



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

*“MEDICIÓN DE BIRREFRINGENCIA DE OBJETOS
TRANSPARENTES USANDO UN POLARISCOPIO”*

Tesis Para Obtener el Título de:
LICENCIADO EN FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Julio César Juárez Ramírez

DIRIGIDA POR:
Doctor en Ciencias con especialidad en óptica
Mauricio Ortiz Gutiérrez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
”Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”
U.M.S.N.H.

Morelia Michoacán - Agosto 2014.

Dedicatoria

A mi familia.

Agradecimientos

A mi familia, a mis amigos, al laboratorio de holografía.



Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez

*“MEDICIÓN DE BIRREFRINGENCIA DE OBJETOS
TRANSPARENTES USANDO UN POLARISCOPIO”*

Tesis Para Obtener el Título de:
LICENCIADO EN FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:
Julio César Juárez Ramírez

DIRIGIDA POR:
Doctor en Ciencias con especialidad en óptica
Mauricio Ortiz Gutiérrez

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
”Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”
U.M.S.N.H.

Morelia Michoacán - Agosto 2014.

Resumen

La birrefringencia es una propiedad de algunos materiales que tienen al menos dos índices de refracción debido a su simetría molecular. En la naturaleza existen materiales con esta propiedad tales como calcita o cuarzo entre otros y sus efectos sobre la luz son de interés en este trabajo. Uno de estos efectos es la doble refracción y pueden llegar a formar una doble imagen de un objeto, otro de sus efectos es el cambio en el estado de polarización de un haz de luz.

Actualmente, el estudio de la birrefringencia ha tomado interés en el área médica debido a que los tejidos del cuerpo humano presentan cierta simetría en sus células mostrando birrefringencia cuando son iluminados o vistos con luz polarizada. Está reportado que los tejidos enfermos pierden el orden de las células como en el caso del cáncer como se ve en el trabajo de G. Wood Michael [1] o del glaucoma como muestra Cense, Barry en [2] y por tanto su birrefringencia sufre un cambio. El análisis consiste en determinar o medir la birrefringencia de estos tejidos para determinar si están enfermos o sanos.

En este trabajo se muestra un método para medir la birrefringencia de materiales cuya absorbancia es despreciable. Este método se basa en el uso de un sistema óptico conocido como polariscopio que consiste de un par de polarizadores lineales con su eje de transmisión perpendiculares entre sí siendo la muestra colocada entre ellos. La imagen que se obtiene en la salida del sistema es capturada por una cámara digital y es procesada con un algoritmo implementado en *Mathematica*. Los resultados de la birrefringencia que se obtienen son comparados con los obtenidos con un polarímetro comercial.

La ventaja de este método respecto a otros es que se pueden analizar materiales en área y con otros por ejemplo el polarímetro se hacen mediciones puntuales.

Palabras clave: Medida de la birrefringencia, polariscopio, polarímetro, plásticos.

Abstract

The birefringence is a optical property of some materials with at less two refractive index due their molecular simetry. In nature exist materials with this property such as calcite, quartz and others and their effects on light are of interest in this work. One of this effects is the double refraction that can produce a double image from a object, an other efect is the change in the polarization state of light.

This days,the study of birefringence has take interest in the medical area due to the human body tissue present some simetry on the cells showing birefringence when are iluminate by light or are seen through polarized light. There is reported that ill tissue loss their cell order as in the case of cancer and therefore exist a birefringence change. The analisys consist in determinate or measure the birefringence on this tissues to determinate if they are healthy or ill.

In this work is shown a method to measure birefringence of materials with negligible absorbance. This method is based on a system optic known as polariscope that consists of two lineal polarizers with trasmition axes perpendicular between them. The image at the end of the optical system is captured by a digital camera and processed with an algorithm written in *Mathematica*. The resulting birefringence are compare with the birefringence measured with a comercial polarimeter.

The advantage in the use of the polariscope is that is posible to analyze materials in area and with the polarimeter only can make a putual measure.

Keywords: Birefringence measurement, polariscope, polarimeter, plastics.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Aplicaciones médicas	2
1.2. Objetivos	4
1.2.1. Objetivo general	4
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. Distribución de capítulos	5
2. Birrefringencia	6
2.1. Índice de refracción	6
2.2. Birrefringencia	12
3. Luz polarizada y dispositivos polarizantes	18
3.1. Luz Polarizada	18
3.1.1. Formalismo de Stokes	23
3.1.2. Parámetros de Stokes	23
3.1.3. Interpretación física	25
3.2. Dispositivos polarizantes	26
3.2.1. Formalismo de Müller	27
3.3. Polariscopio	29
3.3.1. Polariscopio lineal de campo oscuro en formalismo de Stokes-Müller	30
3.4. Polarímetro	31
3.5. Aplicaciones	33
3.5.1. Fotoelasticidad	33
4. Resultados	36
4.1. Calibración del polariscopio V-H	36
4.2. Metodología	38
4.3. Algoritmos	39
4.3.1. Cálculo de fase con polariscopio	40
4.3.2. Cálculo de fase con polarímetro	41

ÍNDICE GENERAL

4.4. Análisis de errores en las mediciones	42
4.5. Resultados	43
5. Conclusiones	56
A. Un poco de geometría analítica	58
B. Derivación de los parámetros de Stokes	60
C. Derivación de matrices de Mueller	67
D. Polariscopio lineal oscuro H-V	72
E. Análisis de incertidumbre	74
Referencias	77

Capítulo 1

Introducción

En la mayoría de las aplicaciones de la interferometría es importante realizar la medición de fase a través de esta algún parámetro físico que se encuentra en la expresión de la fase, por ejemplo el índice de refracción. El objetivo de este trabajo es medir la birrefringencia de algunos materiales transparentes. Existen algunos métodos para medir birrefringencia y dependen de que forma y grosor tiene el material que se desea medir, o si dispersa la luz o no. Por ejemplo para objetos con cara plana y con buena reflectancia se puede medir aplicando la técnica de elipsometría con el inconveniente que gran parte de los elipsómetros comerciales necesitan analizar la muestra a diferentes ángulos incidentes para obtener el índice de refracción, además de que se hace la medición de forma puntual como se ve en los trabajos de Gåsвик [3], Peatross [4], Fowles [5], Dieter [6] siendo un método lento e impráctico para medir una película de algunos centímetros cuadrados. Para objetos de caras planas y con buena transmitancia para la longitud de onda que se trabaje se puede medir la birrefringencia utilizando un polarímetro como reporta Hunston [7] pero la medición también es puntual presentando el mismo problema. En objetos de caras planas y eje óptico oblicuo a la superficie incidente se puede medir la birrefringencia debido a la formación de dos imágenes separadas porque las direcciones del rayo ordinario y extraordinario son diferentes, y entonces midiendo la separación de estas imágenes y conociendo el espesor del material se puede conocer la birrefringencia, como muestra Bernardo [8]. Para medir la birrefringencia inducida por estrés interno en objetos transparentes, como fibras ópticas dobladas, se puede medir con hologramas reconstruyendo por separado la amplitud y la fase de dos frentes de onda que lleva información de los estados de polarización causados por el objeto como trabaja Colomb [9]. En este trabajo se utiliza un arreglo óptico mediante el cual se pretende conocer la birrefringencia de una película de forma sencilla y para un área, y no de forma puntual, mediante el uso del polariscopio. En este

método se hacer incidir un frente de onda polarizado sobre el material, éste cambia su fase debido a su función como retardador y sus efectos pueden ser observados si se coloca otro polarizador conocido como analizador después del material. Lo que se observará si se coloca una pantalla al final del arreglo será un patrón de franjas oscuras y claras donde cada intensidad es un estado de polarización diferente siendo entonces el patrón de franjas o un mapa de polarizaciones así como un mapa topográfico es un mapa de alturas. Este patrón de franjas contiene a su vez información sobre la relación entre los índices de refracción ordinario (n_o) y extraordinario (n_e) de nuestro material ya que la fase es directamente proporcional a la diferencia de índices de refracción, el cual puede ser determinado mediante la envoltura de la fase del patrón de franjas. Una vez que la muestra a la cual se quiere medir su birrefringencia es colocada en el arreglo óptico el patrón de franjas a la salida del sistema óptico es capturado y procesado mediante un algoritmo diseñado para extraer la información de la fase para todo el patrón de franjas punto a punto todo de una vez. El arreglo propuesto en el trabajo permite que la medición de la birrefringencia de la película se logre en algunos segundos desde que se colocó la muestra a examinar en el arreglo hasta que se tiene el mapa de fases de la película, siendo un mejor modo de obtener la birrefringencia para películas que los mencionados anteriormente.

1.1. Aplicaciones médicas

El cuerpo humano tiene una gran variedad de tejidos bien ordenados con distintas estructuras y propiedades, algunos de estos tejidos tienen cierto grado de birrefringencia o se les puede inducir de algún modo por lo que es posible aplicar lo desarrollado en este trabajo en medicina, a continuación se habla de algunas de ellas.

Se puede detectar pérdida de visión por glaucoma conociendo la birrefringencia de la capa de fibras de nervio óptico (RNFL¹ por sus siglas en inglés). El glaucoma es la segunda causa de ceguera en el mundo dañando las células ganglionares ocasionando un adelgazamiento del RNFL además la pérdida de tejido de la capa de fibras de nervio óptico pueden producir cambios en la birrefringencia, con la muerte de las células ganglionares el tejido de RNFL es remplazado por un tejido menos organizado y amorfo compuesto por células gliales por lo que es de esperarse un cambio de birrefringencia. Cuando el glaucoma es detectado a una etapa temprana la pérdida de visión puede ser prevenida, el método estándar para detectar pérdida de visión periférica en

¹Retinal nerve fiber layer.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

glaucoma es el examen de campo de visión, sin embargo el 40 % de los nervios tienen un daño irreversible antes que la pérdida de visión periférica pueda ser clínicamente detectada como reporta Cense [2], además en una retina sana la birrefringencia de RNFL varía como función de la posición alrededor de la cabeza del nervio óptico (ONH² por sus siglas en inglés). Se puede ver en [2] una discusión más a fondo y sus resultados.

Un tejido infartado (tejido muerto causado por la obstrucción de la arteria que riega dicha área según el diccionario médico Melloni [10]) se deforma, se forman cicatrices y pierde el buen orden que tiene un tejido sano, perdiendo su anisotropía. El tejido de un corazón sano esta compuesto de arreglos bien ordenados de cardiomiocitos, la anisotropía natural de un tejido fibroso como el de un miocardio sano resulta en el cambio direccional del índice de refracción (un índice en la dirección a lo largo de las fibras y otro perpendicular a las fibras), después de un infarto el miocardio se expande en la zona infartada, hay dilatación ventricular, adelgazamiento de las paredes ventriculares y formación de cicatrices las cuales causan alteraciones de las funciones cardíacas normales. El tejido cicatrizado del infarto es isotrópico (no depende de la dirección) con estructuras de colágeno orientadas caóticamente por lo que debe disminuir su birrefringencia. Para calcular la birrefringencia uno debe conocer la distancia que la luz se propaga en ese medio, un valor normalmente no conocido *a priori* particularmente en un medio altamente dispersivo como un tejido, sin embargo el retraso que introduce puede ser usado como medida de la anisotropía del tejido si la distancia de propagación es constante en todas las medidas así el cambio en retraso de fase se deberá solo al cambio de birrefringencia. Es cierto que las diferencias entre el tejido sano y el tejido infartado puede cambiar el camino óptico, pero cambios grandes en la birrefringencia sigue dominando en la medición del retraso. Un tejido rápidamente rompe con la polarización de un haz polarizado, pero se mantiene la polarización suficiente en muestras de tejido de transmisión difusas delgadas de 1 a 3 mm, o en reflexión difusa de cualquier espesor que permita polarimetría cuantitativa. De modo que es posible caracterizar el tejido de miocardio midiendo la birrefringencia, específicamente cambios asociados con la reestructura debido a un infarto y tratamientos regenerativos. G. Wood discute mas a fondo el tema [1] y se muestran dos métodos para medir la birrefringencia, una punto a punto y otra en imágenes de área grande, la cual muestra potencial para el monitoreo de tratamientos regenerativos. Una aplicación muy buena cuando las enfermedades cardiovasculares son la causa número uno de muertes alrededor del mundo.

²Optical nerve head.

La tomografía de coherencia óptica (OCT³ por sus siglas en inglés) es un tipo de imagen óptica relativamente nueva que permite una imagen tomográfica de alta resolución de sección cruzada de microestructuras internas en materiales y sistemas biológicos por medición de luz retrodispersiva o retroreflexiva logrando imágenes de resolución de 1-15 μm , de uno a dos órdenes de magnitud más alto que con ultrasonido convencional, la imagen se puede realizar *in situ* (en el lugar) y en tiempo real como lo hace Bouma [11]. Una de las primeras aproximaciones hacia imágenes tomográficas de sección cruzada fue la imagen tomográfica del epitelio pigmentario retinal (RPE⁴ por sus siglas en inglés) del ojo humano obtenido *in vivo* por el haz dual de técnica LCI presentada en la conferencia ICO-15 SAT por Fercher (1990) y publicado por Hitzenberger (1991) [12]. Haciendo la OCT sensible a la polarización (PS-OCT) es posible medir birrefringencia y de generar mapas de birrefringencia de porciones de miocardio, además de mejorar el contraste de la tomografía cuando los tejidos son birrefringentes como el colágeno y PS-OCT puede ser un indicador sensible de la organización de la microestructura del tejido como se muestran en los trabajos de Bouma y Fercher [11], [12].

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Medir la birrefringencia de objetos transparentes de forma eficiente, rápida y con buena precisión.

1.2.2. Objetivos específicos

- Comprender el concepto de birrefringencia.
- Implementar experimentalmente el arreglo del polariscopio de campo oscuro y campo claro.
- Diseñar un algoritmo para análisis de datos.

³Optical coherence tomography.

⁴Retinal pigment epithelium.

- Medir la birrefringencia para materiales como celofán, acetato, caja de CD y cuchara de plástico.

1.3. Distribución de capítulos

Este trabajo está distribuido en cinco capítulos cuyo contenido es analizado en esta sección.

En el capítulo 2 se define el índice de refracción y se discute sobre la birrefringencia.

En el capítulo 3 inicia con el concepto de luz polarizada y las correspondientes ecuaciones de onda asociadas. Formas y dispositivos ópticos para polarizar la luz. Se menciona y analiza el formalismo matemático de Stokes-Müeller. Se habla sobre el polariscopio circular y lineal de campo oscuro y claro y, la expresión de este dispositivo en el formalismo de Stokes-Müeller. También se incluye una sección sobre el polarímetro y algunas aplicaciones.

En el capítulo 4 se detalla la metodología con que se realizó la calibración, el experimento, los algoritmos empleados y los resultados obtenidos al medir la birrefringencia del celofán, el acetato, la caja de CD y la cuchara de plástico.

El capítulo 5 se mencionan las conclusiones a las que se llegan con este trabajo y sus resultados.

Y por último algunos apéndices sobre geometría analítica, la derivación de los parámetros de Stokes y algunas matrices de Müeller, derivación de la expresión en formalismo de Stokes-Müeller para el polariscopio H-V y análisis de incertidumbre.

Capítulo 2

Birrefringencia

2.1. Índice de refracción

En 1845 Michael Faraday (1791-1867) observó que un campo magnético podía rotar el plano de polarización de la luz que pasaba a través de una región magnetizada. Esta observación condujo a Faraday a asociar la luz con radiación electromagnética, pero no fue capaz de cuantificar esta asociación. James Clerk Maxwell (1831-1879) modeló un marco matemático para el modelo de Faraday y fue publicado en 1864. En este trabajo, Maxwell identificó luz como una “perturbación electromagnética en forma de ondas propagándose a través del campo electromagnético de acuerdo a las leyes electromagnéticas” y demostró que la velocidad de propagación de la luz está dada por las propiedades electromagnéticas del material.

Kirchhoff reconoció en 1857 que la velocidad de la luz podría ser obtenida de las propiedades electromagnéticas. Riemann en 1858 supuso que las fuerzas electromagnéticas se propagan a velocidad finita y derivan una velocidad de propagación dada por las propiedades electromagnéticas del medio. Sin embargo, fue Maxwell quien demostró que los campos eléctricos y magnéticos son ondas que viajan a la velocidad de la luz. No fue hasta 1887 que una observación experimental de las ondas electromagnéticas fue obtenida por Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894).

Fueron varios físicos que realizaron estudios importantes sobre el comportamiento de los campos eléctrico y magnético estáticos y formularon las leyes que rigen su comportamiento. James Clerk Maxwell unificó estas leyes en la conocida teoría electromagnética que rige el comportamiento de las ondas electromagnéticas.

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

Resultados importantes de la teoría electromagnética son las llamadas ecuaciones de Maxwell que se enlistan en la tabla 2.1.

Tabla 2.1: Ecuaciones de Maxwell

Ley	Forma integral	Forma diferencial
Ley de inducción de Faraday	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Ley de Gauss eléctrica	$\oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \iiint_V \rho dV$	$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$
Ley de Gauss magnética	$\Phi_M = \oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Ley de Ampere	$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu \iint_A \left(\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \mu i$	$\nabla \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

En la tabla 2.1 ϵ es la permitividad eléctrica del medio, ϵ_0 es la permitividad eléctrica en el vacío, μ la permeabilidad magnética, μ_0 la permeabilidad magnética en el vacío y σ es la conductividad eléctrica.

Considerando las ecuaciones en forma diferencial y considerado la identidad de operadores

$$\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla (\cdot F) - \nabla^2 F, \quad (2.1)$$

se tiene que de la ley de Faraday

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}), \quad (2.2)$$

y considerando la ley de Gauss eléctrica y la ley de Ampere, finalmente se llega a la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

De manera similar, se puede obtener una ecuación de onda si se considera el rotacional de la ley de Ampere y se puede demostrar que está dada por

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}. \quad (2.4)$$

En medios no conductores la conductividad $\sigma = 0$ y estas ecuaciones se reducen a:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

y

$$\nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Es decir que se pudo deducir las ecuaciones de onda 2.5 y 2.6 a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Maxwell usó resultados de experimentos eléctricos (respecto a la permitividad eléctrica y permeabilidad) llevados a cabo por Wilhelm Weber (1804-1891) y Rudolph Kohlrausch (1809-1858) y demostró que la velocidad v de propagación de las ondas es

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}. \quad (2.7)$$

Este resultado teórico estaba de acuerdo con la velocidad de la luz medida por Fizeau en 1849. Lo que le hace concluir que la luz en sí misma es una onda electromagnética.

En un medio donde no hay cargas eléctricas libres o corrientes, son necesarios dos campos vectoriales más la densidad de flujo eléctrico \vec{D} y la densidad de flujo magnético \vec{H} . La relación entre estas nuevas cantidades y los campos \vec{E} y \vec{B} dependen de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio respectivamente. Estas ecuaciones están relacionadas por medio de:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (2.8)$$

y

$$\vec{H} = \mu_0 \vec{B} + \mu_0 \vec{M}, \quad (2.9)$$

donde \vec{P} es la densidad de polarización y \vec{M} es la densidad de magnetización. En un medio dieléctrico, la densidad de polarización es la suma macroscópica de los momentos bipolares eléctricos que el campo eléctrico induce. La magnetización es definida similarmente.

De acuerdo a las definiciones de \vec{P} y \vec{M} , se observa entonces que se relacionan con los campos eléctricos y magnéticos por relaciones que dependen de las propiedades eléctricas y magnéticas.

En el espacio libre $\vec{P} = \vec{M} = 0$. En un medio no magnético $\vec{M} = 0$ y siempre se supondrá en adelante que se tiene un medio no magnético.

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

Se dice que un medio dieléctrico es lineal si el campo vectorial $\vec{P}(r, t)$ está linealmente relacionado al vector de campo $\vec{E}(r, t)$ y entonces, el principio de superposición se puede aplicar.

Se dice que un medio es no dispersivo si su respuesta es instantánea, es decir, \vec{P} en el tiempo t es determinado por \vec{E} en el mismo tiempo t y no por valores previos de \vec{E} . La no dispersividad es una idealización debido a que todo sistema físico, por muy rápido que pueda ser, tiene un tiempo de respuesta finito.

Un medio es homogéneo si la relación entre \vec{P} y \vec{E} es independiente de la posición r . El medio es llamado isotrópico si la relación entre los vectores \vec{P} y \vec{E} es independiente de la dirección del vector \vec{E} , así que el medio se “ve” igual en todas direcciones. Los vectores \vec{P} y \vec{E} deben ser paralelos.

Se dice que un medio es espacialmente no dispersivo si la relación entre \vec{P} y \vec{E} es local, es decir, \vec{P} en cada posición r es influenciado solo por \vec{E} en la misma posición.

Considerando el caso más simple de un medio lineal, no dispersivo, homogéneo e isotrópico, el vector \vec{P} y \vec{E} en cualquier posición y tiempo son paralelos y proporcionales, así que

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (2.10)$$

donde χ es una constante escalar llamada susceptibilidad eléctrica. Sustituyendo la ecuación 2.10 en 2.8 se tiene

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (2.11)$$

donde

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi), \quad (2.12)$$

es otra constante escalar conocida como permitividad eléctrica del medio. La razón $\varepsilon/\varepsilon_0$ es la permitividad relativa o constante dieléctrica. Bajo estas condiciones, se pueden reescribir las ecuaciones de Maxwell para el vacío sustituyendo ε_0 por ε para medios lineales, no dispersivos homogéneos e isotrópicos. Por tanto, la ecuación de onda para el campo eléctrico se escribe como:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu_0}} = \frac{1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}}, \quad (2.14)$$

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

es la velocidad de propagación dentro del medio. Se define el índice de refracción n como:

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \frac{c}{v} = \sqrt{1 + \chi}, \quad (2.15)$$

donde se consideró la ecuación 2.12.

Los medios dieléctricos discutidos previamente se han supuesto transparentes, es decir, no absorben luz. El vidrio es casi transparente en la región visible del espectro electromagnético, pero absorbe en las regiones ultravioleta e infrarrojo.

Los materiales dieléctricos que absorben luz son representados por su susceptibilidad compleja dada por:

$$\chi = \chi' + i\chi'', \quad (2.16)$$

y corresponde a una permitividad compleja $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi)$. Considerando el valor del vector \vec{k} , tenemos que

$$k = \frac{\omega}{c} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} = k_0\sqrt{1 + \chi} = k_0\sqrt{(1 + \chi' + i\chi'')}, \quad (2.17)$$

y como puede verse de la ecuación 2.17 ahora k es complejo.

Lo anterior puede verse claramente si se considera la onda dentro del material absorbente dada por

$$\vec{E}(z, t) = Ae^{-i(kz - \omega t)} = Ae^{-ikz}e^{i\omega t} = U(z)e^{i\omega t}, \quad (2.18)$$

donde $U(z) = e^{-ikz}$ es ahora compleja y representa la amplitud de la onda dada en la ecuación 2.18 y ahora depende de z y disminuye su valor conforme z aumenta es decir, mientras la onda viaja dentro del material absorbente, la amplitud decae. Sin embargo, debe ser real, por lo que entonces k debe ser compleja y de acuerdo a la ecuación 2.17, entonces la susceptibilidad debe ser compleja como se supuso en el párrafo anterior.

Supóngase entonces que $k = \beta - i(1/2)\alpha$, donde β y α son reales. Usando la ecuación 2.17 se obtiene

$$\beta - i\frac{1}{2}\alpha = k_0\sqrt{(1 + \chi' + i\chi'')}. \quad (2.19)$$

La ecuación 2.19 relaciona β y α con las componentes de la susceptibilidad χ' y χ'' . Ahora, considerando la parte espacial de la ecuación 2.18 se tiene

$$e^{-ikz} = e^{-\frac{1}{2}\alpha z}e^{i\beta z}. \quad (2.20)$$

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

La ecuación 2.20 indica que la intensidad de la onda es atenuada por el factor $|e^{ikz}|^2 = e^{-\alpha z}$, así que α representa el coeficiente de absorción (también conocido como coeficiente de atenuación o coeficiente de extinción). Ahora, también de la ecuación 2.20 se observa que el parámetro β es la razón a la cual la fase cambia en función de z y por tanto es la constante de propagación. El medio, por tanto, tiene un índice de refracción efectivo n definido por:

$$\beta = nk_0, \quad (2.21)$$

y la onda viaja con velocidad $c = c_0/n$.

Sustituyendo la ecuación 2.21 en la ecuación 2.19 se obtiene una ecuación que relaciona el índice de refracción n y el coeficiente de absorción α con la parte real e imaginaria de la susceptibilidad y está dado por

$$n = -i \frac{\alpha}{2k_0} = \sqrt{(1 + \chi' + i\chi'')}. \quad (2.22)$$

La ecuación 2.22 define el índice de refracción complejo y relaciona el coeficiente de absorción con el índice de refracción.

En un medio para el que $\chi' \ll 1$ y $\chi'' \ll 1$ (es decir, un medio poco absorbente como por ejemplo un gas) se puede hacer la siguiente aproximación

$$\sqrt{(1 + \chi' + i\chi'')} \approx 1 + \frac{1}{2}(\chi' + i\chi''), \quad (2.23)$$

y entonces, usando 2.23 en la 2.22 se tiene el siguiente par de ecuaciones

$$n \approx 1 + \frac{1}{2}\chi', \quad (2.24)$$

y

$$\alpha \approx -k_0\chi''. \quad (2.25)$$

Las ecuaciones 2.24 y 2.25 determinan la parte real y compleja del índice de refracción en un medio débilmente absorbente y se observa que la parte real se relaciona linealmente con la susceptibilidad mientras que el coeficiente de absorción es proporcional a la parte imaginaria de la susceptibilidad. Para un medio absorbente χ'' es negativo y α es positivo.

En este trabajo se considera que los materiales usados son no absorbentes y por lo tanto no es de interés analizar la parte compleja del índice de refracción.

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

En las tablas 2.2, 2.3 y 2.4 se muestra el índice de refracción de algunas sustancias.

Tabla 2.2: Índice de refracción de gases a 0°C y 1 atm. [13].

Vacío	1
Aire	1.000293
Helio	1.000036
Hidrógeno	1.000132
Bióxido de carbono	1.00045

Tabla 2.3: Índice de refracción de líquidos a 20°C. [13].

Benceno	1.501
Agua	1.333
Alcohol etílico (etanol)	1.361
Tetracloruro de carbono	1.461
Bisulfuro de carbono	1.628

Tabla 2.4: Índice de refracción de sólidos a temperatura ambiente. [13].

Diamante	2.419
Ámbar	1.55
Sílice fundida	1.458
Cloruro de sodio	1.50

2.2. Birrefringencia

En 1669 Erasmus Bartholinus (1625-1692), doctor en medicina y profesor de matemáticas en la Universidad de Copenhague descubrió un fenómeno óptico en la calcita al que llamo *doble refracción*. Bartholinus observó que los objetos vistos a través de la calcita se ven dobles como se aprecia en la figura 2.1 lo cual se debe a la doble refracción o birrefringencia y esto es por la existencia de dos índices de refracción, conocido como índice ordinario n_o e

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

índice extraordinario n_e . Si se considera un haz de luz incidente en un cristal birrefringente una parte del haz se refractará normalmente como lo haría en cualquier otro cuerpo transparente y otra parte del haz se desviará formando así las dos imágenes, se les conoce como *rayo o* u *ordinario* y *rayo e* o *extraordinario* respectivamente. Si el cristal birrefringente se gira también lo hará el haz extraordinario siguiendo el movimiento del cristal. Al analizar los dos haces con un polarizador se encontrará que ambos haces están linealmente polarizados, además tienen polarizaciones ortogonales.

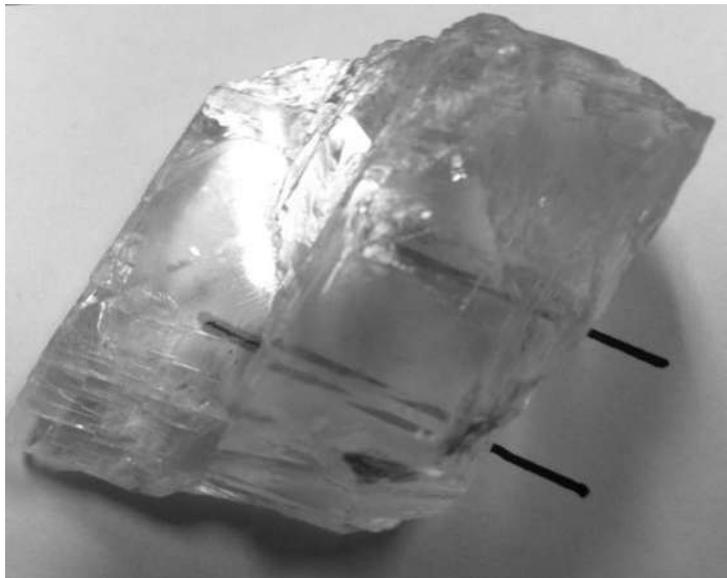


Figura 2.1: Calcita.

Una onda electromagnética se propaga a través de un medio excitando a los electrones dentro del medio, los electrones interiores son impulsados por el campo eléctrico \vec{E} de la onda electromagnética, esto hace que irradian generando pequeñas ondas secundarias que se superponen haciendo que la onda refractada avance.

Las sustancias cristalinas, por ejemplo, tienen sus moléculas ordenadas en un arreglo poliédrico. Algunas de estas formas se muestran en la Figura 2.2, los poliedros mencionados se les conoce como celda unidad y se le conoce como red de Bravais. Existen 14 formas diferentes de las estructuras cristalinas pero no todas éstas presentan el fenómeno de birrefringencia como muestra Mickelvey [14]. Las diferentes formas de los planos reticulares, es decir las caras de la celda unidad es la responsable de las diferentes veloci-

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

des de propagación de la luz en diferentes materiales, pues la excitación de los electrones en un arreglo cuadrado es diferente que en un arreglo hexagonal, lo que implica que las ondas irradiadas por estos y la onda refractada final tendrán velocidades diferentes.

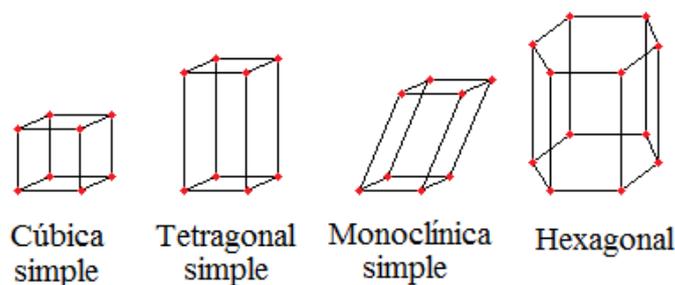


Figura 2.2: Esquema de algunas estructuras cristalinas.

Se puede ver un modelo ilustrativo en Hecht [13] que explica la birrefringencia usando una esfera cargada unida a un núcleo por resortes con distinta rigidez.

La calcita o carbonato de calcio ($CaCO_3$) es un ejemplo de un cristal birrefringente, una sustancia muy común presente en el mármol y piedra caliza. En la figura 2.1 se presenta una fotografía de una calcita. Debajo de ella se aprecia un par de líneas negras dibujadas sobre el papel y sobresalen del tamaño del cristal de calcita. Si se observa la imagen dentro de la calcita aparecen cuatro líneas. Dos de ellas corresponden a las líneas originales y las otras dos son las imágenes que se forman por la birrefringencia. Cada par de imágenes tienen polarizaciones lineales ortogonales entre sí.

Los cristales con estructuras cúbicas como el cloruro de sodio tienen sus átomos ordenados con mucha simetría por lo que no existe una dirección preferencial y la luz propagada de una fuente puntual en su interior se propagará uniformemente en todas direcciones en una onda esférica como en los sólidos amorfos. Tendrá un sólo índice de refracción y será ópticamente isotrópico.

En cristales menos simétricos como cristales con estructura hexagonal, tetragonal y trigonal la luz que se propaga en alguna dirección en general se encontrará una estructura asimétrica. Tales sustancias son ópticamente

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

anisotrópicas y birrefringentes.

Se le dice eje óptico a la dirección alrededor de la cual los átomos están arreglados simétricamente.

Los cristales con un sólo eje óptico se les llama *uniaxiales*. Si se considera una fuente de luz puntual dentro de un cristal uniaxial las ondas *ordinarias* son esféricas y las *extraordinarias* son elipsoidales como se ve en las figuras 2.3 y 2.4. La orientación del campo con respecto al eje óptico determina las velocidades con las que éstas ondas se propagan. El campo \vec{E}_o de la onda *ordinaria* en todo punto es normal al eje óptico y se mueve con velocidad v_{\perp} . La onda *extraordinaria* solamente tiene velocidad v_{\perp} en la dirección del eje óptico, por lo cual las ondas *ordinaria* y *extraordinaria* se tocan en el eje óptico. En cualquier otro caso el campo \vec{E}_e de la onda *extraordinaria* se propaga paralelamente al eje óptico con velocidad v_{\parallel} como se ve en las figuras 2.3 y 2.4.

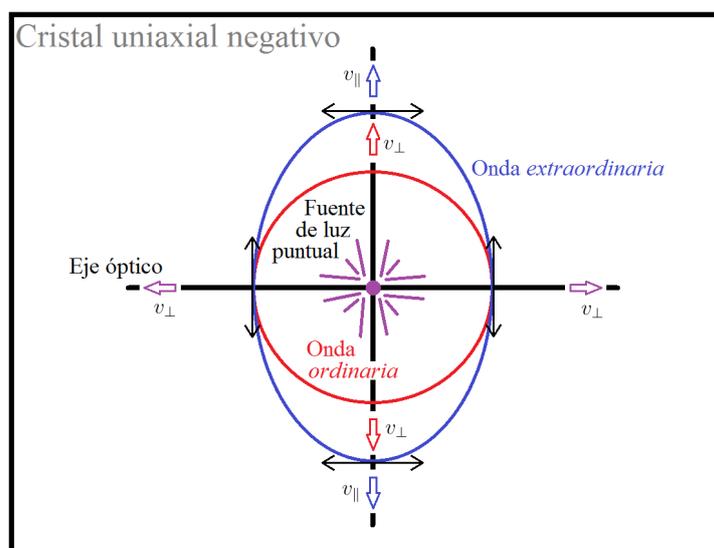


Figura 2.3: Frente de onda en un cristal uniaxial negativo.

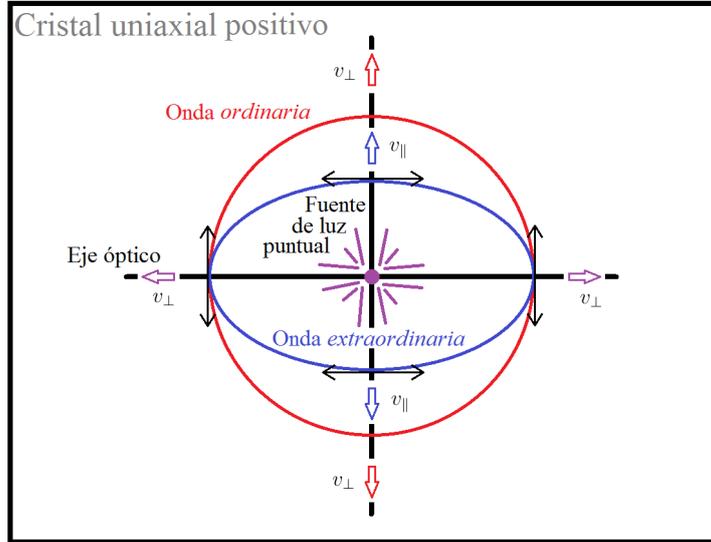


Figura 2.4: Frente de onda en un cristal uniaxial positivo.

Los materiales uniaxiales tienen dos índices principales de refracción $n_o \equiv c/v_{\perp}$ y $n_e \equiv c/v_{\parallel}$. La diferencia $\Delta n = n_e - n_o$ es una medida de la birrefringencia. Se dice que es un cristal uniaxial negativo cuando $\Delta n < 0$ como en el caso de la calcita y es positivo cuando $\Delta n > 0$ como el cuarzo y el hielo.

Los otros sistemas cristalográficos ortorrómbicos, monoclinicos y triclinicos tienen dos ejes ópticos (cristales *biaxiales*). Los materiales biaxiales tienen tres índices principales de refracción diferentes. En este caso la birrefringencia se mide como la diferencia entre el mayor y el menor de los índices.

Cuando la luz pasa de un medio a otro sufre un cambio de fase. Considerando dos ondas planas armónicas idénticas cuyas expresiones son

$$\psi_a(z, t) = A \text{sen}(kz - \omega t), \quad (2.26)$$

$$\psi_b(z, t) = A \text{sen}(kz - \omega t), \quad (2.27)$$

y se supone que viajan en un medio de índice de refracción n_i de A a B pero una de ellas pasa a través de un medio de espesor d de índice de refracción n_f como se ve en la figura 2.5.

CAPÍTULO 2. BIRREFRINGENCIA

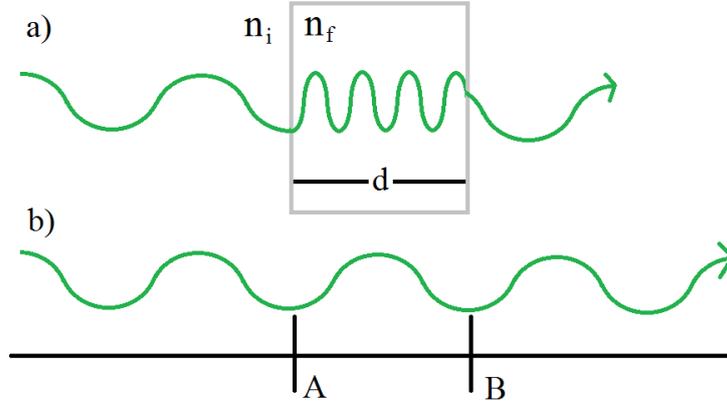


Figura 2.5: Esquema que muestra dos ondas en fase y la onda a) sufre un cambio de fase debido a cruzar un medio con índice de refracción $n_f \neq n_i$. La onda b) siempre viaja en el mismo medio por lo que su fase no cambia.

Al tiempo $t = 0$ toman la forma

$$\psi_a(z, t) = A \text{ sen } kz, \quad (2.28)$$

$$\psi_b(z, t) = A \text{ sen } kz, \quad (2.29)$$

la fase de la onda ψ_b es $\phi_b = kn_i|A - B| = kn_id$ y de la onda ψ_a es $\phi_a = kn_f|A - B| = kn_fd$ por lo que la diferencia de fase entre las dos ondas es

$$\Delta\phi = \phi_a - \phi_b = k(n_f - n_i)d = k\Delta nd. \quad (2.30)$$

Este resultado se puede utilizar para el caso en que la onda atraviese un material birrefringente y entonces, en la ecuación 2.30 el término Δn es la medida de la birrefringencia.

Capítulo 3

Luz polarizada y dispositivos polarizantes

La polarización es una característica de la luz al igual que lo es la longitud de onda. Algunos insectos como abejas, moscas de fruta o mantis pueden distinguir estados de polarización, también animales como pulpos, calamares o moluscos cefalópodos como reporta Können [15]. Algunos seres humanos distinguen los estados de polarización observando una imagen en nuestro campo de visión conocida en oftalmología como cepillo de Haidinger como muestran können [15] y la American Academy of Ophthalmology [16], sin embargo éste no es fácil de observar lo que dificulta distinguir los estados de polarización sin instrumentos ópticos, sin embargo, si se puede ver los efectos de la polarización cuando ésta interactúa con la materia.

3.1. Luz Polarizada

La luz es una onda electromagnética donde la componente magnética siempre se encuentra a un ángulo de 90° de la componente eléctrica, por lo que basta describir el comportamiento de una de ellas puesto que la otra se encuentra perpendicular a la primera. Generalmente se analiza la componente del campo eléctrico porque tiene una magnitud mayor que la componente magnética ($E = cB$).

La luz puede clasificarse según el lugar geométrico en el cual vibra la onda. Si la vibración de la onda está restringida a un plano se dice que tiene polarización lineal.

Una onda electromagnética viajando en el espacio cuyo campo eléctrico se

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

muestra en la figura 3.1 se puede representar mediante dos ondas linealmente polarizadas ortogonales entre sí y están dadas en las ecuaciones 3.1 y 3.2.

$$\vec{E}_x(z, t) = E_{0x} \text{sen}(kz - \omega_x t) \hat{i}, \quad (3.1)$$

$$\vec{E}_y(z, t) = E_{0y} \text{sen}(kz - \omega_y t + \varepsilon) \hat{j}. \quad (3.2)$$

Por simplicidad se considera que la onda viaja en dirección z , tiene frecuencia ω y además la componente vertical tiene una fase inicial ε .

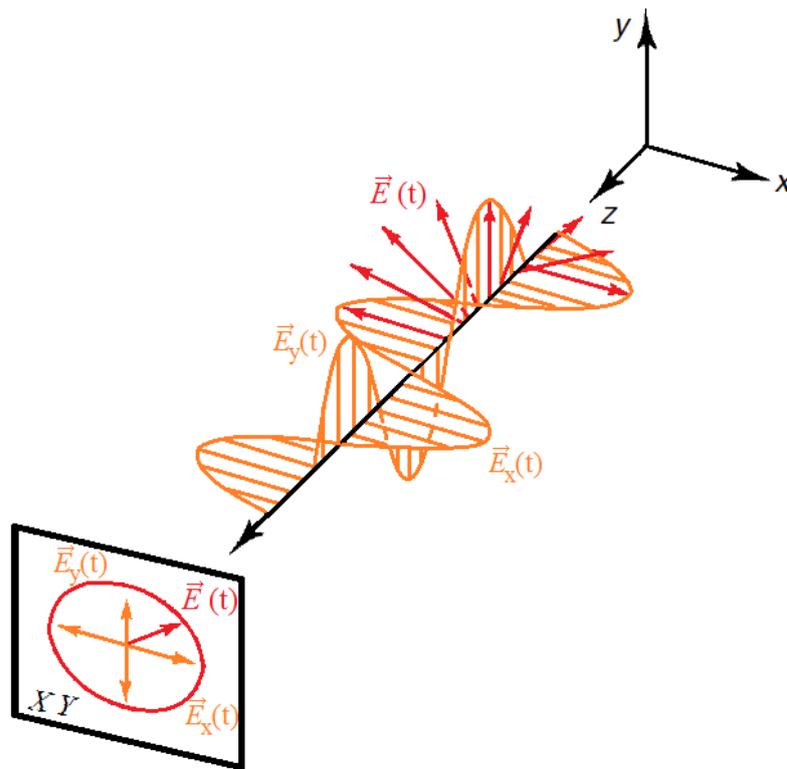


Figura 3.1: Esquema que muestra una onda con polarización elíptica.

Si un observador fijo en el espacio ve la onda avanzar hacia él verá las ondas dadas en la ecuación 3.1 y 3.2 como se muestra en la figura 3.2.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

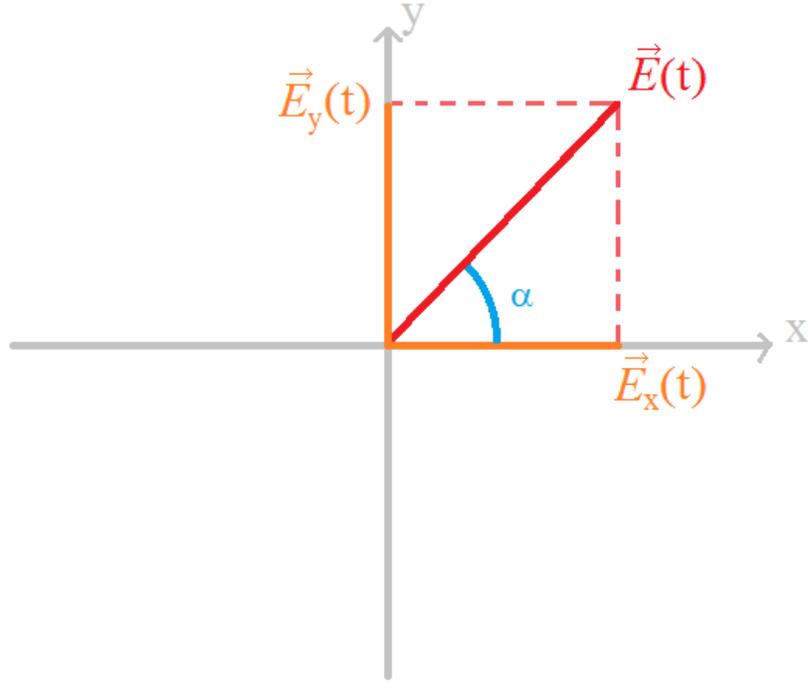


Figura 3.2: Esquema del plano $z = 0$ transversal a la dirección de propagación de la onda.

Como puede observarse en la figura 3.2, la resultante $\vec{E}(t)$ forma un ángulo α respecto del eje horizontal. En general el ángulo α y la magnitud resultante de $\vec{E}(t)$ no son constantes en el tiempo. El estado de polarización está directamente relacionado con el cambio del ángulo α y de la magnitud de $\vec{E}(t)$ y dice como se mueve la onda en el plano $x - y$. Si la magnitud de la onda $\vec{E}(t)$ se mantiene constante y el ángulo crece (o decrece) monótonamente se tiene polarización circular izquierda (o derecha); si la magnitud no es constante entonces es polarización elíptica y si el ángulo α es constante entonces es polarización lineal.

La diferencia de fase ε y las amplitudes son los parámetros responsables de la polarización. Entonces la superposición de las ecuaciones 3.1 y 3.2 dan como resultado:

$$\vec{E}(z, t) = E_{0x} \sin(kz - \omega t) \hat{i} + E_{0y} \sin(kz - \omega t + \varepsilon) \hat{j}. \quad (3.3)$$

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

A continuación se analizan algunos casos especiales de 3.3.

- (a) Si la onda está en fase, es decir $\varepsilon = 2n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ se tiene polarización lineal y está dada por la expresión 3.4 y mostrada en la figura 3.3.

$$\vec{E}(z, t) = (E_0 \hat{i} + E_{0y} \hat{j}) \sin(kz - \omega t). \quad (3.4)$$

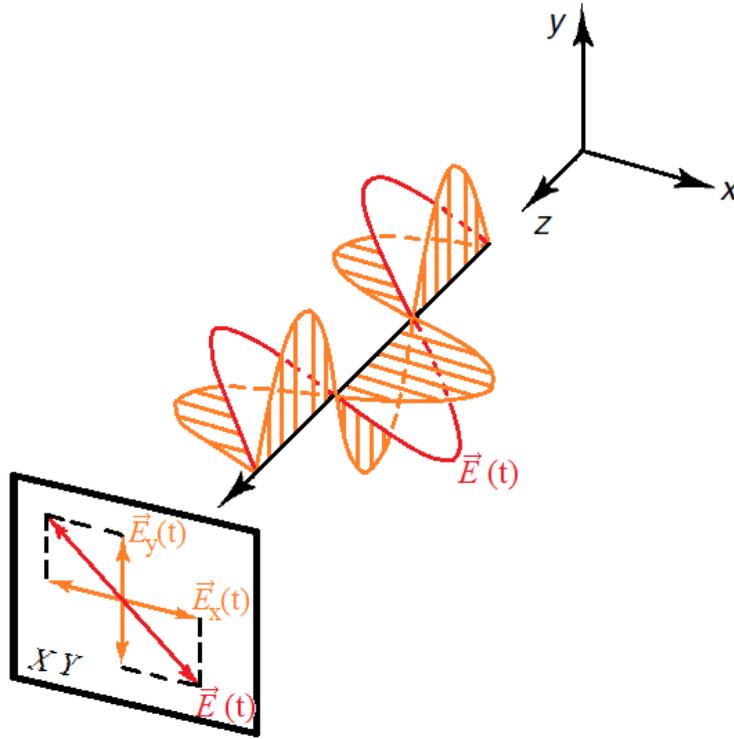


Figura 3.3: Esquema que muestra una onda con polarización lineal.

- (b) Si las ondas tienen un desfase equivalente a $\pi/2$, es decir $\varepsilon = \pi/2 + 2n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ y además $E_{0x} = E_{0y} = E_0$ se tiene polarización circular, dada por la ecuación 3.4. Esta polarización es mostrada en la figura 3.4.

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \left(\sin(kz - \omega t) \hat{i} + \cos(kz - \omega t) \hat{j} \right). \quad (3.5)$$

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

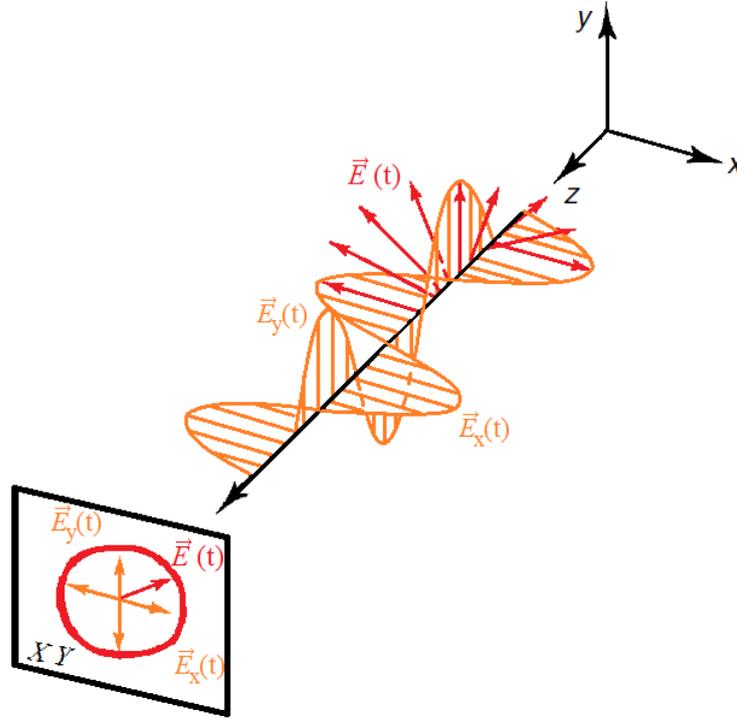


Figura 3.4: Esquema que muestra una onda con polarización circular.

La ecuación 3.3 describe polarización elíptica y corresponde al caso general de luz polarizada, por lo que la polarización circular y lineal son casos especiales de la polarización elíptica.

Considerando la magnitud de las ecuaciones 3.1 y 3.2 se puede obtener la expresión general de una elipse. Esta ecuación debe ser independiente del tiempo y la posición z . Se puede reescribir 3.2 como:

$$\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} = \sin(kz - \omega t) \cos(\varepsilon) + \cos(kz - \omega t) \sin(\varepsilon), \quad (3.6)$$

sustituyendo $\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}}$ en 3.1 se tiene

$$\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} = \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \cos(\varepsilon) + \cos(kz - \omega t) \sin(\varepsilon), \quad (3.7)$$

y de 3.1 se tiene que

$$\cos^2(kz - \omega t) = \left(1 - \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}}\right)^2, \quad (3.8)$$

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

sustituyendo 3.8 en 3.7 se tiene

$$\left(\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} - \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \cos(\varepsilon) \right)^2 = \left(1 - \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \right)^2 \sin^2(\varepsilon). \quad (3.9)$$

Reagrupando términos se llega a

$$\left(\frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \right)^2 - \frac{E_y(z, t)}{E_{0y}} \frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \cos(\varepsilon) + \left(\frac{E_x(z, t)}{E_{0x}} \right)^2 = \sin^2(\varepsilon). \quad (3.10)$$

Esta ecuación describe la forma general de una elipse que se deriva en el apéndice B.

Si las componentes de \vec{E} cambian sin ningún orden y tan rápido que no se pueda distinguir un estado de polarización, se dice que la luz no está polarizada o es luz natural.

3.1.1. Formalismo de Stokes

Una forma de describir la polarización de la luz fue introducida por G. G. Stokes en 1852, con la introducción de cuatro cantidades dependientes solo de parámetros observables de la onda electromagnética conocidos como parámetros de Stokes. Cualquier estado de polarización de la luz incluyendo luz no polarizada, puede ser descrito por los parámetros de Stokes.

3.1.2. Parámetros de Stokes

Los parámetros de Stokes se definen a partir de cuatro filtros, que cada uno bajo luz natural, es decir no polarizada, transmiten la mitad de la luz incidente y la otra mitad se absorbe. Existen varios conjuntos de filtros que satisfacen esta condición; el primer filtro es isotrópico es decir transmite todos los estados de polarización por igual, el segundo filtro transmite únicamente polarización horizontal, mientras que el tercer filtro deja pasar luz con polarización a 45° . El cuarto filtro deja pasar luz con polarización circular. Cada filtro se coloca por separado en el camino del haz para medir sus irradiancias, con un instrumento insensible a estados de polarización se obtiene I_0, I_1, I_2, I_3 respectivamente, por lo que la definición operacional de los parámetros de Stokes está dado por

$$S_0 = 2I_0, \quad (3.11)$$

$$S_1 = 2I_1 - 2I_0, \quad (3.12)$$

$$S_2 = 2I_2 - 2I_0, \quad (3.13)$$

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

$$S_3 = 2I_3 - 2I_0. \quad (3.14)$$

También se pueden definir a partir de dos ondas electromagnéticas perpendiculares con amplitud E_{0x} , E_{0y} y fases δ_x , δ_y respectivamente como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (3.15)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (3.16)$$

$$S_2 = 2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta(t)), \quad (3.17)$$

$$S_3 = 2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \sen(\delta(t)), \quad (3.18)$$

donde $\delta = \delta_y - \delta_x$.

Y en forma compleja como

$$S_0 = E_x(t)E_x(t)^* + E_y(t)E_y(t)^*, \quad (3.19)$$

$$S_1 = E_x(t)E_x(t)^* - E_y(t)E_y(t)^*, \quad (3.20)$$

$$S_2 = E_x(t)E_y(t)^* + E_y(t)E_x(t)^*, \quad (3.21)$$

$$S_3 = i(E_x(t)E_y(t)^* - E_y(t)E_x(t)^*), \quad (3.22)$$

donde

$$E_x(t) = E_{0x}e^{-i(\omega t + \delta_x)}, \quad (3.23)$$

$$E_y(t) = E_{0y}e^{-i(\omega t + \delta_y)}, \quad (3.24)$$

además se cumple que

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (3.25)$$

La derivación de estas ecuaciones se puede ver en apéndice B.

Para facilitar su manejo, los parámetros de Stokes se organizan en matrices de 4 x 1 elementos en forma de vectores verticales:

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

3.1.3. Interpretación física

Se observa de las ecuaciones 3.11, 3.31 o 3.35 que S_0 es solo la irradiancia incidente. S_1 muestra la tendencia de tener polarización lineal, cuando $0 < S_1 \leq 1$ la polarización se aproxima a horizontal; alcanza la polarización horizontal cuando $S_1 = 1$. Del mismo modo cuando $-1 \leq S_1 < 0$ la polarización se aproxima a vertical y cuando $S_1 = -1$ la polarización es vertical. Si $S_1 = 0$ la polarización no muestra preferencia respecto a los ejes horizontales o verticales.

Tabla 3.1: Vectores de Stokes para algunas polarizaciones comunes.

Luz natural	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Polarización horizontal	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Polarización vertical	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
Polarización lineal a $+45^\circ$	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Polarización lineal a -45°	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Polarización circular derecha	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
Polarización circular izquierda	$S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

S_2 también da la tendencia a la polarización lineal pero con orientación $+45^\circ$ y -45° , cuando $0 < S_2 \leq 1$ se aproxima a $+45^\circ$, cuando $-1 \leq S_2 < 0$, cuando no tiene preferencia respecto a estos ejes, entonces $S_2 = 0$.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

La tendencia a polarización elíptica izquierda o elíptica derecha es proporcionada por S_3 . Cuando $0 < S_3 \leq 1$ es polarización derecha, cuando $-1 \leq S_3 < 0$ es polarización izquierda, y $S_3 = 0$ cuando no es elíptica.

En la tabla 3.1 se muestran los vectores de Stokes para algunos estados de polarización de un haz de luz. Estos vectores son fácilmente construidos considerando el conjunto de ecuación 3.11-3.14. Similarmente, usando los conjuntos 3.31-3.34 ó 3.35-3.22 se obtiene el mismo resultado.

3.2. Dispositivos polarizantes

La amplitud y la fase de las componentes \vec{E}_x y \vec{E}_y son las responsables de la polarización, entonces para cambiar el estado de polarización de la luz es necesario cambiar la diferencia de fase y/o las amplitudes, aquellos objetos que cambian la fase se conocen como objetos de fase y los que cambian la amplitud objetos de amplitud. A los dispositivos que recibe luz natural y transmiten luz polarizada se les llama polarizadores ya sean lineales, circulares o elípticos. Entonces para polarizar luz natural se pueden usar materiales que de algún modo absorban una componente del campo \vec{E} , estos materiales son los cristales dicroicos que debido a su estructura molecular existe una dirección especial conocido como eje de transmisión. La componente del campo \vec{E} perpendicular al eje de transmisión es absorbida casi por completo, transmitiendo solo la componente paralela al eje de transmisión dando como resultado polarización lineal paralela al eje del cristal dicroico. Otra forma de polarizar es por reflexión al ángulo de Brewster. En las figuras 3.6 y 3.5 muestran un esquema de los dispositivos polarizantes.

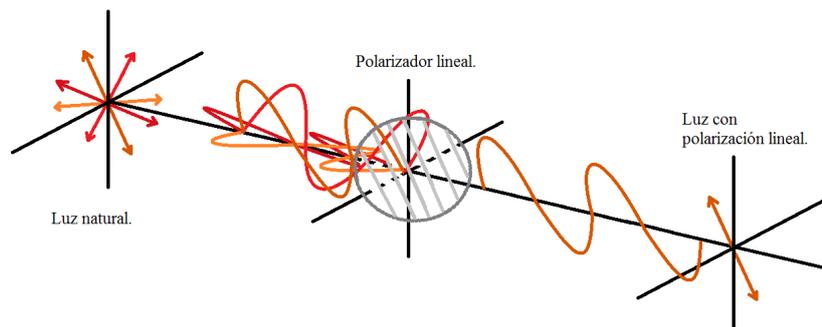


Figura 3.5: Polarización de la luz usando un polarizador lineal. El eje de transmisión del polarizador es cercano a la vertical.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

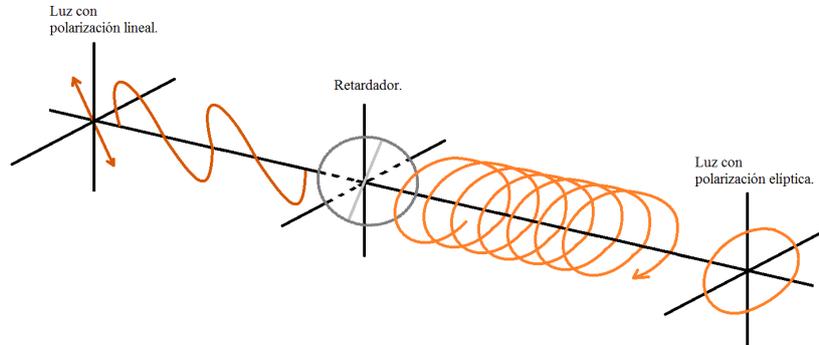


Figura 3.6: Esquema que muestra el cambio de polarización lineal de una onda a una polarización circular por medio de un retardo de cuarto de onda.

3.2.1. Formalismo de Müller

La luz polarizada se puede representar con los vectores de Stokes, pero es necesario tener una forma de representar los dispositivos ópticos como polarizadores o retardadores o cualquier otro que pueda cambiar la polarización de la luz. Hans Müller en 1943 se encargó de este problema al diseñar un método de matrices para trabajar con los vectores de Stokes, estas matrices al igual que los vectores de Stokes tienen la capacidad de ser aplicables para luz polarizada y no polarizada. Las matrices de Müller son un modelo matemático para los dispositivos ópticos. El paso de luz sobre un dispositivo óptico se representa como el producto matricial entre su respectiva matriz de Müller y vector de Stokes y está dado por la ecuación 3.27.

$$M \cdot \vec{S}_{ini} = \vec{S}_{fin}. \quad (3.27)$$

Esta matriz al usarse con los vectores de Stokes deben ser arreglos de 4 x 4 elementos. En la tabla 3.2 se muestran las matrices de Müller para algunos polarizadores.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

Tabla 3.2: Matrices de Müller polarizadores.

Polarizador lineal horizontal	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador linea vertical	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal a $+45^\circ$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Polarizador lineal a -45°	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La expresión general para un polarizador con eje de transmisión a un ángulo α se obtiene aplicando las matrices de rotación (ver apéndice C) es:

$$P(\alpha) = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\alpha) & \sen(2\alpha) & 0 \\ \cos(2\alpha) & \cos^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \sen(2\alpha) & 0 \\ \sen(2\alpha) & \cos(2\alpha) \sen(2\alpha) & \sen^2(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

donde $0 \leq \rho_p \leq 1$ es un factor de transmitancia, (véase apéndice C).

En la tabla 3.3 se muestran las matrices de Müller para algunos retardadores.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

Tabla 3.3: Matrices de Müller retardadores.

Retardador de cuarto de onda con eje rápido vertical	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
Retardador de cuarto de onda con eje rápido horizontal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
Retardador de media onda con eje rápido horizontal	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
Retardador de media onda con eje rápido vertical	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para el caso más general la matriz de Müller de un retardador con eje rápido inclinado a un ángulo α que introduce un desfase de ϕ es

$$R(\alpha, \phi) = \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi)) & -\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha) \\ 0 & \cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi)) & \operatorname{sen}^2(2\alpha) + \cos(\phi) \cos^2(2\alpha) & \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha) & -\operatorname{sen}(\phi) \cos(2\alpha) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

donde $0 \leq \rho_r \leq 1$ es un factor de transmitancia (véase apéndice C).

3.3. Polariscopio

El polariscopio es un instrumento capaz de percibir la diferencia de fase relativa en los ejes principales de un material birrefringente, el eje ordinario y extraordinario, este retraso relativo produce un cambio del estado de polarización al salir respecto al estado que incidió. El polariscopio es un arreglo donde la muestra a analizar se coloca entre el *polarizador* y *analizador* como se ve en la figura 3.7. El polarizador genera el estado de polarización que incide sobre la muestra que a su vez cambiará el estado de polarización y solo la que coincida con el eje de transmisión del analizador saldrá, así la intensidad del haz transmitido por el analizador cambia según la polarización

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

transmitida por la muestra, veasé Gåsvik [3], Malacara [17]. Si el polarizador y el analizador tienen sus ejes de transmisión paralelos se dice que es un polariscopio de campo o fondo claro; si sus ejes son opuestos se dice es un polariscopio de campo o fondo oscuro, se les nombra de este modo debido a como es el haz transmitido del analizador, por ejemplo en el polariscopio de campo claro en caso de que la muestra no cambie la polarización incidente y el haz pasará con toda su amplitud a través del analizador. Si ambos polarizadores son lineales se dice es un polariscopio lineal, si ambos polarizadores son circulares se dice es un polariscopio circular. En este trabajo se utilizó el polariscopio lineal oscuro.

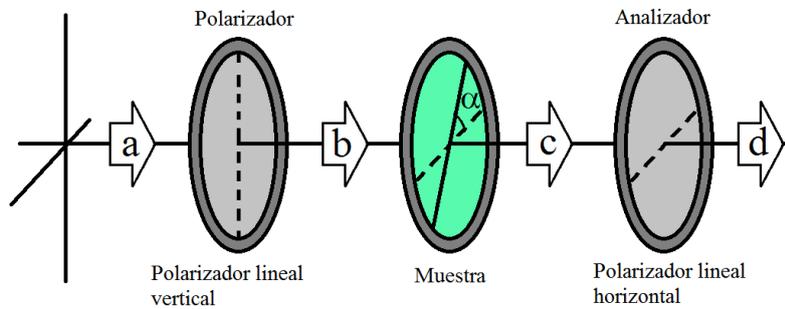


Figura 3.7: Polariscopio lineal oscuro V-H.

3.3.1. Polariscopio lineal de campo oscuro en formalismo de Stokes-Müeller

A continuación se obtiene la expresión de los haces al pasar por un polariscopio lineal de campo oscuro, es decir el de polarizadores lineales con eje de transmisión perpendiculares entre si, puede ser que el primer polarizador tenga su eje de transmisión vertical y el segundo horizontal lo que se le llamará abreviando como polariscopio V-H o que el primero sea horizontal y el segundo vertical es decir un polariscopio H-V. Hay una pequeña diferencia en las expresiones intermedias para los haces del polariscopio lineal oscuro V-H y el H-V. Aquí se ve la expresión para el V-H, la derivación de la expresión para los haces del H-V puede verse en el apéndice D.

Se considera un polariscopio lineal oscuro V-H con un retardador entre los polarizadores como se muestra Figura 3.7.

A este polariscopio se le hace incidir en la región *a* luz natural, es decir no polarizada, en la región *b* se tiene luz polarizada linealmente vertical con

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

intensidad inicial S_{b_0} , se puede representar por el vector de Stokes

$$S_b = \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ -S_{b_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

que continuación incide sobre el retardador obteniendo el haz en la región c

$$S_c = \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi)) & -\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha) \\ 0 & \cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi)) & \operatorname{sen}^2(2\alpha) + \cos(\phi) \cos^2(2\alpha) & \operatorname{sen}(\phi) \cos(\phi) \\ 0 & \operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha) & -\operatorname{sen}(\phi) \cos(2\alpha) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ -S_{b_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

o bien

$$S_c = \rho_r^2 \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ -S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ -S_{b_0} (\cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi))) \\ -S_{b_0} (\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha)) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Por último pasa por el polarizador horizontal y el haz transmitido en la región d es:

$$S_d = \rho_r^2 \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ -S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ -S_{b_0} (\cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi))) \\ -S_{b_0} (\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha)) \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

cuyo resultado final es

$$S_d = \frac{\rho_r^2 \rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} S_{b_0} - S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ S_{b_0} - S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

De la expresión 3.34 se observa que la irradiancia que se puede medir esta dada por:

$$S_{d_0} = \frac{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}{2} (1 - \cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)). \quad (3.35)$$

3.4. Polarímetro

El polarímetro es un instrumento capaz de medir los cuatro parámetros de Stokes S_0 , S_1 , S_2 y S_3 de un haz de luz monocromático conociendo así el estado de polarización del haz.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

El polarímetro se conecta a una consola que a su vez se conecta a un ordenador para controlar el movimiento interno del polarímetro. El arreglo usado consiste en un polarizador (P1), la muestra que se desea analizar y finalmente el polarímetro como se ve en la figura 3.8. Es necesario calibrar el polarímetro para la longitud de onda utilizada.

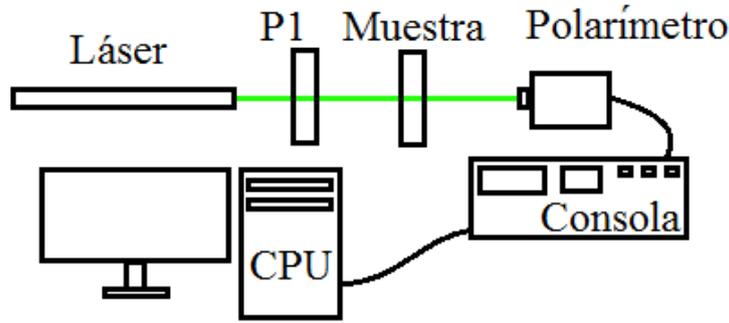


Figura 3.8: Arreglo que muestra el uso del polarímetro.

El formalismo de Stokes asociado a este arreglo es muy parecido al del polariscopio. Se tiene luz no polarizada que incide en el polarizador $P1$ con eje de transmisión vertical el cual polariza el haz, éste incide después en el retardador a un ángulo α entre su eje óptico y la horizontal por lo que el haz transmitido puede representarse con el vector de Stokes dado por la ecuación 3.32. Con los parámetros de Stokes medidos por el polarímetro se puede igualar coordenada a coordenada con el vector de Stokes de la ecuación 3.32 dando lugar al sistema de ecuaciones desacoplado

$$S_0 = \rho_r^2 S_{b_0}, \quad (3.36)$$

$$S_1 = -\rho_r^2 S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \sin^2(2\alpha)), \quad (3.37)$$

$$S_2 = -\rho_r^2 S_{b_0} (\cos(2\alpha) \sin(2\alpha) (1 - \cos(\phi))), \quad (3.38)$$

$$S_3 = -\rho_r^2 S_{b_0} \sin(\phi) \sin(2\alpha), \quad (3.39)$$

de las ecuaciones 3.37, 3.38 y 3.39 se puede conocer el cambio de fase ϕ introducido

$$\phi = \arccos \left(-\frac{1}{\sin^2(2\alpha)} \left(\frac{S_1}{\rho_r^2 S_{b_0}} + \cos^2(2\alpha) \right) \right), \quad (3.40)$$

$$\phi = \arccos \left(\frac{S_2}{\rho_r^2 S_{b_0} \cos(2\alpha) \sin(2\alpha)} + 1 \right), \quad (3.41)$$

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

$$\phi = \arcsin \left(-\frac{S_3}{\rho_r^2 S_{b_0} \sin(2\alpha)} \right). \quad (3.42)$$

Se puede ver que las ecuaciones 3.40, 3.41 y 3.42 divergen cuando la irradiancia inicial $S_{b_0} = 0$ es decir cuando no hay luz iluminando la muestra, cuando el factor de transmitancia $\rho_r = 0$ es decir no trasmite nada la muestra, cuando se mide a un ángulo $\alpha = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ respecto a la horizontal, es decir cuando el eje óptico es paralelo al eje de transmisión del primer polarizador en cuyo caso no hay cambio de fase. También más particularmente la ecuación 3.41 diverge cuando $\alpha = \pi/4 + \pi m/2$ con $m \in \mathbb{N}$.

3.5. Aplicaciones

Poder conocer la birrefringencia de un material resulta útil si se quiere identificar el material con el que se está trabajando en caso de no conocerlo o si se quiere caracterizar un material nuevo. Conociendo la birrefringencia también se puede hacer un análisis del estrés o compresión al que esté sujeto un cuerpo usando una técnica conocida como *fotoelasticidad*.

3.5.1. Fotoelasticidad

Fue en 1816 cuando Sir David Brewster descubre que sustancias transparentes isotrópicas usualmente pueden hacerse ópticamente anisotrópicas al aplicar una tensión mecánica. A este fenómeno se le conoce como birrefringencia mecánica, fotoelasticidad o birrefringencia de estrés. Cuando un material es sujeto a compresiones o tensiones obtiene propiedades de un cristal uniaxial negativo o positivo respectivamente, en cualquier caso el eje óptico está en la dirección del estrés, si el estrés efectuado sobre la muestra no es uniforme tampoco lo será la birrefringencia como reporta Hecht [13]. Entonces para un objeto hecho de un material ópticamente sensible al estrés es posible estudiar la tensión y el estrés bajo el cual se encuentra examinando su birrefringencia.

Si el objeto es de un material opaco como un metal o no es sensible al estrés, se puede construir un modelo que puede estar a escala del original de un material que si lo sea como epoxy, gyptol o resina de poliéster modificada. El estrés al cual está sujeto el modelo es el mismo al cual está sujeto el objeto real, esto debido a que el estrés no depende del módulo de elasticidad y depende solo del coeficiente de Poisson, esto se puede ver en las ecuaciones de compatibilidad de estrés de Beltrami-Mitchell como muestra Rastogi [17]. El modelo es sujeto a las mismas fuerzas que estaría sujeto la pieza real en uso. En la figura 3.9 se muestra una fotografía de una cuchara de plástico

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

vista a través de 2 polarizadores. La cuchara se encuentra en medio de ellos. Los colores que aparecen son debidos al estrés al que fue sometida la cuchara durante el proceso de fabricación.

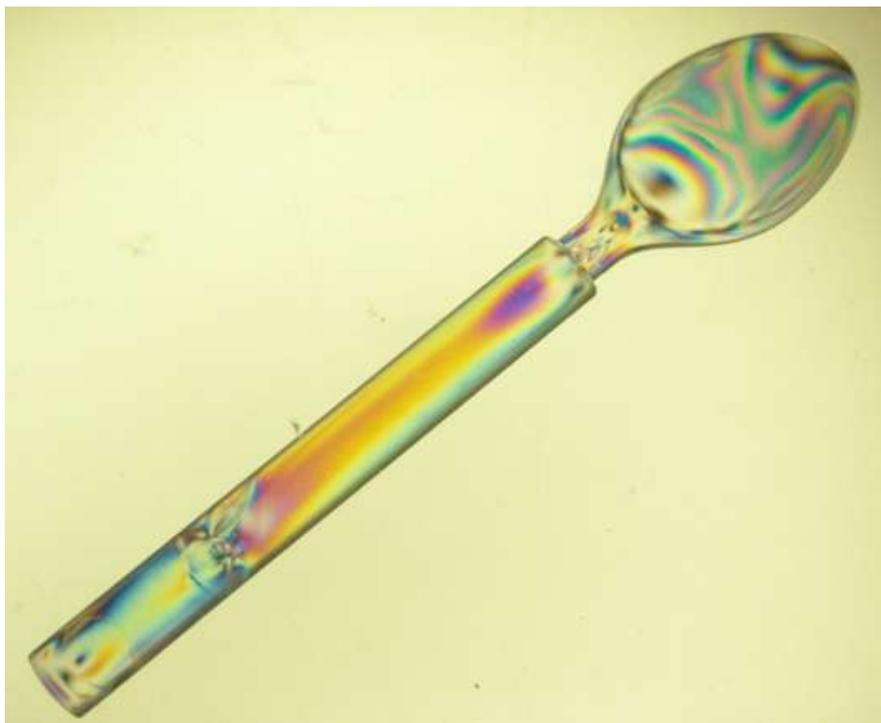


Figura 3.9: Imagen de estrés en una cuchara.

Esta propiedad resulta muy útil pues se puede conocer el estrés al cual está sujeta una viga de 30 metros de longitud del más duro acero conociendo el estrés al cual está sujeto un modelo a escala de 3 centímetros de longitud.

Colocando el modelo en un polariscopio se puede ver un patrón de franjas sobre el objeto, si se usa una fuente de luz de espectro ancho las franjas del patrón que revelan la birrefringencia tienen diferentes colores como se ve en las figuras 3.9 y 3.10. Con el método propuesto en este trabajo se puede calcular la birrefringencia del modelo y una vez hecho esto es posible hacer el estudio de estrés.

CAPÍTULO 3. LUZ POLARIZADA Y DISPOSITIVOS POLARIZANTES

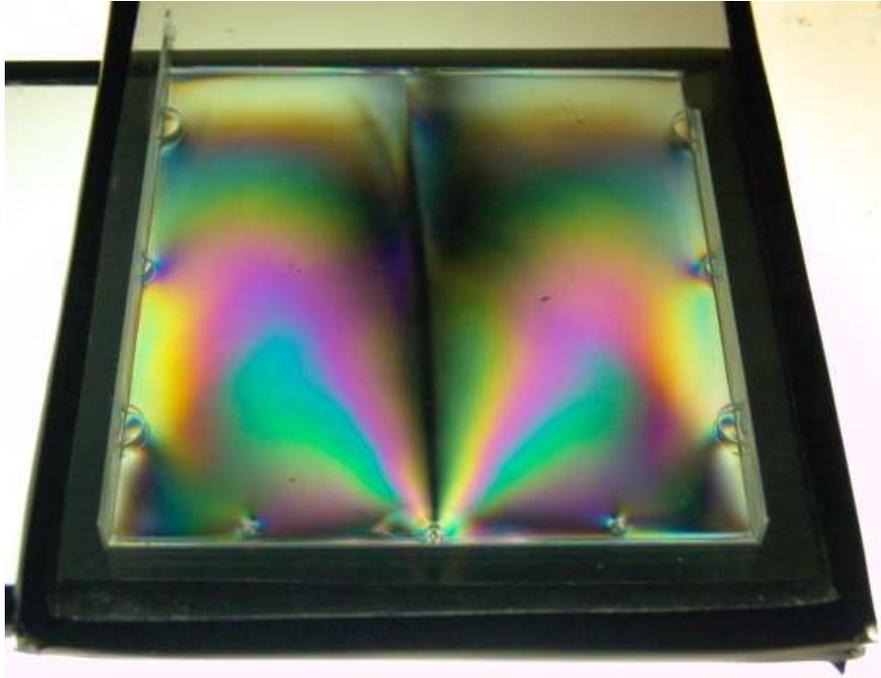


Figura 3.10: Imagen de estrés en una caja de CD.

Capítulo 4

Resultados

El polariscopio es un instrumento capaz de percibir la diferencia de fase relativa en los ejes principales de un material birrefringente. Es un arreglo donde la muestra a analizar se coloca entre el polarizador y analizador como se ve en la figura 4.1. El cambio relativo en la fase produce un cambio del estado de polarización al salir respecto al estado que incidió. El analizador transmitirá solo el estado de polarización que coincida con él, véanse Gåsvik[3], Rastogi [17].

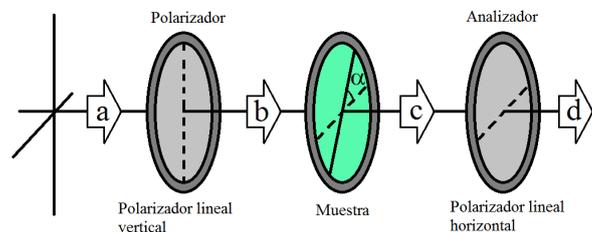


Figura 4.1: Polariscopio lineal oscuro V-H.

En este trabajo se mide la birrefringencia de materiales de plástico transparentes de diferente tamaño usando un polariscopio V-H y se comparan los resultados con los obtenidos al usar un polarímetro. La versatilidad de la técnica permite cambiar la configuración del arreglo para medir la birrefringencia de objetos de área grande o pequeña.

4.1. Calibración del polariscopio V-H

Una fotografía con una correcta iluminación depende no solo de la luz que ilumina la escena sino del tiempo de exposición, de la apertura del diafragma,

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

de la película o sensor. Este experimento depende de una buena fotografía y antes de ir más lejos es necesario conocer los parámetros de tiempo para obtener un buen resultado con la cámara digital que se utilizó, así como de la potencia del láser y las condiciones de luz cuando se tomaron las imágenes. Para hacer correctamente el experimento se realizó una calibración de estos parámetros, se mantuvo constante la apertura de diafragma y se capturó por separado la imagen de acetato haciendo un barrido en el tiempo de exposición, se calculó el cambio de fase que introduce el acetato para cada fotografía y se buscó el tiempo de exposición que mejor se aproximaba a la fase calculada usando el polarímetro comercial.

El experimento se realizó variando la distancia entre la muestra y el filtro. Véase el arreglo de la figura 4.2. Para distancias grandes entre la muestra y el filtro el haz del láser esta más expandido por lo que se puede analizar una superficie mayor de la muestra por fotografía, pero como la intensidad del láser es la misma y se distribuye en una superficie mayor la amplitud de la onda electromagnética es menor requiriendo mayores tiempos de exposición. Una distancia pequeña entre la muestra y el filtro reduce la superficie a analizar pero la amplitud de la onda electromagnética disminuye poco reduciendo el tiempo de exposición. Un gran tiempo de exposición podría ocasionar errores debido a una sobreexposición del sensor o película fotográfica o a un mal procesamiento de la información, pero reduce errores producidos por el cambio de intensidades que pueda llegar a tener el láser, sin embargo para tiempos muy pequeños se obtiene una subexposición donde el sensor o película no recibe suficiente información y no es posible calcular la fase.

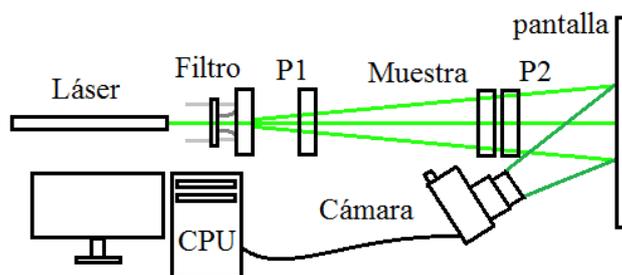


Figura 4.2: Arreglo experimental donde P1 y P2 son polarizadores.

Debido a que la pantalla tiene pequeñas imperfecciones se produce efecto Speckle y además considerando sensibilidad de la cámara se produce una imagen ruidosa. Para resolver esto se procesa la imagen con un algoritmo de suavizado.

4.2. Metodología

Antes de iniciar con el experimento se enciende el láser por aproximadamente una hora con el fin de que se estabilice. Usando dos arreglos ligeramente diferentes dependiendo del objeto que se esté analizando, si se analiza un objeto plano como una película de celofán o una caja de CD se utiliza el arreglo cuyo esquema se ve en la figura 4.2. Si se analiza un objeto de otro tipo como podría hacerse al estudiar el estrés al cual esta sujeto un cuerpo (véase la sección 3.5.1) se utiliza el arreglo mostrado en la figura 4.3. La necesidad de usar dos arreglos se debe a que objetos con concavidades, bordes, esquinas, etc, generan difracción en el arreglo 1 debido a que la iluminación proviene de una misma fuente haciendo imposible distinguir el patrón de franjas que se busca, para solucionar esto se introduce un vidrio esmerilado que distribuye uniformemente la luz en toda su superficie y se toma este como fuente de iluminación.

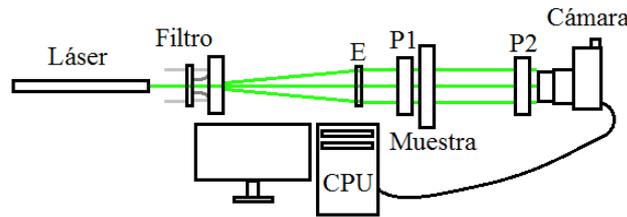


Figura 4.3: Arreglo experimental 2, donde P1 y P2 son polarizadores y E un vidrio esmerilado.

En ambos arreglos las distancias entre los elementos del arreglo se mantienen constantes, las fotografías tomadas con la misma cámara, desde la misma posición, enfocada y con los parámetros de tiempo y apertura constantes y ya optimizados se toman las fotografías de las muestras y se calcula la fase con ayuda de un ordenador.

Como se tiene información de intensidad pixel por pixel se puede hacer el cálculo de la fase pixel a pixel y así conocer la birrefringencia del material pixel a pixel.

Como se ve en la ecuación 3.34 la irradiancia final S_{d_0} sobre la pantalla es

$$S_{d_0} = \frac{\rho_r^2 \rho_p^2}{2} (S_{b_0} - S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \text{sen}^2(2\alpha))), \quad (4.1)$$

de la ecuación 4.1 se puede obtener la fase ϕ que introduce la muestra

$$\text{sen}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1}{\text{sen}^2(2\alpha)} \frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}, \quad (4.2)$$

que está en términos del ángulo α que está inclinado el eje rápido de la muestra respecto al eje horizontal, la irradiancia inicial S_{b_0} sobre la muestra y de parámetros de transmitancia del polarizador y de la muestra ρ_p y ρ_r respectivamente que son todos observables. Como puede verse en la ecuación 4.2 es necesario tomar dos fotografías por muestra, una para capturar la irradiancia inicial y otra para capturar el patrón de franjas.

Una vez obtenida la fase ϕ conociendo el espesor d se puede conocer la birrefringencia Δn ya que

$$\phi + 2\pi j = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d, \quad (4.3)$$

con $j \in \mathbb{N}$ y λ es la longitud de onda. Como en este trabajo no se puede conocer el orden j de la muestra, se supondrá de orden 0, es decir $j = 0$

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n d, \quad (4.4)$$

combinando 4.2 y 4.4 se tiene

$$\Delta n = \frac{\lambda}{\pi d} \arcsin\left(\frac{1}{\rho_r \rho_p \text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}}\right). \quad (4.5)$$

Con fines comparativos se mide la fase con el polariscopio y el polarímetro en un arreglo como el mostrado en la figura 3.8. Debido a que el polarímetro mide la fase de forma puntual, se comparan solo una pequeña región de la muestra. La muestra se secciona en regiones de 1cm x 1cm y se elige la región que se desea medir con el polarímetro. La muestra se coloca en una montura capaz de desplazarse horizontalmente con un tornillo micrométrico y se mide la fase iniciando en un extremo del cuadrado seleccionando desplazando la muestra transversalmente al láser en pasos de 0,5 mm hasta llegar al otro extremo del cuadrado. Posteriormente se comparan las mediciones.

4.3. Algoritmos

En esta sección se muestran los algoritmos utilizados para calcular el cambio de fase ϕ que introduce el objeto medido con el polariscopio y con el polarímetro.

4.3.1. Cálculo de fase con polariscopio

Las imágenes digitales son arreglos matriciales de $m \times n$ pixeles donde cada pixel es un número que representa solo la intensidad de la luz, lo que haría que la imagen esté en escala de grises o un conjunto de números que describen la intensidad y el color, dando lugar a imágenes a color.

Una vez digitalizadas las fotografías tanto del patrón de franjas como de la irradiancia inicial se puede calcular la fase y birrefringencia siguiendo el algoritmo 1.

Algoritmo 1 Cálculo de fase con polariscopio

Entrada: Fotografía del patrón de franjas I_{fin} en forma matricial, fotografía inicial I_{ini} en forma matricial, ángulo del eje óptico respecto a la horizontal α , factores de transmitancia ρ_p, ρ_r del polarizador y la muestra respectivamente.

Salida: La fase.

- 1: **si** $\text{sen}(2\alpha) \neq 0$ **entonces**
 - 2: $gris_{ini} \leftarrow \text{EscalaDeGrises}[I_{ini}]$
 - 3: $gris_{fin} \leftarrow \text{EscalaDeGrises}[I_{fin}]$
 - 4: $fase \leftarrow gris_{ini}$
 - 5: **para** cada renglón j de la imagen **hacer**
 - 6: **para** cada elemento i del renglón **hacer**
 - 7: $fase[i, j] \leftarrow 2 \arcsin \left(\frac{1}{\rho_r \rho_p \text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{gris_{fin}[i, j]}{gris_{ini}[i, j]}} \right)$
 - 8: **fin para**
 - 9: **fin para**
 - 10: $fase \leftarrow \text{Suavizar}[fase]$
 - 11: **si no**
 - 12: **imprimir** No se puede calcular la fase al ángulo α debido a que $\text{sen}(2\alpha) = 0$
 - 13: $fase \leftarrow 0fase$
 - 14: **fin si**
 - 15: **devolver** $fase$
-

Si se desea saber la birrefringencia basta con agregar en la entrada el espesor d , la longitud de onda λ y cambiar la línea 7 por

$$fase[i, j] \leftarrow \frac{\lambda}{\pi d} \arcsin \left(\frac{1}{\rho_r \rho_p \text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{gris_{fin}[i, j]}{gris_{ini}[i, j]}} \right),$$

teniendo cuidado con las unidades de la longitud de onda λ y del espesor d .

4.3.2. Cálculo de fase con polarímetro

Una vez que el polarímetro mide los vectores de Stokes para una sección de la muestra, se puede saber el cambio de fase ϕ que introduce la muestra siguiendo el algoritmo 2.

Algoritmo 2 Cálculo de fase con polarímetro

Entrada: El conjunto de vectores de Stokes *listaVectores* y el ángulo α entre el eje óptico de la muestra y la horizontal y el factor de transmitancia ρ_r de la muestra.

Salida: La fase.

```

1: si  $\text{sen}(2\alpha) \neq 0$  entonces
2:    $fase \leftarrow listaVectores$ 
3:   para cada elemento  $i$  de la lista de vectores listaVectores hacer
4:      $vector \leftarrow listaVectores[i]$ 
5:      $S_0 \leftarrow vector[1]$ 
6:      $S_1 \leftarrow vector[2]$ 
7:      $S_2 \leftarrow vector[3]$ 
8:      $S_3 \leftarrow vector[4]$ 
9:      $fase_1 \leftarrow \text{arc cos} \left( -\frac{1}{\text{sen}^2(2\alpha)} \left( \frac{S_1}{\rho_r^2 S_0} + \text{cos}^2(2\alpha) \right) \right)$ 
10:    si  $\text{cos}(2\alpha) \neq 0$  entonces
11:       $fase_2 \leftarrow \text{arc cos} \left( \frac{S_2}{\rho_r^2 \text{sen}(2\alpha) \text{cos}(2\alpha) S_0} + 1 \right)$ 
12:    si no
13:      imprimir No se puede calcular la fase con la tercera coordenada
        al ángulo  $\alpha$  debido a que  $\text{cos}(2\alpha) = 0$ , se iguala a cero
14:       $fase_2 \leftarrow 0$ 
15:    fin si
16:     $fase_3 \leftarrow \text{arcsin} \left( -\frac{S_3}{\rho_r^2 \text{sen}^2(2\alpha) S_0} \right)$ 
17:     $fase[i] \leftarrow fase_1, fase_2, fase_3$ 
18:  fin para
19: si no
20:  imprimir No se puede calcular la fase al ángulo  $\alpha$  debido a que
         $\text{sen}(2\alpha) = 0$ 
21:   $fase \leftarrow 0$ 
22: fin si
23: devolver  $fase$ 

```

Las ecuaciones con las que se calculan las fases en las líneas 9, 11 y 16 son las ecuaciones 3.40, 3.41 y 3.42 deducidas previamente.

4.4. Análisis de errores en las mediciones

Debido a variaciones en la intensidad por el láser se tiene una incertidumbre al medir la intensidad sobre la muestra S_{b_0} y la intensidad a la salida del analizador S_{d_0} por lo que la medición calculada por la fase tiene una incertidumbre dada por

$$\delta\phi = \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2S_{b_0}S_{d_0}}} \delta S_b - \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2S_{b_0}S_{d_0}}} \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}} \delta S_d, \quad (4.6)$$

su derivación puede verse en el apéndice E. Debido a que se usa el mismo láser para realizar la medición y se hace en un intervalo corto entre sí, las incertidumbres $\delta S_d = \delta S_b$, las mediciones se realizaron para $\alpha = \pi/4$ y considerando $\rho_r = \rho_p = 1$, se puede reducir la expresión 4.6 a

$$\delta\phi = \sqrt{\frac{S_{b_0} - S_{d_0}}{S_{b_0}^2 S_{d_0}}} \delta S_b, \quad (4.7)$$

y la incertidumbre relativa porcentual

$$\frac{\delta\phi}{\phi} = \frac{\sqrt{\frac{S_{b_0} - S_{d_0}}{S_{b_0}^2 S_{d_0}}} \delta S_b}{2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}}\right)} * 100\%, \quad (4.8)$$

la intensidad a la salida del analizador es a lo más la intensidad sobre la muestra es decir $1 \geq S_{b_0} \geq S_{d_0} \geq 0$ y además $S_{b_0} \neq 0$, sin pérdida de generalidad se puede suponer $S_{b_0} = 1$ por lo que la incertidumbre absoluta es

$$\delta\phi = \sqrt{\frac{1 - S_{d_0}}{S_{d_0}}} \delta S_b, \quad (4.9)$$

y la porcentual

$$\frac{\delta\phi}{\phi} = \frac{\sqrt{\frac{1 - S_{d_0}}{S_{d_0}}} \delta S_b}{2 \arcsin\left(\sqrt{S_{d_0}}\right)} * 100\%, \quad (4.10)$$

se puede ver que cuando la intensidad medida a la salida del analizador $S_{d_0} \rightarrow 0$ es decir cuando la fase medida $\phi \rightarrow 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$ las incertidumbres

divergen, un problema similar se puede ver en Jing-Fung [18] donde Jing-Fung Lin reporta que su arreglo tiene pobre precisión al medir un retardo de π . Y cuando $S_{d_0} \rightarrow 1$ la incertidumbre absoluta $\delta\phi \rightarrow 0$ y la incertidumbre relativa $\delta\phi/\phi \rightarrow 0\%$.

4.5. Resultados

Los objetos utilizados fueron: películas de celofán y de acetato, caja de CD y una cuchara de plástico transparente. La figura 4.4 es una imagen típica del patrón obtenido de una caja de CD colocada en el polariscopio. Se puede observar de frente zonas claras y oscuras que son debidas a la birrefringencia del plástico.

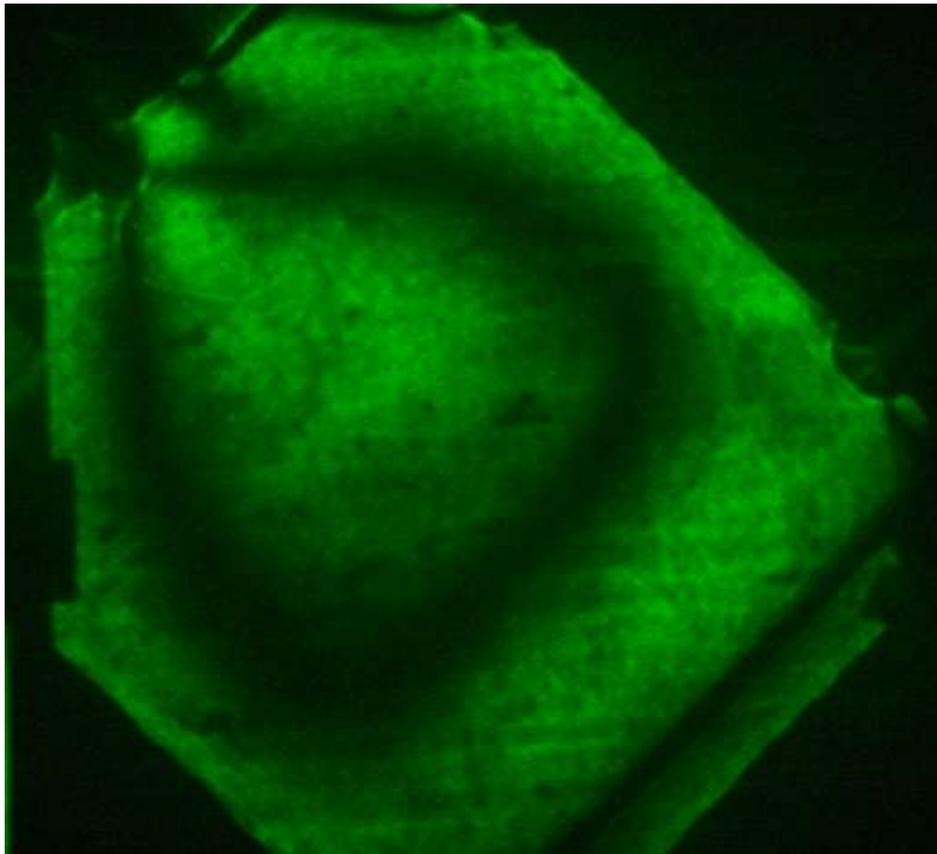


Figura 4.4: Fotografía de la caja de CD vista a través del polariscopio V-H cuando es iluminado con un láser de He-Ne con $\lambda = 543,5$ nm. Las zonas claras y oscuras se deben a la birrefringencia del plástico.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

La figura 4.4 muestra la fotografía de la caja de CD rotada 45° respecto de su eje óptico. El eje óptico se encuentra colocando el objeto en el polariscopio V-H y girando hasta que se observe un campo totalmente oscuro (o brillante si se trata de un polariscopio de campo claro). En ese momento se tiene el eje óptico paralelo a alguno de los ejes de los polarizadores. Las imágenes son capturadas con una cámara digital Sony Cybershot DSC-F828, el tiempo de exposición adecuado es $1/10$ s, ISO-400 apertura máxima 2,0625. El objeto es iluminado con un láser He-Ne con $\lambda = 543,5$ nm de 5 mW.

Como puede verse de la figura 4.4, la fotografía muestra un gradiente de intensidad en el que el mínimo es cero (oscuro) y el máximo es 1 (claro); en los vértices del cuadrado de la fotografía se tienen zonas oscuras (en las que la intensidad es cero) debido a que la caja no llena por completo el campo de visión de la cámara generando estas zonas por las que pasa la luz sin cambio alguno, es decir, solo pasan a través de los polarizadores perpendiculares. Sobre la caja de CD también se observa un anillo oscuro que indica que sobre esa zona el haz de luz no sufre ningún cambio en su estado de polarización o que tiene un desfase equivalente a $\pm 2\pi$ o múltiplo de ella, es decir, 4π , 6π , etc. Las zonas más claras indican que el estado de polarización fue rotado por un ángulo de 90 grados, $\pi/2$ o múltiplos enteros de esta cantidad, es decir, $(2m + 1)\pi/2$ con $m \in \mathbb{N}$.

También se observa en la fotografía de la figura 4.4 que hay zonas que son intermedias, es decir, son zonas que no están ni totalmente claras ni oscuras. En estas zonas se produce un cambio de polarización que tiene un valor estimado en $0 \leq \Delta\phi \leq \pi/2$.

Estos cambios en el estado de polarización del haz que pasa por la caja de CD son debidos a la birrefringencia del plástico la cual es producida por variaciones en la organización de la estructura molecular de los materiales. Es precisamente esta birrefringencia la que se desea medir en este trabajo.

Usando la fotografía mostrada en la figura 4.4 se puede calcular la fase por medio de la ecuación 4.4 y a partir de ésta, se conoce la birrefringencia dada por la ecuación 4.5. La fase se calcula usando el algoritmo descrito en la sección 4.3.1. Este algoritmo puede ser aplicado a toda la fotografía del objeto deseado y conocer de esta forma la fase, pero para fines comparativos, sólo se calculará sobre una pequeña región como la mostrada en la figura 4.5.

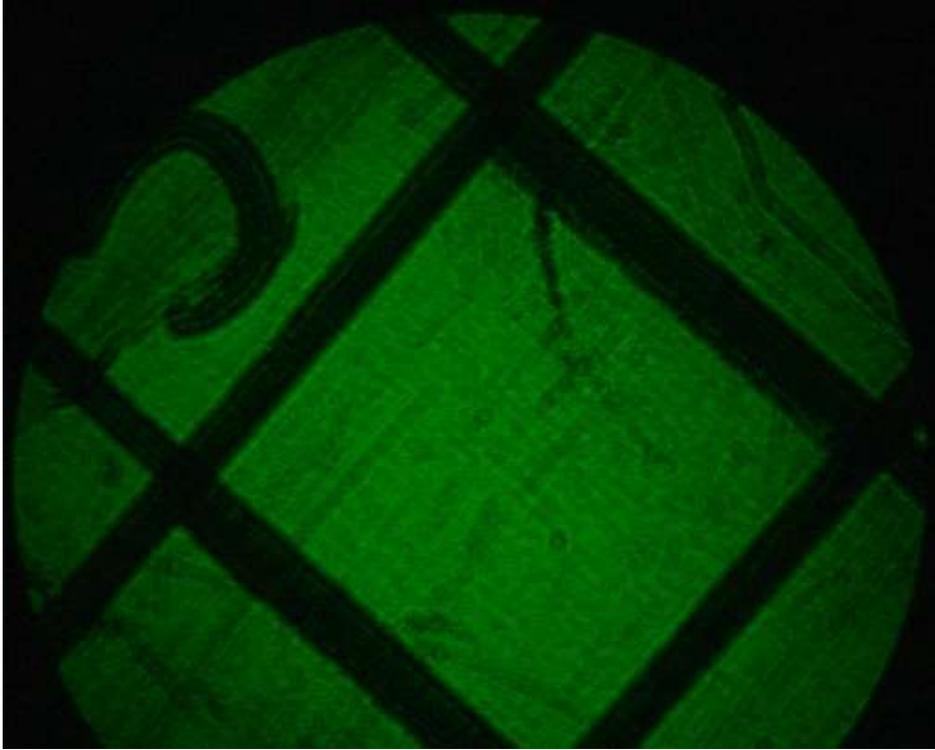


Figura 4.5: Fotografía de la imagen de la sección analizada en la caja de CD. La zona marcada entre líneas oscuras mide $1 \times 1\text{cm}^2$.

La fotografía muestra una sección del objeto encerrado entre líneas oscuras con un tamaño de 1cm^2 . Sobre esta zona se mide la fase por los dos métodos; usando el polariscopio V-H y usando el polarímetro. Las figuras 4.4 y 4.5 corresponden a fotografías de la misma caja de CD. Sin embargo, para medir la fase se utilizó una nueva caja de CD porque la anterior caja ya presentaba rayaduras en su superficie debido a su uso.

Usando el polariscopio, se hizo un mapa de fase de la imagen completa de los objetos. En la figura 4.6 a) se muestra la fotografía de la sección de CD que se utilizó para medir la fase y en la 4.6 b) se muestra el mapa de fase de la caja de CD.

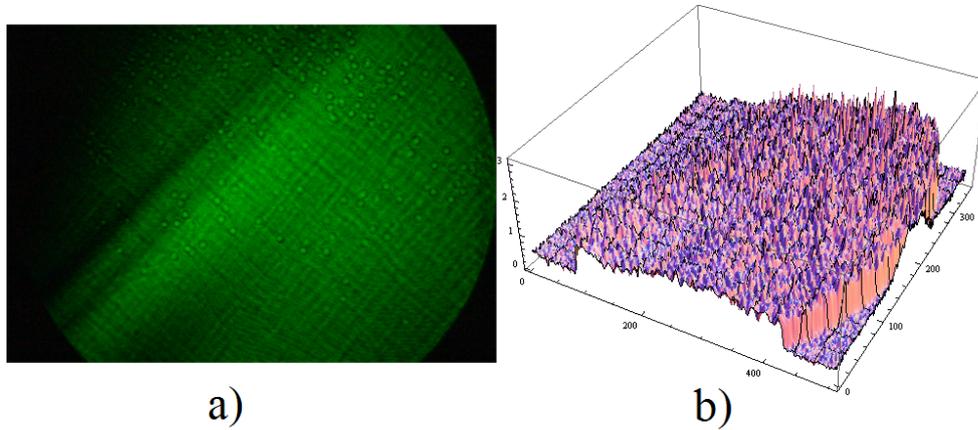


Figura 4.6: (a) Fotografía tomada de la cubierta de CD y (b) el mapa de fases calculado usando el polariscopio V-H.

La imagen 4.6 b) muestra el cambio de fase que sufre un haz de luz al pasar por una caja de CD. El plano horizontal XY de la figura 4.6 b) está formado por pixeles de la imagen original, mientras que el eje z de la figura muestra la fase que se calcula.

En esta figura se observa que la fase tiene un cambio entre 0 y π radianes, lo que provoca los diferentes estados de polarización que sufre el haz de luz.

Considerando la figura 4.4 se midió la fase empleando el polarímetro Thorlabs modelo PA510. Para esto, se empleó un láser sin expandir y se hizo el barrido sobre la diagonal del cuadrado (mostrado en la 4.4) cada $0,5\text{mm}$ utilizando una montura de desplazamiento xyz con un paso mínimo de 10 micras. La consola del polarímetro, conectada a un ordenador, muestra el estado de polarización del haz de luz del que es muy sencillo deducir el cambio de fase que experimenta el haz.

Las imágenes 4.7 a) 7 4.7 b) muestran un renglón de la imagen de la fase calculada con el polarímetro y el polariscopio.

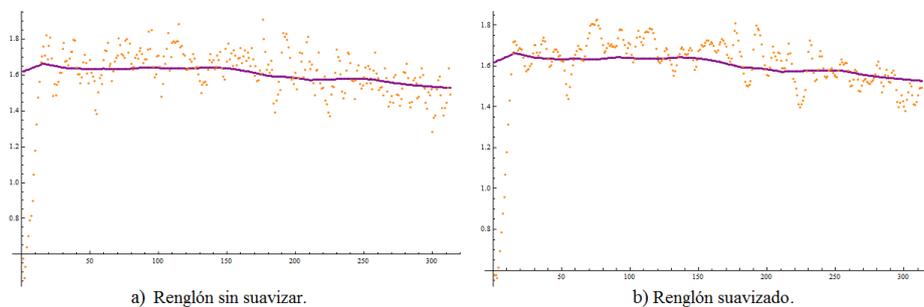


Figura 4.7: De color naranja la fase calculada con el polariscopio, de color morado la fase calculada con el polarímetro (a) sin suavizar y (b) suavizado.

También se hizo el mapa de fases usando diferentes longitudes de onda para calcular la birrefringencia. En todos los casos se usaron Láser He-Ne con longitudes de onda $\lambda = 633,0$ nm, $612,0$ nm, $594,0$ nm. El procedimiento para calcular la birrefringencia es idéntico al descrito previamente. En las tablas 4.1, 4.4, 4.7 y 4.10 se muestran los resultados obtenidos para $\lambda = 543,5$ nm, $\lambda = 594,0$ nm, $\lambda = 612,0$ nm y $\lambda = 633,0$ nm respectivamente de todos los materiales.

En la tabla 4.2 se muestran algunos resultados de interés en las cuatro longitudes de onda utilizadas en este trabajo. En la segunda columna se muestra el tiempo de exposición óptimo para calcular la fase. En las columnas tres y cuatro se muestran el número de renglones cuya fase promedio presenta una diferencia menor o igual al 10%, 5% respectivamente en comparación con la fase promedio calculada con el polarímetro sobre el número de renglones analizados. Y la quinta columna la birrefringencia promedio de toda la imagen.

Nótese que en la tabla 4.2 para la longitud de onda $\lambda = 612,0$ nm no se encuentra ningún renglón con fase promedio menor o igual al 10% de 120 renglones analizados. Esto se debe a que el cambio de fase producido por la caja de CD a esta longitud de onda es muy pequeño o bien múltiplo entero de π , esto se puede ver en la imagen de la tabla 4.1 para esta longitud de onda que muestra una imagen prácticamente negra. Y como se ve en la sección 4.4 el error dado por 4.9 diverge cuando la fase medida tiende a cero.

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.1: Caja de CD.

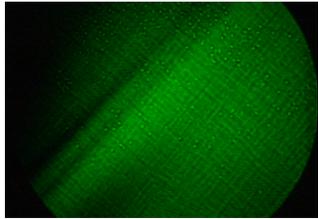
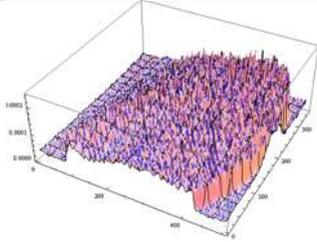
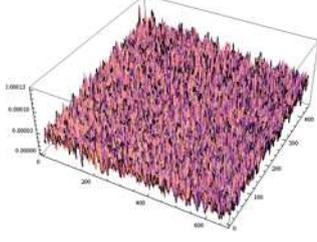
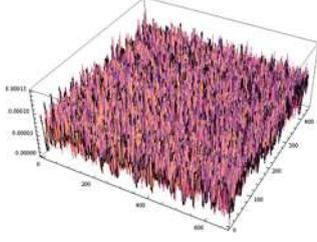
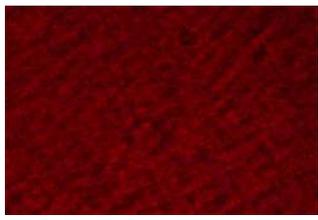
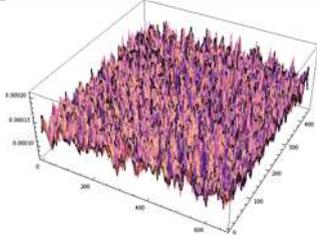
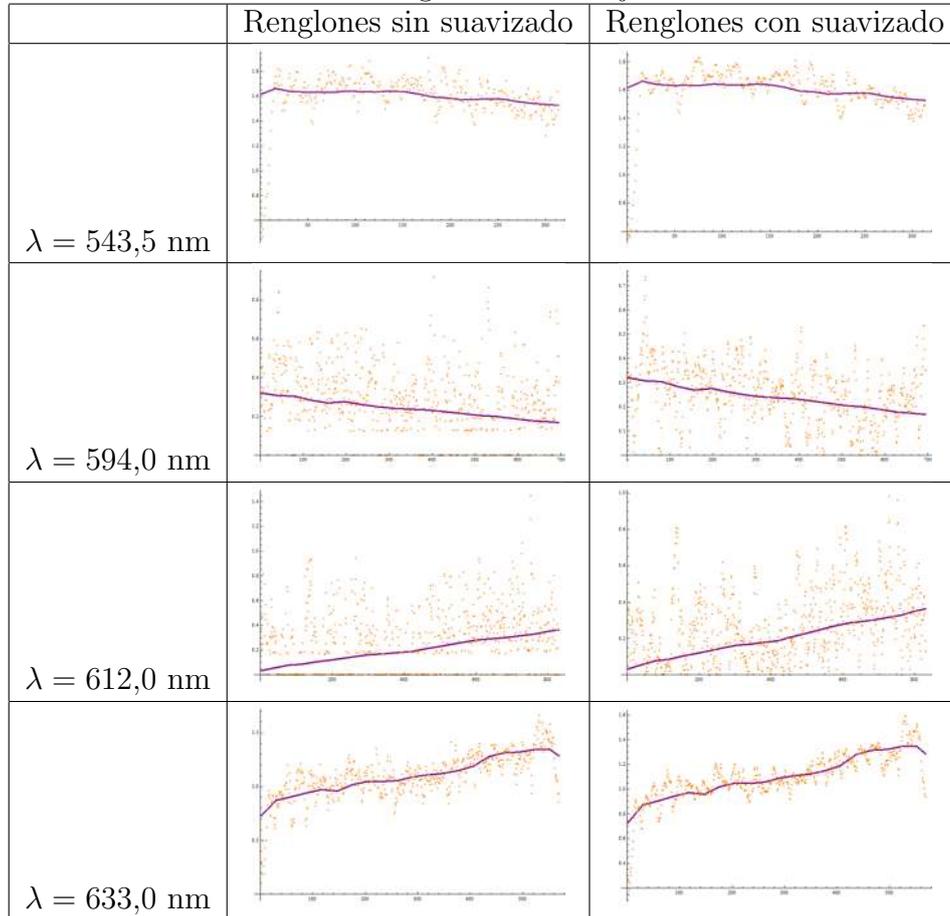
	Imagen	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$		
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$		

Tabla 4.2: Resultados con suavizado XY para la caja de CD.

	tiempo de exposición	$error \leq 10\%$	$error \leq 5\%$	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$	1/10	35/35	35/35	0.000139748
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$	1/6	38/78	20/78	0.0000262911
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$	1/13	0/120	0/120	0.0000318946
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$	1/30	40/40	40/40	0.000108215

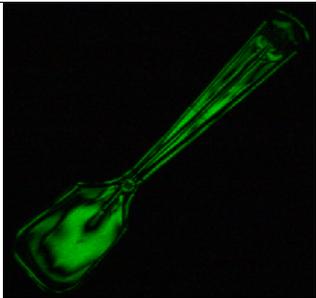
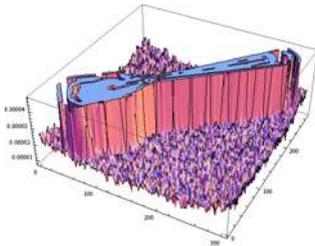
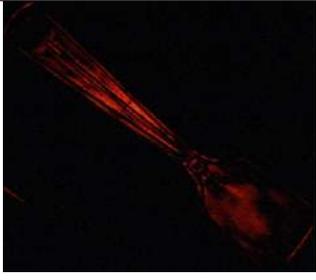
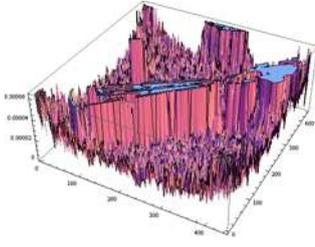
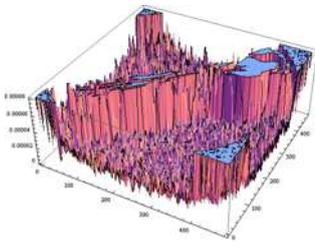
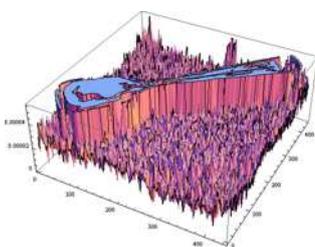
CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.3: Renglones de la caja de CD.



CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.4: Cuchara.

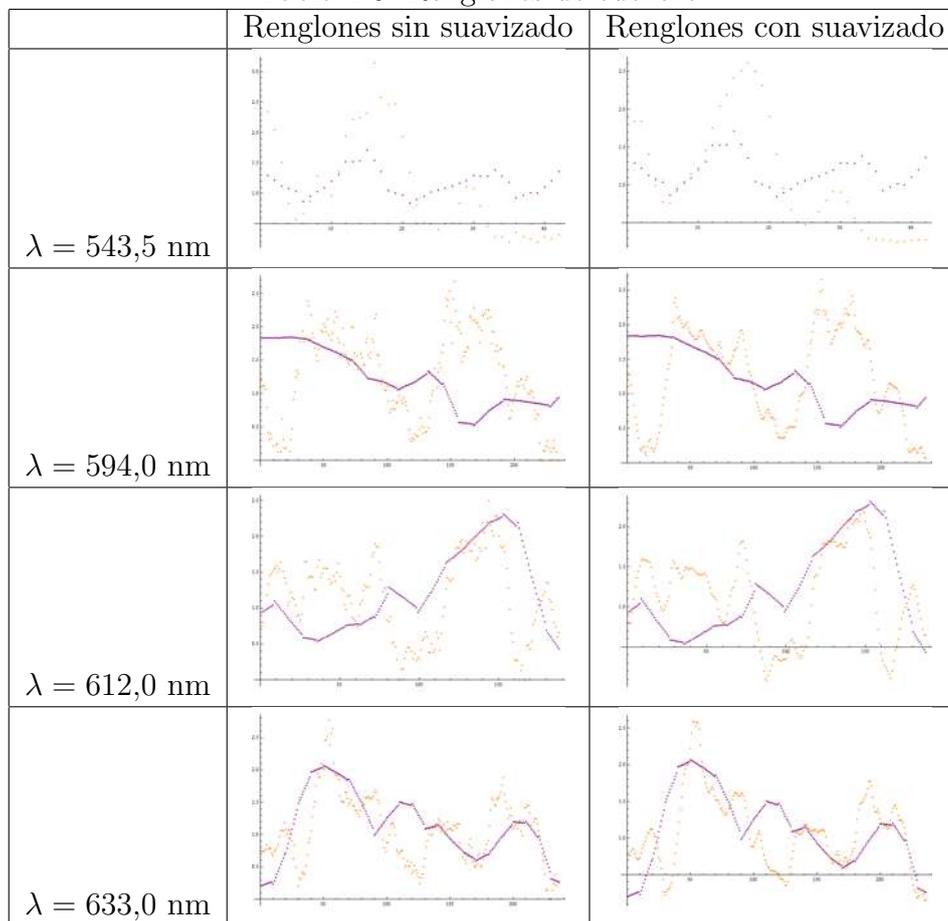
	Imagen	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$		
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$		

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.5: Resultados con suavizado XY para la cuchara.

	tiempo de exposición	$\leq 10\%$	$\leq 5\%$	Birrefringencia
$\lambda = 543,5$ nm	1/200	16/16	7/16	0.0000738099
$\lambda = 594,0$ nm	1/320	21/30	4/30	0.0000846605
$\lambda = 612,0$ nm	1/125	19/19	15/19	0.0000731221
$\lambda = 633,0$ nm	1/2000	22/23	7/23	0.0000762866

Tabla 4.6: Renglones de cuchara.



CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.7: Celofán.

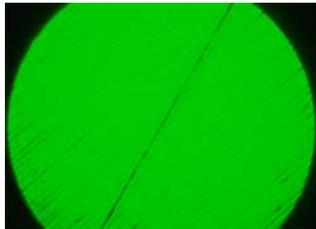
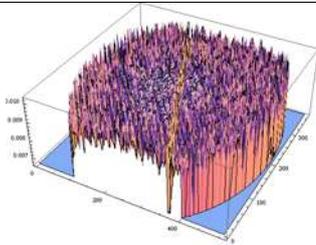
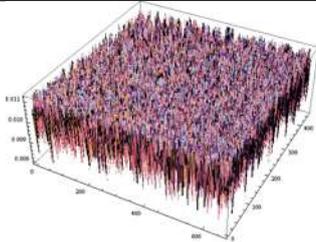
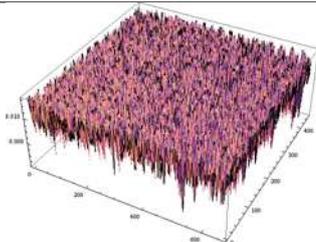
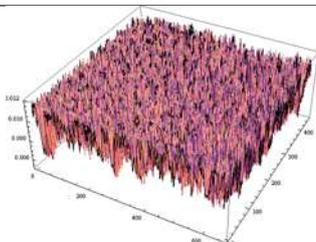
	Imagen	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$		
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$		

Tabla 4.8: Resultados con suavizado XY para celofán.

	tiempo de exposición	$\leq 10\%$	$\leq 5\%$	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$	1/2	28/28	28/28	0.009746
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$	1/1.6	68/68	22/68	0.0101531
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$	1/1.3	136/136	136/136	0.00988181
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$	1/20	104/104	94/104	0.010498

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.9: Renglones de celofán.

	Renglones sin suavizado	Renglones con suavizado
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$		
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$		

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.10: Acetato.

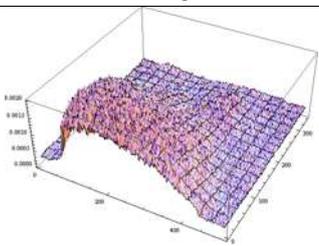
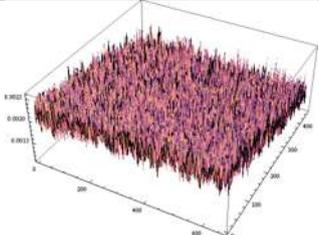
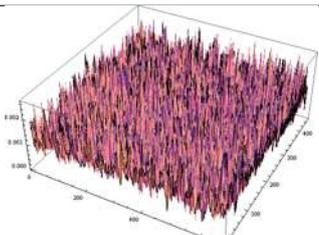
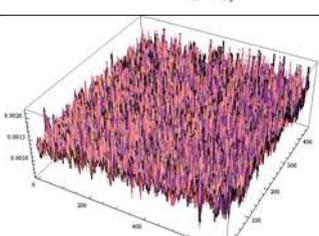
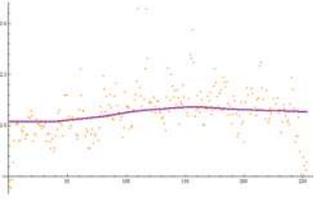
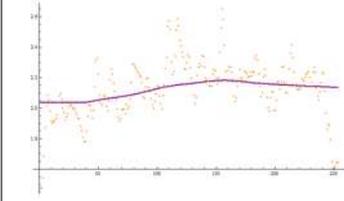
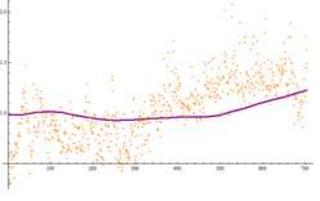
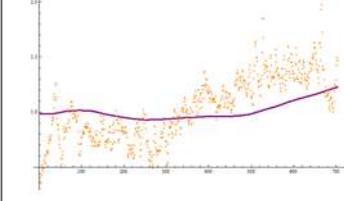
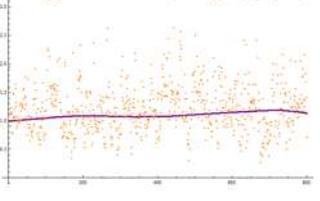
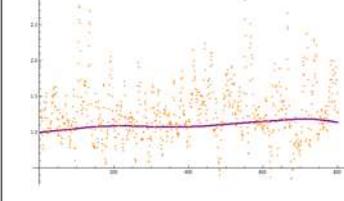
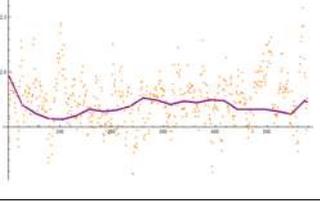
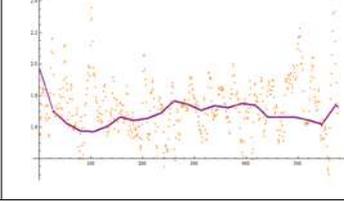
	Imagen	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$		
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$		

Tabla 4.11: Resultados con suavizado XY para acetato.

	tiempo de exposición	$\leq 10 \%$	$\leq 5 \%$	Birrefringencia
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$	1/6	24/24	24/24	0.00158867
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$	1/2.5	40/40	37/40	0.000832757
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$	1/60	1/112	0/112	0.00114406
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$	1/125	45/45	45/45	0.00150138

CAPÍTULO 4. RESULTADOS

Tabla 4.12: Renglones de acetato.

	Renglones sin suavizado	Renglones con suavizado
$\lambda = 543,5 \text{ nm}$		
$\lambda = 594,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 612,0 \text{ nm}$		
$\lambda = 633,0 \text{ nm}$		

Capítulo 5

Conclusiones

La birrefringencia es una propiedad de algunos materiales que tienen al menos dos índices de refracción debido a su simetría molecular. Uno de los efectos que fue analizado en este trabajo es el cambio de polarización que provoca en un haz de luz que pasa a través de materiales birrefringentes. Analizando el cambio en el estado de polarización se puede calcular el cambio de fase y a partir de éste, la birrefringencia.

Se construyó un polariscopio V-H que permite medir la birrefringencia de materiales tales como películas de celofán, de acetato, una caja de CD y una cuchara de plástico.

El polariscopio es fácil de construir y consta de 2 polarizadores lineales con sus ejes de transmisión perpendiculares entre sí, una cámara fotográfica digital y el material a analizar se coloca entre los dos polarizadores.

Para analizar la imagen se creó un algoritmo en *Mathematica* a partir del cual, se obtuvieron los resultados de la birrefringencia. El algoritmo que procesa la imagen es de orden de $O(n)$ donde n es número de píxeles de la imagen, y con el avance de los ordenadores hace que el procesamiento de las imágenes sea rápido; para una imagen de 278x280 (77 840 píxeles) demora un promedio de 4.8033 segundos y para una imagen más grande de 664*448 (297472 píxeles) un promedio de 20.6249 segundos¹ por lo que se puede hacer el mapa de fase de un material en pocos segundos desde que se colocó la muestra.

¹tiempo estimado para un ordenador con un procesador Intel(R) Core(TM) i5 CPU M 460 @ 2.53 GHz 2.53 GHz, 4GB de memoria RAM y sistema operativo Windows 7 de 64 bits

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Los resultados de la birrefringencia obtenidos con el polariscopio fueron comparados con los obtenidos con un polarímetro comercial y presentan errores menor o igual a 5% entre sí.

Una de las ventajas del polariscopio es que permite analizar superficies de objetos grandes, mientras que el polarímetro solo permite hacer mediciones puntuales incrementando el tiempo en que se lleva a cabo el experimento. Además, el polariscopio tiene pocos instrumentos en su estructura lo que facilita su alineación y calibración.

Este trabajo es el primero que se desarrolla en esta línea de investigación en el laboratorio de holografía y se pretende analizar la birrefringencia de tejidos animales y/o vegetales para distinguir los sanos de los enfermos.

Apéndice A

Un poco de geometría analítica

Se puede escribir las curvas de segundo grado en general como:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (\text{A.1})$$

Se puede considerar un sistema de coordenadas $x'y'$ rotado un ángulo θ respecto al sistema original xy de tal forma que el término cruzado se anule. Considerando la rotación

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad (\text{A.2})$$

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta, \quad (\text{A.3})$$

sustituyendo en A.1

$$\begin{aligned} & A(x'^2 \cos^2 \theta + y'^2 \sin^2 \theta - 2x'y' \cos \theta \sin \theta) \\ & + B(x'^2 \cos \theta \sin \theta + x'y' \cos^2 \theta - x'y' \sin^2 \theta - y'^2 \cos \theta \sin \theta) \\ & + C(x'^2 \sin^2 \theta + y'^2 \cos^2 \theta + 2x'y' \cos \theta \sin \theta) \\ & + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) + E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

agrupando términos

$$\begin{aligned} & x'^2(A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta) \\ & + x'y'(-2A \cos \theta \sin \theta + B \cos^2 \theta - B \sin^2 \theta + 2C \cos \theta \sin \theta) \\ & + y'^2(A \sin^2 \theta - B \cos \theta \sin \theta + C \cos^2 \theta) \\ & + x'(D \cos \theta + E \sin \theta) + y'(E \cos \theta - D \sin \theta) + F = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

y usando identidades del doble ángulo se puede simplificar el coeficiente del término cruzado que es idénticamente cero

$$B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta = 0, \quad (\text{A.6})$$

APÉNDICE A. UN POCO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

$$\Rightarrow \cot 2\theta = \frac{A - C}{B}. \quad (\text{A.7})$$

Con A.7 se puede identificar el ángulo que se encuentre rotado cualquier curva de segundo grado.

Por otro lado recordando de la geometría analítica la elipse es el lugar geométrico del punto P que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los focos F_1 y F_2 permanece constante. La ecuación de la elipse centrada en el origen cuya suma de distancias a los focos es la constante $2a$ con distancias entre los focos de $2c$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \quad (\text{A.8})$$

En el caso de la elipse siempre pasa que $a > c$. La derivación de la ecuación se puede ver en [19]. Para más detalles y una discusión más amplia puede revisarse [19], [20].

Apéndice B

Derivación de los parámetros de Stokes

Si se piensa en dos ondas planas perpendiculares entre sí, con la misma frecuencia ω , una sobre el eje x y la otra sobre el eje y y representada por

$$\vec{E}_x(t) = \hat{i}E_{0x} \cos(\omega t + \delta_x(t)), \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{E}_y(t) = \hat{j}E_{0y} \cos(\omega t + \delta_y(t)). \quad (\text{B.2})$$

Suponiendo se está en el plano $z = 0$. La superposición de estas dos ondas generan otra onda con polarización diferente, que depende de las amplitudes E_{0x} , E_{0y} y las fases $\delta_x(t)$, $\delta_y(t)$. Analizando solo la magnitud de las ondas, se puede escribir

$$\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} = \cos(\omega t) \cos(\delta_x(t)) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_x(t)), \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} = \cos(\omega t) \cos(\delta_y(t)) - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_y(t)), \quad (\text{B.4})$$

multiplicando B.1 por $\text{sen}(\delta_y(t))$, B.2 por $-\text{sen}(\delta_x(t))$ y sumando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \text{sen}(\delta_y(t)) - \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \text{sen}(\delta_x(t)) &= \cos(\omega t) \cos(\delta_x(t)) \text{sen}(\delta_y(t)) \\ &\quad - \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_x(t)) \text{sen}(\delta_y(t)), \\ &\quad - \cos(\omega t) \cos(\delta_y(t)) \text{sen}(\delta_x(t)) \\ &\quad + \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\delta_y(t)) \text{sen}(\delta_x(t)) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

APÉNDICE B. DERIVACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

simplicando B.5 se tiene

$$\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \operatorname{sen}(\delta_y(t)) - \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \operatorname{sen}(\delta_x(t)) = \cos(\omega t) \operatorname{sen}(\delta_y(t) - \delta_x(t)), \quad (\text{B.6})$$

similarmente multiplicando B.1 por $\cos(\delta_y(t))$ y B.2 por $-\cos(\delta_x(t))$ y sumándolos se tiene

$$\begin{aligned} \frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \cos(\delta_y(t)) - \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \cos(\delta_x(t)) &= \cos(\omega t) \cos(\delta_x(t)) \cos(\delta_y(t)) \\ &\quad - \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\delta_x(t)) \cos(\delta_y(t)), \\ &\quad - \cos(\omega t) \cos(\delta_y(t)) \cos(\delta_x(t)) \\ &\quad + \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\delta_y(t)) \cos(\delta_x(t)) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

simplicando B.7 se tiene

$$\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \operatorname{sen}(\delta_y(t)) - \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \operatorname{sen}(\delta_x(t)) = \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\delta_y(t) - \delta_x(t)), \quad (\text{B.8})$$

elevando al cuadrado B.6 y B.8 se tiene

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \right)^2 \operatorname{sen}^2(\delta_y(t)) - 2 \frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \operatorname{sen}(\delta_x(t)) \operatorname{sen}(\delta_y(t)) \\ + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \right)^2 \operatorname{sen}^2(\delta_x(t)) = \cos^2(\omega t) \operatorname{sen}^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \end{aligned}, \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \right)^2 \cos^2(\delta_y(t)) - 2 \frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \cos(\delta_x(t)) \cos(\delta_y(t)) \\ + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \right)^2 \cos^2(\delta_x(t)) = \operatorname{sen}^2(\omega t) \operatorname{sen}^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \end{aligned}, \quad (\text{B.10})$$

respectivamente.

Sumando B.9 con B.10 y agrupando términos semejantes se tiene

$$\begin{aligned} &\left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \right)^2 (\operatorname{sen}^2(\delta_y(t)) + \cos^2(\delta_y(t))) \\ &- 2 \frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)} \frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} (\operatorname{sen}(\delta_x(t)) \operatorname{sen}(\delta_y(t)) + \cos(\delta_x(t)) \cos(\delta_y(t))), \\ &\quad + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)} \right)^2 (\operatorname{sen}^2(\delta_x(t)) + \cos^2(\delta_x(t))) \\ &= (\cos^2(\omega t) + \operatorname{sen}^2(\omega t)) \operatorname{sen}^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \end{aligned}, \quad (\text{B.11})$$

APÉNDICE B. DERIVACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

simplificando B.11 se tiene

$$\left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)}\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)}\cos(\delta_y(t) - \delta_x(t)) + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)}\right)^2 = \text{sen}^2(\delta_y(t) - \delta_x(t)) \quad (\text{B.12})$$

renombrando $\delta(t) = \delta_y - \delta_x$ B.12 toma la forma

$$\left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)}\right)^2 - 2\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)}\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)}\cos(\delta(t)) + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)}\right)^2 = \text{sen}^2(\delta(t)). \quad (\text{B.13})$$

Algunos casos especiales de B.13 son cuando $\delta = 0$ entonces se puede escribir como

$$E_y(t) = \frac{E_{0y}}{E_{0x}}E_x(t), \quad (\text{B.14})$$

que representa una línea recta con pendiente $\frac{E_{0y}}{E_{0x}}$, similarmente cuando $\delta = \pi$, se tiene polarización lineal con pendiente negativa.

Cuando $\delta = \pm\pi/2$ B.13 se escribe

$$\left(\frac{E_x(t)}{E_{0x}(t)}\right)^2 + \left(\frac{E_y(t)}{E_{0y}(t)}\right)^2 = 1, \quad (\text{B.15})$$

una elipse con ejes paralelos a los del sistema de coordenadas.

De forma más general B.13 es una elipse rotada un ángulo θ tal que

$$\cot 2\theta = -\frac{E_{0y}^2 - E_{0x}^2}{2\cos\delta(t)}. \quad (\text{B.16})$$

Véase el apéndice A.

El promedio temporal denotado por $\langle \rangle_T$, se define como

$$\langle H \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T H dt, \quad (\text{B.17})$$

calculando el promedio temporal de B.13 pensando que la diferencia de fase δ no depende del tiempo,

$$\frac{\langle E_x(t)^2 \rangle_T}{E_{0x}(t)^2} - 2\frac{\langle E_x(t)E_y(t) \rangle \cos(\delta(t))}{E_{0x}(t)E_{0y}(t)} + \frac{\langle E_y(t)^2 \rangle_T}{E_{0y}(t)^2} = \text{sen}^2(\delta(t)), \quad (\text{B.18})$$

multiplicando B.18 por $4E_{0x}(t)^2 E_{0y}(t)^2$

$$4E_{0y}(t)^2 \langle E_x(t)^2 \rangle_T - 8E_{0x}(t)E_{0y}(t) \langle E_x(t)E_y(t) \rangle_T \cos(\delta(t)) + 4E_{0x}(t)^2 \langle E_y(t)^2 \rangle_T = (2E_{0x}(t)E_{0y}(t) \cos(\delta(t)))^2, \quad (\text{B.19})$$

APÉNDICE B. DERIVACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

calculando el promedio temporal

$$\begin{aligned}
 \langle E_x(t)^2 \rangle_T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_{0x}^2 \cos^2(\omega t + \delta_x) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x}^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2(\omega t + \delta_x))) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x}^2}{2T} \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2(\omega t + \delta_x)) dt \right) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x}^2}{2T} \left(T + \int_0^T \cos(2(\omega t + \delta_x)) dt \right) \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x}^2}{2T} T + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x}^2}{4T\omega} (\sin(2(\omega T + \delta_x)) + \sin(\delta_x)) \\
 &= \frac{E_{0x}^2}{2} + 0 \\
 &= \frac{E_{0x}^2}{2}
 \end{aligned}$$

es decir

$$\langle E_x(t)^2 \rangle_T = \frac{E_{0x}^2}{2}, \quad (\text{B.20})$$

similarmente

$$\langle E_y(t)^2 \rangle_T = \frac{E_{0y}^2}{2}, \quad (\text{B.21})$$

para el término cruzado se tiene

$$\begin{aligned}
 \langle E_x(t) E_y(t) \rangle_T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E_{0x} \cos(\omega t + \delta_x) E_{0y} \cos(\omega t + \delta_y) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T (\cos(\omega t) \cos(\delta_x) - \sin(\omega t) \sin(\delta_x)) \\
 &\quad (\cos(\omega t) \cos(\delta_y) - \sin(\omega t) \sin(\delta_y)) dt \\
 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) \cos(\delta_x) \cos(\delta_y) dt \\
 &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T \cos(\omega t) \cos(\delta_x) \sin(\omega t) \sin(\delta_y) dt \\
 &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \sin(\delta_x) \cos(\omega t) \cos(\delta_y) dt \\
 &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) \sin(\delta_x) \sin(\delta_y) dt
 \end{aligned}$$

APÉNDICE B. DERIVACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

se puede simplificar las integrales negativas factorizando $\cos(\omega t) \sin(\omega t)$ y usando las identidades

$$\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x), \quad (\text{B.22})$$

$$\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) = \sin(x + y), \quad (\text{B.23})$$

obteniendo

$$\begin{aligned} \langle E_x(t) E_y(t) \rangle_T &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \cos(\delta_x) \cos(\delta_y) \int_0^T \cos^2(\omega t) dt \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \sin(2\omega t) \sin(\delta_x + \delta_y) dt \\ &\quad + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{0x} E_{0y}}{T} \sin(\delta_x) \sin(\delta_y) \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \\ &= E_{0x} E_{0y} \cos(\delta_x) \cos(\delta_y) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t)) dt \\ &\quad - \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \sin(\delta_x + \delta_y) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{2\omega} \cos(2\omega T) + 1 \right) \\ &\quad + E_{0x} E_{0y} \sin(\delta_x) \sin(\delta_y) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos(\omega t)) dt \\ &= \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos(\delta_x) \cos(\delta_y) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(T - 0 + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T) - 0 \right) \\ &\quad + \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \sin(\delta_x) \sin(\delta_y) \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(T - 0 - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega T) + 0 \right) \\ &= \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos(\delta_x) \cos(\delta_y) + \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \sin(\delta_x) \sin(\delta_y) \\ &= \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} (\cos(\delta_x) \cos(\delta_y) + \sin(\delta_x) \sin(\delta_y)) \\ &= \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} (\cos(\delta_y - \delta_x)) \\ &= \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos(\delta) \end{aligned},$$

es decir

$$\langle E_x(t) E_y(t) \rangle_T = \frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos(\delta), \quad (\text{B.24})$$

sustituyendo B.20, B.21 y B.24 en B.19 se tiene

$$\begin{aligned} 4E_{0y}(t)^2 \left(\frac{E_{0x}^2}{2} \right) - 8E_{0x}(t) E_{0y}(t) \left(\frac{E_{0x} E_{0y}}{2} \cos(\delta) \right) \cos(\delta) \\ + 4E_{0y}(t)^2 \left(\frac{E_{0y}^2}{2} \right) = (2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta))^2, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

APÉNDICE B. DERIVACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

sumando y restando $E_{0x}^4 + E_{0y}^4$ en B.25

$$2E_{0y}(t)^2 E_{0x}^2 - 4E_{0x}(t)^2 E_{0y}(t)^2 \cos^2(\delta) + 2E_{0y}(t)^2 E_{0y}^2 + E_{0x}^4 + E_{0y}^4 - E_{0x}^4 - E_{0y}^4 = (2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta))^2, \quad (\text{B.26})$$

agrupando términos

$$(E_{0x}^4 + 2E_{0y}(t)^2 E_{0x}^2 + E_{0y}^4) - (E_{0x}^4 - 2E_{0y}(t)^2 E_{0x}^2 + E_{0y}^4) - 4E_{0x}(t)^2 E_{0y}(t)^2 \cos^2(\delta) = (2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta))^2, \quad (\text{B.27})$$

simplificando

$$(E_{0x}^2 + E_{0y}^2)^2 = (E_{0x}^2 - E_{0y}^2) + (2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta))^2 + (2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta))^2, \quad (\text{B.28})$$

los parámetros de Stokes se definen como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (\text{B.29})$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (\text{B.30})$$

$$S_2 = 2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \cos(\delta(t)), \quad (\text{B.31})$$

$$S_3 = 2E_{0x}(t) E_{0y}(t) \sin(\delta(t)), \quad (\text{B.32})$$

por lo que B.28 se reduce a

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (\text{B.33})$$

en forma compleja

$$E_x(t) = E_{0x} e^{-i(\omega t + \delta_x)}, \quad (\text{B.34})$$

$$E_y(t) = E_{0y} e^{-i(\omega t + \delta_y)}, \quad (\text{B.35})$$

los parámetros de Stokes toman la forma

$$S_0 = E_x(t) E_x(t)^* + E_y(t) E_y(t)^*, \quad (\text{B.36})$$

$$S_1 = E_x(t) E_x(t)^* - E_y(t) E_y(t)^*, \quad (\text{B.37})$$

$$S_2 = E_x(t) E_y(t)^* + E_y(t) E_x(t)^*, \quad (\text{B.38})$$

APÉNDICE B. DERIVACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE STOKES

$$S_3 = i(E_x(t)E_y(t)^* - E_y(t)E_x(t)^*). \quad (\text{B.39})$$

Por otro lado, se sabe que la irradiancia se define como $I = \varepsilon_0 c \langle E^2 \rangle_T$ donde ε_0 es la permitividad eléctrica del vacío, c la velocidad de la luz en el vacío y de B.19 se ve que los parámetros de Stokes son proporcionales a la irradiancia.

Apéndice C

Derivación de matrices de Müller

Se puede conocer la matriz de Mueller de un polarizador lineal con eje de transmisión horizontal sabiendo como se comporta la luz al pasar por él. La matriz de un polarizador con eje de transmisión esta dada por

$$P(0) = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

con $a_{ij} \in \mathbb{R} \forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ donde $0 \leq \rho_p \leq 1$ es un factor de transmitancia. Al hacer incidir un haz de luz sobre un polarizador con eje de transmisión horizontal el haz transmitido es la componente horizontal de la polarización incidente, en particular para luz natural sobre un polarizador horizontal, el haz transmitido tiene polarización horizontal, en vectores de Stokes se tiene

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.2})$$

haciendo el producto matricial se tiene

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

por lo que $a_{11} = a_{21} = 1$ y $a_{31} = a_{41} = 0$.

Ahora se hace incidir luz con polarización vertical, ésta no tiene componente

APÉNDICE C. DERIVACIÓN DE MATRICES DE MÜELLER

horizontal por lo que no se transmite nada, en vectores de Stokes se tiene

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

haciendo el producto matricial se tiene

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 - a_{12} \\ 1 - a_{22} \\ -a_{32} \\ -a_{42} \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

por lo que $a_{12} = a_{22} = 1$ y $a_{32} = a_{42} = 0$.

Al incidir luz con polarización lineal a $+45^\circ$

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a_{13} & a_{14} \\ 1 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

realizando el producto matricial

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_{13} \\ 1 + a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.7})$$

por lo que $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0$.

Del mismo modo haciendo incidir polarización circular derecha

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a_{14} \\ 1 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.8})$$

haciendo el producto

$$\frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_{14} \\ 1 + a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix} = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.9})$$

APÉNDICE C. DERIVACIÓN DE MATRICES DE MÜELLER

obteniendo los últimos cuatro valores $a_{13} = a_{23} = a_{33} = a_{43} = 0$.

Y la matriz de Mueller de un polarizador con eje de transmisión horizontal es

$$P(0) = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Para conocer la matriz de Mueller de un polarizador lineal a un ángulo arbitrario θ sobre la horizontal se puede hacer la rotación con el producto matricial $M(\theta)P(0)M(-\theta)$ donde $M(\theta)$ es la matriz de rotación. Véase [21], [22], [23]

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

haciendo el producto de matrices

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 & 0 \\ \text{sen}(2\theta) & \text{sen}(2\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) & \cos(2\theta)\text{sen}(2\theta) & 0 \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta)\text{sen}(2\theta) & \text{sen}^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo que la matriz de un polarizador lineal con eje de transmisión a un ángulo θ

$$P(\theta) = \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) & \cos(2\theta)\text{sen}(2\theta) & 0 \\ \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta)\text{sen}(2\theta) & \text{sen}^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.12})$$

Para conocer la matriz de Mueller de un retardador con eje rápido que coincide con el eje x y el eje lento con el eje y del sistema de coordenadas, que introduce un desfase de ϕ , es decir introduce un cambio de fase de $\phi/2$ en el eje rápido y $-\phi/2$ en el eje lento.

APÉNDICE C. DERIVACIÓN DE MATRICES DE MÜELLER

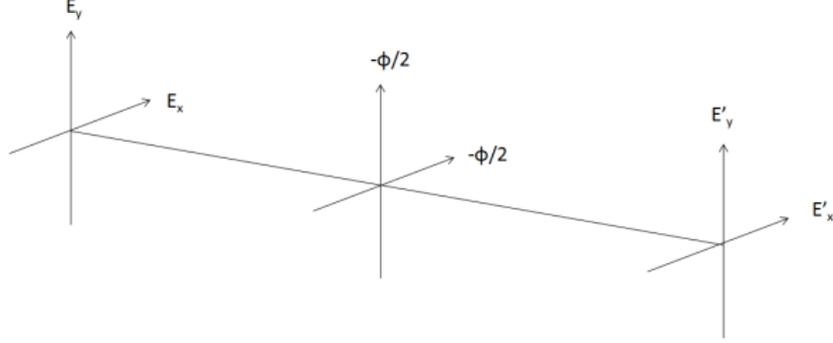


Figura C.1: Arreglo de un retardador.

Considerando la notación compleja de la luz, la luz transmitida cumple la relación

$$E'_x(t) = \rho_r e^{i(\phi/2)} E_x, \quad (\text{C.13})$$

$$E'_y(t) = \rho_r e^{-i(\phi/2)} E_y, \quad (\text{C.14})$$

donde E_x, E_y es el campo incidente y $0 \leq \rho_r \leq 1$ es un factor de transmitancia, los parámetros de Stokes son entonces

$$\begin{aligned} S'_0(t) &= E'_x(z,t)E'_x{}^*(z,t) + E'_y(z,t)E'_y{}^*(z,t) \\ &= \rho_r^2 e^{i(\phi/2)} e^{-i(\phi/2)} E_x(z,t)E_x^*(z,t) + \rho_r^2 e^{-i(\phi/2)} e^{i(\phi/2)} E_y(z,t)E_y^*(z,t) \\ &= \rho_r^2 E_x(z,t)E_x^*(z,t) + \rho_r^2 E_y(z,t)E_y^*(z,t) \\ &= \rho_r^2 S_0 \end{aligned}$$

$$S'_0(t) = \rho_r^2 S_0, \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned} S'_1(t) &= E'_x(z,t)E'_x{}^*(z,t) - E'_y(z,t)E'_y{}^*(z,t) \\ &= \rho_r^2 e^{i(\phi/2)} e^{-i(\phi/2)} E_x(z,t)E_x^*(z,t) - \rho_r^2 e^{-i(\phi/2)} e^{i(\phi/2)} E_y(z,t)E_y^*(z,t) \\ &= \rho_r^2 E_x(z,t)E_x^*(z,t) - \rho_r^2 E_y(z,t)E_y^*(z,t) \\ &= \rho_r^2 S_1 \end{aligned}$$

$$S'_1(t) = \rho_r^2 S_1, \quad (\text{C.16})$$

APÉNDICE C. DERIVACIÓN DE MATRICES DE MÜELLER

$$\begin{aligned}
S'_2(t) &= E'_x(z, t)E'_y(z, t) - E'_y(z, t)E'_x(z, t) \\
&= \rho_r^2 e^{i(\phi/2)} E_x(z, t) e^{i(\phi/2)} E_y^*(z, t) - \rho_r^2 e^{-i(\phi/2)} E_y(z, t) e^{-i(\phi/2)} E_x^*(z, t) \\
&= \rho_r^2 e^{i(\phi)} E_x(z, t) E_y^*(z, t) - \rho_r^2 e^{-i(\phi)} E_y(z, t) E_x^*(z, t) \\
&= \rho_r^2 ((\cos(\phi) + i \operatorname{sen}(\phi)) E_x(z, t) E_y^*(z, t) - (\cos(\phi) - i \operatorname{sen}(\phi)) E_y(z, t) E_x^*(z, t)), \\
&= \rho_r^2 \cos(\phi) (E_x(z, t) E_y^*(z, t) + E_x^*(z, t) E_y(z, t)) + \\
&= i \rho_r^2 \operatorname{sen}(\phi) (E_x(z, t) E_y^*(z, t) - E_x^*(z, t) E_y(z, t)) \\
&= \rho_r^2 (\cos(\phi) S_2 + \operatorname{sen}(\phi) S_3)
\end{aligned}$$

$$S'_2(t) = \rho_r^2 \cos(\phi) S_2 + \rho_r^2 \operatorname{sen}(\phi) S_3, \quad (\text{C.17})$$

del mismo modo a S_2

$$S'_3(t) = -\rho_r^2 \operatorname{sen}(\phi) S_2 + \rho_r^2 \cos(\phi) S_3, \quad (\text{C.18})$$

escribiendo el sistema de ecuaciones de forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{pmatrix} = \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.19})$$

y la matriz de Mueller de un retardador con eje rápido que coincide con el eje x y el eje lento con el eje y del sistema de coordenadas, que introduce un desfase de ϕ es

$$R(0, \phi) = \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}, \quad (\text{C.20})$$

para conocer la matriz de un retardador con eje rápido inclinado un ángulo α con la horizontal se puede hacer la rotación con el producto matricial $M(\alpha)R(0, \phi)M(-\alpha)$ donde $M(\alpha)$ es la matriz de rotación como en la ecuación C.11. Véase [21], [23].

$$\begin{aligned}
R(\alpha, \phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & -\operatorname{sen}(2\alpha) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) & \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & -\operatorname{sen}(2\alpha) \cos(\phi) & -\operatorname{sen}(2\alpha) \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & \operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) \cos(\phi) & -\cos(2\alpha) \operatorname{sen}(\phi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}(2\alpha) & \cos(2\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Por lo que la matriz de un retardador con eje rápido inclinado un ángulo α con la horizontal que introduce un desfase de ϕ es

$$R(\alpha, \phi) = \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 2\alpha + \cos \phi \operatorname{sen}^2 2\alpha & \cos 2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \cos \phi) & -\operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} 2\alpha \\ 0 & \cos 2\alpha \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \cos \phi) & \operatorname{sen}^2 2\alpha + \cos \phi \cos^2 2\alpha & \operatorname{sen} \phi \cos \phi \\ 0 & \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} 2\alpha & -\operatorname{sen} \phi \cos 2\alpha & \cos \phi \end{pmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

Apéndice D

Polariscopio lineal oscuro H-V

Se considera un polariscopio lineal oscuro H-V con un retardador entre los polarizadores como se muestra Figura D.1.

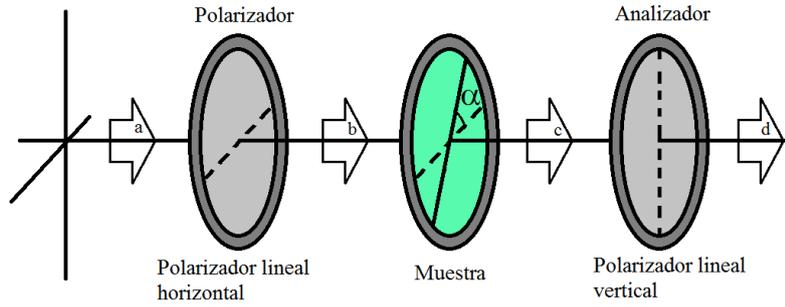


Figura D.1: Polariscopio lineal oscuro H-V.

En este arreglo se le hace incidir en la región a luz natural, es decir no polarizada, en la región b se tiene luz polarizada linealmente vertical con intensidad inicial S_{b_0} , se puede representar por el vector de Stokes

$$S_b = \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ S_{b_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (D.1)$$

a continuación incide sobre el retardador obteniendo el haz en la región c

$$S_c = \rho_r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \sin^2(2\alpha) & \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) (1 - \cos(\phi)) & -\sin(\phi) \sin(2\alpha) \\ 0 & \cos(2\alpha) \sin(2\alpha) (1 - \cos(\phi)) & \sin^2(2\alpha) + \cos(\phi) \cos^2(2\alpha) & \sin(\phi) \cos(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) \sin(2\alpha) & -\sin(\phi) \cos(2\alpha) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ S_{b_0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (D.2)$$

APÉNDICE D. POLARISCOPIO LINEAL OSCURO H-V

obteniendo

$$S_c = \rho_r^2 \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ S_{b_0} (\cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi))) \\ S_{b_0} (\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha)) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.3})$$

por último pasa por el polarizador vertical y el haz transmitido en la región d

$$S_d = \rho_r^2 \frac{\rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{b_0} \\ S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ S_{b_0} (\cos(2\alpha) \operatorname{sen}(2\alpha) (1 - \cos(\phi))) \\ S_{b_0} (\operatorname{sen}(\phi) \operatorname{sen}(2\alpha)) \end{pmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

cuyo resultado final es

$$S_d = \frac{\rho_r^2 \rho_p^2}{2} \begin{pmatrix} S_{b_0} - S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ -S_{b_0} + S_{b_0} (\cos^2(2\alpha) + \cos(\phi) \operatorname{sen}^2(2\alpha)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Apéndice E

Análisis de incertidumbre

Dada una medición x_0 e y_0 con una incertidumbre absoluta δx_0 , δy_0 respectivamente se puede calcular un valor z el cual depende de x e y de la forma:

$$z = f(x, y), \quad (\text{E.1})$$

según [24] se puede conocer la incertidumbre absoluta δz con la ecuación:

$$\delta z = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y, \quad (\text{E.2})$$

de la ecuación 4.2 se tiene

$$\phi = 2 \arcsin \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}} \right), \quad (\text{E.3})$$

es decir que el cambio de fase introducido depende de la intensidad incidente a la muestra S_{b_0} y la final después del analizador S_{d_0} . Considerando las incertidumbre en δS_b y δS_d respectivamente en la ecuación E.3 se puede calcular la incertidumbre en la fase $\delta \phi$ según E.2. Por un lado

$$\frac{\partial f}{\partial S_{d_0}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}} \right)^2}} \frac{\partial \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}} \right)}{\partial S_{d_0}}, \quad (\text{E.4})$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{d_0}} = \frac{2}{\text{sen}(2\alpha) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}} \right)^2}} \frac{1}{2 \sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}}} \frac{1}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}, \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{d_0}} = \frac{1}{\text{sen}(2\alpha) \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)} \sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}} \right)^2}} \sqrt{\frac{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}{S_{d_0}}} \frac{1}{\rho_r^2 \rho_p^2 S_{b_0}}, \quad (\text{E.6})$$

APÉNDICE E. ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE

$$\frac{\partial f}{\partial S_{d_0}} = \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0} S_{d_0}}}, \quad (\text{E.7})$$

similarmente

$$\frac{\partial f}{\partial S_{b_0}} = \frac{2}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{\partial \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)}{\partial S_{b_0}}, \quad (\text{E.8})$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{b_0}} = \frac{2}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{2\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}} \left(-\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}^2}\right), \quad (\text{E.9})$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{b_0}} = \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \sqrt{\frac{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}{S_{d_0}}} \left(-\frac{1}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}} \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}\right), \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{\partial f}{\partial S_{b_0}} = -\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0} S_{d_0}}} \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}, \quad (\text{E.11})$$

por lo que la incertidumbre en la fase es

$$\delta\phi = \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0} S_{d_0}}} \delta S_b - \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0} S_{d_0}}} \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}} \delta S_d. \quad (\text{E.12})$$

Como se tomaron las mediciones con un intervalo de tiempo pequeño y el mismo láser es de esperarse que la incertidumbre en una medida sea la misma que en la otra es decir $\delta S_b = \delta S_d$, por lo que

$$\delta\phi = \frac{1}{\text{sen}(2\alpha)\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\text{sen}(2\alpha)}\sqrt{\frac{S_{d_0}}{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0}}}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{\rho_r^2\rho_p^2 S_{b_0} S_{d_0}}} \left(1 - \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}\right) \delta S_b, \quad (\text{E.13})$$

como las mediciones se hicieron para $\alpha = \pi/2$ y considerando $\rho_r = \rho_p = 1$ se puede reescribir E.13 como

$$\delta\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}}} \frac{1}{\sqrt{S_{b_0} S_{d_0}}} \left(1 - \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}\right) \delta S_b, \quad (\text{E.14})$$

APÉNDICE E. ANÁLISIS DE INCERTIDUMBRE

$$\delta\phi = \sqrt{\frac{1 - \frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}}{S_{b_0}S_{d_0}}} \delta S_b = \sqrt{\frac{S_{b_0} - S_{d_0}}{S_{b_0}^2 S_{d_0}}} \delta S_b. \quad (\text{E.15})$$

Se define la *incertidumbre relativa* como [24]

$$\textit{incertidumbrelativa} = \frac{\textit{incertidumbreabsoluta}}{\textit{valormedido}}, \quad (\text{E.16})$$

y lo se puede expresar como un porcentual considerando

$$\textit{incertidumbrelativa} = \frac{\textit{incertidumbreabsoluta}}{\textit{valormedido}} * 100\%, \quad (\text{E.17})$$

en este caso se tiene la incertidumbre relativa porcentual

$$\frac{\delta\phi}{\phi} = \frac{\sqrt{\frac{S_{b_0} - S_{d_0}}{S_{b_0}^2 S_{d_0}}} \delta S_b}{2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{S_{d_0}}{S_{b_0}}}\right)} * 100\%. \quad (\text{E.18})$$

Referencias

- [1] G. WOOD, Michael F., GHOSH, Nirmalya, WALLENBURG, Marika A., LI, Shu-Hong, WEISEL, Richard D., WILSON, Brian C., LI, Ren-Ke and VITKIN I. Alex. "Polarization birefringence measurements for characterizing the myocardium, including healthy, infarcted, and stem-cell-regenerated tissues". *Journal of Biomedical Optics*. Jul/August 2010 vol 15(4), 047009 p. 047009-1 - 047009-9.
- [2] CENSE, Barry, CHEN, Teresa C., PARK, B. Hyle, PIERCE, Mark C. and F. de BOER, Johannes. "Thickness and Birefringence of Healthy Retinal Nerve Fiber Layer Tissue Measured with Polarization-Sensitive Optical Coherence Tomography". *Investigative Ophthalmology & Visual Science*. August 2004 vol. 45, núm. 8 p. 2606-2612.
- [3] GÅSVIK, Kjell J. *Optical Metrology*. 3a ed. Chichester: England. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2002. ISBN: 0-470-84300-4
- [4] PEATROSS, Justin and WARE, Michael. *Physics of light and optics*. Provo, Utah: EUA. Brigham Young University, 2006.

REFERENCIAS

- [5] FOWLES, Grant R. *Introduction to modern optics*. 2a ed. New York, N.Y.: EUA. Dover publications Inc. 1989. ISBN: 0-486-65957-7
- [6] DIETER MÖLLER, Karl. *Optics learning by Computing, with model examples using MathCad, MATLAB, Mathematica and Maple*. 2a ed. Germany. Springer. 2007. ISBN: 978-0-387-26168-3
- [7] *Assessment of the State-of-the-art for process monitoring sensors for polymer composites*. HUNSTON, Donald (col.), McDONOUGH, Wanter (col.), FANCONI, Bruno (col.), MOPSIK, Fred (col.), WANG, Francis (col.), PHELIAN, Fred (col.), CHIANG, Martin (col.). U.S. Department of commerce National Institute of Standards and Technology. Diane Publishing 1992. ISBN: 0941375986
- [8] BERNARDO, Luis M. and D. SOARES, Olivério D. “Birefringence measurements by double speckle photography ”. *Applied Optics*. 1 March 1987. vol. 26, núm. 5. p 769-772.
- [9] COLOMB, Tristan, CUCHE, Etienne and DEPEURSINGE Christian, “Birefringence measurements by use of digital holographic microscopy: examples with fiber optics and concrete samples”. *Proc. SPIE 5856, Optical Measurement Systems for Industrial Inspection IV, 1022*. 03 August 2005. doi:10.1117/12.612599
- [10] EISNER, Dox Melloni. *Diccionario Médico Ilustrado de Melloni*. Barcelona: España. Editorial Reverté S.A. 1983. ISBN: 84-291-5548-1

REFERENCIAS

- [11] BOUMA, Brett E. (ed.), TEARNEY, Guillermo J. (ed.). *Handbook of Optical Coherence Tomography*. New York: N.Y.: EUA. Marcel Dekker, Inc. 2002. ISBN: 0-8247-0558-0
- [12] FERCHER, A. F., DREXLER, W., HITZENBERGER, C. K. and LASER, T. "Optical coherence tomography - principles and applications". *Institute of Physics Publishing, Reports on progress in physics*. 2003 vol. 66, p. 239-303.
- [13] HECHT, Eugene y ZAJAC, Alfred. *Óptica*. Malacara H., Daniel (ver. esp.); Veas, Fernando (col.); Latorre, Víctor (col). 1a ed. Fondo educativo interamericano S.A., 1977.
- [14] MICKELVEY, John P. *Física del estado sólido y de semiconductores*. Corona Rodriguez, Hortensia(ver. esp.); Resendiz Rodriguez, Francisco(rev.). 1a ed. México D.F. México. Noriega Limusa, 1976. ISBN 968-18-0431-7
- [15] KÖNNEN G. P. *Polarized light in nature*. New York. N. Y.: EUA. University of Cambridge, 1985. ISBN: 0-521-25862-6
- [16] American Academy of Ophthalmology, *Óptica clínica. 2011-2012: Sección 3*. España. Elsevier. 2011. ISBN: 8490221421
- [17] Topics in Applied Physics vol 77. *Photomechanics*. Rastogi, Pramod K. (Ed.). Germany. Springer. 2000. ISBN: 3-540-65990-0

REFERENCIAS

- [18] JING-FUNG, Lin. “Concurrent measurement of linear and circular birefringence using rotating-wave-plate Stokes polarimeter”. *Applied Optics*. 2008, vol. 47, núm. 25, p. 4529-4539.
- [19] RANDOLPH, John F. *Calculo Geometría analítica Vectores*. Ordoñez Reyna, Luis (trad.). 1a ed. en español. México, D.F.: México. Compañía Editorial Continental S.A., 1971.
- [20] WEXLER, Charles. *Geometría analítica un enfoque vectorial*. Blumowicz Perelberg, Susana (trad.); Alonso, Santiago (rev.). 1a ed. en español. Barcelona: España. Montaner y Simon S.A., 1977. Primer ed. ISBN: 84-274-0290-2, reimposición 1977 ISBN: 84-274-0290-1
- [21] Ian J. Hodgkinson and Qui Hong Wu, *Birefringent thin films and polarizing elements*. 1a ed. London: England. World scientific publishing Co. Pte. Ltd, London, 1997.
- [22] KLIGER, David S., LEWIS, James W. and RANDALL, Cora E. *Polarized light in optics and spectroscopy*. 1a ed. San Diego: EUA. Academic press. Inc, San Diego, 1990. ISBN: 0-12-414975-8
- [23] WANG, Lihong V. and WU, Hsin-I. *Biomedical optics. Principles and imaging*. 1a ed. New Jersey: EUA. John Wiley & Sons Ltd, Chichester, 2007. ISBN: 0470177004
- [24] BAIRD, D. C. *Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Castro Peña, Jesús (trad.); González Menéndez, Juan América (rev. tec.). 2a ed. Edo. de México: México. Prentice-Hall Hispanoamerica, S.A., 1991. ISBN: 968-880-223-9