UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

“MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ”

“Promoviendo aprendizaje cooperativo en estudiantes de nivel medio”

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

Adriana Paz Servín

Asesor:

Dr. En ciencias Matemáticas Educativas

Armando Sepúlveda López

MORELIA, MICHOACAN, AGOSTO DE 2014

DEDICATORIA

Primero que nada a Dios el haberme permitido concluir mis estudios y el poder estar hoy presentando mi examen recepcional. Gracias a mi papá Antonio Paz Mendoza por su apoyo, porque sin él no estaría donde ahora estoy, gracias por ese sacrificio, por ese cansancio que se que siente todos los días y que no le ha importado con tal de tener una vida mejor para su familia. Gracias a mi mamá Leticia Servin porque sin ella yo no sería lo que soy, por todo lo que me ha enseñado, por todos los valores que nos inculcó a mis hermanos y a mí, gracias porque es mi amiga y me escucha y siempre me da ánimos. Los quiero mucho a los dos.

También dedico y agradezco a mi hermana Verónica Paz Servín por todos sus consejos, por su apoyo, por ser mi amiga y… claro a misin. Gracias a mí hermana Claudia Paz Servín porque siempre me ha apoyado cuando más lo necesito, no sé cómo pagarle, bueno si sé. Gracias a mi hermano y mi ahijado favorito Saúl Paz Servín porque aunque muy pocas veces me dice algo, sé que me apoya y confía en mí. A los tres los quiero mucho hermanos y quiero que sepan que no los cambiaria por nadie más.

Quiero agradecerle infinitamente al Dr. Armando Sepúlveda López por haber aceptado ser mi asesor en este último paso, gracias por exigirme, por enseñarme, por apoyarme desinteresadamente, créame que usted para mí es un ejemplo a seguir como profesional y ser humano.

A mis sinodales: Dra. Karina Figueroa Mora, Dr. Francisco Domínguez Mota, Dr. Héctor Tejeda, M.I. Cuauhtémoc Rivera Loaiza, por aceptar evaluar mi trabajo, por sus comentarios y recomendaciones que me hacen crecer como profesional, pero también gracias porque durante mi formación compartieron su experiencia y conocimiento conmigo.

Por último a todos mis amigos que me apoyaron no solo ahora si no durante toda mi preparación. Gracias a las personas que consciente o inconscientemente me apoyaron para llegar a este punto, con palabras, con ánimos, con un abrazo etc., gracias.

Adriana Paz Servín.

INDICE GENERAL

RESUMEN **4**

ABSTRACT **4**

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN **5**

1.1. INTRODUCCIÓN 5
1.2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 8
1.3. PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN 11
1.4. OBJETIVOS Y METAS 12

2. MARCO TEÓRICO **14**

2.1. INTRODUCCIÓN 14
2.2. LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS 19
2.3. LAS ESTRATEGIAS HEURÍSTICAS 22
2.4. APORTACIONES COMPLEMENTARIOS AL MÉTODO DE POLYA 25
2.5. TRABAJO COOPERATIVO EN EL SALÓN DE CLASES 30
2.6. PAQUETES DE EVALUACIÓN BALANCEADA 39

3. METODOLOGÍA **45**

4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS **51**

4.1. DISEÑO DE UNA ESCALERA 53
4.1.1. Respuestas de los equipos *55*
4.1.2. Discusión colectiva *67*
4.1.3. Análisis de los resultados de los equipos *68*
4.2. DISEÑO DE UNA CASA DE CAMPAÑA 70
4.2.1. Resultados de los equipos *72*
4.2.2. Discusión colectiva *89*
4.2.3. Análisis de los resultados *90*

5. CONCLUSIONES **92**

BIBLIOGRAFÍA **97**

ANEXO 99
Tareas aplicadas a los estudiantes *99*

RESUMEN

En esta tesis, se presenta el desarrollo de dos actividades planteadas a estudiantes de nivel medio superior, caracterizadas porque hay varios escenarios de solución para estos problemas. En estas actividades los estudiantes fueron reunidos en equipos promoviendo el aprendizaje cooperativo, con la intención de compartir puntos de vista, proponer métodos o caminos a la solución y detectar inconsistencias en las ideas propuestas; así mismo exponer y argumentar la solución obtenida. En esta investigación, se quiere conocer el cambio que se presenta en la forma de pensar de los estudiantes cuando se enfrentan a un problema matemático a nivel escolar, donde pueden tenerse varias soluciones y varios métodos para llegar a una solución correcta.

ABSTRACT

This thesis presents two activities proposed to students in higher average level, characterized by have more than one possible solution for these problems. In these activities students were gathered in cooperative learning teams, with the intention of sharing points of view; proposing methods or paths to the solution and detecting inconsistencies in the ideas; likewise exhibit and argue the solution obtained. In this research, we want to know the change that occurs in the thinking of students when they are face to face to a mathematical problem at any school levels, where several solutions and various methods are possible to arrive to the correct response and solution the problem.

Palabras clave: resolución de problemas, matemáticas, nivel medio superior, planteamiento de problemas, estudiantes.

Keywords: problem solving, math, high school level, approach problems, students.

1.PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Introducción

El estudio y aprendizaje de las matemáticas actuales es una de las dificultades que podemos identificar en el sistema de educación del país, el problema se presenta al momento de verificar si el estudiante será capaz de aplicar alguna definición o concepto matemático, el grado de comprensión que obtendrá y si será capaz de aplicarlos de forma adecuada. Lo que se refiere al equilibrio entre el manejo procedimental (procedimientos operativos) y la comprensión de las ideas matemáticas, ha sido identificado por Ausubel (1983) como aprendizaje significativo. Se afirma que este tipo de aprendizaje proporciona las bases para que los estudiantes enfrenten con éxito sus estudios posteriores.

Por lo general, el aprendizaje de los estudiantes se ha caracterizado por ser memorístico y rutinario; la instrucción se limita a abordar situaciones rutinarias y repetitivas donde se privilegia el manejo de técnicas, algoritmos y fórmulas para resolver ejercicios y problemas rutinarios (Polya, 1954). Pero cuando el problema planteado contiene algunos cambios en estructura o involucra ciertos cambios como agregar variables, o procedimientos en los cuales es importante realizar algún dibujo, trazo, etc., es ahí donde se presentan conflictos al intentar resolver el problema, esto debido a la costumbre que se tiene de seguir procedimientos establecidos o fórmulas, es difícil que pueda establecer el mismo conjeturas o establecer deducciones a partir de la problemática planteada. Más delicado es el hecho de que el estudiante no tiene la certeza del porqué utilizó ese método o porqué a través de este se obtiene una solución correcta.

En este contexto (Schoenfeld, 1992) afirma que el aprendizaje adquirido por los estudiantes ha sido rutinario y memorístico, ya que no estuvieron inmersos en procesos de resolución de problemas, los cuales proporcionan un estado ideal para ejercitar la mente y adquirir un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos. Así lo ha declarado, desde 1980, el

Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM por las siglas en inglés) y lo reitera en su propuesta curricular de los *Principios y Estándar para las Matemáticas Escolares* (NCTM, 2000).

La propuesta establecida por Schoenfeld, es que la educación debe incluir en el currículum una estrategia en la cual se incluya la resolución de problemas implementando técnicas que apoyen a encontrar la solución de manera adecuada, se desarrolle el pensamiento mediante el uso de lenguaje matemático y de sus definiciones, y al presentarse una situación parecida le será más sencillo resolver problemas matemáticos. La sugerencia es que esta propuesta se lleve a cabo en todos los niveles de educación hasta llegar al nivel medio superior (bachillerato).

El primero de esos procesos es, precisamente, el de resolución de problemas cuyos fundamentos se encuentran en Polya (1945), Polya en 1941 intentó ayudar a sus estudiantes para que aprendieran matemáticas mediante la resolución de problemas, bajo la suposición de que cada vez que el estudiante se involucra es este proceso, está realizando prácticas cercanas a las de un matemático cuando realiza su trabajo y, en consecuencia, puede adquirir los conocimientos matemáticos de manera diferente al aprendizaje tradicional. Como veremos más adelante el método de Polya consiste en cuatro etapas fundamentales:

a) comprensión del problema;

b) diseño de un plan de solución;

c) ejecución del plan; y

d) revisión retrospectiva.

En cada una de estas etapas, Polya propone una serie de preguntas como las que sería útil que se plantease el estudiante para, y con el propósito principal de, encontrar el camino hacia la solución.

La resolución de problemas es la línea de desarrollo que mayor impulso ha proveído a la educación matemática. El el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1998; 2000) considera que la resolución de problemas debería ser el centro de atención en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas:

1. La resolución de problemas es el corazón y la esencia misma de las matemáticas.
2. La resolución de problemas es una de las formas básicas de investigación, particularmente en matemáticas.
3. Se estudian las matemáticas porque proporcionan herramientas potentes para resolver problemas.

La resolución de problemas se fundamenta del quehacer matemático, del pensamiento y del razonamiento matemático, de todas las acciones comunes que se presentan dentro del proceso de resolución.

En su gran mayoría los estudiantes de matemáticas en sus distintos niveles de educación ven a esta área como una ciencia exacta donde no puede haber errores, donde todo se resuelve mediante métodos establecidos y algoritmos, "Es una disciplina fría y austera que da poco espacio al juicio y a la creatividad" (Santos, 2007, p. 47).

La idea anterior se tiene debido a la forma de ver las matemáticas desde el punto de vista de los profesores: "Estas ideas acerca de las matemáticas y el significado de su aprendizaje se adquiere mediante años de observar, escuchar y practicar actividades que se presentan en el salón de clases. (Schoenfeld, 1992, citado en Santos, 2007, p. 63).

Durante los años de formación práctica del docente, es cuando se van reforzando estas ideas acerca de la resolución de problemas, orillando al estudiante a la creencia de que para resolver un problema se tienen que utilizar métodos memorísticos y de mecanización, la creencia o idea que tenga el profesor acerca del aprendizaje matemático le es transmitida al estudiante, el cual va aceptando esta forma pensamiento y así concibiendo que este es el mejor método para la resolución de problemas matemáticos, influyendo esto en el desarrollo de habilidades que pueden permitir el incremento positivo en el pensamiento matemático y la comprensión de conceptos. Schoenfeld (1992) ha identificado a la toma de casos particulares, el descubrimiento de patrones y relaciones, la generalización, el planteamiento de conjeturas y la justificación de resultados como las características esenciales del pensamiento matemático.

En este sentido, la resolución de problemas conlleva implícitamente una forma diferente a la manera tradicional de ver a las matemáticas, tanto por parte del profesor como del estudiante, donde la creatividad, el descubrimiento, el desarrollo de estrategias y habilidades, así como la comunicación y justificación de resultados, ocupan un lugar importante en el estudio y, como consecuencia, en la formación de los estudiantes. La resolución de problemas recobra la esencia misma de las matemáticas; es la base del pensamiento matemático y la forma más conveniente de aprender conceptos, métodos y algoritmos.

Desde tiempos remotos hasta estos días se ha podido ver que las matemáticas toman un papel muy importante en la vida diaria para resolver problemas de diferentes temas, como aquellos que apoyan a la sociedad para lograr objetivos planteados y satisfacer sus necesidades y algunos que solo fueron retos personales de individuos. Al respecto, un equipo de investigadores encabezados por Schoenfeld *(Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000)* se ha propuesto diseñar problemas que, por sus características, sean útiles para desarrollar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas en el ámbito escolar y, como consecuencia, aprendan matemáticas.

Por lo comentado, en esta tesis, se buscó la forma de averiguar si a través de la resolución de problemas e implementando los ya propuestos en el Paquete de Evaluación Balanceada para el Currículum de Matemáticas *(Balanced Assessment Package for the Mathematics Currículum, 1999, 2000)*; permitirá desarrollar estas habilidades en el estudiante para comprender las matemáticas. Se aplicaron dos actividades para conocer cualitativamente el resultado de realizar el aprendizaje cooperativo en estudiantes de nivel medio superior.

1.2. Planteamiento del Problema

El uso del método de Polya no asegura que al momento de aplicar los cuatro pasos para la resolución de problemas este nos garantizará un éxito total, es decir, que se llegue a la solución del problema planteado o que se logren el aprendizaje esperado durante la actividad; esto se debe a que en la resolución de problemas intervienen factores como la experiencia del estudiante, el monitoreo, el control, y la aplicación de diversas estrategias heurísticas. Por esta razón, Polya acompañó a su método con una serie de preguntas relacionadas con dichas estrategias.

El término *"Heurística"* tiene que ver con la invención y el descubrimiento de las cosas; es decir, dado un problema uno puede apoyarse en una estrategia heurística para generar o descubrir pistas para la solución. Una de las estrategias más utilizadas, descrita por Polya, es la de "tomar casos particulares"; por ejemplo, en un problema que involucre el análisis de las raíces de polinomios como el siguiente:

¿Qué relación existe entre las raíces de los siguientes polinomios?

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_2 x^2 + a_1 x + a_0; \quad \text{y}$$

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

El utilizar esta estrategia brinda una oportunidad de encontrar pistas para así lograr la solución de problemas. Santos (1992, pp. 30 y 70) comenta que Polya compartía que las estrategias y preguntas que un experto matemático se hace al resolver un problema, podían ser modeladas por un maestro en el salón de clase y que éstas son un componente fundamental en la resolución de problemas.

Si bien hemos dicho que es importante los métodos a aplicar para la resolución de problemas también lo es la selección de los problemas a implementar para el desarrollo de los procesos de resolución de problemas, estos deben ser lo suficientemente adecuados para promover en el estudiante un aprendizaje significativo. En este contexto, Los Paquetes de Evaluación Balanceada *(Balanced Assessment Package for the Matehematics Curriculum, 1999, 2000)* y el NCTM *(The National Council of Teachers of Mathematics, 2000),* mencionan que los problemas que se les planteen a los estudiantes deberán contemplar contenidos fundamentales del currículum escolar, deben ser atractivos y fáciles de entender para los estudiantes, que les permitan expresar y mostrar lo que saben; y, además, también se busca que estos problemas sirvan como parámetro para conocer fortalezas y debilidades, que permitan evaluar diferentes caminos de solución y propicien la interacción con otros estudiantes.

Para esto, también se está buscando que la forma de trabajo que regularmente se utiliza en el salón de clases no sea la misma, se trata incursionar en nuevas formas que fomenten en los estudiantes una libre participación y cooperación entre ellos y que se genere lo que Hagelgans *et al.* (1995) ha identificado como *Aprendizaje cooperativo*.

El aprendizaje cooperativo es un enfoque que trata de organizar las actividades dentro del salón de clases con el fin de convertirlas en una experiencia social y académica de aprendizaje. Consiste en trabajar en grupos pequeños de estudiantes para realizar las tareas de manera colectiva. En este sentido, el aprendizaje depende el intercambio de información entre los estudiantes, quienes se encuentran motivados tanto por lograr su propio aprendizaje y el de los demás.

Es por ello que para esta tesis es relevante investigar y analizar el comportamiento de estudiantes, en este caso de nivel bachillerato, en el proceso de resolución de problemas para observar la manera en que aplican estrategias y usan los recursos matemáticos, analizar las características y potencial de los problemas que se les plantean y valorar formas de trabajo en el aula, donde se combine el trabajo colectivo, en pequeños grupos como en el grupo completo, con el trabajo individual (Sepúlveda y Santos, 2006).

Se pretende que los estudiantes sean capaces de darse cuenta del esfuerzo que ejercen y las habilidades que desarrollan al momento de resolver un problema matemático, esto con la intención de que se dé un cambio en ellos hacia el pensamiento matemático y la forma en la que ven a las matemáticas.

Con base en estas consideraciones se plantea el siguiente, problema de investigación:

¿Qué tipo de problemas involucran a los estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas, y qué formas de trabajo en el aula propician el intercambio de experiencias y la evolución de sus conocimientos hacia episodios de comprensión de mayor nivel que los mostrados en sus intentos iniciales?

Conocer el tipo de problemas y el proceso que los estudiantes siguen en sus intentos por resolverlos, nos dará una perspectiva de cómo se pudiera implementar la resolución de problemas en algunas sesiones en el salón de clases. Se tendría una base para hacer propuestas concretas sobre la implementación de procesos de resolución de problemas, además, las formas de trabajo que se pudieran adoptar para tal fin, de tal manera que permitan a los estudiantes aprender los conceptos matemáticos relevantes de manera significativa y desarrollar habilidades y formas de pensar consistentes con el quehacer matemático.

1.3. Preguntas de Investigación

En este trabajo lo que nos interesa es conocer el cambio que se presenta en la forma de pensar de los estudiantes cuando se enfrentan a un problema matemático del rubro escolar, en donde la solución sea variable, es decir, hay varias posibles soluciones, por medio de un método de resolución de problemas adecuado.

De acuerdo a lo anterior se plantean las siguientes preguntas para el desarrollo de la investigación:

1. ¿Qué características deben tener los problemas que se proponen a los estudiantes para promover un aprendizaje significativo?
2. ¿Qué conocimientos matemáticos previos requieren los estudiantes para enfrentarse a los problemas propuestos?
3. ¿En qué consisten los intentos de solución de los estudiantes, en cuanto al uso de estrategias y recursos matemáticos?
4. ¿Qué formas de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes?
5. ¿Cuál es el papel del profesor durante la aplicación de los problemas, en un ambiente de resolución de problemas?
6. ¿Qué cambios hubo en las formas de atacar y resolver los problemas despúes de la implementación de la forma particular de instrucción propuesta?

1.4. Objetivos y Metas

Objetivo General:

1.- Evaluar el potencial de las actividades de aprendizaje utilizadas para propiciar procesos de resolución de problemas en el salón de clases.

Objetivos Particulares:

- Hacer los ajustes y adaptaciones necesarias a algunas de las tareas contenidas en el Paquete de Evaluación Balanceada para el Currículum de Matemáticas (1999, 2000), para aplicarlas en el nivel medio superior de nuestro sistema educativo.
- Aplicar las actividades de aprendizaje mediante una forma de instrucción que combina el trabajo colectivo con el individual, cuyo fundamento se encuentra en la teoría del aprendizaje cooperativo de Hagelgans *et al.* (1995).
- Analizar el proceso que siguen los estudiantes al intentar resolver problemas y documentar, en forma detallada, el trabajo de seis pequeños grupos; así como destacar los aspectos relevantes en la discusión y/o comportamiento en el proceso de solución.
- Establecer si las actividades ayudaron a motivar la búsqueda de la solución o soluciones, y la externalización de las ideas por parte de los estudiantes.

Metas:

1. Seleccionar y, en su caso, adaptar dos de las tareas contenidas en Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (1999, 2000) y aplicarlas a un grupo escolar de bachillerato de la escuela preparatoria “Colegio Novel de Morelia.
2. Dar a conocer los resultados de la implementación en la presentación de esta investigación de manera clara y detallada.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

Dentro de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000), encontramos recomendaciones que se basan en la convicción de que los estudiantes pueden aprender matemáticas de manera significativa (con comprensión); es decir, comprender conceptos y procesos matemáticos importantes. También ofrece argumentos sobre la importancia de este tipo de aprendizaje y describe formas para lograrlo. En este contexto, los principios de este proyecto curricular, describe las características particulares de una educación matemática de calidad, y determinan la filosofía de la educación matemática a la que se aspira, mientras que los estándares describen los contenidos y procesos de pensamiento matemáticos que deberían desarrollar los estudiantes.

Dentro del documento se describen seis principios que son:

1. *Igualdad*. La excelencia en la educación matemática requiere igualdad; altas expectativas en el aprendizaje y fuerte apoyo para todos los estudiantes.

2. *Currículo*. El currículo es algo más que una colección de actividades. Debe ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y estar articulado a través de los diferentes niveles escolares.

3. *Enseñanza*. Para que la enseñanza sea efectiva, se requiere conocer lo que los alumnos saben, lo que necesitan aprender y, posteriormente estimularlos y apoyarlos para que lo aprendan bien.

4. *Aprendizaje*. Los estudiantes deben aprender las matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente los conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos.

5. *Evaluación*. La evaluación no debe ser un obstáculo para el aprendizaje de los estudiantes. La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil a profesores y alumnos.
6. *Tecnología*. La tecnología es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y potencia el aprendizaje.

Además, se establecen diez estándares fundamentales, dentro de los cuales la resolución de problemas es uno de ellos.

> *La resolución de problemas no solo forma parte del objetivo de aprender matemáticas, sino también es una forma de aprenderlas. Es parte integral de todo aprendizaje de las matemáticas, por lo que no debería verse como una parte aislada de la disciplina.* (Ibíd. p. 5)

La resolución de problemas es parte fundamental del desarrollo de la matemática, los estudiantes que aprenden matemáticas de manera tradicional se quedan en el estudio de métodos y algoritmos, lo cual refleja una forma de pensar inconsistente con la disciplina, ya que si los estudiantes no se involucran en procesos de resolución de problemas sus conocimientos de la disciplina serán de carácter memorístico y rutinario.

Para Polya (1945) y Schoenfeld (1985) la experiencia de los estudiantes con las matemáticas debe ser consistente con la forma de hacer matemáticas y, en este sentido, la resolución de problemas es la piedra angular que permite involucrar a los estudiantes en esas prácticas.

La resolución de problemas desarrolla y complementa habilidades matemáticas en los estudiantes. El estándar de resolución de problemas descrito en NCTM (2000) apoya esta idea.

> *Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para: construir nuevos conocimientos a través de la resolución de problemas; resolver problemas que surjan de las matemáticas y otros contextos; aplicar y adaptar diversas estrategias para resolver problemas; y controlar el proceso de resolución de los problemas matemáticos y reflexionar sobre él. A*

través de la resolución de problemas los estudiantes pueden experimentar la utilidad y la potencia de las matemáticas. (p. 262)

Stanic y Kilpatric (1989, citado en Schoenfeld 1992, p. 5), afirman "la resolución de problemas no es valiosa por que hace a uno mejor resolvente de problemas, sino por el valor que tiene en sí mismo", lo cual nos lleva a concebir la noción de la resolución de problemas como una habilidad.

Así, esta línea de investigación en educación matemática, se ha desarrollado desde un punto de vista consistente con el quehacer de un matemático profesional, es decir; consistente con la disciplina.

Las investigaciones relevantes en este campo sugieren, entre otras cosas, un estudio de las estrategias de solución y de los propios problemas, de tal manera que una parte importante en la investigación es el de llevar a la práctica y observar grupos de estudiantes involucrados en procesos de resolución de problemas, observando: su comportamiento en el proceso de solución, las estrategias usadas, los conocimientos matemáticos previos usados, los resultados de la interacción con otros.

Así mismo, también es importante el diseño y evaluación de los problemas o tareas; los contenidos matemáticos del currículum que se involucran, el tiempo de trabajo estipulado para actuar en el problema, observar dificultades de los estudiantes para entenderlos, que las características del problema y su presentación permitan a los estudiantes expresar lo que saben, usar estrategias de solución, reflexionar acerca de la solución o soluciones; para finalmente evaluar si en efecto los problemas fueron aprovechados por los estudiantes.

En este sentido, para el desarrollo de este trabajo, se propone un marco teórico basado en cuatro ejes, siendo el de resolución de problemas el eje central, cuyas ideas originales se deben a Polya (1945).

- Eje 1. La resolución de problemas. (Orígenes y desarrollo)
- Eje 2. Las estrategias heurísticas y sus aportes complementarios.
- Eje 3. El aprendizaje cooperativo en el salón de clases.

- Eje 4. Los paquetes de evaluación balanceada y las características de los problemas planteados en este trabajo.

En 1945, Polya plantea una novedosa idea que marca un nuevo paradigma en la investigación en educación matemática, en su libro *How to solve it*, que se tradujo en México en *Cómo plantear y resolver problemas*. En él analiza lo que un matemático hace cuando se enfrenta a un problema, sistematiza este proceso e intenta llevar esto a sus estudiantes de matemáticas. Distingue cuatro pasos en proceso de resolución de un problema: entender el problema; concebir un plan; ejecutar el plan y; evaluar la solución. Además destaca el uso de una serie de estrategias heurísticas que ayudan al resolutor a avanzar hacia la solución.

Después de los primeros intentos por implementar las ideas de Polya, se determinó que las estrategias heurísticas, por sí solas, no aseguran que los estudiantes puedan llegar a la solución, que existen además otros elementos que deben de tomarse en cuenta. Schoenfeld (1992) distingue cuatro dimensiones en el proceso de solución: estrategias cognitivas; estrategias metacognitivas; recursos previos (conocimiento matemático) y; el sistema de creencias. Incluso con base en sus observaciones e investigaciones, Schoenfeld cree que las estrategias heurísticas de Polya no pueden ser aplicadas por los estudiantes de manera descriptiva, deben de ser más bien prescriptivas; y debe involucrarse a los estudiantes en la resolución de muchos y variados problemas.

También distingue, con base en su experiencia, otras formas de caracterizar el proceso de resolución de problemas.

En relación a la implementación de problemas en grupos escolares, que promuevan un aprendizaje alejado de cuestiones memorísticas y rutinarias, se han puesto las esperanzas en el llamado Aprendizaje Cooperativo de Hagelgans *et al*. (1995)

> Dentro de las formas alternativas de aprendizaje que se han sugerido, es frecuente la forma del estudio en pequeños grupos. A menudo la forma de instrucción en pequeños grupos es llamada aprendizaje cooperativo ... cuando se habla de aprendizaje cooperativo, todos los siguientes componentes deben de estar presentes:

> *una cantidad significativa del trabajo del curso debe ser desarrollado en grupos cooperativos; debe existir un espíritu positivo de pertenencia al grupo; los miembros del equipo comparten sentimiento de responsabilidad mutua; los miembros del grupo son permanentes y estables;* el trabajo en grupo se incluye dentro del proceso de evaluación. (pp. 8, 11)

El trabajo de Hagelgans, se enmarca en la idea de la interacción social y en la teoría de Piaget (1962a) sobre los procesos de abstracción reflexiva que, Simon (1995) identifica como los procesos naturales que se interiorizan cuando el sujeto tiene contacto con el objeto de aprendizaje.

Hagelgans et al. (1995) describen una serie de observaciones realizadas por profesores que trabajaron con pequeños grupos de aprendizaje cooperativo. Desde la formación de los grupos, hasta los procesos de resolución de problemas, pasando por la interacción, los problemas inherentes de los grupos y la evaluación, pretende una discusión de algunas cuestiones de la teoría del aprendizaje que pueden ayudar tanto a los estudiantes como a los profesores a optimizar los beneficios del aprendizaje cooperativo.

Finalmente, desde el punto de vista teórico, también se establece el tipo de problemas convenientes para la aplicación de tareas o problemas para la discusión en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo, en el contexto de la resolución de problemas.

Desde que el NCTM en 1980, estableció que la resolución de problemas debería ser el centro para el aprendizaje de matemáticas, se han desarrollado trabajos acerca de los problemas o tareas que sería deseable que el profesor planteara en el aula a sus estudiantes con el objeto de involucrarlos en procesos de resolución de problemas.

Por ejemplo Lesh et al. (2000), propone una serie de elementos característicos para que un problema o tarea sea considerado como una "*actividad reveladora del pensamiento*"; es decir, cuáles son las características que deberían cumplir las actividades diseñadas con el propósito de favorecer a los procesos de resolución de problemas dentro del salón de clases. Describen y definen algunas actividades reveladoras del pensamiento, sus potenciales y sugerencias para su aplicación; y las confusiones que la gente tiene para la aplicación de tales actividades en la enseñanza.

Schoenfeld et al. (1999, 2000) desarrollan un trabajo acerca de la caracterización de los problemas útiles en procesos de aprendizaje con base en los procesos de resolución de problemas, para ello toman en cuenta investigaciones y observaciones previas.

2.2. *La Resolución de Problemas*

Uno de los principales retos en educación matemática, es la implementación de procesos de resolución de problemas en el aula, en cursos habituales del currículum escolar.

Las ideas iniciales de Polya (1945), tienden a caracterizar al ser humano:

> *Resolver problemas significa encontrar una forma de salir de una dificultad, alcanzar una meta que no pudo ser alcanzada inmediatamente. Resolver problemas es el logro específico de la inteligencia, y la inteligencia es el regalo específico de dios: resolver problemas puede ser considerado como la actividad humana más característica.* (p. 5)

Pero, ¿qué significa la palabra problema? Al respecto existen diversos esfuerzos por definir y delimitar el concepto de problema en matemáticas.

Santos (2007) menciona que la palabra problema es relativa, tiene que ver con el esfuerzo que una persona dedica a la resolución de un problema. “El hecho de que exista un problema no es una propiedad inherente de la tarea matemática, la palabra está ligada a la relación o interacción entre el individuo y esa tarea”. (p. 48)

Schoenfeld (1985) menciona que el término problema se refiere a una tarea que es difícil para la persona que intenta realizarla. La palabra problema es una demanda de lo que no se tiene respuesta inmediata, entonces representa una oportunidad de razonar, reflexionar, tomar decisiones, poner en juego el conocimiento matemático y estrategias en la búsqueda de la solución.

Polya (1945) detectó dificultades en sus estudiantes a la hora de resolver un problema o demostrar algún hecho. Comenzó a interesarse, precisamente, por las formas en las que los estudiantes pudieran apoyarse para resolver problemas. Desarrolló una serie de pasos con la idea inicial de que los profesores guiaran al estudiante, por medio de algunas preguntas (p. 19):

1. **Comprensión de problema.** Las preguntas en este paso están enfocadas a que el estudiante entienda el problema, lo analice desde el punto de vista de la incógnita y de lo que conoce según el enunciado del problema. Preguntas como ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es o son las condiciones y si son suficientes para determinar la incógnita?

2. **Diseño de un plan de solución**. En este paso Polya sugiere preguntas enfocadas, más que nada, en los siguientes aspectos; análisis de problemas semejantes o relacionados, previamente resueltos: ¿se ha encontrado con un problema semejante?, ¿conoce un problema relacionado con este?, ¿podría usarlo? ¿podría usar su resultado o su método? En relación a las definiciones o teoremas que permitan encontrar un plan de solución: ¿podría enunciar o plantear el problema de otra forma? También destaca el hecho de que uno podría plantearse problemas más accesibles análogos al original, con el objetivo de explotar y aplicar la forma en que se llega a su solución al problema original: ¿podría imaginarse un problema más particular? ¿más general? ¿puede resolver una parte del problema? La idea es concebir un plan eficaz para encontrar la relación o relaciones entre lo desconocido y los datos.

3. **Ejecución del plan de solución.** Aquí, Polya resalta la importancia de la demostración en el proceso de resolución. Ya que al ejecutar el plan nos enfrentaremos a una serie de pasos que tenemos que eslabonar para llegar a una solución; éstos deben seguir un orden y, lo más importante, deben ser verdaderos: ¿puede usted ver claramente que el paso es correcto?, ¿Puede usted demostrarlo?

4. **Revisión retrospectiva**. Consiste en reflexionar y revisar lo que se hizo en los pasos anteriores, la verificación del resultado y el razonamiento. Se aborda la cuestión de si pudiera haber una forma diferente de resolver el problema, y si la solución de este nos ayuda en la resolución de otros.

Polya intentaba adaptar los procesos a sus estudiantes, que él, como matemático, seguía en el proceso de resolver un problema. Al respecto, Santos (1992, pp. 30, 70) comenta que Polya creía que las estrategias y preguntas que un experto matemático se hace al resolver un problema, podían ser modeladas por un maestro en el salón de clase, las cuales son un componente fundamental en la resolución de problemas.

Además, también destaca el papel del profesor, como guía, que sepa dar a los estudiantes pistas específicas que los motiven a la búsqueda de la solución, y no dárselas. (Polya, 1945, p. 25)

> *El estudiante debe adquirir en su trabajo personal la más amplia experiencia posible, pero si se le deja solo frente a su problema, sin ayuda alguna o casi ninguna, puede que no progrese… El maestro debe ayudarle, pero no mucho ni demasiado poco, de tal suerte que le deje asumir una parte razonable del trabajo… Para tal fin el maestro debe ayudarle discretamente, sin imponérselo.*

Por otra parte, Polya menciona que hay dos objetivos fundamentales en el momento de plantear o sugerir a los estudiantes las preguntas de la lista: Ayudar a los estudiantes a resolver problemas y desarrollar la habilidad en el alumno para que sea capaz de resolver problemas posteriormente por sí solo. "Estos dos objetivos están estrechamente relacionados, puesto que si se le ayuda al estudiante a resolver un problema de esta manera, entonces se estarán desarrollando estas habilidades". (Ibíd., p. 27)

Son dos las características que se destacan en las preguntas de las etapas anteriores, el sentido común y la generalidad. La primera característica, ayuda a que el estudiante se familiarice con las preguntas y que por ser muy naturales se les podían ocurrir, incluso. La segunda ayuda a que los estudiantes sigan un camino general, lo cual implica mucho trabajo por hacer.

2.3. Las Estrategias Heurísticas

Polya sugiere implementación de estrategias, llamadas heurísticas, en la resolución de problemas en el salón de clases. Es importante mencionar que algunas de estas estrategias están implícitas en las preguntas de la sección anterior; sin embargo, en esta sección se pretenden abordarlas a manera de clasificación con objeto de visualizarlas en el contexto de este trabajo.

La palabra "heurística" tenía un significado exclusivo para una ciencia, según Polya (1945) mal definida, que tenía por objeto el estudio de las reglas y métodos del descubrimiento y de la invención. En términos adaptables la palabra trata de comprender los procesos mentales útiles en el proceso de la resolución de problemas.

Schoenfeld (1980) define una ***estrategia heurística*** como una sugerencia general o técnica la cual ayuda a quien intenta resolver un problema a entenderlo o a resolverlo.

Una estrategia heurística tiene que ver con la invención, la generación de conocimiento a través de una acción física o mental, que facilita, ayuda, da luz o resuelve una situación.

A continuación se presenta una lista de estrategias heurísticas:

- *Realizar trazos,* dibujar esquemas que ayuden a identificar incógnita y datos. La *"construcción" de figuras* es una estrategia que puede ayudar de manera considerable. Su uso no se restringe a problemas de geometría, donde su aplicación es natural, pero puede ser aplicada a otras áreas de las matemáticas u otras ciencias cuando se requiere representar una idea, parte del problema o el problema mismo de manera gráfica.
- *Examinar casos especiales,* con el objeto de ilustrar el problema, explorar el rango de posibilidades, sobre todo en los casos límite, y encontrar patrones; la toma de *casos particulare*s es una de las estrategias más naturales a la hora de resolver problemas, las cuales pueden ser de tipo secuencial o de tipo inductivo. "Se refiere a que de una situación planteada podamos ser capaces de resolver casos particulares,

para luego aprovechar su método o su solución en el problema original. La examinación de casos extremos es útil en esta estrategia” (Polya, 1965, p. 138).

- *Considerar problemas equivalentes* previamente resueltos. Se buscan problemas familiares o que involucren la(s) misma(s) incógnita(s), para tratar de resolver un problema relacionado más sencillo; puede intentarse replantear el problema cambiando de perspectiva o de notación, estudiar si el problema se puede abordar por contradicción y asumir la solución y determinar las propiedades que debe tener, etc.
- El uso de *problemas auxiliares* como un medio para llegar a la solución del problema original, es otra estrategia útil en la resolución de problemas, “es conveniente pensar, estudiar o incluso resolver problemas que nos ayuden a encontrar la solución de problema original” (Polya 1965, p. 153). La idea de subordinación está dentro de esta estrategia, si esperamos que el problema auxiliar ayude debemos considerar problemas claros, concisos y subordinados. También conviene *Considerar pequeñas variación al problema*, descomponer el problema en sub-metas y abordarlas, hacer que las condiciones del problema sean más flexibles o descomponer el problema y trabajarlo caso por caso. *Considerar modificaciones más amplias*, examinar problemas análogos de menor complejidad, explorar el comportamiento de una condición o una variable, dejando fijas las otras. Explotar los métodos de solución o la solución que tengan una forma similar a la del original.
- La *analogía,* según Polya (1965, p. 57-58), es un tipo de similitud entre dos o más objetos. Los objetos semejantes concuerdan entre sí, en algunos aspectos, mientras que los objetos análogos lo hacen en ciertas relaciones entre sus elementos respectivos. La analogía entre dos sistemas u objetos, consiste en la comunidad de sus relaciones. La analogía que existe entre un paralelogramo rectangular y un paralelepípedo rectangular, por ejemplo, debido a que las relaciones de los lados existentes en el paralelogramo son semejantes a las relaciones entre las caras en el paralelepípedo. La analogía forma parte de nuestra manera de ver las cosas y de nuestra expresión. En el habla popular es difícil encontrar cierto grado de precisión que requiere para su anexo en matemáticas; sin embargo, es importante tenerlo en cuenta para el descubrimiento de soluciones a problemas. La analogía de un

problema nuevo con otro antes resuelto, o más sencillo de resolver, es una estrategia importante para descubrir el camino de solución o la solución. Polya habla en esta parte de la inferencia por analogía; es decir, la solución de un problema análogo más sencillo nos proporciona elementos para hacer una hipótesis acerca de la solución del problema original.

Habiendo establecido aspectos fundamentales de las estrategias heurísticas, entonces ¿podemos ejercitar a alumnos novatos para resolver problemas como lo hace un experto?

Schoenfeld (1980) se plantea esta pregunta, luego de probar que evidentemente los novatos abordan un problema de manera muy diferente a cómo lo hace un experto.

> *… Mi respuesta es un provisional "si". Creo que es posible dar un curso en el cual se puede enseñar al estudiante a resolver una amplia variedad de problemas… mejor y más eficientes de lo que ellos creerían… Podemos proveer a los estudiantes con una estructura razonable para resolver problemas de manera eficiente y podemos, de hecho, demostrar esa mejora.* (p. 795)

Schoenfeld (1980) afirma que conocer tales estrategias no es suficiente para resolver un problema, habrá ocasiones en las que en un problema se puedan usar varias estrategias y el estudiante tendrá que saber seleccionarla, además de saber cuándo y dónde usarla.

Así pues, la manera en que los estudiantes aplican las estrategias heurísticas planteadas por Polya, depende de la instrucción que reciban con base en estas afirmaciones y con base al diseño de una didáctica plenamente basada en la resolución de problemas.

Otros obstáculos que no aseguran el éxito en los estudiantes para resolver problemas son: la actitud y visión que se tenga de las matemáticas, el conocimiento de los conceptos matemáticos, eficacia para estimar y hacer operaciones, etc. Schoenfeld intentó, mucho tiempo después de que se establecieran las ideas de Polya, responder a este tipo de cuestiones con base en sus investigaciones enfocadas al uso de estrategias en el salón de clase y con el diseño de actividades que cumplen con ciertos requisitos para desarrollar formas de instrucción basada en la resolución de problemas.

2.4. Aportaciones Complementarios al Método de Polya

Sin duda, quien más ha contribuido a la implementación y desarrollo de la resolución de problemas es Alan Schoenfeld, quien incorpora la dimensión cognitiva y, por su contacto con estudiantes y profesores de matemáticas, recaba evidencia que le permite concluir que la resolución de problemas va más allá de conocer las estrategias heurísticas, que se deben analizar otras cuestiones que también tienen cabida en el proceso de resolver problemas.

> *A pesar de las brillantes ideas de Polya, los métodos sugeridos en sus libros no funcionan muy bien; cuando los maestros y educadores matemáticos intentaron enseñar la resolución de problemas usando los métodos de Polya, los resultados no fueron los mejores… las estrategias de Polya son muy generales y para que puedan ser usadas, es necesario caracterizarlas con suficiente detalle; esto servirá como una guía para implementarlas.* *(Schoenfeld, 1987, pp. 17-18)*

Es decir, los resultados en la enseñanza de estas estrategias a estudiantes de matemáticas, no fue alentadora; estas sugerencias deberían tener un carácter prescriptivo si se quiere aplicar a este nivel.

Schoenfeld (1987) observa que las estrategias de Polya son muy generales; es decir, las caracterizaciones de Polya son etiquetas bajo las cuales están contenidas familias de estrategias relacionadas. Así, una estrategia heurística origina otras sub-estrategias que se aplican en forma diferente, dependiendo de la estructura del problema. Para su uso en la enseñanza, Schoenfeld (1992) recomienda ejercitar cada estrategia general en diferentes problemas, de manera que se evidencie el uso de las estrategias particulares.

Schoenfeld (1980, p. 12) asegura que bajo ciertas circunstancias apropiadas, muchos estudiantes pueden aprender a usar heurísticas, dando como resultado un mejoramiento demostrable en el proceso de resolución de problemas. Ellos deben aprender al menos: 1) cómo seleccionar las estrategias apropiadas y 2) cómo aplicarlas. Sin embargo, las estrategias heurísticas no pueden ser presentadas a los estudiantes de manera retórica, informativa o como sugerencias para ayudar a resolver problemas, puesto que varias estrategias no contienen suficiente información sobre cómo ser utilizadas por los estudiantes.

Schoenfeld se refiere a la generalidad de las estrategias de Polya. Es decir, cuando atacamos problemas diferentes donde es factible usar la misma heurística de los casos particulares, por ejemplo, es probable que no se aplique de la misma manera en todos, puede ser que la estrategia sea muy particular para cada uno. Así entonces, la instrucción debe ser más que descriptiva, debe enfocarse en la resolución de una amplia variedad de problemas en donde los estudiantes aprendan cómo y cuándo aplicar estrategias de manera satisfactoria. En resumen, la instrucción en el aprendizaje de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas debe ser más bien prescriptiva.

Schoenfeld (1987, citado en Santos, 2007) sugiere que para entender cómo los estudiantes intentan resolver problemas es necesario discutirlos en diferentes contextos, pero también hay que considerar diferentes categorías o dimensiones que influyen en el proceso de resolución de problemas. Por ejemplo, Santos (2007) menciona que “las heurísticas son estrategias que pueden ayudar a avanzar o a resolver el problema… sin embargo, conocer estas estrategias no garantiza saber cuándo y cómo usarlas”. (p. 53)

Se distinguen cuatro dimensiones que influye en el proceso de la resolución de problemas:

- *dominio del conocimiento o recursos;*
- *estrategias cognitivas o métodos heurísticos;*
- *las estrategias metacognitivas; y*
- *los sistemas de creencias.*

El *dominio del conocimiento* se refiere al conocimiento que el estudiante tiene de las matemáticas, hechos matemáticos, definiciones, conceptos, teoremas, incluso procedimientos y algoritmos. Las estrategias cognitivas, son las discutidas en el capítulo anterior, al menos las más usuales. Las estrategias metacognitivas es una especie de auto monitoreo de los procesos que se llevan a cabo en el proceso de resolución, la reflexión acerca de los caminos que tomamos o que estamos intentando tomar. Finalmente, los sistemas de creencias, se refiere a las creencias que se tienen sobre las matemáticas en general y sobre la resolución de problemas, tanto de estudiantes como de profesores.

Los sistemas de creencias son importantes, influyen directamente en las actitudes de los estudiantes en una clase de matemáticas, particularmente en actividades donde se promueva la resolución de problemas. Dubinsky (1989a, 1989b) identifica algunas creencias con respecto al aprendizaje de las matemáticas. Las matemáticas son:

- un cuerpo de conocimiento ya descubierto que debe ser pasado a las futuras generaciones mediante transferencia de la mente de los profesores a la mente de los estudiantes,
- un conjunto de técnicas para resolver problemas estándar que deben ser practicadas hasta dominarlas,
- una colección de pensamientos e ideas que los individuos y grupos de individuos han creado y construido y que los estudiantes deben también construir; y
- un conjunto de aplicaciones que acentúan solamente el poder de las matemáticas describir, explicar, y predecir.

Estas creencias se enmarcan en cuatro grupos: las matemáticas pueden ser aprendidas espontáneamente, inductivamente, constructivamente y pragmáticamente.

Por su parte, Garofalo (1987) identifica cinco creencias que los estudiantes tienen acerca de las matemáticas:

- casi todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos por la aplicación directa de hechos, reglas, fórmulas, y procedimientos mostrados por el profesor o dados en el libro de texto,
- los ejercicios de matemáticas del libro de texto pueden ser y deben ser resueltos por los métodos presentados en el libro de texto,
- las matemáticas son importantes, y vale la pena conocerlas solamente porque son evaluadas,

- las matemáticas son creadas solamente por un genio matemático; otros solo intentan aprender lo que es manejable y;
- los problemas matemáticos tienen solo una respuesta correcta, y tales respuestas se obtienen usando algoritmos paso por paso.

Dentro de nuestra experiencia una actitud generada por las creencias que Garofalo y Dubinsky mencionan, es que el estudiante justifica sus respuestas preguntando al profesor, si el profesor acepta la respuesta el estudiante asume que es correcta. En general la gran mayoría de los estudiantes de bachillerato asumen que las afirmaciones y procedimientos que el profesor muestra en la clase son correctos, se aceptan por el solo hecho de que el profesor lo menciona, sin reflexionar y preguntarse por qué son válidos tales procesos. Actualmente los libros y la información que se encuentra en medios electrónicos, son también muy ponderados por los estudiantes. La educación tradicional ha dejado estas formas de actuar en la mayoría de los estudiantes; es decir, los estudiantes no sienten la confianza para argumentar y/o justificar sus propios métodos, procesos o formas de actuar en el salón de clase de matemáticas. Por otra parte, los profesores no motivan a los estudiantes para que así suceda. Se ve al profesor como el único responsable para que los estudiantes desarrollen entendimiento y califiquen, de alguna manera, los resultados de los ejercicios que se proponen. Cuando el profesor indica o promueve un método para resolver cierta cuestión matemática, los estudiantes esperan que este método funcione para cualquier ejercicio de esta índole, aunque no se cumpla siempre. Las formas de instrucción tradicionales promueven poco la argumentación y justificación de los estudiantes, hacia las tareas o ejercicios de aprendizaje, procedimientos y métodos propuestos por el libro o el profesor.

Schoenfeld (1992, citado en Santos, 2007) documenta también algunas creencias de los estudiantes acerca de lo que significa aprender matemáticas:

- Si se pide un punto de vista acerca de un problema o cuestión matemática, es suficiente opinar al respecto. Es decir, las pruebas formales o justificaciones matemáticas no son necesarias a menos que explícitamente se requieran.

- Todos los problemas matemáticos pueden ser resueltos en 10 minutos o menos, si uno entiende el contenido. Es decir, el estudiante abandona el problema si no lo resuelve en ese periodo.
- Sólo los genios son capaces de descubrir, crear y entender matemáticas. Es decir los estudiantes toman las matemáticas pasivamente y memorizan relaciones sin esperanza de algún entendimiento.
- Las matemáticas formales y las demostraciones no tienen nada que ver con el desarrollo del descubrimiento del desarrollo de las matemáticas. Como consecuencia, los resultados de las matemáticas formales se ignoran cuando se les pide a los estudiantes trabajar en problemas de construcción o descubrimiento.

Un rasgo que se destaca en estas creencias documentadas por Schoenfeld son las ideas de los estudiantes acerca de la justificación y validación de los resultados de las tareas que los estudiantes resuelven. Cuando los estudiantes se interesan por un problema, solo piensan en resolverlo de manera correcta, luego verán si lo que hicieron está bien o está mal cuando el profesor entregue el problema calificado.

Sin embargo, Schoenfeld (1985) identifica contradicciones en tales creencias, en ocasiones los estudiantes piensan: "las matemáticas son mucha memorización", pero por otro lado, "las matemáticas son una disciplina creativa y útil en la cual se aprende a pensar".

Ciertamente entre los estudiantes de bachillerato (en particular) no hay una idea única que clasifique o defina a las matemáticas. Cada estudiante desarrolla sus propias creencias de acuerdo a las experiencias que han vivido dentro del salón de clases. Esto hace que un estudiante puede haber experimentado incluso varias formas de ver las matemáticas, por lo tanto varios de ellos caen en estas contradicciones. Esto es especialmente un resultado de las creencias de los profesores hacia las matemáticas -las cuales pudieron haberse desarrollado en la última etapa de su formación- que influyen en las actitudes y creencias de los estudiantes. Por ejemplo, un estudiante el cual toda su vida académica matemática estuvo ligada a profesores que conciben las matemáticas como una ciencia exacta en la que se debe practicar una serie de ejercicios con procedimientos definidos para aprenderla, entonces su idea acerca de las matemáticas será muy pragmática, sin cabida para la creatividad o la reflexión.

Así, los procesos de resolución de problemas y las prácticas del aprendizaje cooperativo pretenden, además de otras cosas, favorecer en los estudiantes el desarrollo de actitudes y creencias más cercanas y consistentes con el quehacer de la disciplina; es decir, con las creencias que un matemático profesional tiene de su práctica diaria.

De esta manera, para Schoenfeld (1992) el reto en la instrucción matemática es generar condiciones de aprendizaje donde se promuevan actividades, hábitos y actitudes consistentes con la práctica real de la disciplina.

> *…Para desarrollar los hábitos apropiados y la disposición de interpretación y de encontrar sentido a las ideas matemáticas y el desarrollo de modelos apropiados de pensamiento matemático –la comunidad de práctica en donde los estudiantes aprenden matemáticas debe soportar y desarrollar las formas de pensar de la práctica matemática. Esto es, el salón de clase deben ser comunidades en la cual el encontrar sentido a las ideas debe ser lo que se espera que los estudiantes practiquen.* (p. 345)

En este contexto, resulta relevante que los estudiantes adquieran una forma de pensar propia del método inquisitivo. Postman y Weingartner (1969) sostienen que:

> *El conocimiento se produce en respuesta a preguntas…Una vez que (el estudiante) ha aprendido a cómo preguntar –preguntas relevantes, apropiadas y sustanciosas– el estudiante ha aprendido cómo aprender y ya nadie lo puede detener en el camino de seguir aprendiendo lo que necesite y quiera conocer.* (p. 23)

2.5. Trabajo cooperativo en el salón de clases

Uno de nuestros objetivos es trabajar en grupos pequeños para promover el aprendizaje cooperativo en el contexto de la resolución de problemas y tomar algunas aportaciones y aproximaciones enmarcadas en esta teoría, con el fin de emplear formas de instrucción que favorezcan el aprendizaje y que, a su vez, contribuya en el proceso de resolución de problemas.

Hagelgans *et al.* (1995) comentan que en una clase tradicional de matemáticas, se promueve la memorización y la aplicación de algoritmos para resolver ejercicios de cálculo, lo cual, tiende a dejar aprendizaje procedimental y memorístico, opuesto al aprendizaje racional y significativo. Una forma alternativa de aprendizaje es que los estudiantes resuelvan problemas en pequeños grupos, que con una cierta metodología y fundamentos teóricos, se espera que se propicie el aprendizaje cooperativo. Ya que no cualquier trabajo en pequeños grupos produce este tipo de aprendizaje. A menudo la forma de instrucción en pequeños grupos es llamada aprendizaje cooperativo.

Las bases sustanciales de la teoría del aprendizaje cooperativo se encuentran en el constructivismo, básicamente en las ideas de Piaget:

> *Desde el punto de vista de Piaget el individuo construye su conocimiento a través de la interacción con su ambiente. Aunque la interacción social, la cual es parte del ambiente, puede enriquecer el desarrollo de un individuo, este no puede cambiar el curso de este desarrollo en una forma esencial.*
>
> (Hagelgans, 1995, p. 19)

De acuerdo con Piaget (Piaget e Inheler, 1969a), el desarrollo intelectual de un individuo está influida por la madurez, la experiencia, la interacción social y el equilibrio, lo cual concluyó de sus observaciones y trabajos con niños. La construcción de varios tipos de imágenes mentales es posible en un estado específico del desarrollo integral de una persona. La madurez determina si es posible o no la construcción de estructuras mentales, específicas en un momento particular.

Piaget distingue dos tipos de experiencias a nivel elemental: experiencias físicas y experiencias lógico-matemáticas. Cuando los niños crecen, llegan a ser capaces de pensar deductivamente y ser conscientes de la abstracción o construcción mental, llamada **abstracción reflexiva**, ambos basados en los dos tipos de experiencias.

La abstracción reflexiva se refiere al final de un proceso desencadenado cuando el estudiante se encuentra con un conflicto en la estructura de su conocimiento, una perturbación que impide que el nuevo conocimiento se "acomode". Al respecto Glasersfeld (1995) comenta:

> *La teoría del aprendizaje que emerge del trabajo de Piaget puede ser resumida diciendo que un cambio y un aprendizaje cognitivo en una dirección específica toma lugar cuando un esquema, en lugar de producir el resultado esperado, deja una perturbación, y la perturbación, a su vez, una acomodación que mantiene o restablece el equilibrio.* (p. 68)

Tal perturbación se conoce como "conflicto cognitivo", una situación en donde los estudiantes no saben qué hacer, pues tal evento no se ajusta a sus concepciones. Simon et al. (2004) afirma que la idea básica del conflicto cognitivo es desencadenar el aprendizaje.

Las experiencias físicas consisten en actuar sobre objetos, manipularlos. Los niños juegan con las cosas para transformarlas e interactuar con ellas usando todos sus sentidos, tacto, vista, gusto, olfato y oído. Para ellos, el juego es su forma de pensar. Los niños obtienen conocimiento empírico acerca de los objetos que manipulan por medio de reflexiones sobre los resultados de sus acciones.

No todo el conocimiento es obtenido directamente desde la simple acción con los objetos en sí mismo; esto es, mientras que el conocimiento físico viene de acciones sobre objetos, el conocimiento lógico-matemático tiene como su fuente la coordinación general de estas acciones.

Los seres humanos aprenden también desde su experiencia y no solamente porque alguien les hable acerca de algo. Piaget enfatizó que la interacción social y la transmisión son insuficientes por sí misma. De hecho, en el proceso de la interacción social, los individuos contribuyen tanto como reciben. Aún en las interacciones donde un individuo aparece más pasivo, no hay acción social sin asimilación activa. Esto es, cuando un estudiante está cabeceando a punto del sueño en el fondo del salón de clase, y si el profesor está dando una clase dinámica, no hay interacción social, y esto no genera transmisión de conocimiento. Por otro lado, en una discusión en un grupo pequeño, incluso si un estudiante está hablando más que los otros miembros del grupo que escuchan pasivamente, están involucrados en una interacción social.

Cuando un individuo se enfrenta con situaciones que requieren nuevas construcciones mentales, la tendencia es ajustar estas nuevas ideas a las estructuras mentales ya existentes; es decir, asimilar el nuevo conocimiento. Si esto no funciona, habrá un desequilibrio en las experiencias individuales. Los cambios deben ser hechos por acomodación de estas nuevas experiencias. El equilibrio es el mecanismo interno que regula el proceso de asimilación y acomodación.

Piaget (2001) postuló la abstracción reflexiva como el proceso mediante el cual estructuras mentales de alto nivel podrían ser desarrolladas desde estructuras de más bajo nivel, y las describió en dos fases: Fase de proyección, en la cual las acciones en un nivel llegan a ser objetos de reflexión en la siguiente fase; y ***Fase de reflexión***, en la cual se lleva a cabo una reorganización. En otras palabras es un proceso por el cual concepciones nuevas y más avanzadas se desarrollan de concepciones existentes. La abstracción reflexiva no es necesariamente un proceso consciente.

Una de las características de los procesos de abstracción reflexiva que son observables en la práctica cotidiana de un profesor la de introducir al estudiante hacia una concepto desde un punto de vista empírico e intuitivo, de tal manera que el estudiante reconozca la necesidad de establecer nuevas concepciones o se enfrente al conflicto cognitivo.

En los trabajos de Hagelgans *et al.* (1995), La definición de aprendizaje cooperativo es el resultado de un esquema que concibe varias características, es decir, un grupo que es llamado “Grupo de aprendizaje cooperativo”. Este grupo debe tener las siguientes características:

1. ***Cantidad significativa del trabajo en grupo.*** El curso o clase que esté dentro del esquema del aprendizaje cooperativo, debe de tener una estructura que involucre a los estudiantes en interacciones que reflejen una cantidad significativa de trabajo en grupo, de tal manera que sientan la necesidad de comunicar ideas de manera regular. Tal

comunicación incluye la reflexión de las ideas matemáticas y discusión de los diferentes acercamientos para resolver problemas. En el intento de comunicar estas ideas al grupo, cada integrante deben tener claros sus pensamientos acerca del problema o el concepto. Esta discusión debe ocurrir de manera regular y a un nivel suficiente para que los estudiantes reconozcan sus propios errores (de cálculo y de razonamiento matemático). Con esto se espera que los estudiantes desarrollen un espíritu de pertenencia al grupo.

2. ***Responsabilidad mutua entre los miembros del grupo***. Se espera que cada miembro sea responsable para con los otros. Las actividades se diseñan para que el espíritu del grupo permee en cada faceta del curso; algunas de estas actividades se diseñan para que los miembros se beneficien cuando todos trabajan. Algunas actividades se diseñan para que el conocimiento del grupo se enriquezca con respecto al conocimiento individual. La responsabilidad implica que si un miembro del grupo no se desempeña adecuadamente, frecuentemente esto afecta al grupo completo, pero si su desempeño es bueno todo el grupo se beneficia.

3. ***Grupos estables.*** Es esencial y necesario para el espíritu grupal que el grupo sea permanente durante todo el curso, para todo el semestre o para una parte importante de él. Aprender a trabajar juntos, aprender a cómo usar esa interacción para aprender matemáticas es un proceso que se logra con el conocimiento de los integrantes entre el grupo; eso lleva tiempo.

4. ***Evaluación del trabajo en grupo.*** Puesto que se cree que los estudiantes aprenden mejor cuando trabajan en pequeños grupos, que de manera individual, debe emprenderse un proceso de evaluación.

En resumen, cuando se habla de aprendizaje cooperativo, los siguientes componentes deben de estar presentes:

1. una cantidad significativa del trabajo del curso debe ser desarrollado en grupos cooperativos;
2. debe existir un espíritu positivo de pertenencia al grupo;
3. los miembros del equipo comparten sentimiento de responsabilidad mutua;

4. los miembros del grupo son permanentes y estables; y
5. el trabajo en grupo se incluye dentro del proceso de evaluación.

Se espera que cada pequeño grupo se conforme con estudiantes de distintos niveles de desempeño y que se permita la comunicación con sus integrantes y con otros grupos.

Algunos de los efectos positivos que genera el proceso del trabajo en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo, según Hagelgans *et al*. (1995) son:

Los estudiantes que participan en clases donde se aplica el aprendizaje cooperativo, pueden desarrollar actitudes positivas hacia ellos mismos y hacia las matemáticas, se afirma esto debido a las investigaciones que se han realizado y la experiencia.

Wimbish (1992) observó cambios en las actitudes de los estudiantes en un salón de clases de matemáticas. Estudiantes que al principio dudaban de sus habilidades, al final del curso pensaron que lo estaban haciendo tan bien como sus otros compañeros de equipo. Los estudiantes de forma individual expresaron un fuerte sentido por ayudarse a ellos mismos o a otros.

Después de participar en esta forma de aprendizaje cooperativo, los estudiantes fueron más sensibles a evaluar sus ideas y más sensibles para explorar nuevas y mejores formas para resolver problemas.

Según Hagelgans *et al*. (1995), Wimbish observó también que algunas viejas actitudes persistieron después de un semestre de trabajo en grupos de aprendizaje cooperativo. Para muchos estudiantes la memorización de fórmulas se mantiene como la esencia de las matemáticas, y hubo una fuerte tendencia a ligar el entendimiento con la memorización. Por otro lado, los estudiantes expresaron que habían intentado explicar un concepto a otros miembros de su grupo, evaluando el entendimiento de un concepto y practicando para mejorar sus habilidades usando una computadora fuera de clase.

Schwingedorf y Wimbish (1994, citado en Hagelgans *et al.*, 1995), en los estudios preliminares de un curso de dos semestres de Cálculo para estudiantes de ciencias sociales y de la vida, reportaron otros cambios en las actitudes de los estudiantes; una actitud más positiva hacia las matemáticas y un incremento en habilidad para resolver problemas.

Mostraron una sensibilidad para hablar acerca de hacer matemáticas como una aproximación colaborativa para resolver problemas. Estos estudiantes fueron menos dependientes de un profesor como la única fuente de conocimiento y ampliaron su trabajo en forma de aprendizaje cooperativo.

Cuando en un salón de clases los estudiantes trabajan en pequeños grupos con el fin de lograr un objetivo en común, se espera que se pongan en juego varios aspectos importantes como: la comunicación entre el grupo, la reflexión de las ideas aportadas y, sobre todo, una discusión que los lleve a concluir acerca del problema en cuestión. Esto conduce a que los estudiantes construyan activamente su propio conocimiento.

El trabajo cooperativo en pequeños grupos conlleva problemas inherentes debido a la heterogeneidad de grupos de estudiantes. Los problemas de tipo social son una dificultad importante en aspectos del trabajo cooperativo, esto proviene que no se puede desligar el aspecto educacional con el aspecto social. Hagelgans *et al.* (1995) nos comenta las experiencias de un asistente de laboratorio:

> *Pensando en mis observaciones, creo que es una combinación de aspectos sociales y académicos los que afectan de manera efectiva a los grupos. Grupos que son socialmente compatibles parecen trabajar bien juntos, si es que ellos también tienen una actitud positiva hacia la clase. Grupos en los cuales llevan una ventaja académica no funcionan tan bien hasta que llegan a ser socialmente compatibles. Antes de ser amigos, trabajan mejor solos que en grupo.* (p. 72)

Según Hagelgans, una de las dificultades de estudiantes y profesores en el trabajo de grupos de aprendizaje cooperativo es saber cómo comenzar el análisis. Comenzar y vencer una situación aparentemente remediable puede ser el mayor problema para los principiantes y, a veces, también para los expertos.

Dentro de las observaciones de Wimbish (1992), se encuentra una pareja de estudiantes que usa una técnica llamada “conversación estructurada”. Esta técnica es una forma del método heurístico de Polya para resolver problemas (Polya 1945), combinada con preguntas que guían el desarrollo de cada etapa de la resolución del problema.

La técnica de la conversación estructurada se basa en el método de Polya y combina la estructura de cuatro pasos con una serie de preguntas que conllevan al entendimiento del problema. Esencialmente, el primer paso que propone Polya (1945) es entender el problema y sugiere una serie de preguntas, por ejemplo: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?, ¿cuál es o son las condiciones y si son suficientes para determinar la incógnita?

Esto sin duda es importante en una sesión en donde los estudiantes trabajan en grupos de aprendizaje cooperativo en un ambiente de resolución de problemas. El inicio de una conversación estructurada, puede augurar el éxito o el fracaso en una actividad que involucre el trabajo cooperativo. En caso de no darse, es una dificultad a la que se enfrenta el grupo y en el que pocas veces los estudiantes tienen conciencia.

Hagelgans et al. (Ibíd.) Proponen formas de cómo conformar pequeños grupos de aprendizaje cooperativo. Se sugiere que los grupos sean heterogéneos y estén formados por tres o cuatro estudiantes. En un grupo heterogéneo las experiencias de los estudiantes implican, al menos supuestamente, diferentes puntos de vista. El número de estudiantes de un grupo afecta en la eficiencia y productividad de los grupos. De acuerdo con Hagelgans et al. (Ibíd.), cuatro estudiantes eventualmente pueden separarse en dos subgrupos de dos estudiantes cada uno y luego regresar al grupo completo; pares de estudiantes pueden fácilmente trabajar en un cálculo; los pares pueden trabajar en habilidades orientadas a ensayar actividades; grupos heterogéneos de cuatro permiten una adecuada combinación de los talentos individuales y fuentes tan buenas como la posibilidad de balancear el género (dos hombres y dos mujeres); un grupo de cuatro puede sostenerse por sí mismo si un estudiante se “aparta del grupo”; un grupo de cuatro encamina de manera más efectiva el trabajo, la conversación estructurada, y los pensamientos reflexivos.

Se recomiendan que los instructores distribuyan el talento, pericia, y varias características sociales representadas en el salón de clase para formar grupos heterogéneos. Mientras los estudiantes deben ser compatibles y capaces de trabajar juntos fuera del salón de clases, se ha observado que las conversaciones acerca de los problemas son los más ricos y los más productivos posibles si los grupos representan una amplia base de experiencias de vida como sea posible.

Una de las sugerencias destacables es que los grupos pueden ser formados por los propios estudiantes, eligiendo compañeros con los que tengan cierta afinidad e incluso cierta amistad. Se ha llegado a observar que los estudiantes se sienten cómodos y motivados cuando los integrantes del grupo son sus amigos o son estudiantes con quien comparten mucho tiempo en horas extra-clase.

Sepúlveda y Santos (2006) desarrollan e implementan una forma de instrucción consistente con las ideas del aprendizaje cooperativo, previamente mencionadas, y lo articulan con las ideas del aprendizaje de las matemáticas mediante la resolución de problemas, usando principalmente actividades de los paquetes de evaluación balanceada (Balanced Assesment Package for the Mathematics Curriculum, 1999; 2000).

La forma particular de instrucción propuesta por Sepúlveda y Santos (2006) consta de las siguientes etapas:

- *Actividad previa.* El profesor da al grupo una breve introducción a la tarea, con el propósito de ubicar a los estudiantes en contextos similares a la actividad; destacando la importancia que representa su participación en el desarrollo de la sesión.
- *Trabajo en equipos.* Se organiza en equipos de tres, en donde cada grupo haya estudiantes con distintos niveles de desempeño, de tal forma que tengan posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos. Al concluir el periodo asignado al trabajo por equipos, cada uno entrega su reporte.
- *Presentaciones.* Cada equipo presenta a toda la clase su solución a la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.
- *Discusión colectiva.* El profesor promueve la discusión colectiva entre los estudiantes, con la idea de analizar los diferentes métodos de solución que cada grupo presenta y, cuando sea necesario realiza una sistematización de las ideas e identifica posibles extensiones al problema.

- *Trabajo individual.* A partir de la discusión colectiva, los estudiantes vuelven a la tarea y aplican los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción, abordando individualmente la tarea.

  (p. 1394)

2.6. Paquetes de Evaluación Balanceada

¿Qué tipo de tareas involucran a los estudiantes en procesos de resolución de problemas y promueven un aprendizaje con entendimiento? ¿Qué características tienen los problemas que favorecen una dinámica de resolución de problemas en pequeños grupos de aprendizaje cooperativo?

Al respecto, se han desarrollado una serie de trabajos que tienen como fundamento la filosofía de la resolución de problemas.

En los años de 1999 y 2000, un grupo de trabajo encabezado por Alan Schoenfeld, desarrolló una serie de actividades enmarcadas en el Proyecto Paquetes de Evaluación Balanceada para el Currículum de Matemáticas, como una respuesta a la demanda planteada por el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, 1995) en los estándares para la evaluación de las Matemáticas Escolares. Con una nueva concepción de lo que es la evaluación, se pretende evaluar el desempeño matemático de los estudiantes de nivel medio superior de Norte América. Estas actividades hacen énfasis en los contenidos matemáticos y en los procesos de resolución de problemas, lo cual refleja, claramente, la visión contemporánea de los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares (NCTM, 2000), cuyo principio de evaluación es: “La evaluación debe apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a los profesores como a los estudiantes.” (p. 5)

Así, en los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment Package, 1999, 2000), se describen las características del significado de la evaluación y de su diseño utilizado:

> *El diseño de evaluación debe: enfocarse en procesos e ideas importantes de la disciplina, en este caso, de las matemáticas escolares; proveer a los estudiantes la oportunidad de demostrar lo que saben y lo que pueden hacer; ser balanceado respecto al currículum del NCTM; funcionar como instrucción para estudiantes y profesores; y servir como parámetro para conocer las debilidades y puntos fuertes de los estudiantes.* (p. vi)

La evaluación balanceada, tiene que ver con los aspectos situados en la cita anterior. Es decir, una evaluación que solo se enfoca en los cálculos no es balanceada, de la misma manera, una que se enfoca en patrones, o funciones excluyendo la geometría. La importancia de entenderlo como un balance respecto a estos contenidos, tiene que ver con la forma y el desarrollo del pensamiento matemático, y a las ideas plasmadas en el NCTM (2000).

Los Paquetes de Evaluación Balanceada están organizados en torno a cuatro dimensiones: *el contenido matemático; los procesos matemáticos; el tipo de tareas; y los contextos y circunstancias.*

El contenido matemático se refiere a la inclusión de: números y cantidades; patrones, funciones y funciones; geometría, formas y espacio; manejo de datos, estadística y probabilidad; matemáticas discretas, entre otras cosas.

Los procesos matemáticos se refieren a las fases para resolver un problema, por ejemplo, el razonamiento, la modelación, la formulación, la transformación, la manipulación, la capacidad de concluir, probar y evaluar; además de la comunicación para reportar y poner a juicio o a prueba los resultados.

En cuanto al *tipo de tareas*, deben ser no rutinarias, problemas un tanto abiertos, que den cabida a una o más soluciones, con diferentes tipos de metas en las soluciones; es decir, puramente matemáticas o aplicaciones ilustrativas de matemáticas.

Finalmente, las *circunstancias de la ejecución*. Tiene que ver con la duración de las tareas, las formas de expresión o presentación, las formas de trabajo, y los modos de responsabilidad de los estudiantes.

Los Paquetes de Evaluación Balanceada contienen cerca de 30 tareas o problemas, en cada problema o tarea se da la información y descripción acerca de las matemáticas inmersas, procesos y conceptos, manejo de la evaluación y algunas respuestas típicas de los estudiantes. Además, se describe cada tarea, se enlistan los requerimientos matemáticos y conocimientos matemáticos previos, deseables en los estudiantes, para atacarla, los elementos esenciales del proceso y las condiciones en las que se resolverá.

Algunos aspectos importantes de las tareas contenidas en los paquetes, son las siguientes. Las tareas están planteadas de una manera que resulten atractivas para los estudiantes, la mayoría se pueden abordar con diferentes acercamientos, algunas no tienen solución única y están planteadas en contextos reales, de diferente naturaleza. De esta manera se promueve en los estudiantes tres aspectos importantes establecidos en los Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del NCTM (2000): que la tareas motiven a los estudiantes a expresar lo que saben; que los alienten a estar dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión y el intercambio de experiencias; y que permitan recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución.

Se incluye en los paquetes una pequeña guía que explica y da sugerencias de de cómo usar los paquetes, que explica las diferentes situaciones en las que se pueden usar, en las que destacan; su implementación en el proceso formal de evaluación bajo ciertas condiciones controladas; incluir tareas dentro del currículum; y para enriquecer clases de enseñanza en resolución de problemas.

A partir del 2003, se han estado implementando en México algunas de las tareas de los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 1999, 2000), para valorar su potencial y promover procesos de resolución de problemas, a través de grupos de aprendizaje cooperativo (Santos y Sepúlveda, 2004; Sepúlveda y Santos 2006), quienes proponen una forma particular de instrucción descrita en el apartado anterior.

Por su parte Lesh et al. (2000) desarrollaron las llamadas actividades reveladoras del pensamiento, las cuales están diseñadas para que los estudiantes revelen los procesos de pensamiento que exhiben en su resolución:

> *Las actividades reveladoras del pensamiento son a su vez actividades que implican la modelación matemática, la descripción, explicaciones y construcciones que los estudiantes generan mientras trabajan en ellas directamente, revela el hecho de cómo están interpretando las situaciones matemáticas que encuentran por medio de la manera en que estas están siendo matematizadas o interpretadas... Las actividades propuestas cuestionan a los estudiantes para que expliquen el razonamiento usado en sus soluciones de tal manera que revelen de forma efectiva el entendimiento que han tenido con base en los objetivos de la instrucción tradicional. Se pretende que los estudiantes desarrollen, por ellos mismos, una interpretación matemática explícita de la situación.* (pp. 593, 594)

Con esto se espera que cuando los estudiantes resuelvan este tipo de actividades revelen explícitamente el desarrollo de constructos o modelos conceptuales utilizadas.

Lesh *et al*. (2000) propone seis principios para la elaboración de actividades reveladoras del pensamiento:

1. **Principio de la construcción de modelos.** Las actividades deben servir para detectar los sistemas conceptuales que usan los estudiantes para construir o interpretar sistemas interesantes. Un modelo se caracteriza, principalmente, porque se usa un sistema para describir otro. Si se quiere que los estudiantes construyan un modelo con ayuda de las matemáticas por medio de situaciones de la vida real y lo logran, crean como producto un modelo en el cual una variedad concreta de sistemas representacionales (por ejemplo: figuras; mapas; tablas; gráficas; ecuaciones) son necesarios con el objetivo de describir las relaciones, operaciones y patrones que forman parte del modelo básico que se quiere ilustrar.

   Para satisfacer el principio de construcción del modelo, una pregunta principal es: *¿la tarea pone a los estudiantes en situaciones donde ellos reconocen la necesidad de desarrollar un modelo por medio de interpretación de lo dado, metas, y posibles procesos de solución, en una situación compleja de resolución de problemas?*

2. **Principio de la realidad**. También llamado también principio de significatividad, es importante para los estudiantes el hecho de intentar tomar sentido a la situación basada

en extensiones de su propio conocimiento y experiencia personal. Los desarrolladores del currículum tienen una forma de evaluar si este principio se satisface: ¿Esto podría suceder en una situación de la vida real?

3. **Principio de auto-evaluación.** Un sistema conceptual involucra también la selección, el refinamiento y la elaboración. ¿El enunciado del problema sugiere un criterio apropiado para evaluar la utilidad de soluciones alternativas? ¿Está claro el propósito? (qué, cuándo, por qué, donde, para quién) ¿Los estudiantes son capaces de juzgar por ellos mismos cuándo sus respuestas requieren de mejoras, refinamientos o extensiones para algún propósito dado? ¿Reconocerán cuando han terminado? o ¿los estudiantes necesitarán continuamente preguntar al profesor: "es suficiente con esto"? Este principio se aplica en el proceso de resolución de un problema en pequeños grupos: los estudiantes comienzan con diferentes ideas; luego, para progresar, el equipo necesita detectar deficiencias en sus formas de pensamiento, comparar ideas alternativas y seleccionar las que son más y menos útiles, integrar las fortalezas y minimizar las debilidades de las formas alternativas de pensamiento, extender o refinar las interpretaciones más prometedoras y evaluar las adaptaciones hechas.

4. **Principio de la construcción de la documentación.** Se plantea la pregunta: ¿Responder a la pregunta requerirá que los estudiantes revelen explícitamente su pensamiento al abordar la situación mediante la revelación de los datos, metas, posibles caminos de solución que toman en cuenta?, En particular, estas actividades ¿proveerán a los estudiantes una pista que pueda ser examinada para determinar que con qué y acerca de qué tipo de sistemas estuvo pensando el estudiante? La importancia de este principio radica en que fomenta la auto reflexión. No es fácil para el estudiante ir más allá de su pensar; es decir, pensar acerca del propio pensamiento.

Al respecto, Lesh (2000) nos indica:

> *Para facilitar la reflexión, una efectiva actividad reveladora del pensamiento debe encaminar a los estudiantes a exteriorizar sus procesos de pensamiento, tanto como sea posible. Un camino natural en que los estudiantes pueden exteriorizar sus formas de pensar, es el trabajo en grupos donde procesos de planear,*

> *monitorear y evaluar deben ser llevados a cabo explícitamente. Un método más efectivo es enfocarse en actividades en las cuales los productos que los estudiantes crean requieran ser divulgados automáticamente, acerca de qué tipo de objetos matemáticos, relaciones, operaciones y patrones están pensando.*
>
> (p. 626)

Por ello es importante la justificación de los resultados de los estudiantes como un complemento de las ideas. Si los estudiantes son capaces de esto, evaluar la calidad de los resultados implica evaluar la calidad de los razonamientos matemáticos usados para obtener el resultado final.

5. Principio de compartibilidad y reusabilidad. ¿El modelo que se está desarrollando es útil solamente para la persona que lo desarrolla y aplicable solamente a la situación particular presentada en el problema, o provee una forma de pensar que es compartible, transportable, fácilmente modificable, y reusable? Los estudiantes que se enfrentan con la necesidad de ir más allá del desarrollo de herramientas personales a desarrollar formas generales de pensamiento.

6. Principio del prototipo efectivo. ¿La solución provee un prototipo útil para interpretar otra situación? Después de tiempo de haber resuelto un problema, ¿el estudiante piensa en él cuando se enfrenta a otra situación estructuralmente similar?

Las actividades reveladoras del pensamiento pretenden dar información más allá de los meros objetivos de instrucción, o del comportamiento del estudiante en la resolución de actividades que los libros de enseñanza tradicional proponen. Las actividades propuestas cuestionan a los estudiantes para que expliquen el razonamiento usado en sus soluciones, de tal manera que revelen de forma efectiva el entendimiento que han tenido con base en los objetivos de la instrucción tradicional. Se pretende que los estudiantes desarrollen, por ellos mismos, una interpretación matemática explícita de la situación; los estudiantes deben matematizar situaciones, lo que quiere decir, hacer descripciones simbólicas de situaciones significativas.

3. METODOLOGÍA

La actividad pretende obtener un resultado numérico; el cual se podrá analizar, de tal forma que dicha información cuantitativa será clave para el entendimiento de cómo es que los estudiantes de bachillerato resuelven problemas matemáticos, y así proponer tareas o métodos para una mayor comprensión y manejo de técnicas en la resolución de problemas; dicha investigación se realizará partiendo del análisis de como se enfrentan algunos estudiantes a tareas propuestas de matemáticas pudiendo ser orales o escritas.

La investigación se llevará a cabo mediante la aplicación de una tarea, la descripción y el análisis de las ideas y los procesos utilizados por los estudiantes al momento de resolverla. Se establecerán previamente las tareas a aplicar a los estudiantes, la forma de trabajo que se desarrollará durante la actividad, la recopilación de la información obtenida durante el desarrollo de la tarea, como pueden ser evidencias del tipo escrito, oral o de actitud, con las cuales se hará una descripción y un análisis cualitativo.

Especialmente, nos interesa investigar acerca del potencial de algunas de las tareas de aprendizaje planteadas o reformuladas del proyecto, encabezado por Schoenfeld, denominado Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (1999, 2000), las cuales reflejan la visión contenida en los Principles and Standards for School Mathematics del NCTM (2000), que sugieren la importancia de que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de problemas que les motiven a expresar lo que saben e impliquen contenidos fundamentales del currículum.

Destacamos la importancia de analizar todos esos procesos utilizados por los estudiantes al momento de resolver un problema matemático, ya que nos permiten darnos cuenta de las formas de pensar que tienen, cuales son los métodos o técnicas con las que están más familiarizados o conocen, que estrategias están utilizando o si detectan varias formas de llegar a una solución.

Las actividades que fueron usadas para este propósito son: diseño de una escalera y diseño de una casa de campaña. Son tareas planteadas en los Paquetes de Evaluación Balanceada

(Schoenfeld *et al.* 1999, 2000), fueron traducidas previamente y adaptadas a características más familiares a los estudiantes.

Como forma de instrucción principal se usará la desarrollada por Sepúlveda y Santos (2006), cuyos principios básicos, como ya se mencionó anteriormente, se centran en las ideas del trabajo cooperativo en pequeños grupos de Hagelgans *et. al.* (1995).

El estudio se llevó a cabo en la preparatoria “Colegio Novel de Morelia”, programando una sesión de dos horas para la aplicación de cada actividad con el grupo de estudiantes, cabe destacar que es un grupo a cargo de la titular de esta tesis.

A partir del mes de enero de 2014 se comenzó a trabajar con los estudiantes de cuarto semestre en resolución de problemas matemáticos; se aplicaron cinco actividades, dos de estas aplicadas en el mes de febrero, de las cuales una fue prueba piloto, con lo que se pretendía que el estudiante se familiarizara con la resolución de problemas y conociera como seria la aplicación formal. Posteriormente en marzo se hizo la aplicación de tres actividades más, siendo dos de estas pruebas piloto en forma de actividades previas a las que se pretendían aplicar para el estudio.

Durante la aplicación de las actividades previas, el grupo de estudiantes se conformó por diecinueve jóvenes, siendo este siempre el mismo número de estudiantes para la aplicación. Se recibió gran apoyo de la dirección de la institución a cargo del Ing. Jaime Flores Puebla, el cual respaldo al profesor titular de la asignatura y también titular de esta tesis, lo cual permitió generar un ambiente cordial y de trabajo, favoreciendo al buen desarrollo de las actividades aplicadas.

La selección de los diecinueve estudiantes que participaron en la investigación fue de acuerdo al desempeño por grupo y de forma individual, donde se pedían algunos requisitos como:

- Buena actitud mostrada durante semestres previos,
- disposición de trabajo,
- trabajo cordial y respetuoso entre compañeros,
- comunicación clara entre compañeros en el contexto académico,

- participación en clase,
- puntualidad y,
- calificación en parciales previos.

Se contó con un total de treinta y cinco estudiantes de cuarto semestre, los cuales eran serios candidatos para participar en la actividad planeada, sin embargo al tomar en cuenta los aspectos enlistados anteriormente se hizo un filtro llegando a un total de diecinueve estudiantes. El filtro quitó aquellos estudiantes que su conducta no permitiría el buen desarrollo de la actividad pretendida, ya que no estaban dispuestos al trabajo en equipo o de participación con otros compañeros. El profesor realizó la selección de diecinueve estudiantes que cumplieran con la mayoría de los requisitos, para que se tuviera éxito en el desarrollo de la actividad, debido a que el profesor era el que conocía las características de los estudiantes en cuanto al trabajo en clase, actitudes y otros. El no tomar en cuenta a los dieciséis estudiantes restantes se atribuye al hecho de que la mala conducta o poca participación sin duda perjudicaría a la investigación, pues involucraría variables como la disciplina que es algo que no nos interesa estudiar en este momento.

El estudio se llevó a cabo básicamente en tres fases: revisión de las tareas a aplicar, la experimentación y, el análisis de los resultados. Se describen a continuación cada una de las fases.

Revisión de las tareas por aplicar. En esta fase se analizan los problemas que serán usados para la aplicación. Una vez que se han elegido los problemas, estos se reformulan, en caso de que se requiera, y se resuelven intentando establecer los conocimientos matemáticos que se deben tener para abordarlos; los posibles caminos de solución y; las estrategias que se pueden tomar en un momento dado para avanzar o bien para resolverlos. Una parte importante en esta fase es la determinación de la forma de trabajo durante la aplicación de los problemas o tareas. Las fases del trabajo serán guiadas y monitoreadas por el profesor aplicador, y serán mencionadas al inicio de la sesión de las actividades, a los estudiantes.

La aplicación se hará con base en una forma de trabajo en el salón de clase sistematizada por Sepúlveda y Santos (2006), cuyo fundamento teórico está basado en el aprendizaje cooperativo de Hagelgans et al., (1995), que promueve los procesos de resolución de problemas mediante la combinación del trabajo colectivo, en pequeños grupos y en la clase completa, con el trabajo individual; lo cual favorece junto con el tipo de tareas, la externalización de las ideas de los estudiantes. Así, Sepúlveda y Santos (2006) distinguen cinco etapas en la aplicación de las tareas: *actividad previa, trabajo en pequeños grupos, presentaciones de los equipos, discusión colectiva*, *trabajo individual*. Además, en caso de ser necesario, para profundizar más sobre aspectos que llamaron la atención sobre el comportamiento de los estudiantes, se realiza una fase de entrevistas semi estructuradas basadas en tareas (Goldin, 2000).

Con esta forma de instrucción, la idea es favorecer el trabajo en pequeños grupos, la comunicación y la discusión de las ideas matemáticas dentro de una comunidad de manera colectiva. A continuación describimos más ampliamente cada una de las etapas:

La actividad previa se hace con el propósito dar una introducción a la tarea y de ubicar a los estudiantes en contextos similares a los de la actividad; destacando la importancia que representa, para su aprendizaje y para esta investigación, su participación en el desarrollo de la sesión, ya que la forma de instrucción es algo que poco se practica en nuestro sistema educativo.

Los estudiantes se organizan en pequeños grupos de tres para llevar a cabo el trabajo en equipos, procurando que en cada equipo haya estudiantes con distintos niveles de desempeño y de comunicación, de tal forma que se tenga la posibilidad de interactuar entre ellos y los demás equipos. Al concluir el periodo asignado al trabajo en pequeños grupos, cada equipo entrega su reporte escrito.

Las presentaciones de los equipos se hace a petición del profesor y cada pequeño grupo expone ante la clase completa su solución o los avances que alcanzaron en la tarea, permitiendo que los miembros de los demás equipos pregunten libremente a quienes exponen.

El profesor promueve la Discusión colectiva entre los estudiantes, moderando su participación, con la idea de analizar los diferentes métodos de solución que cada pequeño grupo presenta y, cuando sea necesario, realiza una sistematización de las ideas vertidas por los estudiantes e identifica posibles extensiones al problema.

A partir de la discusión colectiva, los estudiantes vuelven a la tarea para realizar el Trabajo individual y atacan nuevamente la tarea, con el propósito de que apliquen los nuevos entendimientos que se generaron como producto de la interacción en pequeños grupos y en forma colectiva con la clase completa.

La fase de análisis de los resultados se llevará a cabo, principalmente, con base en tres formas de evidencia, hojas, grabaciones de audio y video. La observación en el aula, en donde el profesor aplicador observa la forma de trabajo de los diferentes equipos de tal manera que se distinga el camino que cada equipo está siguiendo en la resolución de la tarea, para reforzar y guiar el análisis de las evidencias:

- La grabación de audio y video será valiosa en el proceso, puesto que se espera que los estudiantes externalicen sus ideas, razonamientos y estrategias en el proceso de resolución, lo cual aporta información, obviamente importante, para el análisis. A cada equipo se le coloca una grabadora de audio en una zona donde se pueda captar perfectamente sus voces. Un asistente grabará video de las sesiones completas enfocándose principalmente en los equipos en donde se perciban discusiones internas relevantes y en las presentaciones de cada grupo. Aunque no lo pareciera, ambas evidencias son complementarias, de tal manera que la videograbación puede dar más información acerca del desarrollo de las ideas en cada uno de los equipos ya sea dentro de la interacción oral o escrita en las hojas de trabajo.

- Otra de las evidencias son las respuestas en las hojas de trabajo, las cuales dan información acerca de: las formas de solución, las herramientas matemáticas usadas, el razonamiento lógico matemático que usan en el proceso y la interpretación de las soluciones matemáticas.

El papel del profesor se basa en el proceso en la observación y la moderación de las discusiones y, eventualmente, la sistematización de los procesos y/o las ideas matemáticas propuestas por los estudiantes. El profesor debe ser un guía, debe dirigir, optar por una actitud de motivador realizando preguntas a los estudiantes, y respondiendo solo las preguntas planteadas de tal manera que el problema no pierda el reto que lo caracteriza.

4. PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Nos interesa describir y analizar los procesos de resolución de problemas y la efectividad de las tareas en los contextos descritos anteriormente.

El objeto de este capítulo es mostrar el trabajo desarrollado por los estudiantes durante la aplicación de las actividades, así como describirlo y analizarlo. La actividad fue realizada en grupos pequeños de tres integrantes y únicamente uno conformado por cuatro.

En lo que nos vamos a enfocar es en aquellos métodos utilizados y la forma en la que se enfrentaron al problema planteado, detectando que conflictos tuvieron que enfrentar, como los lograron superar, y si no pudieron, como fue la comunicación en el equipo de trabajo y en el grupo completo, como fue la interacción con los demás equipos y con el profesor, y cuáles fueron sus conclusiones individuales.

Se analizan estas descripciones para establecer las características y aspectos relevantes de las actividades según el NCTM (2000), y el proyecto Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum (1999, 2000). Se analiza la viabilidad de las actividades en temas concretos en el currículum de matemáticas, en una sesión de resolución de problemas.

Este capítulo se divide en dos subcapítulos básicos. Cada subcapítulo indica con el nombre de cada actividad que se aplicó durante la investigación.

Las dos actividades fueron aplicadas a seis equipos, los cuales están conformados de la siguiente forma:

- Equipo 1: Elsa, Karime, Sam y Martín.
- Equipo 2: Patricia, Ricardo y Hugo.

- Equipo 3: Jazmín, Carlos e Iván.
- Equipo 4: Edmy, Daniel y Anel.
- Equipo 5: Ingrid, Néstor y Polet.
- Equipo 6: Ernesto, Adriana y Alfredo.

4.1. Diseño de una escalera

Es una tarea clasificada como larga en el proyecto encabezado por Schoenfeld de los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment package for the Mathematics Curriculum, 1999), en donde interviene el concepto de pendiente aplicado al contexto de una escalera; además, se requiere tener la noción de desigualdades y cierto manejo de ellas para tener éxito en la resolución de este problema.

El principal objetivo es diseñar una escalera que cumpla con ciertas normas, determinando cuántos escalones son requeridos y cuáles deben de ser sus medidas.

Se trata de un problema que tiene más de una solución. Sin embargo durante el proceso de solución el estudiante debe establecer ciertas suposiciones; por ejemplo, puede partir de cierto número de escalones o bien, el tamaño de la huella, que lo lleven a resultados lógicos dentro del contexto.

El problema pide a los estudiantes que diseñen una escalera que tenga cierta elevación y que tome en cuenta ciertas normas para su diseño, que son:

Normas para diseño de escaleras: la pendiente de la escalera debe estar entre 0.55 y 0.85. El doble de la elevación más el recorrido del escalón, debe estar entre y 63,6 cm y 60,96 cm, y no debe haber escalones irregulares, cada escalón debe ser del mismo tamaño.

Además, se pide a los estudiantes que comuniquen y escriban claramente las suposiciones que hicieron para establecer su diseño. Se les pregunta lo siguiente ¿cuántos escalones tiene tu diseño, y cuál es el tamaño de la pisada (o huella) y elevación (o contrahuella) de cada escalón? Adicionalmente se les pide que incluyan sus cálculos y que digan cómo tomaron en cuenta cada una de las normas.

Los términos usados son: pisada o huella, parte horizontal de un escalón, elevación o contrahuella: parte vertical de un escalón, pendiente: medida de la inclinación de la escalera, se encuentra dividiendo la longitud de la elevación entre la longitud de la pisada.

El problema se les presentó con el formato que se muestra en la Figura 4.10.

Diseño de una escalera

Este problema te da oportunidad de:

Diseñar una escalera que cumpla con ciertas normas.

Usar el concepto de pendiente en una situación práctica.

Problema

Tienes que diseñar una escalera para alcanzar una elevación total de 335 cm. Las normas del diseño se te dan enseguida.

Normas de diseño

La pendiente de la escalera debe ser entre 0.55 y 0.85.

El doble de la elevación más el recorrido de la huella debe estar entre 60.96 y 63.60 centímetros.

No debe haber escalones irregulares; cada escalón debe ser del mismo tamaño.

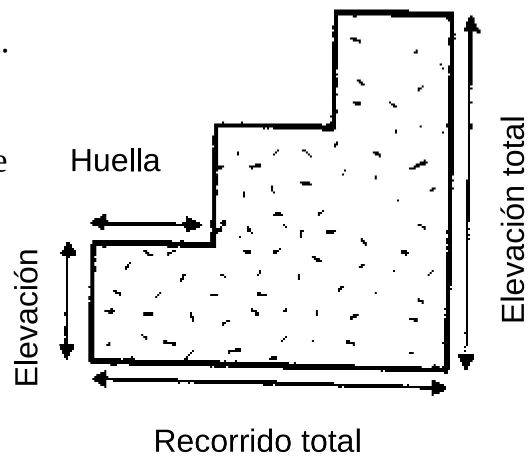
Términos usados

Huella: parte horizontal de un escalón.

Recorrido: longitud de la huella.

Elevación: longitud de la parte vertical de escalón.

Pendiente: razón entre los elementos de una escalera, elevación entre el recorrido.



$$Pendiente = \frac{Elevación}{\mathrm{Re}\,corrido}$$

¿Cuántos escalones son, con su huella y elevación, y cuál es su tamaño? Expresa tu decisión claramente para diseñar la escalera; incluye tus cálculos.

Figura 4.10. Formato en que se presentó Diseño de una escalera.

4.1.1. Respuestas de los equipos

Primero se dio a los estudiantes una introducción que permitiera ubicarlos en el contexto de la tarea, así como cuáles son las intenciones y objetivos de la misma, y lo que se espera de ellos. Se apoyó con el concepto de la pendiente, debido a que algunos de los jóvenes manifestaron no recordar a que se refería eso; el profesor promovió con los estudiantes un acercamiento general e intuitivo sobre el concepto de pendiente, a través de ejemplos de la vida diaria y del entorno en el que viven, para que pudieran relacionar el concepto con experiencias concretas.

EQUIPO 1

El Equipo 1 comenzó a trabajar de inmediato sobre la solución de la tarea. Comenzó a analizar el problema para tres escalones, debido a que la figura dada en la actividad sólo mostraba esta cantidad y así comenzó la discusión para calcular la medida de la huella indicando las posibilidades reales de los valores a otorgar. Sam fue la que tomó la iniciativa para proponer ideas que pudieran acercarse a la solución.

Sam: *Pues yo digo que la huella debe de medir unos… 30 cm, ¿no?*

Karime: *Yo digo que también 30, ¿cómo sería con 25 cm?*

Sam: *No, porque así simplemente tu pie mide 23 cm.*

Karime: *Eso sí.*

La conclusión a la que llegaron es que 30 cm de huella era una cantidad viable propuesta por Sam ya que afirmaba que apenas algunas personas calzaban del 23 y otros números, siendo este un tamaño adecuado para la pisada. Así mismo indicaron que la elevación podría ser de 16 cm. Para esto comenzaron a dudar acerca del número de escalones que contendría la escalera.

Sam: *Si son 3 escalones sería 16x3, serían 48*

Karime: *4, ¿por qué saldrían?*

Michelle: *Pero, ¿qué estas multiplicando?*

Sam: $16x3$.

El equipo pide apoyo del profesor.

Michelle: *Maestra,¿ cuántos escalones son?*

Martín: *3, ¿no?*

Profesor: *Pues, eso es lo que quiero que ustedes me digan.*

Martín: *¡Ah!*

Profesor: *O sea ustedes me tienen que decir cuántos escalones hay en esa escalera con ese recorrido, cumpliendo estos parámetros, cumpliendo la pendiente y elevación y todo lo que te pide el problema.*

El equipo presenta nuevamente problemas con la definición de la pendiente y expresa al profesor su duda diciendo.

Sam: *¿La pendiente sería esto?* [Señala en el dibujo de la tarea la inclinación de la escalera].

Sam: *Entonces sería, a ver según esto, vamos a ver si quedan 20; dividimos 335 entre según la elevación que sacamos que es 16. Ahora para el recorrido total sería 30.*

Michelle: *O sea la huella esto va a medir 30 cm y esto 16* [señalando la elevación].

Sam explica que si la pendiente es 0.60, se iguala a elevación total entre “x” porque no se tiene el recorrido total. Lo que Sam expresa es:

$$0.60 = \frac{355}{x}$$

Sam procede a despejar $0.60x355 = 213$, a lo que Martín corrige a Sam indicando que puso como elevación total 355 y son 335, a lo cual afirma Sam es 335.

Sam procede a revisar el despeje ya que tiene dudas de si está haciendo correctamente las operaciones. $\frac{335}{213} = 1.57$; $0.60x335 = 201$; $0.65x335 = 217$.

Sam: *Sería 0.63*

Martín: *¿Entonces ya acabamos?*

Sam: *No, tenemos que checar como está el despeje* $0.63 = \frac{335}{x}$

El equipo se apoya con el profesor.

Sam: *Es que no sabía cómo se despejaba, me salía al revés, lo que hicimos fue hacerlo cruzado para despejar.*

Profesor: *Si, así está bien*

Se llega al punto donde el equipo comienza a confundirse con los parámetros que se piden ya que Sam afirma que la huella tiene que estar entre 60.96 y 63.90. Poco después hacen una revisión de la actividad y se dan cuenta que este parámetro lo debe cumplir el doble de la elevación mas el recorrido.

Sam: *Ah no pero el doble de la elevación…. Entonces lo que tenemos es la elevación a fuerzas va ser 335, el recorrido 20. Vamos a decir 30. Entonces 530 entre 30 nos da 17.66. A ver digamos que son 17 escalones.*

$17x30$ *nos da 510, 335 entre 510 es igual 0.65*

Karime: *Tenemos que ir aumentándole más bien el número de escaleras ¿no? ahora intentemos con… pusiste cuantos 17 ¿no?, pusiste 17 escaleras ¿no?*

Sam: *Si pero creo que ya quedo, a ver ¿cuántos escalones serían?, ¿17?, con su huella y elevación ¿cuál es su tamaño?, y la elevación sería de 16x17, no queda.*

Karime hace una propuesta interesante después de preguntar si obligatoriamente tienen que ser 17 escalones como Sam lo propone, pregunta si no podrían probar con 20 escalones o ir variando la cantidad para ver qué resultados se van obteniendo. Sam aprovecha este comentario y comienza a realizar cuentas con diferentes números de escalones obteniendo valores favorables para la pendiente pero no para la elevación.

Sam: *Si esto midiera 17... Hay no pero esperen. El doble de la elevación mas el recorrido de la huella sería 17x2 + la huella 64, ¡no ya rebasamos!*

Intentan variando el valor de la elevación a 16.5 pero se dan cuenta que no obtienen la elevación total requerida, por lo cual se cuestionan si esta exactamente tiene que medir los 335.

Sam: *¿Tiene que dar exactamente los 335 de elevación total?*

Profesor: *Si, su último escalón tiene que estar a los 335.*

Al darse cuenta que la elevación total sería de 335 calcularon si la elevación del escalón es de 16.5 cuantos escalones serían. Lo que expresaron es como lo siguiente:

$$\#escalones = \frac{335}{16.5}$$

Obteniendo 20.30, sabiendo que este resultado no era correcto ya que se tiene que tener un número entero de escalones. Sin embargo afirma que si cumple para la condición del doble de la elevación mas el recorrido

Sam: *Porque mira* $(16.5x2) + 30 = 63$ *y ahí ya me daría.*

Los cuatro integrantes del equipo se encontraban haciendo cuentas tratando de encontrar algún valor que les diera exacto. Sam hace una propuesta dándole el valor de 16.7 cm a la elevación:

Sam: *A ver* $16.7x20$ *ahí está 334. Y* $(16.7x2) + 30 \ldots$ *¡ahí esta!*

Karime: *¿Cuánto?*

Martín: *¿Qué salió?*

Michelle: *63.4. ¿De cuánto pusiste…?* [Refiriéndose a la elevación].

Sam en conjunto con su equipo llegan a la conclusión de que la elevación es de 16.7 y que entonces el número de escalones sería 20 ya que 335 entre 16.7 da 20 (aun cuando no da un número entero). Manifiestan desagrado al momento de verificar que $16.7x20 = 334$ y no cumple la elevación total.

EQUIPO 2

En este equipo, Paty fue la que tomo la iniciativa para obtener la solución. Comenzaron analizando cómo debía ser la pendiente y cómo obtenerla. Hugo uno de los integrantes del equipo comienza a darse cuenta de que tiene que cumplir con varias condiciones.

Paty: *La pendiente tiene que ser de 0.55 y… pero nos falta esto* [señalando al recorrido total].

Hugo: *Pero también los escalones no nos tienen que quedar irregulares*

Paty: *Tienen que ser iguales de aquí y aquí* [indicando huella y elevación]. *A ver, ¿cuántos escalones tienen que ser para que la pendiente nos quede entre 60.96 y 63.6?*

Hugo: *Pues tenemos que calcular la medida de cada escalón.*

Para calcular la medida de los escalones Hugo propone que se puede formar en la escalera por cuadrados para así descubrir el número de escalones que contiene. Esta idea no es del agrado de Paty y pregunta cuántos cuadrados se tendrían que dibujar.

Hugo: *No sé, pero yo creo que con el recorrido total podemos ver cuántos deben de estar dibujados con el tamaño de la huella, para que nos de esta medida* [señalando la condición de el doble de la elevación mas la huella].

Paty: *¿Y cuánto le ponemos entonces?*

Ricardo: *¿No vienen las medidas aquí?* [En la hoja].

Paty: *Aquí nada más viene la pendiente entre 0.55 y 0.85 y lo del doble de la elevación.*

El equipo se confunde con los términos que se trabajan en la actividad, la elevación y elevación total, ya que Paty comenta que si la elevación son 335, ¿cómo se le hace para obtener ese resultado que condiciona la actividad (el doble de la elevación mas la huella)?

Paty: *Si la elevación es esto* [335cm], *¿cómo da esto*? [Parámetro 60.96 y 63.6].

Hugo: *No, porque es elevación total y esta es elevación.* [Señalando en el dibujo cada uno de los término].

Paty: *El doble de la elevación más el recorrido de la huella, ah pues si ya podemos sacar la pendiente.*

Para esto proceden a buscar un valor para el recorrido total, a lo que Hugo de inmediato propone 400.

Paty: *Entonces si es 400 más o menos ¿cuánto mediría la huella?*

Hugo: *Pues entre unos 25 o 30, ¿no?*

Eligen la cantidad de 30 cm ya que afirman que es el tamaño adecuado para que quepan todos los tamaños de huella posible. Paty propone utilizar el parámetro de 63.6 para cumplir que el doble de la elevación mas la huella no rebase este límite.

Paty: *Si mide 30 entonces usando el doble de la elevación mas la huella igual a 63.6 nos queda la elevación de 16.8 cm, entonces esta sería su medida.*

Lo que realizo el equipo fue la siguiente operación:

$$2e + h = 63.6 \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{63.6 - h}{2} = \frac{63.6 - 30}{2} = 16.8$$

Con este cálculo Hugo se cuestiona si este sería el resultado que quedaría final para la elevación, es ahí donde Paty se percata de que no cumple con lo pedido en el problema.

Paty: *¡Ah no!... porque mira 400 entre 30 no da exacto el número de escalones, da 13.333.*

Hugo: *A ver prueba con 25.*

Paty: *Así nos quedarían 16 escalones. Y la elevación sería de 19.3*

Ya teniendo como resultado 16 escalones y siendo la elevación de 19.3 y la huella de 25, Ricardo interrumpe a sus compañeros para corroborar si la pendiente si cumple lo que pide la actividad.

Paty: *Si mira, porque si divides los 335 entre los 400 te da 0.83.*

Lo que el equipo realizo fue lo siguiente:

$$\text{Pendiente} = \frac{\text{Elevacion total}}{\text{Recorrido total}} = \frac{335}{400} = 0.83$$

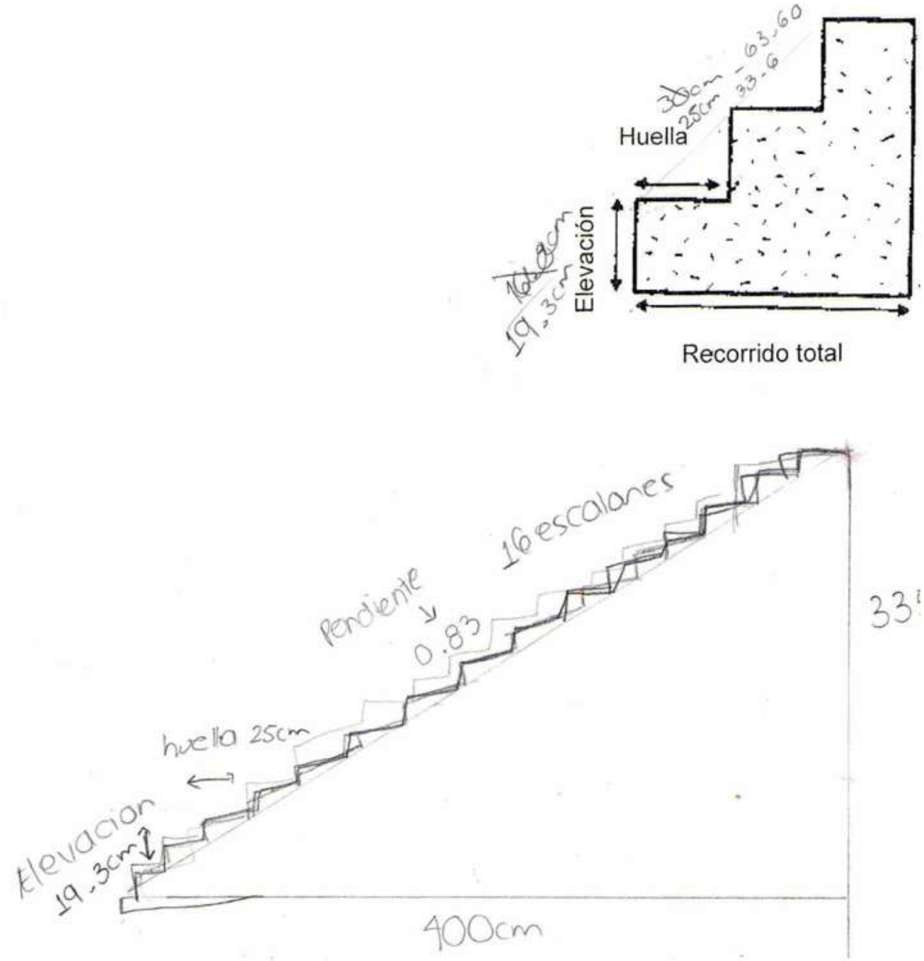


Figura 4-11: Resultados del equipo 2.

EQUIPO 3

El equipo 3 tuvo dificultades al intentar resolver la actividad y no lograron la comprensión total de lo que se pedía. Iván propuso que se dividiera la escalera ejemplificada en la actividad en cuadrados, obteniendo un total de 6. Utilizando este trazado propuso que para sacar la elevación de cada escalón se dividiera la elevación total entre el número de cuadros, expresando esto así:

$$elevacion = \frac{335}{6}$$

Dando como resultado 55.83. Ahora para la pisada o huella Carlos menciona:

Carlos: *Si entonces son 3 escalones los del dibujo pues solo hay que dividir los 335 de la elevación total entre 3.*

Lo que indica Carlos es realizar la siguiente operación.

$$Huella = \frac{335}{3} = 111.6$$

Por lo que el equipo afirma que el recorrido total sería 116.6 cm.

Jazmín les comenta a sus compañeros que tiene que revisar que se cumpla el valor de la pendiente.

Carlos: *Pues si ¿no?, porque mira* $pendiente = \frac{55.83}{111.6} = 0.50$, *¡ah no!*

Observaron que el valor de la pendiente obtenida no pertenece al rango 0.55 y 0.85 solicitado. Hasta aquí concluyeron el trabajo sin llegar a una conclusión precisa.

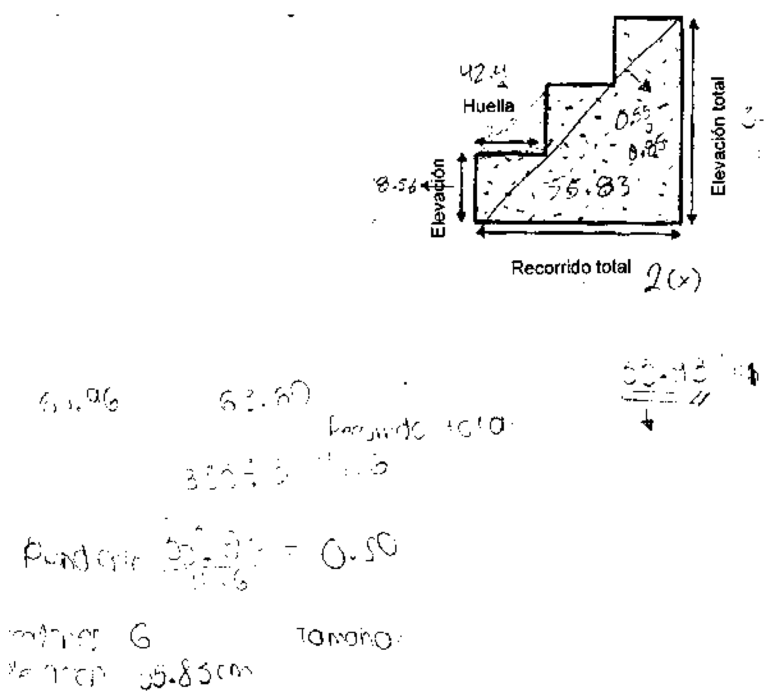


Figura 4-12. Resultados del equipo 3.

EQUIPO 4

El equipo 4 integrado por Edmy, Anel y Daniel presentó muchas complicaciones a la hora de resolver la tarea, el concepto de pendiente y la condición pedida no la respetaron. Utilizaron el parámetro de 60.96 indicando que era lo de la huella y le sumaron la elevación total de 335 y todo esto lo volvieron a dividir entre la elevación total, es decir

$$pendiente = \frac{335 + 60.96}{335}$$

Afirmando que obtenían así un valor de 0.84 de pendiente el cual es incorrecto ya que el resultado correcto es 1.181. Posteriormente el equipo intento hacer un trazado de cuadrados y triángulos sobre la figura propuesta indicando que podían utilizar el teorema de Pitágoras debido a que ya tenían el valor de la huella 60.96 y la diagonal que era la pendiente 0.84.

El profesor apoyo al equipo indicando que no estaban calculando la pendiente como la tarea lo solicitaba, el quipo parecía comprender lo que el profesor mencionaba, sin embargo hicieron caso omiso a esta observación.

No se llegó a ninguna conclusión debido a que el concepto de pendiente no estuvo bien definido.

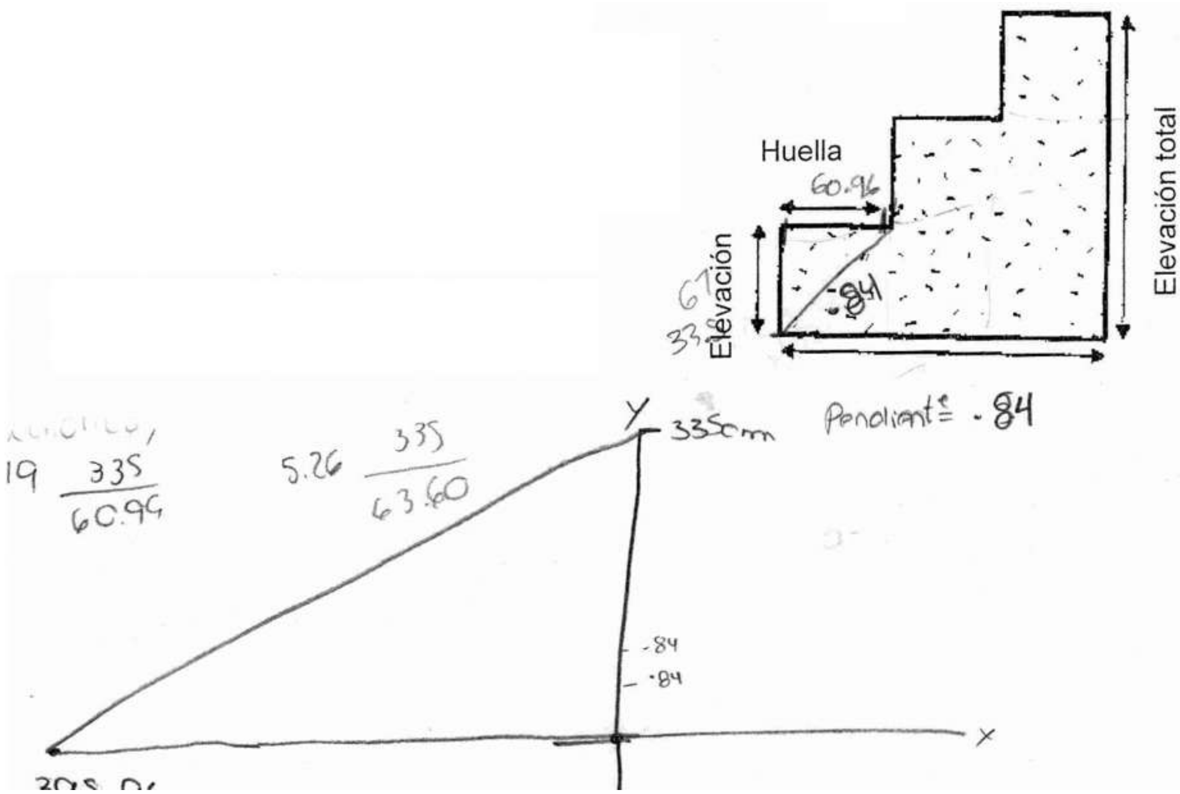


Figura 4-13. Resultados del equipo 4.

EQUIPO 5.

Comenzaron la tarea preguntándose cuántos escalones pudiera tener una escalera; Polet propuso utilizar el valor de 5 escalones. Entonces como la elevación total es 335 Ingrid propone dividir los 335 entre el número de escalones, $\frac{335}{5} = 67$

Ya teniendo el dato anterior el equipo se pregunta cuánto sería el valor de la huella y de la elevación de cada escalón, Néstor sugiere que le vayan dando valores aleatorios viendo que cumplan las condiciones indicadas en la tarea, comenzaron hacer cálculos utilizando la calculadora con distintos valores cumpliendo la condición $2e + h = 60.96$ que representa 2 veces la elevación mas la huella especificando que tiene que ser igual a uno de los valores límite que debe cumplir esta condición.

Después de varias pruebas con números Polet menciona ya tener una posible respuesta.

Polet: *Si ponemos la huella de 30.48 y la elevación de 15.24 si queda*.

Néstor: *¿cuánto te da en esto?* [Refiriéndose a la condición $2\mathrm{e} + \mathrm{h}$].

Polet: *Los 60.96*.

Sin embargo después de obtenido este resultado se percataron que al calcular la pendiente el valor obtenido era de 0.5 que no se encontraba dentro del rango establecido (0.55 y 0.85). Lo que calcularon fue lo siguiente:

$$pendiente = \frac{15.24}{30.48} = 0.5$$

A pesar de esto continuaron evaluando otros valores numéricos buscando que cumplieran tanto el parámetro $2e + h$ y la pendiente. Después de varios intentos Polet propone nuevamente un posible resultado.

Polet: *Y si la huella mide 28.40 y la elevación 17.24, nos daría 62.88*

Ingrid: *Ah, y así está dentro de lo que nos* piden.

Polet: *Si, ahora hay que ver si da la pendiente.*

Néstor: *Si, si da, dividimos* $\frac{17.24}{28.40} = 0.60$.

Polet: *Entonces si cumple.*

En resumen la huella mide 28.40 mientras que la elevación del escalón 17.24, la pendiente de 0.60 y el doble de la elevación mas la huella es de 62.88. Aun con estos valores obtenidos el equipo conservo la idea de los 5 escalones, los cuales no concuerdan con los resultados anteriores. No se llegó a una conclusión final.

4.1.2. Discusión colectiva

Durante esta etapa el profesor inició la discusión tratando de que los equipos participaran y aportaran los comentarios más relevantes acerca de la actividad realizada. Comenzó preguntando a los equipos en general ¿qué les había parecido la actividad?, ¿cuáles fueron las complicaciones a las que se tuvieron que enfrentar para tratar de resolver la tarea?, ¿les faltó considerar para poder resolverla?

El equipo 5 mencionó que lo que les ocurrió a ellos es que se quedaron con una sola idea y es por eso que no avanzaron por el hecho de descartar los demás factores que involucraban en la tarea. Coincidió con lo anterior el equipo 3 mencionando que ellos solo se centraron en el dibujo que se mostraba en la hoja y no vieron otras opciones.

El equipo 4 concluyó que para resolver este problema se tiene que hacer un buen análisis de lo que te está pidiendo ya que a muchos se les pasó considerar todas las condiciones que pedía la tarea como el doble de la elevación mas la huella debe estar entre $60.93\ y\ 63.6$ y la pendiente entre 0.55 y 0.85, y que debido a este motivo no se pudo llegar a un resultado. Martín integrante del equipo 1 menciona que se pudo dar cuenta de que no es la única solución el método que utilizaron con su equipo, que hay varios resultados que pueden dar, debido a que solo se dan parámetros y no se da una restricción exacta.

Esta actividad se desarrollo en calma intercambiando puntos de vista, pretendiendo que se dieran cuenta los participantes lo que hicieron los otros equipos para que se dieran cuenta de que dejaron pasar detalles a la hora de analizar la tarea con su equipo.

El profesor cerró esta discusión haciendo un resumen en cuanto a los comentarios obtenidos por los equipos que mencionaron que debieron de ser más analíticos, más cuidadosos a la hora de revisar la tarea, considerar todos los casos que está indicando la actividad y no cerrarse a solo una posibilidad ya que pueden haber varias soluciones.

4.1.3. Análisis de los resultados de los equipos

Los equipos presentaron dificultad a la hora de recordar la definición de pendiente, cuestionándose que parte de la escalera representaría este concepto. Se apoyo en su mayoría a los equipos a entenderlo y a que ellos mismos fueran formulando su propia definición para así lograran una mejor comprensión. Sin embargo aun cuando se definió de una forma más clara este concepto y la actividad especificaba como obtener el valor y entre que valores numéricos se debía de encontrar, los equipos 2 y 4 no respetaron esta condición, lo calcularon a través de operaciones formuladas por ellos mismos, encontrando valores que si estaban dentro del rango indicado en la tarea pero que no cumplían la condición solicitada en esta.

Otro de los detalles observados durante la actividad es que en los equipos no todos los integrantes participaban con la misma intensidad o entusiasmo que los otros y esto limitaba al equipo a tener más posibilidades de obtener resultados correctos.

Un caso a destacar fue el hecho de que el equipo 3 y 4 utilizaron conceptos geométricos basándose únicamente en el dibujo de la escalara encontrada en la tarea, con esto trataron de encontrar la solución con la intensión de aplicar algún teorema o propiedad geométrica. El resultado fue negativo, ninguno de los dos equipos obtuvo un resultado que cumpliera con lo solicitado en la actividad, pero esto indica que los estudiantes consideraron no solo el caso de hacer operaciones si no que su pensamiento también es geométrico y contempla las dimensiones de otro modo.

En general los equipos buscaron planear una estrategia para enfrentar la tarea propuesta, buscaron soluciones que aunque no en todos los casos fueron acertadas trataban de serlo. Compartieron ideas y se mostro una actividad dinámica. Aprovecharon el material proporcionado para hacer cálculos, hacer anotaciones importantes, dibujos y esquemas que les pudieron servir para encontrar la solución que buscaban.

Para el caso de los equipos 1, 2 y 5, aunque sus respuestas no fueron del todo correctas, hicieron un análisis adecuado y dentro de lo razonable.

Esta actividad presentó resultados de los cuales se obtuvo información interesante; los equipos comprendieron la idea principal, había que construir una escalera donde los escalones fueran del mismo tamaño, sin embargo hubo detalles que varios equipos omitieron, como el hecho de que al sumar el doble de la elevación más la huella se tenía que encontrar entre el parámetro 60.96 y 63.60 centímetros, de igual forma la pendiente entre 0.55 y 0.85. Detalles como estos impidieron el éxito total en la actividad aunque hubo acercamientos a la solución que son dignos de resaltar.

Por último, se aplicó la tarea de manera individual, con el objetivo de verificar que tanto de lo comentado en la discusión colectiva les había sido útil para resolver el problema. Sé observó que muchos optaron por proponer un número de escalones y de ahí verificar si cumplían los parámetros requeridos, el 40% del total de estudiantes obtuvo resultados que se encontraban dentro de la solución.

4.2. Diseño de una casa de campaña

Esta actividad es la Tarea 6 de Paquete 2, de los Paquetes de Evaluación Balanceada (Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum, 2000), y su propósito es que los estudiantes estimen, convenientemente, la dimensiones de un adulto y que visualice las dimensiones que deberá tener una casa de campaña; para ello se requiere hacer estimaciones razonables para que una tienda de campaña sea confortable para un adulto; además, se requiere cierto manejo del Teorema de Pitágoras y de Razones trigonométricas. La experiencia de los estudiantes en el dibujo en tres dimensiones, hacer cálculos y estimaciones pertinentes, resultará fundamental para atacar y resolver la actividad.

La Tarea fue presentada a los estudiantes como se muestra en la Figura 4-20:

Diseñar una casa de campaña

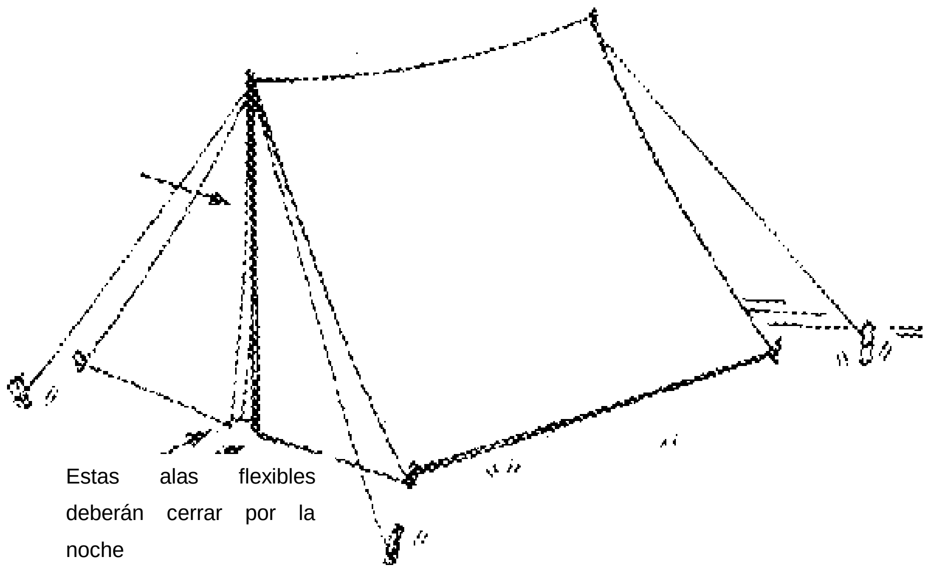
Este problema te brinda oportunidad de:

Estimar las dimensiones de un adulto.

Visualizar y esbozar la lona para hacer una tienda de campaña, que muestre todas las medidas.

Problema

Tu trabajo consiste en diseñar una casa de campaña como la que se muestra.



Estas alas flexibles deberán cerrar por la noche

El diseño deberá satisfacer estas condiciones:

Deberá ser suficientemente grande para que dos adultos duerman adentro, con su equipaje.

Deberá ser suficientemente grande para que alguien se mueva de rodillas en el interior.

El fondo de la tienda deberá ser hecho por un plástico grueso rectangular.

Los lados inclinados y los lados verticales deberán ser de una sola pieza de lona. Además, las dos orillas de uno de estos lados verticales no serán cocidas para permitir que las dos alas sean plegables.

Deberá tener dos postes verticales, atados por cuerdas, para mantener la casa levantada.

1. Estima las dimensiones relevantes de un adulto típico y regístralo.
2. Estima las dimensiones necesarias para el plástico rectangular. Estima la longitud necesaria de los postes de la casa. Explica cómo obtuviste esas medidas.
3. Bosqueja un dibujo de la lona rectangular y muestra cómo la cortarías para obtener los lados de la casa. Muestra todas las mediciones claramente. Calcula cualquier longitud y ángulo que no conozcas.
4. Explica cómo deduces tanto la longitud como los ángulos.

Figura 4-20. Formato entregado a los estudiantes de la tarea.

4.2.1. Resultados de los equipos

Una de las dudas que más presentaron los equipos a la hora de desarrollar la actividad fue: ¿Cuánto equipaje deberían considerar para la construcción de la casa de campaña?, el profesor apoyó indicando que era un parámetro a considerar por parte de su equipo, manifestando que debían acudir a la experiencia o a la lógica de la vida real.

EQUIPO 1.

Para el equipo 1, un hombre en promedio tiene una altura de 1.75. Y en base a esto toma la decisión de que las dimensiones de la base de la casita son *2m X 1.80m* y *l.80m* para la longitud de los troncos. La discusión fue la siguiente:

Sam: *Sí, ahorita lo que tenemos que encontrar es la base, o sea, a lo largo que debe medir. Por eso digo que 1.75*

Karime: *Mmm, 1.80*

Sam: *Pero ¿para que quepan sus cosas?*

Karime: *Hay que hacerlo más ancho, entonces ahí si vamos a multiplicar tal vez lo que...*

Sam: *Aquí sería más o menos 2 metros ¿no?*

Karime: *Donde van a poner las cosas ¿en los pies, en la cabeza, en un lado o en el otro?*

Sam: *lo que te dice es que puedan dormir ahí y sin problema con todo y su equipaje y que debe tener espacio suficiente para moverse dentro de rodillas… Aquí sería por donde estarían ¿no? 1m sería.*

Karime: *No, está muy chiquito.*

Sam: *1.80*

Karime: *Pues sí.*

Sam: *La casa tendría como base 2 metros por 1.80;… sería 1.80 de longitud del tronco… Y levantando ya la casa, aquí sería 1m 80, 2 metros y a lo largo 1.80, cabría bien.*

Para contestar las últimas preguntas, acerca de los cortes y las características generales de la casita, tienen que recortar una gran lona rectangular y modelarla para obtener su diseño. En esta parte, se dan cuenta de que deben comenzar con un rectángulo.

Sam: *¿Entonces mediante un dibujo como cortarías la lona?... Tenemos que cortarla de manera que esto no sea cosible. Un poco sería así.*

Karime: *Pues como está en el dibujo podemos hacerla así, a ver préstame tu cuaderno... a ver con una hoja.*

Martín: *¿Cómo ves la lona de largo? medirá unos 3 metros ¿no? Ponle de largo 3 metros para que sea 1 y medio de un lado y 1 y medio del otro...*

Karime: *Más bien tendríamos que tener la suma de los lados que mide la casa y de aquí... estaría aquí.*

Martín: *Supongamos que este es el ancho de la lona no, todo pues, esta tendríamos que doblarla a la mitad y así quedaría ya nada mas los lados...*

Ellos pretenden tomar medidas arbitrarias para la lona que hará las veces de techo de su diseño. A lo largo de su discusión, se dan cuenta que deben tomar en cuenta las medidas de la base, previamente discutidas. Y finalmente llegan a un diseño muy diferente a los demás, el cual, con un bosquejo en base a una hoja para modelar y un dibujo, discuten de la siguiente manera:

Sam: *Tenemos que ver, sacar primero, lo de la base que es 2 por 1.80 y ahora esto de aquel lado, acá también habría 1.80 y allá 2. Entonces 1.80 más 1.80 serían 3.6, lo que mediría todo esto (la arista más alta de la casa de campaña) 3.6…*

Sam: *2 metros aquí, ahora 1.80, la mitad de 1.80, serían 90, 0.90 serían 2 metros 90 centímetros de esta... Para ver cuánto mide todo, ¿el perímetro como sería?, es 2.90 más 3.6 más 2.90 más 3.6*

Karime: *28*

Sam: *Igual a 300.1 sería lo que daría todo. Esto es lo que mediría en total.*

Karime: *Y ¿de cuánto lo dejaste entonces, de 1.80?*

Sam: *Sí.*

El equipo no se dio cuenta de que las solapas y los troncos deben ser coplanarios, para después buscar el objetivo de encontrar las medidas de las solapas que hubiera sido las únicas medidas faltantes.

Se observó que el equipo, no entendió por completo la visión tridimensional del diseño, les hizo falta más imaginación y tal vez, un poco mas de perseverancia en los cálculos, ya que los últimos minutos de la etapa de equipos, los dedicaron a intentar diseños con una hoja de papel a prueba y error. Su acercamiento se quedó en un intento intuitivo que no cumplió las condiciones ni tuvo las características deseadas.

EQUIPO 3.

Los resultados del equipo 3, fueron muy diferentes. Suponen una altura promedio de *1.72m* y las dimensiones de la base de su diseño *1.5m X 2.10m*.

Carlos: A *ver, la medida en sí de lo largo pues diríamos que sería acá porque, como de 1.80 ¿no?*

Jazmín: *Pero si miden 1.70... Es que 10 centímetros pues es algo "así", más bien...*

Carlos: *Como 2 metros ¿no?*

Jazmín: *Los 2 metros*

Carlos: *Ahora de lo ancho.*

Jazmín: *De lo ancho, cuánto mide uno*

Carlos: *Son las dos personas y aparte con las maletas, dice.*

Iván: *¿1 metro qué tanto es?*

Jazmín: *Sí, como que aquí hay que ponerle como 2 metros y medio ¿no?*

Carlos: *Sí*

Iván: *2.10*

Carlos: *Y de lo ancho ¿cuánto le pondríamos?*

Iván: *¿metro... metro y medio le ponemos?*

Carlos: *Sí ¿no? porque dos personas con la maleta y aparte para que se puedan mover.*

Carlos: *Y ahora la altura.*

Iván: *Supón que mides tu como ¿1.50? pero cuanto le ponemos.*

Jazmín: *¿Metro y medio?*

Carlos: *¿Igual que lo ancho también? sale pues. Pero ponle de altura o así porque si no se van a revolver las medidas.*

Carlos: *2 metros 10 de largo, metro y medio de ancho y metro y medio de largo.*

Más adelante Jazmín y Carlos se dan cuenta de que las pestañas deben ser triangulares.

Carlos: *Ah, y ahora para que se cierren las...*

Jazmín: *Abajo, debe ser un corte intermedio, debe de medir... setenta y... punto 75* [la medida de las pestañas de las solapas].

Carlos: *Sí.*

Jazmín: *La longitud de los troncos... espérame, la lona debe ser rectangular primero, para después cortarla, entonces para cerrar las solapas, debes de cortar de aquí.*

Carlos: *Ándale para adentro tipo triángulo.*

Jazmín: *Entonces esta parte se doblaría y aquí también se dobla y ya queda y al momento de pararla...*

Analizan los dobleces que debe llevar su diseño bidimensional para poder encontrar la altura de los troncos verticales que sostendrán la casa de campaña. Una discusión de las ideas de Carlos acerca de cómo obtener la altura deseada de la casa de campaña, lleva a un planteamiento interesante, pero que le falta un poco de sentido matemático.

Jazmín: *Yo lo que quiero sacar es la medida de la lona, la lona mide tres metros, la pongas así o la pongas así mide metro y medio de cada lado.*

Carlos: *Pero la altura no va a medir metro y medio.*

Jazmín: *La altura quedaría más larga.*

Iván: *Es lo que te estamos diciendo.*

Iván: *Entonces debe de medir más de metro y medio. Unos dos. Porque al momento de pararla es un ángulo ¿de qué? 90, de 45 grados.*

Carlos: *Yo diría que 6 metros de ancho… porque así se pude hacer bien para que quede metro y medio de altura.*

Jazmín: *Pues sí.*

Iván: *vamos a intentarle con dos metros a ver...*

Carlos: *Que no va a quedar...*

Jazmín: *Entonces tú crees que esto mide cuatro metros. Yo diría que esto tres metros y medio*

Carlos: *Yo también, yo diría que 3 metros y tres metros (6 metros de ancho).*

Un poco más delante de la discusión Iván se entera de lo que Carlos intenta explicar y entonces cree tener una idea para establecer la altura de la casita.

Iván: *Al pararla esto mide tres metros, sigue midiendo tres metros, pero yo lo que me refiero es del piso a la punta ya va a medir mas, por que mas, porque este ángulo son 45 ° o sea 90 es esto la mitad 45, entonces a 45, entonces esto está así si estos son tres metros, la mitad de tres*

Carlos: *Uno y medio.*

Iván: *Ah ya le entendí, entonces si... es que yo lo sumaba.*

Jazmín: *Sí, entonces, esto mide tres metros y aquí dos, entonces ya nomas nos falta sacar la medida de la lona de estas partecitas, las extensiones pues.*

Según Jazmín, las pestañas, que son triángulos rectángulos, deben tener como base *0.75m* cada una para que al sumar les dé precisamente el ancho de la base de su casita, es decir *1.5m*. Pero al momento de preguntarse por la medida de la hipotenusa de ese triángulo.

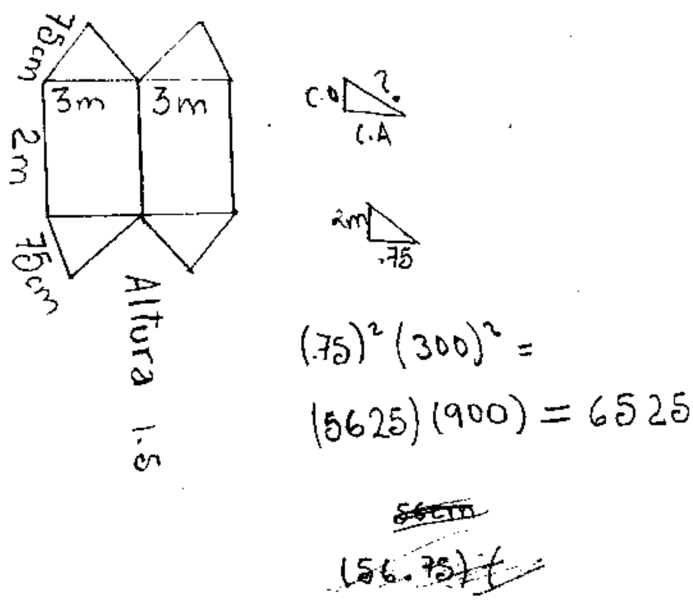


Figura 4-22: Resultados reportados por el equipo 3.

Jazmín: *Lo que quiero saber es la medida de esta, ¿también debe medir metro y medio?*

Carlos: *No*

Jazmín: *Sí, porque es altura* [la hipotenusa del triángulo que se les forma en las pestañas]

Carlos: *Ah sí, es cierto.*

Carlos: *Ya acabamos.*

Jazmín: *Yo diría que debe de medir más eso.*

Carlos: *¿Por qué si es la altura?*

Iván: *Es que si mide uno y medio.*

Carlos: *También si pones mas mediría, sobraría lona.*

Jazmín: *Sí, habíamos dicho, pero si esta parte mide metro y medio (la altura) ¿cómo esta parte (la hipotenusa) va a medir metro y medio también?*

Después de una discusión larga acerca de cómo obtener esa medida, en donde los estudiantes no se dan cuenta del sentido geométrico que tiene la pestaña, piden ayuda al profesor quien les pregunta acerca del Teorema de Pitágoras y los triángulos rectángulos.

Iván dibuja el triángulo y distingue las medidas de los catetos (3m y 75 cm) y comenta.

Iván: *Entonces para sacar eso no se si se suma o se multiplica.*

Carlos: *Se multiplica.*

Iván: *Aquí si se multiplicaba y luego entre dos.*

Carlos: *No me acuerdo.*

[Llaman al profesor]

Iván: *Usted sabe lo de hipotenusa, ¿aquí se multiplicaba el cateto opuesto entre esto para sacar la hipotenusa?*

Profesor: *Tú ¿qué piensas?*

Iván: *No me acuerdo.*

Profesor: *... ¿No saben el teorema de Pitágoras?*

Iván: *Es lo que no nos acordamos… Pues yo pienso que es así, se multiplicaba cateto opuesto más cateto adyacente entre dos.*

Carlos: *Pero pues daría mucho ya.*

Profesor: *¿Para qué quieren saber eso?*

Iván: *Para saber cuánto mide de aquí a aquí* [la altura del triángulo rectángulo que simula la pestaña].

[El profesor aplicador les dice el teorema]

Carlos: *56.25 metros*

Jazmín: *Yo digo que ya te equivocaste en algo, porque no te diste cuenta que estos eran centímetros (75) y que estos (3) eran metros.*

Carlos: *Oh sí. O sea que hay que convertir centímetros a metros.*

Jazmín: *La suma de esto son 6525.*

Iván: *Al cuadrado porque es la hipotenusa, 6525 por 6525.*

Carlos: *Ahora divídelo entre cien. 65.25, o sea que ahí está.*

Iván: *Entonces ¡ya está!*

Hay tres sucesos trascendentes en este último procedimiento. Primero, Iván usa la estrategia de hacer un esquema con los datos, pasando el problema a un cálculo matemático, que en este caso es el Teorema de Pitágoras; segundo, ninguno de los integrantes conoce el Teorema, sin embargo intentan hacer cálculos inútiles, injustificados e irracionales y; tercero, se equivocan al hacer el ajuste en la conversión, en los cálculos y al tratar de entender el significado de el resultado (ver figura 4-22).

En la parte final, solo se enfocaron en encontrar un resultado y no en darle sentido, en el contexto real.

EQUIPO 4.

El equipo 4, tomó como la altura promedio de una persona *1.70m*, además calculan el ancho promedio de *40cm*. pues pretenden encontrar el ancho de la base que albergará a dos personas y su equipaje. Por lo que su base rectangular es $2m \, x \, 1.20m$. Se puede verificar en la siguiente discusión.

Daniel: *Miren ya les dije lo que tienen que ser la medida, pon tu 2 metros porque 1 70 de lo que mide* [Edmy interrumpe]

Edmy: *1.90.*

Anel: *Sí 1.90*

Daniel: *... Y 20 cm de…*

Edmy: *Sí, de equipaje.*

Daniel: *Ok, anota.*

Anel: *Sí, porque un equipaje... no pero un equipaje mide como esto ¿no?* [Señala una medida]

Daniel: *Es que depende que tal si era un hombre y una mujer y llevan más, bueno equis.*

Anel: *Pero 20 cm no son de aquí a aquí.*

Daniel: *Es menos.*

Anel: *Ahí está, ¿crees que de ese tamaño sea el equipaje?*

Daniel: *No, tendría que ser 2 metros* [para la medida del largo del rectángulo base], *2 metros que...*

Anel: *No, estaría bien con 2 metros ya.*

Daniel: *¿Sí, segura?*

Anel: *Sí*

Daniel: *Bueno.*

Daniel: *Tiene que ser rectangular... aquí mide 2 metros y acá tiene que ser menor para que cumpla las condiciones del rectángulo... De aquí a acá mide dos metros y de aquí a acá digamos ¿cuánto mide? Menos no, tiene que ser menos.*

Edmy: *1 metro 20*

Daniel: *¿Sí?*

Anel: *No, menos ¿no?... si como 1 20... Sí porque fíjate para que quepan las dos personas así a lo ancho... No, a ver…* [Duda]

Daniel: *A ver tú cuánto mides así* [de ancho]...

Anel: *30 y 30, 60, sí con 1m 20.*

Daniel: *Estos dos cumplen condiciones de rectángulo*

Para la parte final de la actividad el equipo 5 reconoció algunos detalles para construcción del techo de su casa de campaña. Las pestañas que simularán las puertas, deberían coincidir con la altura de la casa, además las pestañas deben cortarse con cierto ángulo de inclinación que no supieron encontrar, y trataron de forzar las medidas de las pestañas rectangulares, de manera que se ajustaran las medidas previamente propuestas para la base de la casa.

Anel: *Pero de esta lona, de esta tienes que sacar los picos* [solapas].

Edmy: *¿Y qué estoy haciendo?...*

Daniel: *...cuáles picos, en qué momento usamos ese término de picos.*

Anel: *Pero se nos tiene que cerrar.*

Edmy: *El chiste es ponerlo al revés... Ay tan fácil vamos a la comer y vemos las casitas...*

Anel: [Manipulando el papel] *Es que tiene que ser así, para que aquí tenga sus aberturas que se puedan abrir.*

Daniel: *Sí... a mira es que queda realmente un cuadrado.*

Anel: *No, es que necesitamos aquí quitarle esto* [Un exceso de área que de alguna manera lograr los triángulos que forman las solapas]

En este momento el equipo se da cuenta del corte que deben hacer. Pero Edmy intenta imponer sus ideas. Y finalmente lo que hacen es intentar hacer el diseño doblando y cortando un pedazo de papel, lo cual les llevó mucho tiempo.

Edmy: *No Anel, entiende que no.*

Anel: *Como van a cerrar, y mira si le cortas esto...*

Edmy: *Hay que cortarle aquí nada más.*

Anel: *A ver, vamos a examinar el dibujo. Desdóblalo.*

Daniel: *Si de hecho sí. A ver, se acuerdan ¿cómo estaban los lados del juego geométrico que tu armabas que tenían como pestañas de más? yo digo que debe ser algo así mira...*

Anel: *Sí, como un prisma cuadrangular digo rectangular.*

Daniel: *¿Cómo un prisma? A ver hazlo.*

Anel: *Pues así como este... Hay que ver como se arma esto.*

En otro momento el profesor les cuestiona acerca de los ángulos y las medidas de las puertas que tiene su diseño. El tiempo no les permite determinar todas las medidas de su diseño.

El equipo 4, nunca tomó en cuenta que su casa de campaña, debe tener más o menos la altura de los troncos verticales, lo cual influye en la medida de las solapas, es decir la altura del triángulo rectángulo.

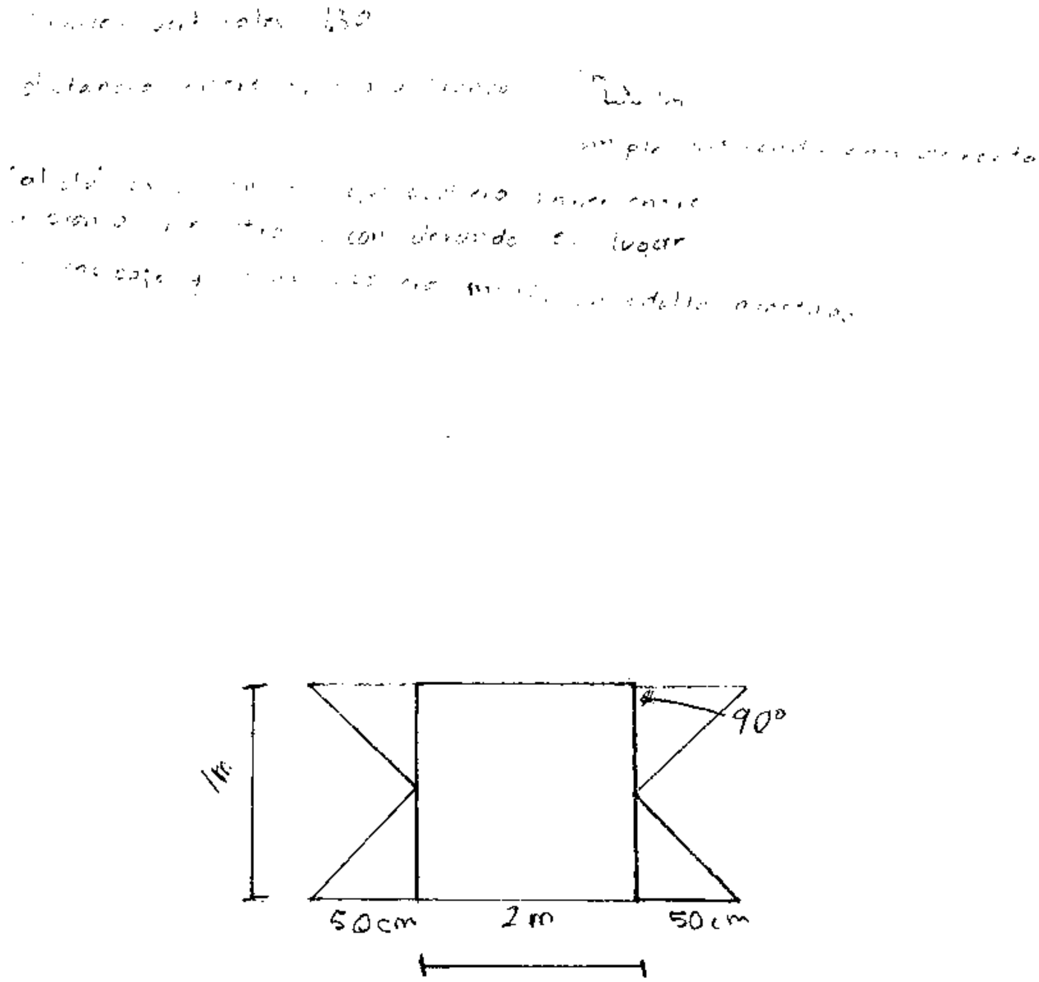


Figura 4-24: Resultados reportados por el equipo 4.

En la última parte del proceso, Edmy se encuentra desesperada y ausente de la discusión final, incluso distrae a sus compañeros con bromas y plática fuera de contexto.

El punto de vista muy intuitivo, con intentos a prueba y error, y la ausencia de uno de los miembros del equipo, fueron clave para que el equipo se desmotivara y no lograra desarrollar sus ideas y su diseño conforme a las condiciones. Por parte de ellos nunca hubo una monitorización de sus procesos y procedimientos.

EQUIPO 5

El equipo cinco comenzó a sugerir algunas medidas y cuestionarse si eran correctas. Los integrantes sugieren que 1.70 m es la altura de un adulto promedio, lo cual es lógico pensar. Sin embargo, ellos no tomaron en cuenta el ancho promedio del adulto, Néstor pregunta que si de rodillas, y entonces Polet explica que aunque se esté de rodillas la cabeza del adulto pegará en la parte superior de la lona, justo antes de que llegue a la altura máxima de la casa, por lo que ella sugiere quitarle unos 15 o 20 cm. a la altura promedio del adulto. Entonces, sugiere 1.60 m de altura, "es por lo regular lo que miden las casas de campaña, por que en algunas cabes hasta parado".

Primero comienzan con la base de su diseño. Contemplan el equipaje y la altura de las personas, de largo 1.80 m., y el equipaje lo consideran a lo ancho, 1.50 m., y luego reconsideran 2 m., de largo para la base.

La longitud de los troncos verticales, Polet sugiere lo mismo de altura, 1.60 m.

En la tercera pregunta nos encontramos con las características especiales que va a tener el diseño de este equipo.

Polet sugiere desarmar la casa (de manera esquemática) de tal forma que se pueda observar en un plano los cortes que va a tener. Ella propone que se desarme como una "pirámide".

Polet: *Primero son...*

Néstor: *¿No dice de... qué forma tiene la lona?*

Ingrid: *Rectangular*

Polet: *Estoy mintiendo así no es... no dice que forma pero es obvio*

Néstor: *Según yo... dice que la va a recortar ¿no?, pero como se va a recortar*

Polet: *¿Qué es eso?*

Ingrid: *Es que no tiene picos, la lona no tiene picos, se supone que en cuanto bajas esta de aquí, esto hace que se jale, por eso es que cuelgan estas rectas.*

Néstor: *Y las debes de cortar ¿no?*

Ingrid: *A la mitad solamente, o sea cortarle un extremo por aquí y ya. O bueno si lo está tomando así aquí dobla, aquí se dobla, o sea aquí va el palito. Pero se supone que entonces de aquí vamos a jalar un hilo, ¿no?*

Néstor: *Nada más dice que la cosan de aquí más no que la cosan de acá.*

Ingrid trata de explicar que no deben de cortarse los extremos con los lados inclinados, y están tratando de entender en donde debería de cortarse la lona. Polet interviene y dice:

Polet: *Ya sé, mira... Podríamos decir que es un rectángulo y que está acostado*

Néstor: *Y luego como doblas, o sea las partes que cortaste se doblan hacia abajo*

Polet: *Porque ese ángulo debe ser de 90 grados para que alcancen a... juntarse.*

Luego comienzan a "desarmar la figura" de tal manera que hacen un esquema bidimensional de como quedaría la lona al cortarla, junto con la parte rectangular que servirá como piso de la casa.

Determinan algunas medidas de su modelo y hacen un borrador para ubicarse.

ura : 1.60 m (troncos) : Para que tenga mayor movilidad en las lonas más inclinadas.
:: 2 m X 1.5 m : Estas medidas son para que el adulto promedio de 1.70 pueda poner su equipaje en la cabecera, en los pies o bien un equipaje ligero en los costados.

largo ancho

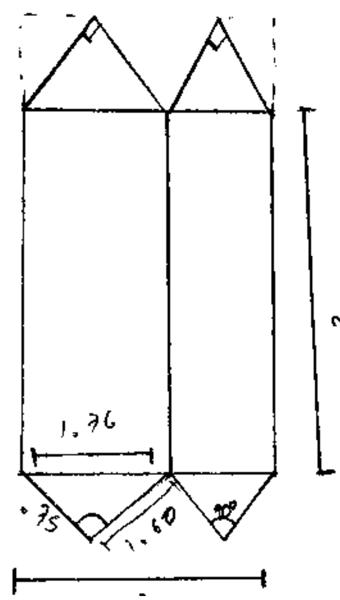


Figura 4-21: Resultados reportados por el equipo 5.

Podemos observar que sus ideas acerca de la forma tridimensional de la casa son correctas, aplicando el Teorema de Pitágoras para determinar las medidas de una de las solapas.

EQUIPO 6.

El equipo 6 supone que la estatura promedio de un adulto es de *1.75 m,* y la base de la casa de campaña, tendría *1.40m X 1.80m*.

Ernesto: *Mira si 1 25 están de rodillas, ponle 1.30, 1.30 por...*

Alfredo: *Por 1.80*

Adriana: *Sí, o 1.75*

Alfredo: *1.30 por 1.*

Se acerca el profesor:

Ernesto: *Estamos en la pregunta dos... 1.80 porque, más o menos 1.80 ¿verdad?*

Profesor: *¿por qué?*

Ernesto: *Porque debe caber de rodillas adentro de la esa (casa) y si miden 1.75 miden 1.25 de rodillas, pues 1.30 para que alcance a caber las altitud. Y acostados van a medir 1.75, por eso le pusimos 1.80 para que quepan acostados*

Profesor: *¿Y el equipaje?*

Ernesto: *Los cinco centímetros*

Adriana: *ah no…*

Ernesto: *Nos faltó el equipaje, 2 metros para que sobre, ¿a los lados no le pusimos nada verdad?*

Adriana, les explica acerca del dato que les hace falta:

Adriana: *Es que el plástico es el que va abajo, y entonces tiene que ser de largo, haz de cuenta así en cuadro.*

Ernesto: *¿Entonces ahorita no estábamos midiendo la altura?*

Alfredo: *¿De largo cuánto miden ellos?*

Ernesto: *1.75*

Adriana: *¿Y de ancho? Ya tenemos lo largo solo falta lo ancho ¿cuánto puede medir?*

Alfredo: *Sí, es 1.75.*

Ernesto: *Sí, por 1.80. Es que no va a caber el equipaje.*

Adriana: *El equipaje no va, no va así en lo largo, si no va así a lo ancho.*

Ernesto: *Ellos se van a acostar así y el equipaje va a ir a los lados aquí... ¿Entonces cuánto es?*

Ernesto y Adriana proponen que sea *1.40m* de ancho de la base, y *1.30m* para la altura de la casa de campaña.

En la última parte, ellos toman un dibujo parecido al que se muestra en la figura #4-22, que fue el resultado final. Lo que hacen es medir *70cm* en el lado recto de cada pestaña y dejar *1.30m* para la altura, que propusieron previamente. Esto es, con ayuda de las medidas de su base y su altura, determinaron las medidas de las pestañas de la casa, sin importar la longitud de la hipotenusa de estas pestañas. Algo que los otros equipos no hicieron, siempre intentaban calcular esa hipotenusa para calcular luego la altura del triángulo o no llegaban a esa parte.

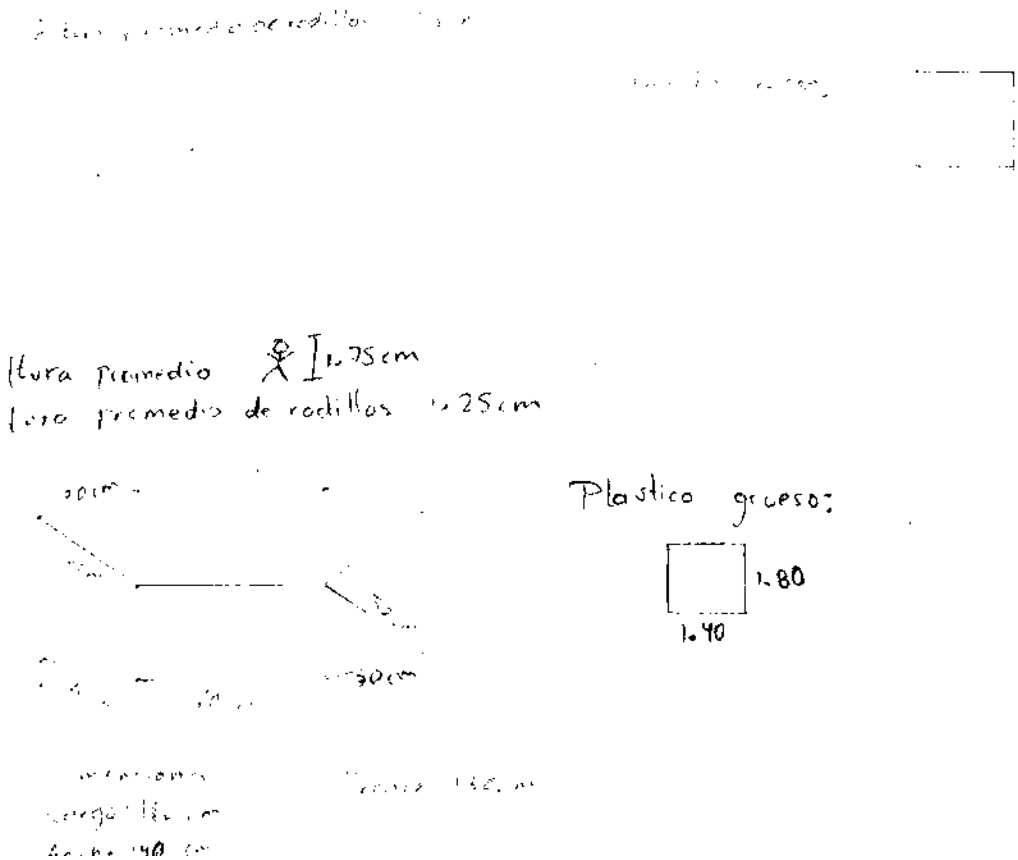


Figura 4-23: Resultados reportados por el equipo 6.

El equipo no se preguntó si es posible construir un triángulo rectángulo cuya base sea 0.7 y altura 1.3, que cumpliera esas condiciones, es decir, su hipotenusa es parte de la mitad del lado de un rectángulo, lo cual es verdad, pero hubiera sido interesante que averiguaran.

Quizá la limitante de no saber tópicos concretos de Geometría les llevó a dejar inconclusa esta situación.

4.2.2. Discusión colectiva

La discusión más relevante en esta actividad se da cuando Sam, expone los resultados del equipo 2, quienes cometieron un error que Sam señala. Cabe mencionar que previamente, el equipo de Sam expuso de manera muy detallada sus procedimientos, sobretodo el uso del Teorema de Pitágoras para calcular la medida que deben tener las solapas o pestañas que formaran las puertas de la casa de campaña.

Profesor: *¿Cuánto mide este lado?* [El supuesto lado recto de la solapa].

Sam: *Sería 1.80, por que al momento de que se cierra queda igual que el tronco.*

Profesor: *Segura.*

Sam: *No, porque entonces ya no embonaría. O sea, al momento de que se abra la casa, sobra un pedazo.*

Profesor: *Bueno pues eso fue lo que hicieron.* [Dirigiéndose a Sam] *¿Sí viste cual fue tu error? O sea, pensar que estos lados son iguales* [formando un triángulo isósceles para las solapas], *lo cual no es cierto, por el Teorema de Pitágoras…*

Sam: *Ok.*

Algunos otros errores similares detectados por los estudiantes, fueron en el equipo 5 y el equipo 3, quienes no tomaron en cuenta la longitud del tronco para calcular las medidas del triángulo que formaba las solapas del diseño.

Nuevamente el profesor motivó a los expositores a justificar sus procedimientos y evaluar sus cálculos. Algunas cuestiones fueron apoyadas en comentarios de los oyentes como

Polet en el ejemplo anterior. Los estudiantes no tuvieron preguntas para sus compañeros expositores, lo cual llevó a solo diálogos entre profesor y expositor.

4.2.3. Análisis de los resultados

El pensamiento, discusión y resultados acerca de las tallas y medidas promedio de las personas fue razonable. La discusión en cuanto a la idea de razonar matemáticamente el problema estuvo presente en los equipos, excepto en los equipos 2 y 5 cuyos acercamientos fueron más bien intuitivos e injustificados. Destaca el simple pero acertado punto de vista y procedimiento del equipo 4, quienes en base a las solapas (o puertas) construyeron su techo y todo fue muy fluido después. Mientras que los enfoques muy parecidos de los equipos 1 y 3, se centran en el teorema de Pitágoras para encontrar sus medidas.

Se observa que la abstracción de las ideas concretas, es una situación complicada para la mayoría de los equipos, y en esta actividad les resultó muy fácil decantarse por el punto de vista de la imaginación en tres dimensiones, prueba y error y el razonamiento intuitivo.

La actividad fue de fácil comprensión, además de que ya habían trabajado con diseños previamente con la actividad, diseño de una escalera. Resultó en varios puntos de vista para su resolución. Les dio la oportunidad de pensar acerca de algunas suposiciones claves, extraídas del contexto real, para avanzar y les permitió aplicar a dos de los tres equipos trigonometría básica y el Teorema de Pitágoras para encontrar un diseño adecuado. Es indudable que las discusiones y reflexiones que desencadenó, están acentuadas en las partes de las suposiciones y en la última parte de los cálculos de las medidas de un triángulo para encontrar los cortes deseados.

Fue importante también la oportunidad de imaginar figuras geométricas en tres dimensiones, el pensamiento espacial y la conexión con el pensamiento bidimensional. Establecieron estrategias relacionadas a este tipo de pensamiento, por ejemplo, hacer figuras, recortar y moldear un bosquejo de modelo a escala, y descomponer el problema en partes, donde cada parte estuviera relacionada con la solución de la anterior.

Al finalizar la discusión colectiva, se le pidió a los estudiantes realizar nuevamente la actividad, el 28% de ellos llegó a una respuesta dentro de las soluciones, en su mayoría hicieron un cambio en el cálculo de las dimensiones de las personas debido a que algunos dejaron pasar el ancho de la persona, solo consideraron la altura; así mismo las dimensiones del equipaje y el modo de obtener las medidas de las solapas. Se pudo ver que se realizaron muchos intentos con el uso del teorema de Pitágoras que tanto fue mencionado en la discusión colectiva.

5. CONCLUSIONES

Sin duda uno de los retos en la actualidad en la educación matemática, es lograr se forme en el estudiante un pensamiento crítico y analítico, que sea capaz de crear y formular hipótesis, y lo que buscamos en este momento, que el estudiante pueda resolver problemas matemáticos, que él mismo desarrolle técnicas o procesos para enfrentar dichos problemas, que pueda relacionar temas o problemas vistos previamente.

Tanto en la actividad "Diseño de una escalera" y "Diseño de una casa de campaña" se buscó que el estudiante asociara términos con los que debería estar ya familiarizado, conceptos como distancia, pendiente, construcciones geométricas, entre otras.

Las actividades presentadas en esta tesis comparten una esencia especial ya que en las dos actividades se tiene que implementar un pensamiento geométrico, donde se aplique el concepto de dimensión. Es importante el termino de dimensión, ya que medianamente se puede visualizar, cual es la forma en la que el estudiante representa o proyecta lo que a través de los pensamientos espaciales se va formando, al momento de intentar resolver un problema en donde se involucran representaciones geométricas.

Un ejemplo claro de las limitaciones que tienen los estudiantes al momento de resolver los problemas, es la parte de los conceptos, por ejemplo la pendiente. Estos conceptos si no son dominados completamente es poco probable que el alumno sea capaz de resolver exitosamente algún problema, aún cuando este problema sea planteado de forma clara y correcta.

Más aun, si el estudiante no es capaz de comprender el texto de un problema es difícil que pueda lograr interpretarlo y así detectar que es lo que pide para poder buscar opciones, pistas o estrategias que este dé para resolverlo. Durante las actividades los equipos participantes pidieron apoyo del profesor en varias ocasiones, con lo cual supe de la dificultad que presentan los alumnos a la hora de entender, interpretar y analizar un problema matemático.

La intención es resolver los cuestionamientos planteados en el capítulo 1. Comenzaremos analizando: *¿Qué características deben tener los problemas que se proponen a los estudiantes para promover un aprendizaje significativo?* El planteamiento de problemas donde se involucren construcciones, trazos, conceptos matemáticos vistos durante su desarrollo académico son algunos aspectos que deben contener estas actividades de las cuales se espera logren que el estudiante relacione información nueva con otra ya conocida y que posee en ese momento, reajustando y reconstruyendo ambas informaciones en este proceso. Es necesario que el problema no presente incoherencia en la redacción o que omita datos o detalles que se espera se utilicen en el problema pero no se planteen.

¿Qué conocimientos matemáticos previos requieren los estudiantes para enfrentarse a los problemas propuestos? Recordando que las actividades propuestas en esta tesis involucran construcciones geométricas, conceptos geométricos como pendiente, triángulos, cuadrados, rectángulos, dimensiones como distancia, altura, ángulos, etc., es importante que los estudiantes en alguna ocasión en su vida académica hayan tenido un acercamiento a estos conceptos y al menos conocido algunas aplicaciones donde se involucren. Es claro que conocimientos en aritmética y algebra básica son indispensables para la solución de estos.

Si un estudiante presenta dificultades a la hora de resolver alguna operación básica como suma, resta, multiplicación o división, será muy difícil que pueda ser capaz de obtener una solución al problema planteado. En la aplicación de las actividades se presentaron complicaciones a la hora de intentar realizar despejes, lo cual es fundamental que los estudiantes dominen estos métodos ya que esto facilitará el proceso para llegar a la solución. Algunos equipos frenaron la actividad por tratar de encontrar una solución al despeje, lo que los limitó y hasta llegó a frustrar en el trabajo que querían lograr, desanimándolos y haciéndolos pensar que no tendría solución el problema.

¿En qué consisten los intentos de solución de los estudiantes, en cuanto al uso de

estrategias y recursos matemáticos? Para llegar a la solución de las tareas planteadas en esta tesis, los estudiantes recurrieron a intentar varios métodos de solución; en su mayoría recurrieron al conocimiento empírico, a lo que la experiencia les decía acerca de lo que se pedía en las tareas, ya que era algo que todos habían visto alguna vez, solo se pedía construir una casa de campaña y una escalera, relacionando esto con lo que ellos conocían; el pensamiento de esta forma es bueno debido a que da una idea del objetivo del problema, es una propuesta de lo que se quiere conseguir.

Posteriormente llegaron las propuestas de cómo construirlos, por ejemplo para el caso de la escalera, algunos propusieron tomar el dibujo que se mostraba en la hoja de la actividad y sobre este realizar trazos para ver si al analizar la forma de los escalones podían llegar a la solución; otros prefirieron tomar la salida más fácil, asumir que el numero de escalones dibujado en la hoja eran la solución y sobre estos nada mas había que verificar que cumpliera con los parámetros solicitados en la tarea. Pero, también se presentó el caso en el que se prefirió ir a lo matemático, es decir, hacer cálculos a prueba y error con el objetivo de cumplir con los requerimientos de la tarea como la pendiente y que el doble de la elevación más la huella se encontrara en el parámetro indicado.

Los intentos fueron buenos, para esta última estrategia, sin embargo no se logró el objetivo, hubo obstáculos que impidieron se llegara a un resultado adecuado, ya que cabe destacar que son tareas que puede tener muchas soluciones.

¿Qué formas de instrucción favorecen el aprendizaje de los estudiantes No obstante a que las soluciones no hayan sido del todo las mejores, podemos destacar varias situaciones presentadas durante la aplicación tarea, aquellos alumnos que tienen los conceptos matemáticos más claros, que practican más, que tienen más entusiasmo y mayor actitud son aquellos que tendrían mayor probabilidad de llegar a soluciones correctas. Una de las formas de instrucción que favorecen en el aprendizaje en los estudiantes es aquel en el que se le permita al estudiante ser más crítico, mediante planteamiento de problemas de la vida cotidiana que le permita relacionar con lo ya conocido y así aplicar lo visto en clase de modo que no vea a la matemática como algo inútil, que no es una simple ciencia, que se

percate de que la naturaleza misma involucra matemática. Siguiendo este método y con la experiencia será capaz de asociar un problema nuevo con alguno visto anteriormente aunque tenga modificaciones en datos, casos, etc.

¿Cuál es el papel del profesor durante la aplicación de los problemas, en un ambiente de resolución de problemas? Si bien el estudiante a través de enfrentarse con problemas que tengan características como las mencionadas anteriormente va a tener un medio que le va a proporcionar habilidad, conocimiento y estrategias para resolver problemas futuros, es muy importante el papel del profesor, ya que este será un guía que apoyará al estudiante a validar que la estrategia o método que se encuentra utilizando es adecuado para lograr una solución, de igual forma puede compartir con el estudiante otras técnicas que también pueden apoyarle a lograr soluciones correctas, como a pensar de otra forma, ver las cosas desde otro punto de vista, o simplemente hacer cálculos matemáticos de manera más simple. Si el profesor es una persona que no se encuentra actualizada, y con los conocimientos correctos en la materia, dejará de ser ese guía que se requiere, orientará de mal forma o simplemente dañará la formación del estudiante.

¿Qué cambios hubo en las formas de atacar y resolver los problemas después de la implementación de la forma particular de instrucción propuesta? Es importante destacar que tras los intentos que iban realizando los equipos por resolver las tareas, fueron descubriendo técnicas que en su caso creían más convenientes utilizar para verificar si por ahí se encontraría una solución; tal es el caso de la tarea de “diseño de una casa de campaña” donde algunos equipos prefirieron dejar la matematización, dejar de intentar mediante cálculos matemáticos, si no mediante la construcción geométrica real de la casa, donde se hicieron cortes reales, trazos de figuras con la intención de construir a escala lo que se pedía en la tarea, por el tiempo de la actividad y lo mal invertido en intentos que no fueron fructíferos no se logró obtener información o una conclusión de si esta estrategia implementada por algunos equipos funcionaria, sin embargo, nos indica que los estudiantes buscan métodos para atacar el problema.

Si bien es cierto, la actividad no arrojó unos resultados favorables en cuanto al porcentaje de solución, estos son prometedores, nos da una pista de que implementando estrategias como las planteadas en el método de Polya podemos ir fomentando que el estudiante vaya generando estrategias para resolverlos, y así logre encontrar pistas o técnicas de cómo atacar un problema futuro.

BIBLIOGRAFÍA

Balanced Assessment Package for the Mathematics Curriculum. *High School Assessment Package 1 & 2*, (1999, 2000). White Plains, N.Y.: Dale Seymours Publications.

Hagelgans, N. L., Reynolds, B. E. Schwingedorf, K., Vidakovic, D., Dubinsky E., Shanin, M., Wimbish Jr. G. J. (Eds.) (1995). *A practical guide to cooperative learning in Collegiate Mathematics*. Mathematical Association of America. NW, Washington, DC. MAA Notes Number 37.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., Post, T. (2000). "Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers". En *Handbook of Research Desing in Mathematics Education*, edited by Antony E. Kelly & Richard Lesh, pp. 591-645. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Máson, Burton y Stacey (1992). *Pensar matemáticamente*. Traducción de "Thinking mathematically". Centro de publicaciones del M.E.C. Editorial Labor. España 1992.

National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics for the 1980s*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Panitz Ted (1996). *A definition of collaborative vs cooperative learning*. London, Guindhall University En: http://www.londonmet.ac.uk/deliberations/collaborative-learning/panitz-paper.cfm.

Polya, G. (1945). *Como plantear y resolver problemas*. 27ª edición, traducción en español de "How to solve it". Editorial Trillas. México 2005.

Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery*. Vol 1. New York: Wiley & Sons.

Polya, G. (1980). On solving mathematical problems in High School. En S. Krulik (Ed.). *Problem solving in school mathematics.* (1980 yearbook NCTM). Reston. VA: NCTM, pp. 1-2

Postman, N. & Weingartner (1969). Teaching as a subversive activity. New York: A Delta Book.

Santos, M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. México: Editorial Trillas.

Schoenfeld, Alan. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition,

and sense-making in Mathematics. Handbook for Research on Mathematics Teaching and

Learning (D. Grouws, Ed.). p. 334-370, [en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2006 de:

http://gse.berkeley.edu/faculty/AHSchoenfeld/LearningToThink/Learning_to_think_Math.html

Schoenfeld, A. H. (1987). Cognitive science in mathematics education: An overview. En A. H. Schoenfeld, (Ed.). *Cognitive science in mathematics education*. Lawrence Erlbaum Associates Publisher, Hillsdale Ney Jersey, pp. 1-31.

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem solving skills. En *The American mathematical monthly,* vol 87, pp. 794-806.

Schoenfeld, A. H. (1980). Heuristics in the classroom. En S. Krulik (Ed.). *Problem solving in school mathematics.* (1980 yearbook NCTM). Reston. VA: NCTM, pp. 9-22.

Sepúlveda A. Y Santos L. M. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática. En Revista Mexicana de Investigación Educativa (Octubre-Diciembre 2006). Vol 11, num. 31, pp 1389-1422.

ANEXO

Tareas aplicadas a los estudiantes

Problema 3

DISEÑO DE UNA ESCALERA

Equipo No.:__________. Nombre:__________________________________.

Este problema te da la oportunidad de:
Diseñar una escalera que cumpla con ciertas normas.
Usar el concepto de pendiente en una situación práctica.

Diseñar una escalera que tenga una elevación total de 335 cm., y que tome en cuenta las normas del diseño que se muestran en la parte de abajo de la página.

Comunica y escribe claramente las decisión que tomaste para establecer tu diseño: ¿Cuántos escalones tiene tu diseño, y cuál es el tamaño de la pisada (o huella) y elevación (o contrahuella) de cada escalón?
Incluye tus cálculos.
Muestra como tomaste en cuenta cada una de las normas.

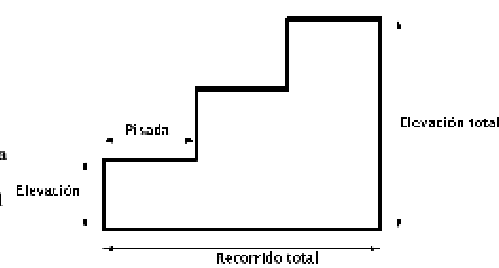
Normas para diseño de escaleras:

La pendiente de la escalera debe estar entre 0.55 y 0.85.
El doble de la elevación mas el recorrido del escalón, debe estar entre 60.9 y 63.6 cm.
No debe haber escalones irregulares, cada escalón debe ser del mismo tamaño.

Algunos términos usados:

- Pisada o huella: Parte horizontal de un escalón.
- Elevación o contrahuella: Parte vertical de un escalón.
- Pendiente: Medida de la inclinación de la escalera, se encuentra dividiendo la longitud de la elevación entre la longitud de la pisada.

$$Pendiente = \frac{elevación}{pisada}$$



27/05/2010 4

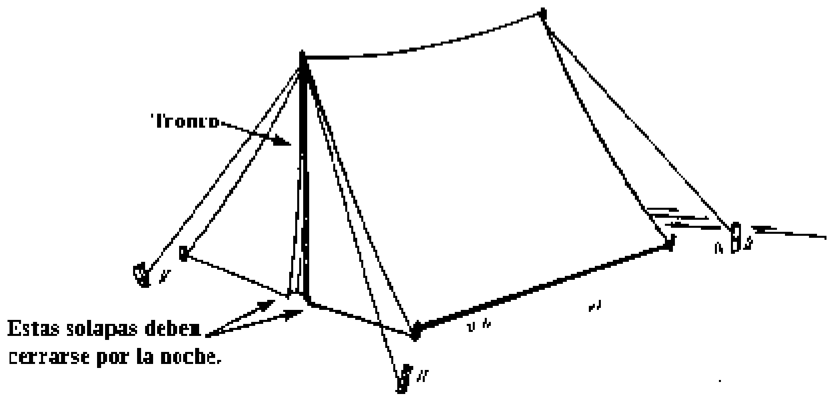
Problema 5

DISEÑO DE UNA CASA DE CAMPAÑA

Equipo No.:__________.   Nombre:_______________________________________.

Este problema te da la oportunidad de:
Estimar las dimensiones de un adulto.
Visualizar y bosquejar la superficie de una casa de campaña, mostrando todas sus dimensiones.

Este trabajo consiste en que diseñes una casa de campaña, como la que se muestra a continuación.



El diseño deben satisfacer las siguientes condiciones:

- Debe ser lo suficientemente grande de tal manera que dos adultos puedan dormir ahí, sin problemas (con todo y su equipaje).
- Debe ser lo suficientemente grande para moverse dentro, mientras se esté de rodillas.
- La parte inferior de la casa de campaña está hecha de plástico grueso, en forma rectangular.
- Los lados inclinados y los dos extremos estarán hechos de una sola pieza grande de lona. (Debería ser posible cortar la lona de tal manera que los dos extremos no necesiten ser cocidos con los lados inclinados. Debe ser posible cerrar las solapas de los extremos.)
- Dos troncos verticales y algunas cuerdas, atadas a unas estacas, sujetarán la casa completa.