T; por lo tanto la consistencia de $T+\varphi$ depende directamente de la consistencia de T.

A la luz de estos últimos teoremas podemos ver que relativizar una fórmula φ a una clase M es algo muy similar a demostrar que el modelo M hace verdadera a la fórmula $\ulcorner\varphi\urcorner$. Y, de hecho, aunque cuando M es una clase propia esto no tendría sentido, cuando M es un conjunto y φ es un enunciado es justo lo que estamos haciendo.

Teorema 1.4.11
Sea Γ una colección de enunciado de $\mathscr{L}_m$. Supongamos que M es una fórmula bien formada de $\mathscr{L}_m$ con una única variable libre x y que $\vdash_{ZF} \Gamma^M$, además supongamos que $\vdash_{ZF} \exists X\ (x \in X \leftrightarrow M(x))$. Entonces:

$$\vdash_{ZF} M \vDash \ulcorner\Gamma\urcorner \leftrightarrow \Gamma^M$$

Después de todo lo expuesto no extrañará que propongamos el siguiente abuso de notación.

Notación: Dadas una clase M con una única variable libre y una fórmula φ de $\mathscr{L}_m$; diremos que M satisface a φ o que φ es verdadera en M, y lo denotamos por $M \vDash \varphi$, cuando $\vdash_{ZF} \varphi^M$.

1.4.4 Absolutez y el teorema de reflexión

Como ya vimos, el que ZF demuestre la relativización de una fórmula a cierta clase es algo muy similar a que un modelo satisfaga la fórmula; siguiendo esta linea, ahora introducimos lo que podría pensarse como el análogo de submodelo elemental en el contexto de la relativización.

Definición 1.4.11 Sean M y N dos formulas de $\mathscr{L}_m$ que tiene una única variable libre x y sea φ otra fórmula de $\mathscr{L}_m$ con variables libres entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Diremos que $M \subseteq N$ si $\forall x\ (M(x) \to N(x))$. Se dice que φ es

M-N-absoluta, y lo denotamos por $M \prec_{\varphi} N$, si:

$$\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in M \ (\varphi^M \leftrightarrow \varphi^N).$$

Cuando $N = \mathbf{V}$ diremos simplemente que φ es absoluta para M. En este caso se tiene:

$$\forall x_0, x_1, \ldots, x_n \in M \ (\varphi^M \leftrightarrow \varphi).$$

Supongamos que tenemos dos modelos N y M con $N \subseteq M$. Notemos que si una fórmula es absoluta para N y es absoluta para M, entonces la fórmula será N-M-absoluta.

A continuación presentamos uno de los teoremas de más importancia para nuestro objetivo. Siguiendo con la analogía que hay entre modelos y relativización, podemos pensar el siguiente teorema como el análogo de Löwenheim-Skolem en términos de la relativización.

Teorema 1.4.12 *(de la reflexión)*
Sean $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ fórmulas de $\mathscr{L}_m$. Supongamos que $\mathscr{A}$ es una clase no vacía y que A_α es un conjunto para cada $\alpha \in ON$, si además se cumple que:

- $\alpha < \beta \to A_\alpha \subset A_\beta$;
- $A_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} A_\beta$ para γ límite;
- $\mathscr{A} = \bigcup_{\alpha \in ON} A_\alpha$.

Entonces:

$$\forall \alpha \ \exists \gamma > \alpha \ (A_\gamma \neq \phi \wedge \bigwedge_{i<n} (A_\gamma \prec_{\varphi_i} \mathscr{A}) \wedge \text{“}\gamma \text{ es límite”}).$$

La demostración del teorema requiere antes de un lema. Recordemos que una lista de fórmulas $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ se dice que es subfórmula cerrada si para cada φ_i, con $i \leqslant n$, y cada ψ subfórmula de φ_i existe $s \leqslant n$ tal que $\varphi_s \equiv \psi$ y en ninguna fórmula de la lista hay una ocurrencia del cuantificador universal.

Lema 1.4.4
Sea $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ una lista subfórmula cerrada de fórmulas de $\mathscr{L}_m$ y sean A y B clases no vacías tales que $A \subseteq B$. Entonces las siguientes son equivalentes:

1. $\bigwedge_{i \leqslant n} (A \preceq_{\varphi_i} B)$;
2. Para toda fórmula existencial $\varphi_i(x_0, \ldots, x_r)$ que es de la forma $\exists y \ \varphi_j(\vec{x}, y)$, se tiene:
$$\forall a_0, \ldots, a_n \in A \ (\varphi_i^B(\vec{a}) \to \exists b \in A \varphi_j^B(\vec{a}, b)).$$

Demostración. 1 → 2]

$$\varphi_i^B(\vec{a}) \rightarrow \varphi_i^A(\vec{a}) \rightarrow \exists a \in A\ \varphi_j^A(\vec{a}, b) \rightarrow \exists a \in A\ \varphi_j^B(\vec{a}, b).$$

la primera implicación se obtiene usando $A \preceq_{\varphi_i} B$, para la siguiente implicación se usa la definición de relativización y finalmente se utiliza que $A \preceq_{\varphi_j} B$ para la implicación restante.

2 → 1] Supongamos 2 y probemos que $A \preceq_{\varphi_i} B$ por inducción sobre la complejidad de φ_i. Entonces asumamos que $A \preceq_{\varphi_k} B$ siempre que φ_k sea subfórmula de φ_i; El caso base, cuando φ_i es atómica, y el caso cuando φ_i es condicional o negación son fáciles. Veremos el caso cuando φ_i es de la forma existencial; supongamos que $\varphi_i \equiv \exists y\ \varphi_k(\vec{x}, y)$. Fijemos $a_0, \ldots, a_r \in A$. Para demostrar que $\varphi_i^B(\vec{a}) \leftrightarrow \varphi_i^A(\vec{a})$ notemos que:

$$\varphi_i^B(\vec{a}) \leftrightarrow \exists b \in A\ \varphi_k^B(\vec{x}, y) \leftrightarrow \exists b \in A\ \varphi_k^A(\vec{x}, y) \leftrightarrow \varphi_i^A(\vec{a})$$

Aquí, para el ↔ de en medio se usa que $A \preceq_{\varphi_k} B$, para el último ↔ se usa la definición de relativización y para el primer ↔ se usa la definición de relativización para ← y 2 para →. □

Demostración. (del teorema de la reflexión). Sin pérdida de generalidad supondremos que nuestra lista de fórmulas es subfórmula cerrada.
Para una fórmula existencial, $\varphi_i(\vec{x})$, de la lista (donde $\varphi_i(\vec{x}) \equiv \exists y\ \varphi_j(\vec{x}, y)$), definamos $F : \mathscr{A}^r \rightarrow ON$ de la siguiente manera: Si $\varphi_i^{\mathscr{A}}(\vec{a})$, entonces $F(\vec{a})$ es el mínimo ϱ tal que $\exists b \in A_\varrho\ (\varphi_j^{\mathscr{A}}(\vec{a}, b))$. si $\neg\varphi_i^{\mathscr{A}}(\vec{a})$, entonces $F(\vec{a} = 0)$. Ahora definamos $G_i : ON \rightarrow ON$ por: $G_i(\xi) = sup\{F_i(a_1, \ldots, a_r) : a_i, \ldots, a_r \in \xi\}$ siempre que φ_i sea existencial, con $r = r_i$. Cuando φ_i no sea existencial, sea $G_i(\xi) = 0$. Tomemos $K(\xi)$ el máximo de $\xi + 1$ y $max\{G_i(\xi) : i \leqslant n\}$. Ahora, fijemos ξ; es suficiente encontrar un $\eta > \xi$ tal que $A(\eta) \neq \phi$ y (2) del lema 1.4.4 se cumpla para $A(\eta)$, $\mathscr{A}$. Sea ι_0 el mínimo $\iota > \xi$ tal que $A(\iota) \neq \phi$, y sea $\iota_{n+1} = K(\iota_n)$. Entonces $\xi < \iota_o < \iota_1 < \cdots$, Finalmente hagamos $\eta = sup\{\iota_k : k \in \omega\}$. □

Nosotros usaremos el teorema de la reflexión haciendo $A_\alpha = V_\alpha$ y $\mathscr{A} = \mathbf{V}$, bajo estas restricciones el teorema toma la forma:

Teorema 1.4.13
Sean $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1}$ fórmulas de $\mathscr{L}_m$. Entonces:

$$\forall\alpha\ \exists\gamma > \alpha\ (\bigwedge_{i<n}(V_\gamma \prec_{\varphi_i} \mathbf{V}) \wedge \text{“}\gamma \text{ es límite”}).$$

ZF puede demostrar la relativización a $\mathbf{V}$ de cada uno de sus axiomas; por tanto, usando el teorema de la reflexión y el teorema 1.4.11, podemos tomar cualquier numero finito de axiomas, Γ, de $\ulcorner ZF \urcorner$ y obtener así un modelo para Γ; esto nos dice que ZF puede probar la consistencia de cada colección finita de sus axiomas.

En teoría de modelos existe un teorema, el teorema de compacidad, el cual afirma que si una teoría es tal que cada subconjunto finito de sus axiomas es satisfacible, entonces la teoría es satisfacible. Y entonces, ociosamente, podríamos preguntarnos: ¿Por qué el teorema de reflexión junto con el teorema de compacidad no demuestran la consistencia de ZF? Para aplicar el teorema de compacidad nececitariamos que ZF demostrara la fórmula $\forall \varphi_0, \dots, \varphi_n \in \ulcorner ZF \urcorner \; \exists M \; M \vDash \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$; pero nosotros no hemos demostrado ésta fórmula en ZF: el teorema de la reflexión es más bien un metateorema, por cada colección finita de fórmulas bien formadas de $\mathscr{L}_m$ que tomemos podemos aplicar el teorema de la reflexión para encontrar un modelo para las fórmulas dadas; sí, eso es cierto, el problema está en que el "por cada colección finita..." es una afirmación metateorica lo cual es diferente a deducir dentro de ZF una fórmula de la forma $\forall \varphi_0, \dots, \varphi_n \in ZF$....

Sabemos que ZF tiene una número infinito de axiomas; pero, ¿qué nos garantiza que no existe un numero finito de afirmaciones de $\mathscr{L}_m$ que den origen a una teoría equivalente a ZF? Pues ahora estamos en posibilidad de argumentar por qué esto no es posible.

Teorema 1.4.14
Si ZF es consistente, entonces ninguna extensión de ZF es finitamente axiomatizable.

Demostración. Tomemos una colección finita de enunciados de $\mathscr{L}_m$ tal que todos los axiomas de ZF se encuentren entre sus teoremas; Llamemos a tal colección Γ. Por el teorema de la reflexión existe γ, ordinal límite, tal que $\vdash_{ZF} V_\gamma \vDash \Gamma$. Los teoremas de incompletud de Gödel nos dicen que esto es posible únicamente cuando Γ es inconsistente. $\square$

Capítulo 2

Forcing y consistencia relativa

Sección 2.1

Pruebas de consistencia relativa.

Tomemos un enunciado φ del lenguaje de la teoría de conjuntos. Nuestra meta es hacer ver que:

$$\vdash_{ZFC} Con(ZFC) \rightarrow Con(ZFC + \varphi) \tag{2.1}$$

Notemos que la implicación de arriba se puede replantear diciendo que: si $ZFC + \varphi$ es inconsistente, entonces ZFC también es inconsistente; por esta razón, cuando sea posible establecer 2.1 diremos que hemos probado la consistencia de $ZFC + \varphi$ relativa a la consistencia de ZF.

Esto no siempre es posible: por ejemplo, si γ es un cardinal fuertemente inaccesible, entonces ZF demuestra que H_γ es un modelo para $\ulcorner ZF \urcorner$; por tanto, si φ es el enunciado "existe un cardinal fuertemente inaccesible" y ZF demostrara que $Con(ZF) \rightarrow Con(ZF + \varphi)$ entonces ZF estaría demostrando su propia consistencia.

Por otro lado, si φ es un teorema de ZF entonces es evidente que $ZF + \neg\varphi$ es una teoría contradictoria por lo cual no hay una buena razón para pensar que exista una deducción para establecer 2.1.

Aunque no siempre es posible hacer una prueba de consistencia relativa, existe una gran variedad de casos en los que sí es posible. El ejemplo que, por derecho histórico, debe ser mencionado primero es: tanto la hipótesis del continuo como su negación. De hecho, Cohen desarrolla la técnica del forcing precisamente tratando, y finalmente demostrando, la consistencia de la negación de CH.

El forcing constituye, sin duda, la técnica más poderosa y ampliamente usada para hacer pruebas de consistencia. A continuación pretendemos dar una introducción a él.

Sección 2.2

El teorema del forcing y algunos resultados básicos

La exposición que se realizará aquí del forcing será breve y un tanto superficial considerando sólo lo necesario para poder utilizar esta herramienta sin llegar a justificar sus métodos. Para una exposición completa se recomienda revisar: Kunen (1980).

Comenzamos con algunas definiciones necesarias.

Definición 2.2.1

- Un *conjunto pre-ordenado o pre-orden* es una dupla $(\mathbb{P}, \leqslant)$, donde $\mathbb{P}$ es un conjunto y $\leqslant$ una relación reflexiva y transitiva.

- Un *forcing* es una terna $(\mathbb{P}, \leqslant, 1)$, donde $(\mathbb{P}, \leqslant)$ es un pre-orden y 1 es el máximo de $\mathbb{P}$. Como es usual, si no hay riesgo de confusión, nos referiremos a un forcing simplemente por $\mathbb{P}$.

- Dado un forcing $\mathbb{P}$, a los elementos de $\mathbb{P}$ los llamaremos condiciones y diremos que una condición p es más fuerte que una condición q si $p \leqslant q$. Dos condiciones $p, q \in \mathbb{P}$ son compatibles si existe $s \in \mathbb{P}$ tal que $s \leqslant p$ y $s \leqslant q$; si tal s no existe se dice que p y q son incompatibles y se denota por $p \perp q$. $A \subseteq \mathbb{P}$ es una *anticadena* si los elementos de A son incomparables dos a dos. Diremos que una condición $p \in \mathbb{P}$ es un átomo si este no tiene al menos dos extensiones incompatibles, el forcing se dirá no atómico si no contiene átomos. Cada forcing que consideremos en este trabajo será no atómico.

- Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Un filtro en $\mathbb{P}$ es un conjunto $G \subseteq \mathbb{P}$ que satisface:

- $1 \in G$
- $\forall p \in \mathbb{P}\ \forall q \in G\ (q \leqslant p \rightarrow p \in G)$
- $\forall p, q \in G\ \exists s \in G\ (s \leqslant p \wedge s \leqslant q)$

- Un conjunto $D \subseteq \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}$ pre-orden, si para cada $p \in \mathbb{P}$ existe $d \in D$ tal que $d \leqslant p$. Si $p \in \mathbb{P}$ y $D \subseteq \mathbb{P}$, diremos que D es denso en $\mathbb{P}$ abajo de p si para cada $q \in \mathbb{P}$ con $q \leqslant p$ existe $d \in D$ de forma que $d \leqslant q$.

- Sean $\mathbb{P}$ un forcing y $E \subseteq \mathbb{P}$. Para $p \in \mathbb{P}$, diremos que E es *pre-denso abajo de* p si no existe $q \leqslant p$ tal que $\forall e \in E\ (e \perp q)$.

- Sean M un modelo para ZF, $\mathbb{P}$ un forcing y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro, diremos que G es $\mathbb{P}$-genérico sobre M si $G \cap D \neq \phi$ para cada subconjunto denso de $\mathbb{P}$ que pertenece a M.

Es posible demostrar que si $\mathbb{P}$ es un forcing y $p \in \mathbb{P}$ existe un filtro $\mathbb{P}$- genérico tal que $p \in G$, con lo cual queda asegurada la existencia de algún filtro $\mathbb{P}$-genérico. Por otro lado, si $\mathbb{P}$ es un forcing no atómico, M un modelo transitivo y numerable de ZF y G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M entonces $G \notin M$. Lo anterior es importante ya que la idea es: Dado un modelo transitivo y numerable de ZF ayudándonos de G, un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M, para construir un nuevo modelo $M[G]$, el cual sí contiene a G. Para definir el nuevo modelo $M[G]$ son necesarias las siguientes definiciones.

Definición 2.2.2

- Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Diremos que un conjunto σ es un $\mathbb{P}$-nombre si es una relación binaria y $(\gamma, p) \in \sigma$ implica que γ es un $\mathbb{P}$- nombre y que $p \in \mathbb{P}$.

- Definimos el nombre canónico de un conjunto x como:

$$\breve{x} = \{(\breve{y}, 1) : y \in x\}.$$

- El nombre canónico para un filtro genérico G está dado por:

$$\Gamma = \{(\breve{p}, p) : p \in \mathbb{P}\}.$$

La anterior definición está justificada por el principio de ϵ-recursión. Denotaremos por $\mathbb{V}^{\mathbb{P}}$ a la clase de los $\mathbb{P}$-nombres y dado un modelo M se define $M^{\mathbb{P}} = M \cap \mathbb{V}^{\mathbb{P}}$, el conjunto de $\mathbb{P}$-nombres que son elementos de M. Otra definición importante, también justificada por el principio de ϵ- recursión, es la siguiente.

Definición 2.2.3 Sean M un modelo transitivo y numerable de ZF y σ un $\mathbb{P}$-nombre, definimos la valuación de σ según $\mathbb{P}$ por:

$$\sigma_G = \{\gamma_G : \exists p \in G\ (\gamma, p) \in \sigma\}.$$

Finalmente tenemos:

Definición 2.2.4 Sean M modelo transitivo y numerable de ZF, $\mathbb{P} \in M$ un forcing y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Definimos el *modelo genérico* $M[G]$ por.

$$M[G] = \{\sigma_G : \sigma \in M^{\mathbb{P}}\}.$$

Así definido, $M[G]$, es el modelo que buscábamos pues se puede demostrar que, si $M \vDash ZFC$ entonces $M[G] \vDash ZFC$.También se puede ver que $\widehat{x}_G = x$ para cada conjunto $x \in M$ por lo que $M \subset M[G]$. Además, si M es transitivo y numerable, $M[G]$ será el $\subseteq$- mínimo modelo transitivo numerable de ZFC que contiene a G como elemento y $M \subset M[G]$. Más aún, los ordinales en ambos modelos, M y $M[G]$, son los mismos.

Ya que al extender el modelo base M mediante el forcing estamos agregando varias cosas que desconocemos sería útil tener una herramienta con al cual, desde M, podamos saber lo que pasa en $M[G]$. Esta herramienta nos es dada por la siguiente definición.

Definición 2.2.5 Sean M un modelo transitivo y numerable de ZF, $\mathbb{P} \in M$ un forcing y φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. Diremos que p *fuerza* a φ, y lo denotaremos por $p \Vdash \varphi$, si para todo filtro $\mathbb{P}$-genérico G sobre M se tiene que, si $p \in G$ entonces $M[G] \vDash \varphi$.

Teorema 2.2.1 *(de verdad)*
Sea M un modelo transitivo y numerable para ZF, $\mathbb{P}$ un forcing en M y φ una fórmula del lenguaje de la teoría de conjuntos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes

- $M[G] \vDash \varphi$
- $\exists p \in G(p \Vdash \varphi)$

Enunciaremos ahora algunas propiedades de la relación $\Vdash$ que resultan útiles en la practica.

Teorema 2.2.2
Sean M un modelo transitivo y numerable de ZF^*, $\mathbb{P}$ un forcing en M, $p, q \in \mathbb{P}$ y φ y ψ fórmulas del lenguaje de la teoría de conjuntos, entonces se tiene:

1. Si φ y ψ son lógicamente equivalentes, entonces $p \Vdash \varphi$ si y sólo si $p \Vdash \psi$,
2. Si $p \Vdash \varphi$ y $q \leqslant p$ entonces $q \Vdash \varphi$,
3. $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ si y sólo si $p \Vdash \varphi$ y $p \Vdash \psi$,
4. $p \Vdash \neg\varphi$ si y sólo si $\neg\exists q \leqslant p\ (q \Vdash \varphi)$,
5. $p \Vdash \varphi$ si y sólo si $\neg\exists q \leqslant p\ (q \Vdash \neg\varphi)$,
6. $p \Vdash \varphi \rightarrow \psi$ si y sólo si $\neg\exists q \leqslant p\ (q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi)$,
7. $p \Vdash \varphi \vee \psi$ si y sólo si $\{q \leqslant p : (q \Vdash \varphi) \vee (q \Vdash \psi)\}$ es denso abajo de p,
8. $p \Vdash \varphi \longleftrightarrow \psi$ si y sólo si $\neg\exists q \leqslant p\ (q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi)$ y $\neg\exists q \leqslant p\ (q \Vdash \psi \wedge q \Vdash \neg\varphi)$.

Sección 2.3

Pruebas de consistencia relativa con forcing

Ahora supongamos que queremos demostrar la consistencia relativa de $ZF + \varphi$, para algún enunciado φ de la teoría de conjuntos. Comencemos tomando un segmento finito, Γ, de ZF y sea α tal que $V_\alpha \vDash \Gamma$, lo cual podemos hacer gracias al teorema de la reflexión. Aplicando los teoremas de Löwenheim-Skolem y el colapso de Mostowski podremos obtener un modelo M de Γ que sea transitivo y numerable.

A continuación trataremos de mostrar que $M[G] \vDash \varphi$, si logramos hacerlo tendremos que:

$$ZF \vdash \Gamma^{M[G]} \text{ y } ZF \vdash \varphi^{M[G]}$$

Y así podemos aplicar el teorema 1.4.10 para deducir que, si $\Gamma + \varphi$ es contradictoria entonces también lo era Γ.

Por supuesto, nuestro objetivo es demostrar que si $ZF + \varphi$ es contradictoria entonces también lo era ZF, para hacer esto hemos de usar el hecho de que las deducciones en la lógica de primer orden son, necesariamente, finitas. supongamos que $ZF + \varphi$ deduce una contradicción, si lo hace lo ha de hacer utilizando únicamente una cantidad finita de axiomas, sea Γ dicho segmento finito de ZF y entonces podemos ver que la contradicción ya estaba en ZF de la forma en que se indico antes y así conseguir el objetivo buscado.

Sección 2.4

Forcing y submodelos elementales

La aplicación de los submodelos elementales no se limita a la topología, en teoría de conjuntos también resultan considerablemente útiles al tratar temas relacionados con el forcing, más adelante nos servirán para dar una equivalencia combinatoria de uno de los axiomas de forcing que vamos a estudiar, también son útiles al usarlos como condiciones laterales para probar que ciertos forcing son ccc y, por supuesto, al utilizar simultáneamente los submodelos elementales y el forcing en la topología obtenemos una herramienta por demás flexible y poderosa. A continuación enunciaremos algunos resultados que nos serán de gran utilidad al usar los submodelos elementales sobre o junto con el forcing.

comencemos con una definición.

Definición 2.4.1 Consideremos un cardinal regular no numerable θ de modo que $\mathbb{P} \in N \prec H_\theta$, diremos que $p \in \mathbb{P}$ es $(N, \mathbb{P})$-genérico, si para todo $D \subseteq \mathbb{P}$ tal que $D \in N$ se tiene que $D \cap N$ es pre-denso abajo de p. Si por el contexto es claro con que forcing estamos trabajando se abusará de la notación escribiendo solamente N-genérico en vez de $(N, \mathbb{P})$-genérico.

Proposición 2.4.1
Sean θ un cardinal regular no numerable, $M \models ZF$ un modelo transitivo y numerable, $\mathbb{P} \in M$ un forcing y $G \subseteq \mathbb{P}$ un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Si τ es un $\mathbb{P}$-nombre canónico y $\mathbb{P} \in H_\theta$, entonces

$$\tau \in H_\theta \text{ si y sólo si } 1 \Vdash_{\mathbb{P}} \tau \in H_\theta^{M[G]}$$

Definición 2.4.2 Sea M un modelo de ZF y $N \preceq (H_\theta)^M$ para algún cardinal regular θ^M, se define $N[G] = \{\tau_G : \tau \in \mathbb{V}^{\mathbb{P}} \wedge \tau \in N\}$.

Recalcar que, aunque la notación pueda resultar confusa, $N[G]$ no es una extensión genérica de N. Elegir esta notación en la definición de $N[G]$ se justifica en parte por los siguientes teoremas.

Teorema 2.4.1
Sean M un modelo de ZF, $\mathbb{P}$ un forcing de modo tal que $\mathbb{P} \in N \preceq (H_\theta)^M$ y sea G un filtro $\mathbb{P}$-genérico sobre M. Entonces $N[G] \preceq (H_\theta)^{M[G]}$.

Así pues, $N[G]$ nos permite pasar de alguna manera los argumentos de eleme-taridad que se hayan usado con N en el modelo base a la extensión genérica. En cuanto a que relación hay entre N y $N[G]$, el siguiente teorema nos habla un poco de ello.

Teorema 2.4.2
Bajo las suposiciones del teorema anterior, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. $G \cap N$ es N-genérico (i.e. para cada $A \in N$ que es predenso en $\mathbb{P}$ se tiene que $A \cap N \cap G \neq \phi$),
2. $N[G] \cap ON = N \cap ON$,
3. $N[G] \cap M = N \cap M$.

Corolario 2.4.1
Bajo las suposiciones del teorema anterior, las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. q es N-genérico,
2. $q \Vdash N[G] \cap ON = N \cap ON$
3. $q \Vdash N[G] \cap M = N \cap M$.

Sección 2.5

Axiomas de forcing

Consideremos un modelo transitivo y numerable M de ZF^*, un forcing $\mathbb{P}$ en M y un filtro $\mathbb{P}$-genérico G. Como sabemos, si el forcing no es atómico, tendremos que $G \notin M$. Al usar el teorema de forcing lo que hacemos es obtener un modelo, $M[G]$, el cual sí contiene a G como elemento. En gran medida la fuerza del forcing radica en este hecho: los elementos de G se entienden como aproximaciones de cierto objeto matemático que nos interesa que exista, pero cuya existencia no puede ser garantizada en M. Mientras desde M vamos moldeando, mediante aproximaciones, el objeto que queremos construir; al aplicar el teorema del forcing, finalmente, obtenemos un modelo con el objeto deseado.

Los llamados *axiomas de forcing* son axiomas que nos garantizan la existencia de filtros suficientemente genéricos; es decir: filtros que, a pesar de no intercepta a todos lo conjuntos densos, sí intercepta a los conjuntos densos, suficientes y adecuados para poder hacer lo que se desea hacer. Es por esto que cuando se trabaja con axiomas de forcing es común decir que se está haciendo forcing de forma interna: en vez de construir un modelo donde existe cierto filtro que nos interesa que exista, se pide la existencia de tal filtro mediante la adición de un axioma a ZF

2.5.1 Axioma de Martin

Definición 2.5.1 Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Para cada cardinal infinito κ, $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ es la afirmación: Para toda familia $\mathscr{D}$ de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$ con $|\mathscr{D}| \leqslant \kappa$, existe un filtro G en $\mathbb{P}$ tal que $G \cap D \neq \varphi$ para toda $D \in \mathscr{D}$. $MA(\kappa)$ es la afirmación: $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ para todo forcing $\mathbb{P}$ que es ccc. Finalmente, el *axioma de Martin* afirma: $MA(\kappa)$, para todo cardinal $\aleph_0 \leqslant \kappa < \mathfrak{c}$.

Como primeras observaciones notemos que si $\kappa < \eta$ entonces $MA(\eta) \rightarrow MA(\kappa)$; por otro lado, el siguiente resultado nos dice que MA tal y como fue enunciado, de hecho, está pidiendo un poco más de lo estrictamente necesario.

Proposición 2.5.1
$\vdash_{ZF} AM(\aleph_0)$.

Demostración. Sean $\mathbb{P}$ un forcing y $\mathscr{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ una familia de subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Fijemos $p_0 \in \mathbb{P}$ y usando recursión sobre ω elijamos $p_n \in \{q \in \mathbb{P} : q < p_n \wedge p \in D_n\}$, basta ahora definir $G = \{q \in \mathbb{P} : \exists n \in \omega \; p_n \leqslant q\}$. No es difícil ver que G es el filtro buscado. □

Nótese que durante la demostración en ningún momento se utiliza que el forcing sea ccc; para cardinales no numerables, sin embargo, esta suposición es importante.

Observemos también: con la proposición anterior hemos ya demostrado que $\vdash_{ZFC+CH} AM$. Solovay y Tennenbaum demostraron en 1971 que AM es consistente con al negación de CH. En el lado opuesto, mientras $MA(\aleph_0)$ es teorema de ZFC, a continuación veremos que $\neg MA(\mathfrak{c})$ es igualmente un teorema de ZFC.

Proposición 2.5.2
Sea $\mathbb{P}$ un forcing. Si $\mathbb{P}$ contiene algún átomo, entonces $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ se satisface para cada cardinal κ. Si $\mathbb{P}$ no es atómico entonces $MA_{\mathbb{P}}(\kappa)$ es falso para $\kappa = 2^{|\mathbb{P}|}$.

Demostración. Si $\mathbb{P}$ es atómico y r es un átomo en $\mathbb{P}$ basta tomar $G = \{q : q \not\perp r\}$. Así definido, G es un filtro que tiene intersección no vacía con cada denso en $\mathbb{P}$. Supongamos ahora que $\mathbb{P}$ no es atómico y sí existe un filtro G que tiene intersección no vacía con cada subconjunto denso de $\mathbb{P}$. Consideremos al conjunto $A := \mathbb{P}/G$. Entonces A es denso, pues dado un elemento $p \in \mathbb{P}$ este debe tener dos extensiones las cuales son incompatibles entre sí y por tanto sólo una de ellas puede ser elemento de G. $\square$

Algunas consecuencias de la proposición anterior: Como ya lo habíamos adelantado $\vdash_{ZFC} \neg MA(\mathfrak{c})$; así mismo, para cada $\kappa \leqslant \mathfrak{c}$, se tendrá $MA(\kappa) \to \kappa \neq \mathfrak{c}$ y como $\kappa < \eta \wedge MA(\eta) \to MA(\kappa)$ entonces, en realidad, $MA(\kappa) \to \kappa < \mathfrak{c}$, en particular $MA(\aleph_1) \to \neg CH$.

Existen una gran cantidad de variaciones y relajaciones del axioma de Martin, de entre ellas, una que serán de particular importancia para nosotros es MA_{ctble} la cual afirma MA considerando únicamente forcings numerables.

2.5.2 Forcing propio y PFA

El axioma del forcing propio, el cual abreviaremos por PFA, es una generalización del axioma de Martin. La noción de forcing propio fue introducida por Shelah y ha sido extensamente estudiada, su adición a los axiomas de ZF trae varias consecuencias importantes, por dar un par de ejemplos ejemplos podemos mencionar que suponiendo PFA:

- Cuales quiera dos subconjuntos $\aleph_1$-densos de reales son isomorfos
- No existen $\aleph_2$-árboles de Aronszajn.

Algunas otras consecuencias serán tratadas con más detalle en las siguientes líneas. para llegar a enunciar formalmente PFA primero tendremos que decir qué debemos entender por *forcing propio*, lo cual hacemos a continuación.

Definición 2.5.2 Consideremos un conjunto X y $\mathscr{C} \subseteq [X]^{\leqslant\aleph_0}$. Diremos que $\mathscr{C}$ es *no acotado* en $[X]^{\leqslant\aleph_0}$, si para cada $A \subseteq [X]^{\leqslant\aleph_0}$ existe un $C \in \mathscr{C}$ de modo tal que$A \subseteq C$. Diremos que $\mathscr{C}$ es cerrado en $[X]^{\leqslant\aleph_0}$, si para cada sucesión $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathscr{C}$ tal que $A_n \subseteq A_{n+1}$ para $n \in \omega$, se tiene que $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathscr{C}$. Diremos que $\mathscr{C}$ es *club* si es cerrado y no acotado. Finalmente, diremos que $\mathscr{C}$ es *estacionario* en $[X]^{\leqslant\aleph_0}$ si intercepta a todos los los conjuntos cerrados y no acotados de $[X]^{\leqslant\aleph_0}$.

Ahora ya estamos en condiciones de definir la noción de forcing propio y enunciar PFA.

Definición 2.5.3 Diremos que un forcing $\mathbb{P}$ es *propio* si para todo cardinal no numerable κ y todo estacionario $\mathscr{S} \subseteq [\kappa]^{\leqslant\aleph_0}$, tenemos que $1 \Vdash_{\mathbb{P}}$ "$\mathscr{S}$ es estacionario".

Existe una equivalencia combinatoria de forcing propio que resulta muy útil, para poder enunciarla hemos de introducir algunas definiciones más.

Lema 2.5.1
Si $\mathbb{P}$ es un forcing que tiene la ccc, θ un cardinal suficientemente grande y $\mathbb{P} \in M \prec H_\theta$, entonces todo $p \in \mathbb{P}$ es $(M, \mathbb{P})$- genérico.

Demostración. Primero recordemos que si $D \subseteq \mathbb{P}$ es un conjunto denso, entonces existe $A \subseteq D$ que es anticadena maximal en $\mathbb{P}$. Bajo esta consideración la prueba es sencilla, pues; si $A \subset \mathbb{P}$ es una anticadena maximal y $A \in M$; entonces, por el corolario 1.4.2, $A \subseteq M$ y así $A \cap M = A$, el cual es pre-denso. $\square$

Ahora pasaremos a dar la prometida equivalencia combinatoria de forcing propio, ésta tiene por ventaja que en ella no aparece la noción de forcing y será utilizada en más de una ocasión en el presente trabajo.

Teorema 2.5.1
Sea $\mathbb{P}$ un forcing. $\mathbb{P}$ es propio si y sólo si, para cada cardinal regular θ tal que $\mathbb{P} \in H_\theta$ existe un conjunto club $\mathscr{C} \in [H_\theta]^{\leqslant\aleph_0}$ de modo tal que para todo $M \in \mathscr{C}$ con $\mathbb{P} \in M$ y $M \prec H_\theta$ se tiene que para cada $p \in M \cap \mathbb{P}$ existe un $q \leqslant p$ que es $(M, \mathbb{P})$-genérico.

Ya se había adelantado que todo forcing ccc es propio, hora será fácil verlo, sólo hay que considerar el lema 2.5.1 y la equivalencia de forcing propio que se acaba de dar.

Definición 2.5.4 PFA es la afirmación $MA_{\mathbb{P}}(\aleph_1)$ para todo forcing propio $\mathbb{P}$.

Capítulo 3

Espacios selectivamente separables

Sección 3.1

Algunos resultados básicos

Definición 3.1.1 Un espacio topológico X es *SS (Selectivamente Separable)* si, para cada sucesión $\{D_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos densos de X existe una familia $\{F_n : n \in \omega\}$ de subconjuntos finitos de X tal que, para cada $n \in \omega$ $F_n \subset D_n$ y $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ es denso en X.

Es inmediato que: si un espacio topológico X es SS entonces es separable. En efecto, basta tomar la sucesión constante $D_n = X$ para cada $n \in \omega$. El recíproco en general no se satisface, un poco más adelante presentaremos un contraejemplo para ello.

Por ahora consideremos un espacio topológico X y sea $I \subset X$ el conjunto de puntos aislados de X. Ya que, si $D \subset X$ es un subconjunto denso de X se debe tener que $I \subset D$, resulta natural preguntarse ¿qué relación hay entre el conjunto de puntos aislados de un espacio y la propiedad de ser SS? Una primera observación, fácil de verificar, es que: si I es no numerable entonces el espacio X no puede ser SS (Basta notar que no es posible poner una cantidad no numerable de puntos en una cantidad numerable de conjuntos finitos). Resta por analizar qué ocurre cuando I es numerable, lo cual hacemos a continuación.

Proposición 3.1.1

Sean X espacio topológico e $I \subset X$ el conjunto de puntos aislados de X. Entonces X es SS si y sólo si I es numerable y $X \backslash \overline{I}$ es SS.

Demostración. $\Rightarrow$] Supongamos que X es SS y sea $\{D_n \subseteq X\backslash\overline{I} : n \in \omega\}$ una sucesión de subconjuntos densos de $X\backslash\overline{I}$, luego $\{D_n \cup \overline{I} : n \in \omega\}$ es una sucesión de densos en X y por tanto existe $\{F_n \subseteq D_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcup_{n<\omega} F_n$ es denso en X. Entonces $\{F_n\backslash\overline{I} : n \in \omega\}$ testifica que $X\backslash\overline{I}$ es SS.

$\Leftarrow$] Supongamos ahora que $X\backslash\overline{I}$ es SS y sea $\{D_n \subseteq X : n \in \omega\}$ sucesión de densos en X. Hagamos $I = \{i_n : n \in \omega\}$ y consideremos la sucesión $\{D_n\backslash\overline{I} : n \in \omega\}$, ésta es una sucesión de densos en $X\backslash\overline{I}$ y por tanto existe una sucesión $\{F_n : n \in \omega\}$ tal que $F_n \subseteq D_n\backslash\overline{I}$ para cada $n \in \omega$ y además $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ es densa en $X\backslash\overline{I}$. Tomemos ahora los conjuntos $F_n \cup \{i_n\}$; se afirma que estos conjuntos testifican que X es SS. Para verlo tomemos $x \in X$ arbitrario, si $x \in X\backslash\overline{I}$ no hay algo que hacer; si $x \in \overline{I}$, entonces dado cualquier abierto que contenga a x éste también deberá contener a un elemento de $\bigcup_{n\in\omega}(F_n \cup \{i_n\})$ pues o bien $x \in I$ o bien $x \in I'$. ☐

En base a lo anterior vemos que, para estudiar espacios SS, no se pierde generalidad al trabajar sólo con espacios que no contienen puntos aislados, por esta razón a partir de ahora y por el resto del trabajo, a menos que se indique explícitamente lo contrario, *consideraremos únicamente espacios topológicos sin puntos asilados.*

Consideremos ahora $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ familias de subconjunto de un espacio topológico X. Se definen las propiedades:

- $S_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$: para cada sucesión $(O_n)_{n\in\omega} \in \mathscr{A}^\omega$ existe una sucesión $(T_n)_{n\in\omega} \in X^\omega$ con $T_n \in O_n$ para cada $n \in \omega$, que satisface $\{T_n : n \in \omega\} \in \mathscr{B}$.

- $S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$: para cada sucesión $(O_n)_{n\in\omega} \in \mathscr{A}^\omega$ existe una sucesión $(T_n)_{n\in\omega}$ con $T_n \in [O_n]^{<\omega}$ para cada $n \in \omega$, que satisface $\bigcup_{n\in\omega} T_n \in \mathscr{B}$.

Las propiedades $S_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ y $S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ sugieren, respectivamente, los juegos:

- $G_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ definido recursivamente como sigue:
  En la n-ésima jugada, para $n \in \omega$, Jugador I elige un elemento O_n de $\mathscr{A}$ y jugador II elige $T_n \in O_n$, de esta forma se construye recursivamente la instancia del juego

$$\sigma = (O_0, T_0, O_1, T_1, \ldots).$$

El Jugador II gana el juego si $\{T_n : n \in \omega\} \in \mathscr{B}$ de otra forma jugador I gana el juego.

- $G_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ cuya definición es:
  Para cada para $n \in \omega$, en la n-ésima jugada Jugador I elige un elemento O_n de $\mathscr{A}$ y jugador II elige $T_n \in [O_n]^{<\omega}$, de esta forma se construye recursivamente la instancia del juego
  $$\sigma = (O_0, T_0, O_1, T_1, \ldots).$$
  El Jugador II gana el juego si $\bigcup_{n\in\omega} T_n \in \mathscr{B}$ de otra forma jugador I gana el juego.

Finalmente denotaremos por $H_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ la propiedad: Jugador I no tiene EG en el el juego $G_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$ y por $H_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$: Jugador I no tiene EG en el el juego $G_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$

Obsérvese que si denotamos por $\mathscr{D}$ a la familia de subconjuntos densos de un espacio topológico X, entonces que X sea SS y X satisfaga $S_{fin}(\mathscr{D}, \mathscr{D})$ es lo mismo. En su artículo *Combinatorics of open covers VI. Selectors for sequences of dense sets, Marion Scheepers* introduce el concepto de espacio SS precisamente al estudiar los espacios que satisfacen la propiedad $S_{fin}(\mathscr{D}, \mathscr{D})$. También diremos que un espacio topológico tiene la propiedad SS$^+$ si Jugador II tiene estrategia ganadora en el juego $G_{fin}(\mathscr{D}, \mathscr{D})$, volveremos a ello más adelante.

Es fácil ver que $H_1(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \Rightarrow S_1(\mathscr{A}, \mathscr{B})$. En efecto, para mostrar la contrapositiva basta tomar una sucesión $(O_n)_{n\in\omega}$ de elementos en $\mathscr{A}$ de forma que para toda sucesión $(T_n)_{n\in\omega}$ que satisfagan $T_n \in O_n$, para cada $n \in \omega$, se tenga $\{T_n : n \in \omega\} \notin \mathscr{B}$ y decir a Jugador I que en la n-ésima jugada elija O_n. De forma análoga se puede establecer que $H_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B}) \Rightarrow S_{fin}(\mathscr{A}, \mathscr{B})$.

Con lo anterior podemos ver que, si X es un espacio topológico y $\mathscr{D}$ denota la familia de subconjuntos densos de X, entonces:

$$H_1(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \Rightarrow H_{fin}(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \Rightarrow S_{fin}(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \equiv (X \text{ es SS }).$$

Así como también es cierto que:

$$H_1(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \Rightarrow S_1(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \Rightarrow S_{fin}(\mathscr{D}, \mathscr{D}) \equiv (X \text{ es SS }).$$

Proposición 3.1.2
Si X tiene un subespacio denso, abierto y selectivamente separable, entonces es selectivamente separable.

Proposición 3.1.3
Sea X un espacio selectivamente separable. Entonces

1. Todo subespacio denso de X es SS;
2. Todo subespacio abierto de X es SS;
3. Toda imagen de X bajo una función continua y abierta es SS;
4. Toda imagen cerrada, continua e irreducible de X es SS.

Demostración. 1. Es inmediato.

2. Tomemos $U \subseteq X$ abierto y sea $\{D_n : n \in \omega\}$ familia de subconjuntos densos de U, entonces $\{D_n \cup (X \backslash U) : n \in \omega\}$ es una sucesión de subconjuntos densos de X, luego existe $\{F_n : n \in \omega\}$ tal que, para cada $n \in \omega$ F_n es finito, $F_n \subseteq D_n$ y $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ es denso en X. Ahora basta tomar $E_n = F_n \backslash X$ para cada $n \in \omega$ y se tendrá que $\bigcup_{n\in\omega} E_n$ es denso en U.

3. Supongamos que $f(X) = Y$ y X es SS, sea $(D_n)_{n\in\omega}$ sucesión de subconjuntos densos de Y. Definamos, para cada $n \in \omega$, $B_n = f^{-1}(D_n)$ entonces, ya que f es abierta, $(B_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de densos en X y por tanto existe una familia $(F_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos finitos de X tal que, para toda $n \in \omega$, $F_n \subseteq B_n$ y $\bigcup_{n\in\omega} F_n$ es denso en X, finalmente tomando $E_n = f(F_n)$ tendremos que $\bigcup_{n\in\omega} E_n$, es denso en Y.

4. Sean $f(X) = Y$, X espacio SS y $(D_n)_{n\in\omega}$ sucesión de subconjuntos densos de Y. Definamos, para cada $n \in \omega$, $B_n = f^{-1}(D_n)$. Veamos que B_n es denso en X para cada $n \in \omega$, sean $x \in X$, $U \subseteq X$ vecindad básica de x y supongamos que $U \cap B_n = \phi$, nótese que $f(X \backslash U)$ es un cerrado en Y y como f es irreducible $Y \backslash f(X \backslash U) \neq \phi$; además $Y \backslash f(X \backslash U) \cap D_n = \phi$, lo cual contradice la densidad de D_n. Por lo anterior B_n debe ser denso en X. El resto de la demostración es completamente análoga a 3.

$\square$

A continuación introducimos algunas propiedades topológicas que están íntimamente relacionadas con los espacios SS, y estudiaremos algunas de la relaciones que hay entre ellos.

Definición 3.1.2 Sea (X, τ) un espacio topológico. Un conjunto $\mathscr{B} \subseteq \tau$ es una π-*base para* X *(en un punto* $x \in X$*)* si para cada $U \in \tau$ ($U \in \mathfrak{V}_X(x)$) existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $B \subseteq U$. Definimos el π-*peso de* X, y lo denotamos por $\pi\omega(X)$, como el mínimo cardinal κ tal que existe una π-base para X

de cardinalidad κ. Dado $x \in X$, $\pi\chi(x, X)$ representa mínimo cardinal κ de modo que hay una π-base para x de cardinalidad κ. Finalmente se define $\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(x, X) : x \in X\}$.

Proposición 3.1.4
Si $\pi\omega(X) = \omega$ entonces X es selectivamente separable.

Demostración. Sea $(U_n)_{n\in\omega}$ una π-base para X. Si $(D_n)_{n\in\omega}$ es una sucesión de subconjuntos densos de X, entonces podemos elegir recursivamente, para cada $n \in \omega$, un elemento $x_n \in U_n \cap D_n$. Así $(x_n)_{n\in\omega}$ es denso en X y por tanto X es SS. $\square$

Proposición 3.1.5
Sea X un espacio topológico numerable, si $\pi\omega(X) < \mathfrak{d}$ entonces X es SS.

Demostración. Tomemos una sucesión de densos en X, $(D_n)_{n\in\omega}$, y hagamos $D_n = \{d_m^n : m < \omega\}$. Sea $\mathscr{U}$ una π-base de X de modo que $|\mathscr{U}| < \mathfrak{d}$, luego, para cada $u \in \mathscr{U}$ existe una función $f_U \in \omega^\omega$ que satisface $U \cap \{d_m^n : m < f_U(n)\} \neq \phi$. Como $|\mathscr{U}| < \mathfrak{d}$ debe existir una función $g \in \omega^\omega$ tal que, para cada $u \in \mathscr{U}$, $f_U <^* g$. Definamos $E_n = \{d_m^n : m < g(n)\}$, de está forma tendremos que, para cada $u \in \mathscr{U}$, $U \cap E_n \neq \phi$ para toda n tal que $f_U(n) < g(n)$, por tanto $U \cap \bigcup_{n<\omega} E_n$ es no vacío y así X es SS. $\square$

A continuación presentamos un ejemplo de un espacio numerable con π-peso igual a $\mathfrak{d}$ que no es SS mostrando así que la desigualdad del resultado anterior tiene que ser estricta.

Ejemplo 3.1.1 Consideremos el espacio $(\omega + 1)^\omega$ con la topología caja, donde $\omega + 1$ es el compacto considerado con la topología usual. Sea

$$S = \{f \in (\omega + 1)^\omega : \exists n(f(k) = \omega \Leftrightarrow k \geqslant n)\}.$$

Afirmamos que S no es SS y $\pi\omega(S) = \mathfrak{d}$; lo cual demostramos a continuación.

Sean, para cada $n \in \omega$, $D_n = \{f \in S : \forall k \leqslant n(f(k) \neq \omega)\}$. Es fácil ver que los conjuntos D_n son densos y abiertos en S. Se afirma que $\{D_n : n \in \omega\}$ es testigo de que S no es SS. En efecto, tomemos para cada $n \in \omega$ un conjunto $F_n \in [D_n]^{<\omega}$, y a continuación definamos recursivamente $h \in (\omega+1)^\omega$ de modo que $f(n) < h(n)$ para cada f en F_n. Consideremos el abierto $\Pi_{n<\omega}[h(n), \omega]$ el cual es claramente disjunto con $\bigcup_{n<\omega} F_n$. Con esto concluimos que S no es SS.

Para ver que $\pi\omega(S) = \mathfrak{d}$, sea $\mathscr{D} \subset \omega^\omega$ un testigo de $\mathfrak{d}$. Notemos que los abiertos básicos son de la forma

$$W(t, f) = \Pi_{i<dom(t)}\{t(i)\} \times \Pi_{i\geqslant dom(t)}[f(i), \omega],\ t \in \omega^\omega \text{ y } t \in \omega^{<\omega}.$$

Para cada abierto $U(s,g)$ nosotros podemos tomar otro abierto $W(t,f)$ de modo que $W(t,f) \subseteq U(s,g)$ donde f domina a g, $f \in \mathscr{D}$. Así, pues, sí existe una π-base de cardinalidad $\mathfrak{d}$ para S.
Veamos ahora que ninguna π-base puede tener cardinalidad menor que $\mathfrak{d}$. Sea $\kappa < \mathfrak{d}$, entonces para cada $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ existe g tal que $|\{n : f_\alpha(n) < g(n)\}| = \omega$ para cada $\alpha < \kappa$. Entonces para cada $\alpha < \kappa$ se cumple que $U_\alpha \nsubseteq W(\phi, g)$ con lo cual mostramos que $\{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ no es una π-base para S.

Se puede concluir que $\pi\omega(S) = \mathfrak{d}$.

Definición 3.1.3

- Un espacio topológico X tiene *estrechez numerable*, y lo denotamos por $t(X) \leqslant \omega$, si para cada $A \subseteq X$ y cada $x \in \overline{A}$ existe $B \subseteq A$ numerable tal que $x \in \overline{B}$.

- Decimos que X tiene *estrechez de abanico (denso) numerable para $x \in X$* si, para cada sucesión $(A_n)_{n\in\omega}$ de subconjuntos (densos) de X tal que $x \in \bigcap_{n\in\omega} \overline{A}_n$, podemos elegir, para cada $n \in \omega$, un conjunto finito $B_n \subseteq A_n$ tal que $x \in \overline{\bigcup\{B_n : n \in \omega\}}$.

- *Un espacio tiene estrechez de abanico (denso) numerable* si tiene estrechez de abanico (denso) numerable para cada cada $x \in X$.

Es inmediato ver que si un espacio topológico es SS entonces también tiene la propiedad de estrechez de abanico denso numerable, el recíproco no es válido tal cual; sin embargo, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.1.1
Sea X un espacio topológico sin puntos aislados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

1. X es SS;

2. X es separable y tiene estrechez de abanico denso numerable;

3. X tiene estrechez de abanico denso numerable para cada punto de algún subconjunto denso y numerable.

Demostración. Basta probar que $3 \Rightarrow 1$. Tomemos un conjunto $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq X$ denso y sean $(D_n)_{n\in\omega}$ una sucesión de subconjuntos densos de X y $\mathscr{L} = \{L_n : n \in \omega\}$ una partición de ω de modo que $|L_n| = \omega$ para cada $n \in \omega$. Es inmediato que $a_n \in \bigcap\{\overline{D}_k : k \in \omega\}$ para cada $n \in \omega$, luego podemos elegir recursivamente, para cada $k \in \omega$, $F_k \in [D_k]^{<\omega}$ tal que $a_n \in \overline{\bigcup\{F_k : k \in L_n\}}$, por lo tanto $\{a_n : n \in \omega\} \subseteq \bigcup_{n\in\omega} \overline{\bigcup\{F_k : k \in L_n\}} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} \bigcup\{F_k : k \in L_n\}}$

además $X = \overline{\{a_n : n \in \omega\}} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\omega} \bigcup\{F_k : k \in L_n\}}$ así $(F_n)_{n\in\omega}$ testifica que X es SS. $\square$

Notemos que, si un espacio topológico X tiene estrechez de abanico numerable entonces también tiene estrechez de abanico denso numerable con lo cual tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.1
Si X es separable y tiene estrechez de abanico numerable, entonces es selectivamente separable.

Definición 3.1.4 Un espacio topológico X es llamado *espacio Fréchet* si para cada subconjunto $A \subseteq X$ y cada $a \in A^{'}$, punto de acumulación de A, existe una sucesión de elementos en A que converge a a.

Teorema 3.1.2
Si X es un espacio topológico separable y de Fréchet entonces X es SS.

Demostración. Sea D un subconjunto denso y numerable de X. Por el teorema 3.1.1 es suficiente probar que X tiene estrechez de abanico denso numerable para cada $d \in D$. Como $d \in \overline{X\backslash\{d\}}$ debe existir una sucesión $(d_n)_{n\in\omega}$ que converge a d. Sea $\{D_n^{'} : n \in \omega\}$ una sucesión arbitraria de subconjuntos densos de X y definamos recursivamente $D_n = \bigcup_{n<\omega} D_n^{'}$ con lo cual $\{D_n : n \in \omega\}$ es una sucesión descendiente de conjuntos densos en X. Ahora, ya que $d_n \in \overline{D_n}$, existe una sucesión $S^n \subseteq D_n$ que converge a d_n. Notemos que $d \in \overline{\bigcup_{n<\omega} S^n}$, y ya que la sucesión de densos es descendiente, podemos elegir $S^d \subseteq \bigcup_{n<\omega} S^n$ una sucesión que converge a d, además $S^n \bigcap S^d$ es finito siempre que S^d y S^n convergen a puntos distintos. Definamos $F_n = \overline{S^n \bigcup S^d}$ de este modo $S^d = \bigcup_{n<\omega} F_n$ y ya que $d \in \overline{S^d}$ tenemos que $d \in \overline{\bigcup_{n<\omega} F_n}$. $\square$

Sección 3.2

Forcing y los espacios SS

En esta pequeña y última sección finalmente podremos hacer uso, de forma directa o indirecta, de todo lo que hasta ahora hemos expuesto en la tesis. Lo siguientes dos resultados fueron publicados a principios del 2012 en Barman and Dow (2012).

Ambos resultado tratan el problema de si es posible demostrar que el producto de dos espacios Fréchet y numerables sea SS; nuestro primer objetivo es mostrar la consistencia relativa de tal afirmación, lo cual será un corolario inmediato del siguiente teorema.

Teorema 3.2.1
En cualquier modelo obtenido de agregar reales de Cohen a un modelo de CH todo espacio numerable de Fréchet tiene π-base a lo más ω_1.

Demostración. Sea X un espacio numerable y Fréchet. Vamos a considerar el forcing $\mathbb{P} = Fn(\kappa, 2)$ donde κ es un cardinal mayor que ω_1. Tomemos un espacio topológico X en $V[G]$ que sea numerable y Fréchet. Como X es numerable podemos considerar, sin pérdida de generalidad, que es igual a ω con alguna topología τ. Sea $\dot{\tau}$ un nombre tal que $(\omega, \dot{\tau})$ sea forzado a ser un espacio de Fréchet. Sean también $\theta = 2^{\mathfrak{c}^+}$, $\dot{A}_n$ un nombre que es forzado a ser la familia de todas la sucesiones con elementos en ω que convergen a n y $M \preceq H_\theta$ un submodelo elemental tal que $M^\omega \subseteq M$ y $|M| = \omega_1$, supongamos además que tanto X y $\{\dot{A}_n : n \in \omega\}$ como $\dot{\tau}$ son elementos de M.

Utilizaremos que, si G es un filtro $\mathbb{P}$-genérico, entonces $V[G \cap M]$ es un submodelo de $V[G]$ que satisface que la interpretación de $\dot{\tau} \cap M$ será una topología Fréchet de ω en la que, para cada n, la interpretación de $\dot{A}_n \cap M$ será la colección de sucesiones que convergen a n.

Vamos a considerar a partir de ahora a $V[G \cap M]$ como nuestro modelo base y utilizaremos, también, que $V[G]$ es obtenido de $V[G \cap M]$ forzando con $\mathbb{Q} = Fn(\kappa \backslash M, 2)$.

Nuestro objetivo es forzar que $\dot{\tau} \cap M$ sea una π-base para $\dot{\tau}$, lo cual terminaría la demostración (ya que $|M| = \omega_1$).

Supongamos que $\dot{U}$ es el nombre de un conjunto forzado a ser no vacío y un elemento de $\dot{\tau}$. Para cada condición p, $\dot{U}_p$ va a denotar al conjunto $\{x \in \omega : p \Vdash x \in \dot{U}\}$. Es claro que $\dot{U}_p$ es un conjunto en el modelo base y además $p \Vdash \dot{U}_p \subseteq \dot{U}$; más aún, por las suposiciones que hicimos acerca de M, vamos a tener que $p \Vdash Cl(\dot{U}_p)^{V[G\cap M]} \subseteq Cl(\dot{U})^{V[G]}$; en efecto, sea t un punto en $Cl(\dot{U}_p)^{V[G\cap M]}$ y $\langle t_n : n \in \omega\rangle$ una sucesión en $\dot{U}_p$ que converge a t, como $\dot{A}_n \cap M$ es la colección de sucesiones que convergen a n, entones $\langle t_n : n \in \omega\rangle$ también es una sucesión de elementos en $\dot{U}_p$ que converge a t en $V[G]$, además ya habíamos dicho que $p \Vdash \dot{U}_p \subseteq \dot{U}$, luego t está en $Cl(\dot{U})^{V[G]}$.

Para cumplir con el objetivo establecido procedemos por contradicción. Supongamos que $\dot{U}$ es forzado a no contener un abierto del modelo base. Entonces vamos a tener que existen una condición p_0 y un entero x tales que $p_0 \Vdash x \in \dot{U}$ y para cada condición $p \leqslant p_0$, $\dot{U}_p$ es nunca-denso. Tal p_0 existe pues de no ser así tendríamos que para cada condición s y cada x tales que $s \Vdash x \in \dot{U}$ existe un s_0 de forma que $s_0 \leqslant s$ y $s_0 \Vdash \dot{U}_{s_0}$ es denso en alguna parte, es decir, existe un abierto v tal que $Cl(v \cap \dot{U}_{s_0})^{V[G \cap M]} = \dot{U}_{s_0}$ y por tanto $v \subseteq Cl(v)^{V[G \cap M]} = Cl(v \cap \dot{U}_{s_0})^{V[G \cap M]} \subseteq Cl(\dot{U}_{s_0})^{V[G \cap M]} \subseteq Cl(\dot{U})^{V[G]}$ lo cual va en contradicción con nuestra suposición.

Como $\dot{U}$ es un nombre para un subconjunto de ω, podemos elegir un conjunto $\mathbb{L} \subseteq \kappa \backslash M$ tal que $dom(p_0) \subseteq \mathbb{L}$ y para cada $k \in \omega$ y cada condición $p \in Fn(\mathbb{L}, 2)$ se tenga que si $p \Vdash k \in \dot{U}$ entonces $p \restriction_{\mathbb{L}} \Vdash k \in \dot{U}$.

$\dot{U}$ es un $Fn(\mathbb{L}, 2)$-nombre, y sea $\{p_l : l \in \omega\}$ una numeración de todos los miembros de $Fn(\mathbb{L}, 2)$ que extienden a p_0. Ya que, para cada n, $\dot{U}_{p_0} \cup \cdots \cup \dot{U}_{p_n}$ es nunca-denso, se sigue que el complemento de la clausura de esta unión, D_n, es denso. Y como cada espacio numerable y Fréchet es SS, entonces hay una colección $F_n \in [D_n]^{<\omega}$ tal que $\bigcup_{n \in \omega} F_n$ es densa.

Como el espacio es Fréchet y $x \in Cl(\bigcup_{n \in \omega} F_n)$, existe una sucesión $S_x \subset \bigcup_{n \in \omega} F_n$ que converge a x. Por la definición de los D_n, tenemos que S_x es casi ajeno con $\dot{U}_p$ para cada $p \in Fn(\mathbb{L}, 2)$ que extiende a p_0. Por otro lado, como S_x converge a x, tendremos, por elementaridad, que S_x converge a x en el modelo final y entonces hay una condición p que fuerza que S_x está casi contenido en $\dot{U}$, lo cual es una contradicción. □

Podemos notar que cuando CH se satisface el resultado es inmediato pues ambos espacios son numerables.

Como se prometió, ya estamos en condiciones de probar el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1
Si ZF es consistente entonces también lo es la teoría que resulta de agregar a ZF las afirmaciones $\neg CH$ y "el producto de dos espacios Fréchet y numerables es SS".

Demostración. Por el teorema anterior podemos encontrar un modelo de $ZF + \neg CH$ en el que todo espacio Fréchet numerable tiene π-peso a lo más ω_1. Entonces el producto tendrá π-peso a lo más ω_1. Como en un modelo de Cohen se tiene que $\omega_1 < \mathfrak{d}$ y el producto es numerable, tenemos que también será SS. □

Si fortaleceremos la teoría un poco es posible demostrar que el producto finito de espacios Fréchet y numerables es SS, lo cual hacemos a continuación.

Teorema 3.2.2
El axioma del forcing propio, PFA, implica que el producto finito de espacios numerables y de Fréchet es SS.

Demostración. Sean X y Y espacios numerables y de Fréchet y supongamos que el producto no es SS. Tomemos $\{E_n : n \in \omega\}$ una sucesión de subconjuntos densos de $X \times Y$. Como ya sabemos, es suficiente probar que para cada punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$ podemos elegir una sucesión de subconjuntos finitos de los conjuntos E_n de modo tal que (x_0, y_0) esté en la clausura de la unión de tales subconjuntos. También podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{E_n : n \in \omega\}$ es descendiente. Sean $\mathscr{A}_{x_0} \subseteq [X]^\omega$ y $\mathscr{B}_{y_0} \subseteq [Y]^\omega$ las familias de sucesiones que convergen a x_0 y y_0 respectivamente. Enumeremos a los conjuntos X y Y haciendo $X = \{x_n : n \in \omega\}$ y $Y = \{y_n : n \in \omega\}$.

Consideremos ahora al conjunto $\{x_k \in X : k \leqslant n\}$ para alguna n dada, ya que este conjunto es nunca denso, podemos tomar el complemento de su cerradura, el cual es un denso abierto, e intersectarlo con E_n para así obtener otro conjunto denso, de esta forma podemos decir que, sin pérdida de generalidad, supondremos que, para cada n, el conjunto E_n es ajeno con el conjunto nunca denso $\{x_k \in X : k \leqslant n\}$, de forma análoga podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que E_n es ajeno con $\{y_k \in Y : k \leqslant n\}$. Para cada $(A, B) \in \mathscr{A}_{x_0} \times \mathscr{B}_{y_0}$ vamos a suponer a partir de ahora que existe un m tal que $(A \times B) \cap E_m = \phi$. Lo anterior lo hacemos pues, si suponemos que $(A \times B) \cap E_m$ no se vacío, entonces la intersección es o bien finita o bien infinita, si es finita podemos tomar un m suficientemente grande para que los elementos que pertenecen a ella queden incluidos en el conjunto $(\{x_k \in X : k \leqslant m\} \times Y) \cup (X \times \{y_k \in Y : k \leqslant m\})$, y en caso de ser infinita podremos tomar subconjuntos $F_n \subseteq E_n$ tales que F_n sea finito y $\bigcup F_n$ converja a (x_0, y_0), es decir, (x_0, y_0) pertenece a la cerradura de la unión de los F_n lo cual terminaría con la demostración.

Ahora consideremos el forcing definido por

$$P = \bigcup_{n<\omega} \Pi_{k<n} E_k$$

Donde $\mathbb{P}$ es ordenado por la contención. Por supuesto, al forzar con $\mathbb{P}$ tenemos un nombre para la selección genérica $F = \bigcup_{p\in G}\{p(k) : k \in dom(p)\}$. Notemos que ningún x o y puede aparecer como coordenada en una colección infinita de parejas de $\{p(k) : k \in \omega\}$.

En la extensión genérica, obtenida por $\mathbb{P}$, notemos para cada $A \in \mathscr{A}_{x_0}$ y $B \in \mathscr{B}_{y_0}$ tendremos que $F \cap ((A \times Y) \cap (X \times B)) = F \cap (A \times B)$ es un conjunto finito, lo anterior se debe a que algún E_m será ajeno con $A \times B$.

Para $A \in \mathscr{A}_{x_0}$ definamos $\tilde{A} = F \cap (A \times X)$ y para $\tilde{B} \in \mathscr{B}_{y_0}$ definamos $B = F \cap (X \times B)$. Sea $\mathscr{X}\{(\tilde{A}, \tilde{B}) : \tilde{A} \cap \tilde{B} = \phi\}$. Ahora definamos $K_0 \subseteq [\mathscr{X}]^2$ como sigue, $\{(\tilde{A}_0, \tilde{B}_0), (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1)\} \in K_0$ si y sólo si $(\tilde{A}_0 \cap \tilde{B}_1) \cup (\tilde{A}_1 \cap \tilde{B}_0) \neq \phi$.

Una topología métrica separable se define en $\mathscr{X}$ de la siguiente manera: dados lo subconjuntos finitos de $X \times Y$ u_0, u_1, v_0 y v_1 definimos el abierto básico por $[(u_0, u_1), (v_0, v_1)] = \{(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \mathscr{X} : u_0 \subseteq \tilde{A}, u_1 \cap \tilde{A} = \phi, v_0 \subseteq \tilde{B}, v_1 \cap \tilde{B} = \phi\}$. Nótese que K_0 es abierto en está topología.

Como K_0 es abierto en $[\mathscr{X}]^2$, entonces, por el teorema ?, tendremos que, o bien $\mathscr{X}$ es unión numerable de conjuntos 1-homogéneos, o bien existe un forcing propio $\mathbb{Q}$ que introduce un conjunto 0-homogéneo no numerable.

Primero veremos que si $\mathscr{X}$ no es unión numerable de conjuntos 1-homogéneos, entonces obtenemos la selección deseada de subconjuntos finitos de los E_n's. En este caso, entonces, existe un $\mathbb{P}$-nombre $\dot{\mathbb{Q}}$ para un forcing propio, de modo que $\dot{\mathbb{Q}}$ introduce un conjunto 0-homogéneo no numerable. Esto es, hay un $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ -nombre para una sucesión $\langle(\dot{A}_\alpha, \dot{B}_\alpha) : \alpha \in \omega_1\rangle$ de pares de $\mathscr{A}_{x_0} \times \mathscr{B}_{y_0}$ de modo que $\{(\dot{\tilde{A}}_\alpha, \dot{\tilde{B}}_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ es un conjunto 0-homogéneo de $\mathscr{X}$. Es rutinario de verificar que existe una familia de ω_1 subconjuntos densos de $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}$ de modo que, aplicando PFA, obtenemos un selector F de los $\langle E_n\rangle_{n\in\omega}$ y una sucesión $\{(A_\alpha, B_\alpha) : \alpha \in \omega_1\} \subseteq \mathscr{A} \times \mathscr{B}$ satisfaciendo que, para cada $\alpha \neq \beta \in \omega_1$

1. $(F \cap \tilde{A}_\alpha) \cap (F \cap \tilde{B}_\alpha) = \phi$ y
2. $F \cap [(\tilde{A}_\alpha \cap \tilde{B}_\beta) \cup (\tilde{A}_\beta \cap \tilde{B}_\alpha)] \neq \phi$ es finito.

Las propiedades 1 y 2 hacen que las familias $\{F \cap (A_\alpha \times Y) : \alpha \in \omega_1\}$ y $\{F \cap (X \times B_\alpha) : \alpha \in \omega_1\}$ formen una grieta de Luzin y, entonces, no pueden ser separadas, modulo finito, en $\mathscr{P}(X \times Y)$. Ahora mostraremos que si $U \times W$ es una vecindad de (x_0, y_0), entonces $U \times W$ intercepta a F como es requerido. Nótese que $U \times Y$ contendrá, modulo finito, a $F \cap (A_\alpha \times Y)$ para $\alpha \in \omega_1$. Además debe haber algún $\alpha \in \omega_1$ tal que $U \times Y$ intercepta a $F \cap (X \times B_\alpha)$ en un conjunto infinito. Como $X \times W$ contendrá un subconjunto cofinito de $F \cap (X \times B_\alpha)$, tendremos entonces que $U \times W$ intercepta a $F \cap (X \times B_\alpha)$, y por lo tanto a F, en un conjunto infinito.

Ahora, finalmente, completamos la demostración viendo que, en la extensión por $\mathbb{P}$, $\mathscr{X}$ no puede ser la unión numerable de conjuntos 1-homogéneos. Para ver esto primero fijemos una $\mathbb{P}$-nombre $\dot{\mathscr{X}}$, para $\mathscr{X}$. Supongamos que tenemos una sucesión de $\mathbb{P}$-nombres, $\langle \dot{\mathscr{X}}_n \rangle_{n \in \omega}$ y una condición $p_0 \in \mathbb{P}$ tal que

$$p_0 \Vdash \bigcup_{n \in \omega} \dot{\mathscr{X}}_n = \dot{\mathscr{X}} \text{ y, para cada } n \in \omega,\ p_0 \Vdash [\dot{\mathscr{X}}_n]^2 \subseteq K_1$$

Para mejor legibilidad, $A \backslash m$ abrevia al conjunto $A \backslash \{x_i : i < m\}$ para A contenido en X y de forma análoga $B \backslash m$ abrevia al conjunto $B \backslash \{y_i : i < m\}$ para B contenido en Y. Recordemos que para cada $(A, B) \in \mathscr{A}_{x_0} \times \mathscr{B}_{y_0}$, existe un $m \in \omega$ de modo que $((A \times Y) \cap (X \times B)) \cap E_m = \phi$, y por tanto p_0 debe forzar que existe un $m \in \omega$ suficientemente grande, tal que $(\widetilde{A \backslash m}, \widetilde{B \backslash m})$ es un elemento de $\dot{\mathscr{X}}$. Además existen $m, n \in \omega$ y $p \leqslant p_0$ en $\mathbb{P}$ tales que $p \Vdash (\widetilde{A \backslash m}, \widetilde{B \backslash m}) \in \dot{\mathscr{X}}$. Definamos

$$\mathscr{X}_{p,n,m} = \{(A, B) \in \mathscr{A}_{x_0} \times \mathscr{B}_{y_0} : p \Vdash (\widetilde{A \backslash m}, \widetilde{B \backslash m}) \in \dot{\mathscr{X}}\}$$

Es obvio que $\bigcup \{\mathscr{X}_{p,n,m} : p \in \mathbb{P} \wedge n, m \in \omega\}$ debe ser igual a $\mathscr{A}_{x_0} \times \mathscr{B}_{y_0}$, terminaremos la demostración probando que este no es el caso.

Primero tomemos una numeración para $\mathbb{P} \times \omega \times \omega$ de tipo ω como $\{(p_k, n_k, m_k) : k \in \omega\}$ y construiremos, por inducción sobre k, una sucesión descendiente $\{X_k \times Y_k : k \in \omega\}$ de subespacios de $X \times Y$, con $X_0 = X$ y $Y_0 = Y$. Para guiar la inducción fijemos un ultrafiltro $\mathscr{W}$ de $\omega \times \omega$ que satisfaga que para cada $n \in \omega$ $(\omega \backslash n) \times (\omega \backslash n)$ esté en $\mathscr{W}$. También elijamos una sucesión $\{a_j : j \in \omega\}$ que converge a x_0 y una sucesión $\{b_l : l \in \omega\}$ convergiendo a y_0.

En el k-ésimo paso inductivo consideraremos las tripleta (p_k, n_k, m_k) y la colección $\mathscr{X}_{p_k,n_k,m_k}$. Sean $\mathbb{A}_k = \{A \backslash m_k : \exists B\ (A, B) \in \mathscr{X}_{p_k,n_k,m_k}\}$ y $\mathbb{B}_k = \{B \backslash m_k : \exists A\ (A, B) \in \mathscr{X}_{p_k,n_k,m_k}\}$, para $n \in \omega$. Como hipótesis de inducción asumiremos que, para cada $m \in \omega$, $(j, l) : (a_j, b_l) \in [E_m \cap (X_k \times Y_k)]'\} \in \mathscr{W}$, esto es cierto para X_0 y Y_0 pues E_m es un subconjunto denso de $X \times Y$ para cada $m \in \omega$. La construcción de X_{k+1} y Y_{k+1} también asegurará que, para cada par $(A, B) \in \mathscr{X}_{p_k,n_k,m_k}$, o bien $A \cap X_{k+1}$ o bien $B \cap Y_{k+1}$ será un conjunto finito.

Ahora realizaremos el paso inductivo. Sean $S_k = \bigcup \mathbb{A}_k$ y $T_k = \bigcup \mathbb{B}_k$. La clave de la prueba es que, como $p_0 \Vdash [\dot{\mathscr{X}}_n]^2 \subseteq K_1$, debe existir $\tilde{m}$ tal que $(S_k \times T_k) \cap$

$E_{\tilde{m}} = \phi$. De hecho, elegimos $\tilde{m}$ más grande que cada m_k y $dom(p_k)$ y asumimos que $(x,y) \in (S_k \times T_k) \cap E_{\tilde{m}}$ es no vacío. Extendamos p_k a algún $\tilde{p}$ tal que $\tilde{p}(\tilde{m}) = (x,y)$ y observemos que $\tilde{p} \Vdash (x,y) \in \dot{F}$. Como $(x,y) \in (S_k, T_k)$ existen (A_0, B_0) y (A_1, B_1) en $\mathscr{X}_{p_k,n_k,m_k}$ tales que $x \in A_0 \backslash m_k \in \mathbb{A}$ y $y \in B_1 \backslash m_k \in \mathbb{B}$ por tanto $\tilde{p} \Vdash (x,y) \in \dot{F} \cap ((A_0 \backslash m_k) \times (B_1 \backslash m_k))$. Note que también $(x,y) \in (\widetilde{A_0 \backslash m_k} \cap \widetilde{B_1 \backslash m_k})$ y entonces $\tilde{p} \Vdash \langle (\widetilde{A_0 \backslash m_k}, B_0 \backslash m_k), (\widetilde{A_1 \backslash m_k}, B_1 \backslash m_k) \rangle \in K_0$, por supuesto esto contradice que p_k fuerza que este par está en K_1. Ahora definiremos $X_{n+1} \subseteq X_n$ y $Y_{n+1} \subseteq Y_n$. Si para cada $\tilde{m} > m$

$$\{(j,l) : (a_j, b_l) \in [E_{\tilde{m}} \cap ((X_k \backslash S_k) \times Y_k)]'\} \in \mathscr{W}$$

Entonces hágase $X_{k+1} = X_k \backslash S_k$ y $Y_{k+1} = Y_k \backslash T_k$. De otro modo sean $X_{k+1} = X_k$ y $Y_{k+1} = Y_k$. Para ver que esto funciona notemos que para cada $\tilde{m} > m$

$$\{(j,l) : (a_j, b_l) \in [E_{\tilde{m}} \cap (X_k \times (Y_k \backslash T_k))]'\} \in \mathscr{W}$$

Si esto falla, entonces existe un $\tilde{m} > m_k$ tal que

$$\{(j,l) : (a_j, b_l) \notin [E_{\tilde{m}} \cap ((X_k \backslash S_k) \times Y_k)]' \cup [E_{\tilde{m}} \cap (X_k \times (Y_k \backslash T_k))]'\} \in \mathscr{W}$$

De cualquier modo, esto implica que $\{(j,l) : (a_j, b_l) \in \overline{E_{\tilde{m}} \cap (S_k \times T_k)}\}$ es un miembro de $\mathscr{W}$, lo cual es imposible ya que esto contradice el hecho de que existe $\tilde{m} > m$ tal que $S_k \times T_k$ es ajeno con $E_{\tilde{m}}$. Entonces nuestra selección de los X_{n+1} Y_{n+1} satisface las hipótesis

Acorde a nuestra construcción, para cada k, existe $j_k > k$ tal que a_{j_k} está en X_k'. Ahora es el momento de usar que nuestro espacio es Frechét. para cada k elijamos una sucesión $J_k \subseteq X_k$ convergiendo a a_{j_k}. Como la sucesión $\{a_{j_k} : k \in \omega\}$ converge a x_0, tendremos que x_0 está en la clausura de $\bigcup_{k \in \omega} J_k$. Por tanto hay una sucesión $A \subseteq \bigcup_{k \in \omega} J_k$ convergiendo a x_0. Por construcción nosotros sabemos que $A \backslash X_k$ es finito para cada k. Con un argumento similar tendremos que existe una sucesión B convergiendo a y_0 con la propiedad de que $B \backslash Y_k$ es finito para cada k. Por lo tanto $(A, B) \in \mathscr{A}_{x_0} \times \mathscr{B}_{y_0}$ pero claramente la existencia de (A, B) contradice la hipótesis inductiva en la construcción de $\{(X_k, Y_k) : K \in \omega\}$, a saber, que existe un k tal que uno de los conjuntos $A \cap X_{k+1}$ y $B \cap Y_{k+1}$ es finito.

$\square$

Bibliografía

Angelo Bella, Maddalena Bonanzinga, M. V. M. and Tkachuk, V. V. (2008). Selective separability: General facts and behavior in countable spaces. *Topology Proceedings*, pages 15–30.

Barman, D. and Dow, A. (2011). Selective separability and ss. *Topology Proceedings*, pages 181–204.

Barman, D. and Dow, A. (2012). Proper forcing axiom and selective separability. *Topology and its applicatios*, pages 806–813.

Blass, A. (2003). Combinatorial cardinal characteristics of the continuum.

Hernández, F. H. (2005). Submodelos elementales en topología. *Aportaciones matemáticas*, pages 131–158.

Hernández, F. H. (2011). *Teoría de conjuntos, una introducción.* Sociedad matemática Mexicana, 3 edition.

Kechris, A. S. (1995). *Classical descriptive set theory.* Graduate texts in mathematics, 156, Springer-Verlag.

Kunen, K. (1980). *Set Theory. An introduction to independence proofs.*

Mendelson, E. (2009). *Introduction to mathematical logic.* CRC Pres, 5 edition.

Scheepers, M. (1999). Combinatories of open covers. vi. selectors for sequences of dense sets. *Auaest. Math.*, (1):109–130.

Shelah, S. (1982). *Proper and improper forcing.* Springer-Verlag.

Soukup, L. (2010). Elementary submodels in infinite combinatorics.