UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLAS DE HIDALGO

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Mat. Luís Manuel Rivera Gutiérrez”

Teoría general de modelos sobre las ultrapotencias de la aritmética.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA

CARLOS ALBERTO MENDOZA MAGAÑA

ASESOR:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DAVID MEZA ALCÁNTARA

MORELIA, MICH., JUNIO 2014

Resumen

Resumen

Construimos ultrapotencias de números naturales con ultrafiltros sobre conjuntos numerables, los dotamos con estructura para interpretar el lenguaje saturado de la aritmética entonces analizamos las condiciones para que exista un encaje elemental entre ellas, trabajamos con una sucesión creciente de ultrapotencias ordenadas por sus encajes elementales para crear un submodelo de la ultrapotencia que acota a la sucesión tal que este no es una ultrapotencia. Mostramos las condiciones necesarias para obtener un automorfismo no equivalente con la identidad. Analizamos la cardinalidad de las ultrapotencias y tomando la teoría de tipos encontramos que las ultrapotencias son ω_1 saturadas.

palabras clave:

Ultrafiltro, ultrapotencia, modelo.

Abstract

We'll build ultrapowers of natural numbers with ultrafilters over countable sets, equip them with a structure to interpret the saturated arithmetic's language, then analyze the conditions for the existence of a elementary embedding between them, we work with an increasing ultrapower's sequence ordered by their elementary embedding to create a submodel of the ultrapower which limits the sequence such that this is not a ultrapower. We show the necessary conditions for have an automorphism not identity We analyze the cardinality of ultrapotencias and taking the type theory we find that ultrapowers are ω_1 saturated.

Keywords:

ultrafilters, ultrapower, model.

Las dos cosas más bonitas del mundo son las mujeres y las matemáticas...
a las primeras aún no hay quien les entienda.

J. Mojica.

No hay libro tan malo que no tenga algo bueno

Bachiller Sansón Carrasco (4)

Agradecimientos

Debo agradecer primero que a nadie a mi familia empezare por mi padre el mejor modelo del trabajo duro y honesto que aún con pesares y enfermedad siempre dio la cara por nosotros, a mi madre fuente de un incomparable amor,a mi hermana Roxana siempre la pie del cañón cuya actitud ante el trabajo nunca deja de ser una inspiración, mi hermana mayor Ma. de Jesús como un ejemplo de fuerza y entereza a quien siempre imagino subiendo las mangas de su sweter y preguntando "¿Qué hay que hacer?". Aún queda mucha familia a quien mencionar tíos y tías; y más gente que de forma directa o indirecta tiene que ver con quien soy ahora, a los que faltan gracias.

En especial gracias a mi asesor David Meza Alcántara por este interesante proyecto, por la confianza y por todas las cosas que en el camino me permitió aprender de él pero en especial por darme la oportunidad de saber como es crear un camino esta prodigiosa ciencia, por aventurarse conmigo en los senderos de cuantificadores y fórmulas. Al profesor Jorge Mojica León por cada mañana mostrar a un grupo de niños lo que había en el mundo por presentar su trabajo de una forma tan sublime y delicada por todo lo que aprendí de él, aprovecho para responder a esa cortesía que tuvo conmigo hace años y ser yo quien ahora lo llame amigo. De los muchos profesores de la facultad en especial a Karina Figueroa por sus divertidas clases, por siempre retarnos para pensar fuera de la caja y sobre todo por la amistad brindada.

Gracias a mis compañeros quienes hicieron este viaje ameno en especial a los compañeros que se volvieron entrañables amigos y más aún para los amigos que se volvieron familia Khepani, Luis Fernando, Poke, Soffer, Lucas, Tellez, Cancino, Nazi, Poncho, Vianey, Humberto, Jovanni y Adriana; aprender con ustedes y de ustedes fue una verdadera experiencia.

A mis viejos amigos y los nuevos que sin importar que el tiempo pase y lo que este traiga un minuto de recuerdos nos centra y nos recuerda que era lo que queríamos en un inicio: Pedro, Noé, Jesús, Carlos, Luis Fernando, Enrique, Diego, Beny, Ulises, Alejandro, Karen, Marisol, Brenda, Maricela, Hilda, Citlali, Erica; crecer con ustedes fue un regalo que no cambiaría por nada, que la vida nunca les deje de sonreír.

Y ya cerca del final a las mujeres que no pueden quedar sin una mención especifica: Andrea por sentar las bases para muchos paradigmas, Alejandra por darme la más honesta amistad que pudiera desear y tristemente por enseñarme que hay momentos en los que queramos o no los ciclos de la vida deben acabar, Alejandra Ramos por haber decidido vivir una breve pero incomparable locura conmigo por no olvidarme a pesar del tiempo y por enseñarme que "en la vida hay tiempo para todo, menos para que...", Lety por la más mágica noche de mi vida yo rompí tu maldición pero tu corriste al cuervo que estaba en el busto de Palas sobre el dintel de mi puerta, finalmente a Jenny por hacer huracanes de gelatina conmigo y por mostrarme que el pasado puede ser un cuento que sobre el agua un día el viento escribió.

Por último a esos seres intangibles que día a día están tan cerca de nosotros esperando a ser convocados para ayudarnos y salvarnos su existencia es casi un acto de la divinidad, que escapa al entendimiento humano gracias Wikipedia, gracias Google.

Gracias café, gracias galletas.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La operación de *ultrapotencia* permite construir modelos, a partir de un modelo dado. Tales modelos preservan las verdades del modelo original (en cierto lenguaje restringido) y teniendo cierto cuidado resultan no ser isomorfos.

En este trabajo se estudian las ultrapotencias de $\mathbb{N}$, el modelo estándar de la aritmética y se analiza lo que la Teoría de Modelos clásica tenga que decir sobre ellas, entendida según Chang y Keisler.

$$\text{Teoría de Modelos } = \text{Algebra Universal } + \text{ Lógica Matemática}$$

Este trabajo esta dividido en dos capítulos, el primero presenta los conceptos preliminares para desarrollar la teoría de modelos, y si bien no podría decir que es rico en ejemplos tampoco adolece por falta de ellos. Comenzamos con lo más fundamental de la lógica, las definiciones de lenguaje y modelo, los términos y la definición recursiva de las fórmulas, preceden a la presentación del concepto de verdad para las fórmulas brindado por Tarski, esto junto con los conceptos de teoría y consistencia sella las definiciones más importantes para la lógica y se finaliza con el teorema de compacidad. Después de esto entramos de lleno en la teoría de modelos, definiendo los encajes, subestructuras y sus respectivas versiones elementales, finalizamos esta sección hablando sobre cadenas de modelos. Para seguir, definimos los filtros y ultrafiltros, presentamos sus principales características como que un conjunto con la propiedad de la intersección finita genera un filtro propio y este a su vez, esta contenido en algún ultrafiltro, analizamos ordenes para estos conjuntos: la contención para los filtros, por su naturaleza esto no aplica para ultrafiltros en cambio para ellos tendremos el orden de Rudin-Keisler. En la tercera sección finalmente construimos los ultraproductos para ello definimos una relación de equivalencia para funciones, auxiliados de un ultrafiltro, las ultrapotencias son un caso particular de los ultraproductos ambos son modelos y como tales interpretan un lenguaje y más aún las fórmulas de este tienen un valor de verdad sobre ellos, nos servimos del teorema de Łǒs para esta cuestión. El capítulo finaliza con una útil herramienta para discriminar cúando una subestructura lo es de manera elemental sin tener que aplicar directamente la definición, el test de Tarski-Vaught.

En el capítulo final trabajaremos sólo con ultrapotencias de números naturales con ultrafiltros sobre conjuntos numerables.

Comenzamos mostrando que cada clase de una función $[f]_{\mathcal{U}}$ tiene asociado un ultrafiltro $f(\mathcal{U})$ lo que nos permite construir nuevos ultrafiltros a partir de uno existente, también analizaremos los homomorfismos y estudiaremos las condiciones para obtener un encaje, se muestran que al usar ultrafiltros principales la ultrapotencia obtenida es isomorfa a los naturales. Otro resultado es que dados $\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ ultrafiltros en $\mathbb{N}$ y tales que $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ entonces $\prod_{\mathcal{V}} \mathbb{N}$ esta elementalmente encajada en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$. Después construimos subestructuras de una ultrapotencia y estudiamos el caso en el que pueden y no ser ultrapotencias también.

El siguiente tema es referente a los automorfismos y si bien este tópico resulta sencillo hablando de números naturales las ultrapotencias nos cuentan una historia diferente, en ellas al tomarlas sobre ultrafiltros no Hausdorff en ellas se podrían llegar a tener automorfismos no equivalentes a la identidad.

Hablando de la cardinalidad de las ultrapotencias obtenemos que son numerables, en el caso de ultrafiltros principales, o bien el continuo.

Nuestros últimos cuestionamientos nos llevan a la teoría de tipos y obtenemos que dado un lenguaje numerable y un n-tipo sobre él podemos encontrar una ultrapotencia tal que realice al n-tipo. El último resultado obtenido es que las ultrapotencias son ω_1 saturadas.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Lenguajes y Modelos

En la vida cotidiana el lenguaje nos permite lanzar al mundo expresiones. Podemos decir por ejemplo: "la noche esta estrellada, y tiritan, azules, los astros a lo lejos"(11) una expresión puede entenderse de maneras diversas lo que enriquece la literatura, pero como no nos interesa la poesía sino las matemáticas, usaremos lenguajes de primer orden para representar estructuras también llamadas modelos.

Los lenguajes de primer orden constan (dependiendo del autor) de símbolos para funciones, relaciones y elementos distinguidos, a lo largo del capítulo definiremos como interpretarlos mediante los modelos.

Definición 2.1.1. *Diremos que un lenguaje $\mathcal{L}$ está dado por:*

1. *Un conjunto $\mathcal{F}$ de símbolos de función y un entero positivo n_f para cada $f \in \mathcal{F}$ llamado aridad,*
2. *un conjunto $\mathcal{R}$ de símbolos de relación y un entero positivo n_R para cada $R \in \mathcal{R}$ que nos indica que trabajamos con una relación n_R-aria,*
3. *un conjunto de constantes $\mathcal{C}$,*
4. *el símbolo de igualdad.*
$$=$$
5. *conectivos lógicos*
$$\neg \textit{ (negación), y}$$

$$\wedge (\textit{conjunción}),$$

6. *cuantificadores*

$$\exists \ (\textit{existencial}),$$

7. *variables*

$$v_1, ..., v_n, ...$$

y finalmente

8. *símbolos de puntuación*

$$(\ )\ ,\ \ (\textit{paréntesis y coma})$$

los cuales nos auxiliaran para hacer más fácil nuestra comprensión de las fórmulas.

Los símbolos de función pueden ser llamados letras funcionales, análogamente sucede con los símbolos de relación aunque adicionalmente a estos se les puede llamar letras predicativas. Cualquiera de los conjuntos $\mathcal{F}$, $\mathcal{R}$ o $\mathcal{C}$ pueden ser vacíos, los elementos de la definición anterior desde el número cuatro serán parte de todos los lenguajes.

Ejemplo 2.1.2. 1. *El lenguaje de los anillos quedará representado así:*

$$\mathcal{L}_r = \langle +, -, \bullet, 0, 1 \rangle$$

donde $+, -$ y $\bullet$ son símbolos de funciones binarias y tanto 0 como 1 son constantes, y

2. *el lenguaje para anillos ordenados puede denotarse así:*

$$\mathcal{L}_{ar} = \mathcal{L}_r \cup \{<\}$$

con $<$ un símbolo de relación binario.

Definición 2.1.3. *Una $\mathcal{L}-$estructura $\mathcal{M}$ o modelo se forma con:*

1. *Un conjunto no vacío M llamado el universo,*
2. *una función $f^{\mathcal{M}} : M^{n_f} \longrightarrow M$ para cada $f \in \mathcal{F}$,*
3. *un conjunto $R^{\mathcal{M}} \subseteq M^{n_R}$ para cada $R \in \mathcal{R}$, y*

4. *un elemento* $C^{\mathcal{M}} \in M$ *para cada* $c \in \mathcal{C}$*.*

Nos referiremos a los símbolos $f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}}$ como las interpretaciones de los símbolos f, R, C y denotamos a la estructura así

$$\mathcal{M} = \langle M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}} : f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}, C \in \mathcal{C} \rangle.$$

Cuando el contexto sea claro omitiremos la parte $f \in \mathcal{F}, R \in \mathcal{R}$ y $C \in \mathcal{C}$.

Dado un lenguaje $\mathcal{L}$ y dos $\mathcal{L} - estructuras$ $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ diremos que N y M son sus respectivos universos.

Las expresiones o sucesiones de símbolos que se interpretan como objetos en un universo son los "términos" que se definen a continuación:

Definición 2.1.4. *Llamaremos términos a:*

1. *Las variables y las constantes.*

2. *Si* $t_1, ..., t_n$ *son términos y* f *es un símbolo de función* $n-$*ario entonces* $f(t_1, ..., t_n)$ *es un término.*

Ejemplo 2.1.5. *Recordemos como definimos el lenguaje* $\mathcal{L}_r = \langle +, -, \bullet, 0, 1 \rangle$ *para este*

$$0, 1$$

son términos ya que ambas son constantes del lenguaje. Sean t_1 *y* t_2 *términos entonces*

$$\bullet(t_1, (-(t_2, 1))) \text{ es un término, así como}$$

$$\bullet(1, (+(1, 1)))$$

consideremos una $\mathcal{L}_r$*-estructura*

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, -, \bullet, 0, 1 \rangle$$

entonces podemos pensar en el término $\bullet(1, (+(1, 1)))$ *como el elemento 2, por otro lado*

$$\bullet(t_1, (-(t_2, 1)))$$

nombra a una función dada por

$$(x, y) \mapsto \bullet(x, (-(y, 1))).$$

En el ejemplo anterior, notamos la utilidad de los símbolos de puntuación. A partir de ahora usaremos la notación usual al referirnos a la suma y la multiplicación.

Ahora que tenemos noción de lo que es un término, veamos como es que estos pueden ser interpretados,

Definición 2.1.6. *Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura y t un término construido usando las variables*

$$\bar{v} = (v_1, ..., v_m)$$

su interpretación nos brinda esta función

$$t^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^m \to \mathcal{M}$$

tomemos

$$\bar{a} = (a_1, ..., a_m) \in M$$

recursivamente definiremos

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a})$$

la interpretación de t en $\mathcal{M}$ bajo $\bar{a}$ de la siguiente manera:

1. *Si t es un símbolo de constante c, entonces*

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = c^{\mathcal{M}},$$

2. *si t es la variable v_j tendremos*

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = a_j, \;\; y$$

3. *si t es el término $f(s_1, ..., s_{n_f})$ donde f es una letra funcional y $s_1, ..., s_{n_f}$ son términos, entonces*

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = f^{\mathcal{M}}(s_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), ..., s_{n_f}^{\mathcal{M}}(\bar{a})).$$

Ejemplo 2.1.7. *Sea*

$$\mathcal{L} = \langle f, g, c \rangle$$

donde tanto f, como g, son símbolos de funciones binarios y c es una constante, tenemos que los siguiente son términos

$$t_1 = g(v_1, c)$$

$$t_2 = f(v_1, g(v_2, c))$$

consideremos la siguiente $\mathcal{L}$-estructura

$$\mathcal{M} = \langle \mathbb{R}, +, \bullet, 0 \rangle$$

en este caso tenemos que

$$f^{\mathcal{M}} = +$$

$$g^{\mathcal{M}} = \bullet$$

$$c^{\mathcal{M}} = 0$$

al interpretar los anteriores términos bajo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tendremos

$$t_1^{\mathcal{M}}(a_1) = a_1 \bullet 0$$

$$t_2^{\mathcal{M}}(a_1, a_2) = a_1 + (a_2 \bullet 0).$$

Usamos el lenguaje $\mathcal{L}$ para crear fórmulas que describan propiedades de las $\mathcal{L}-$ *estructuras*. Las fórmulas son cadenas construidas con símbolos de $\mathcal{L}$, las variables $v_1, v_2, ...$, el símbolo de igualdad $=$, los conectivos lógicos $\wedge, \neg$, los cuantificadores $\exists$ y paréntesis $(,)$. Las fórmulas se construyen en dos etapas: primero las atómicas y luego el resto recursivamente, a continuación las presentamos formalmente.

Definición 2.1.8. *Una fórmula atómica ϕ en un lenguaje $\mathcal{L}$ es de la forma:*

1. *$t = s$ donde t y s son términos, o*
2. *$R(t_1, ..., t_n)$, donde R es una letra predicativa con aridad n y $t_1, ..., t_n$ términos.*

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el conjunto más pequeño $\mathcal{W}$ tal que contiene a las atómicas y en el que se cumple:

1. *Si ϕ esta en $\mathcal{W}$ entonces $\neg\phi$ esta en $\mathcal{W}$,*
2. *si ϕ y ψ están en $\mathcal{W}$ entonces $(\phi \wedge \psi)$ está en $\mathcal{W}$ y finalmente*
3. *si ϕ esta en $\mathcal{W}$, entonces $\exists v_i \phi$ está en $\mathcal{W}$.*

Ejemplo 2.1.9. *Para el lenguaje $\mathcal{L}_r$ las siguientes son $\mathcal{L}_r$-fórmulas*

1. $(v_1 = 0 \wedge v_1 > 0)$

2. $\exists v_2(v_2 \bullet v_2 = v_1)$

3. $\forall v_2(v_2 \bullet 1 = v_2)$.

Diremos que una variable v es *libre* en la fórmula ϕ sino es alcanzada por algún cuantificador de otra manera diremos que es acotada.

Ejemplo 2.1.10. *Considerando las variables v_1 y v_2 del ejemplo anterior*

1. *v_1 es libre en las dos primeras fórmulas.*

2. *v_2 es acotada en todas sus apariciones.*

Definición 2.1.11. *Llamaremos enunciado a una $\mathcal{L}$-fórmula sin variables libres.*

La notación

$$\phi(v_1, ..., v_j)$$

significa que ϕ tiene a $v_1, ..., v_j$ como variables libres.

Retomando el ejemplo 2.1.9 la primera fórmula asegura que $v_1 \geq 0$, la segunda que v_1 es un cuadrado, la siguiente que cada elemento diferente de cero tiene un inverso multiplicativo y la última nos dice que cualquier elemento multiplicado por la unidad nos resulta el mismo elemento. Supongamos que estas son fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}_{or}$ y preguntémonos cuando estas son verdaderas en la $\mathcal{L}_{or}$-estructura

$$\langle \mathbb{Z}, +, -, \bullet, <, 0, 1 \rangle$$

- Si $v_1 = 0$ entonces la primer fórmula es verdadera,
- la segunda es verdad para 9, pero no lo es para 3,
- en el caso de la tercera es verdad para 0 y 1, finalmente
- la última es verdadera en cada caso.

Estas fórmulas expresan propiedades de los elementos de $\mathbb{Z}$ y dependiendo de los valores con que estas se interpreten son verdaderas o no, en la $\mathcal{L}_{or}$-estructura. A continuación presentamos la definición de Tarski para obtener los valores de verdad de las $\mathcal{L}$-fórmulas sobre una $\mathcal{L}$-estructura.

Definición 2.1.12. *Sea ϕ una $\mathcal{L}$-fórmula con variables libres*

$$\bar{v} = (v_1, ...v_n);$$

tomemos la siguiente sucesión

$$\bar{a} = (a_1, ..., a_n) \in M^n$$

Recursivamente definiremos

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$$

de la siguiente manera:

1. *Si ϕ es de la forma $t = s$ entonces $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si*

$$t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = s^{\mathcal{M}}(\bar{a}).$$

2. *Si ϕ es $R(t_1, ..., t_n)$, entonces $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si*

$$(t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), ..., t_n^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}}.$$

3. *Si ϕ es $\neg\psi$ entonces $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si*

$$\mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a}).$$

4. *Si ϕ es $\psi \wedge \varphi$ entonces $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si*

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}).$$

5. *Si ϕ es $\exists v_j \psi$ entonces $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ si y sólo si existe $b \in M$ de tal manera que*

$$\mathcal{M} \models \psi(a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n).$$

Si $\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$ diremos que $\mathcal{M}$ satisface a ϕ bajo la sucesión $\bar{a}$.

Notese que si ϕ no tiene variables libres entonces ϕ se satisface en $\mathcal{M}$ bajo una sucesión si y sólo si se satisface en $\mathcal{M}$ bajo toda sucesión.

La siguiente definición concentrará varios conceptos referentes a las teorías con el fin de no redundar.

Definición 2.1.13. *Llamaremos $\mathcal{L}$-teoría T a cualquier conjunto de todas los $\mathcal{L}$-enunciados. Diremos que $\mathcal{M}$ es un modelo de T y lo denotaremos como*

$$\mathcal{M} \models T$$

si ocurre que para toda $\phi \in T$

$$\mathcal{M} \models \phi.$$

Representaremos la teoría de la $\mathcal{L}$-estructura $\mathcal{M}$ así:

$$Th(\mathcal{M})$$

es decir, $Th(\mathcal{M})$ es el conjunto de todas los enunciados verdaderas en $\mathcal{M}$.

Por otro lado una teoría T es llamada completa si para toda $\mathcal{L}$-enunciado ϕ ocurre que

$$\phi \in T \qquad o \qquad \neg\phi \in T.$$

Finalmente diremos que una teoría T es satisfacible si y sólo si existe un modelo $\mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{M} \models T.$$

Teorema 2.1.14 (Teorema de compacidad)**.** *Una $\mathcal{L}$-teoría T es satisfacible si y sólo si cada subconjunto finito de T es satisfacible.*

Demostración. Una demostración puede encontrarse en Models and Ultraproducts an introduction (6) página 34, también el el apéndice 4.1 se da una demostración alternativa a la clásica usando ultraproductos.

□

Nota 1. *Para hacer la notación más compacta al usar cuantificadores, si $\bar{a} = a_1, ..., a_n \in M^n$ denotaremos a*

$$\mathcal{M} \models \psi(a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n)$$

de la siguiente manera

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})(j/b).$$

Sabemos que un homomorfismo es una función de un estructura matemática en otra del mismo lenguaje que preserva la estructura. A continuación definiremos homomorfismos para modelos del mismo lenguaje.

Definición 2.1.15. *Sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ $\mathcal{L}$-estructuras con universos M y N respectivamente. Un homomorfismo es una función*

$$\eta : M \to N$$

que preserva la interpretación de los símbolos de $\mathcal{L}$, en otras palabras:

1. *$\eta(f^{\mathcal{M}}(a_1, ..., a_{n_f})) = f^{\mathcal{N}}(\eta(a_1), ...\eta(a_{n_f}))$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y $a_1, ..., a_{n_f} \in M$,*
2. *$(a_1, ..., a_{m_R}) \in R^{\mathcal{M}}$ si y sólo si $(\eta(a_1), ..., \eta(a_{m_R})) \in R^{\mathcal{N}}$ para toda $R \in \mathcal{R}$ y $a_1, ..., a_{m_f} \in M$, y*
3. *$\eta(c^{\mathcal{M}}) = c^{\mathcal{N}}$ para $c \in \mathcal{C}$.*

Un homomorfismo inyectivo es llamado $\mathcal{L} - encaje$ y lo denotaremos como $\eta : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$ mientras que un homomorfismo biyectivo es llamado un $\mathcal{L} - isomorfismo$ y denotaremos por $\cong$ a la relación de equivalencia de ser $\mathcal{L} - isomorfos$, es decir que hay un $\mathcal{L} - isomorfismo$

$$\mathcal{M} \cong \mathcal{N}.$$

Ejemplo 2.1.16. *Sea $\eta : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $\eta(x) = e^x$ entonces η es un encaje de $\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle$ en $\langle \mathbb{R}, \bullet, 1 \rangle$.*

A partir de este punto se omitirá el símbolo $\mathcal{L}$ al hablar de estructuras si es claro a qué lenguaje nos referimos.

Otro concepto importante entre modelos es el de encaje elemental.

Definición 2.1.17. *Diremos que un encaje f de $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$ es un encaje elemental si para cada fórmula $\phi(v_1, ..., v_n)$ y cualesquiera $a_1, ..., a_n$ elementos de N*

$$\mathcal{N} \models \phi(a_1, ..., a_n) \iff \mathcal{M} \models \phi(f(a_1), ..., f(a_n)).$$

y denotaremos como

$$\mathcal{N} \precsim \mathcal{M}$$

cuando exista una f que sea encaje elemental.

Definición 2.1.18. *Dadas $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ estructuras tales que $N \subseteq M$, si la inclusión η encaja $\mathcal{N}$ en $\mathcal{M}$*

$$\eta : N \hookrightarrow M$$

diremos que $\mathcal{N}$ es subestructura de $\mathcal{M}$, lo cual denotaremos como

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}.$$

Existe una forma elemental para el anterior concepto.

Definición 2.1.19. *Diremos que $\mathcal{N}$ es una subestructura elemental de $\mathcal{M}$, si se cumple lo siguiente:*

1. *$\mathcal{N}$ es subestructura de $\mathcal{M}$, y*
2. *Para cada fórmula ϕ del lenguaje con n variables libres $(v_1, ..., v_n)$ y dada una sucesión $a_1, ..., a_n \in N$ se cumple que*

$$\mathcal{N} \models \phi(a_1, ..., a_n) \Longleftrightarrow \mathcal{M} \models \phi(a_1, ..., a_n)$$

y lo denotaremos como

$$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}.$$

En ocasiones también diremos que $\mathcal{M}$ es una extensión elemental de $\mathcal{N}$.

La definición anterior puede tener una formulación alternativa simplemente considerando que si la inclusión

$$\eta : \mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$$

es un encaje elemental entonces

$$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}.$$

Ejemplo 2.1.20. *Sea $\mathcal{L}$ el lenguaje de la aritmética de Peano entonces*

$$\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \bullet, 0, 1, \rangle \text{ es submodelo de } \mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, \bullet, 0, 1, \rangle$$

pero

$$\mathcal{N} \text{ no es subestructura elemental de } \mathcal{Z}$$

ya que la fórmula

$$\neg(\exists v_2(v_2 + 1 = v_1))$$

se satisface en $\mathcal{N}$ cuando $v_1 = 0$ pero no se satisface en $\mathcal{Z}$ bajo ningún valor.

Ahora un pequeño teorema que nos será útil en futuras demostraciones.

Teorema 2.1.21. *Sea $\mathcal{M}$ una subestructura de $\mathcal{N}$ y sea ϕ una fórmula libre de cuantificadores con n variables, sea $\bar{a} \in M^n$ entonces*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}).$$

Demostración. Debemos proceder por inducción sobre las fórmulas que no tienen cuantificadores Si ϕ es de la forma $t = s$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) &\Leftrightarrow t^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = s^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow t^{\mathcal{N}}(\bar{a}) = s^{\mathcal{N}}(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}) \end{aligned}$$

Si ϕ es de la forma $R(t_1, ..., t_n)$ con R un símbolo de relación $n - ario$, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{M}}(\bar{a}), ..., t_n^{\mathcal{M}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{M}} \\ &\Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{N}}(\bar{a}), ..., t_n^{\mathcal{N}}(\bar{a})) \in R^{\mathcal{N}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}) \end{aligned}$$

Hasta ahora tenemos que la afirmación es verdad para las fórmulas atómicas.

Supongamos que el teorema es verdad para alguna fórmula ψ y que ϕ es $\neg\psi$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \neg\psi(\bar{a}) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \not\models \psi(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \neg\psi(\bar{a}) \end{aligned}$$

Ahora supongamos que el teorema es verdadero para ψ y φ. Sea ϕ de la forma $\psi \wedge \varphi$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) &\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{N} \models \varphi(\bar{a}) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a}) \end{aligned}$$

Hemos probado la afirmación para el conjunto de fórmulas sin cuantificadores lo que demuestra el teorema. □

Definición 2.1.22. *Diremos que dos modelos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son elementalmente equivalentes si y sólo si satisfacen los mismos enunciados y lo denotaremos como*

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}.$$

Ahora sigamos con las cadenas de modelos.

Definición 2.1.23. *Tomemos una cadena creciente de modelos*

$$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset ... \subset \mathcal{M}_\beta \subset ... \qquad \beta < \alpha$$

cuya longitud es el ordinal α. La unión de la cadena es el modelo

$$\mathcal{M} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$$

cuyo universo esta dado por

$$M = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$$

cada relación $R^{\mathcal{M}}$ *en* $\mathcal{M}$ *esta dada por la unión de las correspondientes relaciones en* $\mathcal{M}_\beta$

$$R^{\mathcal{M}} = \bigcup_{\beta<\alpha} R^{\mathcal{M}_\beta}$$

similarmente para cada función $f^{\mathcal{M}}$ *en* $\mathcal{M}$ *es la unión de las correspondientes funciones de* $\mathcal{M}_\beta$

$$f^{\mathcal{M}} = \bigcup_{\beta<\alpha} f^{\mathcal{M}_\beta}$$

los modelos $\mathcal{M}_\beta$ *y* $\mathcal{M}$ *tienen las mismas constantes*

$$C^{\mathcal{M}_\beta} = C^{\mathcal{M}}.$$

Lema 2.1.24. *Dada una cadena de modelos*

$$\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset ... \subset \mathcal{M}_\beta \subset ... \qquad \beta < \alpha$$

entonces

$$\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$$

es el único modelo con universo

$$\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$$

en el cual cada $\mathcal{M}_\beta$ *es un submodelo.*

□

No demostraremos este lema en su lugar enunciaremos y demostraremos un resultado análogo para cadenas elementales.

Teorema 2.1.25. *Tomemos una cadena elemental de modelos*

$$\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec ... \prec \mathcal{M}_\beta \prec ... \qquad \beta < \alpha$$

de longitud el ordinal α *entonces*

$$\mathcal{M}_\beta \prec \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$$

para toda $\beta < \alpha$*.*

Demostración. Primero demostraremos que para cualquier $\beta < \alpha$

$$\mathcal{M}_\beta \text{ es submodelo de } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$$

- El hecho de que dada cualquier β con $\beta < \alpha$ se cumple que

  $$M_\beta \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$$

  se sigue de que $\mathcal{M}_\beta$ es uno de los uniendos de $\bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$, y

- que la inclusión encaja a

  $$\mathcal{M}_\beta \text{ en } \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$$

  basta con revisar la definición 2.1.23.

Sea $\mathcal{M} = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$ finalmente debemos probar que para toda ϕ fórmula con n variables libres $v_1, ..., v_n$ para toda $\beta < \alpha$ y para toda $a_1, ..., a_n \in \mathcal{M}_\beta$

$$\mathcal{M}_\beta \models \phi(a_1, ..., a_r) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \phi(a_1, ..., a_n).$$

Procederemos por inducción sobre la creación de fórmulas, deberíamos comenzar con las atómicas pero este caso a quedado cubierto gracias al teorema 2.1.21.

Procedamos con la inducción supongamos verdadero el teorema para las fórmulas ψ y φ ambas con r símbolos lógicos y n variables libres y sea

$$\bar{a} = a_1, ..., a_n \in \mathcal{M}_\beta$$

1. Si $\phi = \psi \wedge \varphi$ supongamos que

   $$\mathcal{M}_\beta \models \phi(\bar{a})$$

   esto pasa si y sólo si

   $$\mathcal{M}_\beta \models \psi(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M}_\beta \models \varphi(\bar{a})$$

   lo que por hipótesis de inducción implica que

   $$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M} \models \varphi(\bar{a})$$

   finalmente

   $$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}).$$

Ahora supongamos que

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$$

por hipótesis de inducción, podemos asegurar que

$$\mathcal{M}_\beta \models \psi(\bar{a}) \text{ y } \mathcal{M}_\beta \models \varphi(\bar{a})$$

lo que finalmente implica

$$\mathcal{M}_\beta \models \phi(\bar{a}),$$

2. si $\phi = \neg\psi$ y suponemos que

$$\mathcal{M}_\beta \models \neg\psi(\bar{a})$$

esto por Tarski ocurre si y sólo si

$$\mathcal{M}_\beta \not\models \psi(\bar{a})$$

entonces para toda γ tal que $\gamma < \beta$

$$\mathcal{M}_\gamma \not\models \psi(\bar{a})$$

ya que $\mathcal{M}_\gamma \prec \mathcal{M}_\beta$, de manera dual para el caso $\beta < \eta < \alpha$

$$\mathcal{M}_\eta \not\models \psi(\bar{a})$$

al ser $\mathcal{M}_\beta \prec \mathcal{M}_\eta$, entonces

$$\mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$$

es decir

$$\mathcal{M} \models \neg\psi(\bar{a}).$$

Por otro lado si suponemos que

$$\mathcal{M} \models \neg\psi(\bar{a})$$

lo que ocurre si y sólo si

$$\mathcal{M} \not\models \psi(\bar{a})$$

y por la hipótesis del teorema

$$\mathcal{M}_\beta \not\models \psi(\bar{a})$$

si sólo si

$$\mathcal{M}_\beta \models \neg\psi(\bar{a}).$$

3. Para terminar, si $\phi = \exists v_j \psi$ supongamos que

$$\mathcal{M}_\beta \models \exists v_j \psi$$

lo que ocurre si existe $b \in M_\beta$ tal que

$$\mathcal{M}_\beta \models \psi(\bar{a})(j/b)$$

por lo tanto existe $b \in \cup_{\beta<\alpha} M_\beta$ tal que

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})(j/b)$$

lo que equivale a decir que

$$\mathcal{M} \models \exists v_j \psi(\bar{a}).$$

Resta suponer que

$$\mathcal{M} \models \exists v_j \psi(\bar{a})$$

con $\bar{a} = a_1, ..., a_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ entonces existe

$$b \in \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$$

para la cual

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})(j/b)$$

entonces existe $\xi < \alpha$ tal que

$$\bar{a}(j/b) = a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n \in M_\xi$$

ahora

$$\mathcal{M}_\xi \models \exists v_j \psi(\bar{a})$$

si suponemos que $\beta \leq \xi$ como por hipótesis $\mathcal{M}_\beta \prec \mathcal{M}_\xi$ finalmente

$$\mathcal{M}_\beta \models \exists v_j \psi(\bar{a})$$

análogamente si $\xi \leq \beta$.

$\square$

2.2. Filtros y Ultrafiltros

La noción de filtro pretende aplicarse a familias de subconjuntos "grandes" sobre un conjunto dado.

Definición 2.2.1. *Sea X un conjunto no vacío. Un $filtro$ en X es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos que satisfacen:*

1. $X \in \mathcal{F}$,
2. *si* $A, B \in \mathcal{F}$ *entonces* $A \cap B \in \mathcal{F}$, *y*
3. *si* $A \subseteq B$ *y* $A \in \mathcal{F}$ *entonces* $B \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 2.2.2. *Algunos ejemplos de filtros sobre un conjunto X son los siguientes:*

- $\mathcal{U}$ *llamado filtro trivial*
$$\mathcal{U} = \{X\},$$
- *el filtro impropio* $\mathcal{U}$ *será*
$$\mathcal{U} = \mathcal{P}(X)$$
donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X y
- *el filtro de Fréchet será aquel dado por*
$$\mathcal{U} = \{A \subseteq X : |X \setminus A| < \omega\}.$$

Diremos que un filtro es propio si no se cumple la segunda igualdad del ejemplo anterior.

Definición 2.2.3. *Sean E un subconjunto de $\mathcal{P}(I)$ y*
$$\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : E \subset \mathcal{U} \text{ y } \mathcal{U} \text{ es un filtro sobre } I\}$$
llamaremos a $\mathcal{F}$ el filtro generado por E a la intersección
$$\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{B}$$

Veamos que lo anteriormente definido es en efecto un filtro.

Proposición 2.2.4. *Sean E un subconjunto de $\mathcal{P}(I)$ y $\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : E \subset \mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es un filtro sobre $I\}$ entonces*
$$\mathcal{F} = \bigcap \mathcal{B}$$
es un filtro (posiblemente impropio).

Demostración.

- Veamos que I es elemento de $\mathcal{F}$.

  Como cada elemento $\mathcal{U}$ de $\mathcal{B}$ es un filtro se cumple que

  $$I \in \mathcal{U}$$

  por lo tanto

  $$I \in \mathcal{F}.$$

- Sean $A, B \in \mathcal{F}$ entonces para cada filtro $\mathcal{U}$ sobre I que contiene a E

  $$A, B \in \mathcal{U}$$

  entonces

  $$A \cap B \in \mathcal{U}$$

  para cada filtro en $\mathcal{B}$ por lo que

  $$A \cap B \in \mathcal{F}.$$

- Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \subset B$, de nuevo esto quiere decir que para cada filtro $\mathcal{U}$ sobre I que contiene a E

  $$A \in \mathcal{U} \text{ y } A \subset B$$

  entonces en cada $\mathcal{U}$ elemento de $\mathcal{B}$ ocurre

  $$B \in \mathcal{U}$$

  es decir

  $$B \in \mathcal{F}.$$

□

Podemos inducir un orden parcial para los filtros de la siguiente manera.

Definición 2.2.5. *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{U}$ filtros en X diremos que $\mathcal{F}$ es mayor que $\mathcal{U}$ si y sólo si*

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{U}$$

también diremos que $\mathcal{F}$ es más fino que $\mathcal{U}$.

El siguiente teorema es una caracterización de la definición de filtro generado por un conjunto $E \subset I$.

Teorema 2.2.6. *Sean E una familia no vacía de subconjuntos de I y $\mathcal{F}$ el filtro generado por E, entonces $\mathcal{F}$ es el conjunto de todos los S subconjuntos de I tales que para alguna sucesión finita $A_1, ..., A_n \in E$ ocurre que:*

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq S.$$

Demostración. Sea D el conjunto de todos los S subconjuntos de I tales que para alguna $A_1, ..., A_n \in E$ ocurre que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq S$$

continuaremos la demostración mostrando que

$$D = \mathcal{F}$$

primero probaremos que D es un filtro. Tenemos que

$$I \in D$$

pues cualquier $A_1, ..., A_n \in E$ cumple con que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq I$$

sean $B, B' \in D$, tomemos dos sucesiones de elementos de E

$$A_1, .., A_n \in E$$

y

$$A'_1, ..., A'_m \in E$$

tales que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq B$$

y

$$A'_1 \cap ... \cap A'_m \subseteq B'$$

resulta claro que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \cap A'_1 \cap ... \cap A'_m \subset B \cap B'$$

por lo cual

$$B \cap B' \in D.$$

Es claro que si $B \subset C \subset I$ entonces

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq C$$

entonces C es elemento de D.

Hasta ahora tenemos que D es un filtro sobre I para el cual $E \subset D$. Como $\mathcal{F}$ es el filtro generado por E entonces

$$\mathcal{F} \subset D$$

.

Sea $\mathcal{U}$ un filtro sobre I que contiene a E entonces ocurre que

- $I \in \mathcal{U}$ por ser este último un filtro,
- para cualquier $A_1, ..., A_n \in E$ tenemos que

  $$A_1 \cap ... \cap A_n \in \mathcal{U}$$

  ya que los A_n son elementos de E, y finalmente
- sea S un subconjunto de I tal que la sucesión $A_1, ..., A_n \in E$ cumple

  $$A_1 \cap ... \cap A_n \subset S$$

entonces

$$S \in \mathcal{U}$$

pero $S \in D$ entonces

$$D \subset \mathcal{U}$$

por lo que podemos afirmar

$$D \subset \mathcal{F};$$

por lo tanto

$$\mathcal{F} = D.$$

□

Definición 2.2.7. *Sea $\mathcal{E}$ una familia de conjuntos no vacíos. Diremos que $\mathcal{E}$ cumple la propiedad de la intersección finita si para toda familia finita de subconjuntos*

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$$

se cumple que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset.$$

Teorema 2.2.8. *Si $\mathcal{E}$ es una familia de conjuntos que cumplen la propiedad de la intersección finita entonces $\mathcal{F}$ el filtro generado por $\mathcal{E}$ es propio.*

Demostración. Nos basta con probar que

$$\emptyset \notin \mathcal{F}$$

procedamos por contradicción, suponiendo que

$$\emptyset \in \mathcal{F}$$

lo que quiere decir que existe una sucesión finita

$$A_1, ..., A_n \in \mathcal{E}$$

tales que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \subseteq \emptyset$$

pero como $\mathcal{E}$ tiene la propiedad de la intersección finita podemos asegurar que

$$A_1 \cap ... \cap A_n \neq \emptyset$$

lo que es una contradicción. □

Ahora un teorema sobre cadenas de filtros.

Teorema 2.2.9. *Sea C la cadena:*

$$C_1 \subset C_2 \subset ...C_\beta \subset ... \qquad \beta < \alpha$$

una cadena de filtros propios sobre I entonces

$$\bigcup C$$

es un filtro propio.

Demostración. Veamos que en efecto $\bigcup C$ es un filtro. Probemos primero que $I \in \bigcup C$, lo cual es verdad ya que para cada

$$C_i \in C$$

se cumple que

$$I \in C_i$$

por ser estos filtros.

Sean $A, B \in \bigcup C$ supongamos que existen C_i, C_j elementos de la cadena C tales que

$$A \in C_i \text{ y } B \in C_j$$

podemos suponer adicionalmente que

$$C_i \subset C_j$$

por ser C una cadena, entonces podemos asegurar que

$$A \cap B \in C_j$$

por lo tanto

$$A \cap B \in \bigcup C.$$

Sea $A \in \bigcup C$ tal que $A \subset B$, entonces tenemos que existe algún C_i en la cadena tal que

$$A \in C_i$$

entonces

$$B \in C_i$$

por lo tanto

$$B \in \bigcup C.$$

Finalmente veamos que $\bigcup C$ es un filtro propio, procedamos por contradicción y supongamos que

$$\emptyset \in \bigcup C,$$

entonces existe algún C_i elemento de mi cadena tal que

$$\emptyset \in C_i;$$

lo que es una contradicción ya que cada elemento de la cadena es propio. □

Definición 2.2.10. *Diremos que un filtro propio $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro si no existe otro filtro propio $\mathcal{U}$ estrictamente más fino que $\mathcal{F}$. Es decir, que $\mathcal{F}$ es maximal respecto de la contención de filtros.*

Teorema 2.2.11. *Todo filtro propio $\mathcal{F}$ esta contenido en algún ultrafiltro.*

Demostración. Sea F el conjunto de todos los filtros propios más finos que $\mathcal{F}$ y consideremos para esta clase el orden parcial de la contención definido en 2.2.5.

Tomemos C una cadena no vacía en F por el teorema 2.2.9

$$\bigcup C$$

es un filtro propio que acota superiormente a la cadena C. Ahora podemos aplicar el lema de Zorn, entonces F tiene un elemento maximal.

□

Definición 2.2.12. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I diremos que $\mathcal{U}$ es principal si existe $x \in I$ tal que para todo $U \in \mathcal{U}$ se cumple que $x \in U$, es decir*

$$\mathcal{U} = \{U \subseteq I : x \in U\}.$$

A menos de que se especifique lo contrario trabajaremos con ultrafiltros que no sean principales y a su vez que sean propios.

Una caracterización útil para los ultrafiltros nos la brinda el siguiente lema:

Lema 2.2.13. *Sea $\mathcal{F}$ un filtro sobre X. $\mathcal{F}$ será un ultrafiltro si y sólo si para todo $A \subseteq X$ se cumple $A \in \mathcal{F}$ o $A \setminus X \in \mathcal{F}$ pero no ambas.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro y sea $A \subset X$. Si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que

$$F \cap A = \emptyset$$

entonces

$$F \subseteq X \setminus A$$

por lo tanto

$$X \setminus A \in \mathcal{F}.$$

Si ahora suponemos que para todo $F \in \mathcal{F}$

$$F \cap A \neq \emptyset$$

tomemos a $\mathcal{U}$ el filtro generado por $\mathcal{F} \cup \{A\}$ es decir

$$\mathcal{U} = \bigcap \{\mathcal{V} : \mathcal{F} \cup \{A\} \subseteq \mathcal{V} \text{ y } \mathcal{V} \text{ es un filtro sobre } X\}.$$

Entonces $\mathcal{U}$ es un filtro más fino que $\mathcal{F}$ que contiene a A, pero $\mathcal{U}$ no es estrictamente más fino que $\mathcal{F}$ ya que este es un ultrafiltro por hipótesis entonces

$$\mathcal{U} = \mathcal{F}$$

y finalmente

$$A \in \mathcal{F}.$$

Por otro lado si procedemos suponiendo que $\mathcal{F}$ es un filtro y que para cualquier $E \subset X$ se cumple que

$$E \in \mathcal{F} \text{ o } X \setminus E \in \mathcal{F}$$

tomemos $\mathcal{U}$ un filtro estrictamente más fino que $\mathcal{F}$ entonces podemos afirmar que existe $A \subseteq X$ tal que

$$A \in \mathcal{U} \text{ y } A \notin \mathcal{F}$$

por hipótesis $X \setminus A \in \mathcal{F}$ y al ser $\mathcal{U}$ más fino que $\mathcal{F}$ entonces

$$X \setminus A \in \mathcal{U}$$

pero es imposible que A y $X \setminus A$ sean ambos elementos de $\mathcal{U}$ por lo que $\mathcal{F}$ debe ser maximal. $\square$

La siguiente proposición nos brinda otra caracterización para ultrafiltros.

Proposición 2.2.14. *$\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal si y sólo si incluye al filtro de Fréchet.*

Demostración. Empecemos por suponer que $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no principal sobre I. Debemos probar que para todo $A \subset I$ finito, ocurre que

$$I \setminus A \in \mathcal{U}$$

Procedamos por inducción sobre la cardinalidad de A

- Si $|A| = 1$, es decir $A = \{a\}$, si suponemos que

  $$\{a\} \in \mathcal{U}$$

  entonces cualquier subconjunto U de I que contenga a a será elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$ es decir

  $$\{U \subseteq I : a \in U\} \subseteq \mathcal{U}$$

  por otro lado como para cualquier elemento V de $\mathcal{U}$ es verdad que $V \cap \{a\} \neq \emptyset$ podemos concluir que

  $$\mathcal{U} \subseteq \{U \subseteq I : a \in U\}$$

  hemos obtenido la igualdad $\mathcal{U} = \{U \subseteq I : a \in U\}$ de la definición 2.2.12 llegamos a una contradicción.

- Para la hipótesis de inducción supongamos que para todo $A \subset I$ tal que $|A| = m$ con $m \in \mathbb{N}$ cumple con

  $$I \setminus A \in \mathcal{U}.$$

- Sea $B \subset I$ tal que $|B| = m+1$, podemos replantear al conjunto B de la siguiente manera:
$$B = A \cup \{a_0\}$$
nos resta por probar que $I \setminus (A \cup \{a_0\}) \in \mathcal{U}$, usando leyes de DeMorgan
$$I \setminus (A \cup \{a_0\}) = (I \setminus A) \cap (I \setminus \{a_0\})$$
por la hipótesis de inducción $I \setminus A \in \mathcal{U}$ y de la base de inducción se sigue que $I \setminus \{a_0\} \in \mathcal{U}$ al ser $\mathcal{U}$ ultrafiltro podemos asegurar que
$$(I \setminus A) \cap (I \setminus \{a_0\}) \in \mathcal{U}.$$

Para la implicación restante supongamos que $\mathcal{U}$ contiene al filtro Fréchet y a su vez existe $x \in I$ tal que
$$\mathcal{U} = \{A \subseteq I : x \in A\}.$$
Es claro que $I \setminus \{x\}$ es elemento del filtro Fréchet por lo tanto
$$I \setminus \{x\} \in \mathcal{U}$$
lo que es una contradicción. □

El orden dado por la contención que funciona en los filtros no es útil hablando de ultrafiltros ya que cada uno es un elemento maximal, así que debemos definir un orden para ultrafiltros. Pero antes debemos definir para una función $f : U \to V$ y un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre U entonces
$$f(\mathcal{U}) = \{A \subseteq V : \exists B \in \mathcal{U} \text{ tal que } f(B) \subseteq A\}$$
será un ultrafiltro en V [1].

Definición 2.2.15. *Dados $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros sobre U y V respectivamente, diremos que $\mathcal{V}$ es menor que $\mathcal{U}$ en el orden de Rudin-Keisler, si y sólo si existe una función $f : U \to V$ tal que*
$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$$
y lo denotaremos como:
$$\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}.$$

[1] La demostración de este hecho se reserva para el siguiente capítulo en el lema 3.1.2

2.3. Ultraproductos

En esta sección introduciremos los ultraproductos y realizaremos su construcción, para la cual como de costumbre trabajaremos sobre un lenguaje $\mathcal{L}$. Necesitamos un conjunto arbitrario de índices I tomemos un ultrafiltro $\mathcal{F}$ sobre dicho conjunto.

Para cada $i \in I$ sea

$$\mathcal{M}_i = \langle M_i, f_i^{\mathcal{M}}, R_i^{\mathcal{M}}, C_i^{\mathcal{M}} \rangle$$

una estructura del lenguaje $\mathcal{L}$. Sea

$$\mathbf{M} = \prod_{i \in I} M_i$$

el producto cartesiano de los universos de las estructuras M_i, cuando no exista posibilidad de confusión escribiremos sólo $\prod M_i$. Recordemos que

$$\prod_{i \in I} M_i = \{f : I \to \bigcup_{i \in I} M_i : \text{ para cada } i \in I, f(i) \in M_i\}$$

Sea F una colección de subconjuntos de I definimos la relación $\sim_F$ en $\mathbf{M}$ como

$$f \sim_F g \text{ si y sólo si } \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F.$$

Lema 2.3.1. *Si $\mathcal{F}$ es un filtro en I, entonces $\sim_{\mathcal{F}}$ es una relación de equivalencia en $\prod M_i$.*

Demostración. Debemos probar que $\sim_{\mathcal{F}}$ cumple con al reflexividad, la simetría y la transitividad.

1. Sea $f \in \prod M_i$ entonces
$$\{i \in I : f(i) = f(i)\} = I$$
como $\mathcal{F}$ es un filtro tenemos que
$$I \in \mathcal{F}$$
es decir
$$f \sim_{\mathcal{F}} f,$$

2. supongamos que dadas $f, g \in \prod M_i$ tenemos $f \sim_{\mathcal{F}} g$ entonces
$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$$

que es lo mismo que

$$\{i \in I : g(i) = f(i)\} \in \mathcal{F}$$

esto significa que

$$g \sim_{\mathcal{F}} f, \text{ finalmente}$$

3. supongamos $f \sim_F g$ y $g \sim_F h$ esto significa

$$X = \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F$$

$$Y = \{i \in I : g(i) = h(i)\} \in F$$

Como F es un filtro tenemos que $X \cap Y \in F$ llamemos $Z = X \cap Y$ se cumple que

$$Z \subseteq \{i \in I : f(i) = h(i)\} \in F$$

lo que significa que

$$f \sim_F h$$

por lo tanto $\sim_F$ es transitiva.

□

Denotaremos por $[f]_{\mathcal{F}}$ a la clase de equivalencia de f modulo la relación $\sim_{\mathcal{F}}$ es decir

$$[f]_{\mathcal{F}} = \{g : \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}\}.$$

Cuando no exista riesgo de confusión se omitirá el subíndice $\mathcal{F}$.

En el caso de que $\sim_{\mathcal{F}}$ sea una relación de equivalencia sabemos que esta define una partición de $\prod M_i$ a continuación definamos el conjunto cociente obtenido al aplicar dicha relación.

Definición 2.3.2. *Llamaremos el producto reducido de la familia*

$$\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$$

sobre el ultrafiltro $\mathcal{F}$, al conjunto

$$\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F} = \{[f]_{\mathcal{F}} : f \in \prod \mathcal{M}_i\}$$

Ahora dotaremos al producto reducido con estructura de modelo a esto es a lo que llamaremos ultraproducto.

Definición 2.3.3. *Dadas una familia de modelos* $\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$ *donde para cada* $i \in I$

$$\mathcal{M}_i = \langle M_i, F^{\mathcal{M}_i}, R^{\mathcal{M}_i}, C^{\mathcal{M}_i} \rangle$$

y $\mathcal{U}$ *ultrafiltro sobre* I *el ultraproducto* $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ *esta formado por:*

1. *Su universo:*

$$\prod M_i/\mathcal{U}$$

   el producto reducido de $\prod M_i$ *sobre* $\mathcal{U}$

2. *Sea* R *una letra relacional* n*-aria la interpretación en* $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ *de* R *es la relación* $R^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i}$ *definida así:*

$$([f_1], ..., [f_n]) \in R^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i} \Leftrightarrow \{i \in I : (f_1(i), ...f_n(i)) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{U}.$$

3. *Sea* F *una función* n*-aria del lenguaje, entonces su interpretación sobre* $\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$ *es* $F^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i}$ *y esta dada por:*

$$F^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i}([f_1], ..., [f_n]) = [g]$$

   si y sólo si

$$\{i \in I : F^{\mathcal{M}_i}(f_1(i), ..., f_n(i)) = g(i)\} \in \mathcal{U}$$

   Siendo $F^{\mathcal{M}_i}$ *la interpretación de* F *en* $\mathcal{M}_i$.

4. *Sea* C *una constante es interpretada como* $C^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i} \in \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$, *es decir que es una clase de equivalencia entonces*

$$C^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i} = \{i \in I : g(i) = C^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{U}$$

   con $C^{\mathcal{M}_i}$ *siendo la interpretación de* C *en* $\mathcal{M}_i$ *y* $g : I \to \bigcup \mathcal{M}_i$.

Es fácil verificar que estas definiciones no dependen de representantes.

Definición 2.3.4. *Sea* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro sobre* I, *si todos los modelos del conjunto*

$$\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$$

son iguales entre si llamaremos a

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i$$

la ultrapotencia de $\mathcal{M}_i$.

2.4. El teorema de Łoš

Esta sección esta dedicada al teorema fundamental de los ultraproductos que enlaza a estos como estructuras lógicas con la definición de Tarski.

Es necesario dejar en claro algunas cosas antes de proseguir. Dados

$$\{\mathcal{M}_i : i \in I\}$$

un conjunto de estructuras del mismo lenguaje y $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, si tomamos

$$s = \langle s_1, ..., s_n, ...\rangle$$

una sucesión de elementos de $\prod M_i$ es decir

$$s \in (\prod M_i)^{\omega}$$

entonces una sucesión con elementos en $\prod M_i/\mathcal{F}$ será de la forma

$$[s]_{\mathcal{F}} = \langle [s_1]_{\mathcal{F}}, ..., [s_n]_{\mathcal{F}}, ...\rangle$$

en otras palabras

$$[s]_{\mathcal{F}} \in (\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i)^{\omega}$$

Con $s(i) = \langle s_1(i), ..., s_n(i), ...\rangle$ denotaremos una sucesión de elementos en $\mathcal{M}_i$.

Recordemos que usamos $s(n/b)$ para denotar que el n-esimo término de la sucesión s es cambiado por b es decir

$$s(n/b) = \langle s_1, ...s_{n-1}, b, s_{n+1}, ...\rangle$$

A continuación un lema sobre el comportamiento de los términos en los ultraproductos.

Lema 2.4.1. *Sean $\mathcal{F}$ un ultrafiltro sobre I, t un término construido usando las variables $\bar{v} = v_1, ..., v_m$ y $\bar{a} = a_1, ..., a_m \in \prod M_i$ entonces*

$$t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([a_1], ..., [a_n]) = [t^{\mathcal{M}_i}(a_1(i), ..., a_n(i))|i \in I].$$

Demostración. Debemos proceder por inducción sobre la creación de términos

- si t es una constante c de $\mathcal{L}$ entonces
$$t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([a_1], ..., [a_n]) = c^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}$$
por la definición 2.3.3 sabemos que
$$c^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i} = \{i \in I : g(i) = c^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{F}$$
la parte derecha de la anterior igualdad se puede denotar como:
$$[c^{\mathcal{M}_i}]$$
entonces
$$c^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i} = [c^{\mathcal{M}_i}] \tag{2.1}$$
por otro lado
$$[t^{\mathcal{M}_i}(a_1(i), ..., a_n(i))] = [c^{\mathcal{M}_i}] \tag{2.2}$$
de las igualdades (2.1) y (2.2) obtenemos lo que deseábamos probar, prosigamos
- si t es $j-$esima variable entonces
$$t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([a_1], ..., [a_n]) = [a_j] \tag{2.3}$$
notemos que
$$[t^{\mathcal{M}_i}(a_1(i), ..., a_n(i))] = [a_j] \tag{2.4}$$
de las ecuaciones (2.3) y (2.4) obtenemos lo deseado, para terminar
- si $t = f(t_1, ..., t_m)$ siendo $t_1, ..., t_m$ términos tales que cumplen la hipótesis del lema y f una letra funcional m-aria entonces
$$t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([a_1], ..., [a_n]) = f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}(t_1^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([\bar{a}]), ..., t_m^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([\bar{a}]))$$
por la hipótesis del teorema se cumple que para toda j tal que $1 \leq j \leq m$ tenemos
$$t_j^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([\bar{a}]) = [t_j^{\mathcal{M}_i}(\bar{a})]$$
entonces podemos escribir
$$f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}(t_1^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}(\bar{a}), ..., t_m^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}(\bar{a})) = f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([t_1^{\mathcal{M}_i}(\bar{a})], ..., [t_m^{\mathcal{M}_i}(\bar{a})])$$
de nuevo usando la definición 2.3.3
$$f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([t_1^{\mathcal{M}_i}(\bar{a})], ..., [t_m^{\mathcal{M}_i}(\bar{a})]) = [f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}), ..., t_m^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}))]$$
por otro lado
$$[t^{\mathcal{M}_i}(\bar{a})] = [f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}), ..., t_m^{\mathcal{M}_i}(\bar{a}))]$$

lo que finalmente demuestra el lema. $\square$

Ahora tenemos todo el material necesario para enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección.

El teorema de Łoš 1. *Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en I, para cualquier fórmula ϕ en un lenguaje $\mathcal{L}$ y cualquier sucesión*

$$[f]_{\mathcal{F}} = [f_1]_{\mathcal{F}}, [f_2]_{\mathcal{F}}, ..., [f_n]_{\mathcal{F}}, ... \in (\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i)^{\omega}$$

ocurre que

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \models \phi([f]_{\mathcal{F}}) \iff \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \phi(f(i))\} \in \mathcal{F}.$$

Demostración. La demostración se hace por inducción sobre la formación de fórmulas.

Primero supongamos que ϕ es una fórmula atómica de la forma $t = s$ con t y s términos, si

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \models t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([f]_{\mathcal{F}}) = s^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}([f]_{\mathcal{F}}),$$

por el lema 2.4.1 tenemos que

$$[t^{\mathcal{M}_i}(f)] = [s^{\mathcal{M}_i}(f)]$$

o lo que es lo mismo

$$t^{\mathcal{M}_i}(f) \sim_{\mathcal{F}} s^{\mathcal{M}_i}(f)$$

cosa que ocurre si y sólo si

$$\{i \in I : t^{\mathcal{M}_i}(f(i)) = s^{\mathcal{M}_i}(f(i))\} \in \mathcal{F};$$

finalmente tenemos que lo anterior es verdad si y sólo si

$$\{i \in I : \mathcal{M}_i \models t^{\mathcal{M}_i}(f(i)) = s^{\mathcal{M}_i}(f(i))\} \in \mathcal{F}.$$

Si ϕ es de la forma $R(v_1, ..., v_n)$, una letra de relación $n-$aria, supongamos que

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \models ([f_1], ..., [f_n]) \in R^{\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i}.$$

Usando la definición 2.3.3, esto sucede si y sólo si

$$\{i \in I : (f_1(i), ..., f_n(i)) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{F}.$$

Esto es posible si y sólo si

$$\{i \in I : \mathcal{M}_i \models (f_1(i), ..., f_n(i)) \in R^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{F}.$$

Ahora tenemos que el teorema es verdad para las fórmulas atómicas esto forma nuestra base de inducción.

Supongamos que el resultado es cierto para las fórmulas φ y ψ con una cantidad r de símbolos lógicos, nos resta por considerar tres casos:

1. ϕ es de la forma $\varphi \wedge \psi$ Sean

$$D_\varphi = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi(f(i))\}$$

$$D_\psi = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(f(i))\}$$

entonces

$$D_\varphi \cap D_\psi = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi(f(i)) \wedge \psi(f(i))\}$$

Luego

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \models \varphi([f]_{\mathcal{F}}) \wedge \psi([f]_{\mathcal{F}}) &\iff \Pi_{\mathcal{F}}\mathcal{M}_i \models \varphi([f]_{\mathcal{F}}) \text{ y } \Pi_{\mathcal{F}}\mathcal{M}_i \models \psi([f]_{\mathcal{F}}) \\ &\iff D_\varphi \text{ y } D_\psi \text{ están en } \mathcal{F}, \text{ por hipótesis de inducción} \\ &\iff D_\varphi \cap D_\psi \in \mathcal{F}, \text{ porque } \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro} \end{aligned}$$

El teorema es verdadero para $\varphi \wedge \psi$.

2. ϕ es de la forma $\neg\psi$

$$\begin{aligned} \textstyle\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \vDash \phi([f]_{\mathcal{F}}) &\iff \Pi_{\mathcal{F}}\mathcal{M}_i \nvDash \psi([f]_{\mathcal{F}}) \\ &\iff \{i \in \omega : \mathcal{M}_i \vDash \psi(f(i))\} \notin \mathcal{F}, \text{ por hipótesis de inducción} \\ &\iff I \setminus \{i \in \omega : \mathcal{M}_i \vDash \psi(f(i))\} \in \mathcal{F} \text{ porque } \mathcal{F} \text{ es un ultrafiltro} \\ &\iff \{i \in I : \mathcal{M}_i \vDash \neg\psi(f(i))\} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

Cabe destacar que esta es la única parte de la demostración en la que usamos que $\mathcal{F}$ es ultrafiltro.

3. ϕ es de la forma $(\exists v_n)\psi$. Sea

$$D = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models (\exists v_n)\psi(f(i))\}$$

Ahora tenemos que probar que

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \vDash (\exists v_n)\psi([f]_{\mathcal{F}}) \iff D \in \mathcal{F}$$

Suponemos

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \vDash (\exists v_n)\psi([f]_{\mathcal{F}})$$

Entonces existe algún $b \in \prod M_i$ tal que

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \models \psi([f(n/b)]_{\mathcal{F}})$$

Sea $E = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(f(n/b)(i))\}$, por hipótesis de inducción $E \in \mathcal{F}$. Luego

$$f(n/b)(i) = f(i)(n/b(i))$$

por lo tanto $E \subseteq D$ y dado que $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro

$$D \in \mathcal{F}.$$

Para el regreso hay que suponer que $D \in \mathcal{F}$ y como para toda $i \in D$

$$\mathcal{M}_i \models (\exists v_n)\psi(f(i))$$

por lo tanto existe algún $b_i \in M_i$ tal que

$$\mathcal{M}_i \models \psi(f(i)(n/b_i))$$

por el axioma de elección existe $c \in \prod M_i$ tal que $c(i) = b_i$ para cada $i \in D$, y es un elemento arbitrario de M_i en otro caso. Entonces

$$D \subseteq \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(f(n/c)(i))\}.$$

Por lo tanto

$$\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi(f(n/c)(i))\} \in \mathcal{F},$$

luego por la hipótesis de inducción

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathcal{M}_i \models (\exists v_n)\psi([f]_{\mathcal{F}}).$$

Finalmente esto prueba el teorema.

$\square$

2.5. Test de Tarski-Vaught

El Test de Tarski-Vaught nos da condiciones necesarias y suficientes para que, al tomar una subestructura $\mathcal{M}$ de una estructura $\mathcal{N}$ podamos asegurar si se trata de una subestructura elemental.

Teorema 2.5.1. *Sea $\mathcal{M}$ una subestructura de $\mathcal{N}$. Diremos que $\mathcal{M}$ es subestructura elemental de $\mathcal{N}$ si y sólo si para cualquier fórmula ϕ con n variables libres y cualquier $\bar{a} = a_1, ..., a_n \in M^n$, si*

$$\mathcal{N} \models \exists v_j \phi(\bar{a})$$

entonces existe $c \in \mathcal{M}$ tal que

$$\mathcal{N} \models \phi(\bar{a})(j/c).$$

Demostración. Si $\mathcal{M}$ es subestructura elemental de $\mathcal{N}$ entonces la afirmación se cumple claramente.

Para probar el inverso debemos probar que para toda $\bar{a} \in M^n$ y cualquier fórmula $\psi(v_1, ..., v_n)$

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \psi(\bar{a})$$

Procederemos por inducción sobre la creación de fórmulas.

En el teorema 2.1.21 se mostró que si $\phi(\bar{v})$ es una fórmula sin cuantificadores entonces

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \phi(\bar{a})$$

este resultado nos asegura que las fórmulas atómicas cumplen el teorema esto fija nuestra base de inducción, para terminar la demostración deberíamos suponer que el teorema se cumple para fórmulas con una cantidad menor a r símbolos lógicos basta probar el caso en que $\phi = \exists v_j \psi$ ya que los casos para los cuales se usan los demás conectivos lógicos quedan también amparados en el teorema 2.1.21.

Sean $\phi = \exists v_j \psi$ y $\bar{a} \in M^n$, supongamos

$$\mathcal{M} \models \exists v_j \psi(\bar{a})$$

entonces existe una $b \in M$ que cumple con que

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})(j/b)$$

por la hipótesis de inducción

$$\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})(j/b)$$

por lo tanto

$$\mathcal{N} \models \exists v_j \psi(\bar{a}).$$

Por el otro lado si suponemos que

$$\mathcal{N} \models \exists v_j \psi(\bar{a})$$

entonces, por la hipótesis del teorema existe $c \in M$ tal que

$$\mathcal{N} \models \psi(\bar{a})(j/c)$$

por hipótesis de inducción

$$\mathcal{M} \models \psi(\bar{a})(j/c)$$

finalmente

$$\mathcal{M} \models \exists v_j \psi(\bar{a}).$$

□

En la definición 2.1.18 presentamos la relación de ser subestructura empleando la inclusión como un encaje, con esto en mente presentamos el siguiente corolario.

Corolario 2.5.2. *Sea $f : M \to N$ un encaje de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$, si además para cada fórmula ϕ con n variables libres y cada $\bar{a} = a_1, ..., a_n \in M^n$ si*

$$\mathcal{N} \models \exists v_j \phi(f(\bar{a}))$$

entonces existe $b \in M$ tal que

$$\mathcal{N} \models \phi(f(\bar{a}))(v_j/f(b)).$$

entonces $\mathcal{M}$ está encajada elementalmente en $\mathcal{N}$.

Capítulo 3

Teoría general de modelos en ultrapotencias sobre ω

3.1. Encajes y encajes elementales

A partir de ahora trabajaremos sobre modelos de la teoría de los números naturales y nuestro lenguaje $\mathcal{L}$ a menos de que se especifique otro caso, será el saturado; es decir el lenguaje que incluye un símbolo para cada operación, relación y elementos distinguidos del modelo estándar de la aritmética.

Recordemos cómo trabaja la relación $\sim_{\mathcal{U}}$ para $\mathcal{U}$ ultrafiltro en $\mathbb{N}$ y $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f \sim_{\mathcal{U}} g \iff \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$$

como $\sim_{\mathcal{U}}$ es una relación de equivalencia entonces induce clases de equivalencia para las funciones

$$[f]_{\mathcal{U}} = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : f(n) = h(n)\} \in \mathcal{U}\}.$$

Denotaremos a la *ultrapotencia* de los naturales sobre un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de la siguiente manera:

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}.$$

Denotaremos al *universo de la ultrapotencia* de la siguiente así:

$$\prod \mathbb{N}/\mathcal{U} = \{[f]_{\mathcal{U}} : f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}.$$

Cuando no exista riesgo de confusión nos referiremos a las clases en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ como $[f]$ en lugar de $[f]_{\mathcal{U}}$.

Nota 2. *Para hacer la notación más llevadera dada una letra funcional del lenguaje F nos referiremos a su interpretación sobre $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ como*

$$F^{\mathcal{U}}$$

en lugar de $F^{\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}}$.

De manera similar para una letra predicativa R, su interpretación en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ se denotará:

$$R^{\mathcal{U}}.$$

Si debemos interpretar sobre alguna ultrapotencia de la forma $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$, lo haremos de manera similar, para F y R su interpretación se denotará así:

$$F^{f(\mathcal{U})} \qquad R^{f(\mathcal{U})}.$$

Ahora estableceremos cómo se interpretará el lenguaje en las ultrapotencias

Definición 3.1.1.

- *Sea R una letra relacional n-aria su interpretación en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ es:*

$$([f_1], ..., [f_n]) \in R^{\mathcal{U}} \Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} : (f_1(i), ...f_n(i)) \in R^{\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}.$$

- *Sea F una función n-aria del lenguaje, entonces su interpretación sobre $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ es:*

$$F^{\mathcal{U}}([f_1], ..., [f_n]) = [G]$$

si y sólo si

$$\{i \in \mathbb{N} : F^{\mathbb{N}}(f_1(i), ..., f_n(i)) = G(i)\} \in \mathcal{U}.$$

- *Sea C una constante es interpretada como $C^{\mathcal{U}} \in \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$, es decir que es una clase de equivalencia entonces*

$$C^{\mathcal{U}} = \{i \in \mathbb{N} : g(i) = C^{\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$$

con $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Lema 3.1.2. *Cada clase de una función $[f]_{\mathcal{U}}$ tiene asociado un ultrafiltro*

$$f(\mathcal{U}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : \exists V \in \mathcal{U} \text{ tal que } f(V) \subseteq A\}.$$

Demostración. Probaremos que $f(\mathcal{U})$ es independiente de representantes, sea $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f \sim_{\mathcal{U}} h$$

queremos mostrar que

$$f(\mathcal{U}) = h(\mathcal{U})$$

es decir que

$$\{A \subseteq \mathbb{N} : \exists V \in \mathcal{U} \text{ tal que } f(V) \subseteq A\} = \{B \subseteq \mathbb{N} : \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } h(V) \subseteq B\}$$

sean $A \in f(\mathcal{U})$ y $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$f(V) \subseteq A$$

como f y h están relacionados por $\sim_{\mathcal{U}}$ entonces existe

$$V_0 = \{n \in \mathbb{N} : f(n) = h(n)\} \in \mathcal{U}$$

tenemos que para toda $m \in V \cap V_0$

$$f(m) = h(m)$$

y como $V \cap V_0 \in \mathcal{U}$ se sigue que

$$h(V \cap V_0) \subseteq A$$

finalmente

$$A \in h(\mathcal{U})$$

por lo tanto

$$f(\mathcal{U}) \subseteq h(\mathcal{U})$$

la otra contención se obtiene de manera análoga.

Ahora veamos que $\mathbb{N} \in f(\mathcal{U})$. Es claro que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$, buscamos $W \in \mathcal{U}$ de tal suerte que $f(W) \subseteq \mathbb{N}$. Tenemos que para todo $A \subseteq \mathbb{N}$ se cumple que

$$f(A) \subseteq \mathbb{N}$$

en particular se cumple para cualquier elemento de $\mathcal{U}$.

Supongamos que $A, B \in f(\mathcal{U})$ queremos que $A \cap B \in f(\mathcal{U})$ es claro que

$$A \cap B \subseteq \mathbb{N}$$

y que existen
$$V_A, V_B \in \mathcal{U}$$
tales que
$$f(V_A) \subseteq A \text{ y } f(V_B) \subseteq B.$$
Sea $W = V_A \cap V_B$, como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro $W \in \mathcal{U}$ y por construcción

$$f(W) \subseteq A \text{ y } f(W) \subseteq B$$

entonces
$$f(W) \subseteq A \cap B$$
por lo tanto
$$A \cap B \in \mathcal{U}.$$
Ahora supongamos que $A \in f(\mathcal{U})$ y $A \subseteq B$.

Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $f(V) \subseteq A$ por hipótesis, entonces

$$f(V) \subseteq A \subseteq B$$

finalmente
$$B \in f(\mathcal{U}).$$

Hasta ahora tenemos que $f(\mathcal{U})$ es un filtro, usaremos la caracterización de ultrafiltros que anteriormente enunciamos como un lema. Sean

$$A \subseteq \mathbb{N} \quad \text{ y } \quad V = f^{-1}(A)$$

como V es un subconjunto de los naturales se cumple una y sólo de las siguientes afirmaciones:

1. $V \in \mathcal{U}$, o
2. $\mathbb{N} \setminus V \in \mathcal{U}$

Si la primera se cumple tenemos que:

$$f(V) \subset A$$

lo que implica
$$A \in f(\mathcal{U})$$
Si la segunda es quien se cumple entonces:

$$f(\mathbb{N} \setminus V) \subset \mathbb{N} \setminus A$$

es decir

$$\mathbb{N} \setminus A \in f(\mathcal{U}).$$

$\square$

Ahora que podemos crear ultrafiltros $f(\mathcal{U})$ y por extensión ultrapotencias $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$ partiendo de un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y usando una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

La siguiente definición nos habla de como se puede extender una función dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a una que actúe sobre las ultrapotencias.

Definición 3.1.3. *Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Entonces definimos*

$$\bar{f} : \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \to \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

dada por

$$\bar{f}([g]_{f(\mathcal{U})}) = [g \circ f]_{\mathcal{U}}$$

Nos referiremos a la función $\bar{f}$ como la extensión de f.

En los siguientes teoremas exploraremos propiedades básicas de las funciones recién definidas.

Teorema 3.1.4. *Para cada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y cada $\mathcal{U}$ ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Entonces $\bar{f}$ es inyectiva.*

Demostración. Sean $[h]_{f(\mathcal{U})}, [g]_{f(\mathcal{U})} \in \prod \mathbb{N}/f(\mathcal{U})$.

Supongamos que

$$\bar{f}([h]_{f(\mathcal{U})}) = \bar{f}([g]_{f(\mathcal{U})});$$

es decir,

$$[h \circ f]_{\mathcal{U}} = [g \circ f]_{\mathcal{U}}$$

esto que sucede si y sólo si existe $V \in \mathcal{U}$ tal que para toda $n \in V$

$$h \circ f(n) = g \circ f(n)$$

que es lo mismo que para toda $m \in f(V)$ se cumpla

$$h(m) = g(m)$$

como $f(V) \in f(\mathcal{U})$, finalmente tenemos

$$[h]_{f(\mathcal{U})} = [g]_{f(\mathcal{U})}.$$

$\square$

Teorema 3.1.5. *Si f es inyectiva entonces $\bar{f}$ es suprayectiva.*

Demostración. Sea

$$[g]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

buscamos

$$[p]_{f(\mathcal{U})} \in \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$$

tal que

$$\bar{f}([p]_{f(\mathcal{U})}) = [g]_{\mathcal{U}},$$

es decir,

$$[p \circ f]_{\mathcal{U}} = [g]_{\mathcal{U}}.$$

como f es inyectiva, tiene inverso por la izquierda, en otras palabras existe $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $h \circ f = Id$ tentativamente

$$p \sim_{f(\mathcal{U})} g \circ h.$$

Veamos si se cumple lo que deseamos

$$\bar{f}([p]_{f(\mathcal{U})}) = \bar{f}([g \circ h]_{f(\mathcal{U})}) = [g \circ h \circ f]_{\mathcal{U}} = [g]_{\mathcal{U}}.$$

□

Recordemos que los ultrafiltros principales son aquellos que tienen un punto común a todos sus elementos. A estos los hemos segregado; de alguna manera el siguiente teorema nos muestra porque.

Teorema 3.1.6. *Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal sobre $\mathbb{N}$ entonces*

$$\mathbb{N} \text{ y } \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \text{ son isomorfos.}$$

Demostración. Como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro principal, se cumple que

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \mathcal{U} = \{A \subseteq \mathbb{N} : n_0 \in A\}.$$

Sea $h : \prod \mathbb{N}/\mathcal{U} \to \mathbb{N}$ dada por

$$h([f]) = f(n_0).$$

Veamos que h no depende de los representantes sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f \sim_{\mathcal{U}} g;$$

esto significa que existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que para toda $n \in V$

$$f(n) = g(n),$$

por un lado tenemos que

$$h([f]) = f(n_0);$$

y por el otro

$$h([g]) = g(n_0)$$

como $n_0 \in V$

$$f(n_0) = g(n_0).$$

Entonces h no depende de representantes.

Probemos que h es un homomorfismo

- Sea F una letra funcional n-aria y $a_1, ..., a_n \in \prod \mathbb{N}$ queda por probar que

  $$h(F^{\mathfrak{U}}([a_1], ..., [a_n])) = F^{\mathbb{N}}(h([a_1]), ..., h([a_n])).$$

  La definición 3.1.1 sostiene que

  $$F^{\mathfrak{U}}([a_1], ..., [a_n]) = [G]$$

  para $G : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ si y sólo si

  $$\{i \in \mathbb{N} : F^{\mathbb{N}}(a_1(i), ..., a_n(i)) = G(i)\} \in \mathfrak{U}$$

  por lo tanto

  $$h(F^{\mathfrak{U}}([a_1], ..., [a_n])) = h([G]) = G(n_0) \tag{3.1}$$

  por otro lado

  $$F^{\mathbb{N}}(a_1(n_0), ..., a_n(n_0)) = G(n_0)$$

  lo que se puede expresar como

  $$F^{\mathbb{N}}(h([a_1]), ..., h([a_n])) = G(n_0). \tag{3.2}$$

  De las igualdades (3.1) y (3.2) obtenemos lo que queríamos probar.

- Sea R una relación n-aria y dada la sucesión $[a_1], ..., [a_n] \in \prod \mathbb{N}/\mathfrak{U}$ supongamos que
$$([a_1], ..., [a_n]) \in R^{\mathfrak{U}},$$
de la definición 3.1.1 obtenemos
$$V = \{i \in \mathbb{N} : (a_1(i), ..., a_n(i)) \in R^{\mathbb{N}}\} \in \mathfrak{U},$$
por el hecho de que $\mathfrak{U}$ es principal podemos asegurar que
$$(a_1(n_0), ..., a_n(n_0)) \in R^{\mathbb{N}};$$
no olvidemos que
$$\forall j(1 \leq j \leq n) \qquad h([a_j]) = a_j(n_0).$$
Para probar el regreso supongamos que
$$(h[a_1], ..., h[a_n]) \in R^{\mathbb{N}}.$$
Lo que quiere decir que
$$(a_1(n_0), ..., a_n(n_0)) \in R^{\mathbb{N}}$$
dado que que $\mathfrak{U}$ es un ultrafiltro principal generado por n_0 entonces
$$\{n_0\} \in \mathfrak{U},$$
por el teorema de Łoš podemos asegurar que
$$([a_1], ..., [a_n]) \in R^{\mathfrak{U}}.$$
- Nos queda por demostrar que $h(C^{\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}}) = C^{\mathbb{N}}$ pero esto es un caso particular del primer inciso.

Probemos que h es inyectiva.
Sean $[g], [f] \in \prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$. Supongamos que
$$h([g]) = h([f])$$
es decir
$$g(n_0) = f(n_0).$$

Como para cualquier $A \in \mathcal{U}$ se cumple que $n_0 \in A$, podemos asegurar

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}$$

por lo tanto,

$$[g] = [f]$$

h es inyectiva, como queríamos.

Hasta ahora tenemos que h es un encaje, vamos ahora a demostrar su suprayectividad.

Sea $m \in \mathbb{N}$ buscamos

$$[f] \in \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$$

tal que,

$$h([f]) = m$$

por la definición de h esto es $f(n_0) = m$ consideremos la función

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ tal que para toda } n \in \mathbb{N},$$

$$f(n) = m$$

en particular $f(n_0) = m$.
Esto hace a h un homomorfismo biyectivo. $\square$

Acabamos de mostrar por qué los ultrafiltros principales no son de gran interés, las ultrapotencias de naturales sobre ellos son esencialmente iguales a los mismos naturales.

A continuación mostraremos que si usamos un ultrafiltro no principal los naturales están elementalmente encajados en su ultrapotencia.

Teorema 3.1.7. *Los naturales están elementalmente encajados en cualquier ultrapotencia* $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$.

Demostración. El encaje será dado por la función

$$f : \mathbb{N} \to \prod \mathbb{N}/\mathcal{U},$$

tal que a cada natural le asigna la clase de equivalencia de su función constante.

Establezcamos los parámetros con los que trabajaremos, sean $\bar{a} = a_1, ..., a_n \in \mathbb{N}$ y $\alpha = \alpha_1, ..., \alpha_n \in \prod \mathbb{N}$ de tal manera que para cualquier $1 \leq j \leq n$ existe $V_j \in \mathcal{U}$ en el cual, para toda $m \in V_j$

$$\alpha_j(m) = a_j$$

necesitamos un elemento de $\mathcal{U}$ de tal forma que cada función α_j valga constantemente a_j llamemos V_0 a dicho elemento definido por

$$V_0 = \bigcap_{j=1}^{n} V_j.$$

Veamos que en efecto la función f es un homomorfismo

- Sea R una letra relacional n-aria, debemos mostrar que

  $$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathbb{N}} \Leftrightarrow ([\alpha_1], ..., [\alpha_n]) \in R^{\mathcal{U}},$$

  supongamos que

  $$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathbb{N}},$$

  lo que podemos replantear tomando $m \in V_0$ y cambiando cada a_j natural por su respectiva función $\alpha_j(x)$ así:

  $$(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)) \in R^{\mathbb{N}}.$$

  Como esto ocurre para todas las $m \in V_0$ se sigue que

  $$([\alpha_1], ..., [\alpha_n]) \in R^{\mathcal{U}}.$$

  Ahora si suponemos que

  $$([\alpha_1], ..., [\alpha_n]) \in R^{\mathcal{U}},$$

  entonces por la definición 3.1.1

  $$W = \{m \in \mathbb{N} : (\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)) \in R^{\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U},$$

  sea $m \in W \cap V_0$ entonces para toda j tal que $1 \leq j \leq n$ se cumple que

  $$\alpha_j(m) = a_j,$$

  y como

  $$W \cap V_0 \in \mathcal{U}$$

  concluimos que

  $$(a_1, ..., a_n) \in R^{\mathbb{N}}.$$

- Sea F una letra funcional n-aria debemos probar

  $$f(F^{\mathbb{N}}(a_1, ..., a_n)) = F^{\mathcal{U}}(f(a_1), ..., f(a_n)),$$

  por la definición de las funciones α obtenemos las siguientes igualdades

  $$F^{\mathcal{U}}(f(a_1), ...f(a_n)) = F^{\mathcal{U}}([\alpha_1], ..., [\alpha_n]) = [g] \tag{3.3}$$

  si y sólo si

  $$W = \{i \in \mathbb{N} : F^{\mathbb{N}}(\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i)) = g(i)\} \in \mathcal{U}$$

  tenemos que para toda $m \in W \cap V_0$

  $$F^{\mathbb{N}}(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)) = F^{\mathbb{N}}(a_1, ..., a_n) = G(m)$$

  lo que significa que

  $$[F^{\mathbb{N}}(a_1, ..., a_n)] = [G] \tag{3.4}$$

  de las igualdades (3.3) y (3.4) obtenemos lo que deseamos mostrar.

- Como ya es casi una costumbre el caso de la constante es un caso particular del inciso anterior.

Ahora probemos la inyectividad de f sean $n, m \in \mathbb{N}$. Tomemos

$$\widetilde{n}, \widetilde{m} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

las funciones constantes para n y m.

Supongamos que

$$f(\widetilde{n}) = f(\bar{m}) \text{ es decir } [\widetilde{n}] = [\bar{m}],$$

lo que implica que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que para toda $j \in V$

$$\widetilde{n}(j) = \widetilde{m}(j)$$

lo que significa que $n = m$.

Debemos probar la parte de la elementalidad[1] de f. Procederemos por inducción sobre la cantidad de símbolos lógicos iniciando con las fórmulas atómicas.

[1]Nos referiremos por elementalidad a la condición que separa los encajes de los encajes elementales, así mismo para las subestructuras.

- si $\phi := t = s$ con t y s términos, supongamos que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models t^{\mathcal{U}}([\alpha_1], ..., [\alpha_n]) = s^{\mathcal{U}}([\alpha_1], ..., [\alpha_n])$$

  lo que por definición ocurre si y sólo si

$$W = \{m \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models t^{\mathbb{N}}(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)) = s^{\mathbb{N}}(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m))\} \in \mathcal{U},$$

  si tomamos $i \in W \cap V_0$ entonces

$$\mathbb{N} \models t^{\mathbb{N}}(\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i)) = s^{\mathbb{N}}(\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i));$$

  es decir

$$\mathbb{N} \models t^{\mathbb{N}}(a_1, ..., a_n) = s^{\mathbb{N}}(a_1, ..., a_n).$$

  La otra implicación se obtiene de manera análoga.

- si $\phi := (v_1, ..., v_n) \in R$ con R una letra predicativa n-aria. Supongamos que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models ([\alpha_1], ..., [\alpha_n]) \in R^{\mathcal{U}},$$

  es decir

$$W = \{m \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models (\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)) \in R^{\mathbb{N}}\} \in \mathcal{U}$$

  tomando $i \in W \cap V_0$ ocurre que

$$\mathbb{N} \models (\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i)) \in R^{\mathbb{N}}$$

  es equivalente a la expresión

$$\mathbb{N} \models (a_1, ..., a_n) \in R^{\mathbb{N}}.$$

La otra implicación se obtiene de manera análoga a esta.

Hasta este punto cubrimos la base de inducción, ahora para la hipótesis supongamos que ψ y φ son fórmulas que cumplen con lo que deseamos y procedamos.

1. si $\phi := \psi \wedge \varphi$ supongamos que

$$\mathbb{N} \models (\psi \wedge \varphi)(a_1, ..., a_n).$$

Tomemos $m \in V_0$ entonces podemos asegurar que

$$\mathbb{N} \models (\psi \wedge \varphi)(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)).$$

Como V_0 es un elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$ podemos usar el teorema de Łŏs para obtener

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models (\psi \wedge \varphi)([\alpha_1], ..., [\alpha_n]).$$

La implicación restante en este caso y el siguiente es muy parecida a los casos anteriores, así que la omitiremos.

2. si $\phi := \neg\psi$ ahora supongamos que

$$\mathbb{N} \models \neg\psi(a_1, ..., a_n),$$

de nuevo tomaremos $m \in V_0$ para obtener

$$\mathbb{N} \models \neg\psi(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)),$$

lo que por Tarski equivale a decir que

$$\mathbb{N} \not\models \psi(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m)),$$

dado que $\mathcal{U}$ es ultrafiltro tenemos que

$$\{i \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \psi(\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i))\} \notin \mathcal{U};$$

por Łŏs esto equivale a decir que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \not\models \psi([\alpha_1], ..., [\alpha_n])$$

usando la definición de Tarski una vez más

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \neg\psi([\alpha_1], ..., [\alpha_n]).$$

3. si $\phi := \exists v_j \psi$ supongamos que

$$\mathbb{N} \models \exists v_j \psi(a_1, ..., a_n).$$

Por Tarski existe $b \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{N} \models \psi(a_1, ..., a_n)(j/b),$$

entonces para toda $m \in V_0$

$$\mathbb{N} \models \psi(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m))(j/b),$$

sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función constante b. Tenemos

$$\{m \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \psi(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m))(j/g(m))\} \in \mathcal{U}$$

por Łŏs esto equivale a

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \psi([\alpha_1], ..., [\alpha_n])(j/[g]),$$

es decir

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \exists v_j \psi([\alpha_1], ..., [\alpha_n]).$$

Por otro lado supongamos ahora que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \exists v_j \psi([\alpha_1], ..., [\alpha_n]),$$

entonces existe $[g] \in \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$ tal que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \psi([\alpha_1], ..., [\alpha_n])(j/[g]),$$

por Łŏs lo anterior ocurre si y sólo si

$$W = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \psi(\alpha_1(i), ..., \alpha_n(i))(j/g(i))\} \in \mathcal{U}.$$

Sea $m \in W \cap V_0$ entonces

$$\mathbb{N} \models \psi(\alpha_1(m), ..., \alpha_n(m))(j/g(m)),$$

lo anterior puede reescribirse como

$$\mathbb{N} \models \psi(a_1, ..., a_n)(j/g(m)),$$

como $g(m) \in \mathbb{N}$ entonces

$$\mathbb{N} \models \exists v_j \psi(a_1, ..., a_n).$$

Lo que demuestra la elementalidad y finalmente el teorema.

□

Los siguientes resultados surgen a partir de considerar dos ultrapotencias iguales.

Teorema 3.1.8. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros en $\mathbb{N}$, si*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} = \prod_{\mathcal{V}} \mathbb{N}$$

entonces

$$\mathcal{U} = \mathcal{V}.$$

Demostración. Sea $A \in \mathcal{U}$, ahora definamos $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ así:

$$h(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$

Notemos que $h \sim_{\mathcal{U}} id$ y por la hipótesis del teorema entonces $h \sim_{\mathcal{V}} id$ es decir, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que para toda $n \in V$ ocurre que $h(n) = n$, por la manera en que definimos a h tenemos que $V \subseteq A$, al ser V elemento del ultrafiltro $\mathcal{V}$, entonces $A \in \mathcal{V}$ es decir

$$\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$$

al ser ambos ultrafiltros podemos usar la propiedad de maximalidad para concluir que:

$$\mathcal{U} = \mathcal{V}.$$

□

Seguimos con un breve corolario que involucra la desigualdad de Rudin-Keisler.

Corolario 3.1.9. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ y $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si*

$$\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} = \prod_{g(\mathcal{U})} \mathbb{N}$$

entonces

$$f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U}).$$

Ahora investigaremos cómo las *extensiones* $\bar{f}$ trabajan sobre la estructura de las ultrapotencias.

Teorema 3.1.10. *Dada $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entonces*

$$\bar{f} : \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \to \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

es un homomorfismo.

Demostración.

- Sea R una letra predicativa n-aria tomemos a

$$a_1, ..., a_n \in \prod \mathbb{N}.$$

Supongamos

$$([a_1]_{f(\mathcal{U})}, ..., [a_n]_{f(\mathcal{U})}) \in R^{f(\mathcal{U})},$$

La definición 3.1.1 implica que

$$A = \{i \in \mathbb{N} : (a_1(i), ..., a_n(i)) \in R^{\mathbb{N}}\} \in f(\mathcal{U}),$$

de la definición de $f(\mathcal{U})$ se sigue que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$f(V) \subseteq A;$$

por lo tanto para toda $m \in V$

$$(a_1 \circ f(m), ..., a_n \circ f(m)) \in R^{\mathbb{N}},$$

como V es elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$ podemos aplicar la definición 3.1.1 de nuevo, obteniendo

$$([a_1 \circ f]_{\mathcal{U}}, ..., [a_n \circ f]_{\mathcal{U}}) \in R^{\mathcal{U}},$$

es decir

$$(\bar{f}([a_1]_{f(\mathcal{U})}), ..., \bar{f}([a_n]_{f(\mathcal{U})})) \in R^{\mathcal{U}}.$$

Ahora suponemos

$$(\bar{f}([a_1]_{f(\mathcal{U})}), ..., \bar{f}([a_n]_{f(\mathcal{U})})) \in R^{\mathcal{U}}.$$

Por las definiciones de $\bar{f}$ la 3.1.1 podemos asegurar que existe V elemento del ultrafiltro $\mathcal{U}$ de tal manera que para toda $m \in V$ se cumple

$$(a_1 \circ f(m), ..., a_n \circ f(m)) \in R^{\mathbb{N}}$$

como $m \in V$ entonces $f(m) \in f(V)$ y dado que $f(V)$ es un elemento del ultrafiltro $f(\mathcal{U})$ entonces

$$([a_1]_{f(\mathcal{U})}, ..., [a_n]_{f(\mathcal{U})}) \in R^{f(\mathcal{U})}.$$

- Sea F letra funcional $n - aria$ sean $a_1, ..., a_n \in \prod \mathbb{N}$ debemos probar

$$\bar{f}(F^{f(\mathfrak{U})}([a_1]_{f(\mathfrak{U})}, ..., [a_n]_{f(\mathfrak{U})})) = F^{\mathfrak{U}}(\bar{f}([a_1]_{f(\mathfrak{U})}), ..., \bar{f}([a_n]_{f(\mathfrak{U})}))).$$

  Por un lado tenemos que existe $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de tal suerte que

$$F^{f(\mathfrak{U})}([a_1]_{f(\mathfrak{U})}, ..., [a_n]_{f(\mathfrak{U})}) = [g]_{f(\mathfrak{U})}, \tag{3.5}$$

  si y sólo si

$$W = \{i \in \mathbb{N} : F^{\mathbb{N}}(a_1(i), ..., a_n(i)) = g(i)\} \in f(\mathfrak{U}), \tag{3.6}$$

  si aplicamos $\bar{f}$ a la igualdad (3.5) tendremos

$$\bar{f}(F^{f(\mathfrak{U})}([a_1]_{f(\mathfrak{U})}, ..., [a_n]_{f(\mathfrak{U})})) = [g \circ f]_{\mathfrak{U}}, \tag{3.7}$$

  de la expresión (3.6) se sigue que debe existir $V \in \mathfrak{U}$ tal que $f(V) \subseteq W$ y para toda $m \in V$ pasa que

$$F^{\mathbb{N}}(a_1 \circ f(m), ..., a_n \circ f(m)) = g \circ f(m);$$

  entonces podemos afirmar que

$$F^{\mathfrak{U}}([a_1 \circ f]_{\mathfrak{U}}, ..., [a_n \circ f]_{\mathfrak{U}}) = [g \circ f]_{\mathfrak{U}},$$

  es decir

$$F^{\mathfrak{U}}(\bar{f}([a_1]_{f(\mathfrak{U})}), ..., \bar{f}([a_n]_{f(\mathfrak{U})})) = [G \circ f]_{\mathfrak{U}}. \tag{3.8}$$

  De las igualdades (3.7) y (3.8) obtenemos lo que deseábamos probar.

- Para el caso de una constante basta considerar el inciso anterior para una letra funcional constante.

□

Teorema 3.1.11. *Sean $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entonces*

$$\bar{f} : \prod_{f(\mathfrak{U})} \mathbb{N} \hookrightarrow \prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$$

es decir $\bar{f}$ encaja a $\prod_{f(\mathfrak{U})} \mathbb{N}$ en $\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$.

Demostración. Que $\bar{f}$ es un homomorfismo se demostró en el teorema 3.1.10 y su inyectividad en 3.1.4, lo que demuestra el teorema.

□

Las extensiones $\bar{f}$ encajan las ultrapotencias $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$ en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$, más aún el encaje es elemental, como demostraremos en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.12. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entonces*

$$\bar{f} : \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \precsim \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}.$$

Demostración. Por el teorema 3.1.11 sabemos que ocurre

$$\bar{f} : \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \hookrightarrow \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}.$$

Nos resta por demostrar que para cualquier fórmula ϕ con n variables libres y $\bar{a} = a_1, ..., a_n \in \prod \mathbb{N}$ se cumple

$$\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \models \phi([\bar{a}]_{f(\mathcal{U})}) \Longleftrightarrow \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \phi(\bar{f}([\bar{a}]_{f(\mathcal{U})})).$$

Procederemos usando el corolario sobre el test de Tarski-Vaught 2.5.2, sean ϕ una fórmula con n variables libres y $[\bar{a}] = \langle [a_1], ..., [a_n] \rangle \in (\prod \mathbb{N}/f(\mathcal{U}))^n$, supongamos que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \exists v_j \phi(\bar{f}([\bar{a}])),$$

usando el teorema de Łoš y la definición de $\bar{f}$ obtenemos el conjunto

$$W = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \exists v_j \phi(\bar{a} \circ f(i))\} \in \mathcal{U},$$

con la definición de Tarski obtenemos que para toda $i \in W$ existe $c_i \in \mathbb{N}$ para el cual

$$\mathbb{N} \models \phi(\bar{a} \circ f(i))(v_j/c_i);$$

sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para toda $i \in W$, $g(f(i)) = c_i$ y con valor cero en cualquier otro caso, entonces tenemos para toda $i \in W$

$$\mathbb{N} \models \phi(\bar{a} \circ f(i))(v_j/g \circ f(i)),$$

de nuevo usamos el teorema de Łoš y la definición de $\bar{f}$ para obtener

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \phi(\bar{f}([\bar{a}]))(v_j/\bar{f}([g])).$$

$\square$

El anterior teorema extiende al teorema 3.1.11 ahora sabemos que las extensiones de funciones entre números naturales son encajes elementales.

Ahora vamos por un teorema que nos habla sobre la relación lógica entre una ultrapotencia sobre $\mathcal{U}$ y una sobre otro ultrafiltro que sea Rudin-Keisler menor que este. Recordemos el orden de Rudin-Keisler sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{U}$ ultrafiltros en $\mathbb{N}$ diremos que $\mathcal{U}$ es Rudin-Keisler mayor que $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$$

si existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}.$$

Teorema 3.1.13. *Dados $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ tales que $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$. Entonces tenemos que*

$$\prod_{\mathcal{V}} \mathbb{N} \precsim \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}.$$

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función testigo de la desigualdad entonces

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}.$$

Entonces nuestro problema se reduce a demostrar que

$$\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \precsim \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

que es el teorema 3.1.11.

□

Continuemos explorando las subestructuras de $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$. Sea $M \subseteq \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$ el universo de un modelo $\mathbb{M}$ en el cual, para toda f tal que $[f]_{\mathcal{U}} \in M$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathbb{M} \arrow[r, "\subseteq"] & \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \\ & \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Teorema 3.1.14. *Para cada $\mathcal{N} \subseteq \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$, existe $\mathbb{M} \subseteq \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ tal que*

$$\mathbb{M} \cong \bigcup \left\{ \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} : [f]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{N} \right\}$$

y para todo $[f]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}$ se cumple:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, hook] \arrow[dr, hook] & \mathbb{M} \arrow[r, "\subseteq"] & \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \\ & \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \arrow[u, hook] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Es claro que

$$\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \cong \bar{f}\Big(\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}\Big)$$

y como

$$\bar{f}\Big(\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}\Big) \subseteq \bigcup \Big\{ \bar{f}\Big(\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}\Big) : [f]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{N} \Big\}$$

al ser $\mathbb{M}$ isomorfo a $\bigcup\{\bar{f}(\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}) : [f]_{\mathcal{U}} \in \mathcal{N}\}$, la condición

$$\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}$$

se cumple.

Por el teorema 3.1.7 podemos afirmar que

$$\mathbb{N} \precsim \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$$

en particular

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$$

finalmente

$$\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{M}.$$

$\square$

En este caso $\mathbb{M}$ es isomorfo al supremo del conjunto

$$\Big\{\prod_{f(\mathcal{U})}\mathbb{N} : [f] \in \mathcal{N}\Big\}.$$

Existe la posibilidad de que $\mathbb{M}$ sea máximo, ahora nos interesa explorar la idea de que una estructura con las mismas propiedades sea tal que nunca pueda ser máximo. Con este fin cambiaremos de momento el universo donde trabajamos para exhibir un ejemplo (1).

Sea

$$S = \{\langle a_j\rangle_{j<\omega} : \text{ para casi toda } j \in \mathbb{N}\ a_j = 0\}$$

es decir el conjunto de todas las sucesiones tales que sus elementos son cero para todo natural, salvo una cantidad finita.

Es claro que

$$|S| = \omega.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos un par de funciones:

$$h_n : S \to \omega^n$$

tal que para cada $\langle a_j\rangle_{j<\omega} \in S$

$$h_n(\langle a_j\rangle_{j<\omega}) = \langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle$$

h_n es la truncación, nos regresa sólo los primeros n elementos de cada sucesión y

$$p_n : \omega^{n+1} \to \omega^n$$

la proyección sobre los primeros n elementos.

Notemos que

$$h_n = p_n \circ h_{n+1}$$

sea

$$\mathcal{X} = \{X \subseteq S : \exists n \in \mathbb{N} \text{ para la cual } p_n \text{ es inyectiva en } h_{n+1}(X)\}$$

es importante notar el hecho de que una cantidad finita de conjuntos de $\mathcal{X}$ no cubre a S. Para asegurarnos probemoslo por contradicción.

Sean

$$X_1, ..., X_m \in \mathcal{X}$$

supongamos que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} X_i$$

existen $r_1, ..., r_m \in \mathbb{N}$, supongamos que $r_1 \leq ... \leq r_m$, tales que para toda $i \in [1, ..., m]$ p_{r_i} es inyectiva en $h_{r_i+1}(X_i)$.

Sea $\langle a_k^{r_1} \rangle_{k<\omega} \in X_1$, tomemos $\langle a_k^{r_2} \rangle_{k<\omega} \in X_2$ tal que

$$\langle a_k^{r_2} \rangle_{k \leq r_1} = \langle a_k^{r_1} \rangle_{k \leq r_1}$$

recursivamente sigamos tomando para cada $i \in [2, ..., m]$ una sucesión $\langle a_k^{r_i} \rangle_{k<\omega} \in X_i$ tal que cada una sea igual a los primeros r_{i-1} elementos de la anterior, es decir

$$\langle a_k^{r_i} \rangle_{r_{i-1} < k \leq r_i} = \langle a_k^{r_{i-1}} \rangle_{r_{i-1} < k \leq r_i}.$$

Construyamos una nueva sucesión $\langle b_k \rangle_{k<\omega}$ tal que $\langle b_k \rangle_{k \leq r_1} = \langle a_k^{r_1} \rangle_{k \leq r_1}$ y $b_{r_1+1} = (a_{r_1+1}^{r_1}) + 1$ y para toda $i \in [2, ..., m]$ ocurra que

$$\langle b_k \rangle_{r_{i-1}+1 < k \leq r_i} = \langle a_k^{r_i} \rangle_{r_{i-1}+1 < k \leq r_i}$$

y a la vez $b_{r_i+1} = (a_{r_i+1}^{r_i}) + 1$; por último $\langle b_k \rangle_{k > r_m}$ sea igual a cero.

Finalmente tenemos que $\langle b_k \rangle_{k<\omega} \in S$, pero para toda $i \in [1, ..., m]$

$$h_{i+1}(\langle b_k \rangle_{k<\omega}) \neq h_{i+1}(\langle a_k^{r_i} \rangle_{k<\omega})$$

pero

$$p_i(h_{i+1}(\langle b_k \rangle_{k<\omega})) = p_i(h_{i+1}(\langle a_k^{r_i} \rangle_{k<\omega}))$$

lo que prueba que $\bigcup_{i=1}^{m} X_i$ no cubre a S.

Tomemos $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en S tal que, sea disjunto de $\mathcal{X}$ y definamos otros ultrafiltros de la siguiente manera

$$\mathcal{U}_n = h_n(\mathcal{U})$$

notemos que se cumple con que

$$p_n(\mathcal{U}_{n+1}) = \mathcal{U}_n$$

Necesitamos que $\mathcal{U}_n$ y $\mathcal{U}_{n+1}$ no sean Rudin-Keisler equivalentes para probar que en efecto no lo son usaremos el siguiente teorema[1].

Teorema 3.1.15 (Frolík). *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que $\mathcal{U} = f(\mathcal{U})$, entonces*

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) = n\} \in \mathcal{U}$$

Demostración. Sean

$$X = \{n \in \mathbb{N} : f(n) < n\} \quad \text{y} \quad Y = \{n \in \mathbb{N} : f(n) > n\},$$

y para toda $n \in X$ sea $\ell(n)$ la longitud de la secuencia maximal tal que $n > f(n) > f(f(n)) > ... > f^{\ell(n)}(n)$. Dividamos X en dos conjuntos

$$X_0 = \{n \in X : \ell(n) \text{ es par }\} \quad \text{y} \quad X_1 = \{n \in X : \ell(n) \text{ es impar }\}.$$

Notemos que $f(X_0) = X_1$ y $f(X_1) = X_0$ ya que al aplicar f a X_0 (o a X_1) se cambia la paridad de $\ell(n)$, ahora supongamos que $X_0 \in \mathcal{U}$, por la hipótesis del teorema $X_0 \in f(\mathcal{U})$ y por la definición de este último ultrafiltro tenemos que $f^{-1}(X_0) = X_1 \in \mathcal{U}$ entonces $X_0, X_1 \in \mathcal{U}$ pero $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ lo que es una contradicción. Es imposible que X_0 tanto como X_1 sean elementos de $\mathcal{U}$. Dividamos al conjunto Y de manera similar

$$Y_0 = \{n \in Y : \ell(n) \text{ es par }\} \quad \text{y} \quad Y_1 = \{n \in Y : \ell(n) \text{ es impar }\}$$

pero en Y tendremos un tercer subconjunto

$$Z = \{n \in Y : n < f(n) < f^2(n) < f^3(n) < ... \text{ es infinita }\}^{2}.$$

Para mostrar que Y_0 y Y_1 no son elementos de $\mathcal{U}$ el razonamiento es similar al usado para probar lo mismo con X_0 y X_1, para también excluir a Z necesitamos trabajar un poco más, comencemos.

Para $x.y \in Z$ definamos la relación $x \sim y$ si y sólo si $f^k(x) = f^m(y)$ para algunos $k, m \in \mathbb{N}$.

Para cada $x \in Z$ sea a_x un representante fijo de la clase

$$\{y \in Z : y \sim x\}.$$

Sea $L(x)$ el mínimo $k+m$ tal que $f^k(x) = f^m(a_x)$, finalmente dividamos a Z como así:

$$Z_0\{x \in Z : L(x) \text{ es par }\} \quad \text{y} \quad Z_1\{x \in Z : L(x) \text{ es impar }\}.$$

[1] Dicho teorema es un corolario de un resultado de Frolík que aparece en (14).

[2] Donde $f^j(n)$ representa a f compuesta consigo misma j veces y evaluada en n.

De nuevo Z_0 y Z_1 son disjuntos pero la imagen inversa de uno resulta en el otro por lo tanto ninguno puede ser elemento de $\mathcal{U}$.

Recapitulando, tenemos que $X_0 \cup X_1 = X \notin \mathcal{U}$ y $Y_0 \cup Y_1 \cup Z = Y \notin \mathcal{U}$, usando la definición de ultrafiltro como $X \cup Y \notin \mathcal{U}$ entonces

$$(\mathbb{N} \setminus X) \cup (\mathbb{N} \setminus Y) \in \mathcal{U},$$

es decir

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) \geq n\} \cap \{n \in \mathbb{N} : f(n) \leq n\} \in \mathcal{U}$$

lo que buscábamos probar. $\square$

Ahora supongamos que $\mathcal{U}_{n+1} \leq_{RK} \mathcal{U}_n$ entonces existe $f : \omega^n \to \omega^{n+1}$ tal que $f(\mathcal{U}_n) = \mathcal{U}_{n+1}$ es decir

$$f \circ p_n(\mathcal{U}_{n+1}) = \mathcal{U}_{n+1}$$

tenemos que $f \circ p_n(\mathcal{U}_{n+1})$ cumple las hipótesis del teorema 3.1.15, podemos concluir que

$$W = \{x \in \omega^{n+1} : f \circ p_n(x) = x\} \in \mathcal{U}_{n+1}$$

recordemos que $h_{n+1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}_{n+1}$ y como $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro en S, disjunto de $\mathcal{X}$ entonces para toda $A \subseteq \mathcal{U}_{n+1}$, p_n no es inyectivo en A; pero es consecuencia del teorema 3.1.15 que f es el inverso izquierdo de p_n restringido a W, entonces p_n es inyectiva en W, lo que es una contradicción.

Ahora podemos asegurar que tenemos una sucesión Rudin-Keisler-estrictamente creciente de ultrafiltros

$$\langle \mathcal{U}_n \rangle_{n<\omega}$$

la cual está acotada superiormente por $\mathcal{U}$. Por el teorema 3.1.12 tenemos que

$$\prod \mathbb{N}_{\mathcal{U}_1} \precsim \prod \mathbb{N}_{\mathcal{U}_2} \precsim \dots$$

si definimos la estructura $\mathbb{M}$ de la siguiente manera

$$\mathbb{M} \cong \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{\mathcal{U}_n} \mathbb{N}$$

esta cumple con lo requerido.

Verifiquemos que $\mathbb{M}$ es supremo pero no máximo. Procedamos por contradicción y supongamos que $\mathbb{M}$ es un elemento de la sucesión, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{M} \cong \prod_{\mathcal{U}_m} \mathbb{N}$$

pero esto implica que

$$\prod_{\mathcal{U}_m} \mathbb{N} \precsim \prod_{\mathcal{U}_{m+1}} \mathbb{N}$$

lo que contradice el hecho de ser supremo.

Para que toda la anterior construcción tenga sentido $\mathcal{U}$ no debe ser selectivo ya que de serlo también sería Rudin-Keisler minimal.

En este caso $\mathbb{M}$ no es una ultrapotencia, veamos. Supongamos que existe $\mathcal{V}$ ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$, este debe ser diferente de los que forman la sucesión $< \mathcal{U}_n >_{n<\omega}$ y tal que

$$\mathbb{M} \cong \prod_{\mathcal{V}} \mathbb{N}$$

como $\mathbb{M} \subseteq \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ entonces existe $h : \omega \to \omega$ para la cual $h(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ entonces $[h] \in M$ por la tanto $[h] \in \prod_{\mathcal{U}_n} \mathbb{N}$ para algún n esto finalmente implica que $\mathbb{M} \subseteq \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$, lo que es una contradicción.

3.2. Automorfismos

Analizaremos la existencia de isomorfismos que lleven la ultrapotencia $\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$ en si misma, es bien sabido que el único automorfismo de los naturales es la identidad, nos ocupa saber si esto ocurre también con sus ultrapotencias.

Exploremos si las extensiones nos pueden brindar un automorfismo diferente de la identidad.

Sean $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva[1] y $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$, sabemos que la extensión de h

$$\overline{h} : \prod_{h(\mathfrak{U})} \mathbb{N} \to \prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$$

en particular es un homomorfismo biyectivo, para cumplir con lo deseado debe ocurrir

$$h(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$$

pero, a la vez

$$\overline{h} \neq \overline{id}$$

Pero este hecho es imposible, veamos.

Teorema 3.2.1. *Sean $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $\mathfrak{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$, si $h(\mathfrak{U}) = \mathfrak{U}$ entonces*

$$\overline{h} = \overline{id}.$$

Demostración. Procedamos por contradicción. Supongamos que

$$\overline{h} \neq \overline{id},$$

entonces existe $[g]_{\mathfrak{U}}$ tal que

$$\overline{h}([g]_{\mathfrak{U}}) \neq [g]_{\mathfrak{U}}$$

es decir

$$[g \circ h]_{\mathfrak{U}} \neq [g]_{\mathfrak{U}},$$

lo que implica que para todo $A \in \mathfrak{U}$ existe $x \in A$ tal que $g \circ h(x) \neq g(x)$, pero por el teorema 3.1.15 existe el conjunto

$$W = \{n \in \mathbb{N} : h(n) = n\} \in \mathfrak{U}$$

[1] Es necesario que h sea inyectiva para asegurar que $\overline{h}$ sea biyectiva, ver Teorema 3.1.4

entonces para toda $n \in W$ tenemos que

$$g \circ h(n) = g(n)$$

lo que contradice lo supuesto. $\square$

En resumen la igualdad $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} = \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ implica que $f \sim_{\mathcal{U}} id$. Ahora nos preguntamos si este hecho es más general, es decir, si para cualesquiera f y g funciones, $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} = \prod_{g(\mathcal{U})} \mathbb{N}$ implica que $f \sim_{\mathcal{U}} g$. Sintetizando, si

$$\begin{tikzcd} \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} & \\ \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \arrow[u, "\bar{f}"] \arrow[r, equal] & \prod_{g(\mathcal{U})} \mathbb{N} \arrow[ul, "\bar{g}"'] \end{tikzcd} \tag{3.9}$$

entonces $f \sim_{\mathcal{U}} g$. Claramente la implicación recíproca es verdadera, sin embargo sabemos que $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} = \prod_{g(\mathcal{U})} \mathbb{N}$ implica $f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$ por el corolario 3.1.9, pero $f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$ no implica $f \sim_{\mathcal{U}} g$. Los ultrafiltros en los que sí se satisface esta condición, forman una clase conocida de ultrafiltos, los llamados Hausdorff.

Definición 3.2.2. *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$, diremos que es Hausdorff si y sólo si para todas $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si*

$$f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$$

entonces

$$f \sim_{\mathcal{U}} g.$$

Usando la anterior definición y el corolario 3.1.9, podemos dar respuesta afirmativa a nuestra pregunta. Y a la vez, plantear una nueva ¿Puede ocurrir que $f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$, pero f y g no estén $\mathcal{U}$-relacionadas? Desarrollaremos herramientas para dar una respuesta en la siguiente subsección.

3.2.1. Ultrafiltros no Hausdorff

El siguiente lema nos dice que dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ Hausdorff todos los ultrafiltros Rudin-Keisler menores que este también lo serán.

Lema 3.2.3. *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro Hausdorff y $\mathcal{F}$ ultrafiltro tal que*

$$\mathcal{F} \leq_{RK} \mathcal{U}$$

entonces $\mathcal{F}$ es Hausdorff.

Demostración. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{F}.$$

Sean $h, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ cuales quiera, buscamos probar que si

$$h(\mathcal{F}) = g(\mathcal{F})$$

entonces

$$h \sim_{\mathcal{F}} g$$

es decir si

$$h \circ f(\mathcal{U}) = g \circ f(\mathcal{U})$$

ocurre que

$$h \circ f \sim_{\mathcal{U}} g \circ f$$

lo que es consecuencia de que $\mathcal{U}$ sea Hausdorff.

□

Para continuar enunciaremos un lema con una caracterización para ultrafiltros que son Hausdorff.

Lema 3.2.4. *El ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$ es Hausdorff si y sólo si cada vez que un ultrafiltro $\mathcal{F}$ tal que*

$$\mathcal{F} \leq_{RK} \mathcal{U}$$

incluye al filtro cuadrado

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V}$$

de un filtro no principal $\mathcal{V}$,entonces $\mathcal{F}$ incluye la diagonal

$$\Delta = \{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U}$ es Hausdorff. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{F},$$

por hipótesis

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \subseteq f(\mathcal{U}).$$

Tomemos $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ las proyecciones canónicas, entonces

$$\pi_1(\mathcal{F}) = \pi_2(\mathcal{F}) = \mathcal{V}$$

mientras que

$$\pi_1 \sim_{\mathcal{F}} \pi_2 \tag{3.10}$$

ocurre si y sólo si

$$\Delta \subseteq \mathcal{F}$$

por el lema 3.2.3 $\mathcal{F}$ es Hausdorff entonces la condición (3.10) se cumple y $\Delta \subseteq \mathcal{F}$. Lo que demuestra la primera implicación.

Por otro lado, sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tales que

$$f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U}) = \mathcal{V}.$$

Definimos $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como

$$h(i) = (f(i), g(i))$$

es claro que

$$\mathcal{F} = h(\mathcal{U}) \supseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$$

y que $\mathcal{F}$ tiene a la diagonal por elemento.

Entonces

$$f \sim_{\mathcal{U}} g$$

ya que coinciden en $h^{-1}(\Delta)$. Por lo tanto $\mathcal{U}$ es Hausdorff. $\square$

Existe una manera de multiplicar ultrafiltros y que el resultado sea un ultrafiltro, continuación lo definiremos.

Definición 3.2.5. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ ultrafiltros en $\mathbb{N}$, su producto de Fubini esta dado por*

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{F} = \{X \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n, m) \in X\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}\}.$$

Veamos que en efecto dicho conjunto es un ultrafiltro

Proposición 3.2.6. *Sean* $\mathcal{U}$ *y* $\mathcal{F}$ *ultrafiltros en* $\mathbb{N}$*, entonces*

$$\mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$$

es un ultrafiltro en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$*.*

Demostración.

- Veamos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$. Es fácil ver que

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}.$$

lo que deseábamos probar.

- Sean $U, V \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$, entonces existen los siguientes conjuntos

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in U\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$

y

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in V\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$

cuya intersección es

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in U \wedge (n,m) \in V\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U};$$

es decir,

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in U \cap V\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$

lo que significa que

$$U \cap V \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}.$$

- Sea $U \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$ y $U \subset V$, como

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in U\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$

entonces podemos asegurar que

$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in V\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$

lo que implica

$$V \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}.$$

- Finalmente sea $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, entonces tenemos tres casos posibles.

1. Si
$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in V\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$
entonces
$$V \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}.$$

2. Por otro lado si ocurre que
$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in V\} \notin \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$
por ser $\mathcal{F}$ un ultrafiltro el anterior conjunto se puede reescribir como
$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \notin V\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$
lo que de nuevo implica
$$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \setminus V \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}.$$

3. Finalmente si
$$\{n \in \mathbb{N} : \{m \in \mathbb{N} : (n,m) \in V\} \in \mathcal{F}\} \notin \mathcal{U}$$
es un caso análogo al anterior.

□

Es necesario enunciar un pequeño lema auxiliar para futuras demostraciones.

Lema 3.2.7. *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ ultrafiltros sobre $\mathbb{N}$ tales que*
$$\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U},$$
sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que
$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{V},$$
si f es $\mathcal{U} -$ equivalente a una constante, entonces $\mathcal{V}$ es principal.

Demostración. Procederemos mostrando
$$f(\mathcal{U}) = \{A \subseteq \mathbb{N} : n_0 \in A\}.$$
para algún $n_0 \in \mathbb{N}$.

Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que es $\mathcal{U} -$ *equivalente* a n_0, es decir existe $U_0 \in \mathcal{U}$ en el cual para toda $u \in U_0$ se cumple que $f(u) = n_0$.

Sea $A \in f(\mathcal{U})$ entonces existe $B \in \mathcal{U}$ tal que

$$f(B) \subseteq A$$

entonces para toda $u \in B \cap U_0$ tenemos que

$$f(u) = n_0$$

entonces

$$n_0 \in A$$

por lo tanto

$$f(\mathcal{U}) \subseteq \{A \subseteq \mathbb{N} : n_0 \in A\}.$$

Ahora consideremos $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $n_0 \in A$, buscamos probar que $A \in F(\mathcal{U})$. Supongamos que no, si $A \notin f(\mathcal{U})$, tenemos que para todo $U \in \mathcal{U}$ ocurre que $f(U) \nsubseteq A$, pero U_0 es tal que para todo $u \in U_0$, $f(u) = n_0$; por hipótesis $n_0 \in A$ lo que nos lleva a una contradicción. □

Antes de seguir necesitamos la siguiente definición.

Definición 3.2.8. *Si $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ son ultrafiltros en $\mathbb{N}$ y existe $\mathcal{F}$ ultafiltro tal que*

$$\mathcal{F} \leq_{RK} \mathcal{U} \quad y \quad \mathcal{F} \leq_{RK} \mathcal{V},$$

diremos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son compatibles. En otro caso diremos que son incompatibles.

El siguiente corolario nos habla de la relación que guardan los ultrafiltros Hausdorff con los productos de Fubini.

Corolario 3.2.9. *Si el producto $\mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$ es Hausdorff entonces los ultrafiltros $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ son Hausdorff e incompatibles.*

Demostración. Como $\mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$ es Hausdorff y ocurre que

$$\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{F} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$$

por lo tanto $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ son Hausdorff.

Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ supongamos que

$$f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{F}) = \mathcal{V}$$

definamos $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$h(n, m) = (f(n), g(m))$$

lo que implica que

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \in h(\mathcal{U} \otimes \mathcal{F})$$

como

$$h(\mathcal{U} \otimes \mathcal{F}) \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$$

por el lema 3.2.4 aseguramos que

$$\Delta \in h(\mathcal{U} \otimes \mathcal{F})$$

entonces

$$h^{-1}(\Delta) = \{(n.m) : f(n) = g(m)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{F}$$

si y sólo si

$$\{n : \{m : f(n) = g(m)\} \in \mathcal{F}\} \in \mathcal{U}$$

lo que implica que f y g son constantes modulo $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ respectivamente, entonces por el lema 3.2.7 $\mathcal{V}$ es principal, lo que es una contradicción. Por lo tanto $\mathcal{U}$ y $\mathcal{F}$ son incompatibles. □

Finalmente el teorema central de esta subsección.

Teorema 3.2.10. *$\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ no es Hausdorff.*

Demostración. Procedamos por contradicción y supongamos que $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ es Hausdorff, entonces por el corolario anterior $\mathcal{U}$ es Hausdorff e incomparable en el orden de Rudin-Keisler consigo mismo lo que es claramente falso. □

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$. Consideremos $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ en este caso las funciones $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (la proyección sobre la primer y la segunda coordenada, respectivamente) son tales que

$$\pi_1(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \pi_2(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U})$$

y a la vez

$$\pi_1 \nsim_{\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}} \pi_2.$$

por el lema 3.2.4.

Podemos replantear la pregunta que originó el diagrama 3.9, con la condición de que $\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N}$ sea isomorfo a $\prod_{g(\mathcal{U})} \mathbb{N}$, es decir, si

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} & \\
\prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \arrow[u, "\bar{f}"] \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] & \prod_{g(\mathcal{U})} \mathbb{N} \arrow[ul, "\bar{g}"']
\end{tikzcd}$$

entonces $f \sim_{\mathcal{U}} g$. Pero esta pregunta, quedará pendiente para futuros trabajos.

3.3. Cardinalidad de las ultrapotencias

Hemos estado trabajando sobre conjuntos numerables, pero desconocemos la cantidad de elementos en una ultrapotencia. Mas antes de proseguir debemos tener presente la proposición 2.2.14 que afirma que un ultrafiltro es no principal si y sólo si contiene al filtro de Fréchet.

Teorema 3.3.1. *Sea $\mathcal{U}$ ultrafiltro no principal en $\mathbb{N}$ entonces*

$$|\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}| = 2^{\aleph_0}.$$

Demostración. La desigualdad

$$|\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}| \leq |\prod \mathbb{N}|$$

es fácil de probar mediante la función

$$\sigma : \prod \mathbb{N} \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

tal que para toda $f \in \prod \mathbb{N}$

$$\sigma(f) = [f].$$

σ es suprayectiva, veamos.

Sea $[g] \in \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ es claro que para toda $h \in \prod \mathbb{N}$ tal que

$$h \sim_{\mathcal{U}} g$$

ocurre que

$$\sigma(h) = [g]$$

al ser σ suprayectiva tenemos por consecuencia que

$$|\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}| \leq |\prod \mathbb{N}|.$$

Resta por demostrar que $2^{\aleph_0} \leq |\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}|$, para comenzar sean $\mathcal{F}$ el filtro de Fréchet y

$$S = \{F_n \in \mathcal{F} : F_n = \mathbb{N} \setminus \{0, 1, ..., n-1\}.$$

Con S_ω denotemos el conjunto de las sucesiones finitas de S.

Para cada $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definamos

$$g' : \mathbb{N} \to S_\omega$$

donde $g'(n) = \{F_0, F_1, ..., F_{g(n)}\}$. Como $|S_\omega| = \aleph_0$ nuestro problema se reduce a probar la inyectividad de la función

$$\tau : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \prod_{\mathfrak{U}} S_\omega$$

tal que para toda $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tenemos que $\tau(g) = [g']$.

Sean $g, h \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tales que

$$\tau(g) \neq \tau(h)$$

es decir

$$[g'] \neq [h']$$

entonces para cada $V \in \mathfrak{U}$ y toda $m \in V$ tenemos que

$$g'(m) \neq h'(m)$$

lo que en otras palabras significa

$$\{F_0, ..., F_{g(m)}\} \neq \{F_0, ..., F_{h(m)}\}$$

ahora podemos afirmar que $g \neq h$.

$\square$

Por lo tanto si tenemos un ultrafiltro no principal $\mathfrak{U}$ este genera una ultrapotencia $\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$ con cardinalidad el continuo, por otro lado si $\mathfrak{U}$ es principal del teorema 3.1.6 obtenemos que $\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$ debe ser numerable.

3.4. Teoría de tipos y modelos saturados.

Este tema se dividirá en dos subsecciones, en la primera tomaremos las definiciones más básicas y necesarias de la teoría de tipos para que en la siguiente desarrollemos debidamente los conceptos relacionados a los modelos saturados.

3.4.1. Teoría de tipos.

Sean $\mathcal{M}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $A \subset M$, entonces $\mathcal{L}_A$ representará el lenguaje obtenido al agregar a $\mathcal{L}$ una constante para cada $a \in A$. $\mathcal{M}_A$ denotará la extensión $(\mathcal{M}, a)_{a \in A}$ en el $\mathcal{L}_A$-lenguaje.

Definición 3.4.1. *Sea $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ un conjunto de $\mathcal{L}_A$-formulas con variables libres*

$$v_1, ..., v_n$$

Llamaremos a $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ un n-tipo si

$$\Sigma(v_1, ..., v_n) \cup Th(\mathcal{M}_A)$$

es satisfacible [1].

Ejemplo 3.4.2. *Sean $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Q}, < \rangle$, $A = \mathbb{N}$ y*

$$p(v) = \{v > 1, v > 2, v > 3, ...\}$$

consideremos a

$$\Delta \subset p(v) \cup Th(\mathcal{M}_A)$$

finito, es simple ver que Δ es satisfacible, usando el teorema de compacidad, $p(v) \cup Th(\mathcal{M}_A)$ también lo es.

Por lo tanto $p(v)$ es un 1-tipo.

Un resultado que no hemos explorado es la equivalencia elemental de los naturales y sus ultrapotencias, lo que significa que tanto $\mathbb{N}$ como $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ hacen verdaderas los mismas enunciados. Es decir sus teorías son las mismas. Lo cual se sigue del teorema 3.1.7 el que sostiene que

$$\mathbb{N} \precsim \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

[1]Donde $Th(\mathcal{M}_A)$ representa el conjunto de los $\mathcal{L}_A$-enunciados verdaderas en $\mathcal{M}_A$.

sin importar que ultrafiltro $\mathcal{U}$ usemos.

Para poder extender la afirmación del teorema 3.1.7 en los casos que ahora exploramos, el mismo encaje que se definió en la prueba del mencionado teorema, nos auxiliará, pero antes para cada $A \subset \mathbb{N}$ es necesario definir

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}_{[A]} = (\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}, [a])_{a \in A}$$

el encaje f[1] toma las nuevas constantes $a \in A$, cuya imagen será $[a]$ mismas que se interpretarán como nuevas constantes en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}_{[A]}$ por lo tanto podemos afirmar que

$$Th(\mathbb{N}_A) = Th(\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}_{[A]}).$$

Definición 3.4.3. *Diremos que $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ es un n- tipo completo si para toda ϕ $\mathcal{L}_A$-formula con variables libres $v_1, ..., v_n$*

$$\phi \in \Sigma(v_1, ..., v_n) \qquad o \qquad \neg\phi \in \Sigma(v_1, ..., v_n).$$

Ejemplo 3.4.4. *Sean $\mathcal{M}$ y A como en el ejemplo anterior y*

$$q(v) = \{\phi(v) \in \mathcal{L}_A : \mathcal{M} \models \phi(1/2)\}$$

es claro que la formula

$$v < 3$$

pertenece a $q(v)$, mientras que

$$v > 2$$

no lo hace.

En general cada $\mathcal{L}_A$-formula ψ cumple con

$$\mathcal{M} \models \psi(1/2) \qquad o \qquad \mathcal{M} \models \neg\psi(1/2)$$

por lo tanto $q(v)$ es un 1-tipo completo.

A partir de ahora trabajaremos con tipos completos.

Definición 3.4.5. *Si $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ es un n-tipo sobre A, diremos que $\bar{a} \in M^n$ realiza a $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ si para toda $\phi \in \Sigma(v_1, ..., v_n)$*

$$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a}).$$

Si $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ no es realizable en $\mathcal{M}$ diremos que $\mathcal{M}$ omite a $\Sigma(v_1, ..., v_n)$.

[1]Donde f asigna a cada natural la clase de equivalencia de su función constante.

Ejemplo 3.4.6. *Recordemos los ejemplos anteriores en ellos $p(v)$ no es realizable en $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ y por otro lado $1/2$ realiza a $q(v)$.*

Para el siguiente teorema cambiaremos de lenguaje; el resultado es verdadero sólo en lenguajes de tamaño numerable.

Teorema 3.4.7. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable, $\mathcal{U}$ ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$, $A \subset \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$ numerable y $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ un n-tipo sobre $\mathcal{L}_A$.*
Entonces $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ es realizable en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$.

Demostración. Como $\mathcal{L}$ es numerable y A es subconjunto numerable de $\prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$, entonces

$$\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{C_a : a \in A\}$$

es numerable también, lo que hace que cada n-tipo sea numerable entonces podemos reescribir a $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ así

$$\Sigma(v_1, ..., v_n) = \{\sigma_m(v_1, ..., v_n) : m \in \mathbb{N}\}.$$

Ahora lo que debemos demostrar equivale a: $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ es realizable en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$ si y sólo si cada subconjunto finito de $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ es realizable en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$.

La implicación directa es trivial, prosigamos con la otra.

Definiremos n funciones de manera recursiva

$$f_1, ..., f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Sea $m = 1$ tomemos un subconjunto de $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ con un único elemento

$$\{\sigma_1\} \subset \Sigma(v_1, ..., v_n)$$

por hipótesis existe $[\alpha_1] \in (\prod \mathbb{N}/\mathcal{U})^n$ tal que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \sigma_1([\alpha_1]). \tag{3.11}$$

Sea A_1 el conjunto de constantes C_a con $a \in A$ que aparecen en σ_1, mismo que es finito

$$A_1 = \{C_1, ..., C_{r_1}\}.$$

Ahora cambiaremos cada constante de σ_1 por nuevas variables y nombraremos a esta nueva formula como σ_1', para continuar definamos la siguiente sucesión

$$[k_1], ..., [k_{r_1}] \in \prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$$

tales que para cada $1 \leq i \leq r_1$

$$[k_i] = C_i^{\mathcal{U}}.$$

Entonces (3.11) equivale a

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \sigma_1'([\alpha_1], [k_1], ..., [k_{r_1}]) \tag{3.12}$$

por Tarski podemos reescribir la expresión (3.12) así

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \exists v_1, ..., \exists v_n(\sigma_1'([k_1], ..., [k_{r_1}]))$$

aplicando el teorema de Łŏs obtenemos

$$V_1 = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \exists v_1, ..., \exists v_n(\sigma_1'(k_1(i), ..., k_{r_1}(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Sea

$$i_1 = min\{V_1\}$$

por medio de Tarski sabemos que existe $b_1, ..., b_n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{N} \models \sigma_1'(b_1, ..., b_n, k_1(i_1), ..., k_{r_1}(i_1))$$

ahora para cada $p \in [0, i_1]$ y toda $1 \leq i \leq n$ definamos

$$f_i(p) = \begin{cases} b_i & \text{, si } p \in V_1, \\ 0 & \text{, si } p \notin V_1. \end{cases}$$

Supongamos que para alguna $m \in \mathbb{N}$ tenemos debidamente definidos el subconjunto

$$\{\sigma_1, ..., \sigma_m\} \subset \Sigma(v_1, ..., v_n),$$

el elemento del ultrafiltro

$$V_m = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \exists v_1, ..., \exists v_n(\sigma_1' \wedge ... \wedge \sigma_m'(k_1(i), ..., k_{r_m}(i)))\} \in \mathcal{U}$$

y el intervalo $[i_{m-1} + 1, i_m]$ en el cual para toda p en él y toda $1 \leq i \leq n$, ocurre que

$$f_i(p) = \begin{cases} d_i & , \text{si } p \in V_m, \\ 0 & , \text{si } p \notin V_m. \end{cases}$$

donde

$$\mathbb{N} \models \sigma_1' \wedge ... \wedge \sigma_m'(d_1, ...d_n, k_1(p), ..., k_{r_m}(p))$$

donde de nuevo las formulas σ_i' se obtuvieron al cambiar las constantes de σ_i por nuevas variables.

Para $m + 1$ tomemos

$$\Gamma = \{\sigma_1, ..., \sigma_m, \sigma_{m+1}\} \subset \Sigma(v_1, ..., v_n)$$

la hipótesis implica la existencia de $[\alpha_{m+1}] \in (\prod \mathbb{N}/\mathcal{U})^n$ tal que para cualquier $\sigma_i \in \Gamma$

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \sigma_i([\alpha_{m+1}])$$

podemos asegurar que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_m \wedge \sigma_{m+1}([\alpha_{m+1}])$$

consideremos el siguiente conjunto

$$A_{m+1} = \{C_a : a \in A \text{ y } C_a \text{ aparece como constante en } \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_{m+1}\}$$

de nuevo dicho conjunto será finito entonces

$$A_{m+1} = \{C_1, ..., C_{r_{m+1}}\}$$

una vez más cambiaremos las fórmulas σ_i por sus versiones sin constantes y usaremos las clases $[k_i]$ para representar la interpretación de estas nuevas constantes, obteniendo así la expresión

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \sigma_1' \wedge ... \wedge \sigma_{m+1}'([\alpha_{m+1}], [k_1], ..., [k_{r_{m+1}}])$$

la cual por Tarski equivale a

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N} \models \exists v_1, ..., \exists v_n(\sigma_1' \wedge ... \wedge \sigma_{m+1}'([k_1], ..., [k_{r_{m+1}}]))$$

el teorema de Łŏs nos brinda el conjunto

$$V_{m+1} = \{i \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \models \exists v_1, ..., \exists v_n(\sigma_1' \wedge ... \wedge \sigma_{m+1}'(k_1(i), ..., k_{r_{m+1}}(i)))\} \in \mathcal{U}$$

sea

$$i_{m+1} = min\{j \in V_m \cap V_{m+1} : j > i_m + 1\}$$

Tarski implica que existen $e_1, ..., e_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\mathbb{N} \models \sigma'_1 \wedge ... \wedge \sigma'_{m+1}(e_1, ..., e_n, k_1(i_{m+1}), ..., k_{r_{m+1}}(i_{m+1})) \tag{3.13}$$

ahora para toda $p \in [i_m + 1, i_{m+1}]$ y cada $1 \leq i \leq n$ definamos

$$f_i(p) = \begin{cases} e_i & , \text{si } p \in V_{m+1}, \\ 0 & , \text{si } p \notin V_{m+1}. \end{cases}$$

por la manera en la que trabajan las funciones f_i y k_i si tomamos $p \in [i_m+1, i_{m+1}] \cap V_{m+1}$ la afirmación (3.13) deriva la siguiente

$$\mathbb{N} \models \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_{m+1}(f_1(p), ..., f_n(p)).$$

Todo lo realizado es para afirmar que $[f_1], ..., [f_n]$ realiza a $\Sigma(v_1, ..., v_n)$ en $\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N}$. Pongamos a prueba nuestra afirmación.

Sea

$$j \in \mathbb{N}$$

sabemos que existen el intervalo $[i_{j-1} + 1, i_j]$ y $V_j \in \mathfrak{U}$ tales que para cualquier $p \in [i_{j-1} + 1, i_j] \cap V_j$ tenemos que

$$\mathbb{N} \models \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_j(f_1(p), ..., f_n(p))$$

en general para toda $s \in \mathbb{N}$ si $s > j$ existirán $[i_{s-1} + 1, i_s]$ y $V_s \in \mathfrak{U}$ tales que, si $p \in [i_{s-1} + 1, i_s] \cap V_s$ tendremos

$$\mathbb{N} \models \sigma_1 \wedge ... \wedge \sigma_j \wedge ... \wedge \sigma_s(f_1(p), ..., f_n(p))$$

podemos ahora decir que para toda $p \in [i_{j-1} + 1, \infty] \cap V_j$ es verdad

$$\mathbb{N} \models \sigma_j(f_1(p), ..., f_n(p))$$

como el complemento de $[i_{j-1} + 1, \infty]$ es finito, este es un elemento del filtro de Fréchet mismo que esta contenido en $\mathfrak{U}$ al ser este no principal, entonces

$$[i_{j-1} + 1, \infty] \cap V_j \in \mathfrak{U}$$

podemos aplicar el teorema de Łǒs para obtener

$$\prod_{\mathfrak{U}} \mathbb{N} \models \sigma_j([f_1], ..., [f_n]).$$

$\square$

3.4.2. Modelos saturados

Definición 3.4.8. *Sea κ un cardinal infinito, diremos que un modelo $\mathcal{M}$ es κ-saturado si y sólo si para todo $A \subset M$ con $|A| < \kappa$, cada conjunto $\Sigma(v)$ de $\mathcal{L}_A$-formulas consistente con $Th(\mathcal{M}_A)$ es realizable en $\mathcal{M}_A$.*

Diremos que $\mathcal{M}$ es saturado si este es $|M|$-saturado.

Entonces el teorema 3.4.7 implica el siguiente corolario.

Corolario 3.4.9. *Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ entonces*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

es ω_1-saturado.

Si consideramos verdadera la hipótesis del continuo entonces el anterior teorema se puede replantear como:

Sean $\mathcal{L}$ un lenguaje numerable y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro no principal sobre $\mathbb{N}$ entonces

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$$

es saturado.

Capítulo 4

Apéndice

4.1. Una aplicación de los ultraproductos

En esta sección daremos una demostración alternativa para el teorema 2.1.14 El teorema de compacidad usando ultraproductos.

Teorema 4.1.1. *Sea Σ un conjunto infinito de enunciados de $\mathcal{L}$, $S_\omega(\Sigma)$ el conjunto de todas los subconjuntos finitos de Σ. Si para toda $i \in S_\omega(\Sigma)$, $\mathcal{M}_i$ es modelo de i entonces existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro en $S_\omega(\Sigma)$ tal que*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i \models \Sigma.$$

Demostración. Para toda $i \in S_\omega(\Sigma)$ sea

$$X_i = \{j \in S_\omega(\Sigma) : i \leq j\}.$$

Tomemos la siguiente familia de subconjuntos de $S_\omega(\Sigma)$:

$$F = \{X \subseteq S_\omega(\Sigma) : X \supseteq X_i \text{ para alguna } i \in S_\omega(\Sigma)\}$$

F es un filtro propio, probémoslo.

- Mostremos que $S_\omega(\Sigma) \in F$.
  Es claro que $S_\omega(\Sigma)$ es subconjunto de si mismo y que cualquier X_i está contenida en él.

- Dados $A, B \in F$.
  A y B son subconjuntos de $S_\omega(\Sigma)$ y existen $X_i, X_j \in S_\omega(\Sigma)$ tales que

  $$A \supseteq X_i \qquad \text{y} \qquad B \supseteq X_j$$

al intersectar A y B tenemos

$$A \cap B \supseteq X_i \cap X_j = X_{i \cup j}$$

entonces $A \cap B \in F$.

- Si $A \in F$ y $A \subseteq B \subseteq S_\omega(\Sigma)$.
  Es simple darse cuenta de que si para algún $i \in S_\omega(\Sigma)$ ocurre que

  $$A \supseteq X_i$$

  entonces también

  $$B \supseteq X_i.$$

- Finalmente para que F sea propio supongamos que

  $$\emptyset \in F$$

  entonces para alguna $i \in S_\omega(\Sigma)$

  $$\emptyset \supseteq X_i$$

  pero $X_i \neq \emptyset$, una contradicción.

F es un filtro propio, este se puede extender a un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en $S_\omega(\Sigma)$.

Ahora para toda $\phi \in \Sigma$ y $j \in X_\phi$ ocurre que

$$\mathcal{M}_j \models \phi$$

tenemos que $X_\phi \in F$ al ser un subconjunto de $S_\omega(\Sigma)$ y contener a todos los X_i en los cuales aparece ϕ. Por lo tanto

$$X_\phi \in \mathcal{U}$$

podemos usar el teorema de Łŏs para implicar que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i \models \phi$$

como ϕ fue un elemento arbitrario de Σ podemos afirmar que

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{M}_i \models \Sigma.$$

$\square$

4.2. Ultrafiltros Hausdorff.

En la subsección 3.2.1 el teorema 3.2.10 afirma que el ultrafiltro $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ es no Hausdorff, cabe preguntarse por los que si lo son. Nos auxiliaremos del siguiente teorema para hablar un poco de ultrafiltros Hausdorff.

Teorema 4.2.1. *Todo ultrafiltro Rudin-Keisler minimal es Hausdorff.*

Antes de seguir recordemos la definición de ultrafiltro Hausdorff.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en $\mathbb{N}$, diremos que es *Hausdorff* si y sólo si para todas $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si

$$f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U})$$

entonces

$$f \sim_{\mathcal{U}} g.$$

Demostración. (Teorema 4.2.1)
Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro Rudin-Keisler minimal y $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Supongamos que

$$f(\mathcal{U}) = g(\mathcal{U}),$$

como $\mathcal{U}$ es minimal tenemos que

$$f(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \qquad \text{y} \qquad g(\mathcal{U}) = \mathcal{U},$$

entonces existen $U \in \mathcal{U}$ tal que

$$f\restriction_U = id_U$$

y $V \in \mathcal{U}$ para el cual

$$g\restriction_V = id_V.$$

Como $U \cap V \in \mathcal{U}$ se sigue que

$$f\restriction_{U\cap V} = id_{U\cap V} = g\restriction_{U\cap V},$$

por lo tanto

$$f \sim_{\mathcal{U}} g;$$

es decir $\mathcal{U}$ es Hausdorff. □

Por último mencionaré que es un problema abierto decidir si **ZFC** demuestra la existencia de ultrafiltros Hausdorff o bien si hay un modelo de **ZFC** en el cual no existan ultrafiltros Hausdorff.

Capítulo 5

Notación

$\mathcal{L}$	Lenguaje.
$f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, C^{\mathcal{M}}$	Símbolos f, R, C de función, relación y constate interpretados en $\mathcal{M}$.
$\phi(v_1, ..., v_n)$	Formula ϕ con $v_1, ..., v_n$ como unicas variables libres.
$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})$	El modelo $\mathcal{M}$ satisface a la formula ϕ bajo la sucesión $\bar{a}$.
$\mathcal{M} \models \phi(\bar{a})(j/b)$	Representa $\mathcal{M} \models \phi(a_1, ..., a_{j-1}, b, a_{j+1}, ..., a_n)$.
$Th(\mathcal{M})$	El conjunto de todas los enunciados verdaderas en $\mathcal{M}$.
$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$	$\mathcal{N}$ subestructura de $\mathcal{M}$.
$\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$	$\mathcal{N}$ es subestructura elemental de $\mathcal{M}$.
$\mathcal{N} \hookrightarrow \mathcal{M}$	$\mathcal{N}$ esta encajada en $\mathcal{M}$.
$\mathcal{N} \precsim \mathcal{M}$	$\mathcal{N}$ esta encajada elementalmente en $\mathcal{M}$.
$\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$	$\mathcal{U}$ es menor que $\mathcal{V}$ en el orden de Rudin Keisler.
	La notación anterior se mantiene si cambiamos el modelo $\mathcal{M}$ **por** $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$.
$f \sim_{\mathcal{U}} g$	Significa que $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.
$[f]_{\mathcal{U}}$	Representa a $\{g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : \{n \in \mathbb{N} : f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}\}$.

$\prod \mathbb{N}/\mathcal{U}$	El universo de $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$.
$S_\omega(A)$	El conjunto de todos los subconjuntos finitos de A.
$\bar{f}$	La extensión de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
	$\bar{f} : \prod_{f(\mathcal{U})} \mathbb{N} \to \prod_{\mathcal{U}} \mathbb{N}$; $[g]_{f(\mathcal{U})} \mapsto [g \circ f]_{\mathcal{U}}$.

Referencias

[1] Blass, Andreas. *Comunicación personal, 23 Diciembre 2011.* 57

[2] Blass, Andreas. 1970. Ultrafilters on Countable Sets. *Ann. Mat. Logic 2 (1970), 1-24.*

[3] Chang, C. C., & Keisler., H. Jerome. 1992. *Model Theory.*

[4] de Cervantes Saavedra., Miguel. 1615. *El ingenioso caballero don Quijote de la Mancha.* i

[5] Gryzlov, Anatoly. 1995. On the Rudin-Keisler order on ultrafilters. *Proceedings of the Fourth Russian-Japanese Colloquium on General Topology (Moscow, 1995).*

[6] J. L, Bell, & Slomson., A. B. 2006. *Models and Ultraproducts and introduction.* 10

[7] Keisler, H. Jerome. 2010. The ultaproduct construction. *Ultrafilters across mathematics, 163–179, Contemp. Math., 530, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.*

[8] Marker., David. 2000. *Model Theory an introduction.*

[9] Mendelson., Elliott. 1979. *Introduction to Mathematical Logic.*

[10] Nasso, Mauro Di. 2000. Hausdorff Ultrafilters. *Proc. Amer. Math. Soc.134 (2006), no. 6.*

[11] Neruda., Pablo. 1924. *Veinte poemas de amor y una canción desesperada.* 3

[12] Sacks., Gerald E. 1972. *Saturated Model Theory.*

[13] Simpson., Stephen G. 2008. *Mathematical Logic.*

[14] Zdeněk, Frolík. 1970. Fixed points of maps of $\beta\mathbb{N}$. *Bulletin of the American Mathematical Society (1967), 187-192.* 59