



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”

---

**ANÁLISIS NUMÉRICO DE LOS POLINOMIOS DE BESSEL**

---

**TESIS**

Para obtener el grado de

**LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PRESENTA:

**MARISOL LÓPEZ CALDERÓN**

DIRECTOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias

**RAFAEL GONZÁLEZ CAMPOS**

Morelia, Michoacán, Julio de 2014

## RESUMEN

En este trabajo se encuentran expresiones aproximadas  $\tilde{x}(k, n)$  y  $\tilde{y}(k, n)$  para la parte real e imaginaria del  $k$ th cero  $z_k = x_k + iy_k$  del polinomio de Bessel  $y_n(x)$ . Para obtener estas fórmulas, usamos el hecho de que los puntos de ciertas curvas bien definidas en el plano complejo son puntos límite de los ceros de los polinomios normalizados de Bessel. Así, estos ceros se calculan primero numéricamente a través de una implementación de las fórmulas electrostáticas para estos ceros y después se usa un ajuste para obtener la forma funcional de la parte real y de la imaginaria de cada cero como función de  $k$  y  $n$ . Se muestra que el número complejo  $\tilde{x}(k, n) + i\tilde{y}(k, n)$  que resulta converge a  $z_k$  con el orden  $O(1/n^2)$  para  $k$  fijo.

**Palabras clave:** Matrices de diferenciación, Problemas diferenciales discretos, Ceros de los polinomios de Bessel, Fórmulas cerradas aproximadas.

## ABSTRACT

We find approximate expressions  $\tilde{x}(k, n)$  and  $\tilde{y}(k, n)$  for the real and imaginary parts of the  $k^{\text{th}}$  zero  $z_k = x_k + iy_k$  of the Bessel polynomial  $y_n(x)$ . To obtain these closed-form formulas we use the fact that the points of well-defined curves in the complex plane are limit points of the zeros of the normalized Bessel polynomials. Thus, these zeros are first computed numerically through an implementation of the electrostatic interpretation formulas and then, a fit to the real and imaginary parts as functions of  $k$  and  $n$  is obtained. It is shown that the resulting complex number  $\tilde{x}(k, n) + i\tilde{y}(k, n)$  is  $O(1/n^2)$ -convergent to  $z_k$  for fixed  $k$ .

**Keywords:** Differentiation matrices, Discrete differential problems, Zeros of the Bessel Polynomials, Approximate Closed-Form Formulas.

# Dedicatoria

A mi Dios y Salvador Jesucristo

A mis Padres

A mis hermanos y amigos

# Agradecimientos

A mi único y mejor amigo Jesús.

Gracias por estar siempre a mi lado para guiarme y sostenerme;  
por darme ánimos y fuerzas en los momentos más difíciles.

Gracias por el Don maravilloso de tu Amor,  
por mostrarme que Tú eres el camino, la verdad y la vida.

Porque sé que agradeciéndote a Ti estoy dando gracias a todas  
y cada una de las personas que de algún modo contribuyeron  
para que pudiera concluir esta etapa de mi vida, sin excluir a nadie;  
pues en Ti somos y existimos.

Gracias por todo Señor, Bendito y Alabado seas ahora y siempre.

Contigo Todo, Sin Ti nada.

Gracias mi amada Madre María Santísima por pedir a Jesús por mí.

Amén.

# Índice general

1. Introducción	2
2. Interpolación Lagrangiana	4
3. Matrices de Diferenciación en la Recta Real	6
3.1. Estructura de las Matrices de Diferenciación Algebraicas	7
3.2. Ejemplos	9
4. Matrices de Diferenciación en el Plano Complejo	13
4.1. Estructura de las Matrices de Diferenciación Complejas	13
4.2. Ejemplos	14
4.3. Discretización	15
5. Criterios de Selección de Nodos	16
5.1. Caso de Una Variable Real	16
5.2. Caso Complejo	17
5.3. Función Gamma para Los Polinomios de Bessel	20
6. Ceros de los polinomios de Bessel	22
6.1. Cálculo de la raíz inicial $z_0$	22
6.2. Gráficos y Tablas de los Ceros de Bessel	27
7. Obtención numérica de los polinomios de Bessel	33
7.1. Descripción del Problema de Eigenvalores asociado a los Polinomios de Bessel	33
7.2. Solución de casos particulares	35
8. Generalización del Problema Diferencial de Bessel	38
8.1. Método alternativo a Runge-Kutta-Fehlberg	38
8.2. Ejemplos de Aplicación	41
9. Conclusiones	48
10. Apéndice 1	49
11. Apéndice 2	56
Bibliografía	58

# 1. Introducción

Los primeros polinomios de Bessel fueron estudiados alrededor de 1931 (ver referencia [1]), aunque fueron mencionados antes por otros autores (consultar [2] y [3]), quienes mostraron una fórmula que conecta los polinomios de Bessel con las funciones de Bessel. Suficiente literatura acumulada en el tema en los últimos 40 años hace de los polinomios de Bessel una sub-área respetable de las funciones especiales. El interés en su estudio ha ido creciendo por sus muchas aplicaciones; tales polinomios aparecen de manera sorprendente en diversos campos: teoría de números (la trascendencia de  $e^r$ ,  $r$  racional), ecuaciones diferenciales parciales, álgebra y estadística (la divisibilidad de la distribución T-Student).

Los polinomios de Bessel también ocurren en forma natural en la teoría de ondas esféricas viajeras (consultar apéndice 2 en la sección 11) y están relacionados con las funciones esféricas de Morse y Schelkunoff.

Algunos autores han tratado las propiedades asintóticas, y también se han establecido conexiones entre los polinomios de Bessel y aproximantes de Padé para la función exponencial, estas conexiones son importantes por sus aplicaciones en Análisis numérico. Su estudio ha conducido a afrontar preguntas de condición y estabilidad relacionadas con problemas de análisis numérico básico como el cálculo de los eigenvalores de matrices de Jacobi o la solución de ecuaciones algebraicas.

Los polinomios generalizados de Bessel  $y_n(z, a, b)$  están definidos por

$$y_n(z, a, b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (n+k+a-2)^{[k]} \left(\frac{z}{b}\right)^k,$$

donde  $(x)^{[0]} := 1$ ,  $(x)^{[k]} := x(x-1)\cdots(x-k+1)$  para  $k \in \mathbf{N}^+$ . Tales polinomios satisfacen la ecuación diferencial

$$z^2 y'' + (az+b)y' - n(n+a-1)y = 0,$$

donde  $n \in \mathbf{N}^+$ ,  $a \in \mathbf{C}$  y  $b \in \mathbf{C} \setminus 0$ . Tomando  $a = b = 2$  en las dos expresiones anteriores, lleva al caso particular de los polinomios de Bessel ordinarios.

Uno de los aspectos más intrigantes de los Polinomios de Bessel, es la localización de sus ceros en el plano complejo. Hasta ahora se conoce lo siguiente:

1. Los ceros de  $y_n(z, a)$  son simples;
2. Ningún cero de  $y_n$  es un cero de  $y_{n+1}$ ,
3. Para  $a \geq 2$  los ceros están estrictamente en la mitad izquierda del plano complejo.

El límite más reciente de su módulo es: para  $Re a > 1 - n$ , los ceros se encuentran dentro de la cardiode  $r = (1 - \cos \theta)/(n + a - 1)$  y fuera del círculo  $r = [n(n + a - 1)]^{-1}$ , (ver [4]).

El problema computacional de aproximar los ceros de los polinomios generalizados de Bessel es difícil y sólo un algoritmo estable da una solución correcta. Varios métodos y sus respectivos algoritmos son aplicados al problema, (consultar [5]).

El propósito fundamental de este trabajo fue construir las matrices de diferenciación asociadas a la interpolación Lagrangiana, comunmente conocidas como matrices de diferenciación algebraicas, obteniendo así una representación matricial finita del operador diferencial  $d/dx$  construída a partir de  $N$  números, llamados nodos, seleccionados en base a una condición; lo cual posteriormente nos sería de utilidad para abordar ciertos problemas diferenciales como problemas discretos con representación matricial, donde los coeficientes de la ecuación diferencial juegan la parte principal. Por este motivo, en la sección 2 se presenta una síntesis que expone la Interpolación Lagrangiana.

En la sección 3 se profundiza en lo que son las matrices de diferenciación y sus aplicaciones. Además de proporcionar el algoritmo para construir matrices de diferenciación algebraicas.

En la sección 4 se muestra la estructura de tales matrices en el plano complejo, las cuales fueron aplicadas al caso particular de discretización de la ecuación diferencial asociada a los polinomios de Bessel. Mientras que en la sección 5 se establecen condiciones para seleccionar los nodos, las cuales serían de utilidad para abordar en el capítulo 6, el cálculo de los ceros o raíces de tales polinomios e investigar la localización de los mismos en el plano complejo. Para esto fue necesario el desarrollo de un algoritmo numérico que se presenta en el apéndice. En la sección 7 se obtienen en forma numérica los polinomios de Bessel, mediante la solución del problema de valores propios determinado a través de la discretización de la ecuación diferencial que éstos satisfacen.

En la sección 8, se presenta el problema generalizado de Bessel, el cual consiste en aproximar la solución de un problema diferencial de segundo orden en el plano complejo mediante el uso de valores propios  $\lambda \neq n(n + 1)$ , en el problema diferencial de Bessel ordinario. En la sección 9, se muestran las conclusiones más relevantes de este trabajo. Mientras que en las secciones 10 y 11 se proporciona un apéndice que consta de dos partes; en el apéndice 1 se incluyeron los códigos numéricos más importantes elaborados en Mathematica que permitieron efectuar los cálculos. Finalmente, en el apéndice 2 se expone en forma breve la forma en que surgen los polinomios de Bessel en el campo de ondas esféricas viajeras, esto, a modo de aplicación.

## 2. Interpolación Lagrangiana

Ésta es una breve introducción a la Teoría de la Interpolación Lagrangiana (o algebraica). Se establecerán los conceptos básicos que nos permitirán tener una mejor comprensión del método de interpolación de Lagrange.

Una de las más útiles clases de funciones reales de variable real es la de los polinomios algebraicos, i.e, el conjunto de funciones de la forma  $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ , donde  $n$  es un entero no negativo y  $a_0, \dots, a_n$  son constantes reales. Una razón primordial de su importancia es que aproximan uniformemente funciones continuas; esto es, dada una función definida y continua en un intervalo cerrado, existe un polinomio que está tan “cerca” de la función dada como se desee. El siguiente teorema expresa este resultado.

*Teorema de Aproximación de Weierstrass.*

Si  $f$  está definida y es continua en  $[a, b]$ , dado  $\epsilon > 0$ , existe un polinomio  $P$ , definido en  $[a, b]$  con la propiedad de que  $|f(x) - P(x)| < \epsilon$  para toda  $x \in [a, b]$ .

La demostración de este teorema puede consultarse en [6].

Además de aproximar funciones, los polinomios también son útiles para interpolar datos que bien pueden ser experimentales, por ejemplo, supongamos que se nos dan  $N$  puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$  donde los  $x_i$  son distintos y satisfacen

$$x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_N.$$

Nuestro objetivo es encontrar una curva polinomial que pase a través de los puntos dados  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Es decir, necesitamos encontrar un polinomio  $P(x)$  tal que

$$P(x_i) = y_i, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Los puntos  $x_i$  son llamados nodos. Dados los datos,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ , nuestro problema consiste en encontrar un polinomio

$$P_{N-1}(x) = a_{N-1}x^{N-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (2)$$

que interpole los datos dados.

Gráficamente tenemos lo siguiente:

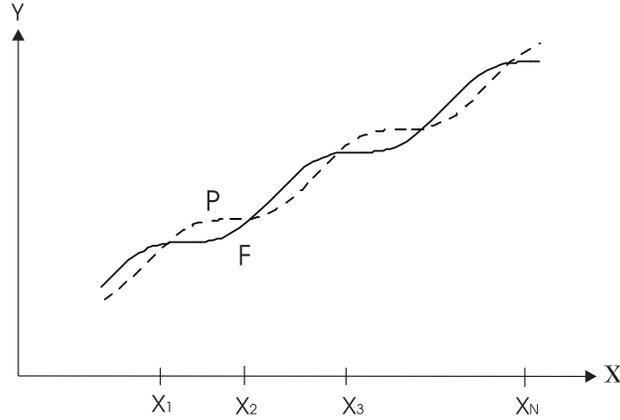


Figura 1: Interpolación de Lagrange.

Aplicando la condición (1) obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned}
 a_{N-1}x_1^{N-1} + \cdots + a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 &= y_1, \\
 a_{N-1}x_2^{N-1} + \cdots + a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 &= y_2, \\
 &\vdots \\
 a_{N-1}x_N^{N-1} + \cdots + a_2x_N^2 + a_1x_N + a_0 &= y_N.
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Este es un sistema de  $N$  ecuaciones lineales con  $N$  incógnitas  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$ . En forma matricial el sistema es

$$Va = Y \quad \text{donde} \quad V = [x_i^j],$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$  y  $j = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

$$a = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}]^t, \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_N]^t. \tag{4}$$

La matriz  $V$  es conocida como la matriz de Vandermonde.

Dados  $N$  puntos distintos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  y  $N$  valores reales arbitrarios  $y_1, y_2, \dots, y_N$ , hay un único polinomio de grado  $\leq N-1$  que interpola los puntos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ .

Es fácil mostrar que el determinante de la matrix  $V$  en (4) es

$$\det V = \prod_{i>j}^N (x_i - x_j). \tag{5}$$

El cual es distinto de 0 puesto que  $x_i \neq x_j$  (ver referencia [7]).

Por lo tanto hay una única solución para las  $a_i$ , es decir hay un único polinomio de interpolación de grado  $\leq N - 1$ .

### 3. Matrices de Diferenciación en la Recta Real

Como se mostrará en el presente capítulo, la derivada de una función  $f(x)$  (continua y diferenciable) se puede obtener de forma exacta o aproximada por medio de un operador diferencial matricial  $PDP^{-1}$ , construido a partir de  $N$  puntos distintos arbitrarios  $x_i$  llamados nodos.

Una Matriz de Diferenciación es aquella que, aplicada a un vector de  $\mathbf{R}^n$  (o  $\mathbf{C}^n$ ) cuyas entradas están determinadas por la discretización de una función, o está producido por cierta aplicación que nos mapea un elemento de un espacio determinado a  $\mathbf{R}^n$  (o bien  $\mathbf{C}^n$ ) de forma continua y lineal; produce un nuevo vector, el cual es la derivada o una aproximación a ésta, de la función discretizada o del elemento mapeado. La construcción de tales matrices será tratada posteriormente.

Las matrices de diferenciación son útiles para obtener derivadas de funciones racionales complejas y pueden ser usadas para obtener soluciones numéricas de algunos problemas diferenciales singulares definidos en el dominio complejo. De ahí su potencial y la importancia de su estudio. La clase de funciones que define el dominio del operador diferencial determina el tipo de matriz de diferenciación a utilizar. Existen métodos basados en la discretización del problema diferencial mediante el uso de matrices de diferenciación que son proyecciones de la derivada en espacios de polinomios algebraicos o trigonométricos.

Las matrices de diferenciación surgen de manera natural en el contexto de interpolación de funciones. Tales matrices dan valores exactos para la derivada de funciones polinomiales en los puntos seleccionados como nodos; siempre y cuando estos excedan en número al grado del polinomio. De modo que una Matriz de Diferenciación obtenida en base a la interpolación de funciones nos proporcionará la derivada de polinomios algebraicos así como la derivada de funciones aproximables a este tipo de polinomios.

Existen varios tipos de Matrices de Diferenciación, pues se pueden construir para distintos tipos de funciones. El caso algebraico es sólo un caso particular. La clasificación depende de la interpolación que aproxima a la función.

### 3.1. Estructura de Las Matrices de Diferenciación Algebraicas.

Haciendo uso de polinomios algebraicos podemos obtener lo que se conoce como Matrices de Diferenciación Algebraicas. El método que a continuación se presenta, puede ser usado también con otros tipos de polinomios para encontrar otros tipos de Matrices de Diferenciación, y de este modo conseguir una matriz que interpola a la derivada de la función de interés, en tal caso el tipo de polinomio empleado depende de las propiedades que posea esta función.

Para obtener la Matriz de Diferenciación algebraica usemos el polinomio de interpolación de Lagrange que tiene la forma:

$$L_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^N f(x_j) \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} = \sum_{j=1}^N f_j l_j(x), \quad (6)$$

donde hemos definido  $f_j = f(x_j)$ ;  $l_j(x) = \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}$ , de tal forma que

$$\frac{d}{dx} L_{N-1}(x) = \sum_{j=1}^N f_j \frac{d}{dx} l_j(x). \quad (7)$$

O bien,

$$\left. \frac{d}{dx} L_{N-1}(x) \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N f_j \left. \frac{d}{dx} [l_j(x)] \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N f_j \left. \frac{d}{dx} \left( \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} \right) \right|_{x_i}. \quad (8)$$

Sea

$$P(x) = \prod_{k=1}^N (x - x_k),$$

entonces

$$P'(x_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N (x_j - x_k).$$

Por otro lado, nótese que

$$\frac{\prod_{k \neq i, j} (x_i - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} = \frac{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} \frac{1}{(x_i - x_j)} = \frac{P'(x_i)}{P'(x_j)} \frac{1}{(x_i - x_j)}. \quad (9)$$

Volvamos ahora nuevamente con la ecuación (8),

$$\left. \frac{d}{dx} L_{N-1}(x) \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^N f_j \left. \frac{d}{dx} \left( \frac{\prod_{k \neq j} (x - x_k)}{\prod_{k \neq j} (x_j - x_k)} \right) \right|_{x_i},$$

si hacemos la derivada, evaluamos en  $x_i$  y usamos la ecuación (9), podemos separar de la suma el término  $i$ -ésimo; obteniendo la siguiente expresión:

$$f_i \sum_{k \neq i} \frac{1}{x_i - x_k} \frac{P'(x_i)}{P'(x_i)} + \sum_{j \neq i} P'(x_i) \frac{1}{x_i - x_j} \frac{1}{P'(x_j)} f_j.$$

Factorizando  $P'(x_i)$  se tiene:

$$P'(x_i) \left[ f_i \left( \sum_{k \neq i} \frac{1}{x_i - x_k} \right) \frac{1}{P'(x_i)} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \frac{f_j}{P'(x_j)} \right].$$

Podemos observar que esta ecuación tiene la forma de una multiplicación matriz-vector, de tal modo que podemos reescribirla como

$$P'(x_i) \left[ f_i \tilde{D}_{ii} \frac{1}{P'(x_i)} + \sum_{j \neq i} \tilde{D}_{ij} f_j \frac{1}{P'(x_j)} \right],$$

para llegar a

$$\left. \frac{d}{dx} L_{N-1}(x) \right|_{x_i} = P'(x_i) \sum_{j=1}^N f_j \frac{\tilde{D}_{ij}}{P'(x_j)} = P'(x_i) [\tilde{D}f/P']_i, \quad (10)$$

donde  $\tilde{D}$  es la matriz cuyas componentes son

$$\tilde{D}_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{x_j - x_k} & j \neq k, \\ \sum_{l=1}^N \frac{1}{x_j - x_l} & j = k. \end{cases}$$

Hemos visto que si  $f$  es un polinomio de grado  $N-1$ , el polinomio interpolante de Lagrange  $L_{N-1}(x)$  coincide con  $f$ , así que (10) se escribe como

$$f'(x_i) = P'(x_i) (\tilde{D}f/P')_i = P'(x_i) \sum_{k=1}^N \tilde{D}_{ik} \frac{1}{P'(x_k)} f_k,$$

O bien,

$$f'(x_i) = \sum_{k=1}^N \left( P'(x_i) \tilde{D}_{ik} \frac{1}{P'(x_k)} \right) f_k = (P\tilde{D}P^{-1}f)_i,$$

que en forma compacta puede escribirse como

$$f' = (P\tilde{D}P^{-1})f, \quad (11)$$

donde  $P$  es la matriz diagonal compuesta por los elementos  $P_i \equiv P'_i(x_i)$  y  $P^{-1}$  es la matriz inversa definida por los elementos  $P_k^{-1} = 1/P_k(x_k)$ .

Definiendo la matriz  $D = P\widetilde{D}P^{-1}$ , y por tanto  $D_{jk} = P_j\widetilde{D}_{jk}P_k^{-1}$ ; la ecuación (11) puede escribirse simplemente como

$$f' = Df.$$

La multiplicación de la matriz  $D$  por un vector función genera la derivada. Así, cada vez que este resultado se vuelve a multiplicar por la matriz  $D$  se obtienen las derivadas subsecuentes, ya que la derivada de un polinomio de grado  $N - 1$  es otro polinomio de grado menor. De este modo podemos decir que  $D$  funciona como la primera derivada,  $D^2$  es la matriz para obtener la segunda derivada y de la misma manera para obtener las derivadas de orden superior. Así, puesto que la matriz  $D$  es de diferenciación

$$Dx^k = kx^{k-1}, \quad \text{donde} \quad k = 0, 1 \dots N.$$

A continuación se presenta un ejemplo en el que se muestra una matriz de diferenciación construida en base al método ya expuesto; así como la forma en que ésta actúa sobre un polinomio y una función distinta de un polinomio.

El error asociado a cada caso se midió en base a la siguiente definición:

Si  $p^*$  es una aproximación de  $p$ , el error absoluto está dado por

$$E_a = |p - p^*|$$

y el error relativo se define como

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|},$$

siempre y cuando  $p \neq 0$ .

## 3.2. Ejemplos.

*Caso 1. Matriz de Diferenciación actuando sobre una función polinomial.*

Sea

$$f(x) = x^2 - 2x + 3,$$

y por tanto

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Consideremos los nodos:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  y  $x_3 = 3$ . Entonces

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 2, \quad f(x_2) = 3 \quad \text{y} \quad f(x_3) = 6. \\ f'(x_1) &= 0, \quad f'(x_2) = 2 \quad \text{y} \quad f'(x_3) = 4. \end{aligned}$$

De modo que

$$f = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \quad y \quad f' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $D$  de diferenciación resultante para este caso fue:

$$D = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix}.$$

Así que

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

En este caso

$$E_a = 0 \quad y \quad E_r = 0,$$

en otras palabras

$$Df = f'.$$

De aquí se puede ver que para un polinomio la Matriz de Diferenciación da el valor exacto para la derivada.

*Caso 2. Matriz de Diferenciación actuando sobre una función no polinomial.*

Ahora consideremos una función distinta a un polinomio. Tomando nuevamente como nodos los puntos:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$  y  $x_3 = 3$ . Enseguida se muestran las funciones  $f(x)$  y  $f'(x)$ , así como sus respectivas evaluaciones en tales puntos.

Sea

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

Mientras que

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Las evaluaciones de tales funciones en los puntos ya mencionados son

$$f(x_1) = 1, f(x_2) = 1/2 \text{ y } f(x_3) = 1/3. \\ f'(x_1) = -1, f'(x_2) = -1/4 \text{ y } f'(x_3) = -1/9.$$

La Matriz de Diferenciación es exactamente la misma que se obtuvo para el caso anterior, pues se construye haciendo uso de los mismos nodos. Tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} -3/2 & 2 & -1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $Df \neq f'$ . El error obtenido para este caso fue:

$$E_a = 0.361, \quad \text{mientras} \quad E_r = 0.348.$$

Tomando en cuenta que la función  $f(x) = 1/x$  es divergente podemos considerar que este es un buen resultado y por tanto  $Df \approx f'$ , aun cuando el error sea del orden de décimas.

Con el fin de generalizar la forma en que una matriz de diferenciación actúa sobre una función de tipo polinomial, observemos lo siguiente:

Sea  $f(x) = x^k$  de tal forma que  $f'(x) = kx^{k-1}$ . Puesto que

$$D \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x_1) \\ f'(x_2) \\ \vdots \\ f'(x_N) \end{pmatrix},$$

entonces

$$D \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_N^k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ \vdots \\ x_N^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Es decir

$$Dx^k = kx^{k-1}.$$

Nótese que si definimos  $X = \text{diag}(x_k)$ , entonces el producto matricial  $XD$  satisface

$$XDx^k = Xkx^{k-1} = kXx^{k-1} = kx^k.$$

De modo que se ha demostrado el siguiente resultado.

*Teorema.*

Si  $M = XD$  entonces  $Mx^k = kx^k$  donde  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Cabe señalar que este es un resultado importante dada la arbitrariedad de los puntos con los cuales se construye la matriz  $M$ , pues se tiene un problema de eigenvalores donde los valores propios,  $k$ , pertenecen a  $\mathbf{N}$ ; lo cual es esencialmente singular.

Dada la derivada de una función o una ecuación diferencial que involucre la misma, suele ser de interés el conocimiento de la función original. El uso de las matrices de diferenciación aquí construídas simplifica la solución de un problema de valores a la frontera. Por ejemplo, el problema siguiente

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + q(x)y(x) = \lambda g(x)y(x), \quad y(a) = y(b) = 0,$$

puede discretizarse mediante las substituciones  $d/dx \rightarrow D$  y  $x \rightarrow X$  para obtener ecuaciones matriciales en lugar de ecuaciones diferenciales. En este método las condiciones de frontera se usan para determinar los puntos que nos permitirán construir la matriz de diferenciación correspondiente.

## 4. Matrices de diferenciación en el plano complejo

### 4.1. Estructura de las Matrices de Diferenciación Complejas

Es posible construir matrices de diferenciación en el plano complejo, las cuales pueden ser empleadas para encontrar soluciones numéricas de algunos problemas diferenciales singulares o para obtener derivadas de funciones racionales en el dominio complejo.

En general, sean  $N$  números complejos  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , arbitrarios distintos entre sí. En este caso también podemos obtener una matriz  $D$  cuya forma es

$$D = P\widetilde{D}P^{-1}, \quad (12)$$

donde

$$P = \text{diag}\left[\prod_{k=1}^N (z_j - z_k)\right] \quad k \neq j.$$

y las entradas de  $\widetilde{D}$  están dadas por

$$\widetilde{D}_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{z_j - z_k} & j \neq k, \\ \sum_{l=1}^N \frac{1}{z_j - z_l} & j = k. \end{cases}$$

Por tanto  $D_{jk} = P_j \widetilde{D}_{jk} P_k^{-1}$ . Así que

$$D_{jk} = \begin{cases} \frac{P_j}{P_k(z_j - z_k)} & j \neq k, \\ \sum_{l=1}^N \frac{1}{z_j - z_l} & j = k. \end{cases} \quad (13)$$

De modo que si

$$f(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_0,$$

o bien

$$f(z) = A(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_N).$$

Entonces

$$\begin{pmatrix} f'(z_1) \\ f'(z_2) \\ \vdots \\ f'(z_N) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} f(z_1) \\ f(z_2) \\ \vdots \\ f(z_N) \end{pmatrix}.$$

Es posible observar que las formas de las Matrices de Diferenciación Algebraicas en el Plano Complejo son análogas a las ya obtenidas para el caso real, las cuales únicamente dependen de los puntos seleccionados como nodos.

A continuación se presentan ejemplos en los que se muestra una Matriz de Diferenciación Compleja actuando sobre una función polinomial y una función distinta de polinomio.

## 4.2. Ejemplos

*Caso 1. Matriz de Diferenciación Compleja aplicada a un polinomio en el dominio complejo.*

Consideremos la función polinomial  $f(z) = 3z^2 + 3z + 1$  y su derivada  $f'(z) = 6z + 3$ . Tomando como nodos los puntos:  $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{i}{3}$ ,  $z_2 = \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$ ,  $z_3 = 1 + i$  y haciendo uso de Mathematica se obtiene la siguiente Matriz de Diferenciación :

$$D = \begin{pmatrix} -2.25+2.25i & 3-3i & -0.75+0.75i \\ -0.75+0.75i & 0+0i & 0.75-0.75i \\ 0.75-0.75i & -3+3i & 2.25-2.25i \end{pmatrix}.$$

El error asociado es:

$$E_a = 0 \quad y \quad E_r = 0.$$

Como podemos ver, también en el caso complejo la matriz  $D$  nos da la derivada exacta de un polinomio. Es decir

$$Df = f'.$$

*Caso 2. Matriz de Diferenciación Compleja aplicada a una función distinta de un polinomio.*

Utilicemos ahora la función  $f(z) = (2z + 4)/(z + 3)$ , cuya derivada es  $f'(z) = 2/(3 + z) - (4 + 2z)/(3 + z)^2$ .

Si tomamos los mismos nodos que en el caso anterior:  $z_1 = \frac{1}{3} + \frac{i}{3}$ ,  $z_2 = \frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$ ,  $z_3 = 1 + i$ , obtenemos exactamente la misma Matriz de Diferenciación pues ésta solo depende de tales puntos. Sin embargo, el error que ahora tenemos es el siguiente:

$$E_a = 0.00703, \quad E_r = 0.0273.$$

Tomando en cuenta la existencia de un polo simple en  $z = -3$ , podemos decir que  $Df \approx f'$ .

En base a estos resultados podemos concluir que efectivamente las Matrices de Diferenciación en el plano complejo actúan de manera similar que en el caso real.

### 4.3. Discretización

Ahora, sea  $f(z)$  un polinomio con ceros simples que satisface la siguiente EDO

$$f''(z) + a_1(z)f'(z) + a_0(z)f(z) = 0. \quad (14)$$

Discretizando esta EDO en los nodos:

$$\begin{aligned} f''(z_1) + a_1(z_1) f'(z_1) + a_0(z_1)f(z_1) &= 0 \\ f''(z_2) + a_1(z_2) f'(z_2) + a_0(z_2)f(z_2) &= 0 \\ &\vdots \\ f''(z_N) + a_1(z_N) f'(z_N) + a_0(z_N)f(z_N) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Tal sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma matricial

$$D^2 f + A_1 D f + A_0 f = 0. \quad (16)$$

Que en forma compacta se puede escribir como

$$L f = 0, \quad (17)$$

donde

$$L = D^2 + A_1 D + A_0.$$

Esto es igualmente válido cuando tenemos un problema de valores propios como el siguiente

$$f''(z) + a_1(z)f'(z) + a_0(z)f(z) = \lambda \rho(z)f(z). \quad (18)$$

Análogamente, al discretizar en los nodos se obtiene la ecuación matricial

$$D^2 f + A_1 D f + A_0 f = \lambda \rho f. \quad (19)$$

En este caso

$$L f = \lambda \rho f, \quad L = D^2 + A_1 D + A_0.$$

## 5. Criterios de selección de nodos

La forma en que se seleccionen los nodos determina la estructura de la Matriz de Diferenciación obtenida, así como sus propiedades; por este motivo es importante establecer criterios de selección que nos permitan visualizar la Matriz de Diferenciación que mejor se ajuste a las condiciones del problema diferencial a resolver.

### 5.1. Caso de una variable real.

Consideremos una ecuación diferencial de la forma

$$f_N''(x) + a_1(x)f_N'(x) + a_0(x)f_N(x) = 0,$$

al evaluar en los ceros simples de la solución polinomial  $f_N(x)$ , la parte de  $a_0(x)$  se cancela y se llega a la relación siguiente

$$\frac{f_N''(x_j)}{f_N'(x_j)} + a_1(x_j) = 0.$$

A partir de ésta se obtiene que la selección de nodos en el caso real está sujeta a la condición

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{x_j - x_k} + \frac{1}{2}a_1(x_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

La deducción completa de esta expresión se presentará más adelante cuando tratemos el caso complejo. Mientras que en el siguiente teorema se especifican las condiciones para que este sistema de ecuaciones tenga solución.

Teorema: Si  $a(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)}$  donde

1.  $\gamma(x) \in C(a, b)$ .
2.  $\gamma(x) > 0, \quad x \in (a, b)$ .
3.  $\gamma(a) = \gamma(b) = 0$ ,

entonces (20) tiene solución, es decir, existen puntos  $x_1, x_2, \dots, x_N$  con  $a < x_j < b$  que satisfacen tal sistema.

*Demostración.*

Considérese la función auxiliar de N variables

$$T(y_1, y_2, \dots, y_N) = \prod_{k=1}^N \gamma(y_k) V(y_1, y_2, \dots, y_k),$$

donde

$$V(y_1, y_2, \dots, y_k) = \prod_{k < j} (y_k - y_j).$$

Esta función es continua en el hipercubo  $a < y_j < b$  y además positiva. Por otra parte  $T$  se anula en la frontera del hipercubo y también en la hipersuperficie  $y_j = y_k$ .

Por lo tanto,  $T$  se maximiza dentro del hipercubo, es decir, su máximo existe dentro del hipercubo. A continuación se muestra la representación gráfica de la situación.

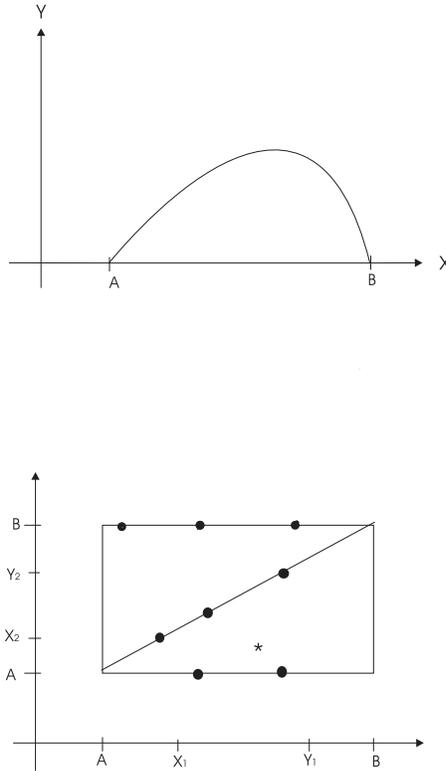


Figura 2: Representación gráfica de teorema

## 5.2. Caso Complejo

Para determinar la condición que han de cumplir los nodos en el caso complejo, consideremos lo siguiente.

La matriz  $\tilde{D}$  de la relación (12) se puede expresar como

$$\tilde{D} = D_0 + d.$$

De tal forma que

$$\tilde{L} = (\tilde{D})^2 + A_1 \tilde{D} + A_0,$$

se escribe como

$$\tilde{L} = (D_0 + d)^2 + A_1(D_0 + d) + A_0.$$

Desarrollando tal expresión y reagrupando términos se obtiene que

$$\tilde{L} = D_0^2 + (D_0 + A_1)d + (d + A_1)D_0 + d^2 + A_0, \quad (21)$$

donde

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z_1 - z_2} & \cdots & \frac{1}{z_1 - z_N} \\ \frac{1}{z_2 - z_1} & 0 & \cdots & \frac{1}{z_2 - z_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{z_N - z_1} & \frac{1}{z_N - z_2} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos una ecuación diferencial con la forma de (14):

$$y''(z) + a_1(z)y'(z) + a_0(z)y(z) = 0.$$

Suponiendo que esta ecuación tiene soluciones polinomiales, i.e,  $y = P_n(z)$ ; se convierte en

$$y_n''(z) + a_1(z)y_n'(z) + a_0(z)y_n(z) = 0. \quad (22)$$

Si evaluamos la ecuación (22) en los ceros simples del polinomio  $P_n(z)$  la parte correspondiente a  $a_0$  se cancela y obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} y_n''(z_1) + a_1(z_1)y_n'(z_1) &= 0 \\ y_n''(z_2) + a_1(z_2)y_n'(z_2) &= 0 \\ &\vdots \\ y_n''(z_k) + a_1(z_k)y_n'(z_k) &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Puesto que

$$y_n(z) = K_n \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad (24)$$

Entonces  $y_n'(z_k) \neq 0$  y por tanto podemos dividir por esta cantidad cada una de las ecuaciones del sistema (23), obteniendo la siguiente expresión general:

$$\frac{y_n''(z_k)}{y_n'(z_k)} + a_1(z_k) = 0. \quad (25)$$

Derivando la ecuación (24) se tiene

$$y_n'(z) = K_n \left[ (z - z_k) \frac{d}{dz} \prod_{l \neq k} (z - z_l) + \prod_{l \neq k} (z - z_l) \right].$$

Si derivamos nuevamente tenemos

$$y_n''(z) = K_n[(z - z_k) \frac{d^2}{dz^2} \prod (z - z_l) + 2 \frac{d}{dz} \prod_{l \neq k} (z - z_l)].$$

De tal forma que

$$\frac{y''(z_k)}{y'(z_k)} = 2 \frac{\frac{d}{dz} \prod_{l \neq k} (z - z_l)}{\prod_{l \neq k} (z - z_l)} \Big|_{z_k} = 2 \frac{d}{dz} \ln \prod_{l \neq k} (z - z_l) \Big|_{z_k}.$$

Tomando en cuenta que el logaritmo de un producto es la suma de los logaritmos, tenemos

$$\frac{y''(z_k)}{y'(z_k)} = 2 \frac{d}{dz} \sum_{l \neq k} \ln(z - z_l) \Big|_{z_k} = 2 \sum_{l \neq k} \frac{1}{z_k - z_l}.$$

Por lo tanto

$$\frac{y''(z_k)}{y'(z_k)} = 2 \sum_{l \neq k} \frac{1}{z_k - z_l}.$$

Sustituyendo esta expresión en (25) se llega al siguiente resultado

$$\sum_{l \neq k} \frac{1}{z_k - z_l} + \frac{1}{2} a_1(z_k) = 0, \quad (26)$$

de tal manera que si la matriz  $d$  se define como

$$d = \begin{pmatrix} \sum_k \frac{1}{z_1 - z_k} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_k \frac{1}{z_2 - z_k} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_k \frac{1}{z_N - z_k} \end{pmatrix}.$$

Mientras que la matriz  $A_1$  tiene la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1(z_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1(z_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_1(z_N) \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$B = d + \frac{A_1}{2},$$

está dada por

$$b_{ij} = \sum \frac{1}{z_j - z_k} + \frac{a_1(z_j)}{2}.$$

Es decir,  $d = -\frac{1}{2}A_1$ . Sustituyendo este resultado en la ecuación (21)

$$\tilde{L} = D_0^2 - \frac{1}{2}D_0A_1 - \frac{1}{2}A_1^2 + \frac{1}{2}A_1D_0 + \frac{1}{4}A_1^2 + A_0.$$

Esto es

$$\tilde{L} = D_0^2 + \frac{1}{2}[A_1, D_0] - \frac{1}{4}A_1^2 + A_0.$$

Por lo tanto  $\tilde{L}$  tiene la importante propiedad de ser hermitiano, ya que es suma de hermitianos. De este modo, en el caso complejo, la condición para los nodos se reduce a que la matriz  $\tilde{L}$  sea hermitiana.

### 5.3. Función Gamma para Los Polinomios de Bessel

Retomemos ahora la ecuación (26). Puesto que  $z_k = x_k + iy_k$  y  $z_l = x_l + iy_l$  podemos expresar esta ecuación de la siguiente manera:

$$\sum_{l=1}^N \left[ \frac{x_k - x_l}{|z_k - z_l|^2} - i \frac{y_k - y_l}{|z_k - z_l|^2} \right] + \frac{1}{2}a_1(z_k) = 0 \quad l \neq k. \quad (27)$$

Ahora consideremos la ecuación diferencial que satisfacen los polinomios de Bessel:

$$z^2 y_n'' + 2(z+1)y_n'(z) - n(n+1)y_n(z) = 0. \quad (28)$$

o bien

$$y_n''(z) + \frac{2(z+1)}{z^2}y_n'(z) - \frac{n(n+1)}{z^2}y_n(z) = 0.$$

En este caso tenemos que:

$$a_1(z) = \frac{2(z+1)}{z^2}.$$

De modo que la ecuación (27) toma la siguiente forma:

$$\sum_{l=1}^N \left[ \frac{x_k - x_l}{|z_k - z_l|^2} - i \frac{y_k - y_l}{|z_k - z_l|^2} \right] + \frac{1}{2} \frac{2(z_k+1)}{z_k^2} = 0,$$

es decir

$$\sum_{l=1}^N \left[ \frac{x_k - x_l}{|z_k - z_l|^2} - i \frac{y_k - y_l}{|z_k - z_l|^2} \right] + \frac{(x_k + iy_k + 1)}{(x_k + iy_k)^2} = 0.$$

Al realizar los cálculos necesarios para separar esta ecuación en su parte real e imaginaria llegamos a lo siguiente:

$$\sum_{l=1}^N \frac{x_k - x_l}{|z_k - z_l|^2} + \frac{x_k^3 + x_k^2 + x_k y_k^2 - y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^2} + i \left[ - \sum_{l=1}^N \frac{y_k - y_l}{|z_k - z_l|} - \frac{y_k(x_k^2 + y_k^2 + 2x_k)}{(x_k^2 + y_k^2)^2} \right] = 0.$$

Entonces

$$\sum_{l=1}^N \frac{x_k - x_l}{|z_k - z_l|^2} + \frac{x_k^3 + x_k^2 + x_k y_k^2 - y_k^2}{(x_k^2 + y_k^2)^2} = 0. \quad (29)$$

$$-\sum_{l=1}^N \frac{y_k - y_l}{|z_k - z_l|} - \frac{y_k(x_k^2 + y_k^2 + 2x_k)}{(x_k^2 + y_k^2)^2} = 0. \quad (30)$$

De la expresión (29) se obtienen  $N$ -ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f_N(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Mientras que de (30) se tiene:

$$\begin{aligned} f_{N+1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) &= 0 \\ f_{N+2}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) &= 0 \\ &\vdots \\ f_{2N}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N, y_1, y_2, y_3, \dots, y_N) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

es decir, tenemos un sistema de  $2N$  ecuaciones algebraicas no lineales de la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

cuyos ceros o soluciones pueden ser calculadas mediante el uso del método de Newton-Raphson para sistemas no lineales; el cual generalmente da convergencia cuadrática siempre y cuando se conozca un valor inicial lo suficientemente exacto y que  $J(\mathbf{x})^{-1}$  exista, donde  $J(\mathbf{x})$  es la matriz Jacobiana asociada al sistema.

Al obtener explícitamente algunas de las funciones dadas por las expresiones en (29) y (30), fue posible analizar la estructura de la matriz Jacobiana, para de este modo proceder a realizar el programa en Mathematica que nos permitió encontrar los ceros o soluciones de este sistema no lineal.

El programa desarrollado puede consultarse en el Apéndice que se muestra al final del documento.

## 6. Ceros de los polinomios de Bessel

En general el problema de calcular numericamente ceros de polinomios (aunque sean sencillos), es difícil; es un problema mal condicionado. Existen varios algoritmos que dan aproximaciones no tan buenas, y sin embargo son bastante sofisticados.

La razón principal por la que se abordó el problema de calcular los ceros de los polinomios de Bessel fue precisamente porque no es fácil conocerlos. La aportación del método que nosotros proponemos consiste en haber encontrado una expresión analítica sencilla para aproximar la parte real e imaginaria de tales ceros, la cual surgió a partir de un análisis numérico del problema.

### 6.1. Cálculo de la raíz inicial $z_0$

Como ya se mencionó en la sección anterior, fue posible obtener los ceros de los polinomios de Bessel a partir de la solución del sistema de  $2N$  ecuaciones formado por (31) y (32), para lo cual se requirió el desarrollo de un algoritmo en Mathematica.

Puesto que la aplicación de tal programa requirió el conocimiento de una aproximación inicial  $z_0$  de la raíz o solución del sistema, fue necesario construirla.

La raíz inicial  $z_0$  se construyó en base al análisis numérico del comportamiento de la parte real e imaginaria de los ceros de los polinomios de Bessel para grados pequeños. Se empezó por aproximar numericamente los ceros del polinomio de grado  $N = 2$  y nos fue posible llegar de esta forma hasta el de grado  $N = 8$ . Habiendo con esto obtenido una cantidad suficiente de datos a partir de los cuales se realizó un ajuste con la ayuda de Mathematica y esto nos condujo a encontrar una expresión analítica de aproximación tanto para la parte real como para la imaginaria, obteniéndose en ambos casos formas polinomiales.

La forma general del polinomio de aproximación para la parte real fue

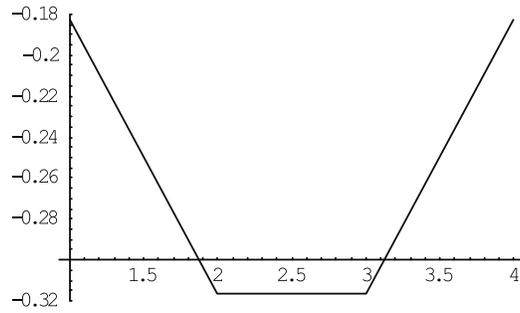
$$f(x) = ax^2 + bx.$$

Mientras que para la parte imaginaria fue

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - bx + d.$$

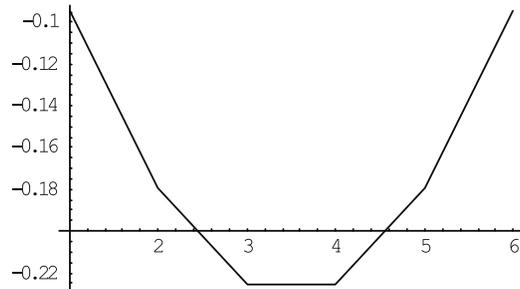
Al realizar un análisis gráfico se obtuvo una expresión para tales polinomios en términos del grado  $N$ , obteniéndose así una aproximación suficientemente buena de  $z_0$  que permitiría aplicar el programa al cálculo de los ceros de polinomios de Bessel de grados más altos. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

COMPORTAMIENTO DE LA PARTE REAL



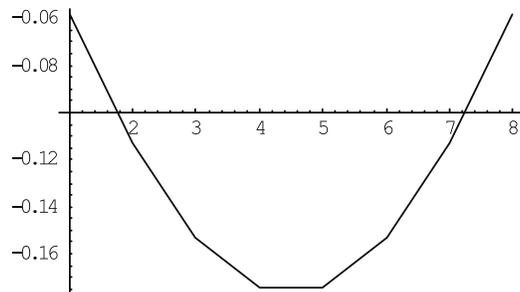
$N = 4$ .

```
ListPlot[{-0.18313248053143524,-0.31686751946856473,-0.31686751946856473,-0.1831324805314353},PlotJoined->True].
```



$N = 6$ .

```
ListPlot[{-0.09489061789607545,-0.17914640739749707,-0.22596297470642754,-0.22596297470642754,-0.17914640739749704,-0.09489061789607542},PlotJoined->True].
```



$N = 8$ .

```
ListPlot[{-0.05861791492234342,-0.11325833004972813,-0.153377947718824,
-0.17474580730910444,-0.17474580730910444,-0.153377947718824,
-0.11325833004972811,-0.05861791492234342},PlotJoined->True].
```

El ajuste polinomial para los datos representados en estas curvas tiene la forma general  $f(x) = ax^2 + bx$ , es decir, la parte real tiene un comportamiento parabólico. A partir de la información que nos brindan estas gráficas se puede inferir lo siguiente:

Si  $x = N$ ,  $f(N) = \frac{2}{5N}$ ; de tal forma que

$$aN^2 + bN = \frac{2}{5N}. \quad (33)$$

Si  $x = \frac{N}{2}$ ,  $f(\frac{N}{2}) = \frac{1}{N-2}$ ; de modo que

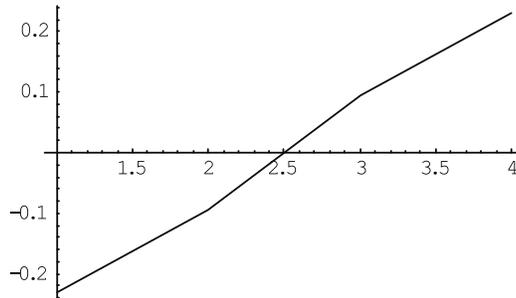
$$a\frac{N^2}{4} + b\frac{N}{2} = \frac{1}{N-2}. \quad (34)$$

Resolviendo el sistema formado por (33) y (34) para  $a$  y  $b$ , obtenemos una expresión para el polinomio de aproximación de la parte real de  $z_0$  en términos de  $N$ .

$$f(x) = \frac{8(1+2N)}{5(-2+N)N^3}x^2 - \frac{2(2+9N)}{5(-2+N)N^2}x. \quad (35)$$

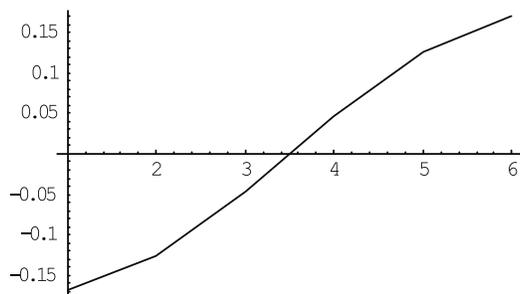
Al realizar un estudio análogo del comportamiento de la parte imaginaria, obtuvimos lo siguiente.

#### COMPORTAMIENTO DE LA PARTE IMAGINARIA.



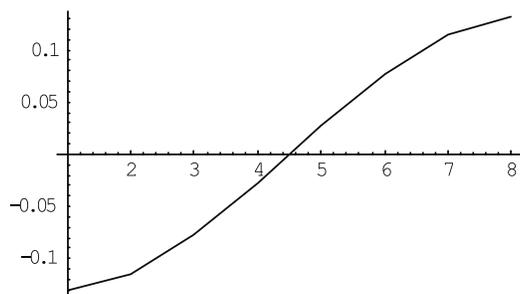
$N = 4$ .

```
ListPlot[{-0.23132522602625522,-0.09488202514221689,0.09488202514221687,
0.231325226026255},PlotJoined->True].
```



$N = 6$ .

ListPlot[{-0.16944514819433418,-0.12594324946340613,-0.04614135671780271,  
0.04614135671780271,0.12594324946340613,0.16944514819433415},PlotJoined->True].



$N = 8$ .

ListPlot[{-0.1311923697456478,-0.11445496413906212,-0.07709430353895455,  
-0.0271322617376926,0.027132261737692617,0.07709430353895455,  
0.11445496413906212,0.1311923697456478},PlotJoined->True].

El polinomio de ajuste para los datos en este caso fue el siguiente

$$-0.00405449x^3 + 0.0425721x^2 - 0.0558875x - 0.152066.$$

De modo que la forma general de mi función de interpolación para los datos dados es:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d. \quad (36)$$

Comparando ambas expresiones se puede observar que  $b \approx -c$ . Tomando esto en consideración (36) toma la forma:

$$f(x) = ax^3 + b(x^2 - x) + d. \quad (37)$$

A partir de la información observada en las gráficas se puede deducir que:

$$f(N) = \frac{1}{N}.$$

$$f(0) = -\frac{1}{N}.$$

$$f\left(\frac{N+1}{2}\right) = 0.$$

Haciendo estas evaluaciones en (37) se tienen las 3 ecuaciones siguientes:

$$aN^3 + b(N^2 - N) + d = \frac{1}{N}. \quad (38)$$

$$d = -\frac{1}{N}. \quad (39)$$

$$a\left(\frac{N+1}{2}\right)^3 + b\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)^2 - \frac{N+1}{2}\right] + d = 0. \quad (40)$$

Sustituyendo el valor para  $d$  dado en la segunda ecuación en las otras dos y resolviendo el sistema resultante para  $a$  y  $b$  se tiene que

$$a = -\frac{4(-1 + N)}{N^2(-1 - 3N - N^2 + N^3)} \quad b = \frac{-2 - 6N - 6N^2 + 6N^3}{N^2(1 + 2N - 2N^2 - 2N^3 + N^4)}.$$

Reemplazando estos resultados en la ecuación (37), llegamos a la forma general de la función de interpolación que aproximara las partes imaginarias de la raíz inicial  $z_0$

$$f(x) = -\frac{4(-1 + N)}{N^2(-1 - 3N - N^2 + N^3)}x^3 + \frac{-2 - 6N - 6N^2 + 6N^3}{N^2(1 + 2N - 2N^2 - 2N^3 + N^4)}(x^2 - x) - \frac{1}{N}. \quad (41)$$

Algunos de los cálculos realizados haciendo uso de las expresiones polinomiales dadas en las ecuaciones (35) y (41), serán mostrados en la sección siguiente.

## 6.2. Gráficos y Tablas de los Ceros de Bessel

A continuación mostramos los ceros de los polinomios de Bessel (con una precisión de 16 dígitos) para los grados:  $N = 10$ ,  $N = 30$ ,  $N = 50$ ,  $N = 70$ ; así como las curvas descritas por éstos. En las siguientes tablas  $z_j = a + ib$ , o bien  $z_j = (a, b)$ .

Cuadro 1: Soluciones para el polinomio de Bessel de grado  $N = 10$ .

$j$	$z_j$	$j$	$z_j$
1	(-0.0401447, 0.106307)	6	(-0.142231, 0.0178284)
2	(-0.0780227, -0.0994)	7	(-0.130783, 0.05163)
3	(-0.108819, -0.0799602)	8	(-0.108819, 0.0799602)
4	(-0.130783, -0.05163)	9	(-0.0780227, 0.0994)
5	(-0.142231, -0.0178284)	10	(-0.0401447, 0.106307)

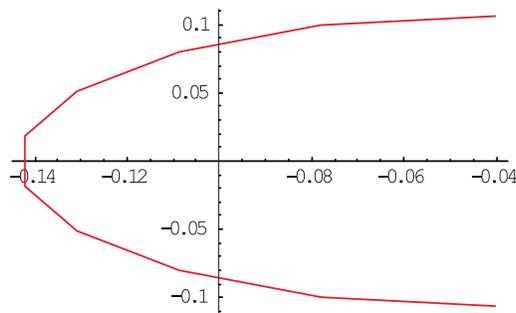


Figura 3: Ceros para el polinomio de Bessel de grado 10.

Cuadro 2: Soluciones para el polinomio de Bessel de grado  $N = 30$ .

$j$	$z_j$	$j$	$z_j$
1	(-0.00610824, -0.0353948)	16	(-0.0494113, 0.0021225)
2	(-0.0115573, -0.0364576)	17	(-0.0489363, 0.00634125)
3	(-0.016487, -0.0365602)	18	(-0.0479912, 0.0104815)
4	(-0.0211018, -0.0359566)	19	(-0.0465851, 0.0144913)
5	(-0.0254409, -0.0347578)	20	(-0.0447318, 0.0183199)
6	(-0.0294993, -0.0330339)	21	(-0.0424491, 0.0219172)
7	(-0.0332564, -0.0308398)	22	(-0.0397588, 0.0252346)
8	(-0.0366856, -0.0282243)	23	(-0.0366856, 0.0282243)
9	(-0.0397588, -0.0252346)	24	(-0.0332564, 0.0308398)
10	(-0.0424491, -0.0219172)	25	(-0.0294993, 0.0330339)
11	(-0.0447318, -0.0183199)	26	(-0.0254409, 0.0347578)
12	(-0.0465851, -0.0144913)	27	(-0.0211018, 0.0359566)
13	(-0.0479912, -0.0104815)	28	(-0.016487, 0.0365602)
14	(-0.0489363, -0.00634125)	29	(-0.0115573, 0.0364576)
15	(-0.0494113, -0.0021225)	30	(-0.00610824, 0.0353948)

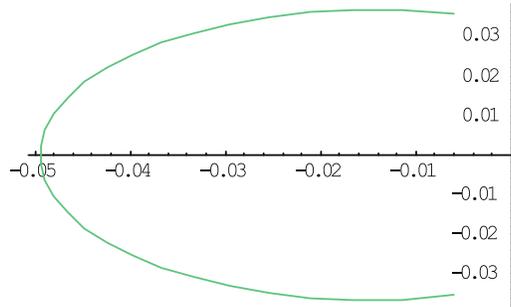


Figura 4: Ceros para el polinomio de Bessel de grado 30.

Cuadro 3: Soluciones para el polinomio de Bessel de grado  $N = 50$ .

$j$	$z_j$	$j$	$z_j$
1	(-0.0025496, -0.0209985)	26	(-0.0298655, 0.000774517)
2	(-0.00473808, -0.0216516)	27	(-0.0297608, 0.00232006)
3	(-0.00669502, -0.0219882)	28	(-0.0295516, 0.00385512)
4	(-0.00853472, -0.0221102)	29	(-0.0292388, 0.00537277)
5	(-0.0102935, -0.0220588)	30	(-0.0288234, 0.00686607)
6	(-0.0119857, -0.0218564)	31	(-0.028307, 0.00832819)
7	(-0.0136165, -0.0215179)	32	(-0.0276915, 0.00975233)
8	(-0.0151869, -0.0210541)	33	(-0.0269789, 0.0111318)
9	(-0.0166959, -0.0204739)	34	(-0.0261718, 0.01246)
10	(-0.0181408, -0.0197847)	35	(-0.025273, 0.0137304)
11	(-0.0195186, -0.0189936)	36	(-0.0242856, 0.0149366)
12	(-0.0208257, -0.0181069)	37	(-0.0232129, 0.0160722)
13	(-0.0220583, -0.0171311)	38	(-0.0220583, 0.0171311)
14	(-0.0232129, -0.0160722)	39	(-0.0208257, 0.0181069)
15	(-0.0242856, -0.0149366)	40	(-0.0195186, 0.0189936)
16	(-0.025273, -0.0137304)	41	(-0.0181408, 0.0197847)
17	(-0.0261718, -0.01246)	42	(-0.0166959, 0.0204739)
18	(-0.0269789, -0.0111318)	43	(-0.0151869, 0.0210541)
19	(-0.0276915, -0.00975233)	44	(-0.0136165, 0.0215179)
20	(-0.028307, -0.00832819)	45	(-0.0119857, 0.0218564)
21	(-0.0288234, -0.00686607)	46	(-0.0102935, 0.0220588)
22	(-0.0292388, -0.00537277)	47	(-0.00853472, 0.0221102)
23	(-0.0295516, -0.00385512)	48	(-0.00669502, 0.0219882)
24	(-0.0297608, -0.00232006)	49	(-0.00473808, 0.0216516)
25	(-0.0298655, -0.000774517)	50	(-0.0025496, 0.0209985)

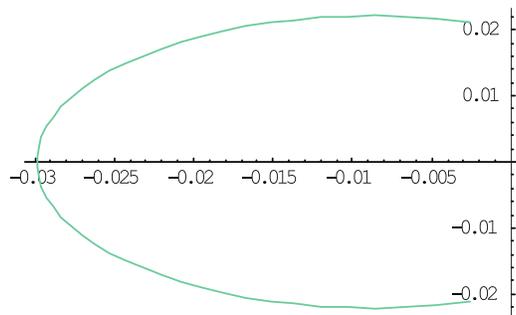


Figura 5: Ceros para el polinomio de Bessel de grado 50.

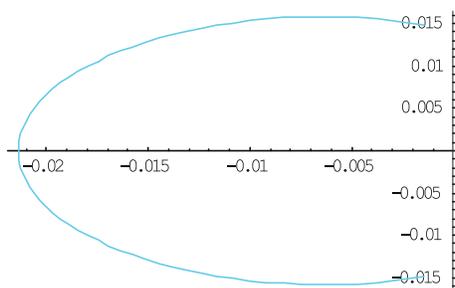


Figura 6: Ceros para el polinomio de Bessel de grado 70.

El siguiente gráfico muestra los ceros de los polinomios de Bessel para los grados:  $N=2, 3, 4, 6, 8, 10, 17, 21, 24, 27, 30, 37, 43, 50, 57, 60, 67$  y  $70$ .

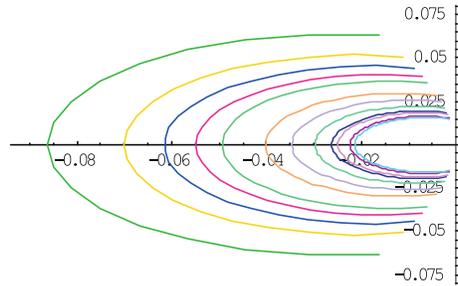


Figura 7: Localización de los ceros para los polinomios de Bessel en el plano complejo.

Como puede observarse, a partir de estos resultados es posible comprobar que los ceros de los polinomios de Bessel se encuentran en la mitad izquierda del plano complejo dentro de una región cardioidal dada por  $r = (1 - \cos \theta)/(n + 1)$ , donde  $n$  representa el grado. Claramente ésta es mejor que la región dada por el semianillo  $r = 2/n + 1$ ; tal como se da a conocer en (ver referencia [8]).

La figura siguiente muestra la curva descrita por los ceros del polinomio de Bessel de grado  $n = 30$ , así como la cardiode y el semianillo correspondientes a este caso particular. La superposición de estos tres gráficos nos permitirá verificar las afirmaciones anteriores para el caso en cuestión.

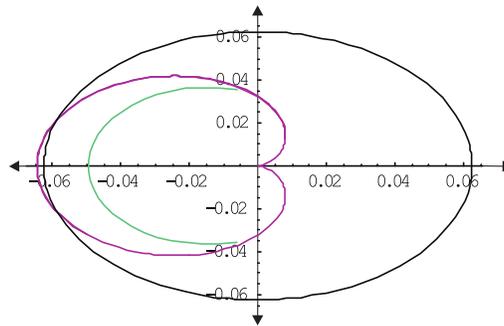


Figura 8: Cardiode dentro de la cual caen los ceros del polinomio de Bessel de grado 30.

Cuadro 4: Soluciones para el polinomio de Bessel de grado  $N = 70$ .

$j$	$z_j$	$j$	$z_j$
1	(-0.00143711, -0.0148894)	36	(-0.0213977, 0.00039745)
2	(-0.00264297, -0.015313)	37	(-0.0213591, 0.00119143)
3	(-0.00370944, -0.0155775)	38	(-0.0212822, 0.00198265)
4	(-0.0047075, -0.0157399)	39	(-0.0211669, 0.00276928)
5	(-0.0056617, -0.0158226)	40	(-0.0210135, 0.00354948)
6	(-0.00658315, -0.0158377)	41	(-0.0208223, 0.00432144)
7	(-0.00747749, -0.0157928)	42	(-0.0205936, 0.00508334)
8	(-0.00834766, -0.015693)	43	(-0.0203279, 0.00583338)
9	(-0.00919508, -0.0155423)	44	(-0.0200256, 0.00656979)
10	(-0.0100203, -0.0153437)	45	(-0.0196874, 0.00729078)
11	(-0.0108233, -0.0151)	46	(-0.0193137, 0.00799461)
12	(-0.0116038, -0.0148133)	47	(-0.0189053, 0.00867953)
13	(-0.0123611, -0.0144858)	48	(-0.0184629, 0.00934384)
14	(-0.0130944, -0.0141192)	49	(-0.0179873, 0.00998582)
15	(-0.0138029, -0.0137153)	50	(-0.0174794, 0.0106038)
16	(-0.0144857, -0.0132759)	51	(-0.0169399, 0.0111961)
17	(-0.0151418, -0.0128027)	52	(-0.0163698, 0.0117611)
18	(-0.0157701, -0.0122972)	53	(-0.0157701, 0.0122972)
19	(-0.0163698, -0.0117611)	54	(-0.0151418, 0.0128027)
20	(-0.0169399, -0.0111961)	55	(-0.0144857, 0.0132759)
21	(-0.0174794, -0.0106038)	56	(-0.0138029, 0.0137153)
22	(-0.0179873, -0.00998582)	57	(-0.0130944, 0.0141192)
23	(-0.0184629, -0.00934384)	58	(-0.0123611, 0.0144858)
24	(-0.0189053, -0.00867953)	59	(-0.0116038, 0.0148133)
25	(-0.0193137, -0.00799461)	60	(-0.0108233, 0.0151)
26	(-0.0196874, -0.00729078)	61	(-0.0100203, 0.0153437)
27	(-0.0200256, -0.00656979)	62	(-0.00919508, 0.0155423)
28	(-0.0203279, -0.00583338)	63	(-0.00834766, 0.015693)
29	(-0.0205936, -0.00508334)	64	(-0.00747749, 0.0157928)
30	(-0.0208223, -0.00432144)	65	(-0.00658315, 0.0158377)
31	(-0.0210135, -0.00354948)	66	(-0.0056617, 0.0158226)
32	(-0.0211669, -0.00276928)	67	(-0.0047075, 0.0157399)
33	(-0.0212822, -0.00198265)	68	(-0.00370944, 0.0155775)
34	(-0.0213591, -0.00119143)	69	(-0.00264297, 0.015313)
35	(-0.0213977, -0.00039745)	70	(-0.00143711, 0.0148894)

## 7. Obtención numérica de los polinomios de Bessel

### 7.1. Descripción del Problema de Eigenvalores asociado a los Polinomios de Bessel

Como ya se mencionó anteriormente los polinomios de Bessel satisfacen una ecuación diferencial lineal de segundo orden de la forma

$$z^2 y_n'' + 2(z+1)y_n'(z) = n(n+1)y_n(z). \quad (42)$$

De acuerdo con (15) y (16) la discretización de este problema diferencial nos conduce al siguiente problema matricial equivalente

$$[Z^2 D^2 + 2(Z+I)D]f_n = \lambda_n f_n. \quad (43)$$

En tal expresión la matriz  $D$  se define como la transformación de similitud dada en (12), esto es

$$D = P\tilde{D}P^{-1}.$$

Mientras que

$$Z^2 = \begin{pmatrix} z_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_N^2 \end{pmatrix}.$$

$$Z + I = \begin{pmatrix} z_1 + 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 + 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_N + 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos así, en (43), un problema de valores propios donde nuestras incógnitas son los valores propios  $\lambda_n$ , así como los vectores propios correspondientes  $f_n$ . Dado que la matriz  $D$  es de diferenciación posee la importante propiedad de dar valores exactos para la derivada de funciones polinomiales; por tanto, los vectores propios obtenidos serán precisamente los polinomios de Bessel, y los valores propios serán de la forma  $n(n+1)$ , donde  $n$  corresponde al grado del polinomio.

Es decir, nuestro objetivo es hacer ver que los  $f_n$  corresponden a los  $y_n(z)$  para  $\lambda_n = n(n+1)$ .

De acuerdo con (19) en forma compacta el problema de valores propios a resolver es

$$Lf = \lambda f. \quad (44)$$

Si  $g = cf$ , donde  $c \in \mathbf{R}$ . Entonces

$$Lg = \lambda g,$$

ya que  $L(cf) = cLf$ .

De modo que a partir de la ecuación (44) podremos obtener los polinomios de Bessel salvo una constante.

Sabemos que  $D = P\widetilde{D}P^{-1}$ . Por tanto  $Df = \lambda f$  se convierte en:

$$P\widetilde{D}P^{-1}f = \lambda f.$$

Multiplicando la expresión anterior por  $P^{-1}$  por la izquierda se tiene que:

$$\widetilde{D}P^{-1}f = \lambda P^{-1}f.$$

Esto es

$$\widetilde{D}g = \lambda g. \quad (45)$$

Donde  $g = P^{-1}f$ , y por tanto

$$f = Pg. \quad (46)$$

De la ecuación (45) podemos observar que los valores propios de la matriz  $\widetilde{D}$  son los mismos que para la matriz  $D$ , no así los vectores propios; sin embargo estos pueden ser obtenidos mediante la ecuación (46).

Tomando esto en consideración, en lugar de usar la matriz  $L = Z^2D^2 + 2(Z + I)D$  para resolver el sistema (43) podemos usar la matriz  $\widetilde{L} = Z^2\widetilde{D}^2 + 2(Z + I)\widetilde{D}$ , pues tendremos así un problema de valores propios equivalente y con la ventaja de que nuestros cálculos serán mucho más precisos, ya que en lugar de usar la transformación de similitud  $P\widetilde{D}P^{-1}$  usaremos únicamente la matriz  $\widetilde{D}$ .

Haciendo uso de Mathematica nos fue posible resolver el problema de valores propios equivalente al dado en (43), esto es

$$[Z^2\widetilde{D}^2 + 2(Z + I)\widetilde{D}]g = \lambda_n g. \quad (47)$$

Para esto se utilizaron como nodos puntos de la forma  $z_k = k + ik$  con  $k \in \mathbf{N}$ . Los cálculos se realizaron para diferentes cantidades de puntos; de acuerdo con el número éstos se construyó un vector auxiliar  $f_{aux}$  mediante la evaluación de un polinomio original de Bessel en tales puntos. Los polinomios de Bessel empleados se dedujeron por medio de la siguiente fórmula:

$$y_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!} \left(\frac{z}{2}\right)^k.$$

De tal forma que si  $N$  representa el número de nodos, el grado  $n$  del polinomio usado para construir  $f_{aux}$  se escogió como  $n = N - 1$ . Cabe destacar que si fijamos el número de nodos y usamos polinomios de Bessel cuyo grado es menor que  $n = N - 1$  también se obtienen resultados correctos, el mismo efecto se tiene si fijamos el grado del polinomio e incrementamos  $N$ ; sin embargo, cuando el número de nodos es menor que el grado del polinomio no se podrá visualizar la solución. La finalidad del uso del vector  $f_{aux}$  fue únicamente para compararlo con el vector  $f$  obtenido a partir de (46), una vez que se ha resuelto (47) para el valor propio  $\lambda_n$  y el vector propio,  $g$ , asociado.

A continuación se muestran algunos de los cálculos efectuados para resolver (47), los cuales buscan mostrar el buen funcionamiento del método.

## 7.2. Solución de Casos Particulares

Cuadro 5: Solución de la ecuación (47) usando  $N = 4$ .

$n$	0	1	2	3
$\lambda_n$	0	2	6	12

De acuerdo con (43),  $\lambda_n = n(n + 1)$ . En este caso  $n = 3$ , de modo que  $\lambda_3 = 12$ , por lo tanto el vector propio  $g$  correspondiente tiene la forma:<sup>(1)</sup>

$$g = (12.74 - 3.79i, -247.85 + 18.97i, 771.89, -584.55 - 22.95i).$$

<sup>(1)</sup> Todas las componentes de  $g$  van multiplicadas por un factor de  $10^{-3}$ .

El polinomio de Bessel utilizado para construir  $f_{aux}$  fue

$$y_3(z) = 15z^3 + 15z^2 + 6z + 1.$$

Una vez obtenido  $f$  mediante (46) se hizo el cociente  $f/f_{aux}$ , encontrándose un vector cuyas 4 componentes son todas igual a  $-0.00318486-0.000517602i$ .

De donde podemos observar que efectivamente nuestro vector propio  $f$  es el polinomio de Bessel evaluado en los puntos, es decir,  $f_{aux}$ , salvo una constante.

Cuadro 6: Solución de la ecuación (47) usando  $N = 8$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\lambda_n$	0	2	6	12	20	30	42	56

En este caso  $n = 7$ , de modo que  $\lambda_7 = 56$ , mientras que el vector propio  $g$  correspondiente es:<sup>(2)</sup>

$$g = (-0.0157 + 0.0066i, 11.73 - 1.92i, -558.63 + 45.76i, 6707.05 - 275.14i, -31214.1 + 512.95i, 66007.2, -63958.4 - 752.38i, 23057 + 475.03i).$$

<sup>(2)</sup> Donde todas las componentes de  $g$  deben ser multiplicadas por un factor de  $10^{-5}$ .

El polinomio de Bessel utilizado fue

$$y_7 = 135135z^7 + 135135z^6 + 62370z^5 + 17325z^4 + 3150z^3 + 378z^2 + 28z + 1.$$

De tal forma que el cociente  $f/f_{aux}$ , fue un vector cuyas 8 componentes son todas igual a  $3.83967 \times 10^{-9} + 3.1865 \times 10^{-10} i$ . Así pues, una vez más se verifica que  $f$  es  $f_{aux}$  salvo una constante.

Cuadro 7: Solución de la ecuación (47) usando  $N = 16$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\lambda_n$	0	2	6	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210	240

En este caso  $n = 15$ , de modo que  $\lambda_{15} = 240$ . Así que el vector propio  $g$  correspondiente es:<sup>(3)</sup>

$$g = (0, 0, 0, -0.00138 + 0.000189i, 0.115 - 0.07034i, -3.83 + 0.171i, 63.72 - 2.09i, -601.86 + 14.42i, 3498.1 - 59.61i, -13142.3 + 151.19i, 32791.2 - 228.65i, -54767.9 + 175.05i, 60457, -42286.3 - 115.87i, 16963.4 + 86.78i, -2971.27 - 21.38i).$$

<sup>(3)</sup> Componentes de  $g$  multiplicadas por un factor de  $10^{-5}$ .

El polinomio de Bessel utilizado fue el de grado 15, cuya forma explícita es

$$y_{15} = 1 + 120z + 7140z^2 + 278460z^3 + 7936110z^4 + 174594420z^5 + 3055402350z^6 + 43212118950z^7 + 496939367925z^8 + 4638100767300z^9 + 34785755754750z^{10} + 205552193096250z^{11} + 924984868933125z^{12} + 2988412653476250z^{13} + 6190283353629375z^{14} + 6190283353629375z^{15}.$$

Dado que en este caso se obtuvieron potencias muy grandes en el vector  $f_{aux}$ , el cociente  $f/f_{aux}$  tuvo que ser multiplicado por la potencia más alta, que fue  $10^{35}$ , para de este modo obtener cifras más razonables. El resultado fue un vector con las tres primeras entradas nulas y las trece restantes igual a  $-5.2729 \times 10^{11} - 2.02635 \times 10^{10}i$ .

Teniéndose una vez más un vector cuyas componentes son una misma constante. Aunque para este caso las tres primeras entradas son nulas porque en el vector propio  $g$  ya aparecían de esta manera.

Para completar nuestro análisis se procedió a obtener una expresión analítica de la forma

$$g(x, y) = g_r(x, y) + ig_i(x, y), \quad (48)$$

para el vector propio resultante. En particular se trató el caso en que  $N = 4$  y  $n = 3$ . Para esto fue necesario realizar un ajuste polinomial de la forma  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , mediante la función *Fit* de Mathematica tanto para la parte real como para la parte imaginaria del vector  $g$  obteniendo así  $g_r(x, y)$  y  $g_i(x, y)$  respectivamente. Los resultados se muestran a continuación:

$$\begin{aligned} g(x, y) = & 1.56072 - 0.919382x + 0.030593x^2 + 0.0472917x^3 - 0.919382y \\ & + 0.030593xy + 0.0472917x^2y + 0.00559217x^3y + 0.030593y^2 \\ & + 0.0472917xy^2 + 0.00559217x^2y^2 - 0.00256561x^3y^2 + 0.0472917y^3 \\ & + 0.0055921xy^3 - 0.00256561x^2y^3 - 0.00180805x^3y^3 + i(-0.0518768 \\ & + 0.0256037x + 0.000480421x^2 - 0.00103029x^3 + 0.0256037y \\ & + 0.000480421xy - 0.00103029x^2y - 0.000178949x^3y + 0.000480421y^2 \\ & - 0.00103029xy^2 - 0.000178949x^2y^2 + 0.0000333069x^3y^2 - 0.00103029y^3 \\ & - 0.000178949xy^3 + 0.0000333069x^2y^3 + 0.000032718x^3y^3). \end{aligned}$$

Puede observarse que en esta expresión aparecen todos los posibles productos de  $x$  y  $y$ . En forma análoga se puede obtener  $g(x, y)$  para polinomios de grados más altos, la única diferencia será que habrá más posibles productos de  $x$  y  $y$ .

Tal como debe ocurrir, se pudo comprobar que al evaluar  $g(x, y)$  en los puntos utilizados como nodos, que en este caso fueron  $1 + i$ ,  $2 + 2i$ ,  $3 + 3i$ ,  $4 + 4i$ ; se obtiene el vector  $g$  que sirve para construir  $f$  mediante 46. Así, haciendo una interpolación para las partes real e imaginaria del vector  $f$  y tomando en cuenta que  $f = cf_{aux}$ , se encontró la forma explícita para el polinomio de Bessel  $y_3(z)$  en términos de  $x$  y  $y$ . La forma final se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} y_3(x, y) = & (-305.906 + 49.7158i)[0.0243558 - 0.0519149x + 0.03852x^2 \\ & + 0.0156569x^3 - 0.0519149y + 0.03852xy + 0.0156569x^2y + 0.00287681x^3y \\ & + 0.03852y^2 + 0.0156569xy^2 + 0.00287681x^2y^2 + 0.000109135x^3y^2 \\ & + 0.0156569y^3 + 0.00287681xy^3 + 0.000109135x^2y^3 - 0.000148701x^3y^3 \\ & + i(0.0181011 - 0.0163508x - 0.0414385x^2 - 0.013209x^3 - 0.0163508y \\ & - 0.0414385xy - 0.013209x^2y - 0.00219422x^3y - 0.0414385y^2 - 0.013209xy^2 \\ & - 0.00219422x^2y^2 - 0.0000438153x^3y^2 - 0.013209y^3 - 0.00219422xy^3 \\ & - 0.0000438153x^2y^3 + 0.000126688x^3y^3)]. \end{aligned}$$

El cual efectivamente, al evaluar en los nodos, da los mismos valores que la función  $y_3(z) = 15z^3 + 15z^2 + 6z + 1$ . Comprobamos así que realmente  $f_3$  corresponde a  $y_3$ , de acuerdo con nuestras predicciones.

## 8. Generalización del problema diferencial de Bessel

### 8.1. Método alternativo a Runge-Kutta-Fehlberg

Como se analizó en la sección anterior, es posible obtener los polinomios de Bessel  $y_0(z), y_1(z), y_2(z) \cdots y_n(z)$  a partir de la ecuación dada en (42), esto es,

$$z^2 y_n'' + 2(z+1)y_n'(z) = n(n+1)y_n(z).$$

Cuya discretización nos conduce al problema de valores propios

$$[Z^2 D^2 + 2(Z+I)D]f_n = \lambda f_n.$$

El problema diferencial de Bessel generalizado se obtiene precisamente cuando usamos  $\lambda \neq n(n+1)$  en tal ecuación, es decir, el problema diferencial a resolver es

$$z^2 y''(z) + 2(z+1)y'(z) = \lambda y(z), \quad (49)$$

donde  $\lambda \neq n(n+1)$ .

Deseamos resolver la ecuación (49) sujeta a las condiciones iniciales:

$$y(a) = y_a, y'(a) = y'_a.$$

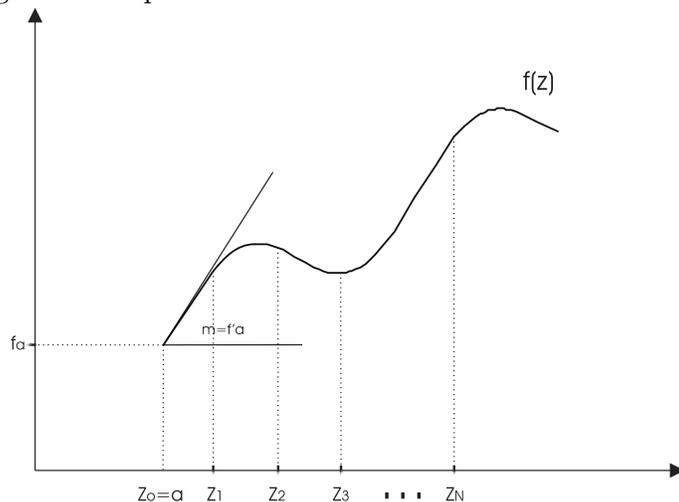
En otras palabras, queremos encontrar una solución  $y(z)$  de la ecuación diferencial en un intervalo  $I$  que contiene a  $a$ , de manera que su gráfica pase no sólo por  $(a, y_a)$  sino que la pendiente de la curva en ese punto sea el número  $y'_a$ .

La forma general de un problema de valores iniciales de segundo orden es la siguiente:

$$\mathbf{L}f(z) = g(z), \quad z > a,$$

$$f(a) = f_a, f'(a) = f'_a.$$

La representación gráfica del problema se muestra a continuación



Para resolver un problema de esta naturaleza es posible hacer uso de un método alternativo a *Runge-Kutta-Fehlberg*, cuyos lineamientos generales se exponen a continuación. Consideréanse  $n + 1$  puntos  $z_0 = a < z_1 < z_2 < \dots < z_N$  y constrúyase la matriz de diferenciación  $D_C$  con los  $n + 1$  puntos. Así, de acuerdo con (13), la componente  $jk$  de  $D_C$  es de la forma:

$$(D_C)_{jk} = \begin{cases} \frac{P_j}{P_k(z_j - z_k)} & j \neq k, \\ \sum_{l=0}^N \frac{1}{z_j - z_l} & j = k. \end{cases} \quad (50)$$

De modo que  $\frac{d}{dx}f = f'$  se discretiza como

$$\begin{aligned} D_{aa}f_a + D_{a1}f_1 + \dots + D_{aN}f_N &= f'_a \\ D_{1a}f_a + D_{11}f_1 + \dots + D_{1N}f_N &= f'_1 \\ D_{2a}f_a + D_{21}f_1 + \dots + D_{2N}f_N &= f'_2 \\ &\vdots \\ D_{Na}f_a + D_{N1}f_1 + \dots + D_{NN}f_N &= f'_N. \end{aligned} \quad (51)$$

Dado que en un problema de valores iniciales de segundo orden  $f_a$  y  $f'_a$  son fijos, sólo nos será necesario obtener los valores  $f_1, f_2, \dots, f_N$  mediante este procedimiento. Así que sólo emplearemos la submatriz principal  $D$  de  $D_C$  formada por

$$\begin{aligned} D_{11}f_1 + \dots + D_{1N}f_N &= f'_1 \\ D_{21}f_1 + \dots + D_{2N}f_N &= f'_2 \\ &\vdots \\ D_{N1}f_1 + \dots + D_{NN}f_N &= f'_N. \end{aligned}$$

En este caso la matriz  $D$  también tiene la forma dada en (12). Lo cual en forma explícita se convierte en

$$D = P \begin{pmatrix} \sum_{l=0}^N \frac{1}{z_1 - z_l} & \frac{1}{z_1 - z_2} & \dots & \frac{1}{z_1 - z_N} \\ \frac{1}{z_2 - z_1} & \sum_{l=0}^N \frac{1}{z_2 - z_l} & \dots & \frac{1}{z_2 - z_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{z_N - z_1} & \frac{1}{z_N - z_2} & \dots & \sum_{l=0}^N \frac{1}{z_N - z_l} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Cabe remarcar que la matriz  $D$  no es una matriz de diferenciación usual, pues los elementos diagonales contienen al término  $\frac{1}{z_j - a}$  en la suma, es decir,

$$D_{jj} = \frac{1}{z_j - a} + \sum_{l=1}^N \frac{1}{z_j - z_l}.$$

En forma compacta la matriz  $D_C$  se puede escribir como sigue

$$D_C = \begin{pmatrix} D_{aa} & \vdots & v_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ d_1 & \vdots & D \end{pmatrix}.$$

Donde  $v_1 = (D_{a1}, D_{a2}, \dots, D_{aN})$  y  $d_1 = (D_{1a} \ D_{2a} \ \dots \ D_{Na})^t$ .

De modo que si denotamos al vector  $(f(z_1) \ f(z_2) \ \dots \ f(z_N))^t = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N)^t$  como  $f$  y a  $(f^k(z_1) \ f^k(z_2) \ \dots \ f^k(z_N))^t$  como  $f^k$  de (51) se tiene que

$$f' = Df + f_a d_1. \quad (52)$$

Para considerar el Problema de Valores Iniciales de orden mayor, sustituimos  $f$  por  $f'$  en (52). Así

$$f'' = Df' + f'_a d_1 = D^2 f + f_a (Dd_1) + f'_a d_1.$$

o bien

$$f'' = D^2 f + f_a d_2 + f'_a d_1. \quad (53)$$

Donde  $d_2 = Dd_1$ .

Así que un Problema de Valores Iniciales de segundo orden lineal (por ejemplo)

$$f'' + a_1(z)f'(z) + a_0(z)f(z) = F(z),$$

Con  $z > a$ ,  $f(a) = f_a$ ,  $f'(a) = f'_a$ . Se discretiza en la forma

$$(D^2 + A_1 D + A_0)f = F - f_a d_2 - f'_a d_1 - f_a d_1. \quad (54)$$

Haciendo uso de (52) y (53).

El Problema de Valores Iniciales puede resolverse para  $z$ 's "grandes" haciendo una subdivisión del intervalo  $(a, z)$  en muchos subintervalos pequeños y empleando en forma recursiva el método.

Haciendo uso de Mathematica fue posible desarrollar un algoritmo numérico en base a este método, el cual permitió tratar diferentes Problemas de Valores Iniciales de segundo orden en el plano complejo. Nuestro objetivo central fue justamente el tener un método numérico que proporcione la solución de la ecuación (49) para un conjunto de puntos dados.

Uno de los aspectos más importantes en la aplicación del programa fue la variación de algunos parámetros tales como el número de puntos, denotado por  $n$ ; el número de intervalos,  $nint$ ; las condiciones iniciales,  $y_a, y_{pa}$ ; así como los extremos del intervalo inicial,  $A_{in}$  y  $B_{in}$ , pues con esto se determinó la trayectoria más sencilla sobre la cual tomar los puntos que permitirán construir la matriz de diferenciación de utilidad para encontrar la solución  $y(z)$  del problema de valores iniciales planteado en cada caso. Obteniendo con esto

una especie de “Diferenciación de línea”, es decir, se encontró la derivada de la función en cuestión por un camino determinado. Por simplicidad tal trayectoria se construyó partiendo de un punto y cambiando de manera equidistante parte real e imaginaria de los puntos en el plano complejo, formando así, intervalos de discretización. Cabe señalar pues, que las trayectorias aquí empleadas son sólo ejemplos y bien pudieran haberse elegido otras.

Para comprobar que el algoritmo proporcionaba resultados correctos fue necesario emplearlo en problemas cuya solución analítica es ya conocida, para de este modo tener una *yexac* que sirviera como referencia para comparar con la *ysol* dada por el programa. Una vez que se comprobó la precisión de los resultados se procedió a tratar el problema objetivo, es decir, el Problema Generalizado de Bessel dado por (49). Los problemas prueba que se analizaron fueron los del oscilador armónico y el problema diferencial de Bessel descrito por la ecuación (42); para lo cual fue necesario establecer la discretización adecuada a cada caso.

A continuación se expone la forma en que se aplicó el programa a cada uno de estos problemas, así como los resultados numéricos y gráficos obtenidos para cada uno ellos; los cuales nos permiten sustentar la confiabilidad de la solución numérica obtenida para la ecuación (49), cuya solución analítica es desconocida.

## 8.2. Ejemplos de Aplicación

### 1. Oscilador armónico simple en el plano complejo.

Nuestro problema de Valores Iniciales consiste en resolver la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y''(z) + \lambda^2 y(z) = 0,$$

sujeta a las condiciones iniciales  $y(0 + \frac{i}{\lambda}) = 1$ ,  $y'(0 + \frac{i}{\lambda}) = 0$ .

La solución analítica tiene la forma

$$y(z) = \frac{e}{2} e^{i\lambda z} + \frac{1}{2e} e^{-i\lambda z}.$$

Mientras que la discretización asociada es

$$(D^2 + \lambda^2 I_{n \times n})y = 0.$$

Cálculos efectuados:

En el Apéndice 1 se muestra el código hecho en Mathematica para llevar a cabo los cálculos. A continuación se presentan los resultados gráficos encontrados mediante la aplicación del mismo.

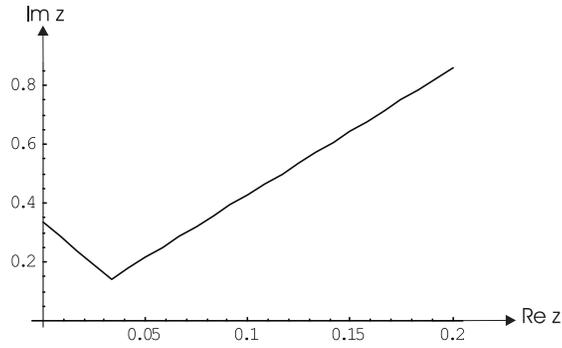


Figura 9: Trayectoria empleada para encontrar  $ysol$  del Oscilador armónico.

El siguiente gráfico muestra las curvas para la parte real e imaginaria de la solución numérica obtenida, la cual se denotó por  $ysol$ .

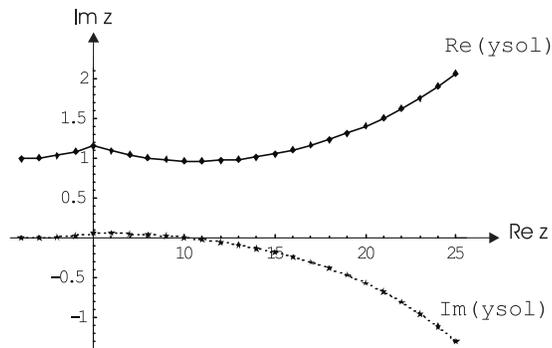


Figura 10: Partes real e imaginaria de  $ysol$  para el Oscilador armónico

Tomando  $\lambda = 3$  se construyó  $yexac$  como

$$yexac = \frac{e}{2}Exp[3Ix] + \frac{1}{2e}Exp[-3Ix].$$

Con el fin de hacer una comparación gráfica de  $ysol$  y  $yexac$ , esta última también se tuvo que separar en su parte real e imaginaria. La siguiente figura muestra la representación obtenida.

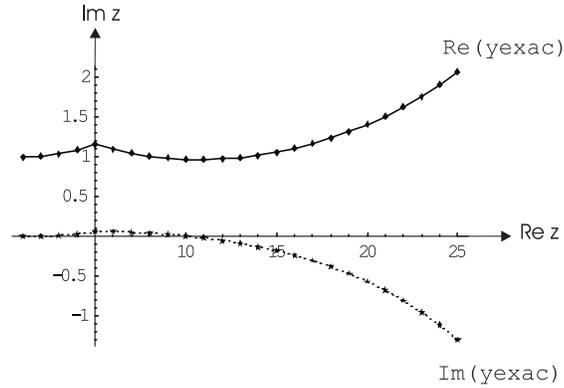


Figura 11: Partes real e imaginaria de  $y_{exact}$  para el Oscilador armónico

Con el fin de tener un parámetro más tangible de la exactitud de  $y_{sol}$  con respecto a  $y_{exact}$ , fue conveniente encontrar la norma de la diferencia de la parte real e imaginaria de ambas, denotadas por  $\delta_r$  y  $\delta_i$  respectivamente, obteniéndose los siguientes resultados:

$\delta_r$	$\delta_i$
0.000103522	0.000162333

Como podemos apreciar, el resultado obtenido es de alta precisión. A pesar de que no es exactamente cero es un buen resultado si tomamos en cuenta la naturaleza exponencial de la solución.

Sin embargo, para comprobar la eficacia del método se aplicó también al problema diferencial de Bessel, en el cual se tuvo un resultado exacto, como se muestra a continuación.

## 2. Problema diferencial de Bessel (PDB).

La ecuación diferencial en este caso es de la forma

$$z^2 y_n'' + 2(z+1)y_n'(z) = n(n+1)y_n(z),$$

la cual debe satisfacer las condiciones iniciales  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 3$ .

La solución analítica particular de nuestro interés fue

$$y(z) = 3z^2 + 3z + 1.$$

En forma discreta nuestro problema adopta la siguiente forma

$$[Z^2 D^2 + 2(Z+I)D]f_n = \lambda_n f_n.$$

Cálculos efectuados:

El código empleado en este caso fue prácticamente el mismo que el usado anteriormente, salvo algunos cambios que se mencionan en el apéndice. Los resultados gráficos se muestran enseguida.

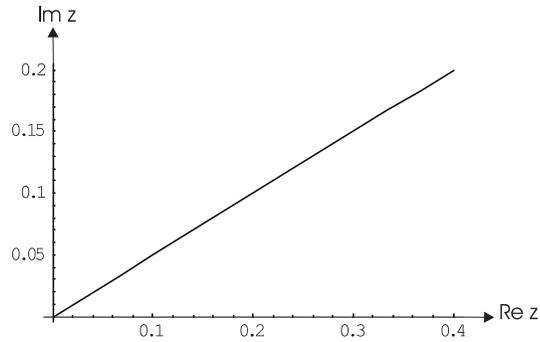


Figura 12: Trayectoria empleada para encontrar  $ysol$  del PDB.

Una vez hecha la separación de  $ysol$  y  $yexac$  en sus partes real e imaginaria, se hizo la representación gráfica respectiva, obteniéndose lo siguiente:

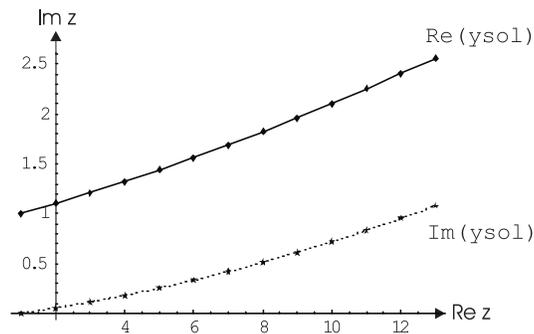


Figura 13: Partes real e imaginaria de  $ysol$  para el PDB.

Mientras que para  $y_{exac}$  se tiene el siguiente gráfico

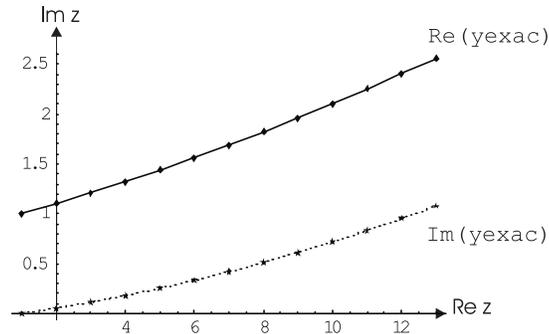


Figura 14: Partes real e imaginaria de  $y_{exac}$  para el PDB.

En este caso los resultados para la norma fueron:

$\delta_r$	$\delta_i$
0.	0.

Como podemos apreciar, el resultado es exacto en este caso; con lo cual comprobamos la efectividad del Algoritmo. Una vez hecho esto se procedió a resolver el problema de interés, es decir el Problema Generalizado de Bessel. A continuación se muestran sólo algunos de los resultados obtenidos:

### 3. Problema diferencial de Bessel Generalizado (PDBG).

#### Caso 1.

El problema de Valores Iniciales consiste en resolver

$$z^2 f''(z) + 2(z + 1)f'(z) = \lambda f(z),$$

bajo las condiciones iniciales  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ .

Cabe destacar que en este caso la solución analítica es desconocida.

Mientras que el problema discreto equivalente se traduce a

$$[Z^2 D^2 + 2(Z + I)D]f = \lambda f.$$

Cálculos efectuados:

Los cambios hechos en los parámetros a utilizar en el programa así como la discretización definida en Mathematica pueden ser consultados en el apéndice. Los graficos correspondientes fueron:

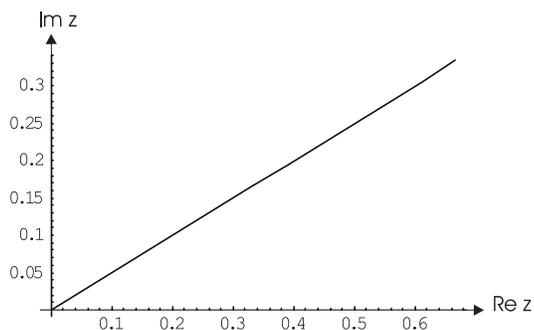


Figura 15: Trayectoria empleada para encontrar  $y_{sol}$  del PDBG.

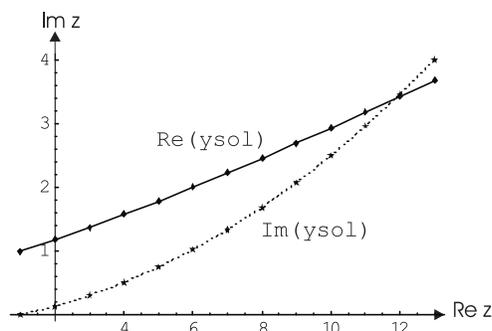


Figura 16: Partes real e imaginaria de  $y_{sol}$  para PDBG.

*Caso 2.*

Nuestro problema de Valores Iniciales está definido por

$$z^2 f''(z) + 2(z + 1)f'(z) = \lambda f(z),$$

con  $f(1/4 + I/2) = 7$ ,  $f'(1/4 + I/2) = 2$ .

Cuya solución analítica es también desconocida.

El problema matricial equivalente se define en la forma

$$[Z^2 D^2 + 2(Z + I)D]f = \lambda f.$$

Cálculos efectuados:

Ver apéndice para consultar parámetros utilizados y la discretización definida en Mathematica. Los resultados fueron:

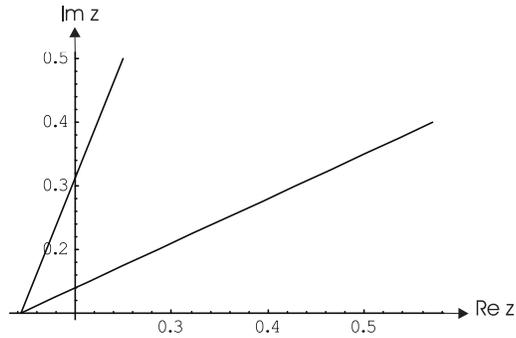


Figura 17: Trayectoria empleada para encontrar  $y_{sol}$  del PDBG.

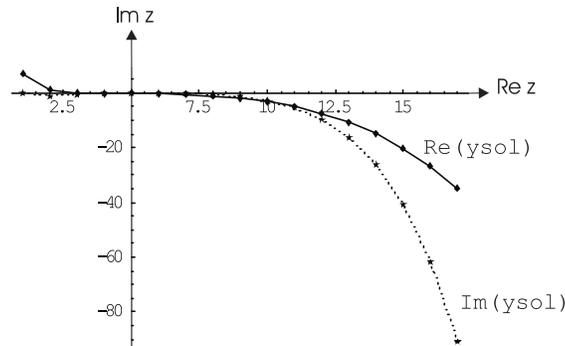


Figura 18: Partes real e imaginaria de  $y_{sol}$  para PDBG.

Evidentemente en ambos casos no tenemos una  $y_{exact}$  con la cual comparar; sin embargo, en base a las pruebas previas se puede sustentar la confiabilidad en el método.

La estabilidad de un algoritmo se determina en relación con lo que se conoce como número de condición, un número de condición pequeño implica que números pequeños en la entrada se mantienen como números pequeños en la salida; sin embargo, el análisis detallado de este parámetro para los códigos aquí empleados está fuera de nuestros propósitos y se deja para un trabajo futuro de mayor profundidad. Por este motivo, en los ejemplos anteriores lo único que hicimos para conocer el error fue medirlo en cuanto a problemas de solución conocida para poder comparar.

## 9. Conclusiones

- El uso de Matrices de Diferenciación proporciona un método eficaz en la discretización de problemas diferenciales cuya solución en forma directa sería difícil de abordar; ya que en lugar de tener un problema diferencial tendremos un problema matricial que suele ser relativamente más sencillo de tratar en forma numérica.
- La estructura de las Matrices de Diferenciación Algebraicas Complejas es análoga a la obtenida en el caso real, y por tanto actúan también de manera similar; permitiendo así la discretización de problemas diferenciales cuyas soluciones son polinomios o funciones aproximables a éstos.
- La condición para los nodos en el caso complejo se convierte en

$$\sum_{l \neq k} \frac{1}{z_k - z_l} + \frac{1}{2} a_1(z_k) = 0,$$

la cual, al ser aplicada al caso particular del problema diferencial de los polinomios de Bessel conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales cuyas soluciones numéricas serían precisamente los ceros de tales polinomios.

- Los resultados obtenidos en el capítulo 6, muestran que efectivamente los ceros de los polinomios de Bessel caen estrictamente en la mitad izquierda del plano complejo dentro de una cardiode de la forma  $r = (1 - \cos \theta)/(n + 1)$ . Verificando así las observaciones hechas por otros autores (ver referencia [8]).
- La solución numérica del problema de eigenvalores asociado a los polinomios de Bessel produce valores propios de la forma  $\lambda_n = n(n + 1)$  con  $n \in \mathbf{N}$ ; mientras que la expresión analítica para los vectores propios obtenidos evaluada en los nodos da los mismos valores que el polinomio original de Bessel correspondiente, tal como pudo comprobarse con el polinomio de grado 3.
- Haciendo uso de valores propios  $\lambda_n \neq n(n + 1)$  es posible generalizar el problema diferencial de Bessel, obteniéndose así un medio para tratar problemas diferenciales de segundo orden con valores iniciales análogos, pero cuya solución puede ser distinta de un polinomio.

## 10. APÉNDICE 1

En el presente apéndice se muestra cada uno de los programas elaborados en Mathematica utilizados para hacer los cálculos, cuyos resultados se han mostrado en este trabajo.

1. Programa que permitió encontrar los ceros de los polinomios de Bessel (tema tratado en la sección 6).

(\*\*\*\*\* OK! \*\*\*\*\*)  
 (\* Este paquete calcula los nodos  $(x_k, y_k)$  que satisfacen el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} \text{Sum}(x_j - x_k)/|z_j - z_k|^2 + \text{Re}[a1(z_j)/2] &= 0, & j, k = 1, 2, \dots, N \\ -\text{Sum}(y_j - y_k)/|z_j - z_k|^2 + \text{Im}[a1(z_j)/2] &= 0, & j, k = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

donde  $a1(z)$  es el coeficiente de la primera derivada en la EDO de los polinomios de Bessel. La PRECISION ARBITRARIA se incluye en todos los cálculos \*)  
 (\*\*\*\*\*)

```
BeginPackage["Zgam"]
Zxy::usage="Zxy[XY0, Nx, Ny, prec] calcula los Nx + Ny nodos en el plano complejo cuando
```

---


$$\begin{aligned} a1(z) &= 2(z + 1)/z^2, \\ \text{Re}[a1(z)/2] &= (x^2 + x^3 - y^2 + x * y^2)/(x^2 + y^2)^2, \\ \text{Im}[a1(z)/2] &= -y * (2x + x^2 + y^2)/(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$


---

XY0 y XYf son vectores reales de dimensión  $Nx + Ny$  (en este caso  $Nx = Ny$ ). Las primeras  $Nx$  componentes corresponden a las partes reales y las siguientes  $Ny$  componentes son las partes imaginarias.”

XJ2::noconv= “Convergencia lenta. ITER > 20... Saliendo del cálculo de raíces...”  
 Lin::Singular= “\*\*\* ERROR: Matriz singular o muy mal condicionada \*\*\*”

```
Begin["Private"]
Zxy[XY0_, Nx_, Ny_, prec_] :=
Module[{XYf = N[XY0, prec, epsi = 10-13, gm, gv, gv1, gv2, m = 0, xdif, dxab = 0.5, dxabv = 0.5},
```

```

While[N[dxab] > epsi,
m = m + 1;
x = Take[XYf, Nx]; y = Take[XYf, -Ny];
gv1 = Table[
Sum[N[(x[[j]] - x[[k]])/((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2), prec + 5], k, j - 1] +
Sum[N[(x[[j]] - x[[k]])/((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2), prec + 5], k, j + 1, Nx] +
N[(x[[j]]2 + x[[j]]3 - y[[j]]2 + x[[j]] * y[[j]]2)/(x[[j]]2 + y[[j]]2)2, prec + 5], j, Nx];
gv2 = Table[
- Sum[N[(y[[j]] - y[[k]])/((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2), prec + 5], k, j - 1] -
Sum[N[(y[[j]] - y[[k]])/((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2), prec + 5], k, j + 1, Ny] -
N[(y[[j]] * (2 * x[[j]] + x[[j]]2 + y[[j]]2))/(x[[j]]2 + y[[j]]2)2, prec + 5], j, Ny];
gv = Join[gv1, gv2];
gm = NJacGam[XYf, Nx, Ny, prec];
xdif = SistLin[gm, gv, prec];
dxab = N[Max[Abs[xdif]], prec]; If[m == 1, dxabv = dxab];
If[Sign[dxabv - dxab] >= 0, dxabv = dxab, , Put[dxab, XYf, "XYf.txt"];
Print["Valor de diferencia creciente!"]; Abort[]];
XYf = XYf - xdif;
Put[dxab, XYf, "XYf.txt"];
If[m == 200, Message[XJ2 :: noconv]; Break[]];
XYf
] NJacGam[xin_, Nx_, Ny_, prec_] :=
Module[nxy, x, y, Jac, Jac11, Jac12, Jac21, Jac22, dm, dmd, dgz,
nxy = Nx + Ny; x = Take[xin, Nx]; y = Take[xin, -Ny];
Jac = Table[0, j, nxy, k, nxy];
(* — Jacobiano, bloque 11 — *)
dm = Table[0, j, Nx, k, Nx]; Jac11 = dm;
For[j = 1, j <= Nx, j ++,
For[k = 1, k <= Nx, k ++,
If[j! = k, dm[[j, k]] = N[((x[[j]] - x[[k]])2 - (y[[j]] - y[[k]])2)/
((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2)2, prec + 5];];
];
];
dmd = -N[Apply[Plus, dm, 1], prec + 5];
(* dgz: termino diagonal debido a a1(z)/2 *)
dgz = Table[N[(-2 * x[[j]]3 - x[[j]]4 + 6 * x[[j]] * y[[j]]2 + y[[j]]4)/
(x[[j]]2 + y[[j]]2)3, prec + 5], j, Nx];
Jac11 = dm + DiagonalMatrix[dmd + dgz];
(* — Jacobiano, bloque 12 — *)
dm = Table[0, j, Nx, k, Nx]; Jac12 = dm;
For[j = 1, j <= Nx, j ++,
For[k = 1, k <= Nx, k ++,
If[j! = k, dm[[j, k]] = N[2 * (x[[j]] - x[[k]]) * (y[[j]] - y[[k]])/

```

```

((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2, prec + 5];
];
];
dmd = -N[Apply[Plus, dm, 1], prec + 5];
(* dgz: termino diagonal debido a a1(z)/2 *)
dgz = Table[N[(-2 * y[[j]] * (3 * x[[j]]2 + x[[j]]3 - y[[j]]2 + x[[j]] * y[[j]]2)/
(x[[j]]2 + y[[j]]2)3, prec + 5], j, Nx];
Jac12 = dm + DiagonalMatrix[dmd + dgz];
(* — Jacobiano, bloque 21 — *)
dm = Table[0, j, Nx, k, Nx]; Jac21 = dm;
For[j = 1, j <= Nx, j ++,
For[k = 1, k <= Nx, k ++,
If[j! = k, dm[[j, k]] = N[-2 * (x[[j]] - x[[k]]) * (y[[j]] - y[[k]])/
((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2, prec + 5];
];
];
dmd = -N[Apply[Plus, dm, 1], prec + 5];
(* dgz: termino diagonal debido a a1(z)/2 *)
dgz = Table[N[(2 * y[[j]] * (3 * x[[j]]2 + x[[j]]3 - y[[j]]2 + x[[j]] * y[[j]]2)/
(x[[j]]2 + y[[j]]2)3, prec + 5], j, Nx];
Jac21 = dm + DiagonalMatrix[dmd + dgz];
(* — Jacobiano, bloque 22 — *)
dm = Table[0, j, Nx, k, Nx]; Jac22 = dm;
For[j = 1, j <= Nx, j ++,
For[k = 1, k <= Nx, k ++,
If[j! = k, dm[[j, k]] = N[((x[[j]] - x[[k]])2 - (y[[j]] - y[[k]])2)/
((x[[j]] - x[[k]])2 + (y[[j]] - y[[k]])2, prec + 5];
];
];
dmd = -N[Apply[Plus, dm, 1], prec + 5];
(* dgz: termino diagonal debido a a1(z)/2 *)
dgz = Table[N[(-2 * x[[j]]3 - x[[j]]4 + 6 * x[[j]] * y[[j]]2 + y[[j]]4)/
(x[[j]]2 + y[[j]]2)3, prec + 5], j, Nx];
Jac22 = dm + DiagonalMatrix[dmd + dgz];
(* Jac = BlockMatrix[Jac11, Jac12, Jac21, Jac22]; Print[Jac]; Jac; *)
For[j = 1, j <= Nx, j ++,
For[k = 1, k <= Nx, k ++,
Jac[[j, k]] = Jac11[[j, k]]; Jac[[j, k + Ny]] = Jac12[[j, k]];
Jac[[Nx + j, k]] = Jac21[[j, k]]; Jac[[Nx + j, k + Ny]] =
Jac22[[j, k]];
];
];
(* Print[MatrixForm[Jac]]; *)

```

```

Jac ]
SumDir[A_, B_, prec_] :=
(* Esta rutina calcula la suma directa de las matrices A y B *)
Module[ca,ra,cb,rb,sup,inf,sd,j,k,
ra = Length[A]; ca = Length[A[[1]]];
rb = Length[B]; cb = Length[B[[1]]];
sup = Table[0, j, ra, k, cb]; inf = Table[0, j, rb, k, ca];
sd = Table[0, j, ra + rb, k, ca + cb];
For[j = 1, j < ra + 1, j ++, sd[[j]] = Join[A[[j]], sup[[j]]]; ];
For[j = 1, j < rb + 1, j ++, sd[[ra + j]] = Join[inf[[j]], B[[j]]]; ];
SetPrecision[sd, prec]
]
PT[nr_, nt_] := (* Esta la matriz de permutación que convierte la forma de  $D_x$  en  $D_y$  *)
(* Para esto se debe hacer  $D_y = PT.(D_x).Transpose[PT]$  *)
Module[n = nr, m = nt, u, i, j, k, q,
u = IdentityMatrix[mn]; q = Table[0, i, m * n, j, m * n];
For[i = 1, i < n * m + 1, i ++,
q[[i]] = Flatten[Table[Table[u[[i, j]], j, k, m * n, m], k, 1, m]];
q
]
SistLin[mat_, fxp_, prec0_] :=
Module[fx = SetPrecision[fxp, prec0], jac = SetPrecision[mat, prec0],
tol = 10(-prec0 - 5), ndim, nren, per, prec = prec0 + 5,
jam, sma, ip, ncp, prov,
ndim = Length[fx];
nren = Table[i, i, ndim];
For[i = 1, i <= ndim - 1, i ++,
(jam = SetPrecision[Abs[jac[[nren[[i]], i]], prec];
ip = i;
For[j = i + 1, j <= ndim, j ++, (
If[jam <= N[Abs[jac[[nren[[j]], i]], prec],
(jam = N[Abs[jac[[nren[[j]], i]], prec]; ip = j)];
)];
If[jam <= tol, Message[Lin :: Singular]; Break[]];
If[ip! = i, (ncp = nren[[i]]; nren = ReplacePart[nren, nren[[ip]], i];
nren = ReplacePart[nren, ncp, ip];)];
For[j = i + 1, j <= ndim, j ++, (
prov = SetPrecision[jac[[nren[[j]], i]]/jac[[nren[[i]], i], prec];
jac = ReplacePart[jac, prov, nren[[j]], i];
For[k = i + 1, k <= ndim, k ++, (
prov = SetPrecision[jac[[nren[[j]], k]] - jac[[nren[[j]], i]]*
jac[[nren[[i]], k]], prec];
jac = ReplacePart[jac, prov, nren[[j]], k];)];

```

```

prov = SetPrecision[fx[[nren[[j]]]] - jac[[nren[[j]], i]]*
fx[[nren[[i]]], prec];
fx = ReplacePart[fx, prov, nren[[j]]];
)];
)];
prov = Abs[SetPrecision[jac[[nren[[ndim]], ndim]], prec]];
If[prov <= tol, Message[Lin :: Singular]; Break[]];
prov = SetPrecision[fx[[nren[[ndim]]]]/jac[[nren[[ndim]], ndim]], prec];
fx = ReplacePart[fx, prov, nren[[ndim]]];
For[i = ndim - 1, i >= 1, i --, (
For[sma = 0; j = i + 1, j <= ndim, j ++, (
prov = SetPrecision[jac[[nren[[i]], j]] * fx[[nren[[j]]], prec];
sma = SetPrecision[sma + prov, prec];)];
prov = SetPrecision[(fx[[nren[[i]]]] - sma)/jac[[nren[[i]], i], prec];
fx = ReplacePart[fx, prov, nren[[i]]];
)];
per = Table[0, i, ndim, j, ndim];
Do[per = ReplacePart[per, 1, i, nren[[i]], i, ndim];
N[per.fx, prec]
]
End[ ]
EndPackage[ ]

```

2. Programa base empleado para generalizar el problema diferencial de Bessel (ver problema 1 de la sección 8).

```

>>Graphics'MultipleListPlot'
D1Mat[xjg_List, prec_Integer] :=
Module[{dm, dms, n, nx = N[xjg, prec], pm},
n = Length[xjg];
(*dm = Table[N[(nx[[i]] - nx[[j]])], prec], {i, n}, {j, n}; Table[dm[[k, k]] =
1, {k, n}]; *)
dm = Table[(Rationalize[nx[[i]]] - Rationalize[nx[[j]]]), {i,
n}, {j, n}; Table[dm[[k, k]] = 1, {k, n}];
pm = SetPrecision[Apply[Times, dm, {1}], prec];
dm = N[1/dm, prec]; Table[dm[[k, k]] = 0, {k, n}];
dms = SetPrecision[Apply[Plus, dm, {1}], prec];
N[DiagonalMatrix[pm].(dm + DiagonalMatrix[dms]).DiagonalMatrix[
1/pm], prec]

```

]

```
lam = 3; n = 4; nint = 6; ya = 1; ypa = 0; Ain = 0 + I/3; Bin = 1/30 + I/7;  
delx = Bin; np = n + 1; x = {Ain}; ysol = {ya};
```

```
For[k = 1, k < nint, k ++,
```

```
  yin = Table[Ain + (Bin - Ain) * jl/(np - 1), {jl, 0, np - 1}]; xin = Rest[yin];
```

```
  dc = D1Mat[yin, 16]; Dm = dc[[Range[2, np], Range[2, np]]];
```

```
  d1 = dc[[Range[2, np], 1]]; d2 = Dm.d1;
```

(\*En esta parte definimos la discretización asociada al problema diferencial.\*)

```
A2 = IdentityMatrix[n]; A1 = Table[0, {j, n}, {k, n}]; A0 =  $\lambda^2$  * IdentityMatrix[n];
```

```
MBess = A2.Dm.Dm + A1.Dm + A0;
```

```
bm = -A2.(ya * d2 + ypa * d1) - ya * A1.d1; ypas = LinearSolve[MBess, bm];
```

```
ysol = Join[ysol, ypas]; x = Join[x, xin];
```

```
Ain = Bin; Bin = Bin + delx; ypa = dc[[np, Range[1, np]]].Join[{ya}, ypas];
```

```
ya = ypas[[n]];
```

```
]; ztra = Table[{Re[x[[k]], Im[x[[k]]]}, {k, Length[x]}];
```

```
MultipleListPlot[{Re[ysol], Im[ysol]}, PlotJoined -> True, PlotRange -> All]
```

3. Cambios efectuados en el programa 2 para resolver el PDB (ver problema 2 de la sección 8).

Ahora los parámetros fueron:  $n = 3$ ;  $nint = 4$ ;  $ya = 1$ ;  $ypa = 3$ ;  $Ain = 0$ ;  $Bin = 1/10 + I/20$ ;  $delx = Bin$ ;  $ngr = 2$ ;

Donde  $ngr$  es el grado del polinomio que se utilizará como  $y_{exac}$ . La discretización definida en Mathematica fue:

```
A2 = DiagonalMatrix[xin * xin]; A1 = DiagonalMatrix[2 * (xin + 1)]; A0 = ngr * (ngr + 1) * IdentityMatrix[n];
```

```
MBess = A2.Dm.Dm + A1.Dm - A0;
```

4. Cambios efectuados en el programa 2 para resolver el PDBG (caso1) [ver problema 3 de la sección 8].

Parámetros utilizados:  $lam = 7 + I$ ;  $n = 3$ ;  $nint = 4$ ;  $ya = 1$ ;  $ypa = 0$ ;  $Ain = 0$ ;  $Bin = 1/6 + I/12$ ;

Discretización definida en Mathematica:

```
A2 = DiagonalMatrix[xin * xin]; A1 = DiagonalMatrix[2 * (xin + 1)]; A0 = lam * IdentityMatrix[n];
```

```
MBess = A2.Dm.Dm + A1.Dm - A0;
```

5. Cambios efectuados en el programa 2 para resolver el PDBG (caso2).

Parámetros utilizados:  $lam = 54$ ;  $n = 4$ ;  $nint = 4$ ;  $ya = 7$ ;  $ypa = 2$ ;  $Ain = 1/4 + I/2$ ;  $Bin = 1/7 + I/10$ ;

La discretización definida en Mathematica fue:

$A2 = DiagonalMatrix[xin * xin]$ ;  $A1 = DiagonalMatrix[2 * (xin + 1)]$ ;  $A0 = lam * IdentityMatrix[n]$ ;  
 $MBess = A2.Dm.Dm + A1.Dm - A0$ ;

## 11. APÉNDICE 2

A continuación se muestra como surgen los polinomios de Bessel en la teoría de ondas esféricas viajeras (ver referencia [9]).

La ecuación de onda

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

en coordenadas esféricas  $R, \theta, \phi, t$  toma la forma:

$$\frac{1}{R^2} \left[ R \frac{\partial^2}{\partial R^2} (Ru) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Si ésta se resuelve por separación de variables, se encuentra que el factor radial  $f(R)$  satisface la ecuación diferencial:

$$R^2 \frac{d^2 f}{dR^2} + 2R \frac{df}{dR} + k^2 R^2 f = n(n+1)f, \quad (55)$$

donde  $kc = \omega$  y  $e^{i\omega t}$  es el factor temporal.

Si hacemos  $r = kR$  y utilizamos la regla de la cadena, la ecuación (55) se convierte en:

$$r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + 2r \frac{df}{dr} + r^2 f = n(n+1)f. \quad (56)$$

La forma más simple de tratar la ecuación (56) consiste en hacer la substitución  $f(r) = \omega(r)/r$ , lo cual nos conduce a la ecuación:

$$r^2(\omega'' + \omega) = n(n+1)\omega. \quad (57)$$

Las soluciones reales de la ecuación de onda encontradas por separación de variables, representan ondas estacionarias. Dos o más de tales soluciones se pueden combinar para obtener ondas viajeras. Hay, sin embargo, un método estándar de obtener ondas viajeras directamente. Éste consiste en introducir la variable imaginaria pura  $z = ikR = ir$ . De tal forma que las partes real e imaginaria de una solución particular de la ecuación de onda representa ondas viajeras. Si hacemos  $z = ir = ikR$  y  $\omega(r) = \exp^{-z} y(z) = \exp^{-ir} y(ir)$  en (57), entonces se tiene que:

$$z^2 \left( \frac{d^2 y}{dz^2} - 2 \frac{dy}{dz} \right) = n(n+1)y. \quad (58)$$

Para valores esenciales de  $n$ , la ecuación (58) tiene soluciones polinomiales de la variable  $1/z$ . Por tanto, al hacer la substitución final  $x = 1/z = 1/ikR$ , se obtiene:

$$x^2 y'' + (2x+2)y' = n(n+1)y.$$

Esta es la ecuación para los polinomios de Bessel. De aquí se deduce que la ecuación de onda en coordenadas esféricas tenga soluciones de la forma:

$$u(R, \theta, \phi, t) = R^{-1} P_n^m(\cos \theta) \sin(m\phi - \alpha) e^{i(\omega t - kR)} y_n(1/ikR), \quad (59)$$

donde  $y_n(x) = y_n(1/ikR)$  es un polinomio de Bessel, y  $kc = \omega$ . Nótese que las partes real e imaginaria de (59) representan ondas viajeras en la dirección radial con velocidad  $c$ . La ecuación (59) hace evidente la naturaleza elemental de este tipo de solución, y sugiere un tratamiento de ondas esféricas basado en una teoría de funciones  $y_n(x)$  considerada como una clase de polinomios ortogonales, mejor que en la teoría usual de funciones de Bessel.

## Referencias

- [1] Burchnall, J.L., The Bessel polynomials, Canadian J. Math. 3, 1951.
- [2] Bochner, S., Uber Sturm-Liouvillesche Polynomsysteme, Math. Zeit. 29, 1929.
- [3] Romanovsky, V., Sur Quelques Classes Nouvelles Des Polynomes Orthogonaux, C. R. Acad. Sci. Paris 188, 1929.
- [4] Saff, E. B., Varga, R. S., On The Sharpness of Theorems Concerning Zero-Free Regions for Certain Sequences of Polynomials, Numer. Math. 26, 1976.
- [5] Pasquini, L., On the Computation of the Zeros of the Bessel Polynomials, number 119 in International Series of Numerical Mathematics, Birkhauser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1994.
- [6] Robert G. Bartle, The Elements of Real Analysis, John Wiley & Sons, 1976, USA.
- [7] Philip J. Davis, Interpolation and Approximation, Dover, 1975 New York.
- [8] Emil Grosswald, Bessel Polynomials, Springer-Verlag, 1978 Berlin.
- [9] H. L. Krall and Orrin Frink, a new class of orthogonal polynomials: The Bessel Polynomials.
- [10] Stepen Wolfram, Mathematica, Addison-Wesley, 1991, California.
- [11] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, Análisis Numérico, Iberoamérica, 1985, Boston, E. E. U. A.
- [12] Abdelwahab Kharab and Ronald B. Guenther, An Introduction to Numerical Methods, Chapman & Hall/CRC, 2002, USA.