UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS
"Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez"

ESTRUCTURAS DE BANDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS EN 2D CON SUPERFICIES RUGOSAS USANDO UN MÉTODO INTEGRAL

TESIS

Para obtener el grado de

LICENCIADA EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS

PRESENTA:

THALÍA PALOMA CENTENO JIMÉNEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Doctor en Ciencias en Óptica
HÉCTOR I. PÉREZ AGUILAR

Morelia, Michoacán, Agosto de 2014

RESUMEN

En el presente trabajo mostramos un estudio teórico y numérico para calcular la estructura de bandas de un Cristal Fotónico por medio de dos métodos rigurosos.

La primera técnica es el método de expansión de ondas planas, el cual está limitado para sistemas periódicos con geometrías complicadas. Este método consiste en hacer una expansión en serie de Fourier las funciones periódicas que definen a la función dieléctrica y al campo eléctrico o magnético. Estas expansiones se utilizan en la ecuación de onda para obtener una ecuación de valores propios y su solución da como resultado la estructura de bandas fotónicas. Aplicamos este método para estudiar un cristal fotónico unidimensional formado por un sistema de multicapas infinito, variando el número de ondas, la longitud de las capas que modelan la celda unitaria y el índice de refracción que caracterizan los materiales.

La segunda técnica es el método de la ecuación integral que tiene una gran ventaja en comparación de otros métodos; la cual es sólo tener en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos de la celda unitaria y de su inclusión, permitiendo una menor cantidad de recursos computacionales. Además el método integral permite estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas; en particular la rugosidad aleatoria en la superficie de los cristales fotónicos. Aplicamos este método para calcular la estructura de bandas de un cristal fotónico bidimensional infinito formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones arbitrarias que tienen una superficie suave o aleatoriamente rugosa. Estas estructuras fueron analizadas para los casos de la polarización del campo eléctrico transversal (TE) y del campo magnético transversal (TM). Este estudio numérico se hizo para diferentes tipos de materiales dieléctricos variando las fracciones de llenado y el grado de la rugosidad. Los resultados muestran que se puede tener un control mayor de la propagación de la luz a través de un cristal fotónico finito con geometrás especiales como la hipocicloide o la epicicloide. Por otro lado, la rugosidad aleatoria en la superficie de las inclusiones modifica la estructura de bandas del caso ideal (superficies suaves), lo cual es importante tomar en cuenta en la fabricación de los cristales fotónicos.

Palabras Clave: Cristales fotónicos, Estructuras de bandas fotónicas, Método de expansión de ondas planas, Método de la ecuación integral, Superficies aleatoriamente rugosas.

ABSTRACT

In the present work we show a theoretical numerical study to calculate the band structure of a Photonic Crystal by means of two rigorous methods.

The first technique is the plane wave expansion method, which is limited to systems with complicated periodic geometries. This method consist in making a Fourier series expansion of the periodic functions that define the dielectric function and the electric or magnetic field. This expansions are used in the wave equation to obtain an eigenvalue equation and his solution give as a result the photonic band structure. We apply this method to study a one dimensional photonic crystal made of a infinity multilayer system, varying the wave number, the length of the layers that model the unitary cell and the index of refraction that characterize the materials.

The second technique is the integral equation method that has a great advantage over other methods; which is taking into account only a finite number of sample points over the contour of the primitive cell and his inclusion, allowing a minor use of computational resources. The integral method also allows the of study different aspects of these systems that has complicated geometries; in particular the random roughness in the surface of a photonic crystal. We apply this method to calculate the band structure of a infinity bidimensional photonic crystal made by one square unitary cell with arbitrary inclusions that have a smooth surface or randomly rough surface. These structures were analyzed in the case of the transverse electric field polarization (TE) and the transverse magnetic field polarization (TM). This numerical study was made for different kinds of dielectric materials varying the filling fraction and the grade of roughness. The results show that we can have a better control of the light propagation through a photonic crystal with especial geometries like the hypocycloid or the epicycloid. Furthermore, the random roughness in the surface of the inclusions modifies the band structure of the ideal case (smooth surfaces), which is important to consider in the manufacture of photonic crystals.

Keywords: Photonic crystals, Photonic band structures, Plane wave expansion method, Integral equation method, Randomly rough surfaces.

Dedicatoria

A esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron para brindarme su ayuda y compañía. De todo corazón esta tesis se las dedico a ustedes.

En primer lugar a mi madre María de Jesús por ser la persona que me ha acompañado durante todos estos años, por tu apoyo y consejos que he recibido al paso de la vida.

A mi hermano Diego Centeno por su amistad y su alegre compañía, de quien espero se sienta muy orgulloso de mi, así como yo de él.

Por último, pero no menos importante a César Léon por ayudarme y motivarme en la realización de esta tesis, por tenerme tanta paciencia en todo momento, por tu comprensión y constante apoyo, por ser un gran compañero, pero sobre todo por tus sacrificios para que yo pudiera cumplir con mi trabajo. Gracias a todo esto puedo decir que esta tesis lleva gran parte de ti.

Agradecimientos

De manera especial agradezco al Dr. Héctor Pérez Aguilar, asesor de esta tesis, por su ayuda y consejos en la realización de este trabajo.

A la coordinación de Investigación Científica de la UMSNH que me apoyo con una beca del proyecto de investigación 9.33.

A mis compañeros y amigos José, Geraldine, Joss, David, Oyuki, Beto, Agusto, Héctor (teto), Alejandra, Hugo, Nayeli, Claudia, Adriana, Gabino, Sergío, ... por su apoyo y compañia en buenos y malos momentos en el transcurso de mi carrera.

Pero sobre todo a mi fiel y mejor amigo Curco, por que siempre está conmigo y hace de mis días los mejores.

Contenido

Página

Resumen **i**

Abstract **ii**

Dedicatoria **iii**

Agradecimientos **iv**

Contenido **v**

Lista de Figuras **vii**

I. INTRODUCCIÓN **1**
I.1. Estructura de la tesis 6

II. MÉTODO DE EXPANSIÓN DE ONDAS PLANAS **8**
II.1. Conceptos preliminares 9
II.1.1. Planteamiento del problema 9
II.1.2. Los cristales 10
II.2. Método de expansión de ondas planas 15
II.2.1. Serie de Fourier para la función dieléctrica 17
II.2.2. Ecuación de valores propios 20
II.2.3. Representación matricial de la ecuación de valores propios 24
II.3. Estructuras de bandas de un CF1D 26

III. MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL **31**
III.1. Descripción del método de la ecuación integral 31
III.1.1. Ecuación de onda 32
III.1.2. Función de Green para la ecuación de Helmholtz 34
III.1.3. Segunda identidad de Green 35
III.1.4. Representación integral de la ecuación de Helmholtz 36
III.1.5. Discretización de las integrales 38
III.1.6. Sistema de una interfaz simple entre dos medios dieléctricos . 44

IV. ESTRUCTURA DE BANDAS DE UN CRISTAL FOTÓNICO EN 2D **49**
IV.1. Cristal Fotónico en 2D 49

Contenido (continuación)

Página

IV.2. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusión arbitraria 54
IV.2.1. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusión cuadrada . 54
IV.2.2. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusión cilíndrica 60
IV.2.3. Estructuras de bandas de un CF2D con una inclusión con geometrías especiales 63
IV.2.4. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusiones aleatoriamente rugosas 66

V. CONCLUSIONES 74

REFERENCIAS 78

A. CONDICIONES DE FRONTERA 80
A.1. Caso TE (polarización s) 81
A.2. Caso TM (polarización p) 82

B. FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ 84
B.1. Función de Green tridimensional 84
B.2. Función de Green bidimensional 87

C. PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS EN EL PLANO: LONGITUD DE ARCO 89
C.1. Longitud de arco 89
C.2. Derivadas de primer orden 90
C.3. Curvatura: derivadas de segundo orden 93

D. VECTORES NORMAL Y TANGENTE DE UNA RECTA, DE UNA REJILLA SINUSOIDAL Y DE UNA CIRCUNFERENCIA 97
D.1. Línea recta en el plano $x - y$ 97
D.2. Rejilla sinusoidal 98
D.3. Circunferencia en el plano $x - y$ 99

Lista de Figuras

Figura		Página
1	(a) Dispositivos electrónicos a escala nanométrica usados en dispositivos móviles. (b) Fotodetector nanofotónico de avalancha que utiliza la luz para enviar una gran cantidad de información entre chips consumiendo menos energía.	2
2	Fotografía de un cristal fotónico en 1D, 2D y 3D.	3
3	Las alas de la mariposa, los escarabajos, las plumas de los pavo reales y los ópalos contienes una microestructura periódica natural responsable del color iridiscente. Estas estructuras representan un cristal fotónico natural.	4
4	Cristal fotónico en 1D, 2D y 3D.	9
5	Cristales en 2D (a) Cristal con un moño rojo en cada punto de la red cristalina, (b) Cristal con dos átomos en cada punto de la red.	11
6	Representación de la red cristalina en 3D.	11
7	Construcción de la celda de Wigner-Seitz.	13
8	Celdas unitarias y primitivas.	13
9	Red cristalina, recíproca y PZB para un cristal en 1D.	15
10	Construcción de una celda primitiva en el espacio recíproco utilizando la propuesta de Wigner y Seitz.	16
11	Diagrama de un cristal fotónico unidimensional infinito. La celda unitaria de longitud $L = l_1+l_2$ está formado por dos materiales de constantes dieléctricas ε_1 y ε_2.	17
12	Función dieléctrica en el espacio real para (a) N=10, (b) 100, (c) 500 y (d) 1000 ondas planas.	20
13	Representación de las componentes perpendicular y paralelo de la función de Bloch.	22
14	(a) y (c) Función dieléctrica en el espacio real y sus estructuras de bandas fotónicas ((b) y (d)) para un sistema de multicapas infinito con dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 4.7$ y $\varepsilon_2 = 4.5$. Los cálculos se obtuvieron para los números de ondas (a)-(b) $N = 21$ y (c)-(d) $N = 2001$.	27

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

15 Estructura de bandas fotónicas para un sistema de multicapas infinito con índices de refracción $n_1 = 1.61$ y $n_2 = 1.3$ y longitudes de la celda (a) $l_1 = 3$ y $l_2 = 3$, (b) $l_1 = 2$ y $l_2 = 8$, (c) $l_1 = 12$ y $l_2 = 1$, (d) $l_1 = 4$ y $l_2 = 60$. 28

16 Estructuras de bandas fotónicas para un sistema de multicapas infinito con dos materiales distintos de índices de refracción (a) $n_1 = 1.61$ y $n_2 = 1.3$, (b) $n_1 = 2.4$ y $n_2 = 1.44$, (c) $n_1 = 3.3$ y $n_2 = 1.3$, y (d) $n_1 = 11.4$ y $n_2 = 1.67$. 29

17 (a) Celda unitaria de un CF1D con defectos periódicos sobre su superficie. (b) Celda unitaria de un CF2D con una celda cuadrada y una inclusión de forma arbitraria. 32

18 Celda unitaria de un CF2D con una red cuadrada y una inclusión de forma arbitraria con su vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ perpendicular al contorno. . . 38

19 Interfaz formada por dos medios con constantes dieléctricas ε_1 y ε_2. . . 45

20 Celda unitaria de un CF2D con una red cuadrada y una inclusión de forma arbitraria. Como en el CF1D, tenemos dos materiales distintos. Los materiales son limitados por los contornos Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d y Γ_e cuyos vectores normales hacia afuera del medio 1 son mostrados. 50

21 Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas con dos materiales con constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. Para las fracciones de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$, para el caso de la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 55

22 Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas con dos materiales con constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. Para las fracciones de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d)$f = 0.78$, para el caso de la polarización TE. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 56

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

23 Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas con dos materiales distintos de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$. La fracción de llenado es $f = 0.57$ para la polarización TE. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 58

24 Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas para dos materiales distintos de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$. La fracción de llenado es $f = 0.57$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 59

25 Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas para dos materiales diferentes de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 10.89$ y $\varepsilon_2 = 1.69$, (b) $\varepsilon_1 = 129.96$ y $\varepsilon_2 = 2.78$. La fracción de llenado es $f = 0.57$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 60

26 Estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada con una inclusión cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, variando la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$, para el caso de la polarización TE. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 61

27 Estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con una inclusión cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. Variando la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 62

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

28 Estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con una inclusión cilíndrica de contorno sólido para dos materiales distintos de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$ con una fracción de llenado $f = 0.57$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 63

29 Celda unitaria cuadrada que tiene como inclusiones (a) una hipocicloide de tres ramas, (c) una hipocicloide de cinco ramas y (e) una epicicloide de cuatro ramas, con sus respectivas estructuras de bandas para un CF2D. El recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k. 65

30 Celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene una inclusión cuadrada con una superficie aleatoriamente rugosa con las fracciones de llenado (a) $f = 0.12$ y (c) $f = 0.78$. ((b) y (d)) Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cuadrada con superficies rugosas formada por dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ para la polarización TE, respectivamente. El recuadro derecho inferior muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k. 67

31 (a) Celda unitaria cuadrada de un CF2D con una inclusión cuadrada con una superficie rugosa. Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cuadrada para dos materiales distintos de constantes dieléctricas (b) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (c) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$, con una fracción de llenado $f = 0.57$ bajo la polarización TE. El recuadro derecho inferior muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k. . 69

32 Celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene una inclusión cilíndrica con una superficie aleatoriamente rugosa (a) con una longitud de correlación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.0213$, (c) $a = 0.025$ y $\delta = 0.005$. ((b) y (d)) Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cilíndrica con superficies rugosas formado por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ y con una fracción de llenado $f = 0.57$, para la polarización TE. En el recuadro derecho inferior se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k. 70

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

33 (a) Celda unitaria cuadrada de un CF2D con una inclusión cilíndrica con una superficie rugosa. Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ con una fracción de llenado $f = 0.12$, (b) para la polarización TE, (c) para la polarización TM. En el recuadro derecho inferior se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k. 71

34 (a) Celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene una inclusión cilíndrica con una superficie rugosa. Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ con una fracción de llenado $f = 0.12$, (b) para la polarización TE, (c) para la polarización TM. En el recuadro derecho inferior se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k. 72

35 Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cilíndricas con una superficie aleatoriamente rugosa, considerando dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (a) para la polarización TE, (b) para la polarización TM y para las constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$, (c) para la polarización TE, (d) para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente. 73

36 Representación de los vectores normal y tangente a la curva en el punto P. 90

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

Uno de las aplicaciones importantes de la tecnología es la comunicación entre las personas mediante computadoras, internet inalámbrico, télefono celular, etc. Sin embargo, día a día buscamos mejorar la tecnología por una más moderna, accesible y de rápida respuesta. Uno de los mejores motivos que podemos dar como ejemplo, del por qué nos interesa tanto mejorar la respuesta rápida en la tecnología, son los segundos o minutos que tenemos que esperar para que nuestra computadora se inicialice o ejecute alguna aplicación y/o programa, lo cual consume una parte razonable de nuestro tiempo. Por tal razón, vemos la necesidad de buscar procesadores más rápidos que cumplan el interés de nuestras tareas.

A pesar de la extraordinaria rapidez que existe actualmente en los procesadores para realizar cálculos, los programas de software son cada vez más complejos, de manera que la demanda por procesadores más rápidos y de arquitectura más compleja va en aumento continuamente. En base a esto se busca desarrollar tecnologías alternativas, por medio de la nanotecnología. La nanotecnoligía es una ciencia que trabaja con los materiales y la física del estado sólido contribuyendo a la miniaturización que ofrece cambios tecnológicos vertiginosos en nuestra vida cotidiana. De esta manera, esta tecnología

permite fabricar nuevos materiales en una escala nanométrica aumentando la velocidad de la transmisión y el almacenamiento de la información.

Uno de los tantos usos de la nanotecnología está dado en los componentes electrónicos; principalmente en los transitores y diodos. Actualmente, se han fabricado dispositivos electrónicos con estos elementos, que gracias al tamaño nanométrico podemos gozar de dispositivos móviles u ordenadores portátiles más ligeros, rápidos, de mayor capacidad y menor consumo de energía (Fig.1(a)).

(a) (b)

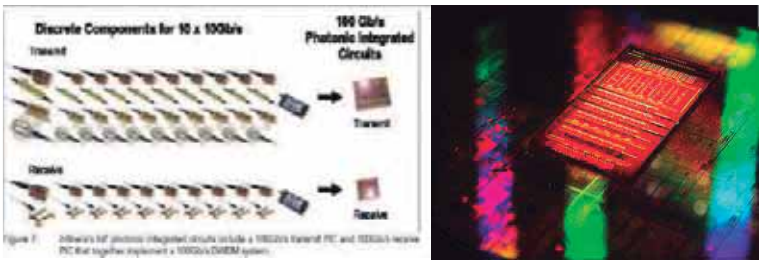

Figura 1. (a) Dispositivos electrónicos a escala nanométrica usados en dispositivos móviles. (b) Fotodetector nanofotónico de avalancha que utiliza la luz para enviar una gran cantidad de información entre chips consumiendo menos energía.

Una de las ramas de la nanotecnología es la nanoelectrónica que hace uso de la espintrónica, conocida como la nueva electrónica basada en el espín de un electrón. La espintrónica facilita la fabricación de dispositivos más rápidos, eficientes y con mayor almacenamiento; ya que al presentar la propiedad de que el espín tiene asociado un campo magnético semejante al de un imán en una barra (Navarro, 2011), permite almacenar y transferir el doble de datos por electrón. Así que la espintrónica se puede utilizar para tener acceso rápidamente a la información almacenada magnéticamente durante una operación informática. Una de sus principales aplicaciones son las memorias MRAM (*Magnetic Random Access Memory*) usadas para el almacenamiento de información, que actualmente es considerada como una tecnología dominante para todo tipo de memorias.

Por otro lado, en el campo de las telecomunicaciones, los conductores de cobre han sido substituidos por fibras ópticas para la transmisión de señales. De hecho el uso de fibras ópticas tiene una gran capacidad para satisfacer muchas necesidades presentes y futuras de la humanidad, en cuanto a la comunicación se refiere; sin embargo, el hecho de que, por ejemplo, la velocidad de envío de señal vía Internet sea lenta se debe en gran parte a que al ingresar la señal óptica en los dispositivos de proceso electrónicos, ésta debe convertirse en señal eléctrica. Por esta razón se busca una nueva alternativa de desarrollo en la tecnología de telecomunicaciones que sea puramente fotónica. Aquí es donde el estudio de circuitos fotónicos y particularmente de cristales fotónicos (CFs) se hace necesario que es el objetivo principal de este trabajo de investigación (Yablonovitch, 1987). Los cristales fotónicos son materiales nanoestructurados con propiedades exclusivas, los cuales están constituidos por un arreglo periódico de distintos materiales, ya sea de una (1D) (Winn *et al.*, 1998; Ding *et al.*, 2010), dos (2D) (Lin y Arjavalingam, 1994; Vetrova *et al.*, 2010) o tres dimensiones (3D) (Joannopoulos *et al.*, 1997; Kawashima *et al.*, 2009) como se muestra en la Fig. 2.

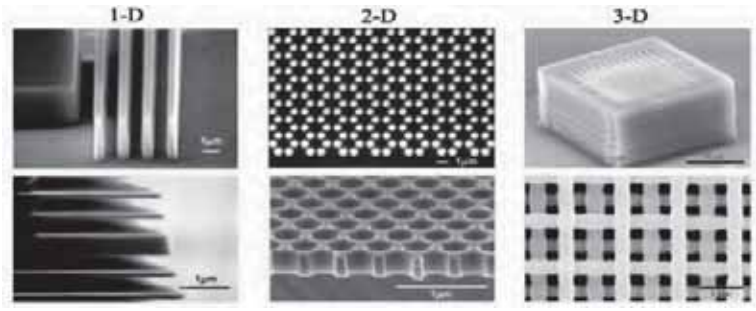

Figura 2. Fotografía de un cristal fotónico en 1D, 2D y 3D.

En la naturaleza podemos apreciar cristales fotónicos naturales, como es en los escarabajos, en las alas de las mariposas, en las plumas de los pavo reales o en los

ópalos. Todas estas representaciones naturales presentan estructuras microscópicas similares a cristales fotónicos, los cuales tienen un arreglo periódico de capas que puede reflejar la luz y absorber otros colores generando un color iridiscente.

Figura 3. Las alas de la mariposa, los escarabajos, las plumas de los pavo reales y los ópalos contienes una microestructura periódica natural responsable del color iridiscente. Estas estructuras representan un cristal fotónico natural.

La investigación en cristales fotónicos ha llegado a un punto tal de maduración que ya se tienen nuevas tecnologías de nano-fabricación consiguiendo las primeras aplicaciones prácticas de elevado impacto tecnológico (Yablonovitch, 2009; Vlasov *et al.*, 2005; Zhou y Biswas, 2008). Con estos resultados se busca el control totalmente óptico de la información en un circuito, con la idea de desarrollar novedosas aplicaciones tecnológicas, que tendrán grandes ventajas sobre los dispositivos electrónicos convencionales en la miniaturización de circuitos como se muestra en la Fig. 1(b). Por otra parte, estos dispositivos podrían ser la piedra angular de nuevas computadoras ópticas que superarían las limitaciones impuestas por la progresiva miniaturización de los actuales procesadores de silicio. Asimismo, se tendría una gama de aplicaciones en espectroscopia, metrología, biomedicina, imágenes y telecomunicaciones.

Los cristales fotónicos fueron planteados a finales de los años ochenta como una posible solución al control de la emisión espontánea y a la localización de la luz (Yablonovitch, 1987; John, 1987). Sin embargo, sólo en los últimos años se han conseguido las primeras aplicaciones prácticas de elevado impacto tecnológico, como son los láseres de CFs o

las guías de onda nanoestructuradas con bandas prohibidas (Foresi *et al.*, 1997; Vlasov *et al.*, 2001). Estas estructuras dieléctricas poseen una modulación periódica del índice de refracción, siendo su periodo del orden de la longitud de onda del campo electromagnético en el rango óptico. Esta disposición periódica provoca un comportamiento de los fotones en su interior similar al de los electrones en la estructura cristalina de un semiconductor (Korvink y Greiner, 2002). La propiedad más relevante de los CFs es la posibilidad de presentar bandas prohibidas produciendo efectos no observados en la óptica tradicional (Yablonovitch, 1987; Joannopoulos *et al.*, 2008; Sakoda, 2001).

Uno de los estudios de la propagación de la luz en CFs se basa en métodos numéricos, algunos de los cuales se aplicaron primero en física del estado sólido para el estudio de estructuras de bandas electrónicas (Kittel y McEuen, 1976). El más citado puede ser el método de ondas planas (Archuleta-García *et al.*, 2007) que permite calcular las estructuras de bandas fotónicas que implican materiales sin dispersión y absorción. Sin embargo, una de las desventajas de este método es cuando los bordes afilados están presentes en las inclusiones de la celda unitaria y la expansión de la función dieléctrica, en términos de una serie de Fourier truncada, presenta problemas de convergencia aumentando los requisitos de memoria. Además de un alto contraste entre las propiedades de los materiales que componen, también el método produce cierta inestabilidad en las soluciones. Bajo este contexto, como objetivo principal de este trabajo de tesis es desarrollar un método integral (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006) que presenta algunas ventajas en comparación con el método de ondas planas y otros métodos; ya que tiene la capacidad de estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas como son las superficies aleatoriamente rugosas. En particular, una de las grandes ventajas es que no es necesario manipular y almacenar la información de los campos electromagnéticos dentro de las regiones limitadas por las fronteras. Como

veremos en el desarrollo de este trabajo, el formalismo propuesto ha sido considerado como una alternativa a los métodos existentes en el sentido de que da buenos resultados a diferencia de otros donde suelen fallar.

I.1. Estructura de la tesis

Este trabajo de tesis está desarrollado de la siguiente manera.

En el capítulo II se presentan los conceptos básicos que permiten analizar los sistemas cristalinos formados por un arreglo periódico. Para estudiar este tipo de sistemas se desarrolla el método de expansión de ondas planas analizando las ecuaciones de Maxwell por medio de un problema de valores propios, el cual nos permite obtener la estructuras de bandas de un cristal fotónico unidimensional (CF1D) formado por un sistema de multicapas con dos medios dieléctricos diferentes. Estas estructuras de bandas se obtuvieron a partir de la relación de dispersión en términos de la frecuencia reducida y el vector de onda reducido en la primera zona de Brillouin. Al final de este capítulo, presentamos los resultados de algunos casos que analizamos variando el número de ondas, las longitudes de las capas que forman la celda unitaria y los índices de refracción de los materiales utilizados.

En el tercer capítulo presentamos otro planteamiento teórico utilizado para estudiar las estructuras de bandas de un cristal fotónico bidimensional (CF2D) con geometrías arbitrarias. Este método se conoce como el método de la ecuación integral (Maradudin *et al.*, 1990; Mendoza-Suárez *et al.*, 2006; Pérez *et al.*, 2009). Considerando la invariancia del sistema en la dirección perpendicular a la celda unitaria y partiendo del segundo teorema integral de Green, se obtiene un par de ecuaciones integrales con las cuales se pueden determinar la estructura de bandas en términos de un par de funciones fuente. Dichas funciones fuente están definidas por el campo magnético y su derivada normal,

para el caso de la polarización TM, y como el campo eléctrico y su derivada normal, para la polarización TE, evaluados en la superficie de la celda cuadrada con una inclusión que tiene geometrías arbitrarias.

En el capítulo IV se aplica el método descrito en el capítulo III al problema de interés de esta tesis de investigación. En este capítulo presentamos los resultados numéricos de las estructuras de bandas para un CF2D con superficies suaves y rugosas aleatoriamente en la inclusión de una celda unitaria cuadrada con diferentes geometrías.

Finalmente, en el capítulo V se dan las conclusiones principales de esta tesis.

Capítulo II

MÉTODO DE EXPANSIÓN DE ONDAS PLANAS

En este capítulo describimos la formulación del problema y los conceptos básicos que permiten analizar los sistemas cristalinos que están formados por un arreglo periódico. Para describir este tipo de sistemas es necesario definir la red cristalina, la celda unitaria, la red de vectores, red recíproca, así como la primera zona de Brillouin son presentados y su esencia física y matemática es discutida en detalle por medio del método de expansión de ondas planas. Esta técnica numérica nos permite calcular la estructura de bandas de los Cristales Fotónicos más simples. Al final de este capítulo presentamos los resultados de algunos casos que analizamos como son la variación del número de ondas planas de la función dieléctrica, las longitudes de las capas que forman la celda unitaria y los índices de refracción de dos materiales dieléctricos diferentes.

II.1. Conceptos preliminares

II.1.1. Planteamiento del problema

En el campo de las telecomunicaciones, los conductores de cobre han sido substituidos por fibras ópticas para la transmisión de señales. Sin embargo, la velocidad de envío de la señal vía Internet es lenta se debe en gran parte a que al ingresar la señal óptica en los dispositivos de proceso electrónicos, ésta debe convertirse en señal eléctrica. Por esta razón se busca una nueva alternativa de desarrollo en la tecnología de telecomunicaciones que sea puramente fotónica. Aquí es donde el estudio de circuitos fotónicos y particularmente de Cristales Fotónicos se hace necesario. La propiedad más relevante de los CFs es la posibilidad de presentar bandas prohibidas generando efectos no observados en la óptica tradicional (Yablonovitch, 2009; Vlasov *et al.*, 2005; Zhou y Biswas, 2008). El estudio de dichas estructuras compuestas, que pueden ser diseñadas en una (1D), dos (2D) o tres dimensiones (3D) como se aprecia en la Fig. 4, está basado en métodos numéricos.

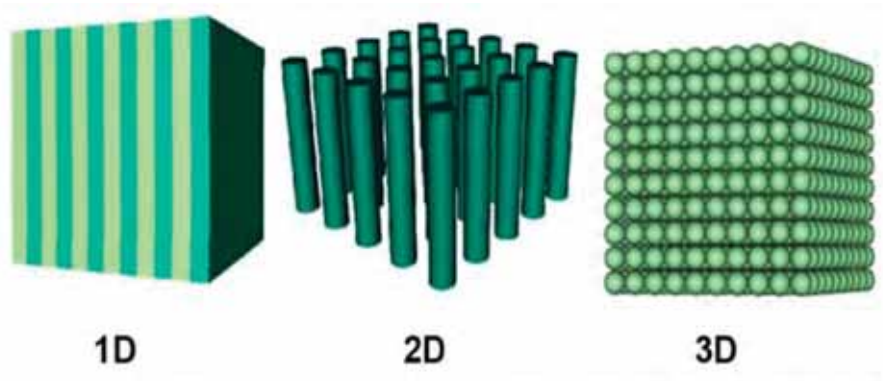

Figura 4. Cristal fotónico en 1D, 2D y 3D.

Uno de los más citado es el método de expansión de ondas planas que se presenta en este capítulo. Sin embargo, en el capítulo III se muestra otro método que permite considerar CFs con geometrías más complicadas.

A continuación, describiremos los conceptos básicos que permiten estudiar los cristales o arreglos periódicos. Para esto es necesario definir las Redes de Bravais, la Red cristalina, la Celda unitaria o convencional, la Base atómica y la Red recíproca o dual asociada a la Red cristalina (Kittel y McEuen, 1976).

II.1.2. Los cristales

Los cristales se caracterizan por poseer una estructura periódica infinita que puede estar formada por átomos, moléculas o iones (Kittel y McEuen, 1976). También podemos decir que es un sólido homogéneo formado en su interior por átomos constituyendo lo que se denomina una estructura cristalina. En la Fig. 5 mostramos dos ejemplos de un cristal en 2D formado por átomos iguales. En el primer caso los átomos están dibujados por moños rojos. Si a estos los asignamos como un punto se le conoce como base atómica, que al extraer los moños se obtiene la red cristalina y el conjunto de estos dos nos da el cristal en 2D, como se muestra en la Fig. 5(a). En el segundo caso mostramos un cristal formado por átomos diferentes, los cuales se representan por círculos de color azul y morado (Fig 5(b)). En este caso hay dos átomos que forman la base atómica, tal que al asignarle a estos dos átomos un punto y al extraer estos puntos se reconoce la red cristalina. Al colocar de nuevo ese conjunto de átomos de la base atómica en la red cristalina se reproduce nuevamente el cristal (como en el caso anterior). Así que un cristal se define como una red cristalina más una base atómica.

Debido a la periodicidad infinita de la estructura de un cristal, la información de un solo período es suficiente para definir toda la estructura, la cual se le conoce como celda unitaria. Esta celda es una sección del cristal que es trasladada sobre todas las posibles dimensiones que permite llenar todo el espacio del cristal. Por ejemplo, para el caso de 3D se caracteriza por tener tres vectores fundamentales que definen las tres

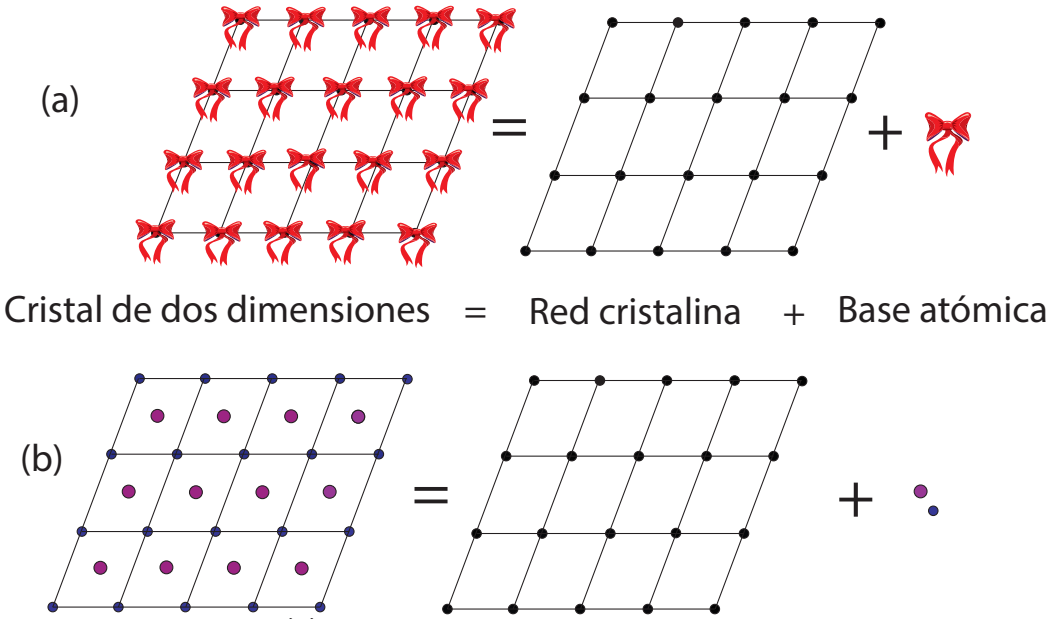

Figura 5. Cristales en 2D (a) Cristal con un moño rojo en cada punto de la red cristalina, (b) Cristal con dos átomos en cada punto de la red.

direcciones independientes del sistema de coordenadas de la celda. Similarmente para el caso de 2D se tiene dos vectores fundamentales en la celda unitaria.

En la Fig. 6 representamos la red cristalina en 3D, junto con su celda unitaria asociada a ella y sus tres vectores fundamentales con la magnitud de cada uno de ellos, cuya elección no es única.

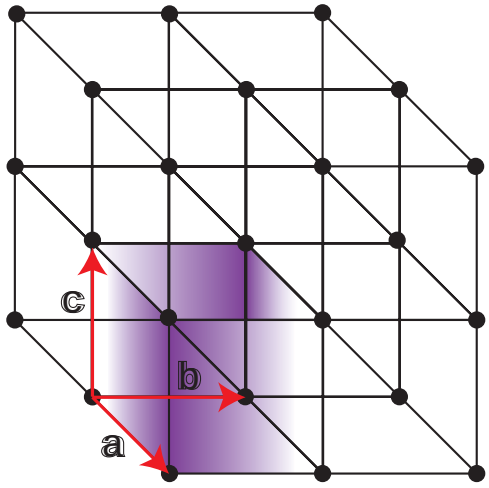

Figura 6. Representación de la red cristalina en 3D.

La forma general de la red de vectores fundamentales para el caso en 3D, esta dada de la siguiente manera:

$$\mathbf{R} = l\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + n\mathbf{a}_3, \tag{1}$$

donde l, m, n son enteros y $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ son los vectores fundamentales.

Una celda unitaria es primitiva si tiene solamente un punto de la red cristalina, ésta debe ser de menor o igual longitud, área o volumen dependiendo de la dimensión en el que se encuentre la celda. Un conjunto de puntos es una red de Bravais si es posible asignarle algún conjunto de vectores fundamentales que define una red primitiva. Por lo tanto, a todas las redes de Bravais se les puede asignar una celda primitiva, ya que los vectores fundamentales determinan la longitud, el área del paralelogramo o el volumen del paralelepípedo que ellos conforman.

Una manera de construir una celda primitiva es por medio de la propuesta de Wigner y Seitz (Kittel y McEuen, 1976). Para explicar esta construcción nos basamos en una red bidimensional como se muestra en la Fig. 7. Primero elegimos un punto de la red como origen, éste se une por medio de líneas con los puntos vecinos de la red. Después trazamos líneas perpendiculares que corten exactamente en el punto medio las líneas que unen los puntos más próximos. La longitud, el área o el volumen en 1D, 2D o 3D, respectivamente, encerrado por las líneas o planos que se interceptan es la celda de Wigner-Seitz. Esta celda es unitaria, primitiva e involucra la simetría del sistema cristalino al que pertenece.

Existen distintas maneras de tomar una celda unitaria, la cual no siempre va ser una celda primitiva. En la siguiente imagen (Fig. 8) tenemos cinco celdas distintas de las cuales 1,2,3 y 4 son unitarias, que se determinan por el paralelogramo formado por diferentes vectores fundamentales. El área de la quinta celda es el doble que el de las anteriores y tiene dos puntos de la red asociados a la celda unitaria, por lo tanto no es

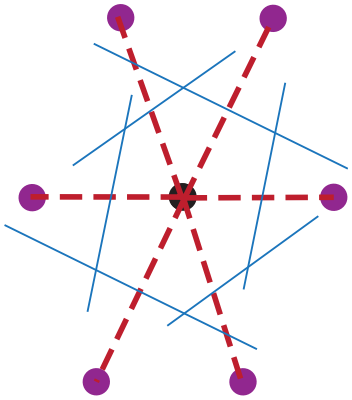

Figura 7. Construcción de la celda de Wigner-Seitz.

una celda primitiva.

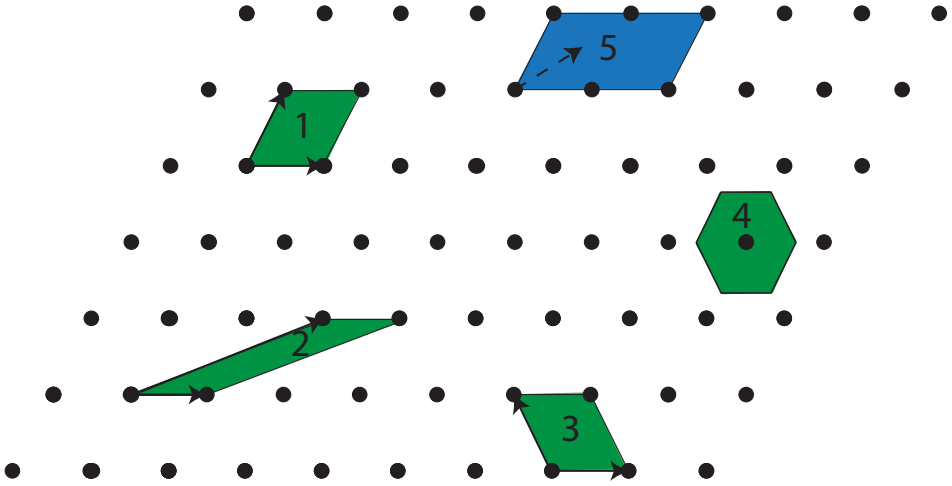

Figura 8. Celdas unitarias y primitivas.

De esta manera, un cristal puede generarse por las traslaciones de los vectores fundamentales en la red cristalina, de la celda unitaria o primitiva en las dimensiones del espacio en la que se encuentra. La simetría traslacional de la periodicidad de la red cristalina se le conoce como red recíproca; es decir, los vectores que generan una geometría en el plano real se traslada a otro espacio. En este espacio recíproco, las geometrías se transforman en otras o son las mismas pero rotadas. Matemáticamente consideramos un conjunto de puntos $\mathbf{R}$ (Ec. (1)) que constituye una red de Bravais y

una onda plana $e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{r}}$, donde $\mathbf{G}$ es el vector de la red recíproca definido como

$$\mathbf{G} = l\mathbf{b}_1 + m\mathbf{b}_2 + n\mathbf{b}_3, \tag{2}$$

donde l, m, n son enteros y $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ son la base de los vectores de la red recíproca primitiva. Si la onda plana tiene la misma periodicidad que la red de Bravais, entonces se satisface la ecuación

$$e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}} = 1 \quad \text{si} \quad \mathbf{G}\cdot\mathbf{R} = 2\pi n, \tag{3}$$

donde $\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}$ es la relación entre las proyecciones de los vectores fundamentales de las redes duales del espacio cristalino y recíproco. Así, podemos describir la red recíproca como el conjunto de todos los vectores de $\mathbf{G}$ que satisfacen esta identidad (Ec. (3)) para todas las posiciones del punto de la red de vectores $\mathbf{R}$. Así que las expresiones para el vector de la red recíproca primitiva están dadas de la siguiente manera:

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi\frac{\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a_3}},\ \mathbf{b}_2 = 2\pi\frac{\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a_3}},\ \mathbf{b}_3 = 2\pi\frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{a}_2\times\mathbf{a_3}}. \tag{4}$$

La celda de Wigner-Seitz en el espacio recíproco se le denomina Primera Zona de Brillouin (PZB). El cálculo de la PZB en una red unidimensional consiste en hallar las redes cristalina y recíproca generadas por los vectores $\mathbf{R} = l\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{G} = l\mathbf{b}_1$, donde l es un número entero. De acuerdo a la Ec. (3) calculamos $\mathbf{a}_1 = a\hat{x}$ y $\mathbf{b}_1$, tal que:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 2\pi \ \Rightarrow \mathbf{b} = \frac{2\pi}{a}\hat{\mathbf{x}}. \tag{5}$$

En la Fig. 9 observamos las redes cristalina y recíproca en 1D, donde la zona azul es la celda de Wigner-Seitz en el espacio recíproco que corresponde a la PZB. Los límites en la PZB están en $k = \pm\frac{\pi}{a}$, donde k es la magnitud del vector de onda.

En seguida, mostramos un ejemplo para el caso en 2D. Consideramos una celda unitaria hexagonal en la red cristalina, donde sus vectores fundamentales están dados

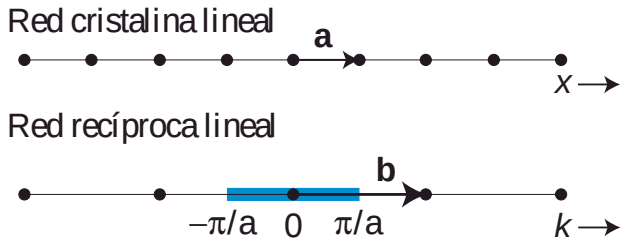

Figura 9. Red cristalina, recíproca y PZB para un cristal en 1D.

de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}_1 = a\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\sqrt{3}}{2}a\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{a_3} = c\hat{\mathbf{z}}. \tag{6}$$

Aplicando la Ec. (4) obtenemos los vectores recíprocos de la celda unitaria que también es hexagonal como se muestra en la Fig. 10,

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi\left(\frac{1}{a}\hat{\mathbf{x}} - \frac{1}{a\sqrt{3}}\hat{\mathbf{y}}\right), \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi\left(\frac{2}{a\sqrt{3}}\right)\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi\frac{1}{c}\hat{\mathbf{z}}. \tag{7}$$

Como esta celda ya se encuentra en el espacio recíproco, podemos aplicar el método de Wigner-Seitz para obtener la primera zona de Brillouin que podemos observar por las líneas trazadas de color azul en la Fig. 10.

Esto es importante para nosotros, ya que la red recíproca y la zona de Brillouin nos permiten obtener las bandas permitidas y prohibidas de un sistema cristalino como lo mostraremos en seguida con el primer método numérico considerado en esta tesis.

II.2. Método de expansión de ondas planas

El Método de Expansión de Ondas Planas es una técnica computacional usada en cristales fotónicos para resolver las Ecuaciones de Maxwell por medio de la formulación de un problema de valores propios (Archuleta-García *et al.*, 2007; Sukhoivanov y

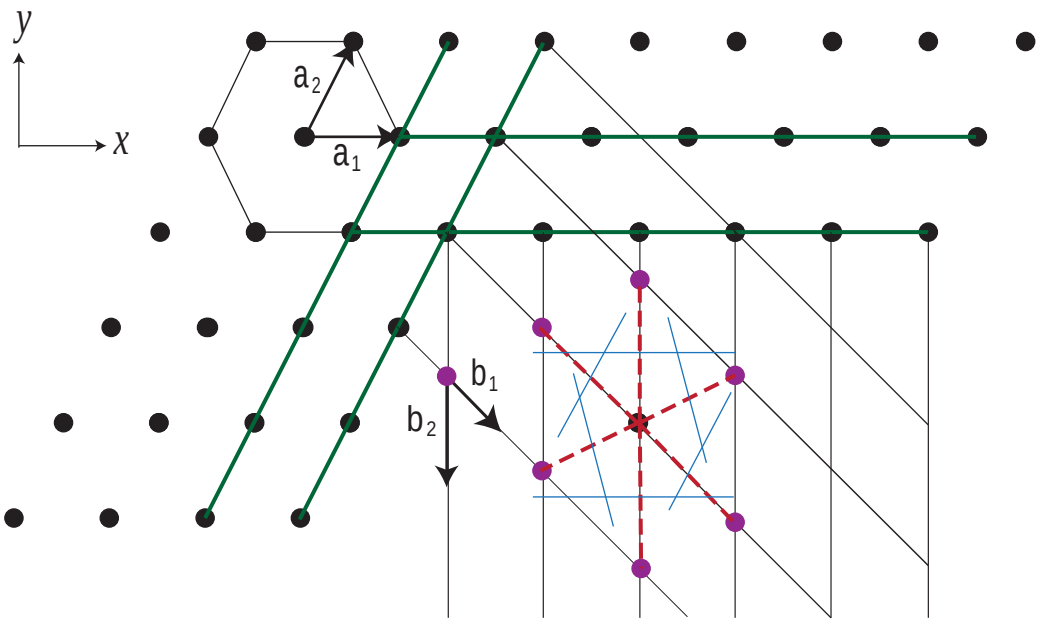

Figura 10. Construcción de una celda primitiva en el espacio recíproco utilizando la propuesta de Wigner y Seitz.

Guryev, 2009; Rivas y Solarte, 2008). En este método se expanden en serie de Fourier las funciones periódicas que definen a la función dieléctrica y al campo eléctrico. Estas expansiones se introducen en la ecuación de onda para obtener una ecuación de valores propios. A partir de la solución de la ecuación de valores propios se pueden obtener las estructura de bandas.

En este capítulo describimos una forma sencilla para obtener la estructura de bandas de un CF1D mediante el método de ondas planas. La idea de desarrollar este capítulo es para entender que significa una estructura de bandas, que es lo que describe y como puede ser calculada. Asimismo, como se hacen los algoritmos para realizar el cálculo numérico de un sistema de multicapas periódico e infinito. El desarrollo de este capítulo está distribuido de la siguiente forma. Primero se analiza la serie de Fourier para la función dieléctrica, y se plantea la ecuación de valores propios partiendo de la ecuación de onda electromagnética. Posteriormente, se hace una sencilla aplicación del método de expansión de ondas planas para calcular las estructuras de bandas fotónicas del

sistema propuesto con dos medios de índices de refracción diferentes.

Consideremos un sistema periódico e infinito tal y como se muestra en la Fig. 11. El sistema de multicapas está compuesto por capas alternas de dos materiales distintos, donde sus constantes dieléctricas (o índices de refracción) están expresadas como ε_1 y ε_2 cuyos espesores son l_1 y l_2 respectivamente. Se muestra una celda unitaria con longitud $L = l_1 + l_2$. El cristal como es un arreglo periódico e infinito se puede considerar como una repetición de la celda unitaria.

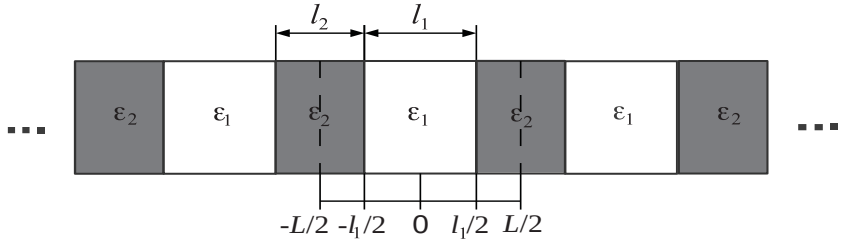

Figura 11. Diagrama de un cristal fotónico unidimensional infinito. La celda unitaria de longitud $L = l_1 + l_2$ está formado por dos materiales de constantes dieléctricas ε_1 y ε_2.

II.2.1. Serie de Fourier para la función dieléctrica

Sabemos que la función dieléctrica forma una red periódica infinita como se ilustra en Fig. 11. Esta función dieléctrica en la celda unitaria puede escribirse como:

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_2 & -\frac{L}{2} \leq x < -\frac{l_1}{2} \\ \varepsilon_1 & -\frac{l_1}{2} \leq x \leq \frac{l_1}{2} \\ \varepsilon_2 & \frac{l_1}{2} < x \leq \frac{L}{2} \end{cases} . \tag{8}$$

Toda función periódica puede expresarse en términos de una serie de Fourier. Así, para la función dieléctrica en la celda unitaria tenemos que:

$$\varepsilon(x) = \sum_G \varepsilon(G)\, e^{iG\cdot x}, \tag{9}$$

donde $G = \frac{2\pi N}{L}$ es la magnitud de un vector de la red recíproca, L es el período de la red y N puede tomar cualquier valor entero positivo o negativo. Para conocer

los coeficientes de la serie de Fourier, $\varepsilon(G)$ multiplicaremos ambos lados por $e^{-iG'x}$ e integraremos ambos lados la Ec. (9),

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varepsilon(x)\, e^{-iG'x} dx = \sum_{G} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varepsilon(G)\, e^{iGx} e^{-iG'x} dx. \tag{10}$$

Para resolver la integral derecha de la Ec. (10), la definimos como I_1:

$$I_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{iGx} e^{-iG'x} dx, \tag{11}$$

donde $G' = \frac{2\pi N'}{L}$. Agrupando las exponenciales, tenemos

$$I_1 = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(G-G')x} dx = \frac{1}{i(G-G')} e^{i(G-G')x} \Bigg]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}, \tag{12}$$

que evaluando los límites y sustituyendo los valores de G y G', obtenemos

$$I_1 = \frac{L}{\pi(N-N')} \left[\frac{e^{i\pi(N-N')} - e^{-i\pi(N-N')}}{2i} \right] = L \frac{\sin\left[\pi(N-N')\right]}{\pi(N-N')}. \tag{13}$$

Relacionando la Ec. (13) con la función $\delta(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, podemos escribirla como

$$I_1 = L\delta_{G,G'}. \tag{14}$$

Así que la Ec. (10) puede expresarse de la siguiente manera

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varepsilon(x)\, e^{-iG'x} dx = \sum_{G} L\varepsilon(G)\, \delta_{G,G'}, \tag{15}$$

por lo que tenemos

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varepsilon(x)\, e^{-iG'x} dx = L\varepsilon(G'), \tag{16}$$

y finalmente el resultado es

$$\varepsilon(G) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \varepsilon(x)\, e^{-iGx} dx. \tag{17}$$

Para calcular los coeficientes primero planteamos el caso en que $G = 0$ y considerando los intervalos de la función dieléctrica (Ec. (8)),

$$\begin{aligned}\varepsilon(0) &= \frac{1}{L}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{l_1}{2}}\varepsilon_2 dx + \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}}\varepsilon_1 dx + \int_{\frac{l_1}{2}}^{\frac{L}{2}}\varepsilon_2 dx\right] \\ &= \frac{1}{L}\left[\varepsilon_2\left(\frac{-l_1}{2}+\frac{L}{2}\right)+\varepsilon_1\left(\frac{l_1}{2}+\frac{l_1}{2}\right)+\varepsilon_2\left(\frac{L}{2}-\frac{l_1}{2}\right)\right], \qquad (18)\end{aligned}$$

y agrupando términos obtenemos el coeficiente de Fourier

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_2 + f(\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \qquad (19)$$

donde f es la fracción de llenado y se define como $f = \frac{l_1}{L}$.

Para el caso de cualquier otro vector de $G \neq 0$, separamos nuevamente la integral en los intervalos en los cuales la función dieléctrica se conserva constante,

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) &= \frac{1}{L}\left[\int_{-\frac{L}{2}}^{-\frac{l_1}{2}}\varepsilon_2 e^{-iGx}dx + \int_{-\frac{l_1}{2}}^{\frac{l_1}{2}}\varepsilon_1 e^{-iGx}dx + \int_{\frac{l_1}{2}}^{\frac{L}{2}}\varepsilon_2 e^{-iGx}dx\right] \\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{\varepsilon_2}{G}i\left(e^{iG\frac{l_1}{2}}-e^{-iG\frac{l_1}{2}}\right)+\frac{\varepsilon_2}{G}i\left(e^{-iG\frac{L}{2}}-e^{iG\frac{L}{2}}\right)\right. \\ &- \left.\frac{\varepsilon_1}{G}i\left(e^{iG\frac{l_1}{2}}-e^{-iG\frac{l_1}{2}}\right)\right], \qquad (20)\end{aligned}$$

donde el segundo término es cero debido a la periodicidad $\left(L = \frac{2\pi n}{G}\right)$. Así obtenemos,

$$\begin{aligned}\varepsilon(G) &= (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\frac{1}{G\frac{l_1}{2}}\right)\frac{l_1}{L}\left(\frac{e^{iG\frac{l_1}{2}}-e^{-iG\frac{l_1}{2}}}{2i}\right) \\ &= (\varepsilon_1-\varepsilon_2)f\left(\frac{\sin\left(\frac{Gl_1}{2}\right)}{\frac{Gl_1}{2}}\right). \qquad (21)\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede escribir una expresión general para la función dieléctrica como

$$\varepsilon(G) = \left[\varepsilon_2 + f(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\right]\delta_{G,0} + \left[f(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left(\frac{\sin\left(\frac{Gl_1}{2}\right)}{\frac{Gl_1}{2}}\right)\right](1-\delta_{G,0}). \qquad (22)$$

Como un ejemplo de la representación de la función dieléctrica en términos de la serie de Fourier consideramos una celda unitaria formada por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 4.9$ (Baquelita) y $\varepsilon_2 = 4.7$ (Vidrio Pirex) de espesores $l_1 = 1$ y $l_2 = 3$, respectivamente. Presentamos en la Fig. 12(a)-(d) la serie de Fourier de la función dieléctrica para los casos $N = 10$, 100, 500 y 1000 ondas, respectivamente.

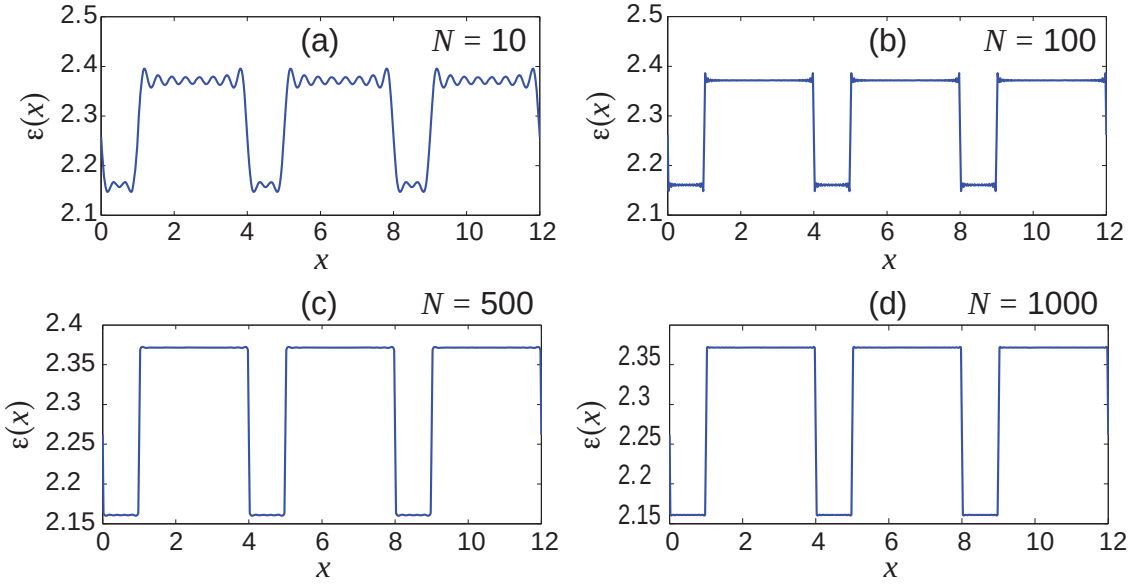

Figura 12. Función dieléctrica en el espacio real para (a) N=10, (b) 100, (c) 500 y (d) 1000 ondas planas.

En la Fig. 12, observamos que a medida de que el número de ondas planas aumenta, la función dieléctrica converge en el espacio real.

II.2.2. Ecuación de valores propios

Podemos aplicar este método en los CFs, ya que los campos eléctricos o magnéticos se expanden, para cada componente a lo largo del vector de la red recíproca en términos de la serie de Fourier. Para el caso TE (campo eléctrico transversal) la ecuación de onda está expresada de la siguiente manera,

$$\frac{1}{\varepsilon(x)}\left[\frac{\partial^2 E_z(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E_z(x,y)}{\partial y^2}\right]=-k^2 E_z(x,y)\,, \tag{23}$$

donde $k = \frac{n\omega}{c}$ es el número de onda, ω es la frecuencia, c la velocidad de la luz y n es el índice de refracción.

Como vimos en la sección anterior, la permitividad dieléctrica que es periódica a lo largo del vector de la red recíproca para CFs, también se puede expandir el inverso de la misma función a través de componentes de la serie de Fourier. Esta expansión en la dirección x la podemos representar como:

$$\beta(x) = \frac{1}{\varepsilon(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{\frac{i2\pi N}{L}x} = \sum_{G} \beta_G e^{iGx}. \tag{24}$$

Podemos obtener los coeficientes de Fourier de la expresión anterior, similarmente como se obtuvo para la Ec. (22)

$$\beta_G = \left[\frac{1}{\varepsilon_2} + f\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\right]\delta_{G,0} + \left[f\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{Gl_1}{2}\right)}{\frac{Gl_1}{2}}\right)\right](1 - \delta_{G,0})\,. \tag{25}$$

Como nuestro sistema es periódico (véase Fig. 11) consideramos el teorema de Bloch el cual trata el movimiento de todos los electrones de un sólido con una estructura periódica analizando únicamente el movimiento de un sólo electrón y estableciendo la forma de las funciones de ondas de los electrones. Análogamente, para fotones el teorema nos indica que los estados propios E_z de una onda electromagnética vienen dados por el producto de una onda plana y una función periódica de x y y, llamada función de Bloch, la cual se puede representar como:

$$E_z(x, y) = u_{k_x}(x)e^{i(k_x x + k_y y)} = u_{k_\perp}(x)e^{i(k_\perp x + k_\parallel y)}, \tag{26}$$

donde E_z es el estado propio de la onda electromagnética.

La parte exponencial representa la onda plana y u_k es la función periódica conocida como la función de Bloch dada por:

$$u_{k_\perp} = \sum_{G} E(k_\perp + G)e^{iGx}, \tag{27}$$

siendo $k_\perp$ la componente perpendicular y $k_\parallel$ la componente paralela del vector de onda de propagación como se muestra en la Fig. 13.

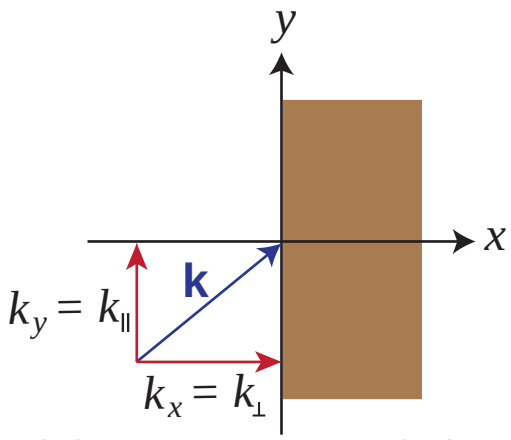

Figura 13. Representación de las componentes perpendicular y paralelo de la función de Bloch.

La función de Bloch tiene una periodicidad en x, que es la misma que la de la red cristalina. Por tanto, el campo eléctrico se puede representar como

$$E_z(x,y) = \sum_G E(k_\perp + G) e^{i[(k_\perp + G)x + k_\parallel y]}. \tag{28}$$

Para resolver la Ec. (23) sustituimos las expresiones en serie de $\beta\,(x)$ (Ec. (24)) y $E_z(x,y)$ (Ec. (28)) obteniéndose la ecuación de onda

$$\begin{aligned} \sum_G \beta_G e^{iGx} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{G'} E(k_\perp + G') e^{i[(k_\perp + G')x + k_\parallel y]} \right] \right. &+ \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\sum_{G'} E(k_\perp + G') e^{i[(k_\perp + G')x + k_\parallel y]} \right] \right\} &= \\ -k^2 \left[\sum_G E(k_\perp + G) e^{i[(k_\perp + G)x + k_\parallel y]} \right]. & \end{aligned} \tag{29}$$

Realizando las derivadas de la expresión anterior, tenemos

$$\sum_G \beta_G e^{iGx}\left\{\sum_{G'} E(k_\perp+G')(k_\perp+G')^2 e^{i[(k_\perp+G')x+k_\parallel y]} \quad + \right.$$
$$\left. \sum_{G'} E(k_\perp+G')k_\parallel^2 e^{i[(k_\perp+G')x+k_\parallel y]}\right\} \quad =$$
$$k^2\left[\sum_G E(k_\perp+G)e^{i[(k_\perp+G)x+k_\parallel y]}\right] \tag{30}$$

y agrupando términos expresamos la ecuación de onda de la siguiente manera:

$$\sum_{G,G'} \beta_G\left[(k_\perp+G')^2+k_\parallel^2\right]e^{i(G'+G)x}E(k_\perp+G') = k^2\sum_G E(k_\perp+G)e^{iGx}. \tag{31}$$

Ahora multiplicando la Ec. (31) por $e^{-iG''x}$ e integrando sobre la celda unitaria en el periodo L, obtenemos

$$\sum_{G,G'} \beta_G\left[(k_\perp+G')^2+k_\parallel^2\right]E(k_\perp+G')\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(G'+G-G'')x}dx = k^2\sum_G E(k_\perp+G)\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} e^{i(G-G'')x}dx, \tag{32}$$

que identificando las funciones delta, como se hizo en la Ec. (14), tenemos

$$\sum_{G,G'} \beta_G\left[(k_\perp+G')^2+k_\parallel^2\right]E(k_\perp+G')L\delta_{G'+G,G''} = k^2\sum_G E(k_\perp+G)L\delta_{G,G''}. \tag{33}$$

Aplicando el siguiente cambio de variable a la ecuación anterior

$$G'+G=G'' \;\Rightarrow\; G=G''-G',\ \text{donde } G'' \text{ es fija}, \tag{34}$$

y aplicando la delta de Dirac, podemos expresar la Ec. (33) de la forma

$$\sum_{G'} \beta_{G''-G'}\left[(k_\perp+G')^2+k_\parallel^2\right]E(k_\perp+G') = k^2E(k_\perp+G''). \tag{35}$$

Finalmente, cambiamos el índice G'' por G en la Ec. (35) obteniendo un problema de valores propios, el cual está representado por la siguiente ecuación:

$$\sum_{G'} \beta_{G-G'}\left[(k_\perp+G')^2+k_\parallel^2\right]E(k_\perp+G') = k^2E(k_\perp+G), \tag{36}$$

Por simplicidad consideramos que el término $k_{\|} = 0$ (incidencia normal), así que la ecuación anterior se reduce a la siguiente forma

$$\sum_{G'} \beta_{G-G'} \left[(k_\perp + G')^2 \right] E(k_\perp + G') = k^2 E(k_\perp + G), \tag{37}$$

donde el término de la parte derecha $E(k_\perp + G)$ son los coeficientes de Fourier de la ecuación de onda.

La Ec. (37) se resuelve mediante la construcción de una matriz encontrando sus vectores propios. Esto nos proporciona los coeficientes armónicos, con lo cual podemos determinar la estructura de bandas de un CF, como lo veremos en la siguiente sección.

II.2.3. Representación matricial de la ecuación de valores propios

El procedimiento para resolver la ecuación de valores propios es formulando una ecuación matricial. Para obtenerla desarrollamos el lado izquierdo de la Ec. (37),

$$\sum_{G'} \beta_{G-G'} \left[(k_\perp + G')^2 \right] E(k_\perp + G'). \tag{38}$$

Primero obtendremos la región central del sistema. Dejamos fija a G para el caso $N = 1$, variando el indice de G' para $N' = -1, 0, 1$,

$$\begin{aligned} \ldots + \beta_{G_1-G'_1} \left[(k_\perp + G'_1)^2 \right] E(k_\perp + G'_1) \quad + \\ \beta_{G_1-G'_0} \left[(k_\perp + G'_0)^2 \right] E(k_\perp + G'_0) \quad + \\ \beta_{G_1-G'_{-1}} \left[(k_\perp + G'_{-1})^2 \right] E(k_\perp + G'_{-1}) \quad + \quad \ldots \end{aligned}$$

Similarmente para el caso $N = 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
\ldots + \beta_{G_0 - G'_1} \left[(k_\perp + G'_1)^2 \right] E(k_\perp + G'_1) \quad + \\
\beta_{G_0 - G'_0} \left[(k_\perp + G'_0)^2 \right] E(k_\perp + G'_0) \quad + \\
\beta_{G_0 - G'_{-1}} \left[(k_\perp + G'_{-1})^2 \right] E(k_\perp + G'_{-1}) \quad + \quad \ldots
\end{aligned}$$

y por último desarrollamos el caso $N = -1$

$$\begin{aligned}
\ldots + \beta_{G_{-1} - G'_1} \left[(k_\perp + G'_1)^2 \right] E(k_\perp + G'_1) \quad + \\
\beta_{G_{-1} - G'_0} \left[(k_\perp + G'_0)^2 \right] E(k_\perp + G'_0) \quad + \\
\beta_{G_{-1} - G'_{-1}} \left[(k_\perp + G'_{-1})^2 \right] E(k_\perp + G'_{-1}) \quad + \quad \ldots
\end{aligned}$$

De manera general podemos expresar la Ec. (38) usando el valor de $G' = \frac{2\pi}{L} N'$

$$\begin{aligned}
\sum_{G'} \beta_{G-G'} (k_\perp + G')^2 E(k_\perp + G') = \\
\beta_{G - \left[N' \frac{2\pi}{L} \right]} \left[k_\perp + (+N') \frac{2\pi}{L} \right]^2 E \left(k_\perp + (+N') \frac{2\pi}{L} \right) \\
+ \ \beta_{G - \left[(N'-1) \frac{2\pi}{L} \right]} \left[k_\perp + (N'-1) \frac{2\pi}{L} \right]^2 E \left(k_\perp + (N'-1) \frac{2\pi}{L} \right) \\
+ \ldots
\end{aligned} \tag{39}$$

$$
\begin{aligned}
&+\ \beta_{G-\left[+1\frac{2\pi}{L}\right]}\left[k_\perp+(+1)\,\frac{2\pi}{L}\right]^2 E\left(k_\perp+(+1)\,\frac{2\pi}{L}\right)\\
&+\ \beta_{G-(0)}\left[k_\perp+(0)\,\frac{2\pi}{L}\right]^2 E\left(k_\perp+0\right)\\
&+\ \beta_{G-\left[(-1)\frac{2\pi}{L}\right]}\left[k_\perp+(-1)\,\frac{2\pi}{L}\right]^2 E\left(k_\perp+(-1)\,\frac{2\pi}{L}\right)\\
&+\ldots\\
&+\ \beta_{G-\left[(-N'+1)\frac{2\pi}{L}\right]}\left[k_\perp+(-N'+1)\,\frac{2\pi}{L}\right]^2 E\left(k_\perp+(-N'+1)\,\frac{2\pi}{L}\right)\\
&+\ \beta_{G-\left[-N'\frac{2\pi}{L}\right]}\left[k_\perp+(-N')\,\frac{2\pi}{L}\right]^2 E\left(k_\perp+(-N')\,\frac{2\pi}{L}\right). \quad (40)
\end{aligned}
$$

Así, la Ec. (40) se puede reescribir en forma matricial definiendo cada una de sus componentes

$$M\left(G,G'\right)=\beta_{G-\left[N'\frac{2\pi}{L}\right]}\left[k_\perp+N'\frac{2\pi}{L}\right]^2, \quad (41)$$

donde la Ec. (41) se cumple para cualquier valor de G. Por lo tanto, la Ec. (37) en su forma matricial está representada de la siguiente manera

$$
\begin{bmatrix}
M(N',N') & \cdots & M\left(N',0\right) & \cdots & M\left(N',-N'\right)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
M\left(0,N'\right) & \cdots & M\left(0,0\right) & \cdots & M\left(0,-N'\right)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
M\left(-N',N'\right) & \cdots & M\left(-N',0\right) & \cdots & M\left(-N',-N'\right)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E\left(N'\right)\\ \vdots\\ E\left(0\right)\\ \vdots\\ E\left(-N'\right)\end{bmatrix}
= k^2
\begin{bmatrix} E\left(N'\right)\\ \vdots\\ E\left(0\right)\\ \vdots\\ E\left(-N'\right)\end{bmatrix}
$$

II.3. Estructuras de bandas de un CF1D

En esta sección mostramos una serie de gráficas en donde variamos el número de ondas, longitudes de las capas que forman la celda unitaria y el tipo de materiales que se utilizaron, para así obtener y analizar las estructuras de bandas de nuestro sistema.

En la Fig. 14 presentamos las funciones dieléctricas con sus respectivas estructuras de bandas para un CF unidimensional modificando solamente el número de ondas. Consideramos una celda unitaria formada por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 4.7$ (Vidrio pyrex) y $\varepsilon_2 = 4.5$ (Cuarzo) de espesores $l_1 = 1$ y $l_2 = 3$, respectivamente. En el resto del trabajo de tesis consideraremos valores arbitrarios del índice de refracción, aunque estamos conscientes que estos valores pueden ser de materiales reales. Para la estructura de bandas consideramos el sistema de multicapas infinito en términos de la frecuencia reducida $\omega_r = \omega L/2\pi c$ y el vector de onda reducido $k_r = kL/2\pi$ en la primera zona de Brillouin. Los cálculos para las gráficas fueron realizados para $N = 21$ ondas (Figs. 14(a)-(b)) y $N = 2001$ ondas planas (Fig. 14(c)-(d)). En el modelo real, el rango de las componentes consideradas se reduce a sólo $\pm N_{max}$ a diferencia de la onda ideal infinita.

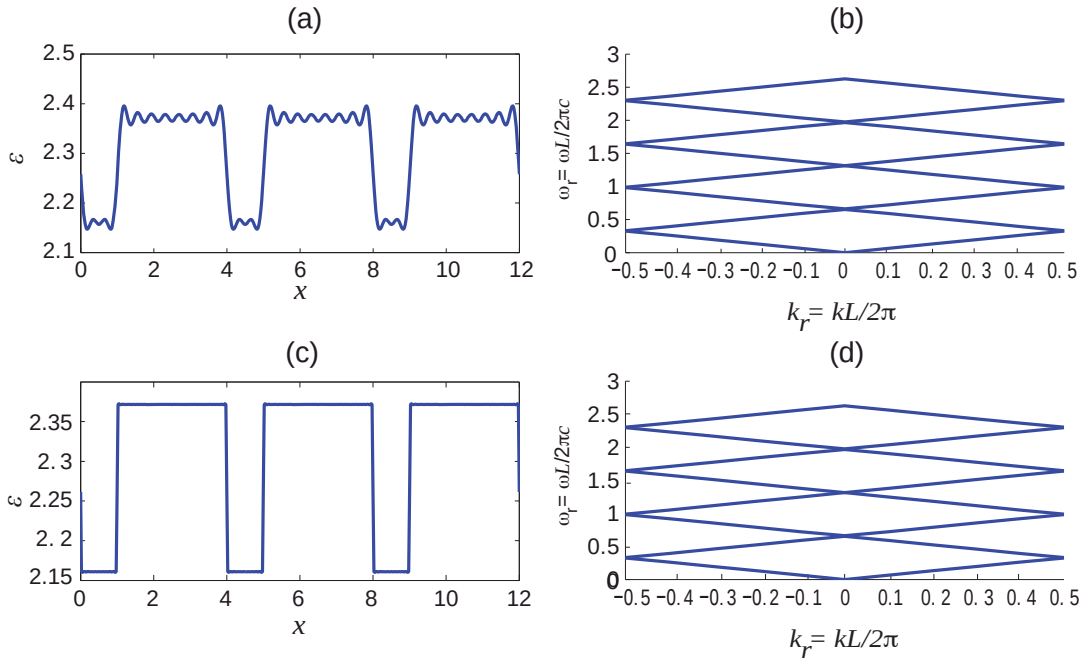

Figura 14. (a) y (c) Función dieléctrica en el espacio real y sus estructuras de bandas fotónicas ((b) y (d)) para un sistema de multicapas infinito con dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 4.7$ y $\varepsilon_2 = 4.5$. Los cálculos se obtuvieron para los números de ondas (a)-(b) $N = 21$ y (c)-(d) $N = 2001$.

Podemos ver en la Fig. 14(a) que la función dieléctrica con menor número de ondas presenta fluctuaciones a diferencia de la Fig. 14(c) que tiene un comportamiento suave. En cambio las Figs. 14(b) y (d) observamos que con un número de ondas menor o mayor obtenemos la misma estructura de bandas. Sin embargo, cabe mencionar que el número de ondas mínimo es de alrededor de 17 para obtener las estructuras de bandas correctas.

En la Fig. 15 mostramos las estructuras de bandas para un CF1D donde variamos solamente las longitudes de la celda para (a) $l_1 = 3$ y $l_2 = 3$, (b) $l_1 = 2$ y $l_2 = 8$, (c) $l_1 = 12$ y $l_2 = 1$, (d) $l_1 = 4$ y $l_2 = 60$, con índices de refracción $n_1 = 1.61$ y $n_2 = 1.3$.

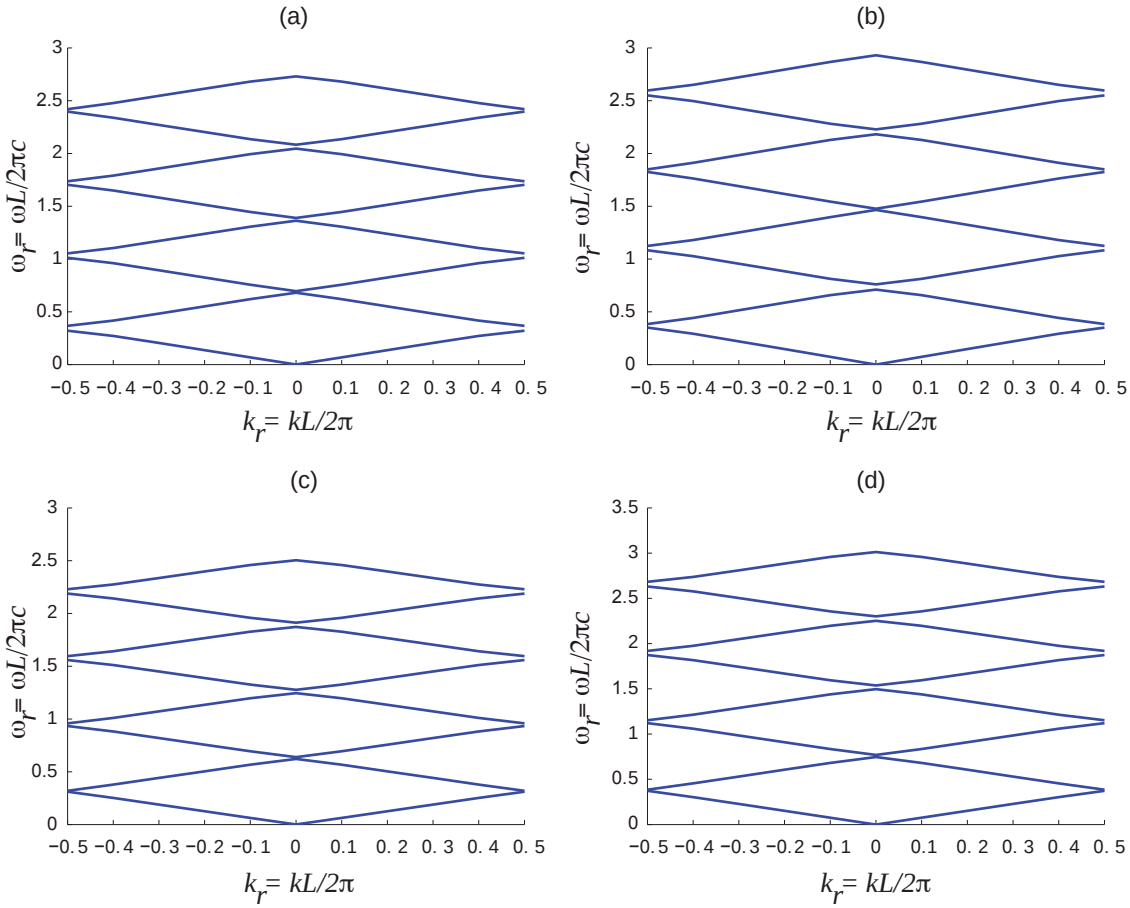

Figura 15. Estructura de bandas fotónicas para un sistema de multicapas infinito con índices de refracción $n_1 = 1.61$ y $n_2 = 1.3$ y longitudes de la celda (a) $l_1 = 3$ y $l_2 = 3$, (b) $l_1 = 2$ y $l_2 = 8$, (c) $l_1 = 12$ y $l_2 = 1$, (d) $l_1 = 4$ y $l_2 = 60$.

En la Fig. 15 vemos que las bandas permitidas (líneas azules) para las diferentes longitudes de la celda unitaria cambian ligeramente de posición. Sin embargo, podemos concluir que las estructuras de bandas no dependen considerablemente de las longitudes de las dos capas que forman la celda unitaria.

En la Fig. 16 presentamos las estructuras de bandas de un CF1D con materiales diferentes para la celda unitaria de longitud $L = 4$. Consideramos dos materiales distintos de índices de refracción $n_1 = 1.61$ y $n_2 = 1.3$ (Fig. 16(a)), $n_1 = 2.4$ y $n_2 = 1.44$ (Fig. 16(b)), $n_1 = 3.3$ y $n_2 = 1.3$ (Fig. 16(c)), y $n_1 = 11.4$ y $n_2 = 1.67$ (Fig. 16(d)).

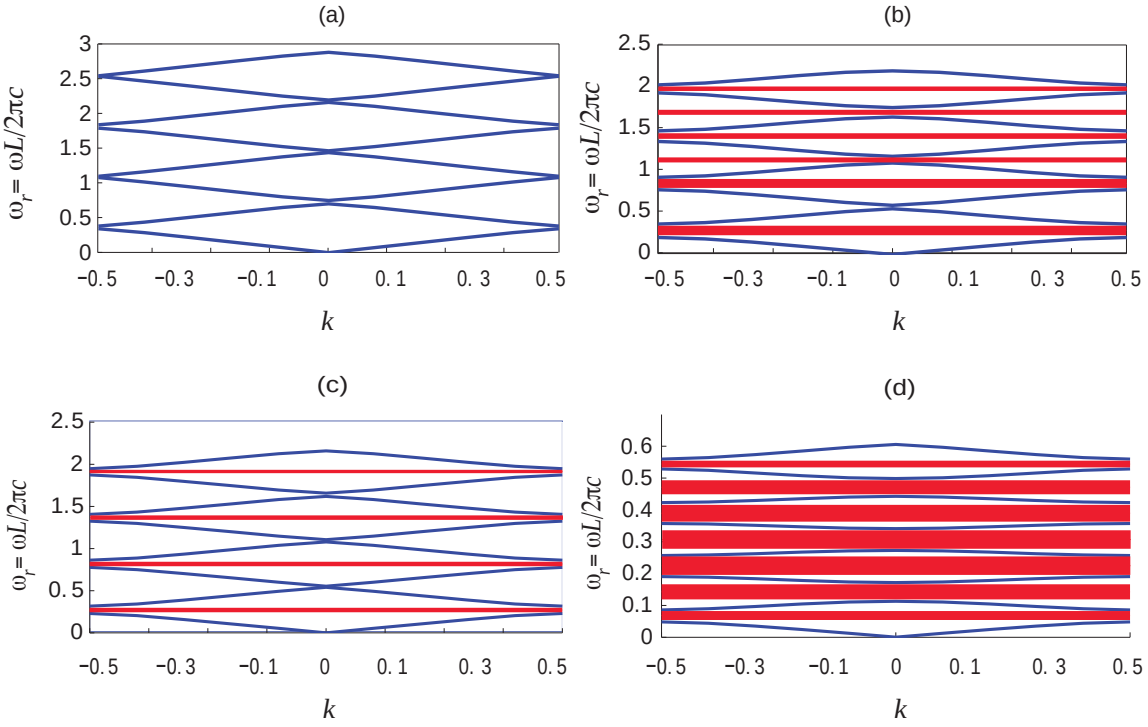

Figura 16. Estructuras de bandas fotónicas para un sistema de multicapas infinito con dos materiales distintos de índices de refracción (a) $n_1 = 1.61$ y $n_2 = 1.3$, (b) $n_1 = 2.4$ y $n_2 = 1.44$, (c) $n_1 = 3.3$ y $n_2 = 1.3$, y (d) $n_1 = 11.4$ y $n_2 = 1.67$.

En las Figs. 16(b) y (c) observamos bandas prohibidas (franjas rojas) a diferencia de la Fig. 16(a). Lo cual nos muestra la influencia del contraste del índice de refracción de dos materiales. Por otro lado, observamos que con una diferencia aún más grande

entre los índices de refracción de cada material se pueden obtener bandas prohibidas más anchas (Fig. 16(d)). Estas bandas prohibidas impiden la propagación de la luz en el interior del cristal fotónico, lo cual nos permite controlar el flujo de las ondas electromagnéticas a través del sistema como si fuera un filtro (Joannopoulos *et al.*, 1997, 2008).

Capítulo III

MÉTODO DE LA ECUACIÓN INTEGRAL

En este capítulo, presentamos un desarrollo descriptivo del método integral que nos permite calcular las estructuras de bandas de un cristal fotónico unidimensional y bidimensional con geometrías arbitrarias.

III.1. Descripción del método de la ecuación integral

Describiremos un método para la determinación de las estructuras de bandas de una y dos dimensiones de un CF basado en la solución de la ecuación integral (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006). La cual parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular las estructuras de bandas.

Este método implica ecuaciones independientes del tiempo y funciona a lo largo

de los contornos de los límites de las geometrías que se manejan. Lo cual presenta grandes ventajas en comparación con otros métodos, ya que sólo tiene en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos de la celda unitaria, permitiendo una menor cantidad de recursos computacionales. Además, el método integral permite estudiar la propagación de ondas electromagnéticas a través del sistema periódico finito a diferencia del método de ondas planas que sólo calcula la estructura de bandas fotónicas. Enseguida analizaremos el formalismo de dicho método.

III.1.1. Ecuación de onda

La descripción del siguiente método integral fue tomada de la Ref. (Mendoza-Suárez *et al.*, 2006). Proponemos la geometría de un cristal fotónico unidimensional (CF1D) y bidimensional (CF2D) con defectos en sus interfaces como se muestra en la Fig. 17 para calcular posteriormente sus estructuras de bandas.

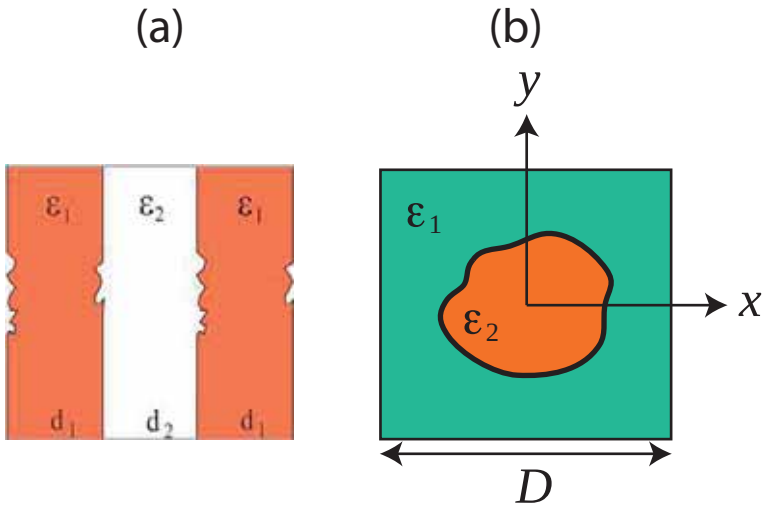

Figura 17. (a) Celda unitaria de un CF1D con defectos periódicos sobre su superficie. (b) Celda unitaria de un CF2D con una celda cuadrada y una inclusión de forma arbitraria.

Para iniciar con el método integral vamos a obtener la ecuación de onda para nuestros sistemas propuestos con medios sin fuentes donde $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$. Entonces las

ecuaciones de Maxwell correspondientes son:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{42}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{43}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{44}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{45}$$

y para los materiales lineales usaremos las ecuaciones constitutivas de los campos eléctrico y magnético como:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{46}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \tag{47}$$

donde ε es la constante dieléctrica y μ es la permeabilidad magnética, las cuales no dependen de la posición.

Aplicando el rotacional a la Ec. (44),

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \tag{48}$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \tag{49}$$

y sustituyendo las Ecs. (43) y (45) en la Ec. (49) obtenemos la ecuación de onda del campo eléctrico,

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \tag{50}$$

y similarmente para el campo magnético

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0, \tag{51}$$

donde el producto $\mu\varepsilon = 1/v^2$ siendo v la velocidad de la onda en el medio.

Como vamos a considerar Asumiendo que los campos electromagnéticos tienen una dependencia armónica del tiempo,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}, \tag{52}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}(\mathbf{r})\, e^{-i\omega t}, \tag{53}$$

la ecuación de onda se transforma como la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mu\varepsilon\omega^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{54}$$

siendo $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$ la magnitud del vector de onda.

Dada la velocidad de la luz en el vacío $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ y el índice de refracción $n = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$, tenemos que la relación de dispersión es

$$k = \frac{\omega}{c}n, \tag{55}$$

para una frecuencia ω de la onda electromagnética. ε_0 es la constante dieléctrica y μ_0 es la permeabilidad magnética en el vacío, respectivamente. Así la ecuación de onda (Ec. (11)) para el campo eléctrico y magnético respectivamente será

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{56}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) + k^2\mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \tag{57}$$

Las Ecs. (56) y (57) podemos expresarlas en términos de la función Ψ que representa a cualquiera de los campos electromagnéticos

$$\bigtriangledown^2\Psi(\mathbf{r}) + k^2\Psi(\mathbf{r}) = 0. \tag{58}$$

III.1.2. Función de Green para la ecuación de Helmholtz

Para estudiar nuestros sistemas propuestos, la ecuación de Helmholtz la podemos escribir como

$$\bigtriangledown^2\Psi^j(\mathbf{r}) + \varepsilon_j\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\Psi^j(\mathbf{r}) = 0, \tag{59}$$

donde $j = 1, 2, ...$ indica el medio j-ésimo, c es la velocidad de la luz en el vacío, ε_j es la función dieléctrica y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ es el vector de posición del punto de observación que es independiente de z para el CF1D y CF2D. Se ha adoptado la convención que $\Psi^j(\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico, E_z, en el caso de polarización TE y el campo magnético, H_z, en el caso de polarización TM. El campo electromagnético $\Psi^j(\mathbf{r})$ satisface las condiciones de frontera y de la periodicidad para cada polarización.

Para resolver la Ec. (59) consideramos una función de Green $G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ para el j-ésimo medio

$$\bigtriangledown^2 G^j\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}\right) + \varepsilon_j \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G^j\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}\right) = -4\pi\delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right), \tag{60}$$

donde $G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual que emite a la frecuencia ω en la posición $\mathbf{r}'$. La solución a la Ec. (60) está representada por la siguiente función de Green (ver Apéndice B)

$$G^j\left(\mathbf{r}, \mathbf{r}^{'}\right) = i\pi H_0^{(1)}\left(\sqrt{\varepsilon_j}\left(\frac{\omega}{c}\right)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right), \tag{61}$$

donde $H_0^{(1)}(\zeta)$ es la función de Hankel de primera clase y de orden cero.

III.1.3. Segunda identidad de Green

Enseguida vamos a obtener el teorema de Green. Partiendo del teorema de la divergencia, tenemos

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} da, \tag{62}$$

para un campo vectorial $\mathbf{A}$ definido como $\mathbf{A} = \psi\nabla\phi$, siendo ϕ y ψ dos campos escalares que son continuos a trozos y diferenciables en el espacio definido por el volumen V encerrado por la superficie S. Desarrollando el integrando de la parte izquierda de la ecuación anterior

$$\nabla \cdot (\psi\nabla\phi) = \nabla\psi \cdot \nabla\phi + \psi\nabla^2\phi, \tag{63}$$

y sustituyendo el valor de $\mathbf{A}$ en la parte derecha, obtenemos la primera identidad de Green

$$\int_V \left(\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\psi\nabla^2\phi\right)dv=\oint_S\left(\psi\nabla\phi\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}da. \tag{64}$$

Similarmente como desarrollamos la Ec. (63) para $\mathbf{A}=\phi\nabla\psi$, obtenemos

$$\int_V \left(\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\phi\nabla^2\psi\right)dv=\oint_S\left(\phi\nabla\psi\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}da. \tag{65}$$

Ahora haciendo la diferencia entre las Ecs. (64) y (65), tenemos que

$$\int_V \left[\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right]dv=\oint_S\left[\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right]\cdot\hat{\mathbf{n}}da, \tag{66}$$

a la cual se le conoce como la segunda identidad de Green.

Si los campos escalares son independientes de la variable z, la Ec. (66) se puede reescribir como

$$\int_{-L/2}^{L/2}\oint_S \left[\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right]dadz=\int_{-L/2}^{L/2}\oint_\Gamma\left[\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right]\cdot\hat{\mathbf{n}}dsdz \tag{67}$$

siendo Γ el contorno cerrado que limita la superficie S y la segunda identidad se transforma en

$$\oint_S \left[\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\right]da=\oint_\Gamma\left[\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\right]\cdot\hat{\mathbf{n}}ds, \tag{68}$$

para el caso 2D. A la Ec. (68) se le conoce también como el teorema de Green.

III.1.4. Representación integral de la ecuación de Helmholtz

Aplicaremos el teorema de Green a la ecuación de Helmholtz y para ello, multiplicaremos la Ec. (59) por $G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)$ y la Ec.(60) por $-\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)$ obteniendo

$$G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\left[\bigtriangledown^2\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)+k^2\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)=0\right], \tag{69}$$

$$-\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)\left[\bigtriangledown^2G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)+k^2G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=-4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)\right], \tag{70}$$

donde $k_j = \sqrt{\varepsilon_j}\left(\frac{\omega}{c}\right)$. Ahora, sumando ambas ecuaciones e integrando sobre una superficie cerrada, tenemos

$$\oint_{S_j} \left[G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \bigtriangledown^2 \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) - \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) \bigtriangledown^2 G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\right] da = 4\pi \oint_{S_j} \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) da. \tag{71}$$

Entonces, aplicando la Ec. (68) con $\psi = G$ y $\phi = \Psi$ al lado izquierdo de la Ec. (71) se transforma en

$$\oint_{\Gamma_j} \left[G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \bigtriangledown \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) - \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) \bigtriangledown G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\right] \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = 4\pi \oint_{S_j} \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) da. \tag{72}$$

Como la derivada normal está definida como $\partial\Psi^j/\partial n = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)$, podemos reescribir la Ec. (72) de la forma

$$\oint_{\Gamma_j} \left[G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) \frac{\partial\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)}{\partial n} - \Psi^j\left(\mathbf{r}\right) \frac{\partial G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)}{\partial n}\right] ds = 4\pi\Psi^j\left(\mathbf{r}'\right)\theta\left(\mathbf{r}'\right), \tag{73}$$

donde la integral de superficie se ha representado mediante el producto del campo por la función escalón de Heaviside

$$\theta\left(\mathbf{r}'\right) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \mathbf{r}' \in S \\ 0 & \text{si} \quad \mathbf{r}' \notin S \end{cases} \tag{74}$$

Para continuar con la convención de que $\mathbf{r}$ representa la posición del observador (donde se mide el campo), intercambiamos las variables $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ en la Ec. (73),

$$\frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma_j} \left[G^j\left(\mathbf{r}',\mathbf{r}\right) \frac{\partial\Psi^j\left(\mathbf{r}'\right)}{\partial n'} - \Psi^j\left(\mathbf{r}'\right) \frac{\partial G^j\left(\mathbf{r}',\mathbf{r}\right)}{\partial n'}\right] ds' = \Psi^j\left(\mathbf{r}\right)\theta\left(\mathbf{r}\right), \tag{75}$$

de manera que $\mathbf{r}'$ se desplaza sobre los contornos. Similarmente, tomaremos en cuenta la definición de la derivada normal para la función de Green que tiene la forma

$$\frac{\partial G^j\left(\mathbf{r}',\mathbf{r}\right)}{\partial n'} = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla' G^j\left(\mathbf{r}',\mathbf{r}\right), \tag{76}$$

donde $\hat{\mathbf{n}}'$ es la normal a la superficie y $\mathbf{r}'$ es el contorno Γ como se muestra en la Fig. 18. De forma similar para $\partial\Psi^j/\partial n' = \hat{\mathbf{n}}' \cdot \nabla'\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)$.

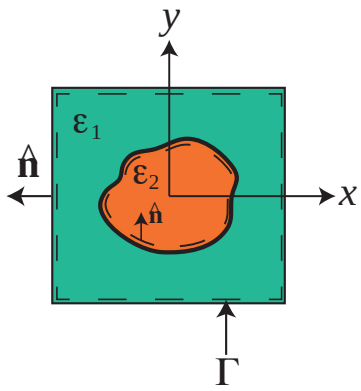

Figura 18. Celda unitaria de un CF2D con una red cuadrada y una inclusión de forma arbitraria con su vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ perpendicular al contorno.

Por lo tanto, la ecuación de Helmholtz para los campos en sistemas 1D y 2D en el punto $\mathbf{r}'$ se puede representar mediante una ecuación integral rigurosa

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma_j}\left[G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\frac{\partial\Psi^j\left(\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}-\Psi^j\left(\mathbf{r}'\right)\frac{\partial G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}\right]ds'=\Psi^j\left(\mathbf{r}\right)\theta\left(\mathbf{r}\right), \tag{77}$$

donde

$$G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)=i\pi H_0^{(1)}\left(\sqrt{\varepsilon_j}\left(\frac{\omega}{c}\right)\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right), \tag{78}$$

es la función de Green en medios homogéneos. En la Ec. (77) la superficie S_j está limitada por el contorno cerrado Γ_j correspondiente y la derivada normal $\partial/\partial n'$ va hacia afuera del contorno Γ_j.

III.1.5. Discretización de las integrales

Las ecuaciones integrales que hemos obtenidos son integrales de línea cuya variable de integración es el parámetro de longitud de arco s. Debido a esto conviene representar los integrandos en términos de dicho parámetro y para hacerlo consideraremos una representación paramétrica de los puntos que forman el perfil Γ_j. Tomaremos las formas paramétricas de las coordenadas cartesianas de un punto arbitrario $(x(s), y(s))$ y de sus derivadas de primer $(x'(s), y'(s))$ y segundo $(x''(s), y''(s))$ orden, donde supondremos

que todas estas funciones son continuas al menos por tramos.

En la Ec. (77) tenemos dos integrales de contorno que llamaremos

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_\Gamma G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \tag{79}$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_\Gamma \Psi^j(\mathbf{r}') \frac{\partial G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \tag{80}$$

Para resolver numéricamente las Ecs. (79) y (80) vamos a realizar una discretización, ya que en el formalismo general, las integrales no se pueden resolver de manera exacta. Para esto dividimos el contorno Γ en n pequeños segmentos de longitud de arco Δs

$$I_G(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \tag{81}$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \sum_n \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \Psi^j(\mathbf{r}') \frac{\partial G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds'. \tag{82}$$

Si Δs es suficientemente pequeño para un muestreo fino, entonces podemos considerar que el campo Ψ^j y su derivada normal $\partial \Psi^j / \partial n'$ son aproximadamente constantes. Así, las funciones las podemos sacar de las integrales anteriores

$$I_G(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Phi_n^j \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \, ds', \tag{83}$$

$$I_\Psi(\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi} \sum_n \Psi_n^j \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G^j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'} ds', \tag{84}$$

donde hemos llamado

$$\Phi_n^j = \left. \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_n}, \tag{85}$$

$$\Psi_n^j = \left. \Psi^j(\mathbf{r}') \right|_{\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_n}. \tag{86}$$

Evaluando las integrales de las Ecs. (83) y (84) en el punto de observación $\mathbf{r} = \mathbf{r}_m$,

definiremos los elementos de matriz

$$L_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} G^j \left(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}' \right) ds', \tag{87}$$

$$N_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{s_n - \Delta s/2}^{s_n + \Delta s/2} \frac{\partial G^j \left(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}' \right)}{\partial n'} ds', \tag{88}$$

donde el subíndice m indica el punto de observación y el subíndice n el punto de integración. Sustituyendo la Ec. (78) en las Ecs. (87) y (88) cuando Δs es muy pequeño, tenemos que

$$L_{mn} \approx \frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\sqrt{\varepsilon_j} \left(\frac{\omega}{c} \right) \left| \mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n \right| \right) \Delta s, \tag{89}$$

$$N_{mn} \approx \frac{i}{4} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)} \left(\sqrt{\varepsilon_j} \left(\frac{\omega}{c} \right) \left| \mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n \right| \right) \Delta s. \tag{90}$$

En esta última expresión, $\hat{\mathbf{n}}_n = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}}$ es la normal al contorno Γ_j en el punto de integración $\mathbf{r}'_n$.

Si llamamos $\mathbf{R}_{mn} = \mathbf{r}_m - \mathbf{r}'_n$ y $u_n = k_j R_{mn} = k\sqrt{\left(x_m - x'_n \right)^2 + \left(y_m - y'_n \right)^2}$ y expresando $\nabla' H_0^{(1)} \left(u \right)$ de la Ec. (90), tenemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)} \left(u_n \right) &= n_x \frac{\partial H_0^{(1)} \left(u_n \right)}{\partial x'_n} + n_y \frac{\partial H_0^{(1)} \left(u_n \right)}{\partial y'_n} \\ &= \left[n_x \frac{\partial u_n}{\partial x'_n} + n_y \frac{\partial u_n}{\partial y'_n} \right] \frac{dH_0^{(1)} \left(u_n \right)}{du_n}. \end{aligned} \tag{91}$$

Por otro lado, sabemos que

$$\frac{dH_0^{(1)} \left(u_n \right)}{du_n} = -H_1^{(1)} \left(u_n \right), \tag{92}$$

y

$$\frac{\partial u_n}{\partial x'_n} = -k_j \frac{x_m - x'_n}{R_{mn}}, \tag{93}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y'_n} = -k_j \frac{y_m - y'_n}{R_{mn}}. \tag{94}$$

Entonces, sustituyendo el valor de u_n y las derivadas anteriores en la Ec. (91), obtenemos

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)}\left(kR_{mn}\right) = k_j \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} H_1^{(1)}\left(kR_{mn}\right). \tag{95}$$

Por lo tanto, las Ecs. (89) y (90) se pueden reescribir como

$$L_{mn} \approx \frac{i}{4}\Delta s H_0^{(1)}\left(k_j R_{mn}\right), \tag{96}$$

$$N_{mn} \approx \frac{i}{4}k\Delta s \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} H_1^{(1)}\left(k_j R_{mn}\right). \tag{97}$$

Como toda función de Green posee una singularidad en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, tenemos que para nuestro caso de la función de Green en 2D, la singularidad es removible y las integrales dadas en las Ecs. (87) y (88) pueden ser calculadas si utilizamos un proceso de límite, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} L_{mn} &= \frac{1}{4\pi}\int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} G^j\left(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'\right) ds' \\ &= \frac{1}{4\pi}\lim_{\varsigma\to 0}\int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} G^j\left(\mathbf{r}_m + \varsigma\hat{\mathbf{n}}_m, \mathbf{r}'\right) ds', \end{aligned} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} N_{mn} &= \frac{1}{4\pi}\int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} \frac{\partial G^j\left(\mathbf{r}_m, \mathbf{r}'\right)}{\partial n'} ds' \\ &= \frac{1}{4\pi}\lim_{\varsigma\to 0}\int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2} \frac{\partial G^j\left(\mathbf{r}_m + \varsigma\hat{\mathbf{n}}_m, \mathbf{r}'\right)}{\partial n'} ds'. \end{aligned} \tag{99}$$

Enseguida mostramos algunos detalles de como se procede para calcular estos elementos de matriz, L_{mn} y N_{mn}.

Elementos no diagonales

En el caso de los elementos L_{mn} y N_{mn} que están fuera de la diagonal ($m \neq n$) pueden intercambiarse el orden entre el límite y la integral y aplicarse directamente el límite dentro de la integral. Además, tomando en cuenta que el intervalo de integración es suficientemente pequeño y representando la integral por una simple aproximación

rectangular, obtenemos

$$L_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)}\left(k_j R_{mn}\right), \tag{100}$$

$$N_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} k_j \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} H_1^{(1)}\left(k_j R_{mn}\right). \tag{101}$$

Elementos diagonales

Para el caso de los elementos de la diagonal ($m = n$), el integrando tiene una singularidad en el punto medio del intervalo de integración, por lo que hay que integrar adecuadamente dicha singularidad. Afortunadamente, la singularidad es integrable como lo mostraremos enseguida.

En las Ecs. (98) y (99) vamos a realizar un cambio de variable, donde $s = s' - s_n$ y derivando $ds = ds'$, tenemos

$$L_{nn} = \frac{i}{4} \lim_{\varsigma \to 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} H_0^{(1)}\left(k_j \left|\mathbf{r}_n + \varsigma \hat{\mathbf{n}}_n - \mathbf{r}'\left(s + s_n\right)\right|\right) ds, \tag{102}$$

$$N_{nn} = \frac{i}{4} \lim_{\varsigma \to 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \nabla' H_0^{(1)}\left(k_j \left|\mathbf{r}_n + \varsigma \hat{\mathbf{n}}_n - \mathbf{r}'\left(s + s_n\right)\right|\right) ds. \tag{103}$$

La variable $\mathbf{r}'\left(s + s_n\right)$ varía alrededor del punto s_n dentro de la pequeña vecindad Δs, entonces podemos expandir este vector en serie de Taylor

$$\mathbf{r}'\left(s + s_n\right) = \mathbf{r}_n + \left.\frac{d\mathbf{r}'}{ds}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n} s + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2\mathbf{r}'}{ds^2}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n} s^2 + \ldots$$

De la Ec. (212) tenemos que el vector unitario tangente al contorno en el punto $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_n$ está dado de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{t}}_n = \left.\frac{d\mathbf{r}'}{ds}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}, \tag{104}$$

y similarmente de la Ec. (243) obtenemos la primera derivada del vector $\hat{\mathbf{t}}_n$ como

$$\hat{\mathbf{t}}'_n = \left.\frac{d^2\mathbf{r}'}{ds^2}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}_n}. \tag{105}$$

Entonces el vector de integración $\mathbf{r}'$se puede reescribir en la forma

$$\mathbf{r}'\left(s+s_n\right)=\mathbf{r}_n+\hat{\mathbf{t}}_n s+\frac{1}{2}\hat{\mathbf{t}}'_n s^2+\ldots \tag{106}$$

Ahora considerando términos hasta primer orden de la Ec. (106) y sustituyendo en la Ec. (102), obtenemos

$$L_{nn}=\frac{i}{4}\lim_{\varsigma\to 0}\int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2}H_0^{(1)}\left(k_j\left|\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s\right|\right)ds. \tag{107}$$

Como

$$\begin{aligned}\left|\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s\right|&=\sqrt{\left(\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s\right)\cdot\left(\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s\right)}\\&=\sqrt{\varsigma^2+s^2}\end{aligned} \tag{108}$$

y evaluando el límite de la Ec. (107), tenemos que

$$L_{nn}=\frac{i}{4}\int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2}H_0^{(1)}\left(k_j\left|s\right|\right)ds. \tag{109}$$

Para pequeños argumentos de la función de Hankel de primera clase y de orden cero (Arfken *et al.*, 2013)

$$H_0^{(1)}\left(x\right)\approx 1-\frac{2}{i\pi}\ln\left(\gamma x\right), \tag{110}$$

siendo γ la constante de Euler. Sustituyendo en la Ec. (109)

$$L_{nn}=\frac{i}{4}\int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2}\left[1-\frac{2}{i\pi}\ln\left(\gamma k_j\left|s\right|\right)\right]ds \tag{111}$$

e integrando, obtenemos los elementos de matriz

$$L_{nn}=\frac{i}{4}\Delta s H_0^{(1)}\left(k_j\frac{\Delta s}{2e}\right). \tag{112}$$

Para calcular los elementos N_{nn} vamos a partir de la Ec. (95) considerando la Ec. (106) para los primeros términos,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_n\cdot\nabla' H_0^{(1)}\left(k_j\left|\mathbf{r}_n+\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\mathbf{r}'\left(s+s_n\right)\right|\right)&\simeq k_j\hat{\mathbf{n}}_n\cdot\frac{\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{t}}'_n s^2}{\left|\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s\right|}H_1^{(1)}\left(k_j\left|\varsigma\hat{\mathbf{n}}_n-\hat{\mathbf{t}}_n s\right|\right)\\&=k_j\frac{\varsigma-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_n\cdot\hat{\mathbf{t}}'_n s^2}{\left|\varsigma^2+s^2\right|}H_1^{(1)}\left(k_j\left|\varsigma^2+s^2\right|\right).\end{aligned} \tag{113}$$

Ahora aplicando el resultado anterior en la Ec. (103),

$$N_{nn} = \frac{i}{4} k_j \lim_{\varsigma \to 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \frac{\varsigma - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n s^2}{|\varsigma^2 + s^2|} H_1^{(1)} \left(k_j \left| \varsigma^2 + s^2 \right| \right) ds. \tag{114}$$

Llamando $p = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n$ y considerando que en el límite para pequeños argumentos, la función de Hankel de primera clase y de orden uno (Arfken *et al.*, 2013) se puede aproximar como

$$H_1^{(1)}(x) \simeq \frac{2}{i\pi} \frac{1}{x}, \tag{115}$$

que sustituyendo en la Ec. (114), tenemos

$$\begin{aligned} N_{nn} &= \frac{ik_j}{4} \lim_{\varsigma \to 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \frac{\varsigma - ps^2}{|\varsigma^2 + s^2|} \frac{2}{i\pi} \frac{1}{k_j |\varsigma^2 + s^2|} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varsigma \to 0} \int_{-\Delta s/2}^{\Delta s/2} \frac{\varsigma - ps^2}{|\varsigma^2 + s^2|^2} ds \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n. \end{aligned} \tag{116}$$

Por lo tanto, las Ecs. (100), (101), (112) y (116) se pueden reescribir como

$$L_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(\sqrt{\varepsilon_j} \frac{\omega}{c} R_{mn} \right) (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{i\Delta s}{4} H_0^{(1)} \left(\sqrt{\varepsilon_j} \frac{\omega}{c} \frac{\Delta s}{2e} \right) \right] \delta_{mn}, \tag{117}$$

$$N_{mn}^{(j)} = \frac{i\Delta s}{4} \sqrt{\varepsilon_j} \frac{\omega}{c} H_1^{(1)} (k_j R_{mn}) \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \frac{\mathbf{R}_{mn}}{R_{mn}} (1 - \delta_{mn}) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta s}{4\pi} \hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n \right] \delta_{mn}, \tag{118}$$

donde

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \mathbf{R}_{mn} = -y'(s)(x_m - x_n) + x'(s)(y_m - y_n), \tag{119}$$

$$\hat{\mathbf{n}}_n \cdot \hat{\mathbf{t}}'_n = x'(s) y''(s) - y'(s) x''(s), \tag{120}$$

$$R_{mn} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}. \tag{121}$$

III.1.6. Sistema de una interfaz simple entre dos medios dieléctricos

Como ejemplo de aplicación del método integral vamos a considerar el sistema más simple posible constituido por una interfaz entre dos medios dieléctricos como se muestra

en la Fig. 19.

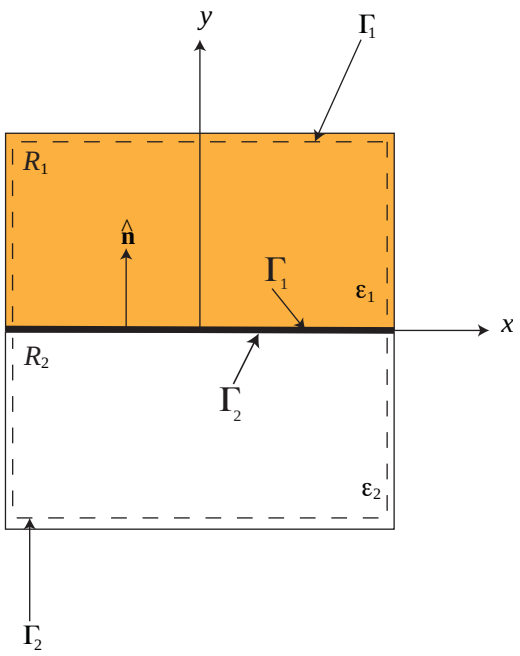

Figura 19. Interfaz formada por dos medios con constantes dieléctricas ε_1 y ε_2.

Analizando el medio con constante dieléctrica ε_1 correspondiente a la región R_1, observamos que la normal va hacia adentro y el observador siempre está del lado de la normal (ver Fig. 19). Entonces, como la función escalón $\theta(\mathbf{r}) = 1$ se tiene que la Ec. (73) se reduce de la siguiente forma

$$-\oint_{\Gamma_1+\Gamma_{1\infty}} \left[G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi^j(\mathbf{r}') \frac{\partial G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds' = \Psi^j(\mathbf{r}), \tag{122}$$

donde en esta región hay un campo incidente y $j = 1$.

Para la segunda región R_2 la normal va hacia afuera como podemos observar en la Fig. 19, por lo que la ecuación ahora queda como

$$\oint_{\Gamma_2+\Gamma_{2\infty}} \left[G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}') \frac{\partial \Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n'} - \Psi^j(\mathbf{r}') \frac{\partial G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} \right] ds' = 0, \tag{123}$$

para $j = 2$.

Podemos tomar la contribución de los campos en el contorno $\Gamma_{1\infty}$ como aquella de un campo incidente que viene desde el infinito. Por otra parte es posible considerar que el contorno $\Gamma_{2\infty}$ está tan lejos que ninguna radiación electromagnética ha llegado a él y por lo tanto su contribución al campo total es nula (ver Fig. 19). Con estos argumentos, el sistema de ecuaciones sobre la región R_1 se puede reescribir como

$$-\oint_{\Gamma_1}\left[G^1\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\frac{\partial\Psi^1\left(\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}-\Psi^j\left(\mathbf{r}'\right)\frac{\partial G^1\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}\right]ds'=\Psi^1\left(\mathbf{r}\right)+\Psi^{inc}\left(\mathbf{r}\right) \tag{124}$$

y en la región R_2

$$\oint_{\Gamma_2}\left[G^2\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)\frac{\partial\Psi^2\left(\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}-\Psi^2\left(\mathbf{r}'\right)\frac{\partial G^2\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}\right]ds'=0. \tag{125}$$

El superíndice denota la región o medio donde se evaluarán las integrales. Considerando las Ecs. (79) y (80) el sistema anterior resulta de la siguiente forma

$$-I_G^{(1)}\left(\mathbf{r}\right)+I_\Psi^{(1)}\left(\mathbf{r}\right)=\Psi^{(1)}\left(\mathbf{r}\right)+\Psi^{inc(1)}\left(\mathbf{r}\right), \tag{126}$$

$$I_G^{(2)}\left(\mathbf{r}\right)-I_\Psi^{(2)}\left(\mathbf{r}\right)=0. \tag{127}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden representar en términos de sumatorias (Ecs. (83) y (84)) como

$$\sum_{n=1}^{N}L_{mn}^{(1)}\Phi_n^{(1)}-\sum_{n=1}^{N}\left[N_{mn}^{(1)}-\delta_{mn}\right]\Psi_n^{(1)}=\Psi_m^{inc(1)}, \tag{128}$$

$$\sum_{n=1}^{N}L_{mn}^{(2)}\Phi_n^{(2)}-\sum_{n=1}^{N}N_{mn}^{(2)}\Psi_n^{(2)}=0, \tag{129}$$

donde hemos asumido que el contorno Γ se divide en N segmentos Δs y el vector $\Psi_n^{(1)}$ se ha multiplicado por la matriz identidad.

Considerando las condiciones de frontera dadas por las Ecs. (177) y (178)

$$\Psi_n^{(2)}=\Psi_n^{(1)} \qquad \text{y} \qquad \Phi_n^{(2)}=\frac{f_2}{f_1}\Phi_n^{(1)}=f_{21}\Phi_n^{(1)}, \tag{130}$$

en la Ec.(129) sustituimos el campo $\Psi_n^{(2)}$ y su derivada normal $\Phi_n^{(2)}$ por los campos dados en la región R_1 para obtener finalmente

$$\sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(1)} \Phi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N} \left[N_{mn}^{(1)} - \delta_{mn} \right] \Psi_n^{(1)} = \Psi_m^{inc(1)}, \tag{131}$$

$$f_{21} \sum_{n=1}^{N} L_{mn}^{(2)} \Phi_n^{(1)} - \sum_{n=1}^{N} N_{mn}^{(2)} \Psi_n^{(1)} = 0. \tag{132}$$

Para determinar las fuentes (el campo $\Psi_n^{(1)}$ y su derivada normal $\Phi_n^{(1)}$ en cada punto del contorno Γ) cada ecuación se evalúa en todos los puntos del contorno constituyendo así en un sistema lineal e inhomogéneo de ecuaciones de dimensión $2N \times 2N$. En forma matricial, si consideramos que la matriz del sistema posee cuatro secciones de $N \times N$, definimos

$$M = \begin{bmatrix} L_{mn}^{(1)} & N_{mn}^{(1)} - \delta_{mn} \\ L_{mn}^{(2)} & N_{mn}^{(2)} \end{bmatrix}, \tag{133}$$

el vector de incógnitas de dos secciones de $N \times 1$

$$X = \begin{bmatrix} \Phi_n^{(1)} \\ \Psi_n^{(1)} \end{bmatrix} \tag{134}$$

y el vector del término inhomogéneo también con dos secciones de $N \times 1$, de las cuales una de ellas contiene ceros,

$$B = \begin{bmatrix} \Psi_m^{inc(1)} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{135}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones (Ec. (131) y (132)) se puede escribir como

$$MX = B, \tag{136}$$

cuya solución será

$$X = M^{-1} B. \tag{137}$$

Con este planteamiento del método integral para una interfaz entre dos medios dieléctricos nos permite aplicarlo al problema de interés de este trabajo de tesis, el cual será descrito en el siguiente capítulo.

Capítulo IV

ESTRUCTURA DE BANDAS DE UN CRISTAL FOTÓNICO EN 2D

En este capítulo presentamos el análisis de las estructuras de bandas en cristales fotónicos en 2D y los resultados obtenidos para superficies sólidas y aleatoriamente rugosas en una celda unitaria utilizando el método integral. Notaremos que la influencia de la rugosidad en la superficie es muy notoria en la estructura de bandas, lo cual indica cambios considerables en las propiedades de transmisión en un cristal fotónico real. Esta idea de modelar superficies rugosas es relevante, ya que a pesar de la existencia de una tecnología bien desarrollada para la fabricación de superficies se tienen cristales fotónicos con defectos.

IV.1. Cristal Fotónico en 2D

Para calcular las estructuras de bandas para un cristal fotónico bidimensional consideramos la siguiente celda unitaria cuadrada con una inclusión arbitraria como se muestra en la Fig. 20.

Aplicaremos el segundo teorema integral de Green bidimensional para las funciones

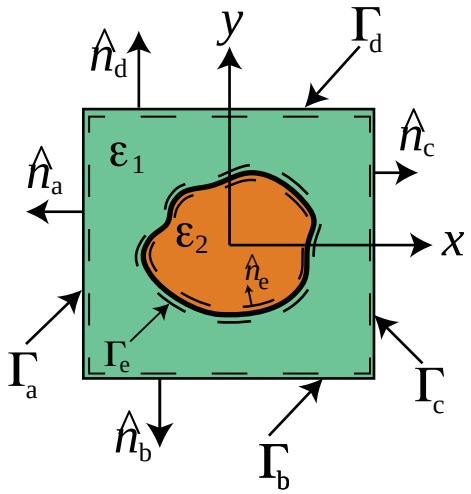

Figura 20. Celda unitaria de un CF2D con una red cuadrada y una inclusión de forma arbitraria. Como en el CF1D, tenemos dos materiales distintos. Los materiales son limitados por los contornos Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d y Γ_e cuyos vectores normales hacia afuera del medio 1 son mostrados.

$\Psi^j(\mathbf{r}')$ y $G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ para cada región correspondiente (Ec. (77) del capítulo 3),

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{\Gamma_j}\left[G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\Psi^j(\mathbf{r}')}{\partial n'}-\frac{\partial G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}\Psi^j(\mathbf{r}')\right]ds'=\Psi^j(\mathbf{r}')\theta(\mathbf{r}), \tag{138}$$

para los contornos $C_1=\Gamma_a+\Gamma_b+\Gamma_c+\Gamma_d+\Gamma_e$ y $C_2=\Gamma_e$. Podemos representar un conjunto de ecuaciones integrales acopladas para Ψ^j y $\partial\Psi^j/\partial n$ permitiendo que $\mathbf{r}$ represente los vectores $\mathbf{R}_a+\xi\hat{\mathbf{n}}_a$, $\mathbf{R}_b+\xi\hat{\mathbf{n}}_b$, $\mathbf{R}_c+\xi\hat{\mathbf{n}}_c$, $\mathbf{R}_d+\xi\hat{\mathbf{n}}_d$ y $\mathbf{R}_e+\xi\hat{\mathbf{n}}_e$ donde $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{R}_b$, $\mathbf{R}_c$, $\mathbf{R}_d$ y $\mathbf{R}_e$ son los vectores de posición usados para recorrer los contornos Γ_a, Γ_b, Γ_c, Γ_d y Γ_e, respectivamente, ξ es una cantidad infinitesimal positiva y los vectores normales correspondientes a los contornos son $\hat{\mathbf{n}}_a$, $\hat{\mathbf{n}}_b$, $\hat{\mathbf{n}}_c$, $\hat{\mathbf{n}}_d$ y $\hat{\mathbf{n}}_e$ (ver Fig. 20). Por

consiguiente, las ecuaciones integrales para cada región son:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi}\lim_{\xi\to 0^+}\Bigg\{&-\int_{\Gamma_a}\left[G^1(\mathbf{R}_a+\xi\hat{\mathbf{n}}_a,\mathbf{r}')\frac{\partial\Psi_a}{\partial n'_a}-\frac{\partial G^1(\mathbf{R}_a+\xi\hat{\mathbf{n}}_a,\mathbf{r}')}{\partial n'_a}\Psi_a\right]ds'\\&-\int_{\Gamma_b}\left[G^1(\mathbf{R}_b+\xi\hat{\mathbf{n}}_b,\mathbf{r}')\frac{\partial\Psi_b}{\partial n'_b}-\frac{\partial G^1(\mathbf{R}_b+\xi\hat{\mathbf{n}}_b,\mathbf{r}')}{\partial n'_b}\Psi_b\right]ds'\\&-\int_{\Gamma_c}\left[G^1(\mathbf{R}_c+\xi\hat{\mathbf{n}}_c,\mathbf{r}')\frac{\partial\Psi_c}{\partial n'_c}-\frac{\partial G^1(\mathbf{R}_c+\xi\hat{\mathbf{n}}_c,\mathbf{r}')}{\partial n'_c}\Psi_c\right]ds'\\&-\int_{\Gamma_d}\left[G^1(\mathbf{R}_d+\xi\hat{\mathbf{n}}_d,\mathbf{r}')\frac{\partial\Psi_d}{\partial n'_d}-\frac{\partial G^1(\mathbf{R}_d+\xi\hat{\mathbf{n}}_d,\mathbf{r}')}{\partial n'_d}\Psi_d\right]ds'\\&-\int_{\Gamma_e}\left[G^1(\mathbf{R}_e+\xi\hat{\mathbf{n}}_e,\mathbf{r}')\frac{\partial\Psi_e}{\partial n'_e}-\frac{\partial G^1(\mathbf{R}_e+\xi\hat{\mathbf{n}}_e,\mathbf{r}')}{\partial n'_e}\Psi_e\right]ds'\Bigg\}=0\end{aligned}\tag{139}$$

y

$$\frac{1}{4\pi}\lim_{\xi\to 0^+}\left\{-\int_{\Gamma_e}\left[G^2(\mathbf{R}_e+\xi\hat{\mathbf{n}}_e,\mathbf{r}')\frac{\partial\tilde{\Psi}_e}{\partial n'_e}-\frac{\partial G^2(\mathbf{R}_e+\xi\hat{\mathbf{n}}_e,\mathbf{r}')}{\partial n'_e}\tilde{\Psi}_e\right]ds'\right\}=\tilde{\Psi}_e.\tag{140}$$

Es necesario el límite para evitar una singularidad en la función de Green cuando su argumento es cero. La geometría del problema está descrita por la representación de puntos a lo largo del contorno Γ con coordenadas $x(s)$, $y(s)$ como funciones paramétricas de la longitud de arco s y de sus respectivas derivadas hasta de segundo orden, $x'(s)$, $y'(s)$, $x''(s)$ y $y''(s)$. Estas funciones se consideran continuas al menos por tramos.

Recordando las Ecs. (82) y (83) del capitulo 3 evaluadas en el punto de observación $\mathbf{r}=\mathbf{r}_m$ para definir los elementos de la matriz,

$$\frac{1}{4\pi}\sum_n\Phi_n^j\int_{s_n-\Delta s/2}^{s_n+\Delta s/2}G^j(\mathbf{r}_m,\mathbf{r}')ds'\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}L_{mn}^j\Phi_n^j,\tag{141}$$

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{n}\Psi_{n}^{j}\int_{s_{n}-\Delta s/2}^{s_{n}+\Delta s/2}\frac{\partial G^{j}(\mathbf{r}_{m},\mathbf{r}')}{\partial n'_{a}}ds' \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty}N_{mn}^{j}\Psi_{n}^{j}, \tag{142}$$

donde

$$\Phi_{n}^{j}=\left.\frac{\partial\Psi^{j}\left(\mathbf{r}'\right)}{\partial n'}\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_{n}}, \tag{143}$$

$$\Psi_{n}^{j}=\left.\Psi^{j}\left(\mathbf{r}'\right)\right|_{\mathbf{r}'=\mathbf{r}'_{n}}. \tag{144}$$

Así que sustituyendo las Ecs. (141) y (142) en las Ecs. (139) y (140) obtenemos un conjunto de $N_{abcd}+2N_{e}$ ecuaciones algebraicas homogéneas, donde cada contorno es muestreado en un número finito de puntos igualmente espaciados: N_{a} para Γ_{a} y así sucesivamente; $N_{abcd}=N_{a}+N_{b}+N_{c}+N_{d}$ $(N_{c}=N_{a},N_{d}=N_{b})$.

Reescribiendo las Ecs. (139) y (140) en términos de las Ecs. (141) y (142), para cada región con $m=1+2,...,N_{abcd}+N_{e}$,

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{n=1}^{N_{a}}N_{mn}^{1}\Psi_{a}^{n}-\sum_{n=1}^{N_{a}}L_{mn}^{1}\Phi_{a}^{n}\right]+\left[\sum_{n=N_{a}+1}^{N_{a}+N_{b}}N_{mn}^{1}\Psi_{b}^{n}-\sum_{n=N_{a}+1}^{N_{a}+N_{b}}L_{mn}^{1}\Phi_{b}^{n}\right]\\
&\quad+\left[\sum_{n=N_{a}+N_{b}+1}^{N_{abcd}-N_{d}}N_{mn}^{1}\Psi_{c}^{n}-\sum_{n=N_{a}+N_{b}+1}^{N_{abcd}-N_{d}}L_{mn}^{1}\Phi_{c}^{n}\right]\\
&\quad+\left[\sum_{n=N_{abcd}-N_{d}+1}^{N_{abcd}}N_{mn}^{1}\Psi_{d}^{n}-\sum_{n=N_{abcd}-N_{d}+1}^{N_{abcd}}L_{mn}^{1}\Phi_{d}^{n}\right]\\
&\quad+\left[\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_{e}}N_{mn}^{1}\Psi_{e}^{n}-\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_{e}}L_{mn}^{1}\Phi_{e}^{n}\right]=0.
\end{aligned} \tag{145}$$

y para $m=N_{abcd}+N_{e}+1,...,N_{abcd}+2N_{e}$,

$$\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_{e}}N_{mn}^{2}\tilde{\Psi}_{e}^{n}-\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_{e}}L_{mn}^{2}\tilde{\Phi}_{e}^{n}=\tilde{\Psi}_{e}^{n}. \tag{146}$$

Debido a la geometría del CF2D propuesto (ver Fig. 20), se tiene que en este caso las condiciones de periodicidad son

$$\Psi_c = \Psi_a \exp(ik_x D_x), \qquad \Phi_c = -\Phi_a \exp(ik_x D_x), \tag{147}$$

$$\Psi_d = \Psi_b \exp(ik_y D_y), \qquad \Phi_d = -\Phi_b \exp(ik_y D_y), \tag{148}$$

donde el signo menos está presente debido a que los vectores normales a los perfiles Γ_a y Γ_c, Γ_b y Γ_d son opuestos, además D_x y D_y son las longitudes de la celda rectangular en la dirección x y y, respectivamente. Por otro lado, tenemos que las condiciones de frontera (ver Ecs. 177 y 178) son

$$\tilde{\Psi}_e = \Psi_e, \qquad \tilde{\Phi}'_e = \frac{f_2}{f_1}\Phi_e, \tag{149}$$

donde f_2 y f_1 se representan como en la Ec. 179.

Aplicando las condiciones de frontera y de periodicidad en las Ecs. (145) y (146), toman las siguiente forma

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{n=1}^{N_a} N^1_{mn}\Psi^n_a - \sum_{n=1}^{N_a} L^1_{mn}\Phi^n_a\right] + \left[\sum_{n=N_a+1}^{N_a+N_b} N^1_{mn}\Psi^n_b - \sum_{n=N_a+1}^{N_a+N_b} L^1_{mn}\Phi^n_b\right] \\
&+ \left[\exp(ik_x D_x)\sum_{n=N_a+N_b+1}^{N_{abcd}-N_d} N^1_{mn}\Psi^n_a + \exp(ik_x D_x)\sum_{n=N_a+N_b+1}^{N_{abcd}-N_d} L^1_{mn}\Phi^n_a\right] \\
&+ \left[\exp(ik_y D_y)\sum_{n=N_{abcd}-N_d+1}^{N_{abcd}} N^1_{mn}\Psi^n_b + \exp(ik_y D_y)\sum_{n=N_{abcd}-N_d+1}^{N_{abcd}} L^1_{mn}\Phi^n_b\right] \\
&+ \left[\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} N^1_{mn}\Psi^n_e - \sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} L^1_{mn}\Phi^n_e\right] = 0.
\end{aligned} \tag{150}$$

y

$$\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} (-\delta_{mn} + N^2_{mn})\Psi^n_e - \frac{f_2}{f_1}\sum_{n=N_{abcd}+1}^{N_{abcd}+N_e} L^2_{mn}\Phi^n_e = 0. \tag{151}$$

En la última ecuación es necesario considerar que $\Psi_a^n = \Psi_a^{n+N_a+N_b}$ y $\Phi_a^n = \Phi_a^{n+N_a+N_b}$, con $n = 1, 2, ..., N_a$. Además de $\Psi_a^{n+N_a} = \Psi_a^{n+N_a+N_b+N_c}$ y $\Phi_a^{n+N_a} = \Phi_a^{n+N_a+N_b+N_c}$ con $n = 1, 2, ..., N_b$. Estas ecuaciones determinan una matriz cuadrada M de dimensión $N_{abcd} + 2N_e$. Como el sistema es homogéneo para obtener una solución no trivial su determinante debe ser cero, lo cual nos permite obtener una relación de dispersión que representamos por medio de las estructuras de bandas.

IV.2. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusión arbitraria

En esta sección se presenta un análisis de las estructuras de bandas para un CF2D formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones arbitrarias de superficies suaves, tales como: una barra cuadrada, una cilíndrica, una estrella de tres picos y una estrella de cinco picos. Estos cálculos fueron realizados variando las fracciones de llenado y constantes dieléctricas para las polarizaciones TE y TM. Además, mostramos el caso de inclusiones con superficies aleatoriamente rugosas para las geometrías cuadrada y cilíndrica, variando los mismos datos que en las inclusiones con superficies suaves.

IV.2.1. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusión cuadrada

Para aplicar este algoritmo, vamos a considerar un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas como se muestra en los recuadros izquierdos de la Fig. 21. Primeramente presentamos las estructuras de bandas para el caso de la polarización TM, en términos de la frecuencia reducida $\omega_r = \omega L/2\pi c$ y el vector de onda reducido $k_r = kL/2\pi$ en la primera zona de Brillouin en el espacio k (recuadro

derecho de la Fig. 21) para diferentes valores de la fracción de llenado f, que está relacionado con el lado de la inclusión cuadrada como $L = \sqrt{f}D$, donde el parámetro de red lo tomamos como $D = 1$. En la Fig. 21 mostramos las estructuras de bandas de una celda unitaria formada por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, variando solamente la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$.

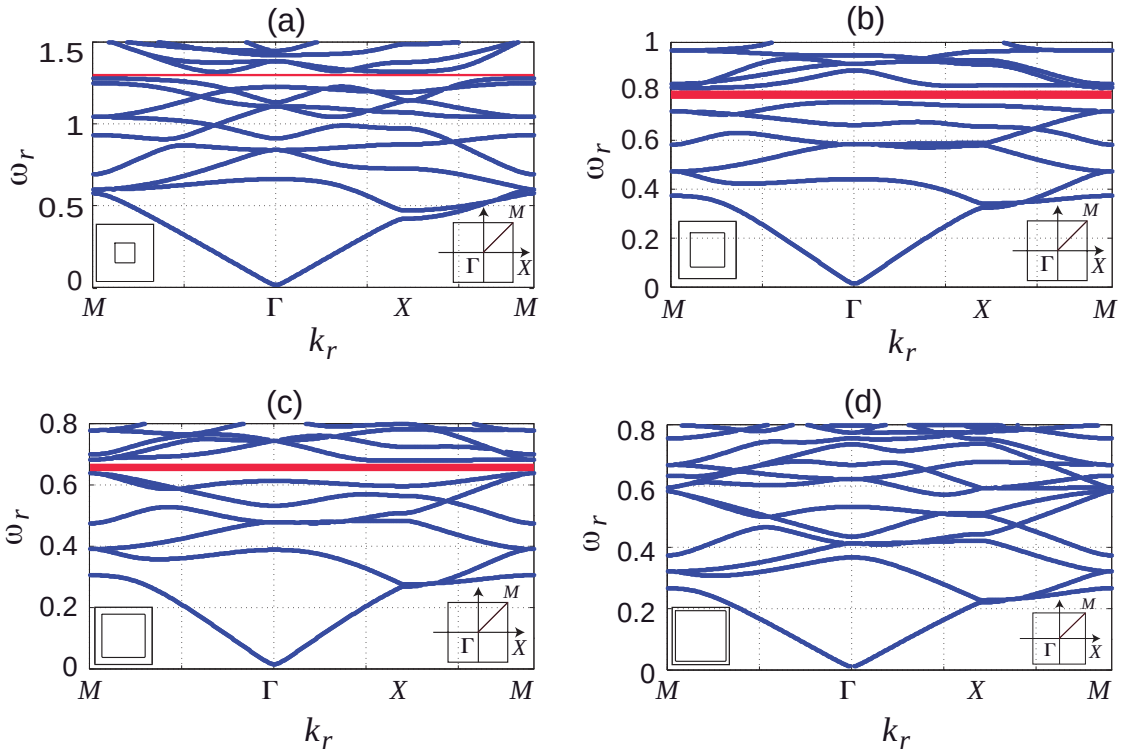

Figura 21. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas con dos materiales con constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. Para las fracciones de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$, para el caso de la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

En las Figs. 21(a)-(c) se muestran bandas prohibidas angostas (franja roja) a diferencia de la Fig.21(d) que no presenta ninguna banda prohibida. Esto indica que si nos aproximamos a una celda vacía (sin inclusión) vamos a tener una estructura sin bandas

prohibidas. En cambio, para cuando la cantidad de ambos materiales son proporcionales forma bandas prohibidas.

A continuación en la Fig. 22 presentamos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada con inclusión de barras cuadradas para el caso de la polarización TE consideramos los mismos valores utilizados en el caso anterior Fig. 21 con constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ para la formación de la celda unitaria e igualmente variando la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$.

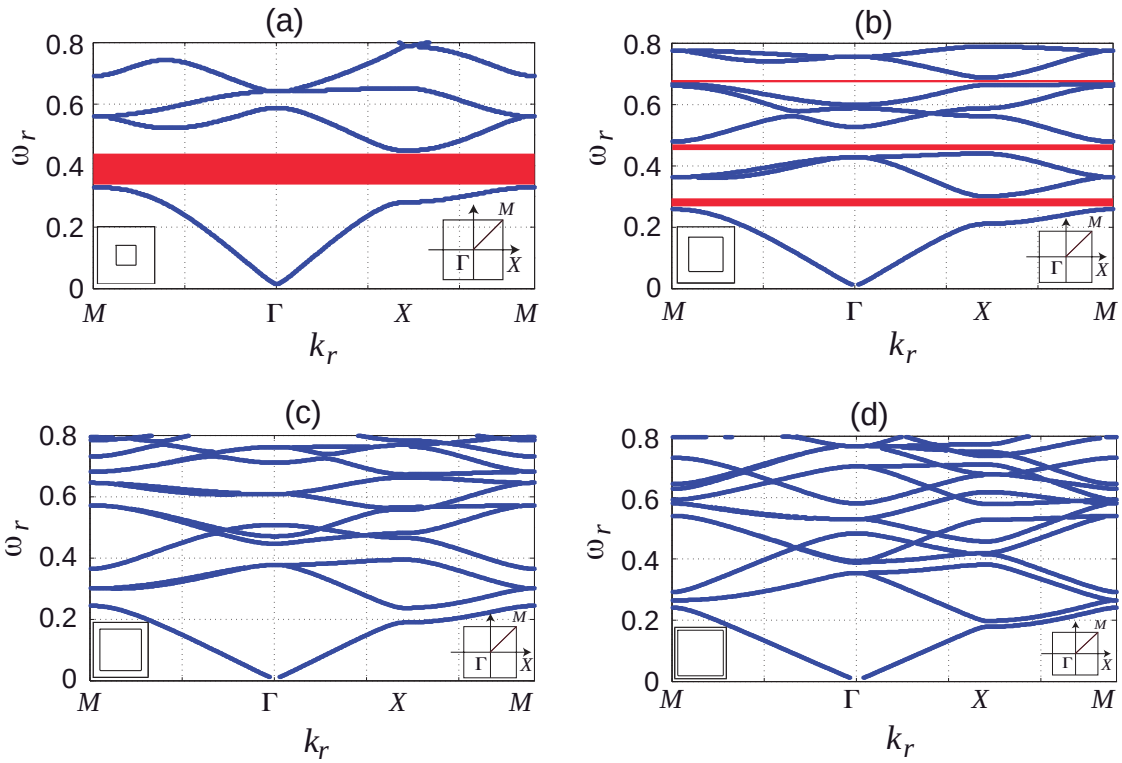

Figura 22. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas con dos materiales con constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. Para las fracciones de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d)$f = 0.78$, para el caso de la polarización TE. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

Cabe recordar que estos valores de las constantes dieléctricas o índices de refracción

son posibles valores de materiales reales. Sin embargo como nuestro trabajo de tesis es numérico, sólo tratamos de considerar valores extremos para que nos permitan hacer un estudio más completo.

En la Fig. 22(a) observamos una banda prohibida bastante ancha alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 0.4$, a diferencia de la Fig. 21(a) en la cual la banda prohibida que se presenta es demasiado angosta alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 1.4$. También podemos notar que en la Fig. 22(b) obtuvimos tres bandas prohibidas angostas en distintas frecuencias reducidas a diferencia de la Fig. 21(b) que soló nos presenta una banda prohibida angosta. Por otro lado, podemos apreciar que en las Figs. 22(c) y (d) no se obtuvo ninguna banda prohibida. Esto nos permite concluir que para el caso de la polarización TE, que entre menor es la fracción de llenado de ambos materiales se puede tener mayor control de la propagación de la luz a través de un CF2D debido a la influencia de las bandas prohibidas.

Ahora vamos a hacer un análisis similar que el anterior, para una fracción de llenado particular y variando las propiedades de los materiales que forman el CF2D. En la Fig. 23 mostramos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con una inclusión con barras cuadradas para el caso de la polarización TE con una fracción de llenado $f = 0.57$. Consideramos las constantes dieléctricas de dos materiales (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$.

Podemos observar que en las Figs. 23(c) y (d) se presentan bandas prohibidas a diferencia de las Figs. 23(a) y (b). Lo que nos da a conocer que el contraste de las constantes dieléctricas de dos materiales influye para la obtención de dichas bandas prohibidas. Por consiguiente, vemos que con una diferencia aún más grande entre las constantes dieléctricas de cada material se puede tener bandas prohibidas más anchas,

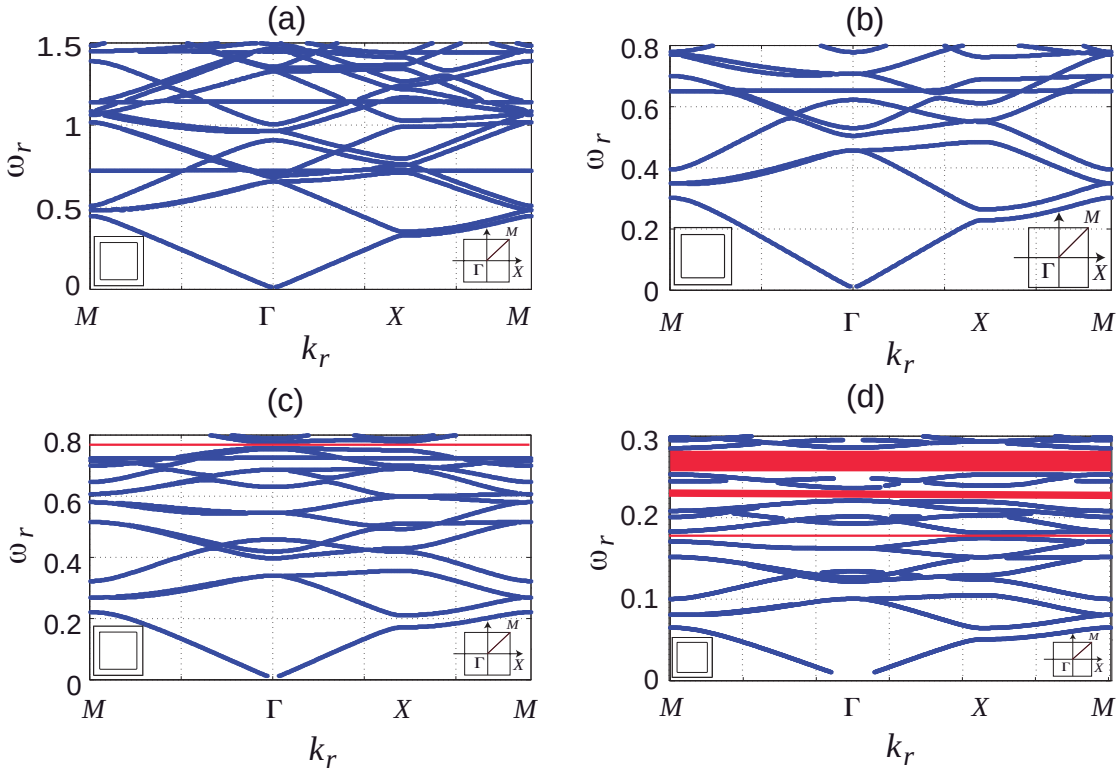

Figura 23. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas con dos materiales distintos de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$. La fracción de llenado es $f = 0.57$ para la polarización TE. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

como lo podemos apreciar en la Fig. 23(d).

Similarmente, hicimos un análisis para la polarización TM, en la cual consideramos la misma fracción de llenado $f = 0.57$ para una celda unitaria cuadrada con inclusión cuadrada. En la Fig. 24 mostramos las estructuras de bandas para los diferentes casos de las constantes dieléctricas de (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$.

Notamos que en las Figs. 24(a) y (b) no presentaron bandas prohibidas al igual que en las Figs. 23(a) y (b) a pesar del cambio de polarización. Sin embargo, para dicha polarización TM en la Fig. 24(c), presenta una banda prohibida más ancha y en

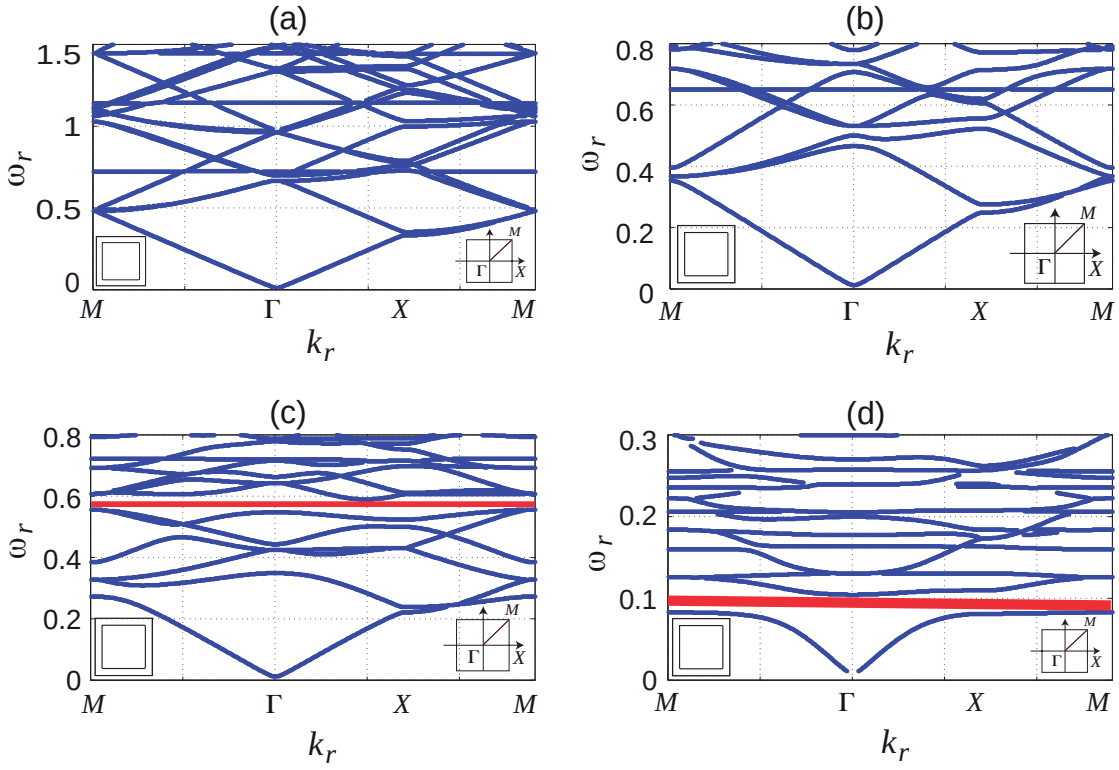

Figura 24. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas para dos materiales distintos de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$. La fracción de llenado es $f = 0.57$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

posición diferente en comparación de la Fig. 23(c). Caso contrario en la Fig. 24(d) que sólo podemos apreciar una sola banda prohibida angosta a diferencia de la Fig. 23(d).

Para terminar con esta geometría analizamos las estructuras de bandas de un CF2D invirtiendo el orden del tipo de materiales considerados en los casos anteriores. En la Fig. 25 ya sólo presentamos los dos casos más relevantes para el tipo de polarización TM.

Las constantes dieléctricas de los materiales que consideramos son (Fig. 25): (a) $\varepsilon_1 = 10.89$ y $\varepsilon_2 = 1.69$, (b) $\varepsilon_1 = 129.96$ y $\varepsilon_2 = 2.78$ para los casos contrarios de las Figs. 24(c) y (d). Los resultados fueron obtenidos con la misma fracción de llenado $f = 0.57$

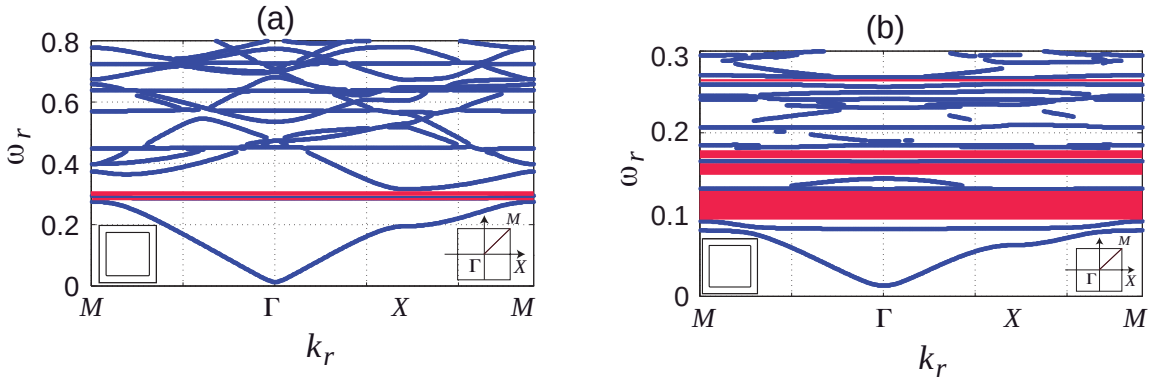

Figura 25. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cuadradas para dos materiales diferentes de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 10.89$ y $\varepsilon_2 = 1.69$, (b) $\varepsilon_1 = 129.96$ y $\varepsilon_2 = 2.78$. La fracción de llenado es $f = 0.57$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

con la que se estuvo trabajando para las Figs. 23 y 24 bajo la polarización TM.

Observamos que al cambiar el orden de los materiales y para un alto contraste de las constantes dieléctricas en las Figs. 25(a) y (b) aumenta la presencia de las bandas prohibidas y son más anchas en comparación de las Figs. 24(c) y (d).

IV.2.2. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusión cilíndrica

Enseguida mostramos el cálculo de las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con una inclusión cilíndrica. En la Fig. 26 consideramos una celda unitaria formada por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ variando la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$, para la polarización TE.

En la Fig. 26(a) podemos observar la aparición de una banda prohibida alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 0.4$. Al igual que en la Fig. 26(b) podemos apreciar la

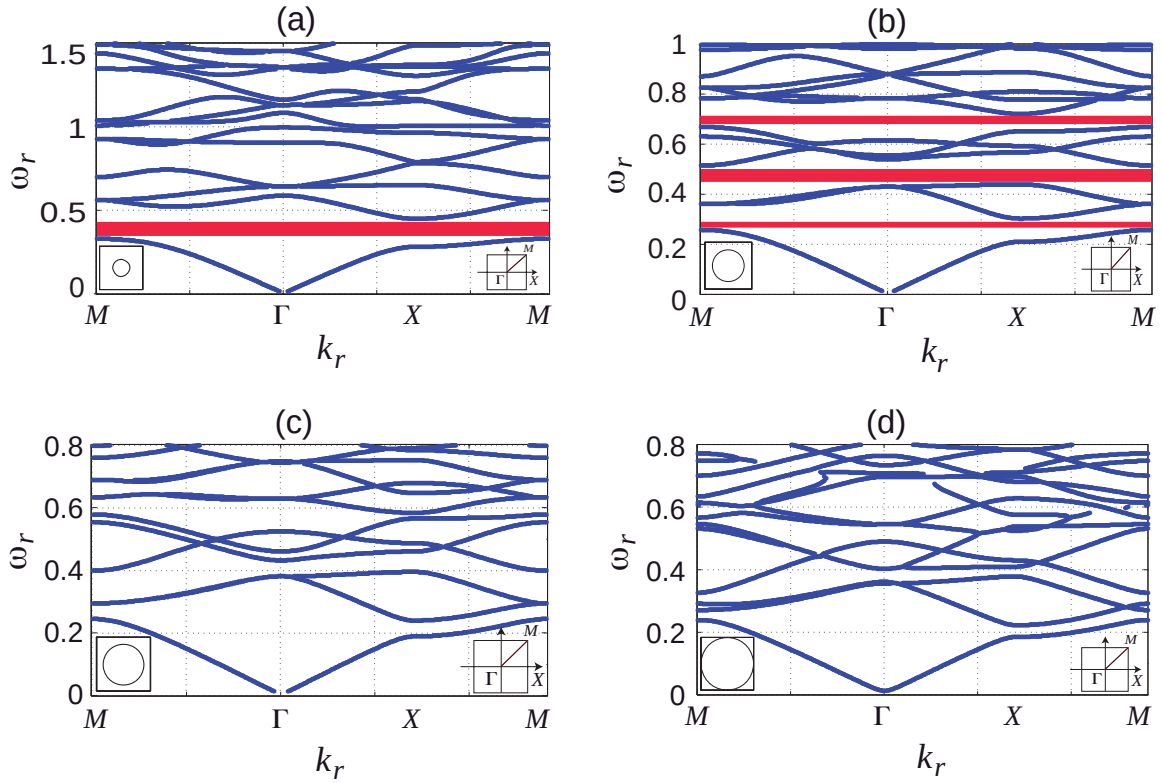

Figura 26. Estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada con una inclusión cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$, variando la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$, para el caso de la polarización TE. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

aparición de tres bandas prohibidas, la primera alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 0.25$, la segunda en $\omega_r = 0.5$ y la tercera aproximadamente en $\omega_r = 0.7$. Esto nos indica que al ser iluminado un cristal fotónico truncado, la luz será reflejada completamente con estas frecuencias bajo la polarización TE. En las Figs. 26(c) y (d) no obtuvimos ninguna banda prohibida, esto nos dice que bajo está polarización se trasmitirá la luz a través del cristal para todo intervalo de frecuencias de $(0, 0.8)$.

El análisis anterior, también lo realizamos para la polarización TM considerando los mismo parámetros para los diferentes casos. En las Figs. 27(b) y (c) no observamos bandas prohibidas a diferencia de las Fig. 26(b) bajo la polarización TE.

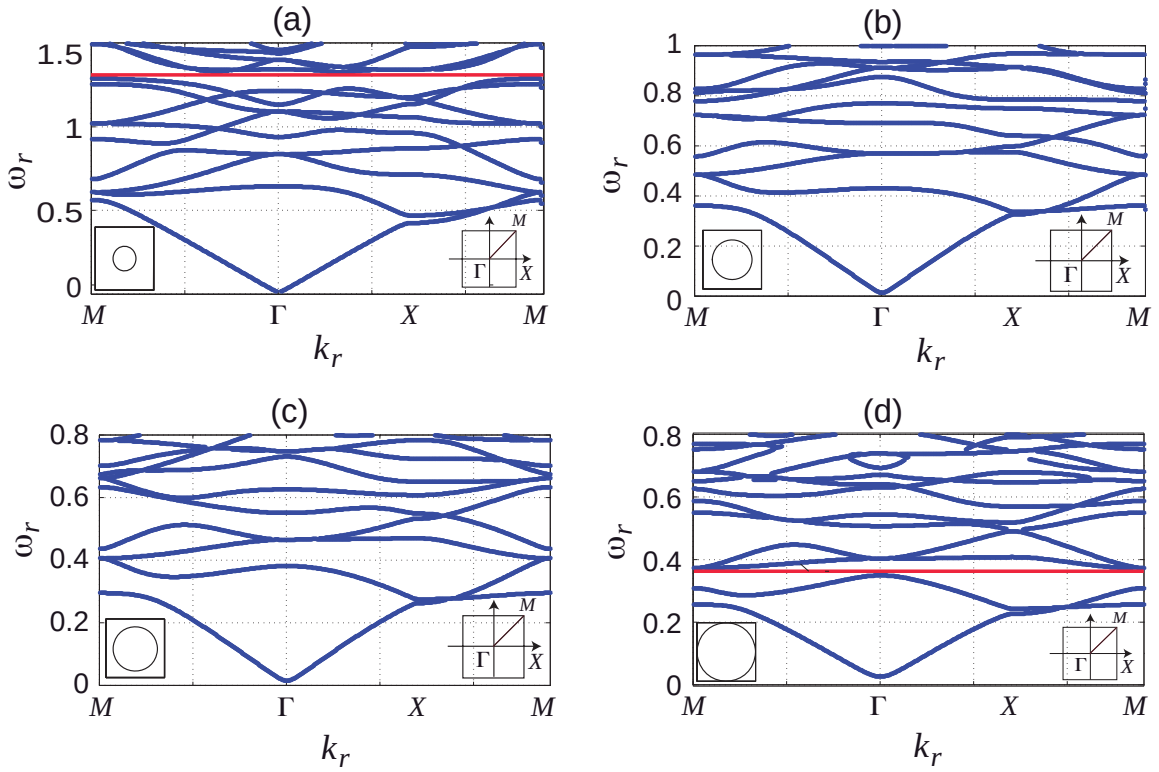

Figura 27. Estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con una inclusión cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. Variando la fracción de llenado (a) $f = 0.12$, (b) $f = 0.36$, (c) $f = 0.57$ y (d) $f = 0.78$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

En cambio en las Figs. 27(a) y (d) podemos ver claramente que existen bandas prohibidas para la polarización TM para ciertas frecuencias reducidas. Además, observamos que las posiciones de las bandas prohibidas fueron modificadas en comparación del caso de la polarización TE.

De igual manera, hicimos el análisis variando el tipo de materiales que forman la celda unitaria del CF2D con una inclusión cilíndrica. En la Fig. 28, sólo mostramos las estructuras de bandas para la polarización TM. Similarmente, consideramos las constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$ con la fracción de llenado $f = 0.57$.

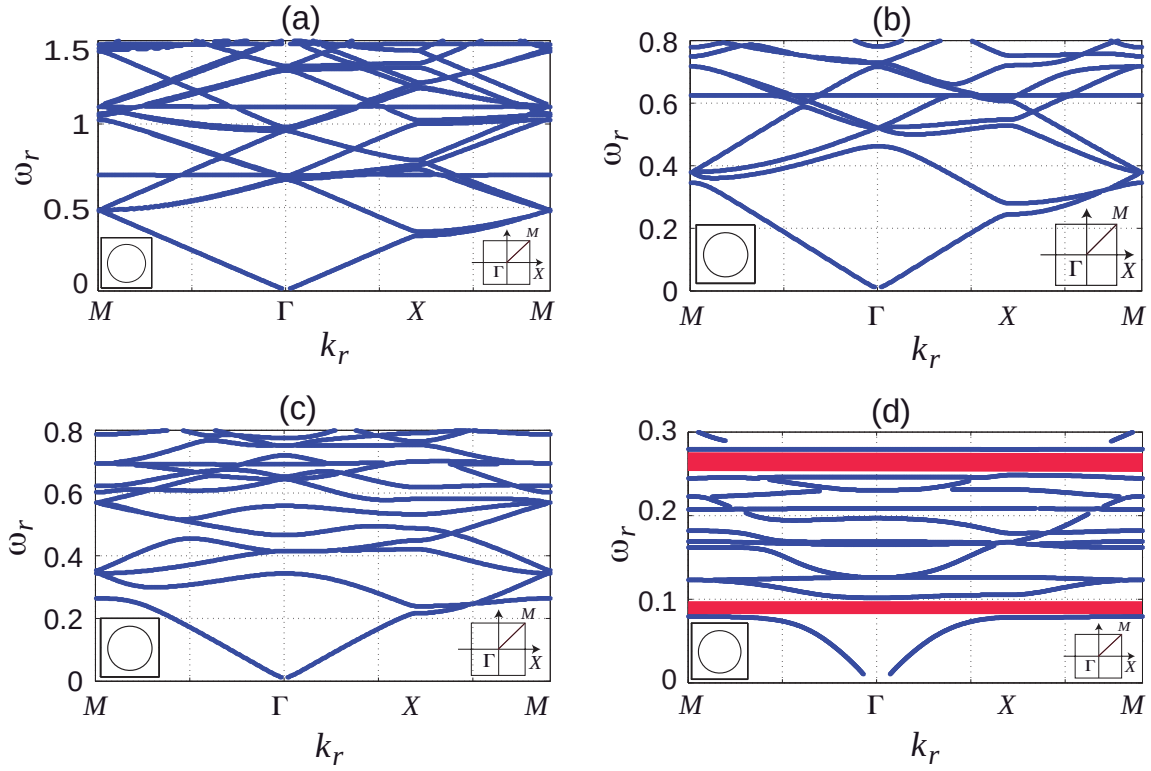

Figura 28. Estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con una inclusión cilíndrica de contorno sólido para dos materiales distintos de constantes dieléctricas (a) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (b) $\varepsilon_1 = 2.07$ y $\varepsilon_2 = 5.76$, (c) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 10.89$, (d) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$ con una fracción de llenado $f = 0.57$ para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

Notamos que en las Figs. 28(a)-(c) no presentaron ninguna banda prohibida a diferencia de la Fig. 28(d) que tiene dos bandas prohibidas en un intervalo de frecuencias más angosto en comparación de los casos anteriores.

IV.2.3. Estructuras de bandas de un CF2D con una inclusión con geometrías especiales

En esta sección mostramos el cálculo de estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada con inclusiones que tienen geometrías especiales en la base de

las columnas. Los cálculos fueron realizados para una fracción de llenado $f = 0.57$ y constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. En la Fig. 29(a) se muestra la celda que tiene como inclusión una hipocicloide de tres ramas o también conocida como la curva deltoide, al igual en la Fig. 29(c) presentamos una celda que tiene una inclusión de una hipocicloide de cinco ramas. Estas curvas están descritas por un punto que está situado en el interior de una circunferencia que rueda sin resbalamiento de otra circunferencia (Bronshtein *et al.*, 1973), las cuales están definidas por las ecuaciones paramétricas:

$$x = r(m-1)\cos(t) + r\cos\left(t\,(m-1)\right), \tag{152}$$

$$y = r(m-1)\sin(t) - r\sin\left(t\,(m-1)\right), \tag{153}$$

donde $m = R/r$, R es el radio de la circunferencia fija y r el radio de la circunferencia que gira. Para el caso de la Fig. 29(a) tenemos que $R = 3$ y $r = 1$ lo que nos da un entero y la curva se forma en 3 ramas que rodean el círculo estacionario. Similarmente tenemos este caso para la Fig. 29(b) con $R = 5$ y $r = 1$.

En la Fig. 29(e) tenemos una celda cuadrada que tiene como inclusión un epicicloide de cuatro ramas, al igual que las anteriores geometrías, ésta es una curva descrita por un punto de una circunferencia que rueda exteriormente sobre otra circunferencia fija. Esta figura geométrica está definida por las ecuaciones paramétricas:

$$x = (a+b)\cos(t) - h\cos\left(\frac{a+b}{b}t\right), \tag{154}$$

$$y = (a+b)\sin(t) - h\sin\left(\frac{a+b}{b}t\right), \tag{155}$$

donde a es el radio de la circunferencia fija, b el radio de la circunferencia que gira y h la distancia hacia el radio fijo. Para este caso tomamos los valores $a = 4$, $b = 1$ y $h = 1/2$.

Todas estás inclusiones manejan un contorno suave y fueron calculadas bajo la polarización TE. En las Figs. 29(b), (d) y (f) se presentan las estructuras de bandas,

de igual manera, en términos de la frecuencia reducida $\omega_r = \omega L/2\pi c$ y el vector de Bloch reducido $k_r = kL/2\pi$ en la primera zona de Brillouin.

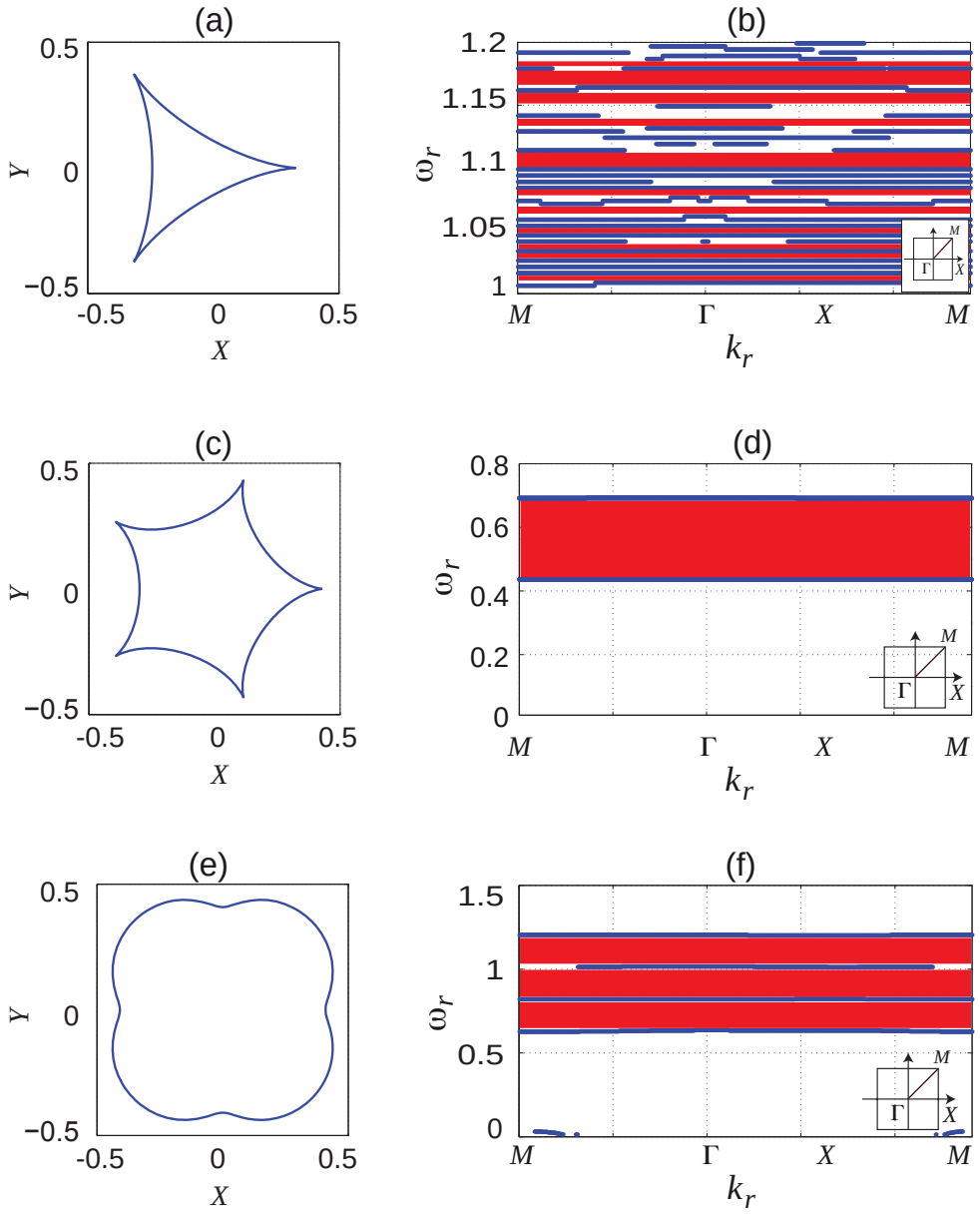

Figura 29. Celda unitaria cuadrada que tiene como inclusiones (a) una hipocicloide de tres ramas, (c) una hipocicloide de cinco ramas y (e) una epicicloide de cuatro ramas, con sus respectivas estructuras de bandas para un CF2D. El recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k.

Observamos que para la inclusión de una hipocicloide de tres ramas presenta varias bandas prohibidas angostas entre el intervalo $(1, 1.2)$ (Fig. 29(b)), pero para una in-

clusión con una hipocicloide de cinco ramas se obtiene un banda prohibida ancha en el intervalo de las frecuencias reducidas $(0.43, 0.7)$ (Fig. 29(d)). Por último notamos que para la inclusión de la epicicloide obtuvimos tres bandas prohibidas en distintas posiciones de las frecuencias, la primera se encuentra en el intervalo $(0.6, 0.7)$, la segunda banda prohibida en $(0.8, 1)$ y la última alrededor del intervalo $(1.1, 1.3)$ (Fig. 29(f)). Estos ejemplos nos muestran que con el método integral podemos modelar celdas unitarias con inclusiones que tienen geometrías más complicadas que consideramos en este trabajo permitiendo obtener bandas prohibidas más anchas que con las geometrías más sencillas bajo ciertas condiciones.

IV.2.4. Estructuras de bandas de un CF2D con inclusiones aleatoriamente rugosas

Por último, en esta sección analizamos el cálculo de estructuras de bandas para un CF2D para una celda cuadrada con inclusiones cuadradas y cilíndricas con superficies aleatoriamente rugosas.

A pesar de la existencia de una tecnología bien desarrollada se tiene defectos en la fabricación de superficies para los cristales fotónicos. Por esta razón, estamos interesados en estudiar la influencia de la rugosidad en las paredes de un CF2D real. Para estudiar los efectos de la rugosidad, consideramos un perfil de superficie aleatorio sobre la inclusión cuadrada de la celda unitaria. Este perfil está definido por una realización de un proceso aleatorio de correlación Gaussiana que obedece una función de densidad de probabilidad exponencial negativa (Maradudin *et al.*, 1990).

Enseguida mostramos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con inclusión cuadrada con superficies aleatoriamente rugosas bajo la polarización TE. En la Fig. 30(a) mostramos el perfil que tiene rugosidad aleatoria

con una longitud de corrrelación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.00977$. Tomamos en cuenta los mismos parámetros que en el caso de un perfil suave (Fig. 22(a)), con constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ para la formación de la celda unitaria y una fracción de llenado $f = 0.12$. Se presenta en la Fig. 30(b) la estructura de bandas correspondiente. En la Fig. 30(c) utilizamos los mismos valores mencionados anteriormente, excepto con la fracción de llenado de $f = 0.78$ (como en la Fig. 22(d)) con su respectiva estructura de bandas (Fig. 30(d)). Para este ejemplo consideramos una rugosidad pequeña que todavía no presenta cambios apreciables en la estructura de bandas.

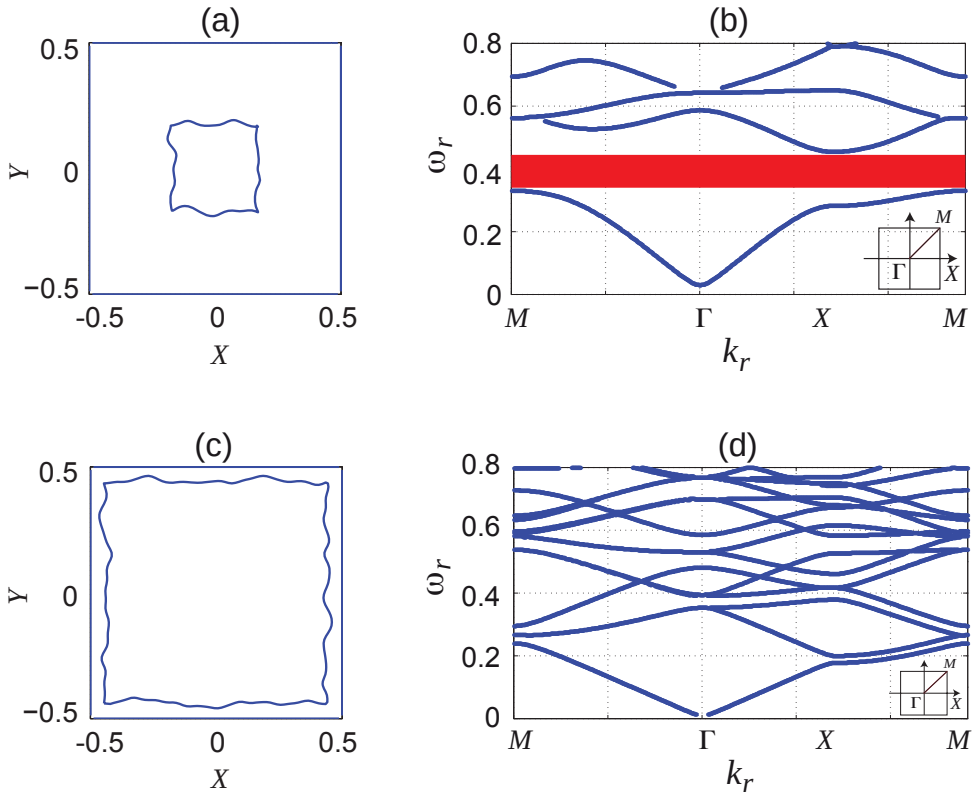

Figura 30. Celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene una inclusión cuadrada con una superficie aleatoriamente rugosa con las fracciones de llenado (a) $f = 0.12$ y (c) $f = 0.78$. ((b) y (d)) Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cuadrada con superficies rugosas formada por dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ para la polarización TE, respectivamente. El recuadro derecho inferior muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k.

A pesar del efecto de la rugosidad notamos que en la Fig. 30(b) no presenta grandes cambios en las estructuras de bandas. Similarmente observamos el mismo resultado en la Fig. 30(d). Esto no presenta un gran cambio en comparación de las Figs. 22(a) y (d).

A continuación analizamos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada con inclusión con barras cuadradas con superficies rugosas, para la fracción de llenado $f = 0.57$ bajo la polarización TE. En la Fig. 31(a) observamos un perfil que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de corrrelación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.0249$. Consideramos los mismos parámetros que se utilizaron en el caso de un perfil suave (Figs. 23(a) y (d)), con constantes dieléctricas (b) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (c) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$ para la formación de la celda unitaria cuadrada.

En las Figs. 31(b) y (c) podemos apreciar que algunas zonas de las bandas permitidas han cambiado muy poco de posición con respecto a las frecuencias. Observamos que el efecto de la rugosidad ha modificado la presencia de las bandas prohibidas haciéndolas más angostas, en comparación a la Fig. 23(d), la cual tiene una banda prohibida más ancha alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 0.27$.

Similarmente, analizamos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con inclusión cilíndrica con superficies aleatoriamente rugosas bajo la polarización TE. Los cálculos fueron realizados para una fracción de llenado $f = 0.57$ y constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. En la Fig. 32(a) se muestra la celda unitaria formada por el perfil que tiene una rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.0213$. De la misma manera observamos en la Fig. 32(c) la celda unitaria con rugosidad aleatoria para $a = 0.025$ y $\delta = 0.005$. En las Figs. 32(b) y (d) se presentan las estructuras de bandas.

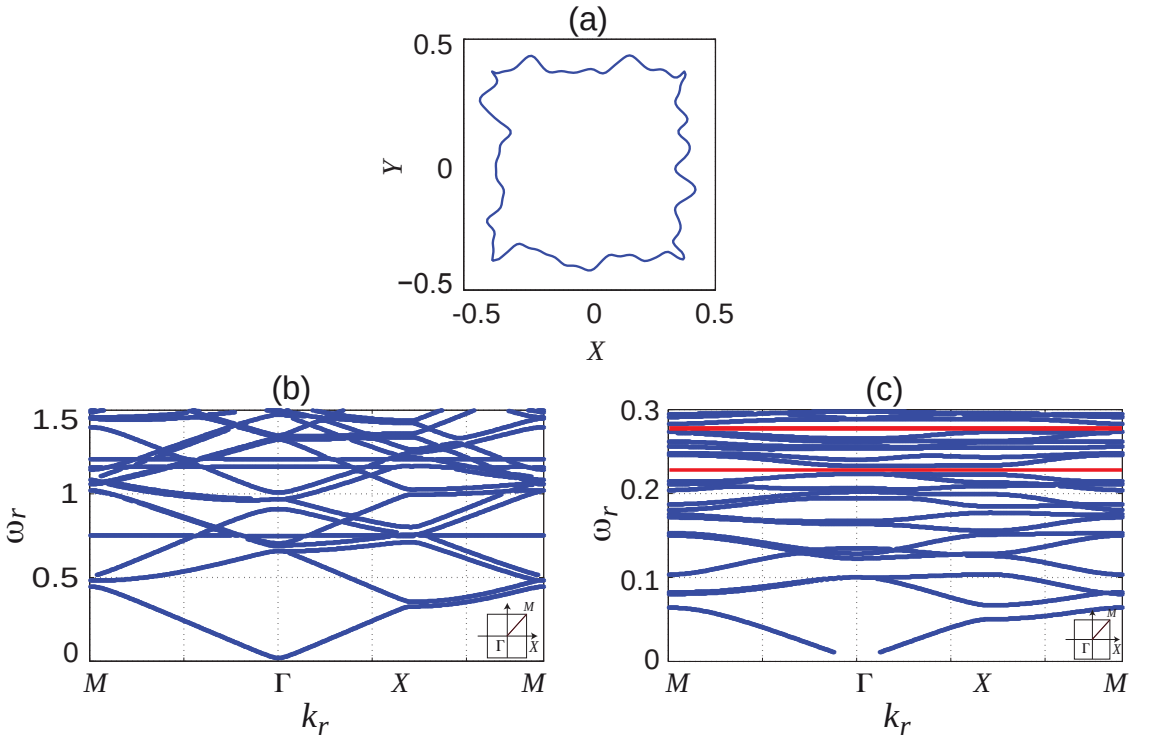

Figura 31. (a) Celda unitaria cuadrada de un CF2D con una inclusión cuadrada con una superficie rugosa. Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cuadrada para dos materiales distintos de constantes dieléctricas (b) $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (c) $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$, con una fracción de llenado $f = 0.57$ bajo la polarización TE. El recuadro derecho inferior muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k.

Podemos observar que las posiciones de las bandas permitidas fueron afectadas por la rugosidad en comparación a la Fig. 26(c). A pesar del contraste de la rugosidad en ambas gráficas notamos que son muy pocos los cambios que se obtuvieron en las estructuras de bandas. En ambos casos no presentaron bandas prohibidas.

Ahora mostramos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada con inclusión cilíndrica con superficies aleatoriamente rugosas, para la fracción de llenado $f = 0.12$. Dicha celda esta formada por los mismo parámetros que en el perfil suave, dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. En la Fig. 33(a) se muestra el perfil que tiene una rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.00977$. Las

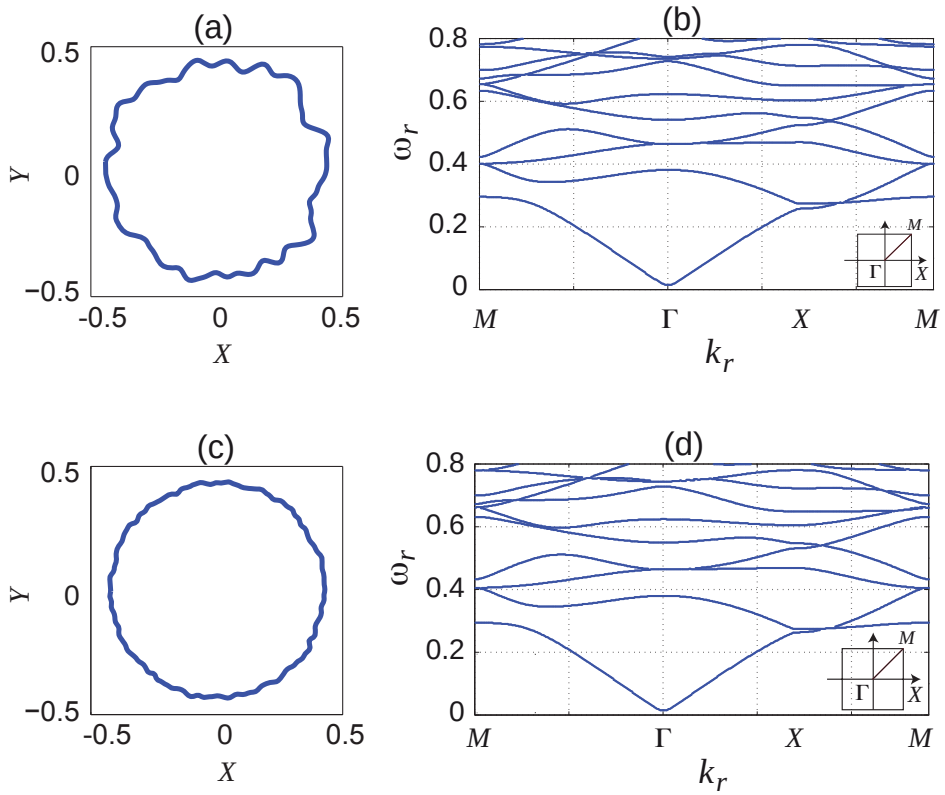

Figura 32. Celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene una inclusión cilíndrica con una superficie aleatoriamente rugosa (a) con una longitud de correlación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.0213$, (c) $a = 0.025$ y $\delta = 0.005$. ((b) y (d)) Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cilíndrica con superficies rugosas formado por dos materiales de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ y con una fracción de llenado $f = 0.57$, para la polarización TE. En el recuadro derecho inferior se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k.

estructuras de bandas fueron calculadas bajo la polarización TE (Fig.33(b)) y bajo la polarización TM (Fig. 33(c)).

En la Fig. 33(b) notamos que la banda prohibida que se presenta alrededor de la frecuencia reducida $\omega_r = 0.4$ es similar a la que se observa en la Fig. 26(a). Por otro lado, observamos resultados parecidos en la Fig. 33(c) comparándola con la Fig. 27(a).

Igualmente hicimos este análisis para una fracción de llenado $f = 0.68$, considerando las mismas constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$. En la Fig. 34(a) observamos el perfil que tiene una rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.0524$

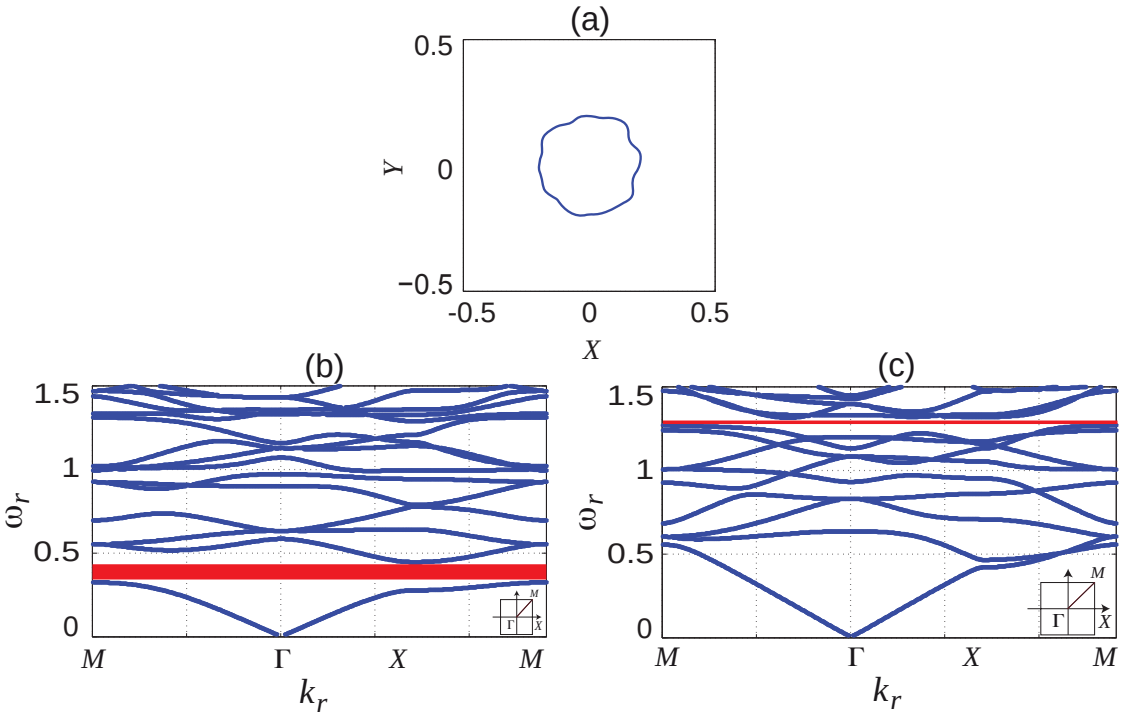

Figura 33. (a) Celda unitaria cuadrada de un CF2D con una inclusión cilíndrica con una superficie rugosa. Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ con una fracción de llenado $f = 0.12$, (b) para la polarización TE, (c) para la polarización TM. En el recuadro derecho inferior se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k.

y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.02326$. Se observan las estructuras de bandas para la polarización TE (Fig. 34(b)) y para la polarización TM (Fig. 34(c)).

Observamos que a pesar del efecto de la rugosidad no obtuvimos ninguna banda prohibida para ambas polarizaciones. Sin embargo, las bandas permitidas fueron afectadas en sus posiciones.

Por último en la Fig. 35 mostramos las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada que tiene una inclusión de barras cilíndricas con superficies rugosas, para la fracción de llenado $f = 0.57$. Considerando las constantes dieléctricas de la celda unitaria $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (a) para la polarización TE, (b) para la polarización TM y para las constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$, (c)

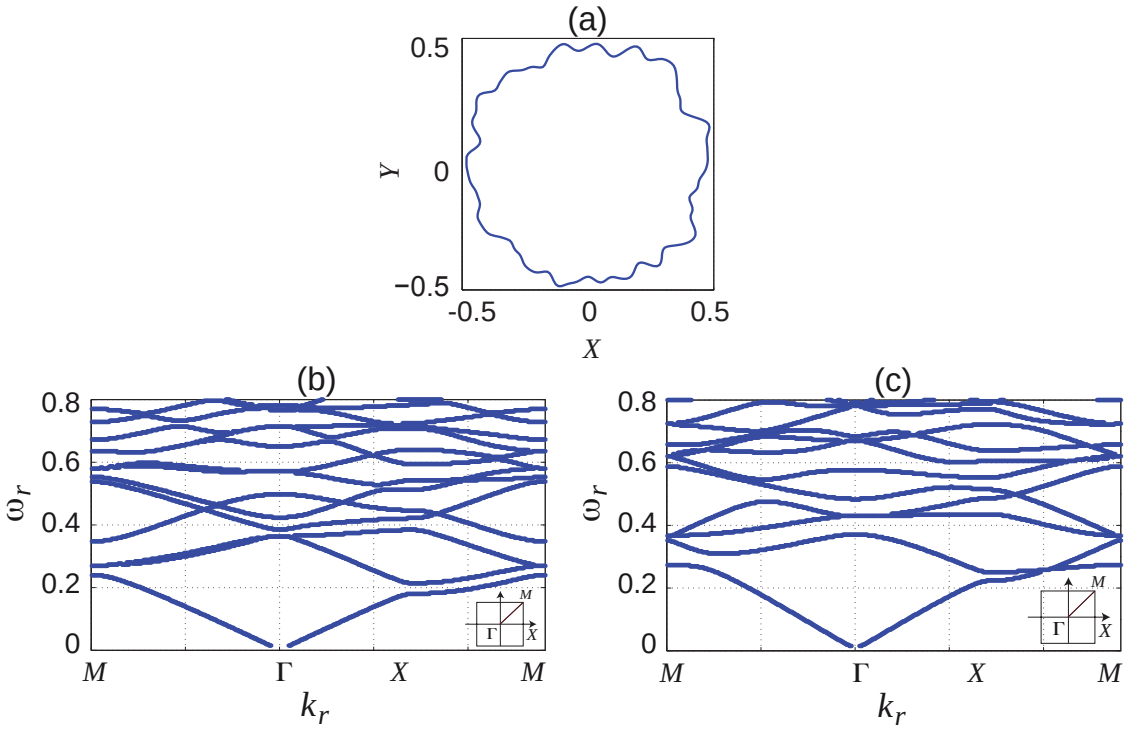

Figura 34. (a) Celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene una inclusión cilíndrica con una superficie rugosa. Estructuras de bandas para un CF2D con barras de sección cilíndrica para dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1$ y $\varepsilon_2 = 8.9$ con una fracción de llenado $f = 0.12$, (b) para la polarización TE, (c) para la polarización TM. En el recuadro derecho inferior se muestra la primera zona de Brillouin en el espacio k.

para la polarización TE, (d) para la polarización TM. Todo esto para un perfil que tiene rugosidad aleatoria con una longitud de correlación $a = 0.0524$ y una desviación estándar de las alturas $\delta = 0.0213$.

Notamos que el efecto de la rugosidad solamente afecto en las posiciones de bandas permitidas en las Figs. 35(a) y (b) ya que no obtuvimos bandas prohibidas bajo ninguna polarización. Por otro lado, observamos que con una diferencia grande entre las constantes dieléctricas obtenemos bandas prohibidas para ambas polarizaciones. A pesar de este último análisis podemos ver que bajo la polarización TM obtuvimos bandas prohibidas más anchas (Fig. 35(d)).

Estos resultados nos muestra que el método integral permite modelar celdas uni-

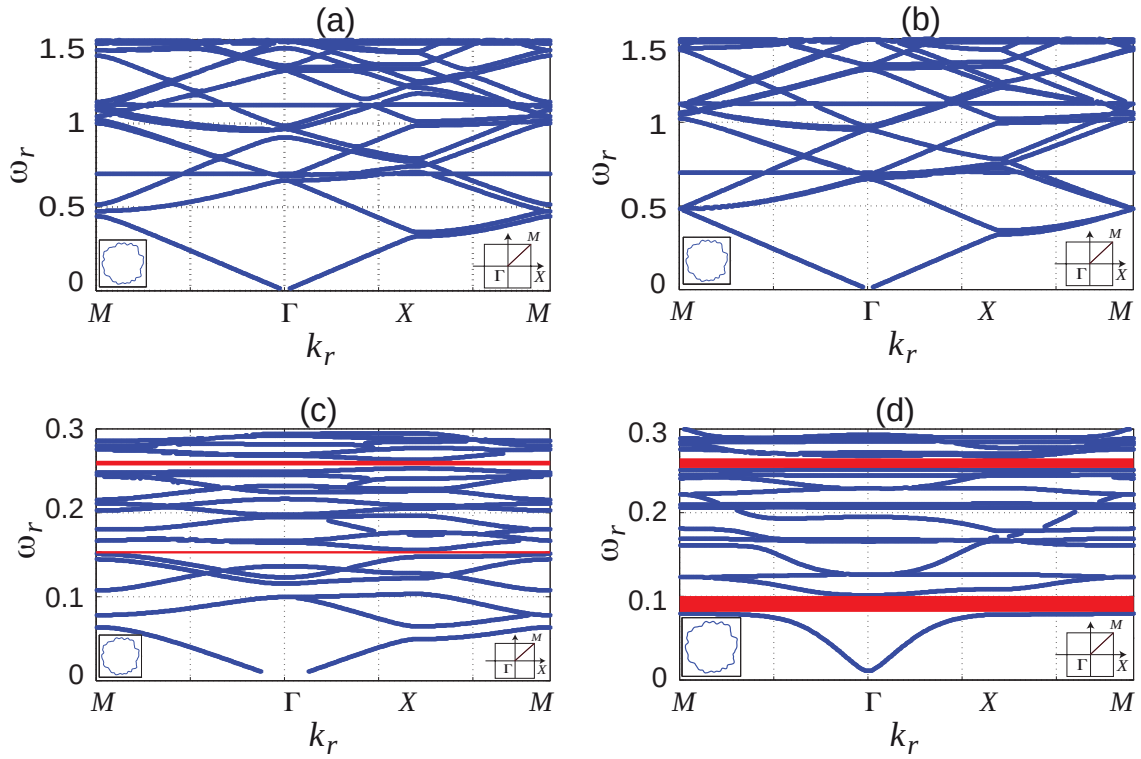

Figura 35. Estructuras de bandas de un CF2D con una celda unitaria cuadrada y una inclusión con barras cilíndricas con una superficie aleatoriamente rugosa, considerando dos materiales distintos de constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 1.69$ y $\varepsilon_2 = 2.59$, (a) para la polarización TE, (b) para la polarización TM y para las constantes dieléctricas $\varepsilon_1 = 2.78$ y $\varepsilon_2 = 129.96$, (c) para la polarización TE, (d) para la polarización TM. El recuadro izquierdo inferior es la celda unitaria en el espacio real y el recuadro derecho inferior corresponde a la primera zona de Brillouin en el espacio k, respectivamente.

tarias con inclusiones arbitrarias con superficies aleatorimente rugosas, en las cuales necesitamos una rugosidad notable para poder observar cambios notorios en las estructuras de bandas.

Capítulo V

CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos mostrado un estudio teórico y numérico de las estructuras de bandas de un cristal fotónico unidimensional y bidimensional. El trabajo está motivado en gran parte por la necesidad de una nueva alternativa de desarrollo en la tecnología de telecomunicaciones que sea puramente fotónico.

En este capítulo mencionamos un breve resumen y en base a los resultados obtenidos enunciamos las conclusiones más importantes del trabajo.

Hemos aplicado dos métodos numéricos para calcular la estructura de bandas de un cristal fotónico unidimensional formado por un sistema multicapas infinito y para un cristal fotónico bidimensional formado por una celda unitaria cuadrada con inclusiones que tienen geometrías arbitrarias y complejas. Para este tipo de cristales fotónicos consideramos dos materiales dieléctricos diferentes.

La primera técnica numérica es el método de expansión de ondas planas que a pesar de ser versátil está limitado para sistemas periódicos con geometrías complicadas. Este método consiste en hacer una expansión en serie de Fourier las funciones periódicas que definen a la función dieléctrica y el campo eléctrico. Estas expansiones se introducen a la ecuación de onda para obtener una ecuación de valores propios y su solución da

como resultado las estructuras de bandas.

El método de expansión de ondas planas permite modelar la función dieléctrica con un número grande de los coeficientes de Fourier; sin embargo, para calcular las estructuras de bandas de un CF1D es suficiente con pocas ondas planas. Por otro lado, al variar las longitudes de las capas que forman la celda unitaria, las estructuras de bandas presentan variaciones pequeñas en las posiciones de las bandas prohibidas. En cambio, cuando el contraste es más grande entre los índices de refracción de dos materiales distintos se obtienen bandas prohibidas más anchas.

La segunda técnica es el método de la ecuación integral que parte del segundo teorema integral de Green permitiendo obtener un par de ecuaciones integrales acopladas que involucran, como incógnitas el modo del campo y su derivada normal evaluados en las fronteras o superficies involucradas. La discretización del sistema resulta en una ecuación matricial homogénea cuya solución determina las funciones fuente, con las que se puede calcular las estructuras de bandas. Con este método se trata el cálculo de las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria cuadrada y con inclusiones arbitrarias que tienen una superficie suave o aleatoriamente rugosa. Estas estructuras fueron analizadas para los casos de la polarización del campo eléctrico transversal (TE) y del campo magnético transversal (TM).

El método integral tiene una gran ventaja en comparación de otros métodos; la cual es sólo tener en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos de la celda unitaria y de su inclusión, permitiendo una menor cantidad de recursos computacionales. Además, el método permite estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas; en particular la rugosidad en la superficie de los cristales fotónicos.

El cálculo de las estructuras de bandas para un CF2D con una celda unitaria

cuadrada y con inclusiones arbitrarias que tienen una superficie suave nos permite concluir, que al variar la fracción de llenado las estructuras presentan bandas prohibidas más anchas para el caso de la polarización TE. En cambio, para diferentes materiales con constantes dieléctricas específicas, la inclusión con barras cuadradas presentó bandas prohibidas anchas para la polarización TE. Similarmente, para el caso de la inclusión cilíndrica se obtuvieron bandas prohibidas bajo la polarización TM. Por otro lado, las estructuras de bandas de un CF2D con inclusiones con formas geométricas de una hipocicloide y de una epicicloide mostraron características particulares. Por ejemplo, para la inclusión con forma de una hipocicloide de cinco ramas presentó una banda prohibida más ancha que los otros tipos de geometrías que hemos presentado. Esto nos permite concluir, que al variar la geometría de la inclusión de la celda cuadrada y no los diferentes tipos de materiales, se puede tener mayor control de la propagación de la luz a través de un cristal fotónico finito.

Los efectos de la rugosidad aleatoria sobre la superficie de los diferentes tipos de inclusiones de la celda unitaria modifican considerablemente la estructura de bandas, como enseguida mencionamos para los diferentes casos que se analizaron. Se obtienen bandas prohibidas más anchas para las inclusiones con barras cuadradas y cilíndricas aleatoriamente rugosas bajo la polarización TE al variar las fracciones de llenado. Por otro lado, al variar los valores de las constantes dieléctricas, la inclusión cuadrada con superficies rugosas presenta bandas prohibidas bajo la polarización TE y para la inclusión cilíndrica rugosa para la polarización TM. Esto nos permite concluir que con una rugosidad aleatoria en la superficie de las inclusiones se obtienen bandas prohibidas más anchas que en el caso ideal (superficies suaves), lo cual es importante tomar en cuenta en la fabricación de los cristales fotónicos.

A pesar de que en este trabajo no hicimos un análisis para un cristal fotónico

finito, se sabe que también este método integral permite la propagación de ondas electromagnéticas a través del sistema periódico finito a diferencia del método de ondas planas que sólo calcula la estructura de bandas fotónicas.

Referencias

Archuleta-García, R., Manzanares-Martínez, M. B., y Manzanares-Martínez, J. (2007). Una descripción del método de ondas planas para el cálculo de bandas fotónicas. *Revista Boliviana de Física*, **13**(13): 79–85.

Arfken, G. B., Weber, H. J., y Harris, F. E. (2013). *Mathematical methods for physicists*. Academic press, U.S.A., séptima edición. 674-679 pp.

Bronshtein, I., Semendiaev, K., Rojas, I. H., y Bernardo, E. A. (1973). *Manual de matemáticas para ingenieros y estudiantes*. Mir, segunda edición. 118-122 pp.

Ding, F.-N., Chen, Y.-Y., y Shi, J.-L. (2010). Propagation behavior of incoherent beams in one-dimensional photonic crystals. *JOSA A*, **27**(3): 422–425.

Foresi, J. S., Villeneuve, P. R., Ferrera, J., Thoen, E. R., Steinmeyer, G., Fan, S., Joannopoulos, J. D., Kimerling, L. C., Smith, H. I., y Ippen, E. P. (1997). Photonic-bandgap microcavities in optical waveguides. *Nature*, **390**(6656): 143–145.

Joannopoulos, J. D., Villeneuve, P. R., y Fan, S. (1997). Photonic crystals: putting a new twist on light. *Nature*, **386**(6621): 143–149.

Joannopoulos, J. D., Johnson, S. G., Winn, J. N., y Meade, R. D. (2008). *Photonic Crystals: Molding the flow of light*. Princeton University Press, New York. 1-283 pp.

John, S. (1987). Strong Localization of Photons in Certain Disordered Dielectric Superlattices. *Physical review letters*, **58**(23): 2486–2489.

Kawashima, S., Ishizaki, K., y Noda, S. (2009). Light propagation in three-dimensional photonic crystals. *Optics express*, **18**(1): 386–392.

Kittel, C. y McEuen, P. (1976). *Introduction to solid state physics*. Wiley, New York, octava edición. 1-27 pp.

Korvink, J. G. y Greiner, A. (2002). *Chapter 2: "The Crystal Lattice System" in Semiconductors for Micro and Nanotechnology: An Introduction for Engineers*. Wiley-VCH, Germany. 27-93 pp.

Lin, S. Y. y Arjavalingam, G. (1994). Photonic bound states in two-dimensional photonic crystals probed by coherent-microwave transient spectroscopy. *JOSA B*, **11**(10): 2124–2127.

Maradudin, A., A., Michel, T., McGurn, R., A., y Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Ann. Phys. (N.Y.)*, **203**(2): 255–307.

Mendoza-Suárez, A., Villa-Villa, F., y Gaspar-Armenta, J. A. (2006). Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one-and two-dimensional photonic crystals. *JOSA B*, **23**(10): 2249–2256.

Navarro, O. (2011). La nueva electrónica basada en el espín: la espintrónica. *Revista C+TEC*, **2**(6): 22–27.

Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R., y Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmission of diffuse light through thick slits. *JOSA A*, **26**(4): 909–918.

Reitz, J. R., Milford, F. J., y Christy, R. W. (2008). *Foundations of electromagnetic theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

Rivas, D. y Solarte, E. (2008). Cálculo de la Estructuras de Bandas para Cristales Fotónicos Bidimensionales. *Revista Colombiana de Física*, **40**(2): 325–328.

Sakoda, K. (2001). *Optical properties of photonic crystals*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg. 1-221 pp.

Sukhoivanov, I. A. y Guryev, I. V. (2009). *Photonic Crystals, Physics and Practical Modeling*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Atlanta, USA, primera edición. 41-65 pp.

Vetrova, S. Y., Timofeevb, I. V., y Rudakovaa, N. V. (2010). Band structure of a two-dimensional resonant photonic crystal. *Physics of the Solid State*, **52**(3): 527–532.

Vlasov, Y. A., Bo, X.-Z., Sturm, J. C., y Norris, D. J. (2001). On-chip natural assembly of silicon photonic bandgap crystals. *Nature*, **414**(6861): 289–293.

Vlasov, Y. A., O'Boyle, M., Hamann, H. F., y McNab, S. J. (2005). Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides. *Nature*, **438**(7064): 65–69.

Winn, J. N., Fink, Y., Fan, S., y Joannopoulos, J. D. (1998). Omnidirectional reflection from a one-dimensional photonic crystal. *Optics Letters*, **23**(20): 1573–1575.

Yablonovitch, E. (1987). Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics. *Physical review letters*, **58**(20): 2059–2062.

Yablonovitch, E. (2009). Photonics: One-way road for light. *Nature*, **461**(7265): 744–745.

Zhou, D. y Biswas, R. (2008). Photonic crystal enhanced light-trapping in thin film solar cells. *Journal of Applied Physics*, **103**(9): 093102.

Apéndice A

CONDICIONES DE FRONTERA

En este apéndice vamos a analizar las condiciones de frontera para el campo eléctrico transversal (TE) y el campo magnético transversal (TM). Para esto, primero estudiaremos las componentes normales y tangenciales a la superficie y a una interfaz respectivamente.

Supongamos que no existen corrientes superficiales $\sigma = 0$ y $\mathbf{K} = 0$. Entonces podemos considerar las componentes normales a la superficie (Reitz *et al.*, 2008; Arfken *et al.*, 2013)

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma, \tag{156}$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \tag{157}$$

donde $\mathbf{D}$ y $\mathbf{H}$ son continuas a través de una superficie.

Por otro lado, las componentes tangenciales están dadas de la siguiente manera

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0, \tag{158}$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot \hat{\mathbf{t}} = K, \tag{159}$$

donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son continuas en una interfaz.

Para analizar si las derivadas normales del campo eléctrico y del campo magnético son continuas consideramos cada polarización.

A.1. Caso TE (polarización s)

Para el caso de la polarización TE, los campos eléctrico y magnético, están dados por

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} E_z(x,y), \tag{160}$$

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{i}} H_x(x,y) + \hat{\mathbf{j}} H_y(x,y). \tag{161}$$

Considerando que los campos son armónicos una de las ecuaciones de Maxwell se puede escribir como

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = i\omega\mu H_x, \tag{162}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -i\omega\mu H_y. \tag{163}$$

Por otra parte, tenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \mathbf{E} = n_x \frac{\partial E_z(x,y)}{\partial x} + n_y \frac{\partial E_z(x,y)}{\partial y}. \tag{164}$$

Sustituyendo las Ecs. (162) y (163) en la Ec. (164), obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = i\omega\mu \left[n_y H_x - n_x H_y \right]. \tag{165}$$

Como el vector normal está representado de la siguiente manera

$$\hat{\mathbf{n}} = -\frac{dy}{ds}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{j}} \tag{166}$$

y el vector tangente (a la curva en el plano $x-y$)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{ds}\hat{\mathbf{j}} \\ &= n_y\hat{\mathbf{i}} - n_x\hat{\mathbf{j}}, \end{aligned} \tag{167}$$

entonces

$$\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}} = -n_x H_y + n_y H_x. \tag{168}$$

Comparando las Ecs. (165) y (168), tenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n} = i\omega\mu \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{t}} \tag{169}$$

y usando las condiciones de frontera (Ec. (159)) para los medios 1 y 2,

$$i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1\cdot\hat{\mathbf{t}} = i\omega\mu_1 \mathbf{H}_2\cdot\hat{\mathbf{t}}, \tag{170}$$

$$i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1\cdot\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\left(i\omega\mu_2 \mathbf{H}_2\cdot\hat{\mathbf{t}}\right),$$

se tiene que,

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial n} = \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n}. \tag{171}$$

La Ec. (171) nos indica que en general la derivada normal del campo eléctrico es discontinua; sin embargo, a frecuencias ópticas (espectro visible) para medios dieléctricos o metálicos $\mu_1 \approx \mu_2$, pero no en el caso de los metamateriales.

A.2. Caso TM (polarización p)

De manera análoga hacemos el análisis para el campo magnético H_z en el caso de la polarización TM. Así, los campos magnético y eléctrico están representados como

$$\mathbf{H} = \hat{\mathbf{k}} H_z(x,y), \tag{172}$$

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}} E_x(x,y) + \hat{\mathbf{j}} E_y(x,y). \tag{173}$$

Utilizando la Ec. (159) tenemos que

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -i\omega\mu E_x, \tag{174}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = i\omega\mu E_y, \tag{175}$$

por lo que se puede mostrar que

$$\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial n}. \tag{176}$$

Si $\psi_i^{(j)}$ representa a cualquiera de los campos en un medio j-ésimo y un contorno Γ_i, las condiciones de continuidad de los campos y su derivada normal serán

$$\psi_i^{(1)} = \psi_i^{(2)}, \tag{177}$$

$$\frac{1}{f_1}\frac{\partial \psi_i^{(1)}}{\partial n} = \frac{1}{f_2}\frac{\partial \psi_i^{(2)}}{\partial n}, \tag{178}$$

donde

$$f_j = \begin{cases} 1 & \text{para polarización TE} \\ \varepsilon_j & \text{para polarización TM.} \end{cases} \tag{179}$$

Apéndice B

FUNCIÓN DE GREEN PARA LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

En el presente apéndice vamos a derivar las funciones de Green para el caso en 3D y 2D.

B.1. Función de Green tridimensional

Para el caso tridimensional, primeramente vamos a considerar que los campos electromagnéticos tienen una dependencia armónica del tiempo, de ahí que la ecuación de onda se transforma en la ecuación de Helmholtz:

$$\bigtriangledown^2 \Psi^j (\mathbf{r}) + \varepsilon_j \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \Psi^j (\mathbf{r}) = 0, \tag{180}$$

donde, $j = 1, 2, ...$ indica el medio j-ésimo, c es la velocidad de la luz en el vacío, ε_j es la función dielectrica y $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ el vector de posición del punto de observación que es independiente de z, para el CF1D y CF2D.

Considerando que $\Psi^j (\mathbf{r})$ representa el campo eléctrico E_z en el caso de polarización TE y el campo magnético H_z en el caso de polarización TM. El campo electromagnético $\Psi^j (\mathbf{r})$ satisface las condiciones de frontera y de la periodicidad para cada polarización.

Tomando en cuenta una función de Green $G^j(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ para el j-ésimo medio y asociándola en una fuente puntual localizada en $\mathbf{r}'$, se tiene la ecuación equivalente de la Ec. (180) como

$$\bigtriangledown^2 G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}\right)+\varepsilon_j\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}^{'}\right)=-4\pi\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right), \tag{181}$$

donde $G^j\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)$ representa el propagador del campo debido a una fuente de luz puntual $\mathbf{r}'$ que emite a la frecuencia ω.

Para un medio homogéneo, el campo producido por la fuente puntual $\mathbf{r}'$ posee simetría radial en $\mathbf{R}=\mathbf{r}-\mathbf{r}'$. Expresando el laplaciano de la Ec. (181) en coordenadas esféricas

$$\nabla^2 G\left(R\right)=\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2\frac{dG}{dR}\right)=\frac{d^2G}{dR^2}+\frac{2}{R}\frac{dG}{dR}=\frac{1}{R}\frac{d^2\left(RG\right)}{dR^2} \tag{182}$$

y sustituyendo la expresión en la Ec. (181), tenemos

$$\frac{1}{R}\frac{d^2\left(RG\right)}{dR^2}+k^2G(R)=-4\pi\delta\left(R\right). \tag{183}$$

Como $\mathbf{R}\neq 0$ podemos aplicar que $\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)=0$, y la Ec. (183) se transforma en

$$\frac{d^2\left(RG\right)}{dR^2}+k^2RG=0. \tag{184}$$

La Ec. (184) posee una solución armónica simple como $RG\sim e^{\pm ikR}$, por lo que

$$G=a\frac{e^{-ikR}}{R}+b\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{185}$$

donde a y b son constantes arbitrarias. Esta solución comprende ondas esféricas entrando y saliendo del punto $\mathbf{r}'$, respectivamente. Como la función de Green satisface la condición de radiación de Sommerfeld, que nos dice que la energía es radiada desde la fuente hacia el infinito y que no puede ser radiada desde el infinito hacia la fuente, entonces

$$\lim_{kR\to\infty} G\to 0, \tag{186}$$

se tiene que la Ec. (185) se reduce a la siguiente forma

$$G = b\frac{e^{ikR}}{R}. \tag{187}$$

Para determinar la constante de proporcionalidad b, integramos la Ec. (181) en una esfera de volumen pequeño de radio r_a alrededor de la fuente puntual

$$\int_V \left[\nabla\cdot\nabla\left(b\frac{e^{ikR}}{R}\right) + k^2\left(b\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right] dv = -4\pi\int_V \delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right) dv. \tag{188}$$

Aplicando el teorema de la divergencia al primer término de la integral (Ec. (188)), tenemos

$$\begin{aligned}\int_V \nabla\cdot\nabla\left(b\frac{e^{ikR}}{R}\right) dV &= \int_s \hat{\mathbf{n}}\cdot\nabla\left(b\frac{e^{ikR}}{R}\right) dS \qquad (189)\\ &= \lim_{r_a\to 0} 4\pi r_a^2\left[\frac{\partial}{\partial R}\left(b\frac{e^{ikR}}{R}\right)\right]_{R=r_a}\\ &= -4\pi b. \qquad (190)\end{aligned}$$

Para el segundo término de la Ec. (188), se tiene que

$$\int_V k^2 b\frac{e^{ikR}}{R} dv = 4\pi k^2 b\int_0^{r_a} Re^{ikR} dR, \tag{191}$$

entonces

$$\lim_{r_a\to 0}\int_0^{r_a} Re^{ikR} dR = 0. \tag{192}$$

Así que sumando las Ecs. 190 y 192 e igualándolas con la Ec. 188, tenemos

$$-4\pi b + 0 = -4\pi, \tag{193}$$

por lo que $b = 1$ y la solución de la Ec. (181) es

$$G\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right) = \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{194}$$

B.2. Función de Green bidimensional

Para obtener la función de Green bidimensional, consideramos la superposición de un número infinito de fuentes puntuales a lo largo del eje z' e integramos la Ec. (194)

$$G\left(x,y;x',y'\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}}}{\sqrt{\left(x-x'\right)^2+\left(y-y'\right)^2+\left(z-z'\right)^2}}dz'. \tag{195}$$

Aplicando un cambio de variable a la ecuación anterior en $z=0$ y $z'=z_0$ y redefiniendo a $R^2=(x-x')^2+(y-y')^2$ que por ser función par, tenemos

$$G\left(x,y;x',y'\right)=2\int_{0}^{\infty}\frac{e^{ik\sqrt{R^2+z_0^2}}}{\sqrt{R^2+z_0^2}}dz_0. \tag{196}$$

Para la Ec. (196) aplicamos un cambio de variable $u=\sqrt{R^2+z_0^2}$, despejamos z_0^2 y derivamos para poder obtener dz_0

$$z_0^2=u^2-R^2 \quad \Rightarrow \quad 2z_0dz_0=2udu, \tag{197}$$

$$dz_0=\frac{udu}{z_0}. \tag{198}$$

Ahora sustituyendo el valor de z_0 en la Ec. (198), obtenemos

$$dz_0=\frac{udu}{\sqrt{u^2-R^2}}. \tag{199}$$

Entonces la Ec. (198) se transforma en

$$G\left(x,y;x',y'\right)=2\int_{R}^{\infty}\frac{e^{iku}}{\sqrt{u^2-R^2}}du \tag{200}$$

en la cual se sustituye $u=Rx$ y $du=Rdx$ resultando (Arfken *et al.*, 2013)

$$G\left(x,y;x',y'\right)=2\int_{1}^{\infty}\frac{e^{ikRx}}{\sqrt{x^2-1}}dx=i\pi H_0^{(1)}(kR), \tag{201}$$

donde $H_0^{(1)}\left(\zeta\right)$ es la función de Hankel de primera clase y de orden cero.

Por lo tanto, la función de Green para sistemas 2D cuya geometría es independiente de z será

$$G\left(\mathbf{R}\right)=i\pi H_0^{(1)}\left(kR\right). \tag{202}$$

Es importante notar que como $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r'}$, ahora los vectores $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{r'} = x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}}$ son bidimensionales.

Apéndice C

PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS EN EL PLANO: LONGITUD DE ARCO

Este apéndice presentamos la parametización de las curvas en un plano.

C.1. Longitud de arco

Primeramente tenemos que por el teorema de Pitágoras la longitud de la secante entre dos puntos P y Q es

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{203}$$

y en el límite cuando $\Delta x \to 0$ la curva secante tiende a la curva tangente en P como el diferencial de la longitud de arco dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \tag{204}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{205}$$

Asumiendo que la función $y(x)$ es una función continua a trozos y diferenciable de x en un cierto intervalo $[a, b]$, entonces

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{206}$$

que integrando la ecuación anterior

$$s = \int \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx. \tag{207}$$

Esta integral define la longitud de arco de una curva en $x \in [a, b]$. De la Fig. 36, podemos definir los vectores normal y tangente a la curva en el punto P.

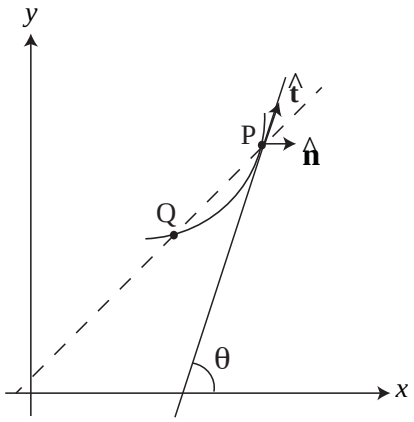

Figura 36. Representación de los vectores normal y tangente a la curva en el punto P.

C.2. Derivadas de primer orden

Las derivadas de primer orden de las funciones x y y en términos de s son

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}, \tag{208}$$

y

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}. \tag{209}$$

Como el vector que define la secante entre P y Q es

$$\overrightarrow{\Delta s} = \Delta x \hat{\mathbf{i}} + \Delta y \hat{\mathbf{j}}, \tag{210}$$

podemos definir el vector unitario como

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}} &= \frac{\overrightarrow{\Delta s}}{\Delta s} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta s}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\Delta y}{\Delta s}\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned} \tag{211}$$

En el límite cuando $\Delta x \to 0$, el vector $\hat{\mathbf{t}}$ se vuelve tangente a la curva en P y

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{dx}{ds}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{ds}\hat{\mathbf{j}}, \tag{212}$$

que en términos de $y'(x)$ dados por las Ecs. (208) y (209) se puede reescribir como

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} + y'(x)\,\hat{\mathbf{j}}\right]. \tag{213}$$

De la Ec. (213) podemos inferir que la primera componente de $\hat{\mathbf{t}}$ es siempre positiva, mientras que la segunda cambia de sentido dependiendo del valor de la derivada $y'(x)$.

Como $\hat{\mathbf{t}}$ es unitario, ya que

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1, \tag{214}$$

sabemos que la pendiente de la tangente a la curva en P es

$$\frac{dy}{ds} = \tan\theta, \tag{215}$$

siendo θ el ángulo que hace la tangente a la curva con el eje de las x. Así, las componentes del vector tangencial también se pueden expresar como

$$t_x = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \frac{dx}{ds} = \cos\theta, \tag{216}$$

y

$$t_y = \hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \frac{dy}{ds} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta, \tag{217}$$

cuyo cociente es

$$\frac{t_y}{t_x} = \tan\theta. \tag{218}$$

Sustituyendo las Ecs. (216) y (217) en la Ec. (212), tenemos que

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}} &= t_x\hat{\mathbf{i}} + t_y\hat{\mathbf{j}} \\ &= \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned} \tag{219}$$

Ahora calcularemos el vector unitario a la curva a partir de

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0, \tag{220}$$

o bien,

$$n_x t_x + n_y t_y = 0 \longrightarrow n_x t_x = -n_y t_y, \tag{221}$$

usando la condición

$$n_x^2 + n_y^2 = 1 \tag{222}$$

y además

$$\frac{t_x}{t_y} = \tan\theta = -\frac{n_x}{n_y}, \tag{223}$$

tenemos que

$$n_x^2 = n_y^2 \tan^2\theta. \tag{224}$$

De la Ec. (222) despejamos

$$n_y^2 = 1 - n_x^2, \tag{225}$$

que sustituyendo la expresión en la Ec. (224), obtenemos

$$n_x^2 = \left(1 - n_x^2\right)\tan^2\theta, \tag{226}$$

por lo que,

$$n_x = \pm\sin\theta, \tag{227}$$

sustituyendo la Ec. (227) en la Ec. (223),

$$\tan\theta = -\frac{\pm\sin\theta}{n_y}, \tag{228}$$

que despejando

$$n_y = \mp \cos\theta. \tag{229}$$

Comparando las Ecs. (227) y (229) con la Ec. (219), vemos que

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm t_y \hat{\mathbf{i}} \mp t_x \hat{\mathbf{j}}. \tag{230}$$

De esta manera la componente normal puede estar en dos posibles direcciones

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} &= n_x \hat{\mathbf{i}} + n_y \hat{\mathbf{j}} \\ &= \pm \sin\theta \hat{\mathbf{i}} \mp \cos\theta \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \tag{231}$$

Por convención se toma la dirección hacia afuera del contorno si este es cerrado.

El vector normal

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm \frac{dy}{ds} \hat{\mathbf{i}} \mp \frac{dx}{ds} \hat{\mathbf{j}}, \tag{232}$$

también se puede expresar en términos de $y'(x)$ por las Ecs. (208) y (209)

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}} \left[\pm y'(x)\, \hat{\mathbf{i}} \mp \hat{\mathbf{j}} \right]. \tag{233}$$

C.3. Curvatura: derivadas de segundo orden

Ahora vamos a calcular las derivadas de segundo orden necesarias para las expresiones de la curvatura. Considerando la Ec. (208) de la siguiente manera

$$\frac{dx}{ds} = \left[1 + [y'(x)]^2 \right]^{-1/2}, \tag{234}$$

obtenemos su segunda derivada como

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{ds^2} &= -\frac{y'(x)\, y''(x)}{\left[1 + [y'(x)]^2 \right]^{3/2}} \frac{dx}{ds} \\ &= -\frac{y'(x)\, y''(x)}{\left[1 + [y'(x)]^2 \right]^{3/2}} \frac{1}{\left[1 + [y'(x)]^2 \right]^{1/2}}, \end{aligned} \tag{235}$$

o bien

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{y'(x)\,y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}. \tag{236}$$

Ahora, obteniendo la segunda derivada de la Ec. (209)

$$\frac{d}{ds}\left[\frac{dy}{ds}\right] = \frac{d}{ds}\left[y'(x)\,\frac{dx}{ds}\right], \tag{237}$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2} &= y'(x)\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy'}{ds}\frac{dx}{ds} \\ &= y'(x)\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy'}{dx}\frac{dx}{ds}\frac{dx}{ds}.\end{aligned} \tag{238}$$

Sustituyendo las Ecs. (236) y (234) respectivamente en la Ec. (238)

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y'\frac{y'(x)\,y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2} + y''(x)\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\right)^2, \tag{239}$$

y simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{ds^2} &= -\frac{y'^2(x)\,y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2} + y''(x)\,\frac{1}{1+\left[y'(x)\right]^2} \\ &= y''(x)\left[-\frac{y'^2(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2} + \frac{1}{1+\left[y'(x)\right]^2}\right] \\ &= \frac{y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}.\end{aligned} \tag{240}$$

Ahora despejando de la Ec. (236)

$$-\frac{1}{y'(x)}\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}, \tag{241}$$

tenemos que

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{y'(x)}\frac{d^2x}{ds^2}. \tag{242}$$

Como la derivada de primer orden del vector tangencial está relacionado con la curvatura

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{d^2y}{ds^2}\hat{\mathbf{j}}, \tag{243}$$

podemos sustituir las Ecs. (236) y (240) obteniendo

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -\frac{y'(x)\,y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}\hat{\mathbf{j}}. \tag{244}$$

Factorizando y aplicando la Ec. (233), tenemos que

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}\left[-y'(x)\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right] \Rightarrow \hat{\mathbf{t}}' = \frac{y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^{3/2}}\hat{\mathbf{n}}. \tag{245}$$

De la Ec. (233) podemos factorizar $-y'(x)$

$$\hat{\mathbf{n}} = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{y'(x)}\hat{\mathbf{j}}\right], \tag{246}$$

que sustituyendo en la Ec. (245), obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{t}}' &= \frac{y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^{3/2}}\left(-\frac{y'(x)}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\right)\left[\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{y'(x)}\hat{\mathbf{j}}\right] \\ &= -\frac{y'(x)\,y''(x)}{\left[1+\left[y'(x)\right]^2\right]^2}\left[\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{y'(x)}\hat{\mathbf{j}}\right],\end{aligned} \tag{247}$$

o bien en términos de la Ec. (236), el vector $\hat{\mathbf{t}}$ resulta como

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{d^2x}{ds^2}\left[\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{y'(x)}\hat{\mathbf{j}}\right]. \tag{248}$$

Para el caso particular de una recta, $\hat{\mathbf{t}}' = 0$.

Si hacemos el producto punto con las Ecs. (212) y (248)

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \hat{\mathbf{t}}' = \frac{dx}{ds}\left[\hat{\mathbf{i}} + y'(x)\,\hat{\mathbf{j}}\right] \cdot \left[\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{y'(x)}\hat{\mathbf{j}}\right]\frac{d^2x}{ds^2} = 0. \tag{249}$$

Esto significa que $\hat{\mathbf{t}}$ y $\hat{\mathbf{t}}'$ son perpendiculares y entonces $\hat{\mathbf{t}}'$ es paralelo al vector normal para el caso 2D. Podemos probar que este vector en general no es unitario, y de hecho $\hat{\mathbf{t}}'$ es llamado el vector de curvatura y determina el radio de curvatura $\rho = 1/\left|\hat{\mathbf{t}}'\right|$ en cada punto del contorno.

La magnitud del vector de curvatura, está representado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left|\hat{\mathbf{t}}'\right| &= \left|\frac{d^2x}{ds^2}\right| \sqrt{1+\left[y'\left(x\right)\right]^{-2}} \\ &= \frac{\left|y'\left(x\right)y''\left(x\right)\right|}{\left[1+\left[y'\left(x\right)\right]^2\right]^2} \frac{1}{\left|y'\left(x\right)\right|} \sqrt{\left[y'\left(x\right)\right]^2+1}, \end{aligned} \tag{250}$$

que por lo tanto,

$$\left|\hat{\mathbf{t}}'\right| = \frac{\left|y''\left(x\right)\right|}{\left[1+\left[y'\left(x\right)\right]^2\right]^{3/2}}. \tag{251}$$

Apéndice D

VECTORES NORMAL Y TANGENTE DE UNA RECTA, DE UNA REJILLA SINUSOIDAL Y DE UNA CIRCUNFERENCIA

En este apéndice se presentan los cálculos de los vectores normal y tangente de algunos ejemplos de curvas particulares como son de una recta, de una rejilla sinusoidal y de una circunferencia.

D.1. Línea recta en el plano $x - y$

Consideremos la línea recta en el plano $x - y$ dada por la expresión

$$y = mx + b, \tag{252}$$

cuyas derivadas de primer y segundo orden son

$$y'(x) = m, \tag{253}$$

$$y''(x) = 0. \tag{254}$$

Sustituyendo las ecuaciones anteriores en la expresión de la longitud de arco

$$s = \int_a^b \sqrt{1+m^2}dx, \tag{255}$$

y en los vectores normal y tangencial, obtenemos

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\left[-y'(x)\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right] \Longrightarrow \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[-m\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right], \tag{256}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} + y'(x)\,\hat{\boldsymbol{j}}\right] \Longrightarrow \hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} + m\hat{\boldsymbol{j}}\right] \tag{257}$$

y

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{y''}{\left(1+\left[y'(x)\right]^2\right)^2}\left[-y'(x)\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right] = 0. \tag{258}$$

D.2. Rejilla sinusoidal

Consideremos el perfil de una rejilla sinusoidal expresada como

$$y(x) = \frac{y_0}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{D}x\right) = a\sin\left(\frac{2\pi}{D}x\right). \tag{259}$$

donde la amplitud es $a = \frac{y_0}{2}$, D es el periodo de la función sinusoidal y sus derivadas

$$y'(x) = \frac{\pi y_0}{D}\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right) = b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right), \tag{260}$$

$$y''(x) = -\frac{2\pi^2 y_0}{D^2}\sin\left(\frac{2\pi}{D}x\right) = -c\sin\left(\frac{2\pi}{D}x\right). \tag{261}$$

Entonces, la longitud de arco en términos de las ecuaciones anteriores es

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+b^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{D}x\right)}dx. \tag{262}$$

Similarmente sustituyendo en las expresiones de los vectores normal y tangencial, obtenemos

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\left[-y'(x)\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right] \Longrightarrow \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right)\right]^2}}\left[-b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right)\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right], \tag{263}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[y'(x)\right]^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} + y'(x)\,\hat{\boldsymbol{j}}\right] \Longrightarrow \hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left[b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right)\right]^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} + b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right)\hat{\boldsymbol{j}}\right] \tag{264}$$

y

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{y''(x)}{\left(1+\left[y'(x)\right]^2\right)^2}\left[-y'(x)\,\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right] \Longrightarrow \hat{\mathbf{t}}' = \frac{-c\sin\left(\frac{2\pi}{D}x\right)}{\left(1+\left[b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right)\right]^2\right)^2}\left[-b\cos\left(\frac{2\pi}{D}x\right), \hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right]. \tag{265}$$

Analizando el caso para $x = 0$, en las Ecs. (263), (264) y (265) se reduce a

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\left[-b\hat{\mathbf{i}} + \hat{\boldsymbol{j}}\right], \tag{266}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}\left[\hat{\mathbf{i}} + b\hat{\boldsymbol{j}}\right], \tag{267}$$

$$\hat{\mathbf{t}}' = 0. \tag{268}$$

Ahora para el caso $x = D/4$,

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\boldsymbol{j}}, \tag{269}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{i}}, \tag{270}$$

$$\hat{\mathbf{t}}' = -c\hat{\boldsymbol{j}}. \tag{271}$$

D.3. Circunferencia en el plano $x - y$

Para el caso de una circunferencia en el plano $x-y$ vamos a considerar las coordenadas polares $x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$, por lo que

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = r d\theta, \tag{272}$$

y sus derivadas

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{r}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{1}{r}\frac{d(-\sin\theta)}{d\theta} = -\frac{\cos\theta}{r}, \tag{273}$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{1}{r}\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{1}{r}\frac{d(\cos\theta)}{d\theta} = -\frac{\sin\theta}{r}, \tag{274}$$

De igual manera sustituyendo las expresiones anteriores, tenemos que el vector normal es

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\cos\theta\hat{\mathbf{i}} \mp (-\sin\theta)\,\hat{\mathbf{j}}, \tag{275}$$

donde la normal hacia afuera es

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}} \tag{276}$$

y el vector tangencial es

$$\hat{\mathbf{t}} = -\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}, \tag{277}$$

cuya derivada de primer orden es

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -\frac{1}{r}\left[\cos\theta\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\hat{\mathbf{j}}\right] = -\frac{1}{r}\hat{\mathbf{n}}, \tag{278}$$

por lo que

$$\left|\hat{\mathbf{t}}'\right| = \frac{1}{r}. \tag{279}$$

Para el caso $\theta = 0$, las Ecs. (276), (277) y (278) se reducen a

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{i}}, \tag{280}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = \hat{\mathbf{j}}, \tag{281}$$

$$\hat{\mathbf{t}}' = \frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = -\frac{1}{r}\hat{\mathbf{n}} \tag{282}$$

y para $\theta = \pi/2$,

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{j}}, \tag{283}$$

$$\hat{\mathbf{t}} = -\hat{\mathbf{i}}, \tag{284}$$

$$\hat{\mathbf{t}}' = 0. \tag{285}$$