



UNIVERSIDAD MICHOACÁNA DE SAN
NÍCOLAS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

Las nociones e ideas iniciales en la
Teoría de Probabilidades: Cartas entre
Fermat y Pascal

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

Lic. en Ciencias Físico Matemáticas

PRESENTA:

Perla Edith Bermúdez Ortiz

DIRECTORA DE TESIS:

Dra. María de Lourdes Guerrero Magaña

Dra. en Ciencias en la especialidad de matemática
educativa



Julio 2014

Agradecimientos

Primeramente quiero agradecer infinitamente a dios, por todo lo que me ha dado.

A mis padres Vicente Bermúdez y María Rosa Ortiz por estar siempre al pie del cañón, porque gracias a ustedes he logrado una meta mas en vida, por los valores inculcados y sobre todo por su ejemplo de lucha.

A mi hermana favorita Yesi, porque a pesar de las riñas y a pesar de todo, hemos estado siempre unidas. Porque me conoces tal y como soy, por aguantarme a pesar de todas mis faltas, porque posiblemente pensarás que “no te queda de otra” pero siempre estás conmigo.

A todos y cada uno de mis profesores que han contribuido a mi formación, que gracias a ello he llegado hasta aquí, en especial a mi asesora la Dra. Lourdes Magaña Guerrero por su empeño, paciencia, apoyo y dedicación para conmigo y el desarrollo de este trabajo.

A mis amigos que ya no están pero han formado parte de mi vida y me han ayudado a creer y confiar más en mí, a Marlén, Martha, Rosaura, Erika, Esperanza, a ustedes gracias por ser las mejoras amigas, hermanas que pude haber encontrado, por todos los buenos momentos desde el inicio de esta aventura, he aprendido mucho de ustedes.

A Elizabeth gracias por tu apoyo y ayuda incondicional, por aguantarme en mis peores momentos, por estar en los mejores también, por estar siempre conmigo, porque tu virtud mas grande, es la facilidad que tienes para hacerme sentir fortalecida.

A Tzinzun por estar ahí siempre, porque en mi vida ha entrado y salido mucha gente, pero tú has dejado huella en mi vida.

Índice

Índice	3
Resumen	6
Abstract	7
C1: Introducción	8
1.1. Introducción	8
1.2. Objetivo general	10
1.3. Objetivos particulares	10
1.4. Descripción del trabajo general	11
C2: El estudio de la Probabilidad en la escuela	12
2.1. El análisis exploratorio de datos (EDA por sus siglas en ingles)	13
2.2. Teoría de los significados propuesta por Gordino y Batanero	16
C3: El tratamiento moderno de la probabilidad	20
3.1. Conceptos fundamentales	20
3.1.1. Experimentos aleatorios, resultados, eventos	21
3.1.2. Unión e intersección de Eventos. Eventos mutuamente exclusivos	23
3.1.3. Concepto clásico de probabilidad matemática	27
3.1.4. Concepto de probabilidad en estadística	28
3.2. Determinación práctica de probabilidades	33
3.3. Permutaciones y combinaciones	36
3.4. Probabilidad	39

3.5. Estadística.	43
3.6. La curva de la campana	44
C4: Perspectiva histórica	49
4.1. Primeras ideas de la teoría de probabilidades	50
4.2. Primer problema de los puntos	52
4.3. Problema de proporcionalidad	62
4.4. Segundo problema de los puntos	64
4.5. La apuesta interrumpida	69
4.5.1. ¿Qué pasaría si fueran más de dos jugadores?	70
4.6. Apuestas ventajosas	74
4.7. Los asombrosos Bernoulli	78
4.7.1. En el mundo cotidiano	78
4.7.2. El arte de la conjetura	80
4.8. El reverendo Bayes y su fórmula	81
4.8.1. Fórmula de Bayes	83
4.9. Las estructuras abstractas del azar	86
4.9.1. Libros de los juegos de azar	86
4.10. Primeras letras	91
C5: Aportaciones de Pascal y Fermat	93
5.1. El método universal de Pascal	95
5.2. El gran aficionado	96
5.3. Un trato holandés con grandes expectativas	97
5.4. La medida de nuestra ignorancia	99
C6: Discusión y conclusiones	102

A. Apéndice	104
B. Anexos	111
B.1. Biografías	111
B.1.1. Blaise Pascal	111
B.1.2. Pierre de Fermat	116
B.1.3. Girolamo Cardano	123
B.1.4. Luca Pacioli	130
B.1.5. Jakob Bernoulli	133
B.1.6. Tartaglia Niccoló Fontana	136
B.1.7. Abraham de Moivre	139
Bibliografía Consultada	141
Bibliografía	141

Resumen

Los primeros estudios “científicos” en teoría de probabilidades, se centran en dos problemas:

1. Contabilizar el número de posibles resultados de lanzar un dado varias veces.
2. Distribuir las ganancias entre jugadores cuando el juego se interrumpía antes de finalizar, conocido como “el problema de reparto de apuestas”.

En el presente trabajo de corte histórico, se presentan los trabajos realizados por Blaise Pascal y Pierre de Fermat, considerados como los iniciadores de la teoría de probabilidades, concepto que nos permite pensar racionalmente acerca de las decisiones y eventos, analizando su intercambio epistolar; resolvieron varios problemas, planteados incluso por otros matemáticos, como la apuesta sin terminar y el problema de los puntos, así como la solución a los mismos.

Se desarrolla el tratamiento moderno de la teoría de probabilidades, así como algunos conceptos fundamentales en probabilidades.

El estudio de la probabilidad en la escuela es fundamental, las reformas curriculares sugieren que la enseñanza de la estadística se enfoque más en datos reales y conceptos, que se automaticen en la mayor medida posible los cálculos.

La importancia esencial de la aplicación de los métodos de cálculo de la probabilidad reside en su capacidad para estimar o predecir eventos.

Palabras clave *Blaise Pascal Pierre de Fermat Correspondencia epistolar Probabilidad Problema de los puntos*

Abstract

The first studies scientist in probabilities theory, focus on two problems:

1. Counting the number of possible outcomes of rolling a dice several times.
2. Distribute profits among players when the game interrupted prior to finally, known as the problem of distribution of bets.

In the present work of type historical, the work done by BlaisePascal and Pierre de Fermat, considered the pioneers of probability theory, concept that allows us to think rationally about decisions and events, analyzing their epistolary exchange are presented; resolvier on several problems posed even by other mathematical penthouses, as the unfinished bet, the problem of points, as soon as a solution on to them.

Develops on modern management of the probabilities theory , as some fundamental concepts in probability.

The study of probability in school is essential, curriculum reforms suggest that teaching statistics focus more on real data and concepts, that automate as much as possible the calculus.

The essential importance of the application of the methods of calculation of the probability lies in its ability to estimate or predict events.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

La gente siempre ha tenido fascinación por la suerte. Según la antigua mitología griega, el mundo empezó cuando los tres hermanos Zeus, Poseidón y Hades se jugaron a los dados el Universo. La leyenda indica que Zeus ganó el primer premio, los cielos; Poseidón obtuvo el segundo, los mares, y Hades tuvo que instalarse en el infierno.

Muchos historiadores de la ciencia, como Morris Kline y Andreas Speiser, coinciden en señalar que las aportaciones contenidas en las cartas escritas entre Pascal y Fermat, marcan el nacimiento de la teoría de la Probabilidad. No sólo por su contenido, sino por el prestigio de estos dos matemáticos que atrae a otros científicos de la época hacia este tema.

Hasta entonces el estudio del azar no había sido trabajado de manera sistemática. No es claro por qué. En parte, puede ser por provenir de los juegos y las apuestas y como tal, era considerado como algo poco serio; en tiempos más remotos, su vínculo con cuestiones religiosas tales como los oráculos, la adivinación del futuro etc., le pudo haber conferido un carácter sagrado que impidió su estudio.

Los expertos y encuestadores que hoy nos dicen que es probable quién gane las próximas elecciones, hacen uso directo de las técnicas matemáticas desarrolladas por Pascal y Fermat. En la medicina moderna y de futuras predicciones, los métodos estadísticos se utilizan todo el tiempo para comparar los beneficios de los medicamentos y tratamientos,

con sus riesgos. Como resultado, la mayoría de las personas en el mundo desarrollado llevan una vida más larga y saludable que en cualquier época de la historia.

Actualmente no podemos vivir sin la probabilidad, estamos prácticamente basados en ella, es como una predicción del futuro, negocios, la política, la defensa, la guerra, la ciencia, la ingeniería, la medicina, el deporte, la recreación, finanzas, vivienda, transporte, y muchos otros aspectos de la vida cotidiana están hoy en día llenos de cálculos de probabilidad.

La probabilidad matemática tiene sus orígenes en los juegos de azar, principalmente los juegos con dados y cartas, muy populares desde tiempos antiguos. Los primeros estudios “científicos” sobre fenómenos aleatorios se centraban en dos problemas:

1. Contabilizar el número de posibles resultados de lanzar un dado varias veces.
2. Distribuir las ganancias entre jugadores cuando el juego se interrumpía antes de finalizar, conocido como el “problema del reparto de apuestas”.

El desarrollo de la teoría de la probabilidad experimentó un gran avance en Francia a mediados del siglo XVII, con la correspondencia que mantuvieron Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665) durante 1654. Antoine Gombaud, caballero de Méré, filósofo y literato que jugaba compulsivamente, pidió a Pascal que le resolviese el problema del reparto de apuestas. Pascal y Fermat lo resolvieron correctamente por medios diferentes pero equivalentes, aunque el desconocimiento de una teoría general les hizo pensar que no lo eran. El acierto de ambos consistió en darse cuenta de que el reparto de las apuestas, debe hacerse en función de la probabilidad de ganar que tuviese

cada jugador en el momento de interrumpirse el juego. Para hallar la solución correcta se valieron de una rigurosa metodología desconocida hasta entonces; sin embargo, Pascal falló en su intento de extender el procedimiento al caso en que hubiera tres o más jugadores.

En estas cartas, se discuten diversos problemas de matemáticas, entre los cuales se encuentran varios problemas relativos a juegos de azar.

1.2. Objetivo general

El propósito de este documento, es resaltar la importancia de las aportaciones de diferentes matemáticos en el desarrollo de la probabilidad. Particularmente se utilizan las comunicaciones de Pascal y Fermat, documentos que han sido considerados por diferentes historiadores como los iniciadores de esta área de las matemáticas.

1.3. Objetivos particulares

Si bien el trabajo que se plantea en esta tesis de corte histórico, también hay un componente matemático importante, pues el interés central es entender la evolución en el desarrollo de la probabilidad. Se pretende ubicar los elementos que permitieron la aparición y desarrollo de la probabilidad, así como las aportaciones de diferentes matemáticos y ver cómo es que fue evolucionando y cómo es que se transmite el conocimiento actualmente.

Este trabajo se basa en la investigación de varios documentos, tanto histórico como actuales. Analizando principalmente los intercambios escritos entre Pascal y Fermat, que contribuyen a la base de lo que ahora conocemos como teoría de probabilidades.

1.4. Descripción del trabajo general

El trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el presente capítulo se da una introducción de lo que será el trabajo presentado, los objetivos tanto general como particulares, así como la simbología que se utilizó para el desarrollo del mismo.

En el capítulo 2 se analiza cómo es el estudio de Probabilidad en la escuela, cómo es que se puede desarrollar por medio de software y se agrega la teoría de significados propuesta por Gordino y Batanero (2002).

En el capítulo 3 se desarrolla el tratamiento moderno de probabilidad, el método de Pascal descrito con la terminología actual, así como algunos conceptos fundamentales en probabilidad.

En el capítulo 4 se plantea la perspectiva histórica de la presente investigación, cómo es que se fueron desarrollando las bases de la probabilidad. Se plantean los principales problemas planteados por Pascal y Fermat así como su solución.

En el capítulo 5 se presentan los métodos usados por Pascal y Fermat para resolver el problema de apuestas, y cómo es que esto aporta las ideas y las bases para emprender lo que actualmente se conoce como teoría de la probabilidad.

Por último, en el capítulo 6 se presentan la discusión y conclusiones de todos los capítulos anteriormente escritos en esta investigación.

Se anexan además, un apéndice sobre el concepto de independencia de eventos, así como las biografías de los personajes ilustres más importantes mencionados en el presente trabajo.

Capítulo 2

El estudio de la Probabilidad en la escuela

La probabilidad es bastante intuitiva, y a los jóvenes les debería causar una cierta motivación el relacionarse con estos conceptos. Nadie duda que si tiramos un dado, la probabilidad de sacar 3 es $\frac{1}{6}$. Aunque experimentalmente habría que tirar una cantidad enorme de veces el dado para poder apreciar el número esperado. Si aún así no se lograra ver el valor esperado, el jugador podría sospechar que el dado está cargado.

La relación que existe entre la sociedad y la incertidumbre es muy fuerte. Basta ver la forma en que nace el primer estudio sistemático de la probabilidad.

El enfoque que ha prevalecido por muchos años en la enseñanza de la estadística de los diferentes niveles educativos, ha estado centrado en el uso de fórmulas y procedimientos. Aunado a ello, con frecuencia los contenidos estadísticos no se enseñan con la profundidad que se merecen, y en el mejor de los casos la enseñanza de la estadística es un pretexto para aplicar otros temas matemáticos y ejercitar la capacidad de cálculo o representación gráfica, olvidando el trabajo con datos reales y los aspectos del razonamiento estadístico.

Las reformas curriculares sugieren que la enseñanza de la estadística se enfoque más en datos reales y conceptos, que se automaticen en la mayor medida posible los cálculos y la construcción de gráficas por medio de tecnología, como una medida para dedicar mayor tiempo a la interpretación de los datos, y se fomente un aprendizaje activo por parte de los estudiantes (Cobb, 1992). Sin embargo, en nuestro país, dichos procesos de reforma aún cuando ya han sido considerados en diversas instituciones, muchos profesores siguen sin conocerlos y por ende, sin ponerlos en práctica en el salón de clases.

2.1. El análisis exploratorio de datos (EDA por sus siglas en ingles)

El EDA emplea una variedad de técnicas, principalmente gráficas, para obtener la máxima información de los datos. Explorar un conjunto de datos incluye examinar forma, centro y dispersión, e investigar varias gráficas para ver si revelan agrupamientos de datos, huecos o datos atípicos, para descubrir patrones y plantear hipótesis. Con base en lo anterior, es evidente que la tecnología computacional juega un papel muy importante para la implementación de un enfoque basado en los principios del EDA, ya que las computadoras hacen posible manipular y desplegar datos de manera rápida y de diversas formas, a través de paquetes de software estadístico.

La experiencia en la enseñanza de la materia, proporciona elementos para señalar que el enfoque tradicional de fórmulas, cálculos y procedimientos ocupa aún un lugar importante en la práctica de muchos profesores. En este sentido, cabe señalar que un estudio exploratorio realizado por Inzunza y Juárez (2007) con profesores de bachillerato universitario, muestra un moderado nivel de razonamiento estadístico en los profesores de matemáticas e incluso en algunos que habían impartido cursos de estadística.

En un estudio con profesores de bachillerato alrededor de un entorno computacional realizado por Inzunza y Juárez (2010), se observó que se enfocan más en el cálculo de los promedios para describir y para comparar distribuciones, más que en propiedades importantes de los datos como la variabilidad, forma y datos atípicos. Se construyen gráficos interesantes que reflejan las características de los datos, pero no los utilizan para apoyar sus conclusiones en el análisis de los datos.

En tercer grado (quinto semestre del bachillerato general), se imparte la asignatura

de estadística que tiene una frecuencia de tres sesiones por semana. Uno de los temas de gran importancia son las medidas de tendencia central, un tema que muchos profesores consideran sumamente sencillo para los estudiantes, pero los estudios anteriores revelan ciertas complicaciones en la parte conceptual y sobre todo cuando se salen de la media simple. Otro problema que presentan es el dominio de las propiedades de los promedios, esto se debe a que se le da más importancia a lo algorítmico.

Cuando los estudiantes usan software, desarrollan habilidades que les permiten optimizar tiempo en la elaboración de gráficas y cálculo de promedios, y así enfocarse en explorar y analizar datos.

Optimizar tiempo es fundamental, en las clases tradicionales donde los profesores “*pizarroneros*” transcriben el contenido del libro de texto y los estudiantes anotan en su cuaderno de trabajo, este proceso les consume la mayor parte del tiempo. En el caso de estadística el software es un recurso didáctico fundamental, pero también se debe tener cuidado en su uso. Algunos estudiantes no pueden calcular los promedios sin él, es por ello que se debe ser consiente en automatizar los cálculos hasta donde se considere pertinente.

Por otra parte, el diseño de actividades con un enfoque exploratorio de datos, lleva al estudiante a utilizar las representaciones gráficas para observar tendencias, huecos, datos atípicos, entre otras cosas propias del EDA.

La implementación de las actividades con el apoyo de software educativo, para la enseñanza de la estadística en un ambiente exploratorio de datos tiene un efecto positivo en el desarrollo del razonamiento estadístico.

Como consecuencia de la experiencia, se sugiere enfocar más la enseñanza de la estadística hacia el desarrollo de procesos de mayor nivel cognitivo que en el simple manejo

de fórmulas y procedimientos.

La experiencia de muchos profesores como Godino y Batanero (2007) y diversos resultados de investigación en educación estadística, señalan que las distribuciones muestrales constituyen un concepto notoriamente difícil para muchos estudiantes.

Entre otros tantos investigadores, Moore (1992) asocia las dificultades de comprensión de la inferencia estadística y las distribuciones muestrales a la enseñanza tradicional que ha prevalecido hasta ahora, donde se utiliza un enfoque basado en probabilidad, la cual es reconocida como una de las áreas más complejas de las matemáticas.

Ante las dificultades que entraña el enfoque formal basado en variables aleatorias y distribuciones teóricas de probabilidad para los estudiantes con poca formación matemática, muchos educadores estadísticos (Shaughnessy, 1992; Gordon y Gordon, 1992; Thisted y Velleman, 1992; Mills, 2002; Sánchez e Inzunza, 2006) han sugerido un acercamiento empírico basado en simulación computacional.

Consideramos que las características del software y la manera como se utiliza en las actividades de enseñanza, pueden tener una influencia importante en la construcción de significados por parte de los estudiantes. Sin embargo, esta línea requiere aún de mucha investigación que ayude a aclarar los puntos más problemáticos del aprendizaje de las distribuciones muestrales y su relación con la inferencia estadística.

Al usar software lo que se pretende, es que los alumnos tengan una mejor concepción acerca del significado y la comprensión de los objetos matemáticos y estadísticos. Las computadoras actualmente se consideran como herramientas cognitivas, con potencial para generar cambios en la actividad mental de los estudiantes cuando exploran conceptos y resuelven problemas matemáticos.

2.2. Teoría de los significados propuesta por Gordino y Batanero

La teoría de los significados propuesta por Godino y Batanero (1994, 1998) y Godino (2002), se caracteriza por la adopción de dos enfoques en la definición de sus elementos teóricos:

1. Un *enfoque antropológico* en el estudio de la cognición matemática, en el cual se parte de que las personas trabajan e interactúan dentro de diferentes grupos o instituciones donde las matemáticas son objeto de estudio y, por lo tanto, el significado no es único y está mediado por las características del contexto donde se abordan los objetos matemáticos.
2. Un *enfoque pragmático* en el estudio de los objetos matemáticos, que implica que el significado de un objeto matemático está en función del sistema de prácticas o uso que se hace de él para resolver situaciones problemas.

El enfoque antropológico conduce a tener en cuenta dos dimensiones interdependientes del significado de los objetos matemáticos: *significado institucional y significado personal*. El significado institucional, es el significado que un objeto matemático tiene para un determinado grupo de profesionales interesados en las situaciones-problema de donde éste emerge; mientras que el significado personal es el significado que una persona (por ejemplo un estudiante) le atribuye al objeto matemático.

Por su parte, el enfoque pragmático permite definir el significado de un objeto matemático, como el sistema de prácticas (institucionales o personales) que se utilizan para resolver un campo específico de problemas en un determinado contexto.

En Godino (2002) se propone una tipología de cinco elementos, de acuerdo con las funciones que desempeñan en el trabajo matemático. Esta tipología constituye los *elementos de significado*, que permiten establecer tanto el significado personal como *institucional* de los objetos matemáticos. Dichos elementos así como sus funciones específicas son:

1. *Problemas y situaciones (elementos fenomenológicos)*. Se refiere al campo de problemas o situaciones de las que surge el concepto de estudio.
2. *Representaciones y lenguajes (elementos representacionales)*. Es cualquier representación verbal o escrita, que se utiliza para referirse o representar los conceptos y propiedades que intervienen en un problema.
3. *Acciones y procedimientos (elementos procedimentales)*. Son los procedimientos o estrategias que se utilizan para resolver los problemas o situaciones presentadas.
4. *Conceptos y propiedades (elementos conceptuales)*. Son los conceptos, propiedades y sus relaciones con otros conceptos que se ponen en juego cuando se resuelve un problema.
5. *Validaciones y argumentaciones (elementos argumentativos)*. Los argumentos o validaciones que se utilizan para obtener un resultado, comunicarlo a otros o convencerse a uno mismo de su validez.

La comprensión de un objeto matemático desde esta perspectiva consiste en un proceso continuo y progresivo, donde los estudiantes adquieren y relacionan los distintos elementos que componen el significado del concepto. La otra componente que hemos utilizado tiene que ver con la manera cómo puede usarse la computadora en el proceso de aprendizaje

de las matemáticas y, particularmente, en el de la estadística. Pea (1987) sostiene que la inteligencia no es una cualidad de la mente sola, sino un producto de la relación entre estructuras mentales y herramientas del intelecto proporcionados por la cultura, como es el caso de las computadoras. Para Pea (1987, p. 91), “una herramienta cognitiva es cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas”. En particular, en el caso de las computadoras constituyen una extraordinaria y potente herramienta cognitiva para aprender a pensar matemáticamente; con ellas se pueden operar, no sólo números, sino también símbolos; permiten además, almacenar y manipular símbolos dinámicamente y permiten interacciones con los usuarios en tiempo real.

Apoyado en estas ideas, Dorfler (1993) propone un marco conceptual sobre el uso de la computadora en la educación matemática e identifica algunas maneras en las que una herramienta computacional puede generar cambios en la actividad mental de los estudiantes:

1. Cambio de las actividades a un nivel cognitivo más alto (meta-nivel).
2. Cambio de objetos con los que se realizan las actividades.
3. Enfoca las actividades en transformación y análisis de representaciones.
4. Apoya la cognición situada y resolución de problemas.

Es importante que, antes de que los estudiantes se inicien en el estudio de la inferencia estadística, tengan experiencias de enseñanza donde exploren el concepto de distribuciones muestrales y sus propiedades, el teorema del límite central y el efecto del tamaño

de muestra en la probabilidad de un determinado resultado muestral; un ambiente de estadística dinámica, apoyado en representaciones múltiples, parece ser apropiado para ello.

Consideramos que, los significados que los estudiantes atribuyen a las distribuciones muestrales después de la experiencia de enseñanza con simulación les pueden ayudar a comprender más fácilmente procedimientos inferenciales. Por ejemplo, en los procesos de estimación, es importante el hecho de entender cuáles son los valores más probables de ciertos resultados muestrales y alrededor de qué valor se encuentran. Así como entender que, cuando la variabilidad muestral rebasa ciertos límites, puede deberse a causas no atribuibles al azar, lo que es importante en procesos de prueba de hipótesis.

Capítulo 3

El tratamiento moderno de la probabilidad

En muchos campos de la actividad humana se trabajan fenómenos que poseen algún grado de incertidumbre y en un importante número de situaciones se llega a decisiones soportadas en el estudio de tales hechos.

La incertidumbre se presenta debido a la aleatoriedad del fenómeno que se observa, pero además por el desconocimiento del verdadero estado del sistema lo cual equivale a ignorar los parámetros que determinan ese estado de la naturaleza. Existe incertidumbre, por ejemplo cuando: el agricultor se interesa sobre cuantas semillas serán vanas; el jefe de producción debe detener o no el proceso de producción; al sociólogo le interesa de un conglomerado sus ingresos, estado civil, edad, etc; el ingeniero electrónico debe identificar la confiabilidad de un sistema. Se requiere por lo tanto de un procedimiento estructurado, sistematizado, formalizado, es decir, científico, para manejar la incertidumbre y que además permita cuantificar los diversos niveles de ésta.

El ser humano ha tratado de medir su nivel de incertidumbre, tal medida se conoce como probabilidad. Filosóficamente no se está desarrollando o descubriendo la probabilidad, ella es inherente al ser humano, se está cuantificando.

3.1. Conceptos fundamentales

La teoría de probabilidad matemática, tiene sus orígenes en la teoría de la causalidad. Pascal y Fermat hicieron estudios probabilísticos acerca de los problemas de juegos en los principios de 1654. Posteriormente, una teoría sistemática fue desarrollada por Jacob

Bernoulli (*Ars coniectandi*, 1713), Abraham de Moivre (*The Doctrine of Chances*, 1718) y Pierre Simón de Laplace (*Théorie analytique des probabilités*, 1812).

3.1.1. Experimentos aleatorios, resultados, eventos

Por un *experimento aleatorio* u *observación aleatoria*, o simplemente **experimento** u **observación**, se entenderá un proceso que tiene las siguientes propiedades:

1. El proceso se efectúa de acuerdo a un conjunto bien definido de reglas.
2. Es de naturaleza tal, que se repite o puede conseguirse la repetición del mismo.
3. El resultado de cada ejecución depende de la “casualidad” (esto es, de influencias que no pueden ser controladas) y, por lo tanto, no se puede predecir el resultado.

Al resultado de una sola ejecución del experimento se le llama **resultado** del ensayo.

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento se le llama el **espacio muestral o de la muestra** del experimento, y se denota por S . A cada resultado se le llama *elemento* o *punto* de S . Se dice que un espacio muestral es *finito* o *infinito*, cuando el conjunto tiene un número finito o infinito de elementos, respectivamente.

En muchos problemas prácticos, no estamos tan interesados en los resultados individuales, sino en el hecho de que un resultado se encuentre contenido (o no contenido) en un cierto conjunto de resultados. Es claro que cada conjunto A de este tipo es un subconjunto del espacio muestral S . Este se llama **evento**.

Cada resultado es un subconjunto de S por lo cual es un evento, pero más especial, de manera que algunas veces se denomina *evento elemental*, para distinguirlo de otros eventos que constan de más de un punto de S . La noción del evento incluye también el espacio muestral completo S , como un caso especial.

Un espacio muestral S y los eventos de un experimento se pueden representar gráficamente mediante un **diagrama de Venn** como sigue:

Supóngase que el conjunto de puntos que están dentro del rectángulo de la figura 1 representan S . Entonces, el interior de una curva cerrada que se localiza dentro del rectángulo representa un evento que denotaremos por E .

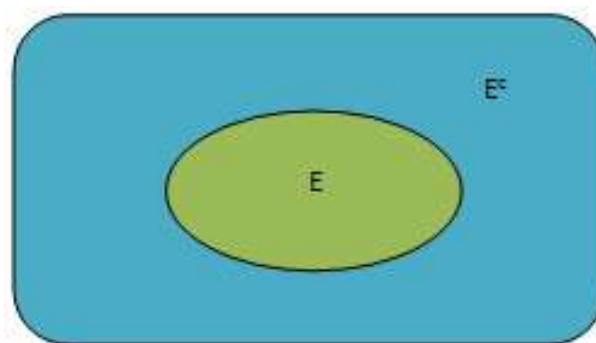


Figura 1. Representación gráfica de un espacio muestral y de eventos

El conjunto de todos los elementos (resultados) que no se encuentran en E , se llama el **complemento** de E en S y se denota por E^c .

3.1.2. Unión e intersección de Eventos. Eventos mutuamente exclusivos

Un evento que no contiene elementos se denomina *evento imposible*, o *evento vacío* y se representa por ϕ .

Supóngase que efectuamos un experimento n veces y que en esta serie de n pruebas ocurren precisamente k veces un evento E . Entonces k se llama *frecuencia absoluta* o, brevemente, **frecuencia**, y k/n es la **frecuencia relativa** de E en esa serie. Esta frecuencia relativa se presentará por $\tilde{f}(E)$. Entonces

(1)

$$\tilde{f}(E) = \frac{k}{n}.$$

Puesto que k no puede ser negativa y no puede exceder a n , tendremos que siempre se satisface la relación

(2)

$$0 \leq \tilde{f}(E) \leq 1,$$

esto es, *la frecuencia relativa de un evento es un número no negativo que no puede exceder a 1*.

Unión e intersección de eventos

En las aplicaciones de la teoría de probabilidades trataremos muchas veces con eventos relacionados entre sí, más que con un solo evento. Por esta razón consideraremos ahora un experimento aleatorio arbitrario, con su espacio muestral correspondiente S , y con cualesquiera dos eventos A y B en el experimento. Entonces

$$A \cup B$$

representa el evento que ocurre si, y sólo si, ocurre A u ocurre B o ambos.

El evento $A \cup B$ se llama **unión** de los eventos A y B .

Obsérvese que $A \cup B$ consta de todos los elementos que se encuentran contenidos en A o en B , o en ambos; así que la notación $A \cup B$ está de acuerdo con la notación usual de la teoría de conjuntos, donde $A \cup B$ representa la unión de dos conjuntos A y B .

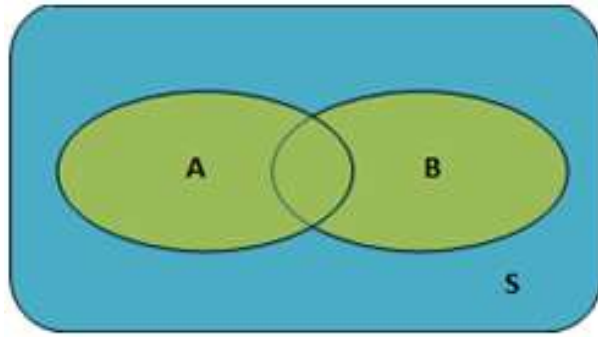


Figura 2. Representación gráfica de la unión de dos conjuntos

Además

$$A \cap B$$

representa el evento que ocurre si, y sólo si, ocurren A y B simultáneamente, esto es, si ocurren en la misma ejecución del experimento en consideración. El evento $A \cap B$ se llama **intersección** de los eventos A y B .

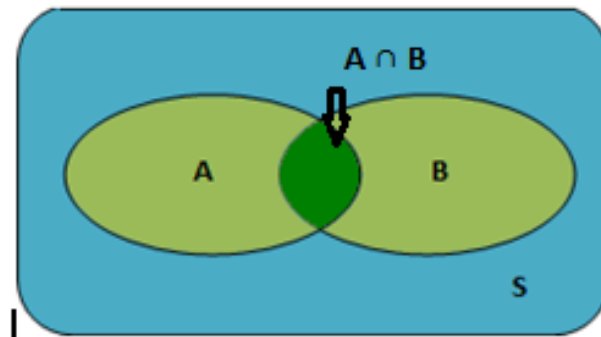


Figura 3. Representación gráfica de la intersección de dos eventos

Eventos mutuamente exclusivos

Si no es posible que A y B ocurran simultáneamente, los llamaremos **eventos mutuamente exclusivos** o *eventos sin intersección mutua*. Este caso se representa solamente cuando $A \cap B = \phi$, el evento vacío, de tal manera que A y B no tienen puntos en común. Obsérvese que este concepto siempre se refiere a un experimento aleatorio definido.

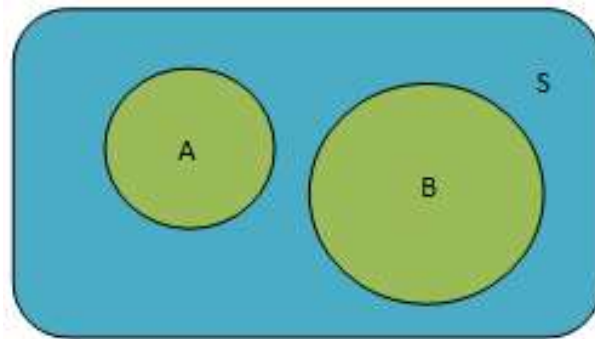


Figura 4. Representación gráfica de eventos mutuamente exclusivos

Si todos los elementos de un evento A se encuentran contenidos también en un evento B , se dirá que A es un **subevento** de B , lo cual se representará por

$$A \subset B \text{ o bien } B \supset A.$$

Es claro que si $A \subset B$, entonces, si A ocurre, B necesariamente ocurre.

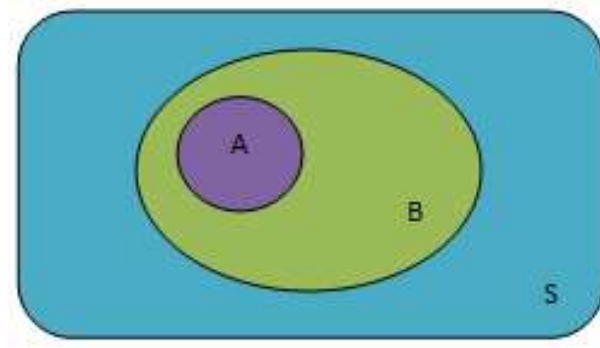


Figura 5. Representación gráfica de un subevento de un evento

Las nociones de unión e intersección se pueden extender a más de dos eventos como sigue.

Sean $A_1 \cdots, A_m$ varios eventos contenidos en un espacio muestral S . Entonces, el evento que consta de todos los elementos contenidos en uno o más de estos m eventos se llama la **unión** de $A_1 \cdots, A_m$ y se representa

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m, \text{ o más brevemente } \bigcup_{j=1}^m A_j.$$

El evento que consta de todos los elementos contenidos en todos esos m eventos simultáneamente se llama la **intersección** de $A_1 \cdots, A_m$ y se denota por

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m, \text{ o más brevemente } \bigcap_{j=1}^m A_j.$$

Más generalmente, sean $A_1, \dots, A_m, \dots$ un número infinito de elementos en S . Entonces la *unión*

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots, \text{ o más brevemente } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

se define como el evento que tiene todos los elementos que están contenidos en al menos uno de estos eventos, y la intersección

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots, \text{ o más brevemente } \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j.$$

se define como el evento que consta de todos los elementos contenidos en todos esos eventos simultáneamente.

Si los eventos $A_1, \dots, A_m, \dots$ son tales que al ocurrir cualquiera de ellos se hace imposible la ocurrencia simultánea de cualquiera de los demás, entonces $A_j \cap A_k = \phi$ para cualquier $k \neq j$, y éstos se denominan *eventos mutuamente exclusivos* o *eventos sin intersección mutua*.

3.1.3. Concepto clásico de probabilidad matemática

La teoría de probabilidades tiene sus orígenes en los juegos de azar, y aún cuando el concepto clásico de probabilidad matemática es de uso directo limitado en la estadística, lo introduciremos aquí y se considerará la naturaleza de sus limitaciones, motivando en esta forma las ideas de la sección subsecuente.

Definición clásica de Laplace de probabilidad matemática

La probabilidad $P(A)$ de un evento A en un experimento aleatorio está dada por

(3)

$$P(A) = \frac{w}{m}$$

donde w es el número de casos en que A ocurre, y m es el número de todos los casos igualmente posibles en el experimento.

Obsérvese que Laplace define el concepto de probabilidad en términos frecuenciales; esto es, en términos de la noción de casos igualmente posibles. De esto se deduce que la definición de Laplace sólo se puede aplicar en experimentos en los que hay un número finito de casos igualmente posibles, cuya definición es sugerida por la naturaleza del experimento. Por desgracia, los principales problemas prácticos no son de este tipo, y la definición de Laplace no se puede aplicar en ellos.

Es por esto que se necesita un concepto más general de la probabilidad matemática. Para deducir tal concepto usaremos algunas de las ideas de A. N. Kolmogorov (1956). Estructuró el sistema axiomático de la teoría de la probabilidad a partir de la teoría de conjuntos.

3.1.4. Concepto de probabilidad en estadística

La experiencia nos enseña que si efectuamos un experimento aleatorio con mucha frecuencia, entonces la ocurrencia de eventos obedece ciertas leyes. En particular, la frecuencia relativa de un evento tiende a ser constante. Con esto indicamos que si se efectúan largas secuencias del experimento, las frecuencias relativas correspondientes serán casi las

mismas. En este caso, decimos que el experimento muestra *regularidad estadística* o *estabilidad de las frecuencias relativas*.

Por esta razón supongamos la existencia de un número $P(E)$ que se llamará la *probabilidad de ocurrencia* del evento E o, más brevemente, la **probabilidad** de E en el experimento aleatorio. Obsérvese que este número no es una propiedad absoluta de E , sino que se refiere a un cierto espacio muestra S , esto es, a un experimento aleatorio determinado.

Entonces, el decir “ E tiene la probabilidad $P(E)$ ” significa que si efectuamos el experimento muy a menudo, es prácticamente cierto que la frecuencia relativa $\tilde{f}(E)$ es aproximadamente igual a $P(E)$.

La probabilidad introducida de esta manera es la contraparte de la frecuencia relativa empírica. Por lo tanto, es natural pedir que ésta deba tener ciertas propiedades básicas que tiene la frecuencia relativa. Estas propiedades están indicadas en los teoremas 1 y 2, y en la fórmula (4).

Teorema 1. *La frecuencia relativa es al menos igual a 0 y a lo más igual a 1.*

Demostración

Notación

- Frecuencia absoluta de A en n , escribimos como $F_n(A)$.
- Frecuencia relativa de A en n , escribimos como $f_n(A)$.

Sabemos que $F_n(A)$ le puede asignar a A los $n + 1$ números
 $0, 1, 2, 3, \dots, n - 1, n$

Caso 1

Si $F_n(A)=0$ tendríamos que $f_n(A) = \frac{F_n(A)}{n} = \frac{0}{n} = 0$

Caso 2

Si $F_n(A)=n$ tendríamos que $f_n(A) = \frac{F_n(A)}{n} = \frac{n}{n} = 1$

Caso 3

Si $F_n(A)=k$ donde $k < n$ entonces $f_n(A) = \frac{k}{n} = p$ con $0 < p < 1$

$$\therefore 0 \leq f_n(A) \leq 1$$

Teorema 2. *La suma de todas las frecuencias relativas en una muestra es igual a 1, esto es,*

$$\sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \dots + \tilde{f}(x_m) = 1.$$

Demostración

Por definición $\tilde{f}(x) = \frac{k}{n}$ con $k < n$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{n}$$

donde $(k_1) + (k_2) + \cdots + (k_m) = n$.

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \sum_{j=1}^m \frac{k_j}{n} = \frac{(k_1)}{n} + \frac{(k_2)}{n} + \cdots + \frac{(k_m)}{n} = \frac{(k_1) + (k_2) + \cdots + (k_m)}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

$$\therefore \sum_{j=1}^m \tilde{f}(x_j) = \tilde{f}(x_1) + \tilde{f}(x_2) + \cdots + \tilde{f}(x_m) = 1.$$

(4)

$$\tilde{f}(A \cup B) = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$$

Demostración

Si $A \cup B = \emptyset$ entonces $F_n(A \cup B) = F_n(A) + F_n(B)$

$$\therefore \tilde{f}_n(A \cup B) = \frac{F_n(A \cup B)}{n} = \frac{F_n(A) + F_n(B)}{n} = \frac{F_n(A)}{n} + \frac{F_n(B)}{n} = \tilde{f}(A) + \tilde{f}(B)$$

Axiomas de probabilidad matemática

Los axiomas de probabilidad son las condiciones mínimas que deben verificarse para que una función definida sobre un conjunto de sucesos determine consistentemente sus probabilidades. Fueron formulados por Kolmogórov en 1933.

1. Si E es un evento en un espacio muestral S , entonces

(5)

$$0 \leq P(E) \leq 1.$$

2. *Al espacio muestral S completo le corresponde*

(6)

$$P(S) = 1.$$

3. *Si A y B son eventos mutuamente exclusivos entonces se cumple*

(7)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

si el espacio muestral es infinito, debemos reemplazar el axioma 7 por

(7*)

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots .$$

3.2. Determinación práctica de probabilidades

Teorema 3. (Regla de la adición para eventos mutuamente exclusivos)

Si $E_1, \dots, E_m$ son eventos mutuamente exclusivos, entonces

(8)

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m).$$

Demostración

Si $m = 1$, $P(E_1) = P(E_1)$

Si $m = 2$, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ Por axioma 3

Si $m = 3$, aplicando el axioma 3, dos veces tenemos:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1 \cup (E_2 \cup E_3)) = P(E_1) + P(E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

En general, si agrupamos los eventos y luego aplicamos el axioma 3 repetidas veces, tenemos:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m) &= P(E_1 \cup (E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_m)) \\ &= P(E_1) + P(E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_m) \\ &= P(E_1) + P(E_2 \cup (E_3 \cup \dots \cup E_m)) \\ &\dots \\ &= P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_m). \end{aligned}$$

Teorema 4. (Regla de la adición para eventos arbitrarios) *Si A y B son eventos cualesquiera contenidos en un espacio muestral S , entonces*

(9)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Demostración

$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$, donde los tres conjuntos encerrados en paréntesis son mutuamente exclusivos, por lo tanto, por el axioma 3

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P[(A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)] \\ &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \end{aligned}$$

Pero $A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ y $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Aplicando el axioma 3 a A y a B , tenemos:

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) \text{ y } P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\text{Sumando } P(A) + P(B) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\text{Por lo tanto: } P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$$

$$\text{Despejando } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Teorema 5. (Regla de complementación) *Las probabilidades de un evento E y su complemento E^c en un espacio muestral S están relacionados según la fórmula*

(10)

$$P(E^c) = 1 - P(E).$$

Demostración

El espacio muestral S se puede descomponer en los eventos E y E^c mutuamente exclusivos, esto es, $S = E \cup E^c$. Por (6) y (7) se obtiene

$$1 = P(S) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

$$\therefore P(E^c) = 1 - P(E).$$

Esta fórmula puede usarse si el cálculo de $P(E^c)$ es más simple que el de $P(E)$.

Probabilidad condicional

Regla de la multiplicación

Muchas veces necesitamos encontrar la probabilidad de un evento B si se sabe que ha ocurrido un evento A . Esta probabilidad se llama **probabilidad condicional de B dado A** , y se representa como $P(B|A)$. En este caso A sirve como un espacio muestral nuevo (reducido), y la probabilidad es la fracción de $P(A)$ que corresponde a $A \cap B$. Así que

$$(11) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad [P(A) \neq 0]$$

Del mismo modo, la *probabilidad condicional de A dado B* es

$$(12) \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad [P(B) \neq 0]$$

Teorema 6. (Regla de multiplicación.) *Si A y B son eventos contenidos en un espacio muestral S , y $P(A) > 0$, entonces se cumple que*

(13)

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Demostración:

Por definición:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

La fórmula (13) es útil si el cálculo de la probabilidad condicional es más simple que el cálculo inmediato de $P(A \cap B)$.

3.3. Permutaciones y combinaciones

En general el espacio muestral S correspondiente a juegos de azar, a métodos de muestreo, o a problemas de orden y ocupación, es finito, y se asigna la misma probabilidad a todos sus puntos (resultados). Sabemos que la probabilidad de uno de dichos puntos es $\frac{1}{m}$ donde m es el número de puntos de S , y la probabilidad de un evento A se obtiene contando el número de resultados de que consta A . Claro que, si este número es w , entonces $P(A) = \frac{w}{m}$. Por lo tanto, la asignación de probabilidades a los diferentes eventos se reduce a contar puntos. Esta labor se puede facilitar con el uso de algunas nociones y resultados básicos del análisis combinatorio elemental. De esta manera obtenemos métodos de conteo efectivos, que evitan la enumeración de los puntos de la muestra, que se hace tedioso en casos más complicados.

Supóngase que se dan n cosas (**elementos** u *objetos*). Podemos arreglarlos en un renglón en *un orden cualquiera*. Cada uno de estos arreglos es una **permutación** de estas cosas.

Teorema 7. *El número de permutaciones de n cosas diferentes, tomada todas a la vez, es igual a*

(14)

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

Demostración

Dado que hay n formas de escoger el primer elemento y, una vez escogido éste, sólo tenemos $(n - 1)$ formas de escoger el segundo elemento, y así sucesivamente, vemos que cuando llegamos al elemento k -ésimo sólo tenemos $[n - (k - 1)]$ posibles elementos para escoger, lo que nos lleva a que tenemos $n(n - 1)(n - 2) \cdots 2 \cdot 1$ formas de ordenar el conjunto, justamente lo que enunciamos anteriormente.

Una **permutación de n cosas tomadas k a la vez**, es una permutación que contiene únicamente k de las n cosas dadas. Cualquier pareja de estas permutaciones que constan de los mismos k elementos, pero en un orden diferente, son diferentes, por definición.

Una **permutación de n cosas tomando una vez k de ellas a la vez con repeticiones**, es un arreglo que se obtiene colocando cualquier cosa dada en la primera posición, e incluyendo una repetición de las cosas antes usadas en la segunda, y se continúa así hasta que se llenan k posiciones.

Definición. *El número de permutaciones diferentes de n cosas diferentes tomando k a la vez sin repetición es*

(15 a)

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

y con repetición es

(15 b)

$$n^k.$$

En el caso de una permutación no importan tan sólo las cosas mismas, sino también su orden. Una **combinación** de cosas dadas es cualquier selección de una o más de las *sin considerar el orden*. Hay dos tipos de combinaciones:

I El número de **combinaciones de n cosas diferentes tomando k a la vez, sin repeticiones**, es el número de conjuntos que se pueden formar con las n cosas, conteniendo cada conjunto k cosas diferentes, y sin que dos conjuntos contengan exactamente las mismas k cosas.

II El número de **combinaciones de n cosas diferentes tomando k a la vez, con repeticiones**, es el número de conjuntos que se pueden formar de k cosas escogidas de las n dadas, usándose cada una de ellas tantas veces como se quiera.

Definición. *El número de combinaciones diferentes de n cosas diferentes, tomando k a la vez, sin repeticiones, es*

(16a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(1\cdots k)},$$

y el número de las combinaciones con repetición es

(16b)

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

La Probabilidad y Estadística son dos campos distintos aunque relacionados entre sí. En las matemáticas, se dice a veces que la Probabilidad es el vehículo de la Estadística es decir, de no ser por las leyes de Probabilidad, no existirían las teorías estadísticas.

3.4. Probabilidad

De acuerdo a los fenómenos actuales, es pues la relación de probabilidad y no la de certidumbre la que prevalece en la mayor parte de nuestras premisas y conclusiones acerca de ciertos eventos, por ejemplo, tenemos la certidumbre, es decir, estamos seguros de que una moneda caerá después de arrojarla al aire, o de que no podemos sacar una bola negra de una urna que solo contiene bolas blancas.

El hombre puede predecir los movimientos de los planetas alejados a millones de kilómetros en el espacio, pero nadie puede predecir el resultado de arrojar una moneda o de lanzar un par de dados, estos fenómenos son atribuidos a la probabilidad o a “la casualidad”, aunque decir que un acontecimiento está determinado por la casualidad equivale a decir que no sabemos cómo está determinado.

Hoy en día, podemos utilizar la probabilidad (palabra para referirse a la atención de Pascal y la discusión de Fermat), pero ese término no se introdujo hasta casi un siglo después de la muerte de los matemáticos. En su lugar, se habló de “los peligros”, o el

número de posibilidades. Gran parte de su dificultad era que no tenía todavía la noción de probabilidad matemática (porque estaban en el proceso de inventarlo).

Desde nuestra perspectiva, es difícil entender por qué les resultaba tan difícil. Pero eso refleja el gran cambio en el pensamiento humano de que su trabajo llevó a hoy en día, es parte de nuestra visión del mundo, que observamos las cosas en términos de probabilidades. Sin embargo, a pesar de su familiaridad, la probabilidad sigue siendo un concepto difícil de tratar. Por un lado, en realidad hay varias nociones de probabilidad. Dos en particular, son comunes: *la probabilidad frecuentista y la probabilidad subjetiva*.

La distinción entre las diferentes formas de la probabilidad se hizo por primera vez en 1713 por el matemático suizo Jacob Bernoulli, quien es en gran parte responsable de tomar las ideas de Pascal y Fermat y su presentación en lo que se convirtió en la terminología de la teoría de la probabilidad moderna.

Probabilidad frecuentista. Es la idea que surge en los clásicos juegos de azar, tales como tarjetas, dados, o la ruleta, donde se puede utilizar un argumento matemático teórico para calcular la probabilidad de que un determinado evento ocurra. También se produce cuando se tiene alguna gran población de personas, animales u objetos, o alguna acción que se repite muchas veces, en las que se puede contar la frecuencia relativa de un resultado particular: por ejemplo, la probabilidad de que un hombre, elegido al azar de una gran población, va a morir antes de llegar a los sesenta años. La *probabilidad frecuencial* de un evento E ocurre en una determinada población (o acción repetida), A es el número de formas diferentes en que E puede ocurrir, dividido por el número total de resultados diferentes. Por ejemplo, si se tira un dado, éste puede aterrizar de seis maneras diferentes. Hay tres formas en que puede aterrizar con un número par (2, 4, o 6), por lo que la probabilidad de sacar un número par, con un dado honesto es $\frac{3}{6}$, o $\frac{1}{2}$.

Probabilidad subjetiva.- Llamada también la *probabilidad epistémica*, se refiere a una estimación numérica de la veracidad de nuestro conocimiento de algún evento, en donde el conocimiento no se basa (por completo) en los datos estadísticos, por ejemplo, cuando una mujer dice que es 95 % seguro de que ella conoce el camino a la oficina de correos.

Esta distinción, aparentemente clara se vuelve borrosa cuando una probabilidad subjetiva se basa en datos, pero no de una manera completamente determinista, o cuando las técnicas como la fórmula de Bayes (que veremos más adelante) se utilizan para refinar las probabilidades subjetivas a la luz de datos concretos. Gran parte de su impacto en nuestro mundo ha llegado en su cálculo matemático preciso, se ha utilizado para la base o para reforzar la toma de decisiones subjetivas.

Pero eso fue todo en el futuro, cuando Pascal y Fermat, sin tener idea de las consecuencias de sus ideas, se embarcaron en su aventura para resolver el problema de los puntos.

Tratándose de un evento pasado o futuro, ¿qué quiere decir la probabilidad de un solo evento?

Cualquiera que sea la interpretación de probabilidad que se adopte, este problema es particularmente difícil. La opinión más acreditada es que la probabilidad no tiene significado alguno cuando se aplica a un único evento, ya sea pasado o futuro.

De acuerdo con la interpretación estadística, la probabilidad se puede referir a un único evento sólo en relación con una clase de eventos similares. Pero esto, a menudo, lleva a confusiones. Todo el mundo estará de acuerdo en que el siguiente razonamiento es absurdo: En cierta comunidad, el registro de nacimientos en los últimos 10 años muestra una razón

de 51 niñas a 50 niños. Las primeras 35 criaturas nacidas en un mes determinado son niñas. El señor Jones a punto de ser padre, está seguro, de que las probabilidades están a su favor y que su esposa le obsequiará con un niño, debido a la “*ley de los promedios*”.

Por otra parte, es un error muy común de la misma naturaleza, y en el cual todavía incurrimos intuitivamente, suponer que si se lanzan 2 dados cinco veces consecutivas y obtiene siete cada vez, la probabilidad de obtener otro siete en el próximo tiro es mucho menor que para cualquier otro número particular. Nos resulta difícil creer que la probabilidad matemática, la probabilidad de un futuro evento, donde los eventos son independientes, no es afectada de modo alguno por lo que ya ha sucedido.

Independencia. En teoría de probabilidades, se dice que dos sucesos aleatorios son independientes entre sí cuando la probabilidad de cada uno de ellos no está influida porque el otro suceso ocurra o no, es decir, cuando ambos sucesos no están relacionados.

Probabilidad condicional. Es la probabilidad de que ocurra un evento A , sabiendo que también sucede otro evento B . La probabilidad condicional se escribe $P(A | B)$, y se lee “la probabilidad de A dado B ”.

No tiene por qué haber una relación causal o temporal entre A y B . A puede preceder en el tiempo a B , sucederlo o pueden ocurrir simultáneamente. A puede causar B , o viceversa, pueden no tener relación causal. Las relaciones causales o temporales son nociones que no pertenecen al ámbito de la probabilidad. Pueden desempeñar un papel o no dependiendo de la interpretación que se le dé a los eventos.

3.5. Estadística.

La Estadística es una ciencia que es de gran utilidad y en la actualidad nos es más difícil mencionar algún lugar, en el que la Estadística no se aplique que uno en el que tenga una gran importancia. Por ejemplo, las Universidades podrían desear predecir el rendimiento promedio de los estudiantes universitarios, para lo cual sería necesario utilizar la Estadística. Podría desearse comparar dos técnicas de enseñanza físicamente distintas; podríamos considerar la inspección de artículos comprados en una fábrica en donde la inspección podría consistir en seleccionar diez artículos de cada lote y registrar el número de defectuosos, en donde, la decisión de aceptar o rechazar el lote, podría basarse en el número de defectuosos encontrados. Los ejemplos anteriores son una muestra de lo importante que resulta ser el estudio de la Estadística.

Es un lenguaje universal de la ciencia tanto en sus ramas físicas como sociales, la comunicación y el uso de la Estadística nos permiten comunicar exactamente los descubrimientos en las investigaciones. La Estadística es también un instrumento que utilizado con cuidado y precisión nos permite describir nuestros resultados y adoptar decisiones respecto a lo que nos dicen.

El campo de la Estadística se divide ampliamente en dos ramas, que son: *La Estadística descriptiva* y *la Estadística Inferencial*.

A pesar de los brillantes éxitos alcanzados por el método estadístico, éste es susceptible de serias objeciones. Mientras que algunas de sus dificultades pueden remediarse sin perjudicar en gran parte su utilidad, otras no pueden eliminarse con tanta facilidad.

El concepto de límite, que desempeña un papel tan importante en muchas ramas de las matemáticas, se usa también en estadística, aunque aquí su empleo apenas puede ser

defendido puesto que este concepto se presenta, con propiedad, en relación con procesos infinitos. El estadista lo usa diciendo que las frecuencias se aproximan a una razón límite. Pero ni el estadista ni el físico, tratan con el infinito, sino más bien con fenómenos que por grandes y complejos que sean, son finitos y limitados.

El hecho de que un experimento produzca el mismo resultado 1000 veces seguidas no constituye una prueba de que los resultados subsiguientes serán compatibles con los anteriores.

3.6. La curva de la campana

Siguiendo la indicación de Gauss (1777, 1855), las compañías de seguros emplean la curva de la campana para establecer sus radios; los directivos de empresas la utilizan para planificar las expansiones en nuevos mercados; los funcionarios de gobierno la usan para establecer políticas públicas; los educadores, para calibrar los exámenes de los estudiantes; los investigadores médicos, para verificar la efectividad de distintos tratamientos; los economistas, para analizar el rendimiento económico; los biólogos, para estudiar el crecimiento de las plantas, y los psicólogos; para analizar el comportamiento de los seres humanos.

La teoría que justifica y regula los fenómenos aleatorios es la probabilidad y es la que nos dice qué tan justo es un proceso como los mencionados anteriormente. Ella explica el comportamiento del azar. Recordemos que un fenómeno es aleatorio si no se puede saber con certeza su resultado. Andradas (2002) opina que la probabilidad es capaz de predecir el comportamiento de fenómenos de masas con una precisión extraordinaria, de ahí la importancia de que los individuos se familiaricen con estos conceptos.

El método de Pascal descrito con la terminología actual: Se define $P(r, s)$ como la probabilidad de que A gane el juego si sabemos que A tiene r puntos y que B tiene s en el momento de interrumpir el juego:

Entonces se cumple, para $s, r < N$,

1. $P(r, N) = 0$
2. $P(N, s) = 1$
3. $P(r, s) = pP(r + 1, s) + qP(r, s + 1)$

En efecto, las afirmaciones (1) y (2) son inmediatas de la definición.

Para demostrar la propiedad (3), se requiere el concepto de probabilidad condicional y para la demostración se introducen las siguientes variables aleatorias:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A \text{ gana la } i\text{-ésima etapa} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad y$$

$$Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$$

Claramente Y_k es el número de puntos que A tiene hasta la k -ésima etapa y $X_1, X_2, \dots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes y con la misma distribución (Bernoulli de parámetro p). Vemos entonces que, si U denota al evento de que “ A gane”,

$$\begin{aligned}
P(r, s) &= P(U \mid Y_{r+s} = r) = \frac{P(U, Y_{r+s}=r)}{P(Y_{r+s}=r)} \\
&= \frac{P(U, Y_{r+s}=r, X_{r+s+1}=1)}{P(Y_{r+s}=r)} + \frac{P(U, Y_{r+s}=r, X_{r+s+1}=0)}{P(Y_{r+s}=r)} \\
&= \frac{P(U, Y_{r+s+1}=r+1)}{P(Y_{r+s}=r)} + \frac{P(U, Y_{r+s+1}=r)}{P(Y_{r+s}=r)} \\
&= p \frac{P(U, Y_{r+s+1}=r+1)}{P(Y_{r+s+1}=r+1)} + q \frac{P(U, Y_{r+s+1}=r)}{P(Y_{r+s+1}=r)} \\
&= pP(U \mid Y_{r+1+s} = r+1) + qP(U \mid Y_{r+1+s} = r) \\
&= pP(r+1, s) + qP(r, s+1)
\end{aligned}$$

La quinta igualdad es consecuencia de la independencia ya que:

$$\begin{aligned}
pP(Y_{r+s} = r) &= P(X_{r+s+1} = 1)P(Y_{r+s} = r) \\
&= P(X_{r+s+1} = 1, Y_{r+s} = r) = P(Y_{r+s+1} = r+1)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{1}{P(Y_{r+s}=r)} = \frac{p}{P(Y_{r+s+1}=r+1)}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
qP(Y_{r+s} = r) &= P(X_{r+s+1} = 0)P(Y_{r+s} = r) \\
&= P(X_{r+s+1} = 0, Y_{r+s} = r) = P(Y_{r+s+1} = r)
\end{aligned}$$

o sea,

$$\frac{1}{P(Y_{r+s}=r)} = \frac{q}{P(Y_{r+s+1}=r)}$$

Es fácil ver que a partir de estas tres relaciones podemos calcular $P(r, s)$ para toda $r, s \leq N$. Se empieza con $P(N-1, s), s = N-1, N-2, \dots, 0$ y se obtiene:

$$P(N-1, N-1) = p$$

$$P(N-1, N-2) = p + pq$$

$$P(N-1, N-3) = p + pq + pq^2$$

...

$$P(N-1, 0) = p + pq + pq^2 + \dots + pq^{N-1}$$

Luego se calcula $P(N-2, s), s = N-1, N-2, \dots, 0$ y así sucesivamente.

El método general de Fermat es el siguiente. Para lograr N triunfos, si el juego se interrumpe cuando A ha ganado r etapas y B ha ganado s etapas ($r, s < N$), se debe ver cuál es la probabilidad de que A gane $n = N - r$ etapas antes de que B gane $m = N - s$. El razonamiento de Fermat sería: para lograr n triunfos de A antes que m triunfos de B , es necesario y suficiente que se tengan n triunfos de A en las siguientes $n + m - 1$ etapas. Esto es cierto ya que entonces B podrá tener a lo más $m - 1$ puntos en las $n + m - 1$ etapas. Por otro lado, si hubiera menos de n puntos para A en ese número de etapas, entonces B necesariamente tendrá m triunfos en el mencionado número de etapas y ya habría ganado el juego. Recordemos que la probabilidad de tener k triunfos en $n + m - 1$ etapas es

$$\binom{m+n-1}{k} p^k q^{m+n-1-k}$$

Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$P(r, s) = \sum_{k=n}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{k} p^k q^{m+n-1-k}$$

Lo hecho por Pascal, permite dar un algoritmo para que una computadora calcule las probabilidades con la inducción reversa mencionada.

Lo hecho por Fermat es desde el punto de vista conceptual, de una enorme importancia pero no es fácil implementarlo para juegos con un número grande de etapas.

Capítulo 4

Perspectiva histórica

Como ya se ha mencionado previamente, una gran variedad de experimentos y fenómenos naturales, biológicos, sociales, o combinaciones de éstos, tienen la característica de generar resultados u observaciones que no son susceptibles de predecirse con certeza; esto es, que aún cuando se estudien repetidamente bajo un mismo conjunto de circunstancias no siempre se observa el mismo resultado. Entre ellos podemos citar a los juegos de azar: lanzamientos de dados o monedas, juegos con barajas, ruletas, loterías, etc. Otra familia de ejemplos, también muy conocida, la proporcionan los fenómenos meteorológicos: magnitud, intensidad y extensión de las lluvias; humedad, dirección y velocidad de los vientos; temperaturas máximas y mínimas y todas sus consecuencias como volúmenes de agua en las presas, magnitud de los daños provocados por inundaciones, sequías, heladas, etc.

A la imposibilidad de predecir con certeza los resultados de un fenómeno se le llama *aleatoriedad*, y naturalmente, a los fenómenos con esta característica se les llama *fenómenos aleatorios*. Los términos *azar* y *estocástico* también se usan comúnmente para hacer referencia al carácter imprevisible de estos fenómenos. La probabilidad y la Estadística son las disciplinas que se encargan del estudio del azar desde el punto de vista de las matemáticas. La primera propone modelos para los fenómenos aleatorios y estudia sus consecuencias lógicas, mientras que la segunda nos provee de métodos y técnicas para elegir modelos adecuados de los fenómenos en estudio a partir de información empírica.

La teoría de probabilidad surge de la necesidad por comprender los juegos de azar, esto es, juegos de apuestas en los que domina fuertemente una componente de incertidumbre.

4.1. Primeras ideas de la teoría de probabilidades

El primer paso hacía una teoría del azar se dio cuando un físico italiano y tahúr entusiasta del siglo XVI, llamado Girolanamo Cardano (1571-1576), describió cómo otorgar valores numéricos a los posibles resultados de un lanzamiento de dados.

El primer libro que se escribió sobre juegos de azar es “*Liber de Ludo Aleae*” de Girolamo Cardano (1571-1576), el cual se publicó en 1663 casi cien años después de la muerte de su autor. Posteriormente Galileo (1564-1642), quien aparentemente no tenía conocimiento del trabajo de Cardano, se ocupó de los juegos de azar en “*Sopra le Scoperte dei Dadi*”, obra que fue publicada hasta 1718. Tal vez la publicación en extremo tardía del “*Liber*” explique parcialmente el interés de Galileo por problemas que ya habían sido resueltos previamente por Cardano. De cualquier manera, en ambos trabajos ya aparecen de forma definida los elementos que constituyen el enfoque que actualmente conocemos como Enfoque Clásico de la Probabilidad.

Las contribuciones de Cardano y Galileo a la Teoría de Probabilidad son las siguientes:

- Establecen la noción de probabilidad de un evento A como la proporción de resultados (equipobrables) favorables a A respecto al número total de resultados posibles.
- Relacionan problemas combinatorios y juegos de azar.
- En el “*Liber*”, Cardano discute las nociones de juego justo y de regularidad estadística.
- Galileo utiliza argumentos probabilísticos en el estudio de errores en observaciones astronómicas.

El análisis de Cardano proporcionó el conocimiento suficiente para permitir a un jugador apostar de modo juicioso a los dados, o quizá para que conozca lo suficiente para no jugar en absoluto. Pero Cardano se detuvo cerca del paso clave que le hubiera conducido a la teoría moderna de las probabilidades. Lo mismo ocurrió con el físico italiano Galileo, quien redescubrió gran parte del análisis de Cardano a principios del siglo XVII a petición de su protector, el Gran Duque de Toscana, el cual deseaba mejorar sus resultados en los juegos de mesa. Lo que detuvo tanto a Cardano como a Galileo fue que no trataron de ver si existía un modo de utilizar sus cálculos (sus probabilidades) para predecir el futuro.

Para encontrar orden en el azar (una estructura matemática), tenemos que observar qué ocurre cuando se repite muchas veces el mismo fenómeno aleatorio.

Desgraciadamente, no se conoce la forma exacta en que los parámetros se estimaban a partir de los datos originales. El problema de estimación de parámetros tomó mayor fuerza en siglos posteriores y se convirtió en una fuente importante de desarrollo para la Teoría de Probabilidad, cuyo momento cúspide se alcanzó con las contribuciones de Gauss (1777-1855), Legendre (1752-1833) y Laplace (1749-1827).

La formulación moderna del Enfoque Clásico de Probabilidad es la siguiente:

Enfoque Clásico de Probabilidad
1. Existe un experimento o fenómeno aleatorio que admite un conjunto finito de resultados, $\Omega = x_1, x_2, \dots, x_n.$ 2. Los resultados del experimento son equiprobables, es decir, $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \dots = P(x_n) = \frac{1}{n}$ 3. Si A es un evento relacionado al experimento, entonces $P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#A}{n}.$

Desde la perspectiva actual, el Enfoque Clásico puede parecernos muy claro y demasiado simple como para que se le considere una contribución importante; sin embargo, grandes científicos y matemáticos dieron respuestas incorrectas a problemas de juegos de azar, lo cual evidencia que el Enfoque Clásico ni es simple ni obvio. Entre estas personalidades podemos mencionar a Niccolo Tartaglia (1499-1557), a quien debemos entre otras cosas, la fórmula para obtener soluciones de ecuaciones cúbicas; también podemos mencionar a G. W. Leibniz (1646-1716), cofundador del Cálculo Diferencial; a Jean d' Alembert (1717-1783), uno de los principales promotores de la Enciclopedia Francesa.

4.2. Primer problema de los puntos

Pacioli (1446-1517), el hombre que escribió por primera vez sobre el problema: “*A y B participan en un juego de balla (presumiblemente un juego de lanzamiento de pelota por rondas), y acuerdan que el juego terminará hasta que alguno de ellos gane 6 rondas, pero el juego se suspende abruptamente cuando A tiene 5 rondas a su favor y B sólo tiene 2 rondas a su favor. ¿Cómo debería distribuirse la apuesta?*”. Sugirió que la solución

es dividir la ganancia de acuerdo con el estado actual de juego, a saber, 5 a 2, pero este razonamiento es incorrecto. La falla en el razonamiento de Pacioli (1446-1517), fue demostrada en 1539 por su compatriota Girolamo Cardano (1501-1576).

Cardano (1501-1576) señaló correctamente, que ganar el juego, no dependía de cuántas rondas cada jugador ya había ganado (como el pensamiento de Pacioli), sino de la cantidad que cada jugador todavía tiene que ganar, para ganar el juego. Aunque esta idea ayudó a allanar el camino a la solución final, Cardano, también fracasó en encontrar la respuesta correcta. Él, sin embargo, hace algunas observaciones fundamentales que establecieron el principio de lo que, a raíz de Pascal y la obra de Fermat, se convirtió en la teoría de probabilidades.

Niccoló Tartaglia, en 1556, añadió que creía que el problema no podía resolverse en absoluto. En 1603 otro matemático italiano, Lorenzo Forestani, llegó esencialmente a la misma conclusión en su libro *Arithmetica Practica dé geometría (La práctica de la Aritmética y Geometría)*, sugirió que la porción de la participación debe ser dividida en función del número que cada uno había ganado en relación con el número de partidos jugados, y el resto dividido en partes iguales entre ellos, porque el resto del juego no favorece a ninguno de los jugadores. Se trata de un análisis de esperanza para los estándares actuales, pero, como con Tartaglia, que reflejaba la creencia generalizada de que el futuro era una cuestión de puro azar, con todas las posibilidades igualmente probables.

La última figura importante para entrar en el cuadro antes que Pascal y Fermat, es Galileo Galilei el padre de la ciencia moderna, que escribió un artículo en algún momento entre 1613 y 1623 titulado *Sopra le scoperte dei dadi (En un descubrimiento acerca de los dados)*, en el que analizaba (completa y correctamente) todas las formas de lanzar tres dados que dan los totales de 9 y 10 puntos.

Su motivación para hacer esto, al parecer, era para justificar la creencia entre los jugadores de que un total de 10 es una apuesta un poco mejor que 9 (que veremos más adelante). Este problema también había sido considerado y resuelto por Cardano. La importancia de la contribución de Galileo era que, mientras Cardano había razonado en teoría, Galileo se acercó al problema científicamente, a partir de una observación empírica que el 10 se produce con más frecuencia que 9, y luego buscar una explicación matemática. Esto en gran medida fue el escenario para lo que vino después.

Supongamos que dos jugadores, en este caso se hacen llamar Blaise y Pierre, tienen apuestas iguales, ¿Quién ganará la mayor parte de los cinco lanzamientos de una moneda al aire? Se inicia el juego, pero luego tienen que parar antes de haber terminado el juego. ¿Cómo se tendrán que dividir las ganancias?

Si cada uno ha ganado un lanzamiento, cuando se suspende el partido después de dos tiros, entonces es claro, se repartirán las ganancias de manera equitativa, y si abandonan el juego después de cuatro lanzamientos, cuando cada uno ha ganado dos veces, se hará lo mismo. Pero ¿qué pasa si se detienen después de tres lanzamientos, cuando un jugador está por delante 2 a 1?

Esta es una versión simple de todo el problema, no exactamente de la forma en que Pascal y Fermat lo trataron. Pero la lógica necesaria para su solución es la misma que para el problema originalmente formulado, que estaba en términos de tirar dados y estaba en una forma general que permitía “más de N lanzamientos” para cualquier número N (Cuando Pascal y Fermat estaban trabajando en el problema, lo hicieron, simplificando la situación para el caso de que los dados fueron equivalentes a las monedas, que tiene, por ejemplo, 0 en tres caras y 1 en los otros tres, y así lo hicieron para casos particulares, los valores pequeños de N).

La enorme dificultad de la tarea se desprende de la incertidumbre de Pascal acerca de su propio razonamiento. Su primer párrafo establece esta incertidumbre:

Me gustaría poner mi razonamiento entero ante usted, y tenga que hacerme el favor de me aclarara si estoy en error o que me endosara, si estoy en lo correcto. Yo os pido esto en toda la fe y la sinceridad porque yo no estoy seguro siquiera de qué va a salir de mi lado.

Pascal continuó:

Cuando no hay más que dos jugadores, su teoría de que procede por combinaciones es muy justa. Pero cuando hay tres, creo que tengo una prueba de que es injusto, que se debe proceder de manera distinta a la que tengo. Pero el método que he revelado a usted y que yo he utilizado universalmente es común a todas las condiciones imaginables de todas las distribuciones de puntos, en el lugar de las combinaciones (que no usan, salvo en casos particulares, cuando es más corta que el método general), un método que es bueno sólo en casos aislados y no es bueno para los demás.

Estoy seguro de que puedo darme a entender, pero requiere unas pocas palabras de mí y un poco de paciencia de usted. (Carta escrita por Pascal a Fermat, en Agosto de 1954)

A continuación se describirá el problema y las diversas soluciones que dieron los célebres corresponsales.

Para ganar un juego, A debe sacar al menos un seis en ocho lanzamientos de un dado. La apuesta total, que llamaremos “la bolsa”, se la lleva el jugador A si logra obtener el seis. En caso contrario pierde la bolsa entera. El jugador A ya ha lanzado tres veces el dado sin obtener el seis deseado. Si A decide no hacer el cuarto lanzamiento, ¿qué parte de la bolsa le debe ser reintegrada por no hacer éste lanzamiento?

Este problema lo plantea Pascal a Fermat, en una carta que no se conserva. Sólo se tiene la respuesta de Fermat quien escribe: “....si no hago el primer lanzamiento, debo tomar de la bolsa $\frac{1}{6}$ del total. Si nuevamente no realizo el segundo lanzamiento, debo ser indemnizado con $\frac{1}{6}$ del capital restante, esto es con $\frac{5}{36}$ del total. Si ahora acordamos que no hago el tercer lanzamiento, debo retirar un sexto del capital que queda y es $\frac{25}{216}$ y si después de esto decidimos que no haga la cuarta tirada debo retirar un sexto del capital restante, es decir $\frac{125}{1296}$ del total. Pero usted me propone en el último ejemplo de su carta (citó sus palabras):

‘... si debo obtener un seis en ocho lanzamientos de un dado y ya jugué tres sin lograrlo y si mi oponente me propone que no juegue mi cuarto lanzamiento y quiere pagarme por ello, debería darme $\frac{125}{1296}$ del total de la bolsa’.

Esto no es cierto según mi principio. Pues en este caso, las tres primeras tiradas sí se hacen, sin haber obtenido el seis; la bolsa total aún sigue en el juego y si el jugador decide no tirar el dado en su cuarta oportunidad debe tomar como recompensa $\frac{1}{6}$ del total. Y si hubiese jugado las primeras cuatro veces sin obtener el seis y decide no lanzar la quinta, recibirá el mismo sexto del total como indemnización”.

Echemos un vistazo más de cerca la forma en que Pascal se inicia la segunda sección de su carta:

Éste es el método de procedimiento cuando hay dos jugadores. Si dos jugadores, jugando en varios tiros, se encuentran en un estado tal que el primero carece de dos puntos y el segundo tres de ganar la apuesta, usted dice que es necesario ver en cuántos puntos el juego será totalmente decidido.

Es conveniente suponer que esto será en cuatro puntos, desde el que se concluye que es necesario ver de cuántas maneras los cuatro puntos se pueden distribuir entre los dos

jugadores y ver las combinaciones que hay para hacer la primera victoria y cuántos de hacer la segunda victoria, y para separar la participación de acuerdo a esa proporción.

En el razonamiento de Fermat es de destacar lo siguiente:

1. Si A renuncia a un lanzamiento, le corresponde $\frac{1}{6}$ de la bolsa, sin importar si es el primero, el quinto o el que sea de los ocho. Es decir, cada lanzamiento no depende de los demás.

2. Si A decide no hacer 4 lanzamientos, debe ser indemnizado con

$1 - (\frac{5}{6})^4$ de la bolsa y esta cantidad es igual a

$$(\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{236} + \frac{125}{1296})(\frac{1}{6}) = (\frac{1}{6})[\sum_{k=0}^3 (\frac{5}{6})^k]$$

Aquí vemos que la idea de calcular la indemnización de A con un sexto de la bolsa restante, es equivalente a decir que le corresponde $1 - (\frac{5}{6})^4$ de la bolsa. Esta cantidad se obtiene de restar a 1 el resultado de multiplicar 4 veces la probabilidad de no obtener un seis en 4 lanzamientos.

3. De manera análoga si A decide no hacer n lanzamientos ($n < 8$), le corresponde $1 - (\frac{5}{6})^n$ de la bolsa que es lo mismo que $\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{1}{6}(\frac{5}{6})^{n-1}$.

4. En el juego total, A pierde con probabilidad $q = (\frac{5}{6})^8$ y gana con probabilidad $p = 1 - q$. Así que, si A decide no hacer ningún lanzamiento le corresponde $1 - (\frac{5}{6})^8$ de la bolsa y esta cantidad es igual a

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{25}{216} + \dots + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

que a la vez es igual a

$$\frac{1}{6}\left[\sum_{k=0}^7\left(\frac{5}{6}\right)^k\right]$$

Lo anterior muestra que Fermat maneja con toda claridad el concepto que hoy se conoce como independencia en la teoría de la probabilidad. Esto le permite resolver correctamente el problema y no sólo eso, con esta idea establece el inicio de toda una serie de aportaciones que serán fundamentales, tanto en combinatoria como en probabilidad. El antecedente más importante de éste razonamiento es la solución que da Galileo a un problema que proviene del lanzamiento de tres dados.

Es fácil ver que hay el mismo número de descomposiciones tanto del 9 como del 10 en suma de tres naturales mayores o iguales a 1:

$$9 = 3 + 3 + 3$$

$$10 = 4 + 3 + 3$$

$$9 = 4 + 3 + 2$$

$$10 = 4 + 4 + 2$$

$$9 = 4 + 4 + 1$$

$$10 = 5 + 3 + 2$$

$$9 = 5 + 2 + 2$$

$$10 = 5 + 4 + 1$$

$$9 = 5 + 3 + 1$$

$$10 = 6 + 2 + 2$$

$$9 = 6 + 2 + 1$$

$$10 = 6 + 3 + 1$$

¿Por qué entonces, al lanzar tres dados es más probable obtener 10 que 9 al sumar los números resultantes? El razonamiento de Galileo muestra que ve claramente la independencia, ya que da un listado de todos los posibles casos del lanzamiento de dos dados:

(1,1)	*(1,2)	*(1,3)+	*(1,4)+	*(1,5)+	*(1,6)+
*(2,1)	*(2,2)+	*(2,3)+	*(2,4)+	*(2,5)+	*(2,6)+
*(3,1)+	*(3,2)+	*(3,3)+	*(3,4)+	*(3,5)+	(3,6)+
*(4,1)+	*(4,2)+	*(4,3)+	*(4,4)+	(4,5)+	(4,6)
*(5,1)+	*(5,2)+	*(5,3)+	(5,4)+	(5,5)	(5,6)
*(6,1)+	*(6,2)+	(6,3)+	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Luego ve que con los tres dados la suma puede dar 9 en los casos marcados con * y 10 en los casos marcados con +. Dice que cada caso tiene igual probabilidad y son más casos con + (27) que con * (25). Este razonamiento fue poco conocido por sus contemporáneos y el mismo Galileo le dio poca importancia.

CASOS EN QUE LA SUMA PUEDE DAR 9

$9 = 2 + 1 + 6$	$9 = 2 + 2 + 5$	$9 = 2 + 3 + 4$
$9 = 3 + 1 + 5$	$9 = 3 + 2 + 4$	$9 = 3 + 3 + 3$
$9 = 4 + 1 + 4$	$9 = 4 + 2 + 3$	$9 = 4 + 3 + 2$
$9 = 5 + 1 + 3$	$9 = 5 + 2 + 2$	$9 = 5 + 3 + 1$
$9 = 6 + 1 + 2$	$9 = 6 + 2 + 1$	$9 = 1 + 4 + 4$
$9 = 1 + 2 + 6$	$9 = 1 + 3 + 5$	$9 = 2 + 4 + 3$
$9 = 3 + 4 + 2$	$9 = 4 + 4 + 1$	$9 = 1 + 5 + 3$

$$9 = 2 + 5 + 2$$

$$9 = 3 + 5 + 1$$

$$9 = 1 + 6 + 2$$

$$9 = 2 + 6 + 1$$

CASOS EN QUE LA SUMA PUEDE DAR 10

$$10 = 3 + 1 + 6$$

$$10 = 1 + 3 + 6$$

$$10 = 4 + 4 + 2$$

$$10 = 4 + 1 + 5$$

$$10 = 2 + 3 + 5$$

$$10 = 5 + 4 + 1$$

$$10 = 5 + 1 + 4$$

$$10 = 3 + 3 + 4$$

$$10 = 1 + 5 + 4$$

$$10 = 6 + 1 + 3$$

$$10 = 4 + 3 + 3$$

$$10 = 2 + 5 + 3$$

$$10 = 2 + 2 + 6$$

$$10 = 5 + 3 + 3$$

$$10 = 3 + 5 + 2$$

$$10 = 3 + 2 + 5$$

$$10 = 6 + 3 + 1$$

$$10 = 4 + 5 + 1$$

$$10 = 4 + 2 + 4$$

$$10 = 1 + 4 + 5$$

$$10 = 1 + 6 + 3$$

$$10 = 5 + 2 + 3$$

$$10 = 2 + 4 + 4$$

$$10 = 2 + 6 + 2$$

$$10 = 6 + 2 + 3$$

$$10 = 3 + 4 + 3$$

$$10 = 3 + 6 + 1$$

En relación al Problema de los Puntos, Tartaglia señala que la regla que Pacioli propone “*ni es buena ni conciliadora, pues si por azar, el jugador A tiene una ronda a su favor y B ninguna, el primero debe tomar toda la apuesta, lo cual obviamente no tiene sentido*”.

Posteriormente propone soluciones a los siguientes problemas, que en su opinión son las menos controversiales:

Problema 1. En un juego pactado a 60 puntos. A ha ganado 10 y B ninguno. ¿Cómo debería distribuirse la apuesta si cada jugador apuesta 22 ducados?

La solución que Tartaglia propone es la siguiente: puesto que los puntos que A tiene son $\frac{1}{6}$ de los requeridos para ganar el juego, debe tomar $\frac{22}{6}$ de la cantidad aportada por el jugador B ; en consecuencia, al jugador A le corresponden en total $22 + \frac{22}{6}$, es decir, $25\frac{2}{3}$.

Problema II. Bajo las mismas condiciones del juego anterior, A tiene 50 puntos y B tiene 30 puntos. ¿Cómo debería distribuirse la apuesta?

Para esta situación, Tartaglia considera la diferencia de los puntos que tienen A y B , esto es, $50 - 30 = 20$ puntos, y propone que A tome $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$ de la aportación de B . Entonces, al jugador A le corresponden en total $22 + \frac{22}{3} = 29\frac{1}{3}$ ducados.

Las objeciones al procedimiento de Tartaglia saltan a la vista. Por ejemplo, si A tiene 50 puntos y B tiene 40, de acuerdo a Tartaglia al primero le corresponden 25 ducados con $\frac{2}{3}$, la misma cantidad que en el problema I, lo cual es objetable pues A “está a punto” de llevarse el monto total de la apuesta, mientras que en la situación del problema I, el juego apenas empieza y está lejos de decidirse.

Ambas soluciones, la de Pacioli y la de Tartaglia, son incorrectas; el error consiste en que los procedimientos se centran en los puntos que han obtenido los participantes y no toman en cuenta las posibilidades (probabilidades) que tienen para ganar. En resumen, la fuente de confusiones y errores proviene de abordar el Problema de los Puntos como un

problema de “aritmética combinatoria” y de no relacionarlo con el emergente cálculo de probabilidades. La contribución de Pascal y Fermat fue notar la relación entre el Problema de los Puntos y los juegos de azar.

En las reuniones de casa del Abad Mersenne en París, se discutían los trabajos de la escuela italiana, pero aparentemente Pascal (que asistía a estas reuniones) no conocía el resultado de Galileo. No se sabe si Fermat conocía el resultado de Galileo, pero es de suponer que tampoco lo conociera ya que no asistía a dichas reuniones. Es claro por la cita textual que hace Fermat de la carta de Pascal, que este último no había entendido el concepto de independencia, pues relaciona el cuarto lanzamiento con los tres anteriores.

4.3. Problema de proporcionalidad

El segundo problema aparece de manera marginal en la carta del 29 de julio de 1654, en la que Pascal escribe acerca de un comentario hecho por de Meré:

“No he tenido tiempo de pensar en un problema que inquieta a M. de Meré. Si usted puede resolver la dificultad sería perfecto. Chevalier de Meré dice haber encontrado falsedad en la teoría de los números por la siguiente razón. Si me propongo obtener un seis en el lanzamiento de un dado, tengo ventaja si es en cuatro lanzamientos. Si me propongo obtener un doble seis con dos dados, tengo desventaja si es en 24 lanzamientos. Además 24 es a 36 como 4 es a 6. Este es su gran escándalo...”

O sea que de Meré razonaba ingenuamente con una idea de proporcionalidad: “4 es al 6 como 24 es a 36”, en consecuencia según él, la probabilidad de ganar debería ser la misma en ambos casos. Sin embargo su experiencia personal mostraba que en el segundo caso

perdía mientras que en el primero ganaba con mayor frecuencia. De lo cual concluía que había una gran falsedad en los números. La carta en que Fermat responde no se conoce. Se sabe que Fermat explicó con detalle por qué el primer juego es favorable y el segundo desfavorable con sus métodos de combinatoria y sus ideas sobre la independencia.

Comentario:

La independencia de cada lanzamiento permite calcular con toda precisión las probabilidades correspondientes.

La probabilidad de no tener un seis en cuatro lanzamientos es $(\frac{5}{6})^4$

La probabilidad de obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos es

$$p = 1 - q$$

donde q es el complemento.

$$p = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0,5177$$

De manera análoga, se ve que la probabilidad de no tener un doble seis al lanzar dos dados en veinticuatro lanzamientos es $(\frac{35}{36})^{24}$

La probabilidad de obtener al menos un doble seis al lanzar dos dados en veinticuatro lanzamientos es

$$p_1 = 1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0,4914$$

Se comprueba la conclusión a la que había llegado De Meré experimentalmente. Nos podemos preguntar cuán asiduo sería al juego si pudo detectar esta mínima diferencia.

4.4. Segundo problema de los puntos

Por último, Pascal comenta en la misma carta el segundo problema de los puntos. Este problema aparece en el libro de Paccioli editado en Venecia en 1494. “*Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalita*” de la siguiente manera:

Un juego de pelota entre dos equipos consiste en alcanzar 60 puntos. Cada etapa del juego da a quien la gana 10 puntos y 0 puntos a quien la pierde. La apuesta total es de 10 ducados. El juego debe interrumpirse, y en ese momento el equipo A ha ganado 50 puntos y el equipo B tiene 20 puntos. ¿Cómo debe repartirse la bolsa de 10 ducados entre A y B de manera que la repartición sea justa?

Puesto que el libro de Paccioli es principalmente una recopilación de temas conocidos, seguramente el problema de los puntos se conocía desde tiempo atrás.

Se dieron soluciones aparentemente razonables, la más frecuente era:

Dividir la bolsa en partes proporcionales al número de juegos ganados por cada uno de los equipos y ésta es la solución que propone Paccioli en su libro: “se debe dividir en una proporción de 5 a 2”.

Esta respuesta es incorrecta . La solución se obtuvo hasta la época de la correspondencia entre Pascal y Fermat o sea que fue un problema abierto por más de 160 años.

Pascal plantea a Fermat el problema bajo la siguiente forma :

“Cada jugador apuesta 32 “pistols”(monedas); hay dos jugadores A y B y cada etapa del juego da un punto al ganador y 0 al perdedor. Gana el juego el primero en tener 3 puntos. Se supone además que ambos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar

cada etapa. El juego se interrumpe cuando A cuenta con un punto y B con ninguno. La pregunta en la misma ¿Cómo repartir la bolsa total de 64 monedas?”

La carta en que Fermat le contesta no se conoce, pero podemos saber lo que dijo Fermat por el contenido de la respuesta de Pascal. En ella Pascal reproduce el razonamiento de Fermat:

Para encontrar la división justa de la bolsa es necesario saber cuántas etapas se requieren para que el juego termine y se pueda decidir quién gana. Observa que no todas las formas de terminar el juego tienen la misma probabilidad. Por ejemplo, la sucesión *ABA* y la sucesión *ABBA* no tienen la misma probabilidad y en ambos casos gana *A*. Se usa la notación *A* si *A* gana una etapa y *B* si es *B* quien gana, es decir, la sucesión *ABA* significa que *A* gana, luego *B* gana y por último *A* vuelve a ganar. Para evitar esa dificultad, Fermat primero establece cuál es el máximo número de etapas necesarias para decidir el juego, en este caso es fácil ver que son cuatro. Hace entonces un listado de todos los posibles resultados de las cuatro etapas:

AAAA	*ABAA	*BAAA	*BBAA
*AAAB	*ABAB	*BAAB	BBAB
*AABA	*ABBA	*BABA	BBBA
*AABB	ABBB	BABB	BBBB

Al observar esta lista ve que los casos en que *A* ganaría son 11 ya que sólo necesita de dos etapas más para ganar el juego y *B* en 5, pues *B* requiere de tres puntos para ganar, es decir 11 : 5. Con esta información Fermat concluye que la repartición justa debe ser

$$\frac{64*11}{16} = 44 \text{ monedas para } A$$

y

$$\frac{64*5}{16} = 20 \text{ monedas para } B.$$

Pascal expresa su gran admiración por la solución de Fermat y declara estar totalmente de acuerdo con el resultado, además describe otro método para resolver el problema que, sin necesidad de hacer la enumeración de todas las posibilidades conduce al mismo resultado:

1. Primero resuelve el problema en el caso que A tenga dos puntos y B uno; el razonamiento es el siguiente: A puede ganar y llevarse las 64 monedas o puede perder y quedaría empatado con B , por lo tanto a A le corresponden $\frac{64+32}{2} = 48$ monedas y a B las 16 restantes.
2. Una vez resuelto este caso, sigue el mismo razonamiento para el caso en que A tenga dos puntos y B ninguno:

Si A gana se lleva las 64 monedas y si B gana quedan en el caso anterior, por lo que la repartición justa deberá ser para A : $\frac{64+48}{2} = 56$ monedas y 8 para B .

3. De manera análoga concluye el caso en que A lleve un punto y B cero puntos, la bolsa deberá repartirse así:

$\frac{56+32}{2} = 44$ monedas para A y 20 para B , ya que si A gana quedan en el caso (ii) y si B gana quedan empatados.

Este método nos lleva, por simetría a la siguiente tabla, donde la primera columna representa el número de etapas que A ha ganado, el último renglón el correspondiente de B y los números dentro de la tabla la proporción que le toca a cada jugador:

$A \setminus B$	0	1	2	3
0	32:32	20:44	8:56	0:64
1	44:20	32:32	16:48	0:64
2	56:8	48:16	32:32	0:64
3	64:0	64:0	64:0	

Vemos que la respuesta al problema inicialmente planteado, coincide con la respuesta que encuentra Fermat por la vía de contar todos los casos posibles. Pascal en su carta se congratula de ello y escribe “*Veo que la verdad es la misma en Toulouse que en París*”, pues Fermat vivía en Toulouse y Pascal en París.

Si aplicamos el método de Fermat al problema que aparece en el libro de Paccioli, se tendrá que también en este caso el juego se decide a lo más en cuatro etapas (mismo listado):

AAAA	ABAA	BAAA	BBAA
AAAB	ABAB	BAAB	BBAB
AABA	ABBA	BABA	BBBA
AABB	ABBB	BABB	*BBBB

Pero ahora A gana en 15 casos y pierde en uno, ya que A necesita ganar una etapa para ganar el juego mientras que B necesita 4 etapas. La repartición justa debe ser en

este caso y siempre bajo la hipótesis de que en cada etapa la probabilidad de ganar es la misma para ambos:

$$\frac{(10*15)}{16} \text{ ducados para } A$$

y

$$\frac{(10*1)}{16} \text{ ducados para } B.$$

Es claro que también se puede resolver con el método de Pascal. Ahora escribiremos en la tabla, sólo la proporción de la bolsa que le toca a cada uno. Al igual que en la tabla anterior, la primera columna representa el número de etapas que A ha ganado y el último renglón las de B .

$A \setminus B$	0	1	2	3	4	5	6
0	1:1						0:1
1		1:1					0:1
2			1:1			1:15	0:1
3				1:1		1:7	0:1
4					1:1	1:3	0:1
5			15:1	7:1	3:1	1:1	0:1
6	1:0	1:0	1:0	1:0	1:0	1:0	

Y vemos que el resultado es $\frac{(10*1)}{16}$ ducados para B

y

$$\frac{(10*15)}{16} \text{ para } A.$$

El método de Pascal puede describirse como un método de inducción de reversa. Razona en sentido inverso; empieza por considerar la situación previa al triunfo de alguno de los contrincantes y retrocede paso a paso para examinar cada uno de los casos posibles. Parte del hecho, que gana la bolsa quien logra ganar el juego y a partir de este resultado final se regresa paso a paso para determinar la repartición justa en cada caso. Con estos elementos, queda claro el porqué no es correcto repartirla de manera proporcional al número de etapas ganadas por cada uno.

4.5. La apuesta interrumpida

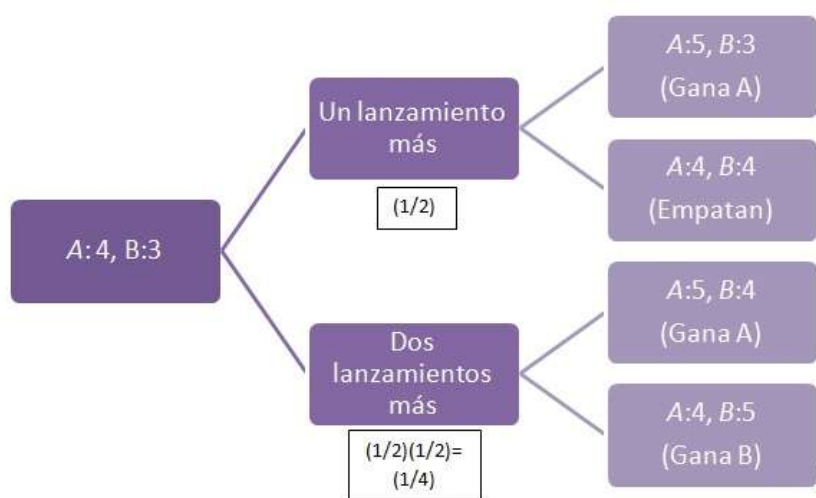
Los jugadores A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos, gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos.

¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Con frecuencia se propone: “Si A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos, repártase la apuesta en proporción de 4 a 3, a favor de A ”; es decir, de forma proporcional a los puntos de cada jugador. Esta solución tiene la lógica de que A , el jugador con más puntos, recibe más dinero pero... ¿la proporción justa es esa de 4 a 3?

Parece que lo más justo es tener en cuenta cuántas veces ganaría A y cuántas veces ganaría B , en el caso de que se continuase el juego, repitiéndose muchas veces. Empecemos por expresar las formas posibles en que puede continuar el juego. Y lo haremos mediante un (diagrama de árbol):

Empezando con $A: 4, B: 3$;



Es decir, la mitad de las veces ganaría A en el siguiente lanzamiento; la cuarta parte de las veces ganaría A tras dos lanzamientos; y la cuarta parte restante de las veces ganaría B tras dos lanzamientos. En resumen: A ganaría tres de cada cuatro veces ($\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$) y B ($\frac{1}{4}$) ganará una. El reparto más justo es de 3 a 1, a favor de A .

4.5.1. ¿Qué pasaría si fueran más de dos jugadores?

Fermat escribe una carta a Pascal, y extiende el método de la repartición del juego para cuando el número de jugadores se extiende.

En este punto, señor, yo os digo que esta división de los dos jugadores basada en combinaciones es muy equitativa y buena, pero si hay más de dos jugadores, no siempre es justo y te diré la razón de esta diferencia. Me comuniqué con algunos de los caballeros, y el señor de Roberval me hizo esta objeción:

Eso es un error basar el método de división en el supuesto de que están jugando cuatro tiros al ver que cuando uno carece de dos puntos y los otros de tres, no hay necesidad de que juegan cuatro tiros, ya que puede suceder jugar, solo dos o tres, o en verdad, tal vez cuatro.

Puesto que él no ve por qué hay que pretender hacer una división justa de la condición supone que uno juega cuatro tiros, en vista del hecho de que las condiciones naturales del juego son que no lance los dados después de que uno de los jugadores haya ganado, y que por lo menos si esto no es falso, hay que demostrarlo. Por lo tanto se sospecha que han cometido un paralogismo.

Por otra parte, como ya hemos visto en el primer problema, Pascal mismo parece no haber entendido cabalmente el método de Fermat ya que en la misma carta le dice que si bien su método funciona en el caso de dos jugadores ya no funcionará para tres jugadores. Da un ejemplo y lo resuelve erróneamente. No se conoce la respuesta de Fermat a esta carta.

Tenemos tres jugadores A , B y C igualmente capaces de ganar cada etapa. Para ganar el juego, A necesita un punto, B y C dos puntos.

Pascal dice correctamente que se requieren tres etapas para decidir el juego. Enumera correctamente las 27 posibilidades:

*AAA	*BAA	*CAA
*AAB	*BAB	*CAB
ABA	*BBA	*CBA
*ACA	*BCA*	*CCA
*AAC	*BAC	*CAC
*ACC	BCC	CCC
*ABB	BBB	CBB
*ACB	BCB	CCB
*ABC	BBC	CBC

Claramente la proporción para repartir la bolsa es 17 para A , 5 para B y 5 para C . Pascal, sin embargo dice que las posibilidades de triunfo para A son 19, para B son 5 y otras 5 para C . Al mismo tiempo, reconoce que esta repartición sería injusta. Por ello concluye que el método de Fermat no es válido para tres jugadores.

El problema que plantea Pascal es el siguiente: El acuerdo original “*gana el que primero tenga 3 puntos*” determina al juego y eso obliga a tomar en cuenta las distintas maneras de llegar a la meta propuesta. Este intercambio de cartas, más allá de resolver el problema de los puntos, establece conceptos fundamentales para el posterior desarrollo de la teoría, tales como: **independencia, probabilidad condicional y los métodos de enumeración y conteo para calcular probabilidades bajo hipótesis de equiprobabilidad de los posibles resultados.**

El concepto de independencia tomó un cierto tiempo en ser asimilado por la comunidad matemática; de hecho cuando Pascal muestra la solución de Fermat a Roberval (profesor

de matemáticas en el College de France), Roberval no la acepta. Objeta la introducción de los cuatro juegos. Relativo a este incidente Leibniz escribió en su libro *Dissertatio de Arte Combinatoria* : “..Las bellas ideas sobre los juegos de azar de los señores Fermat, Pascal y Huygens que M. de Roberval no pudo o no quiso entender”.

Otro indicio de la dificultad para entender la independencia es que muchos años más tarde D´Alambert discute el problema de cuál es la probabilidad de obtener dos águilas en dos lanzamientos de una moneda (equilibrada). D´Alambert sostiene que los resultados posibles y equiprobables son obtener 0, 1 o 2 águilas.

Si bien Pascal parece no dominar el concepto de independencia, su método es muy ingenioso y contiene (como ya lo mencionamos), el concepto de probabilidad condicional ya que de hecho está calculando la probabilidad de triunfo condicionada a que cada jugador tenga cierto número de puntos sin haber aún logrado ganar.

Este problema se siguió discutiendo por los sucesores de Fermat y Pascal y se generalizó de varias maneras, pero los dos métodos fundamentales siguen las mismas líneas de razonamiento.

El problema en su forma general es:

Un juego con dos contrincantes A y B. Gana el juego el primero que logre tener N puntos y cada etapa del juego da a quien la gana 1 punto y ninguno al perdedor. El juego debe interrumpirse cuando A ha ganado $r < N$ juegos y B ha ganado $s < N$ juegos, es decir, A tiene r puntos y B tiene s. Además, la probabilidad de que A gane cada etapa es $p \in (0, 1)$ y en consecuencia la de B es $q = 1 - p$.

La cantidad que apuestan es irrelevante. Sólo se supone que cada uno aporta la misma

cantidad y la suma de ellas conforma la bolsa a ganar, que será repartida de acuerdo a la probabilidad que cada uno tenga de ganar en el momento de interrumpir el juego.

A partir de las cartas que intercambian Pascal y Fermat podemos reconstruir el origen de varios de los conceptos más importantes en probabilidad, especialmente la contribución que Fermat hace para comprender el de independencia.

Toda la correspondencia se llevó a cabo en 1654. No se sabe cuántas cartas estaban involucradas. Siete se conservan hoy en día: tres de cuatro de Pascal y Fermat, que abarca el período de julio a octubre. (*Ver apéndice*)

4.6. Apuestas ventajosas

El Caballero De Meré sabía que era ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado. Entonces De Meré argumentó que debiera ser igualmente ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. Para ello había razonado “por regla de tres”: si en 4 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 6 posibles, es lo mismo que si en 24 lanzamientos se apuesta por un resultado específico entre 36 posibles, ya que $\frac{6}{4} = \frac{36}{24}$. La experiencia no corroboró la suposición de De Meré.

¿Cómo hizo Pascal, para justificar por qué la primera apuesta es ventajosa pero la segunda no lo es?

Para empezar, el Caballero De Meré sabía que es ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado. Lo sabía por experiencia, pues era un jugador profesional. ¿Podemos nosotros saberlo razonadamente?

En efecto:

Al lanzar 4 veces un dado, ¿cuántos resultados diferentes se pueden obtener?. Pues 6 para cada lanzamiento, para una serie de los 4 lanzamientos tenemos:

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296 \text{ resultados.}$$

De esos 1296 resultados, ¿cuántos contienen al menos un 6? Para saberlo, es más fácil calcular cuántos no tienen 6 y restarlos de los 1296. Así que calculamos de cuántas formas pueden salir resultados de 1 a 5, cuatro veces seguidas:

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625.$$

Entonces, el número de series que contienen al menos un 6 es:

$$1,296 - 625 = 671.$$

Así que en 4 lanzamientos de un dado hay más resultados que contienen algún seis (671), que resultados con ningún seis (625). Por eso es ventajoso apostar a que va a salir algún seis. El problema del Caballero De Meré empezaba ahora; suponía que también sería ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un doble seis en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. No conocía otras matemáticas que la Regla de Tres y la utilizaba aquí, aunque no hubiera proporcionalidad.

Decía:

“apostar por un resultado de 6 en 4 lanzamientos será como hacerlo por un resultado de $6 \times 6 = 36$ en $4 \times 6 = 24$ lanzamientos”.

Para encontrar la solución, pensaremos también ahora de cuántas formas posibles se puede desarrollar el juego:

En un dado $\Rightarrow$ 6 caras.

En un par de dados tenemos $6 \times 6 = 36$ resultados.

En un par de dados $\Rightarrow$ 36 caras.

En 24 lanzamientos de un par de dados tenemos,

$$\underbrace{36 \cdot 36 \cdots 36}_{24 \text{ veces}} = 36^{24}$$

partidas posibles.

Y calculamos también cuántas de esas partidas son favorables a la apuesta por obtener al menos un doble seis

En un par de dados tenemos $36 - 1 = 35$ resultados que no son doble seis.

En 24 lanzamientos de un par de dados tenemos

$$\underbrace{35 \cdot 35 \cdots 35}_{24 \text{ veces}} = 35^{24}$$

con ningún doble seis.

Como hemos obtenido números muy grandes, es más sencillo calcular qué porcentaje de las partidas es de cada tipo:

- Proporción de partidas con ningún doble seis al lanzar 4 dados:

$$\frac{3524}{3624} = 0,50859... = 50,86 \%$$

- Proporción de partidas con al menos un doble seis al lanzar 4 dados:

$$100 \% - 50,86 \% = 49,14 \%$$

Y como $49,14 \% < 50,86 \%$, lleva la peor parte quien apuesta porque salga al menos un doble seis al lanzar 4 dados.

En la solución a los problemas planteados por De Meré aparecieron ya algunos conceptos que serían importantes en este tipo de situaciones (su denominación en la Teoría de la Probabilidad):

- * El número de posibles partidas diferentes a sucesos posibles.
- * El número de esas partidas en las que ganaríamos a sucesos favorables.
- * La proporción de partidas ganadas a frecuencia relativa.

Las apuestas de De Meré dieron un beneficio mucho mayor que el esperado por el jugador; abrieron nuevos caminos a la comprensión racional de lo que hasta entonces parecía imposible de comprender: la suerte, el azar.

4.7. Los asombrosos Bernoulli

Graunt (1620-1674) fue uno de los primeros analistas que llevaron a cabo lo que ahora llamamos la inferencia estadística: sacar conclusiones relativas a una gran población basadas en datos recogidos de una muestra pequeña. Para que un proceso de ese tipo permita obtener conclusiones fiables, la muestra deberá ser representativa de la población completa.

4.7.1. En el mundo cotidiano

No voy a permitir que me haga saber mis razones para mirar con interés sus opiniones. Creo que han reconocido de esto que la teoría de combinaciones es buena para el caso de dos jugadores por accidente, como a veces también es buena en el caso de tres jugadores, como cuando uno carece de un punto, otro, y los otros dos, porque, en este caso, el número de puntos en los que está terminado el juego no es suficiente para permitir ganar, pero no es un método general y es bueno sólo en el caso de que sea necesario para reproducir exactamente un cierto número de veces.

Para ilustrar, supongamos que se les dio un frasco grande y opaco de canicas rojas y azules. Usted sabe que hay 5,000 canicas por todas, pero no se sabe cuántas hay de cada color. Se saca una canica de la jarra al azar, y es de color rojo. Debe volver a colocarla, agitar el frasco, y luego sacar de nuevo. Esta vez, se saca una canica azul. Repita el proceso de sacar canicas, de regreso, agitar, sacar 50 veces y encontrar que 31 veces se saca una canica roja y 19 veces una canica azul. Esto nos lleva a sospechar que hay alrededor de 3,000 canicas rojas y 2,000 azules por lo que la probabilidad a posteriori de sacar una

canica roja al azar es $\frac{3}{5}$. ¿Qué tan seguro se puede estar en esta conclusión? ¿Sería más seguro si había probado más canicas, por ejemplo, 100?

Bernoulli (1700-1782) demostró que tomando una muestra suficientemente grande, puede aumentar su confianza en que la probabilidad calculada en cualquier grado que desee. Más precisamente, al aumentar el tamaño de la muestra, se puede aumentar la confianza en la probabilidad calculada. Ésta es **la ley de los grandes números**.

En el caso de las 5,000 canicas en el frasco, donde hay exactamente 3,000 rojas y 2000 azules, Bernoulli calculó cuántas canicas tendría que probar para estar seguro. Por eso introdujo la idea de la “certeza moral”: para que un resultado fuese moralmente cierto, debía tener una probabilidad no menor que 0,999, mientras que un resultado con probabilidad no mayor que 0,001 se consideraría “moralmente imposible”. La respuesta que obtuvo fue 25,550 veces. Esto es mucho más que el número total de canicas (5,000). Así, en este ejemplo, sería mejor simplemente contar todos los casos. No obstante, el resultado teórico de Bernoulli muestra que al tomar una muestra suficientemente grande, las probabilidades se pueden calcular a partir de una muestra, de modo que a cualquier grado de certeza, la probabilidad calculada está dentro de cualquier grado deseado de exactitud con respecto a la verdadera probabilidad.

Con una probabilidad a posteriori, hay una segunda pregunta: ¿Qué tan confiable es la probabilidad para predecir los acontecimientos futuros? Esto no es realmente una cuestión matemática. La cuestión es más bien lo mucho que el pasado puede ser tomado como indicativo del futuro.

4.7.2. El arte de la conjetura

Jacob Bernoulli conoció sobre los trabajos de Fermat, Pascal y Huygens referentes a la probabilidad, y así concluyó que el modelo ideal que ellos propusieron para establecer la forma como se comportan los fenómenos aleatorios se basaba en una **Distribución Uniforme y Frecuentista** de la probabilidad, es decir, el modelo propuesto por Pascal, Fermat y Huygens asume que cada posible resultado de un juego de azar, al ser equiprobable, debe aparecer homogéneamente y según sus probabilidades una determinada cantidad de veces dentro de un número de jugadas realizadas; por ejemplo, si en el lanzamiento de un solo dado al aire la probabilidad de aparición de una de sus seis caras es $\frac{1}{6}$, entonces dentro de 6 lanzamientos del dado las matemáticas indican que esa cara debe aparecer idealmente una sola vez (6 lanzamientos del dado por $\frac{1}{6}$ de probabilidad = $\frac{6}{6} = 1$), y en 12 lanzamientos del dado esa cara debe aparecer idealmente 2 veces (12 lanzamientos por $\frac{1}{6}$ de probabilidad = $\frac{12}{6} = 2$), y en 18 lanzamientos del dado, debe aparecer 3 veces, y así sucesivamente en una relación que es directamente proporcional al número de lanzamientos realizados.

Por tanto, para Bernoulli el modelo de la probabilidad existente hasta ese momento se basaba en asumir que cada posible resultado de un juego de azar, según su respectiva probabilidad de ocurrencia, debe observar cierta **Frecuencia** de aparición dentro de un determinado número de lanzamientos o ensayos, lo cual implica que a la luz de este modelo ideal se puede calcular por anticipado la cantidad esperada de aciertos que ocurrirán dentro de un número de lanzamientos o ensayos, idea que es el fundamento de lo que actualmente se conoce como **Teorema de Bernoulli o Ley de los Grandes Números**, que en su primera formulación afirma que la probabilidad de ocurrencia de un evento aleatorio se mantiene constante sin importar el aumento en el número de jugadas,

lanzamientos o ensayos realizados.

Bernoulli presenta a Leibniz una cuestión probabilística que dividía en dos partes, dependiendo de dos nociones distintas.

En primer lugar, estaba la que Bernoulli llamó *probabilidad a priori*, esto es, una probabilidad calculada con anterioridad al acontecimiento.

Bernoulli utilizó el término *probabilidad a posteriori* para referirse al otro tipo de probabilidad, la que se calcula después del suceso.

Demostró entonces, que tomando una muestra suficientemente grande, se puede aumentar el grado de confianza de la probabilidad calculada hasta el valor deseado. De modo más preciso, al aumentar el tamaño de la muestra podemos aumentar hasta cualquier nivel nuestra confianza de que la probabilidad calculada a partir de la muestra se halla *dentro de cualquier valor estipulado* de la probabilidad verdadera. Éste es el resultado conocido como *ley de los grandes números*, y es un teorema central de la teoría de la probabilidad.

4.8. El reverendo Bayes y su fórmula

Bayes (1702-1761) fue siguiendo el trabajo de Bernoulli, ampliándolo en algunos aspectos.

El método de Bayes, concretamente, muestra cómo calcular la probabilidad de un cierto suceso E sobre la base de la evidencia cuando se conoce:

1. La probabilidad E en ausencia de toda evidencia.

2. La evidencia de E .
3. La fiabilidad de la evidencia, es decir, la probabilidad de que la evidencia sea correcta.

El método de Bayes no dice cómo calcular la probabilidad de una *hipótesis nueva*. Más bien, es un método para la **revisión** de una probabilidad a la luz de nueva información. Se comienza con una idea de la probabilidad de una hipótesis, H , cifra que se conoce como la *probabilidad a priori* de la hipótesis H . Dadas algunas E de nueva información, a continuación, llevar a cabo un cálculo para obtener una probabilidad revisada de H , que la nueva idea que se llama la *probabilidad a posteriori*. La revisión se lleva a cabo mediante la inserción de las ideas relevantes en una fórmula matemática conocida como **fórmula de Bayes**.

Bayes otorga un significado distinto a la probabilidad a priori y a posteriori, definidos por Bernoulli.

Probabilidad a priori. Es la probabilidad basada puramente en la disposición de las cosas, no en ninguna evidencia particular perteneciente al caso en cuestión.

La probabilidad a priori podría ser una conjetura o una estimación. Dada la nueva información suficiente, una aplicación del procedimiento de revisión de Bayes puede conducir a una probabilidad más exacta. Al aplicar el método de Bayes iterativamente, cada vez que se obtiene nueva información, se puede convertir incluso una probabilidad a priori bastante pobre en una probabilidad a posteriori bastante fiable.

4.8.1. Fórmula de Bayes

Describiremos la fórmula de Bayes para calcular la probabilidad de una hipótesis H determinada, basada en la evidencia E .

Sea $P(H)$ la probabilidad de que la hipótesis H es correcta en la ausencia de cualquier evidencia de la *probabilidad a priori*.

Sea $P(H|E)$ la probabilidad de H dado que es E correcta. Ésta es la estimación que se desea calcular. Una cantidad tal como $P(H|E)$ se conoce como *la probabilidad condicional de H dada la evidencia E* .

Entonces $P(E|H)$ es la probabilidad de que E se puede encontrar dada H fuera correcta, y $P(E|H^c)$ la probabilidad de que E se puede encontrar dado que H es falsa. La fórmula de Bayes requiere estas cifras para calcular la nueva estimación. Como:

$$P(H^c) = 1 - P(H).$$

Entonces la fórmula de Bayes es:

$$P(H|E) = \frac{(P(H))(P(E|H))}{((P(H))(P(E|H)) + (P(H^c))(P(E|H^c)))}$$

Una de las ventajas del enfoque de Bayes es que a veces nos puede guiar en nuestras intuiciones erróneas.

Por ejemplo, supongamos que se somete a un examen médico para un cáncer relativamente raro. El cáncer tiene una incidencia de 1 % entre la población general. Extensos

ensayos han demostrado que la fiabilidad de la prueba es de 79 %. Más precisamente, aunque la prueba no deja de detectar el cáncer cuando está presente, da un resultado positivo en 21 % de los casos en que no hay cáncer presente, lo que se conoce como un falso positivo.

Cuando se ponen a prueba, la prueba arroja un diagnóstico positivo. La pregunta es: ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga el cáncer?

Si supone que la prueba tiene una tasa de fiabilidad de casi el 80 por ciento, y ya que dio positivo, la probabilidad de que efectivamente se tenga el cáncer es 0.8. ¿Está bien?

No. Dada la situación que acabo de describir, la probabilidad de que usted tiene el cáncer se encuentra sólo un 4.6 por ciento (es decir, la probabilidad es 0.046). Hay menos de 5 por ciento de fiabilidad de que tiene el cáncer. Sin embargo una posibilidad preocupante, por supuesto.

Así es como se llega a esa cifra:

- $P(H) = 0,01$ (el cáncer tiene una incidencia de 1 por ciento en la población)
- $P(E|H) = 1$ (la prueba siempre se muestra positiva si el cáncer está presente)
- $P(H^c) = 0,99$ (99 por ciento de la población que tiene cáncer)
- $P(E|H^c) = 0,21$ (la prueba da un resultado falso positivo en el 21 por ciento de los casos)

Así que por la fórmula de Bayes

$$P(H|E) = \frac{(0,01)(1)}{(0,01)(1)+(0,99)(0,21)} = \frac{0,01}{0,2179} = 0,0459$$

La fórmula de Bayes viene de una enumeración bastante simple y el argumento de contar, muy parecida a la de Fermat para resolver el problema de los puntos. En lugar de presentar el argumento de una manera abstracta, veamos un ejemplo, como el precedente de la prueba de cáncer.

Se supondrá una población total de 10,000 personas. También daremos por supuesto que, de la población total de 10,000; 100 tendrán el cáncer y 9,900 no.

En ausencia de la prueba, todo lo que se puede decir acerca de la probabilidad de tener el cáncer es que hay una posibilidad de 1 %. Ésta es la probabilidad de 0.01. Luego de tomar la prueba, resulta positiva. ¿Cómo se puede revisar la probabilidad de tener el cáncer?

Hay 100 individuos de la población que tienen el cáncer, y para todos ellos, la prueba correctamente dará una predicción positiva, con lo que se identificaron 100 personas que tienen el cáncer.

En cuanto a los 9,900 individuos sin cáncer, en el 21 % de ellos, la prueba incorrectamente da un resultado positivo, por lo que se identifican $(9,900)(0,21) = 2,079$ personas, que tienen el cáncer, sin tenerlo realmente.

Por lo tanto, la prueba identifica un total de $100 + 2,079 = 2,179$ individuos que tienen el cáncer.

La pregunta es: ¿Está un individuo específico en el subgrupo de los que realmente tienen el cáncer, o es el resultado de la prueba de un falso positivo?

De los 2,179 identificados por la prueba, 100 tienen realmente el cáncer. Por lo tanto, la probabilidad de estar en ese grupo es de

$$\frac{100}{2,179} = 0,0459.$$

A pesar de su simplicidad, el método de Bayes puede ser difícil de entender. La cuestión no es tanto la fórmula, sino el entendimiento del concepto de **probabilidad condicional**.

4.9. Las estructuras abstractas del azar

A. N. Kolmogorov (1903-1987) a principios de la década de 1930, definió la probabilidad como una función del conjunto de números reales comprendidos entre 0 y 1. El grupo de conjuntos para los cuales esta función está definida constituirá lo que se llama un campo de conjuntos. Esto significa que todos los conjuntos son subconjuntos de algún conjunto único U , perteneciente él mismo al grupo; la unión y la intersección de dos conjuntos cualesquiera del grupo pertenece al mismo, y el complemento (con respecto a U) de cualquier conjunto del grupo pertenece también a éste.

Para que la probabilidad sea una función, Kolmogorov impuso dos condiciones:

1. El valor asignado al conjunto vacío es 0 y la probabilidad asignada a U es 1.
2. Si dos conjuntos del campo no tienen elementos en común, entonces la probabilidad de su unión es la suma de probabilidades de ambos.

4.9.1. Libros de los juegos de azar

Liber de parchís aleae (Libro de los juegos de azar) de Cardano (1501-1576) se publicó en 1663, mucho después de su muerte, pero de acuerdo a su autobiografía, él lo terminó en 1525, cuando todavía era un hombre joven, y lo reescribió en 1565.

Cardano realizó el primer estudio científico de lanzar dados, basado en que hay principios fundamentales que rigen la probabilidad de obtener resultados concretos. El libro es en parte la observación y en parte, un análisis teórico de los resultados particulares del lanzamiento de los dados, agregado cuando se repite muchas veces. En lenguaje moderno, fue el primer estudio de la **probabilidad frecuentista**.

El *aleae* palabra que se refiere a juegos de dados. *Aleatorius*, desde la misma raíz latina, se refiere a los juegos de azar en general.

Cardano no utilizó la palabra *probabilidad*, lo que vino después, se deriva de la *probare* (para probar o de prueba) y (poder) y por lo tanto puede ser entendida como “posibilidades, capaz de ser verificada”, donde la verificación es empírica.

Los intentos de rastrear los orígenes e interpretar los significados de las palabras anteriores están a menudo llenos de dificultades, y en este caso particular es así, ya que nuestra actual concepción de la probabilidad, que tiene los dos aspectos de catalogación, el pasado y predecir el futuro, no fue desarrollado sino hasta mucho después.

El libro es en parte un compendio de instrucciones para el jugador, salpicado acerca de las experiencias de juego y creencias propias de Cardano. Él no tenía ni idea de que su análisis era lo que ahora conocemos como probabilidad frecuentista.

Cardano define, por primera vez, lo que ahora llamamos la probabilidad de un evento como una fracción. Describe estas observaciones en su libro como sigue:

“La mitad del número total de caras siempre representa la igualdad (de oportunidad); así las posibilidades son iguales para un punto dado a su vez”.

Se observó también que la probabilidad de obtener, por ejemplo, un 3 o 5 en un solo lanzamiento es $\frac{2}{6}$ o $\frac{1}{3}$. También, señaló que para calcular la probabilidad de obtener un

determinado resultado con dos tiros sucesivos, se eleva al cuadrado la probabilidad de conseguir este resultado, en un solo tiro. Por ejemplo, la probabilidad de obtener un 6 dos veces en sucesión es $(\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{36}$. Del mismo modo, la probabilidad de obtener un número par dos veces seguidas es $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

Ampliando el razonamiento, la probabilidad de obtener un 6 tres veces será $(\frac{1}{6})(\frac{1}{6})(\frac{1}{6}) = \frac{1}{216}$, y la probabilidad de sacar tres números pares es $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$.

La versión general es que, si se produce una acción dos veces, y si la probabilidad de un evento E , o el resultado que ocurre la primera vez es pE , y la probabilidad de un evento F o resultado ocurriendo la segunda vez es pF , entonces la probabilidad de que ambos se produzcan (en ese orden) es $(pE)(pF)$. Esto supone que la primera acción no influye en la próxima, esto es, los dos episodios de la acción tienen que ser independientes. Por ejemplo, la probabilidad de sacar un 6 en el primer tiro y cualquier número par en el segundo es $(\frac{1}{6})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$.

Si se quita la restricción en orden, en el que el 6 y un número par aún ocurren, hay más posibilidades y, en consecuencia, la probabilidad es mayor. La forma más sencilla para calcular la probabilidad en este caso, es hacer lo que hizo Fermat en el problema de los puntos, y enumerar todos los resultados favorables. Son 2-6, 6-2, 4-6, 6-4, 6-6. Puesto que hay 36 resultados posibles en total, esto le da la respuesta $\frac{5}{36}$.

Más complicado es el siguiente resultado de Cardano: se calculó la probabilidad de que salga un 1 o un 2, en un par de dados. La probabilidad de que salga un 1 o un 2, con un solo dado es $\frac{1}{3}$, por lo que la intuición ingenua es que con dos dados, el doble de sus posibilidades, es decir, a una probabilidad de $\frac{2}{3}$. Pero, como Cardano observó, esto es incorrecto. El problema es que un 1 o un 2 podrían llegar en los dos tiros, y mediante la

adición de las dos probabilidades individuales, es que se cuenta esta posibilidad en dos ocasiones. Así entonces, hay que restar a $\frac{2}{3}$ la probabilidad de $\frac{1}{9}$ de obtener un 1 o un 2 en ambos lanzamientos. Esto es, $\frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$.

Utilizando el método de Fermat, si en una lista de todos los posibles resultados de treinta y seis, se encuentra que una veintena de ellos se incluyen 1 ó 2 al menos una vez. Otra forma de calcular la respuesta más eficiente cuando el número de posibilidades crece, es calcular la probabilidad de que el evento no se produce, ya que esto evita el problema de doble contabilidad. La probabilidad de no obtener un 1 o un 2 con un solo dado es $\frac{4}{6}$, o $\frac{2}{3}$, por lo que la probabilidad de no sacar un 1 o un 2 con dos dados es $(\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$. Por lo tanto, ya que la probabilidad total es de 1, la probabilidad de sacar un 1 o un 2 debe ser de $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$.

Con el análisis de Cardano, el escenario estaba listo para que Pascal y Fermat pudieran avanzar aún más.

Los avances en la ciencia a menudo se retrasan debido a la creencia común que sostiene que algo es imposible. Desde la época de los antiguos griegos, se creía que el futuro estaba en manos de los dioses, una cuestión de suerte pura. La cuantificación de la forma en que un par de dados pueden caer, como Cardano había hecho, era una cosa; predecir cuál será el futuro al tirar los dados era otra muy distinta.

En 1756, más de cien años después de Pascal y Fermat en su famoso intercambio, el matemático francés Abraham de Moivre, el hombre que descubrió la distribución normal que forma la base de las estadísticas actuales de predicción, con firmeza creía que el futuro estaba determinado por Dios. Él escribió (en su libro Doctrina de Oportunidades):

Una vez más, ya que es por lo tanto demostrable que hay, en la constitución de las

cosas, ciertas leyes de acuerdo a los eventos que suceden, no es menos evidente a partir de la observación, que esas leyes sirven de otra forma, con fines útiles y beneficiosos para preservar el orden firme del Universo, para propagar las especies de seres, y proporcionar a la clase consciente de estos grados de felicidad que se adaptan a su Estado.

Pero tales leyes, así como el diseño original y el propósito de su creación, todo debe ser desde el exterior, la inercia de la materia y la naturaleza de todos los seres creados, lo que hace imposible que cualquier cosa debe modificar su propia esencia, o dar a sí mismo, o para cualquier otra cosa, una determinación inicial o propensión. Y por lo tanto, si no nos ciega el polvo metafísico, que será llevado, por un camino corto y obvio, para el reconocimiento del gran Hacedor y Gobernador de todas las cosas.

Hoy en día, no tenemos ninguna dificultad en aceptar que un evento de pura casualidad puede tener suficiente “previsibilidad” en las probabilidades correspondientes a su resultado, sin necesidad de asumir la divina voluntad, el resultado es una cuestión de azar.

De hecho, una persona religiosa hoy en día que ve la mano de Dios en todas las cosas, simplemente acepta que las leyes de la probabilidad en sí son una manifestación de los caminos de Dios.

La teoría cuántica parte del supuesto de que esta es la naturaleza de la propia estructura de nuestro universo. Pero en el siglo XVII, las cosas se veían muy diferentes, Pascal y Fermat no sólo tenían que encontrar la manera de realizar el cálculo que resuelve el problema del juego sin terminar, también tuvieron que hacerlo dentro de una cosmovisión que lo considera imposible.

Antes de 1654, el mañana se veía como una cosa del destino, algo sobre lo que una persona no tenía ningún control. La solución del problema, jugó un papel decisivo en el

cambio de ese punto de vista, aunque como el paso de Moivre indica, se tomó un tiempo para que el verdadero significado de su trabajo pudiera abrirse paso.

Con la solución al problema de los puntos y la posterior aceptación de la teoría de probabilidades, se contaba con una medida de control sobre el futuro. Un individuo no puede saber con certeza lo que sucederá, pero mediante el cálculo de las probabilidades, se puede elegir una de las acciones con el fin de minimizar los peligros y maximizar los resultados deseados, o se puede adquirir un seguro para facilitar la recuperación si las cosas salen mal. En resumen, Pascal y Fermat nos dieron la capacidad para gestionar el riesgo.

4.10. Primeras letras

La primera carta de Pascal a Fermat con que comenzó su colaboración, desgraciadamente se ha perdido y nuestro conocimiento de la correspondencia de los dos hombres se inicia con la respuesta, sin fecha de Fermat. Después de una breve discusión de la parte de la carta de Pascal de que Fermat ha encontrado un problema, relativo a la cuestión siempre problemática de cómo manejar los juegos donde un jugador gana en menos del número máximo de rondas, Fermat explica la dificultad que ve en el enfoque de Pascal:

Sin embargo, usted propuso en el último ejemplo en su carta (cito sus propios términos) que si me comprometo a encontrar el seis de ocho tiros y si he tirado tres veces sin conseguirlo, y si mi oponente propone que no puede desempeñar la cuarta vez, y si desea que yo sea tratado con justicia, es apropiado que yo debo obtener $\frac{125}{1296}$ de la suma total de nuestras apuestas.

Esto, sin embargo, no es cierto por mi teoría. Porque en este caso, los tres primeros tiros de haber ganado, por el jugador que tiene la bolsa, la suma total de lo que queda en juego, el que tiene la bolsa y que se compromete a no jugar su cuarto tiro debe tener $\frac{1}{6}$ como recompensa.

Y si él ha jugado cuatro tiros sin encontrar el punto deseado y si están de acuerdo que no jugará por quinta vez, él, sin embargo, tiene un sexto del total de su parte.

Dado que la suma total permanece en juego no sólo se deduce de la teoría, pero sí es de sentido común que cada tiro debe ser de igual valor.

Os exhorto, pues para que yo sepa si estamos de acuerdo en la teoría, como creo que nosotros lo estamos, pues sólo se diferencian en su aplicación.

Yo soy, de todo corazón, etc,

Fermat

Pascal reconoce la validez de la objeción de Fermat en su siguiente carta, de fecha miércoles, 29 de Julio 1654, que comienza así:

La impaciencia se apoderó de mí tan bien como lo que tiene, y aunque todavía estoy en cama, no puedo dejar de contarles que he recibido su carta en relación con el problema de los puntos de la tarde de ayer, de las manos de M. Carcavi, y que yo admiro más de lo que puedo decirte. No tengo el placer de escribir en detalle, pero, en una palabra, se han encontrado las dos divisiones de los puntos y de los dados con la justicia perfecta. Estoy completamente satisfecho ya que ya no puede dudar de que yo estuviera equivocado, al ver el acuerdo admirable en el que me encuentro con usted.

Capítulo 5

Aportaciones de Pascal y Fermat

Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), representan el comienzo de la teoría moderna de probabilidades; aunque su análisis está centrado en un problema específico del juego de apuestas. Pascal y Fermat desarrollaron una teoría general que puede aplicarse a una amplia variedad de circunstancias para predecir los resultados más probables de distintos tipos de sucesos.

El problema consiste en ¿Cómo deben repartirse los jugadores la apuesta si su juego se interrumpe antes del final?, claro suponiendo que no están empatados, en este caso debería ser equitativo, en caso contrario, se trata de suponer de algún modo cuál sería el resultado más probable si el juego hubiera continuado, es decir, de predecir el futuro, un futuro que no tendrá lugar. Este problema también es conocido como el problema de los puntos ya que en lugar de las rondas de escrutinio, se pueden asignar cada uno de los puntos al jugador para ganar cada ronda. Este es el problema al que Pascal se refiere en la apertura de su carta.

Señor,

Yo no era capaz de decirle mis pensamientos enteros con respecto al problema de los puntos por el último mensaje, y, al mismo tiempo, tengo una cierta resistencia a hacerlo por temor a que esta armonía admirable que se da entre nosotros y que es tan querida para mí debe comenzar a decaer, porque tengo miedo de que pueda tener diferentes opiniones sobre este tema. Me gustaría poner mi razonamiento entero antes de usted, y tenga que hacerme el favor de que me aclarara si estoy en error o que me endosará, si estoy en lo correcto. Yo os pido esto en toda la fe y la sinceridad, porque yo no estoy seguro siquiera

de que va a salir de mi lado.

Aunque Pascal y Fermat establecieron la teoría de probabilidad en colaboración, a través de su correspondencia epistolar (nunca se reunieron) cada uno enfocó el problema de forma distinta. Fermat prefirió las técnicas algebraicas que empleó de modo tan eficaz en la teoría de números. Pascal, por otra parte, exploró el orden geométrico subyacente en las estructuras del azar. Que los sucesos aleatorios presentan patrones geométricos queda ilustrado de manera notoria por el famoso triángulo de Pascal .

La correspondencia entre ellos fue de muy corta duración debido en gran parte a que Pascal contesta a Fermat que “...busque otro corresponsal capaz de seguir sus desarrollos numéricos...”, lo que significa el fin de su comunicación y es cuando Pascal decide retirarse de las matemáticas (por primera vez). Sus esfuerzos los canaliza en cuestiones religiosas, y se une al grupo de los Jansenistas.

Esto hace que Fermat abandone sus reflexiones sobre los juegos de azar y continúe pensando en otros temas de las matemáticas. Relativamente al conjunto de su obra, la parte probabilista es muy pequeña aunque sustancial y profunda. Tocaré a los sucesores Christianus Huygens, James Bernoulli, Pierre-Remond De Montmort, Abraham de Moivre, continuar la obra emprendida por estos dos grandes pensadores.

Sin embargo, y a pesar de los importantes descubrimientos hechos por este grupo y otros más como John y Nicolas Bernoulli, Laplace, Gauss etc., la teoría de la probabilidad se mantuvo relativamente marginada del centro del desarrollo matemático hasta llegar al siglo XX.

A principios del siglo XX el desarrollo de la teoría de la medida da finalmente el marco conceptual adecuado a la teoría y esta va tomando poco a poco un lugar central en el

mundo de las matemáticas tanto puras como aplicadas.

En todo momento de su desarrollo, las ideas de independencia y de probabilidad condicional han sido y son fundamentales. Los métodos probabilistas logran resolver conjeturas y problemas abiertos de análisis matemático, ecuaciones diferenciales parciales y teoría de números entre otras, y permiten aproximar soluciones de, por ejemplo, ecuaciones diferenciales parciales mediante una combinación de resultados probabilistas con métodos de análisis numérico.

El crecimiento de esta rama en el último siglo y la manera en cómo se ha interrelacionado con muchas otras ramas tanto de la matemática como de la física y la estadística, seguramente sorprendería a los precursores Pascal y Fermat.

5.1. El método universal de Pascal

Fermat y Pascal habían optado por métodos diferentes, y claramente correctos, llegando al mismo resultado; a diferencia de Fermat, que escribió todas las combinaciones posibles de resultados que pudieran surgir durante la realización del juego, Pascal adopta una estrategia diferente que describe así en su carta enviada en Agosto de 1654:

No he encontrado mi razonamiento tanto en este método de combinaciones, lo que en verdad no está en su lugar en esta ocasión, como en mi método universal de la que nada se escapa y que lleva su prueba a sí misma. Esto encuentra precisamente la misma división que hace el método de combinaciones.

El “método universal” al que se refiere Pascal, se conoce generalmente como método iterativo o “recursividad”.

Pascal aborda el problema de los puntos mirando a la cantidad $e(a, b)$ que indica el porcentaje de la participación que el primer jugador debe administrarse, si el jugador 1 requiere de un lanzamiento para ganar y el jugador 2 requiere dos tiros ganadores. Claramente, si los números a y b son iguales, entonces $e(a, b) = \frac{1}{2}$. La idea es ver cómo $e(a, b)$ cambia cuando cada jugador gana un tiro más. Esto conduce a una expresión algebraica para $e(a, b)$ en términos de $e(a - 1, b)$ y $e(a, b - 1)$, y se puede resolver el problema de los puntos mediante el uso de la recursividad para calcular $e(2, 3)$, la proporción deseada en el juego particular considerado.

El principal inconveniente con el enfoque de Pascal es que requiere un poco de álgebra compleja que depende de la teoría de combinaciones, que desarrolló en relación con su famoso triángulo. Sin embargo, cuando se lleva a cabo correctamente, conduce al resultado correcto, y el mismo enfoque fue utilizado posteriormente por Abraham de Moivre, Joseph Louis Lagrange, Laplace, Pierre-Simon y otros matemáticos, para encontrar métodos generales para la solución de una variedad de otros problemas.

5.2. El gran aficionado

Y entonces Fermat contesta a Pascal:

. . . Por lo tanto, respondió lo siguiente:

No está claro que los mismos jugadores, al no estar obligados a jugar los cuatro tiros, pero que deseen abandonar el juego antes de que uno de ellos ha alcanzado su puntuación, puede sin pérdida o ganancia estar obligado de jugar completos los cuatro tiros, y que esté de acuerdo en no cambiar su condición. Por si las primeras ganancias de dos primeros

puntos de los cuatro, será el que ha ganado se niegan a jugar un par de tiros más, viendo que si gana no va a ganar más y si pierde no va a ganar menos. Para los dos puntos que las otras victorias no son suficientes para él, ya que carece de tres, y no hay suficientes [puntos] en cuatro tiros a cada uno para hacer el número que le falta.

Sin duda, es conveniente considerar que es absolutamente igual e indiferente a cada uno si juegan en la forma natural del juego, que es terminar tan pronto como uno tiene su puntuación, o si juegan todos los cuatro lanzamientos. Por lo tanto, ya que estas dos condiciones son iguales e indiferentes, la división debe ser igual para cada uno. Pero ya que es justo cuando se ven obligados a jugar a los cuatro tiros como lo he demostrado, por lo que es justo también en el otro caso.

Esa es la forma en que lo prueban, y, como recuerdo, esta prueba se basa en la igualdad de las dos condiciones verdaderas y asumiendo la consideración de los dos jugadores, la división es la misma en cada uno de los métodos, y si uno gana o pierde por un método, será ganar o perder por el otro, y los dos siempre tendrán la misma contabilidad.

5.3. Un trato holandés con grandes expectativas

La ganancia esperada es generalmente considerada como la medida objetiva correcta (en la mayoría de los casos) del valor de una apuesta en particular a la persona que lo hace. Para calcularla, se multiplica la probabilidad de cada resultado por la cantidad que se va a ganar (o perder, lo que se cuenta como una ganancia negativa) y se añaden todos los resultados.

Por ejemplo, los casinos ofrecen las posibilidades para apostar a rojo o negro en la ruleta. Supongamos que usted apuesta 100 al rojo. La rueda de la ruleta tiene 36 ranuras,

numeradas del 1 al 36, la mitad de ellos de color rojo, mitad negro, y dos ceros, de color verde. La probabilidad de rojo, es $\frac{18}{38}$, es decir, $\frac{9}{19}$. Así que su expectativa es la siguiente:

$$(\frac{9}{19})(100) + (\frac{10}{19})(-100) = -\frac{100}{19} = -5,26$$

Esto significa que si uno juega varias veces, apostando 100 al rojo cada vez, en promedio, perderá 5.26 en cada juego. Esto es, se puede esperar que las pérdidas tengan un promedio de 5.26 dólares en cada juego.

En *Pensées*, una obra *filosófica* de 1658, Pascal utilizó la noción de expectativa de argumentar que se debe llevar una vida piadosa. He aquí el argumento completo:

O Dios existe o Dios no existe. Sea p la probabilidad de que Dios existe, por lo que $1-p$ es la probabilidad de que Dios no existe. Si usted lleva una vida piadosa y existe Dios, usted será recompensado con la vida eterna en el Cielo, que es una recompensa infinita. Si usted lleva una vida mundana y si existe Dios, usted recibirá una recompensa menor, X , que es posiblemente negativa (es decir, una pérdida). (Algunas religiones advierten que X será una pérdida infinita de eterna condenación. Si Dios no existe, entonces no hay otra vida, por lo que todas las ganancias son mundanas). Tal vez la ganancia (mundana) que se obtiene de llevar una vida mundana, Y , supera a la de un devoto que lleva un total de auto-sacrificio, que yo llamaré Z . (Usted puede incluso sentir que Z es negativo).

Su expectativa de si lleva una vida mundana es, pues,

$$(p)(X) + (1 - p)Y$$

y de llevar una vida piadosa, es

$$(p)(X) + (1 - p)Z$$

La primera es finita y la segunda es infinita. Pascal llegó a la conclusión, de que lo racional es llevar una vida piadosa. Una vida mundana es una ventaja sólo si p es igual a cero, pero como decía Pascal, nadie está en condiciones de saberlo. Para cualquier p probabilidad no nula de la existencia de Dios, no importa cuán pequeña sea, la piedad es la mejor apuesta.

5.4. La medida de nuestra ignorancia

La siguiente carta que se podría llamar la última carta de Fermat. Es la última que se sabe que ha escrito a su corresponsal Pascal.

Domingo, 25 de julio 1660

Señor, Tan pronto como descubrí que estábamos más cerca el uno al otro de lo que habíamos estado nunca, no me pude resistir a hacer planes para la renovación de nuestra amistad y me preguntó el señor de Carcavi para ser mediador: en una palabra, me gustaría abrazarle y hablar con usted unos días, pero como mi salud no es mejor que la suya, espero sinceramente que usted me hará el favor de venir a mitad del camino a mi encuentro por lo que sugiero un lugar entre Clermont y Toulouse, donde yo iría sin falta a finales de septiembre o principios de octubre.

Si usted no está de acuerdo con esta disposición, corre el riesgo de verme en su casa y de este modo tener a dos personas enfermas a la vez. Espero sus noticias con impaciencia y yo, con todo mi corazón,

Suyo siempre,

Fermat

Los dos hombres cuyo notable cambio en el verano de 1654 había puesto en marcha una revolución nunca habían conocido, ni habían correspondido después de resuelto el problema de los puntos. Pero al escuchar seis años después que Pascal estaba cerca, Fermat no pudo resistirse a tratar de concertar una reunión. Pascal respondió de inmediato:

Martes, 10 de agosto 1660

Señor, Usted es el hombre más valiente del mundo y seguramente yo soy el que mejor puede reconocer sus cualidades y en gran medida lo admiro, sobre todo cuando se combina con sus singulares habilidades propias. Debido a esto creo que debo mostrar mi agradecimiento por el ofrecimiento que me ha hecho, el honor que me hace es tan querido para mí que no puedo apresurar demasiado en responder a su carta.

Le diré entonces, señor, que si yo estuviera en buen estado de salud, me hubiera trasladado a Toulouse y yo no permitiría que un hombre como usted a dar un paso para un hombre como yo. Le diré también que, incluso si usted era el mejor geómetra en el conjunto de Europa, no sería que la calidad de lo que me atrae a usted, pero es su gran vivacidad y la integridad en la conversación que me traen a verle.

Porque, para hablar francamente con usted acerca de la geometría, es para mí el mejor ejercicio intelectual, pero al mismo tiempo, reconozco que es tan inútil que puedo encontrar poca diferencia entre un hombre que no es más que un geómetra y un listo artesano. Aunque yo lo llamo el mejor oficio del mundo, después de todo es sólo un arte, y muchas veces he dicho que está muy bien para tratar en ella, pero no dedicar todos los poderes de uno a la misma.

En otras palabras, no me da dos pasos para la geometría y me siento seguro de que son muy de la mente misma. Pero además de todo esto, mis estudios me han llevado tan

lejos de esta forma de pensar, que apenas puedo recordar que no hay tal cosa como la geometría. Me empezó, un año o dos atrás, por una razón particular, que ha cumplido esto, es muy posible que nunca se piense en ello otra vez.

Además, mi salud no es sin embargo muy buena, porque yo soy tan débil que no puedo caminar sin bastón, ni montar a caballo, que sólo puedo manejar tres o cuatro leguas en un carruaje. Fue de esta manera que tomé veinte y dos días en llegar hasta aquí desde París. Los médicos me recomendaron tomar las aguas en Bourbon durante el mes de septiembre, y hace dos meses lo prometí, si puedo hacerlo, para ir desde allí a través de Poitou por el río de Saumur a quedarme hasta la Navidad con monsieur el duque de Roannes, gobernador del Poitou, que siente algo por mí que no merezco. Pero, ya que ir a través de Orléans en mi manera de Saumur por el río y si mi salud me impide ir más allá. Voy a ir de allí a París. No, señor, es el estado actual de mi vida, me sentí obligado a describir a usted a fin de convencerlo de la imposibilidad de que yo sea capaz de recibir el honor que tan amablemente me ha ofrecido. Espero, con todo mi corazón, que un día voy a ser capaz de reconocerlo a usted o a sus hijos, a quien siempre me dedicó, con una especial consideración para aquellos que llevan el nombre del primer hombre en el mundo.

Yo soy, Pascal De Bienassis, 10 de agosto 1660

Ese breve intercambio en el verano de 1660 fue, por lo que sabemos, la última vez que estas dos grandes mentes se pusieron en contacto. Ellos nunca fueron capaces de reunirse en persona. La salud de Pascal siguió deteriorándose, y dos años y nueve días después de enviar la carta, estaba muerto. Fermat vivió otros tres años.

Capítulo 6

Discución y conclusiones

En los seis capítulos anteriores se han expuesto, los trabajos relevantes que se realizaron en relación al origen y desarrollo de las ideas que condujeron, después de varios siglos, el nacimiento de la Teoría de Probabilidades.

A principios del siglo XVII, el resultado de algo tan simple como una tirada de dados fue consignado al reino de la posibilidad de conocer. Matemáticos en gran medida de acuerdo en que era imposible predecir la probabilidad de un suceso. Luego, en 1654, Blaise Pascal escribió a Pierre de Fermat y explicó que él había descubierto la forma de calcular el riesgo. Resolvieron varios problemas, planteados incluso anteriormente por otros matemáticos, cómo la apuesta sin terminar, el problema de los puntos, etc. Los dos colaboraron para desarrollar lo que hoy se conoce como la teoría de probabilidades, concepto que nos permite pensar racionalmente acerca de las decisiones y eventos.

Cabe mencionar que la importancia de la probabilidad radica en que, mediante este recurso matemático, es posible ajustar de la manera más exacta posible los imponderables debidos al azar en variados campos tanto de la ciencia como de la vida cotidiana. En efecto, la probabilidad es una estrategia mediante la cual se intenta estimar la frecuencia con la que se obtiene un cierto resultado en el marco de una experiencia en la que se conocen todos los resultados posibles. Así, el ejemplo más tradicional consiste en definir cuál es la prevalencia de obtener un número al arrojar un dado. Sobre seis resultados posibles (todas las caras), sólo es posible lograr un número por cada vez que el dado es arrojado. En este caso, la probabilidad puede expresarse como uno en seis, un sexto, la sexta parte o, en términos matemáticos precisos, $\frac{1}{6}$.

La importancia esencial de la aplicación de los métodos de cálculo de la probabilidad, reside en su capacidad para estimar o predecir eventos. Cuanto mayor sea la cantidad de datos disponibles para calcular la probabilidad de un acontecimiento, más preciso será el resultado calculado. Dada la complejidad de los sistemas en los que suele aplicarse la teoría de la probabilidad, se requiere de modelos informáticos y estadísticos, que serían imposibles de no contarse con los modernos recursos tecnológicos relacionados con la computación.

La probabilidad es bastante intuitiva a los jóvenes les debería causar una cierta motivación al relacionarse con estos conceptos, por eso es que es de suma importancia la enseñanza de la probabilidad en la escuela; es por eso que se sugiere como consecuencia de la experiencia, se sugiere enfocar más la enseñanza de la probabilidad hacia el desarrollo de procesos de mayor nivel cognitivo que el simple manejo de fórmulas y procedimientos.

A. Apéndice

Independencia

Sea Ω un conjunto no vacío llamado universo o espacio muestral y sea E otro conjunto finito o numerable que llamaremos espacio de estados. A los subconjuntos de Ω se les llama eventos y a las funciones de Ω en E se les llama variables aleatorias.

Denotaremos por $P(\Omega)$ a la clase de todos los eventos o subconjuntos de Ω . Una función

$$P : P(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

se llama medida de probabilidad en $(\Omega, P(\Omega))$ si satisface:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C_i)$ siempre que los conjuntos $C_i \subset \Omega, i = 1, 2, 3, \dots$ sean ajenos dos a dos.

En los ejemplos típicos de la teoría elemental se trabaja con Ω finito y la probabilidad en esos casos se define como

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)}, \text{ si } C \subset \Omega.$$

Esta medida de probabilidad proviene de la hipótesis de equiprobabilidad, es decir, se supone que cada posible resultado tiene la misma probabilidad

$$\frac{1}{\text{card}(\Omega)}$$

de ser obtenido. Es de destacar que si el problema está mal planteado (ver el razonamiento de D Alambert), esta hipótesis no refleja adecuadamente el fenómeno que se busca describir.

Definición. Se dice que dos eventos C y D son independientes si

$$P(C \cap D) = P(C)P(D).$$

Es claro que el conjunto vacío y el total Ω son independientes de cualquier otro evento.

Para ilustrar la definición veamos un ejemplo muy sencillo:

Se realizan dos lanzamientos de una moneda equilibrada, es decir, tal que la probabilidad de obtener águila sea la misma que la de obtener sol (ambas son $\frac{1}{2}$). El espacio muestral de dos lanzamientos es

$$\Omega = (a, a), (a, s), (s, a), (s, s)$$

y

$$P(a, a) = P(a, s) = P(s, a) = P(s, s) = \frac{1}{4}$$

Es claro que cada lanzamiento es independiente del otro por lo que los eventos $A_i =$ sale águila en la i -ésima tirada, $i = 1, 2$ deben satisfacer la definición de independencia.

$$P(A_i) = P(a, a) + P(a, s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Análogamente

$$P(A_2) = \frac{1}{2}$$

y entonces

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = P(A_1)P(A_2).$$

En este mismo espacio daremos un ejemplo de eventos que no son independientes. Sea U el evento de obtener águila en la primera tirada y V el evento de obtener dos águilas. Claramente en este caso

$$V \subset U, P(U) = \frac{1}{2} \text{ y } P(V) = \frac{1}{4}$$

mientras que

$$P(U \cap V) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = (P(U))(P(V)).$$

Resulta, como era de esperar, que no se cumple la definición de independencia.

Ahora se verá la definición de probabilidad condicional. Se trabaja en el mismo marco $(\Omega, P(\Omega), P)$ y se busca dar sentido al hecho de calcular la probabilidad de un evento U

si se tiene información adicional representada por otro evento V . Es la probabilidad de U “condicionado a V ”.

Para ello se define una nueva medida de probabilidad

$$P^v : P(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

mediante la relación

$$P^v(\cdot) = \frac{P(\cdot \cap V)}{P(V)}$$

siempre que $P(V) > 0$. Es fácil comprobar que P^v es una medida de probabilidad en $(\Omega, P(\Omega))$ y se denota usualmente como $P(\cdot | V)$.

En el ejemplo anterior con las mismas notaciones veamos algunos cálculos de probabilidad condicional:

$$\blacksquare P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\blacksquare P(U | V) = \frac{P(U \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\blacksquare P(V | U) = \frac{P(U \cap V)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Lo cual todo concuerda perfectamente con el sentido común. Lo anterior nos da otra forma de definir independencia para eventos con probabilidad estrictamente positiva.

En este caso las afirmaciones siguientes son equivalentes:

- Los eventos C y D son independientes.
- $P(C \mid D) = P(C)$.
- $P(D \mid C) = P(D)$.

Es decir, que la información adicional no afecta el valor de la probabilidad del evento dado. En el ejemplo esto se ilustra en el caso de A_1, A_2 .

Algunos ejemplos de variables aleatorias en Ω son:

$$X : \Omega \longrightarrow E$$

definida por $X(a, a) = 2, X(a, s) = 1, X(s, a) = 1, X(s, s) = 0$ y en este caso, X representa el número de águilas obtenidas.

$$Y : \Omega \longrightarrow E$$

definida como $Y(a, a) = 2, Y(a, s) = 0, Y(s, a) = 0, Y(s, s) = -2$ y que puede significar la ganancia en un juego de volados en donde se gana 1 peso si sale águila y se pierde 1 si sale sol.

Otra variable definida ahora en $\Omega_0 = a, s$, que es el espacio asociado al lanzamiento de una moneda, es

$$Z : \Omega_0 \longrightarrow E$$

con $Z(a) = 1, Z(s) = 0$ y se conoce con el nombre de “variable aleatoria de Bernoulli de parámetro p”, donde p es la probabilidad de obtener águila.

ESPERANZA MATEMÁTICA

LA PARADOJA DE SAN PETERSBUSGO

Probablemente fue planteada en 1708 por Montmort.

Consiste en el siguiente juego de azar. Se arroja una moneda (un volado) hasta que sale un lado determinado de la moneda, digamos “águila”. Si sale sol en el primer intento, el apostador recibe $2^1 = 2$, si sale en el segundo intento, recibe $2^2 = 4$, si sale al tercer intento, recibe $2^3 = 8$, . . . , si sale en el intento n , el jugador recibe 2^n . El juego termina cuando sale águila.

La probabilidad de que salga sol en el primer intento es $(\frac{1}{2}) = 0,5$, y la probabilidad de que salga “águila” también es $(\frac{1}{2})$. Por lo tanto, la probabilidad de que salga sol en el segundo intento es la probabilidad condicionada a que haya salido en la primera y es igual a $(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$; así, la probabilidad, de que salga sol en el tercer intento es $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ y la probabilidad de que salga en el intento n es $(\frac{1}{2})^n$. El valor esperado o esperanza matemática del juego medido en pesos es:

$$\begin{aligned} E(\text{Juego}) &= (\frac{1}{2})2 + (\frac{1}{2})^2 2^2 + (\frac{1}{2})^3 2^3 + \dots + (\frac{1}{2})^n 2^n + \dots \\ &= 1 + 1 + 1 + \dots = \infty \end{aligned}$$

PARADOJA: El juego tiene un valor esperado infinito, de manera que cualquier suma de dinero finita por grande que sea es inferior al valor del juego. Sin embargo, ninguna persona estaría dispuesta a pagar una suma de dinero más allá de unos pocos pesos por apostar en este juego.

SOLUCIÓN DE LA PARADOJA POR DANIEL BERNOULLI (1725)

- El valor del juego no es el valor esperado monetario del mismo, sino el valor esperado de la utilidad del dinero.

- Plantea la siguiente función de utilidad: $U(x) = \text{Ln}(x)$, x es el premio del juego cuando sale sol. Por lo tanto, el valor del juego, medido en “útiles” es:

$$\text{ValordelJuego} =$$

$$E[U(x)] = \left(\frac{1}{2}\right)\text{Ln}(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\text{Ln}(2^2) + \left(\frac{1}{2}\right)^3\text{Ln}(2^3)$$

$$+ \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \text{Ln}(2^{10}) + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{Ln}(2^n) + \dots +$$

VALOR DEL JUEGO: El valor del juego, medido en unidades de “utilidad” es 1,38627982 aproximadamente. Medido en pesos, el juego tiene un valor igual al antilogaritmo de 1,3862 ($e^{1,3862} \approx 4$). Por lo tanto, medido en pesos, el valor del juego para el apostador con esta función de utilidad es aproximadamente de 4.

B. Anexos

B.1. Biografías

B.1.1. Blaise Pascal



Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 de junio 1623 - París, 19 de agosto de 1662) fue un matemático, físico, filósofo cristiano y escritor francés. Sus contribuciones a las matemáticas y las ciencias naturales incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la Teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de una experiencia religiosa profunda en 1654, Pascal abandonó las matemáticas y la física para dedicarse a la filosofía y a la teología.

La designación de su padre como comisario del impuesto real supuso el traslado a Ruán, donde Pascal desarrolló un nuevo interés por el diseño y la construcción de una máquina de sumar; se conservan todavía varios ejemplares del modelo que ideó, algunos de cuyos principios se utilizaron luego en las modernas calculadoras mecánicas.

En Ruán, Pascal comenzó también a interesarse por la física, y en especial por la hidrostática, y emprendió sus primeras experiencias sobre el vacío; intervino en la polémica en torno a la existencia del *horror vacui* en la naturaleza y realizó importantes experimentos (en especial el de Puy de Dôme en 1647) en apoyo de la explicación dada por Torricelli al funcionamiento del barómetro.

La enfermedad indujo a Pascal a regresar a París en el verano de 1647; los médicos le aconsejaron distracción e inició un período mundano que terminó con su experiencia mística del 23 de noviembre de 1654, su segunda conversión (en 1645 había abrazado el jansenismo); convencido de que el camino hacia Dios estaba en el cristianismo y no en la filosofía, Blaise Pascal suspendió su trabajo científico casi por completo.

Pocos meses antes, como testimonio su correspondencia con Fermat, se había ocupado de las propiedades del triángulo aritmético hoy llamado de Pascal y que da los coeficientes de los desarrollos de las sucesivas potencias de un binomio; su tratamiento de dicho triángulo en términos de una «geometría del azar» lo convirtió en uno de los fundadores del cálculo matemático de probabilidades.

En 1658, al parecer con el objeto de olvidarse de un dolor de muelas, Pascal elaboró su estudio de la cicloide, que resultó un importante estímulo en el desarrollo del cálculo diferencial. Desde 1655 frecuentó Port-Royal, donde se había retirado su hermana Jacqueline en 1652. Tomó partido en favor de Arnauld, el general de los jansenistas, y publicó anónimamente sus *Provinciales*.

El éxito de las cartas lo llevó a proyectar una apología de la religión cristiana; el deterioro de su salud a partir de 1658 frustró el proyecto, y las notas dispersas relativas a él quedaron más tarde recogidas en sus famosos *Pensamientos* (*Pensées sur la religion*, 1669).

Aunque rechazó siempre la posibilidad de establecer pruebas racionales de la existencia de Dios, cuya infinitud consideró inabarcable para la razón, admitió no obstante que esta última podía preparar el camino de la fe para combatir el escepticismo. La famosa apuesta de Pascal analiza la creencia en Dios en términos de apuesta sobre su existencia, pues si el hombre cree y finalmente Dios no existe, nada se pierde en realidad.

La tensión de su pensamiento entre la ciencia y la religión quedó reflejada en su admisión de dos principios del conocimiento: la razón (*esprit géométrique*), orientada hacia las verdades científicas y que procede sistemáticamente a partir de definiciones e hipótesis para avanzar demostrativamente hacia nuevas proposiciones, y el corazón (*esprit de finesse*), que no se sirve de procedimientos sistemáticos porque posee un poder de comprensión inmediata, repentina y total, en términos de intuición. En esta última se halla la fuente del discernimiento necesario para elegir los valores en que la razón debe cimentar su labor.

Algunas publicaciones de Pascal fueron las siguientes:

- ♣ *Pensées* fue finalmente publicado en 1670, ocho años después de la muerte de Pascal. Si bien se trata de un texto filosófico, *Pensées*, no carece por completo de contenido matemático. Entre sus ensayos es la que ha llegado a ser conocido como *la apuesta de Pascal*, el argumento de que la creencia en Dios es racional. Despojado de sus cálculos numéricos, caso de Pascal es, esencialmente, que si Dios no existe, uno se pierde poco a creer en el ser supremo, mientras que si Dios existe, uno lo perderá todo por no creer.
- ♣ En 1653, Pascal escribió *Tratado sobre el equilibrio de los líquidos*, en el que explica lo que hoy se conoce como ley de la presión de Pascal. Al mismo tiempo, reanudó sus investigaciones anteriores de las secciones cónicas y demostró algunos teoremas importantes en la geometría proyectiva. En particular, realizó un trabajo titulado *La*

Generación de Secciones Cónicas, la mayoría de los cuales él había escrito en 1648. Este iba a ser la primera parte de un amplio tratado sobre las cónicas, pero nunca volvió a ella.

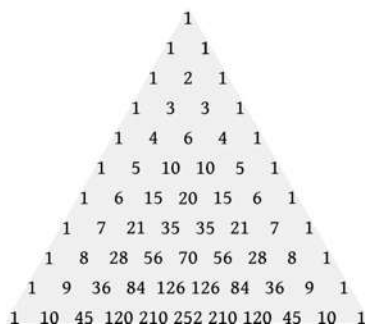
♣ Su *Traité du triangle arithmétique* (*Tratado del Triángulo Aritmético*), completado e impreso en 1654 pero no publicado hasta 1665, contenida en el triángulo numérico que hoy lleva su nombre. Aunque no fue el primero en estudiar esta estructura matemática en particular, sus ideas fueron mucho más ilustrativas que cualquier cosa escrita de antemano. Resultados de Pascal sobre los coeficientes binomiales llevaron a Isaac Newton a su descubrimiento de un resultado sumamente importante conocido como el teorema general del binomio (el teorema del binomio para potencias fraccionarias y negativas).

El 19 de agosto de 1662, a los treinta y nueve años, Blaise Pascal murió en París, en un intenso dolor después de que el cáncer llegó a su cerebro. Dejó tras de sí un legado de ideas hechas tanto mayor por su breve correspondencia con Fermat en 1654.

TRIÁNGULO DE PASCAL

Pascal a diferencia de Fermat, exploró el orden geométrico subyacente en las estructuras del azar. Que los sucesos aleatorios presentan patrones geométricos, queda ilustrado claramente por el ahora llamado *triángulo de Pascal*.

Triángulo de Pascal



La distribución simétrica de números mostrada en la figura se construye de acuerdo con el sencillo procedimiento siguiente:

1. En la parte superior, comenzamos con un 1.
2. En la línea siguiente, colocamos dos 1.
3. En la línea que sigue a la anterior, ponemos un 1 en cada extremo, y en medio colocamos la suma de los dos números de arriba y de cada lado, es decir, $1 + 1 = 2$.
4. En la cuarta línea, colocamos un 1 en cada extremo, y en cada punto situado entre dos adyacentes de la tercera línea ponemos la suma de tales números. Así, en el segundo lugar ponemos $1 + 2 = 3$, y en el tercer lugar ponemos $2 + 1 = 3$.

5. En la línea, colocamos un 1 en cada extremo y en cada punto situado entre dos números adyacentes de la cuarta línea ponemos la suma de tales números. Así, en el segundo lugar ponemos $1 + 3 = 4$, en el tercer lugar $3 + 3 = 6$, y en el cuarto lugar escribimos $3 + 1 = 4$.

Ejemplo:

Supongamos que cuando una pareja tiene un hijo, existe la misma probabilidad de que sea niño que niña; ¿Cuál es la probabilidad de que una pareja con dos hijos tenga dos niños varones?, ¿y de tener un niño y una niña?, ¿o dos niñas?

Las respuestas son, respectivamente, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$; el primer hijo puede ser niño o niña, al igual que el segundo. Tenemos entonces las cuatro posibilidades siguientes: niño-niño, niño-niña, niña-niño, niña-niña. Cada una de esas cuatro combinaciones es igualmente posible, así que tendremos 1 probabilidad entre 4 de que la pareja tenga dos niños, 2 de 4 de que tenga dos hijos de distinto sexo, y 1 entre 4 de que tenga dos niñas.

B.1.2. Pierre de Fermat



Fermat nació el mismo año que el siglo XVII y aunque sus contribuciones matemáticas nunca fueron publicadas en vida, fueron de tal calidad que la relativamente modesta difusión que tuvieron entre la comunidad científica europea fue suficiente como para que su siglo le recuerde como uno de sus mejores hijos. La lista se haría interminable, y como es lógico, tanta materia gris no podía dejar de producir matemáticas de primera calidad. Tanta, que la producción del siglo diecisiete marcaría un antes y un después. En el siglo diecisiete la matemática se empezó a consolidar como una ciencia independiente, más o menos en las líneas que hoy la conocemos. Fermat contribuyó decisivamente a ello.

Además del álgebra, la geometría analítica, el cálculo y otras ramas de la matemática empezaron a cultivarse en ese siglo: por ejemplo, la teoría de números (en el sentido moderno) y el cálculo de probabilidades. En esas dos ramas, Fermat tuvo algo que decir. En teoría de números, hay quien le considera el padre de la teoría de números moderna. En ese terreno, su famoso Gran Teorema (o Último Teorema como los anglosajones le llaman) le ha dado la fama universal de la cual era mucho más merecedor por sus contribuciones al álgebra, a la geometría y al cálculo.

Fermat nació cerca de Toulouse, en un pueblo llamado Beaumont-de-Lomagne (entonces parte de la Gascoña y hoy en el departamento de Tarn et Garonne). Vivió en Toulouse y murió también muy cerca, en Castres (Tarn). Durante toda su vida casi no se movió de la región. Su familia tenía una buena posición económica y social. Su padre era un rico comerciante y su madre pertenecía a una familia de la nobleza local. Tuvo un hermano y dos hermanas. Fermat, probablemente, se crió en su pueblo natal y fue educado en un cercano monasterio franciscano hasta que ingresó en la Universidad de Toulouse. Sin que se sepa la razón, interrumpió sus estudios en Toulouse y durante unos años, vivió en Burdeos, donde contactó con algunos matemáticos que conocían bien la herencia de Vieta

como Beaugrand, d Espagnet, etc. Ahí se formó en el álgebra y el simbolismo de Vieta, que tan útiles le serían más adelante. De esos años data su primera producción matemática: la restitución del libro perdido de las Cónicas de Apolonio: Plane Loci y los primeros trabajos sobre máximos y mínimos.

Después de la etapa en Burdeos reingresó en la universidad, esta vez en Orléans, donde obtuvo su título en Leyes hacia 1631, año en que se instala en Toulouse en calidad de consejero del Parlamento de Toulouse. Ese mismo año se casa con una prima lejana, Louise de Long, que pertenece a la familia de alcurnia de su madre ligada a la noblesse de robe. Fermat añade el “de” a su apellido. El matrimonio Fermat tuvo cinco hijos, dos varones y tres hembras. El hijo mayor, Clément-Samuel heredaría el interés de su progenitor por las matemáticas, aunque no su genialidad. A Clément-Samuel le debemos la edición y publicación de las obras completas de su padre en 1679.

La vida de Fermat transcurre de una manera muy tranquila en Toulouse; profesionalmente va obteniendo promociones de manera que ingresa en la cámara alta del parlamento de Toulouse en 1638 y accede a la corte suprema en 1652. En esa época va regularmente a Castres a ejercer de magistrado. Castres, en el siglo XVII albergó uno de los tribunales establecidos por el Edicto de Nantes para dar un tratamiento justo a los hugonotes en sus litigios. Estos tribunales tenían un determinado número de magistrados católicos y protestantes. Fermat ocupó en diversas ocasiones una plaza del cupo católico. De hecho, murió en Castres pocos días después de terminar de juzgar un caso.

En Toulouse reanudó sus contactos con personajes ligados a la matemática. Uno de los más relevantes para el futuro de Fermat fue Monsieur de Carcavi, colega suyo en el parlamento pero también matemático aficionado. Carcavi se trasladó a París en 1636 donde contactó con el Padre Mersenne, el personaje que mediante su abundante corres-

pondencia haría las veces de centro difusor de la ciencia en la Francia del XVII. Mersenne se interesó inmediatamente en los trabajos de Fermat, gracias a la descripción que le hizo Carcavi de estos y empezó a cartearse con él. Inicialmente el interés de Mersenne se centró en algunos comentarios de Fermat sobre la caída libre de graves, tema en el que Fermat objetaba a la descripción de Galileo. Rápidamente Fermat informó a Mersenne sobre su trabajo sobre espirales (motivado por sus estudios sobre caída libre) y sobre su restitución del libro perdido de Apolonio. También en esa época, Fermat anuncia a Mersenne que está en posesión de diversos análisis para diversos problemas tanto numéricos como geométricos para cuya solución el análisis de Vieta es insuficiente. De hecho, a principios de 1636 Fermat había concluido su *Ad locos planos et solidos isagoge* [Introducción a los lugares planos y sólidos], donde mediante el lenguaje algebraico de Vieta estudia las curvas que se pueden expresar mediante ecuaciones de primero y segundo grado y establece que son precisamente la recta y las cónicas. También establece que, en general, una curva tiene una ecuación y que una ecuación algebraica representa siempre una curva. Por esa razón se atribuye a Fermat una cierta prioridad sobre la creación de la Geometría Analítica frente a Descartes que publicó su Geometría en 1637. En el mismo cruce de cartas con Mersenne, Fermat no puede resistir la tentación de incluir un par de problemas sobre máximos y mínimos para que Mersenne los divulgue a modo de desafío entre la comunidad matemática. Fermat dispone de su *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* [Método para determinar máximos y mínimos y trazar tangentes a líneas curvas], que le permite resolver este tipos de problemas de manera muy general. Su enfoque se basa en dos hechos:

1. En un máximo o mínimo la tangente a la curva es paralela al eje de abscisas (en lenguaje actual) y en consecuencia el valor de la función en ese punto ha de ser

único (con relación a sus vecinos);

2. Los valores cercanos al extremo han de ser alcanzados como mínimo dos veces por la función, un poco antes del extremo y un poco después.

Comparando pues el valor de la función en el extremo, $f(a)$, con un valor muy cercano, $f(a+e)$, donde e es una cantidad muy pequeña, esos valores han de ser prácticamente iguales, se pueden adigualar, en lenguaje de Fermat. De ese proceso de adigualación se obtiene una ecuación que, una vez eliminado el valor e por ser despreciable, permite calcular a . De hecho, Fermat llega a la ecuación que hoy en día escribimos como $f'(x) = 0$. Por eso se le considera también precursor del cálculo diferencial, aunque su proceso de adigualación está lejos de las ideas de límite que más tarde entraran en escena. Obviamente, Fermat solo trata este tipo de problemas en funciones algebraicas.

Los problemas de máximos y mínimos que Fermat ha planteado a Mersenne, son de tal dificultad que Mersenne pide a Fermat la divulgación de sus métodos. De esta manera, los escritos de Fermat sobre el tema antes mencionados, empiezan a circular estableciendo al mismo tiempo su reputación como matemático de primera fila. Roberval, Mersenne y otros matemáticos de la época le instan a que publique sus resultados, a lo cual Fermat se niega. De hecho, en vida sólo publicó un trabajo y hubo que esperar a 1679 a que su hijo mayor publicase su obra. No está clara la razón de la negativa de Fermat a publicar. Por un lado, Fermat se consideraba sólo un aficionado dado que no se dedicaba por entero a la matemática. Y por otro lado, Fermat era consciente de que para publicar sus resultados, debería ser mucho más claro y didáctico en sus explicaciones, lo que le acarrearía mucho trabajo adicional y consumiría una parte importante del tiempo que podía dedicar a la investigación.

Aunque su fama crece en Europa, no todo es de color de rosa. A principios de 1637, su amigo Beaugrand le manda una copia del manuscrito (aún no publicado) de la Dióptrica de Descartes. Fermat, enfrascado en una intensa correspondencia con Roberval y Étienne Pascal sobre métodos de cuadratura y su aplicación a la determinación de centros de gravedad, le presta poca atención hasta que Mersenne, preocupado por la indiscreción de Beaugrand (quien había obtenido la copia de manera poco ortodoxa), le pide que no divulgue a nadie más que a él mismo sus comentarios sobre el trabajo de Descartes.

Fermat contesta a Mersenne de una manera bastante ingenua (no conocía a Descartes ni sabía nada del Discurso del Método ni del mal carácter del filósofo), señalando errores en la deducción de la ley de la reflexión y de la refracción y calificando la obra en general como un simple intento de hallar la verdad “a tientas entre las tinieblas”. Se ofrece incluso para echar una mano en la clarificación de algunos problemas.

Mersenne, consciente de la delicada situación, guardó la carta de Fermat durante unos meses hasta que, ante la insistencia de Descartes para que le comunicase cualquier crítica a la Dióptrica, se la mandó. La reacción de Descartes a la crítica de Fermat, fue al principio paternalista. Fermat no había entendido sus métodos. Mientras tanto, Fermat había obtenido una copia de la Geometría y se apresuró a mandar a Mersenne sus trabajos sobre el tema, para demostrar al menos la independencia de sus descubrimientos. Mersenne, mostrando nuevamente poco tacto, le envía esos trabajos a Descartes quien enfurece y emprende un ataque sin cuartel contra el “aficionado de Toulouse”. La controversia se extiende al método de trazado de tangentes y el método para hallar máximos y mínimos. Después de un sin fin de cartas (aderezadas con el poco tacto de Mersenne), Descartes termina por retar a Fermat a usar su método para trazar las tangentes a una curva de su invención, el folio, con una ecuación implícita de tercer grado, $x^3 + y^3 = pxy$. La res-

puesta de Fermat con el cálculo de las tangentes al folio obliga a Descartes a admitir que el método de Fermat es superior al suyo, y a regañadientes, le reconoce una cierta talla intelectual aunque le sigue atacando en privado. La irritación que Fermat producía en Descartes queda muy bien reflejada en una frase de este último: “Fermat es gascón. Yo no”.

Durante los últimos años de la década de los 30 y los primeros de la década de los 40, Fermat sigue trabajando en su método de máximos y mínimos aplicándolo a varios problemas diferentes y también intenta generalizar, sin mucho éxito, su geometría analítica a tres dimensiones. Su *Isagoge ad locos ad superficiem* de 1643 recoge sus ideas al respecto. Del mismo año, 1643, data su famosa carta a Brûlart, donde Fermat resume de manera bastante clara su método para determinar máximos y mínimos y su cálculo de tangentes.

La década 1645-1655 fue una década dura para Francia, sacudida por la guerra civil y por una epidemia de plaga que en 1651 estuvo a punto de costar la vida a Fermat. De hecho, Fermat fue dado por muerto por algunos de sus colegas. En ese periodo, Fermat produce poco y mantiene poca correspondencia. No es hasta 1655 que Fermat recupera el ritmo de trabajo. De finales de los años 50 datan algunos de los trabajos más importantes de Fermat, en parte recopilaciones de trabajos anteriores, en parte nuevas ideas. De esa época son su Tratado de cuadraturas y su Tratado sobre rectificación de curvas y su famosa demostración de la ley de refracción basada en su principio del tiempo mínimo, expresado como una ley natural: “la naturaleza siempre actúa por el camino más corto”.

Los últimos años de Fermat aún ven la luz de otra contribución importante: el cálculo de probabilidades. El joven Blaise Pascal, hijo de Étienne con quien Fermat había correspondido a través de Mersenne, le propone a Fermat un problema sobre la repartición justa de las apuestas si una serie de partidas se interrumpen antes de llegar al final acordado.

Concretamente, ¿cómo hay que repartir una apuesta de 64 monedas para el primero de dos jugadores que gane 3 partidas si el juego se interrumpe antes de que nadie haya ganado? (Se supone que ambos jugadores tienen, en cada partida, las mismas oportunidades de ganar). Pascal y Fermat intercambian una serie de cartas sobre el tema que puede considerarse como el inicio del moderno cálculo de probabilidades. Los dos llegan al mismo resultado por caminos diferentes: Pascal intuye el resultado mediante una recurrencia, pero se ve obligado a utilizar el cálculo combinatorio y el uso de su Triángulo Aritmético (Triángulo de Pascal) para demostrarlo, mientras que Fermat usa directamente el cálculo combinatorio.

B.1.3. Girolamo Cardano



EL HOMBRE EXCEPCIONAL DE MILÁN

Fazio Cardano, el padre de Girolamo, era un exitoso abogado con sede en Milán. También fue un consumado matemático que dio una conferencia sobre la geometría, tanto en la Universidad de Pavía y en la Fundación Piatti de Milán. Leonardo da Vinci le

consultó sobre cuestiones de geometría. Cuando Fazio estaba en la cincuentena, tuvo un romance con Chiara Micheria, una viuda joven de unos treinta años que estaba luchando para criar a sus tres hijos. Chiara quedó embarazada, pero antes de que se debía dar a luz, la peste golpeó Milán, y Fazio la convenció para abandonar la ciudad para tener a su hijo en la relativa seguridad de la cercana Pavía. Allí, el 24 de septiembre de 1501, ella dio a luz, nombrando a su hijo Girolamo Cardano después de su padre. Su alegría duró poco, sin embargo. Poco después del nacimiento, se enteró de que sus tres primeros hijos, a los que habían dejado atrás en Milán, habían muerto de la peste.

Fazio y Chiara vivieron separados muchos años, pero eventualmente se casaron. Cuando Girolamo creció, se convirtió en asistente de su padre. Fazio enseñó a su hijo las matemáticas, lo que lleva al joven a contemplar una carrera académica. Fazio, sin embargo, quería que su hijo estudiara leyes, hasta que el padre cedió y permitió a Girolamo entrar en la Universidad de Pavía (donde él mismo había estudiado) para leer la medicina.

Cuando estalló la guerra, la universidad se vio obligada a cerrar, y el joven Cardano se trasladó a la Universidad de Padua para completar sus estudios. No hizo campaña para convertirse en rector de la universidad. A pesar de su brillantez como estudiante, era una persona franca y desagradable algo que no era muy querido. Al final, venció a su rival por un solo voto.

Cardano fue una de las primeras figuras más importantes de las matemáticas tras escribir su autobiografía (*De vita propria liber [El libro de mi vida]*), y, en consecuencia, sabemos mucho más sobre él que sobre la mayoría de sus predecesores. Algunos podrían decir que nos dice mucho más de lo que queremos saber, ya que no se escatima en los datos de carácter personal.

Por su aspecto, sabemos por sus propias palabras que él era flaco, tenía un cuello largo, el labio inferior pesado, una verruga en un ojo, y una voz tan fuerte que incluso sus amigos se quejaban al respecto. Sabemos también, que estaba en constante mala salud, sufriendo entre otras enfermedades, la diarrea, rupturas, problemas renales y las palpitaciones. Fue por su propia cuenta “siempre de mal genio, una sola mente, y dado a las mujeres”. Por otra parte, él mismo describe como “astuta, hábil, diligente sarcástico, impertinente, un mago triste, peligroso, y el hechicero, de odio miserable, lascivo, obsceno, mentiroso, “y” obsecuente”.

De las características que casi le hizo perder la campaña para rector, escribe: Esto lo reconocemos como único y destacado entre mis defectos-el hábito, que persisten es preferible decir, sobre todas las cosas que sé que es desagradable para los oídos de mis lectores. Soy consciente de esto, sin embargo, que mantener el ritmo a voluntad, de ninguna manera ignorante de cuántos enemigos tiene para mí.

Ninguno de estos defectos de carácter que parece haber evitado Cardano de dar al mundo su primera comprensión sistemática de la forma para calcular probabilidades. Habida cuenta de su curiosidad intelectual y las habilidades, su principal interés en las matemáticas de los juegos de azar puede muy bien haber sido científico, pero es difícil de descartar otro motivo (tal vez incluso primaria). A lo largo de su vida, Cardano era un jugador compulsivo que necesitaba toda la ayuda que pudiera encontrar en las mesas de juego, desde las matemáticas o cualquier otra fuente (y lo hizo encontrar otras fuentes de ayuda. Una vez, cuando se sospechaba que estaba siendo engañado en el juego, sacó el cuchillo que siempre llevaba con él y cortó la cara de su oponente).

Los juegos de azar de Cardano comenzaron a una edad temprana. Poco después se trasladó a Padua, su padre murió, dejándole una pequeña herencia. No pasó mucho tiempo

para que Girolamo despilfarrar todo, y se volvió a las mesas de juego para mantener su estilo de vida. A partir de entonces, que era adicto. “No he jugado de vez en cuando, pero, como me da vergüenza decir, todos los días”, escribió. A pesar de su capacidad matemática a menudo le ayudó a sacar lo mejor de sus oponentes, las cosas no siempre salen con la suya, y como cualquier jugador, que perdió más dinero que él ganó, a veces causando dificultades personales importantes para él y sus allegados.

A pesar de los juegos de azar, los estudios de Cardano fueron muy bien, en el año 1525 obtuvo su doctorado en medicina. Él solicitó la adhesión al Colegio de Médicos de Milán, donde su madre aún vivía. Pero para entonces la universidad era muy consciente de su carácter difícil y, a pesar de su excepcional desempeño como estudiante, los funcionarios universitarios se mostraron reacios a admitirlo. Cuando se enteraron de su nacimiento ilegítimo, que tenían la excusa de rechazar su solicitud.

En el consejo de un amigo, Cardano se trasladó a Sacco, un pequeño pueblo cerca de diez kilómetros de Padua. A pesar de no ser miembro del Colegio de Médicos, fue capaz de crear una pequeña práctica, médica no muy exitosa. Fue allí donde conoció a Lucía Bandarini, con quien se casó en 1531. Desde su pequeña práctica médica en Sacco no aportó suficientes ingresos para mantener a su esposa, la pareja se mudó a Gallarate, cerca de Milán el año siguiente.

Se aplica una vez más al Colegio de Médicos de Milán, pero de nuevo sin éxito. No puede practicar la medicina y perdiendo dinero constantemente en las mesas de juego, se vio obligado finalmente a empeñar las joyas de su esposa y algunos de sus muebles.

La situación de Cardano cambió un poco cuando se las arregló para conseguir el antiguo puesto de Fazio, de profesor de matemáticas en la Fundación Piatti. Cuando no

estaba ocupado con la enseñanza, complementaba su salario por el tratamiento de algunos pacientes. En sentido estricto, ya que él no era miembro del Colegio de Médicos, esto no estaba permitido, pero él alcanzó una cierta reputación y como médico creció rápidamente. Con una lista de clientes que pronto incluyó a la gente rica de influencia de Milán, entre ellos algunos miembros del colegio, era sin duda sólo una cuestión de tiempo antes de que la universidad se verían obligados a admitirlo. Pero entonces, en 1536, todavía humeante en su continua exclusión, mató a sus posibilidades mediante la publicación de un libro, atacando no sólo la capacidad de los miembros de la universidad médica de su carácter, pero también: Las cosas que dan más reputación a un médico hoy en día son sus maneras, sus sirvientes, transporte, ropa, elegancia y discreción, todos los que se muestran en una especie de manera artificial e insípida.

No es de extrañar, la aplicación de Cardano para unirse a la universidad al año siguiente fue nuevamente rechazada. Dos años más tarde, sin embargo, después de que el calor provocado por el libro se había apagado, la continua presión de sus muchos partidarios, finalmente convenció a la universidad a ceder. Se modificó la regla de nacimiento legítimo y admitió a Cardano en sus filas.

En el mismo año, los primeros de Cardano, dos libros de matemáticas fueron publicados, a partir de una prolífica carrera literaria que lo vio escrito en las matemáticas, medicina, filosofía, astronomía y teología. Desde 1543 hasta 1552, él dio una conferencia sobre la medicina en las universidades de Milán y Pavía.

En 1545, publicó su obra matemática más grande, *Ars magna*, un libro muy influyente en el álgebra que se presenta, por primera vez, un método para resolver una ecuación cúbica. El resultado se conoció como la fórmula de Cardano, apesar de que establece claramente que el método fue descubierto por Scipione del Ferro alrededor de 1500 e inde-

pendientemente redescubierta por Niccolò Tartaglia en 1535. La publicación de Cardano del método llevado a una acalorada disputa con Tartaglia, que había mostrado su fórmula a Cardano alrededor de 1539 con la estricta condición de que se mantuviera en secreto. La respuesta de Cardano fue que publicó el método, sólo después se enteró de que del Ferro lo había obtenido mucho antes, por lo que su acuerdo con Tartaglia ya no es vinculante. En medio de su trabajo matemático, Cardano también encontró el tiempo para participar en algunos proyectos de ingeniería. Su nombre fue atado a una serie de invenciones, entre ellas la suspensión de Cardano, la articulación de Cardano y el eje de Cardano. La esposa de Cardano, Santa Lucía, murió en 1546. Para entonces, él estaba disfrutando de su reputación como el médico más grande del mundo y disfrutando de la fama de sus libros e invenciones le habían traído. Se convirtió en rector del Colegio de Médicos y más tarde fue nombrado profesor de medicina en la Universidad de Pavía y pronto se hizo rico, pero entonces ocurrió el desastre. Su hijo mayor, Giambatista, que se había clasificado como médico en 1557, casó en secreto con una joven llamada Brandonia di Seroni. Cardano la describió en su autobiografía como “una mujer indigna, vergonzosa”, una rica descripción con el apoyo de la evidencia. Con el apoyo financiero de Cardano, aunque no su bendición, la joven pareja se trasladó con los padres de Brandonia. Sin embargo, el di Seronis sólo estaban interesados en lo que podían arrancar a Giambatista y su padre rico, y se burló públicamente Brandonia su marido por no ser el padre de sus tres hijos. Estas burlas finalmente llevó a Giambatista a envenenar a su esposa, y después de su detención, confesó el crimen. Giambatista padre contrató a los mejores abogados, pero en el juicio, el juez decretó que para salvar la vida de su hijo, Cardano tenía que llegar a un acuerdo con el di Seronis. Ellos demandaron una suma que Cardano jamás podría haber levantado, y el destino de su hijo fue sellada. Giambatista fue torturado en la cárcel, su mano izquierda fue cortada, y el 13 de abril de 1560, fue ejecutado. Cardano nunca se

perdonó por no salvar a su hijo. Por otra parte, como padre de un asesino convicto, su reputación fue dañada sin posibilidad de reparación. Al darse cuenta de que tenía que moverse, consiguió una cátedra de medicina en Bolonia. Su tiempo en Bolonia estaba lleno de controversia. Su reputación y su actitud arrogante, se combinaron para crear muchos enemigos, y en un momento, humilló a un compañero profesor de medicina en frente a sus estudiantes señalando los errores en sus conferencias. Después de unos años, sus colegas trataron de lograr que el Senado lo destituyera. Ellos comenzaron a extenderse los rumores de que sus conferencias atraían pocos estudiantes.

Cardano tuvo más problemas con sus hijos, el que quedaba, Aldo, era un jugador y se asocia con un carácter dudoso individualista. En 1569, el joven se jugó todas sus ropas y otras pertenencias, además de una considerable suma de dinero de su padre. En un intento por saldar la deuda, Aldo irrumpieron en casa de su padre y robó una gran cantidad de dinero y joyas. Cardano tristemente informó de su hijo a las autoridades, y Aldo fue desterrado de Bolonia.

En 1570, en lo que probablemente fue un intento deliberado de ganar notoriedad por ofender a la Iglesia, y decir torturador de los mártires cristianos. Cardano fue encarcelado bajo la acusación de herejía, pero debido a su fama, fue tratado con indulgencia y pasó unos meses en la cárcel. Tras su liberación, sin embargo, se le prohibió ocupar un cargo universitario y se le prohibió la publicación posterior de su obra. Para un hombre como Cardano, esto podría haber sido un castigo más doloroso que la prisión, pero una vez libre, se trasladó a Roma, y allí recibió una recepción inesperadamente cálida. Se le concedió el ingreso inmediato al Colegio de Médicos, y el Papa, que ahora al parecer había perdonado, le concedió una pensión. Fue en este periodo que él escribió su autobiografía, aunque no se publicó hasta 1643, mucho después de su muerte. Cardano se dice que pre-

dijo correctamente la fecha exacta de su propia muerte, 21 de septiembre de 1576, pero algunos historiadores han conjeturado que logró el triunfo por suicidarse.

B.1.4. Luca Pacioli



(Luca di Borgo; Borgo San Sepolcro, 1445-Roma, c. 1514) Matemático italiano, fué profesor en diversas ciudades, entre ellas las de Nápoles, Milán y Roma. Resumió los conocimientos matemáticos de su época en la obra Suma de aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidad (1494), en la que se hallan referencias al cálculo de probabilidades, al método de la partida doble y a diversos temas sobre libros contables. En su obra De la divina proporción (1509), ilustrada con dibujos de Leonardo da Vinci, estableció una relación entre la sección áurea, los principios arquitectónicos y las proporciones clásicas del cuerpo humano.

De humilde familia, marchó de joven a Venecia como maestro, entró después en la Orden franciscana; completada su formación teológica y filosófica, se dedicó a enseñar matemáticas en diversas ciudades italianas (Perusa, Venecia, Zara, Florencia, Roma, Milán, Pisa y Bolonia). Amigo de Leonardo da Vinci, fue una de las figuras más características

de su época; no quiso escribir ya en latín, como los matemáticos anteriores, sino en lengua vulgar, que resultó, sin embargo, bastante bárbara y llena de vocablos latinos, griegos y dialectales. Aún sin hacer uso de un simbolismo algebraico análogo al actual, Luca Pacioli abrió su camino con interesantes abreviaturas de lenguaje. Sus escritos ofrecen una óptima preparación para las nuevas investigaciones de álgebra del siglo XVI. No se le puede considerar un creador, pero lo que extrajo de los escritos inéditos de Leonardo Fibonacci significó sin duda una verdadera revolución.

La Suma de aritmética, geometría, proporciones y proporcionalidad (1494), es una obra de carácter enciclopédico que tuvo amplísima difusión y notable influencia. Contiene muchas noticias autobiográficas y divagaciones de carácter extramatemático. Está compuesta de dos partes: la primera se refiere a la aritmética, y la segunda a la geometría; cada parte está dividida en “distinciones”, “tratados” y “artículos”. La parte especulativa de la aritmética se inspira en Nicomaco Geraseno y Teón de Esmirna. Es de notar, desde el punto de vista histórico, que se encuentran aplicados en ella los desarrollos relativos a la partida doble, ya bastante en uso en Italia desde principios del siglo XV, especialmente en Génova y en Venecia. Para la parte dedicada a la geometría, Luca Pacioli se inspiró en la Práctica de la Geometría de Fibonacci, como también en Euclides; en ella resuelve, no sin originalidad, cien problemas de planimetría y de estereometría.

La Suma es sobre todo una gran obra de compilación, inspirada, como admite el propio Pacioli, no sólo en el Libro de ábaco de Fibonacci, sino también en las obras de Euclides, Boecio, Giordano, Nemorario, Biagio da Parma, Sacrobosco, Regiomontano, Alberto de Sajonia y Prosdócimo de Beldomani; así como, en las de los mayores algebristas árabes. A pesar de su escasa originalidad, tuvo gran renombre y difusión gracias al hecho de que el autor había abandonado el latín, usado por todos los compiladores de las disciplinas

matemáticas y físicas, para escribir en lengua vulgar; con todo, se encuentran en la *Suma*, además de las primeras noticias del llamado método de partida doble, los primeros ejemplos del cálculo de probabilidades y un ejemplo de logaritmo neperiano “avant la lettre”. La obra señaló así mismo el reconocimiento de los estudios matemáticos en Italia, adelantándose con su práctica formularia al simbolismo del álgebra moderna.

El tratado *De la divina proporción* (terminado de componer en 1496 y publicado en Venecia en 1509), está dedicado a Ludovico il Moro y contiene ilustraciones de Leonardo da Vinci. La divina proporción que da título a la obra no es otra cosa que la “sección áurea” de Euclides, bien conocida por los artistas del Renacimiento a partir de Brunelleschi. El tratado, escrito también en lengua vulgar latinizante como otras obras del mismo género, se subdivide en numerosos capítulos y comienza con un elogio de las disciplinas matemáticas, fundamento de todas las ciencias. Le sigue la exposición, según el principio euclidiano, de los “efectos” de la divina proporción, de los que Pacioli pasa al estudio de los poliedros regulares y de la esfera, tratando de sus propiedades y de su medida.

En relación con la arquitectura, Pacioli, consecuente con los principios matemáticos ya expresados, trata de determinar los primeros elementos del arte de construir, examinando en particular varios tipos de columnas; se ocupa así mismo de la construcción geométrica del cuerpo humano y de las letras del alfabeto. Son notables las referencias a edificios del Renacimiento, como el palacio ducal de Urbino (calificado de modelo arquitectónico) y las construcciones de Bramante. A la primera edición de la obra se añadió un pequeño tratado en tres partes, expuesto con método rigurosamente matemático, sobre los cuerpos regulares; estudios recientes han demostrado, sin embargo, que el tratado en cuestión está tomado de *De los cinco cuerpos regulares*, obra del pintor Piero della Francesca, maestro de Pacioli.

Matemático a la vez que humanista, Pacioli manifiesta un fuerte interés filosófico y religioso (patente ya en el título de su obra) en las pesquisas geométricas sobre los cuerpos regulares, los cuales exalta platónicamente en su pureza ideal, como arquetipos de los demás cuerpos que de ellos se derivan. En la literatura sobre las artes representativas, *De la divina proporción* tiene importancia particular por las relaciones del autor con el ambiente cultural de la corte milanese de Ludovico il Moro y especialmente con Leonardo da Vinci, con quien Pacioli estuvo en estrecha relación. El libro refleja verdaderamente en algunos puntos (como en el elogio de la pintura) el pensamiento de Leonardo, y contiene noticias interesantes acerca de la obra del gran maestro, al que se deben además, según declaración del propio autor, las figuras de los poliedros dibujadas en perspectiva y las letras del alfabeto recogidas en tablas al final del volumen.

B.1.5. Jakob Bernoulli



Jakob Bernoulli, también conocido como Jacob, James o Jacques, fue un notable científico y matemático de origen suizo que lograría trascender gracias a sus aportes en las materias indicadas, durante la segunda mitad del siglo XVII. Así mismo y junto a su

hermano Johann, sentaría la piedra fundamental para conformar la familia Bernoulli, una familia que justamente pasaría a la posteridad por la calidad de matemáticos y científicos que supo producir.

Bernoulli solo tuvo un hijo, Nikolaus, que si bien no se dedicaría a la misma actividad de su padre, sí a una frondosa descendencia que seguiría los pasos de su abuelo. Jakob nació el 27 de diciembre del año 1654 en la ciudad suiza de Basilea. Su padre quería que su hijo se dedicase a la teología y por ello es que lo envió a estudiar tanto teología como filosofía a la Universidad de su ciudad natal, sin embargo, Jakob, se haría de tiempo para ahondar conocimientos en lo que realmente constituía su interés: las matemáticas y la física.

Entre sus grandes aportes a la matemática se cuenta aquel que tiene que ver con el cálculo infinitesimal, ya que el trabajo de su colega Gottfried Wilhelm Leibniz consiguió trasladarlo a nuevos y complejos problemas.

Además de a sus investigaciones, Bernoulli, le dedicaría su vida a la docencia. Fundó una escuela en Basilea y fue profesor de la asignatura matemáticas hasta el último día de su vida. Otra cuestión insoslayable fue la sociedad científica que armó junto a su colega y hermano Johann Bernoulli, especialmente en el tema de las curvas trascendentales.

Como era costumbre en la época y después también, su legado se sistematizó en la que sería su máxima obra: *Ars Conjectandi*, la cual aportaría muchísimo en cuanto a la teoría de la probabilidad. Se trata de una obra póstuma que su sobrino editaría en el año 1713. Su fallecimiento se produjo a los 50 años de edad, el 16 de agosto del año 1705, como consecuencia de haber contraído la enfermedad de la tuberculosis.

OBRA ARS CONJECTANDI (EL ARTE DE CONJETURAR) Y EL MODELO DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL DE LA PROBABILIDAD

Estas conclusiones sobre el modelo ideal de la probabilidad desarrollado por Fermat, Pascal y Huygens, las expuso Jacob Bernoulli en su obra titulada *Ars conjectandi* (El arte de conjeturar), la cual sólo sería publicada póstumamente hasta 1713. En esta obra Bernoulli afirma que el modelo ideal de la probabilidad propuesto hasta el momento era claramente **frecuentista**, es decir, se trataba de un modelo matemático que siempre asume que los resultados aleatorios posibles de un juego de azar deben aparecer según cierta frecuencia dentro de un determinado número de jugadas o ensayos, frecuencia que está condicionada por la probabilidad individual de ocurrencia de cada resultado.

En este razonamiento, que constituye el eje del Teorema de Bernoulli, está implícito el fundamento de lo que actualmente se conoce como la **“Ley de los Grandes Números” entendida como una forma de “Regularidad Estadística”**, porque si por ejemplo al lanzar un solo dado hay una probabilidad de $\frac{1}{6}$ para que aparezca cualquiera de los seis puntos del dado (que son equiprobables), entonces dentro de 6 lanzamientos del dado cada uno de los seis puntos del dado debe aparecer 1 vez, y dentro de 12 lanzamientos del dado cada uno de los seis puntos del dado debe aparecer 2 veces, y dentro de 18 lanzamientos del dado cada uno de los seis puntos del dado debe aparecer 3 veces, y así sucesivamente de forma homogénea y uniforme porque la probabilidad se mantiene constante, por lo cual se puede concluir que «a largo plazo», entre más lanzamientos se realicen, la frecuencia de aparición determinará que todos los seis puntos del dado aparezcan un mismo número de veces dentro de cierta cantidad de lanzamientos.

Dado un juego, la esperanza matemática del mismo es una medida de lo que puede ganar. Tomando en cuenta tanto las probabilidades como las cantidades en juego, la

esperanza matemática mide el valor para un individuo de un determinado riesgo o apuesta. Cuanto mayor es la esperanza matemática, más atractivo es el riesgo.

B.1.6. Tartaglia Niccoló Fontana



(Brescia, actual Italia, 1499 - Venecia, 1557) Matemático italiano. Durante la ocupación francesa de Brescia su padre fue asesinado y él mismo dado por muerto a causa de sus graves heridas, una de las cuales, un golpe de sable en la mandíbula, le provocaría un defecto en el habla que lo acompañaría toda su vida y le valdría su sobrenombre (tartaglia, esto es, tartamudo). De origen muy humilde, su familia no pudo proporcionarle ningún tipo de educación, de modo que el joven Tartaglia tuvo que aprenderlo todo por su cuenta. Ya adulto, se ganó la vida como profesor itinerante (según permiten conocer sus obras, vivió en Verona, Mantua y Venecia) y a través de su participación en concursos matemáticos. En uno de ellos se planteó la resolución de diversas ecuaciones de la forma $x^3 + px = q$; Tartaglia consiguió averiguar la solución general y obtuvo el premio. Más

adelante reveló su método a Gerolamo Cardano, bajo la firme promesa de mantener el secreto, pero éste acabó publicándolo en su *Ars magna* de 1545.

El primer texto publicado por Tartaglia fue el tratado de balística *Nueva ciencia*, publicado en Venecia en 1537 y cuyo título completo reza *Nueva ciencia, esto es, invención recientemente descubierta como útil para todo especulador matemático, artillero u otro*. En esta obra, después de haber dedicado muchas páginas a investigar por vez primera el movimiento curvilíneo y el de los cuerpos pesados, escribiendo páginas cuyo valor está documentado por el uso que de ellas haría Galileo en su obra *Discursos y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*, Tartaglia aplicó sus conclusiones a establecer los elementos de la disciplina llamada hoy “balística exterior”. Dados los perfeccionamientos obtenidos en las armas de fuego y los progresos de su correspondiente teoría, hoy no recurrirían ciertamente a la obra de Tartaglia quienes hayan de adiestrarse en el manejo de los cañones; pero los historiadores señalan en este tratado la primera enunciación de la proposición según la cual “para obtener el tiro de máxima amplitud, es menester inclinar la pieza a 45º sobre el horizonte”. *Setratadeunteoremaadoptado hoy por la ciencia como corolario de principios gen*

Después de que Gerolamo Cardano rompiera su promesa de mantener en secreto su resolución de las ecuaciones de tercer grado, Tartaglia se decidió a publicar la importante obra *Problemas e invenciones varias* (1546), cuyos cuatro primeros libros se refieren a la balística y al arte militar, el quinto a la topografía, y los tres siguientes a las fortificaciones y a la estática; muy interesante resulta el noveno, que trata del álgebra y de la resolución de las ecuaciones de tercer grado y de los problemas correspondientes. La parte dedicada al arte de la fortificación fue la que atrajo más la atención de sus contemporáneos: a consecuencia de la invención de la pólvora pírca, el arte de la guerra había experimentado profundas transformaciones que hacían necesarios nuevos medios de ofensiva, y un estudio

que sirviese para aumentar su potencia y la precisión en relación con la nueva técnica de fortificar.

Tartaglia destaca así mismo en los estudios de matemáticas por su traducción italiana de los Elementos de Euclides (1543) y por la de *De insidentibus aquae de Arquímedes*; de esta última obra publicó además un amplio comentario con paráfrasis, que utilizó posteriormente en La invención elaborada (1551), donde se trata del sistema adecuado para llevar nuevamente a flote las naves hundidas.

La obra más extensa de Tartaglia es el incompleto Tratado general de números y medidas (1556-60), una vasta enciclopedia un tanto desordenada dividida en seis partes; las dos primeras partes fueron publicadas en Venecia el año 1556, y las otras cuatro, póstumamente, en 1560. La primera parte es un tratado muy extenso de aritmética práctica, y la segunda estudia la aritmética teórica sobre la base de la representación geométrica euclidiana; es notable en ella el desarrollo de las once primeras potencias del binomio con el triángulo de los coeficientes. La tercera, en cambio, es una exposición de geometría práctica, en la que erróneamente se identifica a Euclides, autor de los Elementos, con Euclides de Mégara, atribuyéndole la definición de la recta como línea de longitud mínima.

La cuarta parte se ocupa de la geometría especulativa, y en la quinta parte los desarrollos geométricos, primero en el plano y después en el espacio, amplían los ya contenidos en los Elementos de Euclides. La sexta parte inicia el tratado del álgebra, pero se limita a exponer las ecuaciones de segundo grado o las que son reducibles a tal categoría; el fallecimiento del autor impidió que llegase a exponer las ecuaciones de tercer grado, que son las que más interesan para la historia de las matemáticas. La obra se difundió rápidamente por Italia y fue muy conocida y apreciada también en el extranjero.

B.1.7. Abraham de Moivre



Abraham de Moivre (26 de mayo de 1667, Champagne - 27 de noviembre de 1754, Londres) fue un matemático francés, conocido por la fórmula de Moivre y por predecir el día de su muerte a través de un cálculo matemático.

Su padre, que fue cirujano, le envió a la academia protestante de Sedan y allí estudió entre 1678 y 1682. Después estudió Lógica en Saumur durante los dos años posteriores y en 1684 asistió al Collège de Harcourt. Y, aunque no hay evidencias de que obtuviera algún título académico, lo cierto es que estudió junto a Jacques Ozanam.

Conocido por la fórmula de De Moivre y por su trabajo en la distribución normal y probabilidad, fue elegido miembro de la Royal Society de Londres en 1697 y fue amigo de Isaac Newton y Edmund Halley.

De Moivre publicó el libro de probabilidad *The Doctrine of Chances* y, como era calvinista, tuvo que salir de su país natal después de la revocación del Edicto de Nantes

por el de Fontainebleau (1685). Pasó el resto de su vida en Inglaterra. Lo cierto es que toda su vida fue pobre y era cliente regular del Slaughter's Coffee House, donde ganaba algo de dinero jugando al ajedrez.

Murió en Londres, siendo enterrado en St Martin-in-the-Fields, aunque más tarde su cuerpo fue trasladado. Lo curioso es que él predijo que moriría el día que murió. Observó que cada día dormía quince minutos más que la noche anterior y calculó que moriría aquel día que durmiera veinticuatro horas. Citó que serían 73 días después: el 27 de noviembre de 1754.

MOIVRE Y LA CURVA DE LA CAMPANA

Como muestra la curva de la campana, el mayor número de observaciones tiende a agruparse en el centro, en torno al valor promedio de todas ellas. Desplazándose a partir del punto medio, la curva desciende con suavidad primero, luego de manera mucho más rápida y finalmente se vuelve muy aplanada hacia los dos extremos. En particular, las observaciones apartadas del promedio son mucho menos frecuentes que las que están cerca del mismo.

De Moivre descubrió la curva de la campana examinando el comportamiento de observaciones aleatorias. Su elegante forma simétrica muestra que bajo el zar subyace una geometría elegante.

Bibliografía

Bibliografía

- [1] Keith Devlin, *El lenguaje de las matemáticas*. Editorial Robinhoot, Barcelona (1998).
- [2] Edward Kasner y James Newman, *Las matemáticas y la imaginación*. Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana (2006).
[Azar y Probabilidad.]
- [3] Santiago Inzunza Cázares *EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. Construcción de significados sobre distribuciones muestrales. Vol.21, núm. 1 (*abril* 2009).
- [4] Inzunza Cázarez, S. y Juárez Duarte, *Evaluación de la Cultura y Razonamiento Estadístico: Un estudio de Profesores de Preparatoria*. Trabajo presentado a la XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, realizado en Querétaro del 15 al 18 de julio (2007).
- [5] Inzunza Cázarez, S. y Vizcarra Parra, *Un estudio sobre la caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes de preparatoria: el caso de los promedios y las gráficas*. Trabajo presentado en el XXII Congreso Nacional de Enseñanza de las Matemáticas, realizado en Chiapas, del 26 al 28 de noviembre (2009).
- [6] Godino, “*Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática*”, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 22, pp. 237-284. (2002).
- [7] Godino, J. y C. Batanero *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*, *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 14, núm. 3 pp. 325-355. (1994).
- [8] I. Hacking *El surgimiento de la Probabilidad*, Editorial Gedisa, Barcelona, España. (1995).
- [9] Keith Devlin *The Unfinished Game*, Published by basic books. (2008).