



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Y  
UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO



POSGRADO CONJUNTO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS  
UNAM-UMSNH

**Solución del problema de control admisible mediante el  
problema trigonométrico de momentos**

---

T E S I S

Que para obtener el grado de Maestro en Ciencias Matemáticas  
Presenta:

HUGO PAREDES BARRA

*Director:* Doctor rerum naturalium Abdon E. Choque Rivero  
Instituto de Física y Matemáticas, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

---

MORELIA, MICHOACÁN - MARZO DE 2014.

## Índice general

|   |     |
|---|-----|
| Agradecimientos   | III |
| Resumen   | v   |
| Abstract  | VII |
| Introducción  | IX  |
| Capítulo 1. Preliminares  | 1   |
| Capítulo 2. Problema trigonométrico de momentos                           | 7   |
| 1. Problema trigonométrico de momentos y funciones de Carathéodory        | 7   |
| 2. El L-problema de momentos o problema de momentos de Markov             | 12  |
| 3. Desigualdad fundamental matricial de Potapov                           | 16  |
| Capítulo 3. Del problema de control admisible al problema de momentos     | 21  |
| 1. Control no acotado. Criterio de Kalman                                 | 21  |
| 2. Problema de control admisible como problema trigonométrico de momentos | 25  |
| 3. Caracterización del conjunto 0-controlable $X_{0,n}$                   | 29  |
| Capítulo 4. Solución del problema de control admisible.                   | 33  |
| 1. Caso degenerado  | 33  |
| 2. Ejemplos   | 37  |
| Bibliografía  | 45  |



## **Agradecimientos**

Primeramente quiero agradecer a Dios por guiar mi camino.

Quiero dar mi más sincero agradecimiento a mi asesor Dr. Abdon Eddy Choque Rivero por sus enseñanzas, su paciencia, su tiempo y dedicación.

Así mismo quiero agradecer a mis sinodales: Dr. Eugenio Balanzario, Dr. Anatoli Merzon, Dr. Elmar Wagner y al Dr. Petr Zhevandrov por revisar y dar sugerencias valiosas para mejorar este trabajo.

También agradecer a mi Padre Nicolas Paredes M. por la confianza que tuvo conmigo y sobre todo a mi querida madre Albertina Barra Ch. por su paciencia a apoyo y también a mi tío Pablo por la ayuda incondicional. Quiero agradecer a mi hermano David por su apoyo moral, a mi hermana Sara por todo los concejos y a mis queridos sobrinos Arón y Dávita.

Agradezco al CONACYT, por apoyarme económicamente para realizar estos estudios.

Al instituto de Física y Matemática de la UMSNH y al Instituto de Matemáticas de la UNAM, por confiar en mi y darme la oportunidad de ingresar a esta maestría, así como por el apoyo brindado en el transcurso de ésta.

Tambien quiero agradecer a mis queridos amigos, gracias a todos.



## Resumen

Consideramos el sistema lineal de control

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_{2k} &= k x_{2k+1} + u, \quad |u| \leq L, \\ \dot{x}_{2k+1} &= -k x_{2k}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad n \geq 2.\end{aligned}\tag{0.1}$$

Dados una condición inicial  $x_0$  y  $L > 0$  se requiere hallar:

a) el conjunto de todos los controles  $u_{x_0}(t)$  con  $|u_{x_0}(t)| \leq L$  y

b) el conjunto  $X_{0,n}$  de condiciones iniciales  $x_0$

tales que la trayectoria del sistema (0.1) con  $u = u_{x_0}(t)$  que comienza en  $x_0$  termina en el origen en tiempo  $T = 2\pi$ .

Palabras claves: Control admisible acotado, problema trigonométrico de momentos, método de Potapov.



## Abstract

We consider the linear control system

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u, \\ \dot{x}_{2k} &= k x_{2k+1} + u, \quad |u| \leq L, \\ \dot{x}_{2k+1} &= -k x_{2k}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad n \geq 2.\end{aligned}\tag{0.2}$$

For a given initial condition  $x_0$  and  $L > 0$  it is required to find:

a) the set of all controls  $u_{x_0}(t)$  with  $|u_{x_0}(t)| \leq L$  and

b) the set  $X_{0,n}$  of initial conditions  $x_0$

such that the trajectory of the system (0.2) with  $u = u_{x_0}(t)$  starting at  $x_0$  terminates at the origin at time  $T = 2\pi$ .

Keywords: Admissible bounded control, trigonometric moment problem, Potapov method.



## Introducción

Recordemos que un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen de un parámetro es

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (0.3)$$

donde  $x \in D \subset \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ , y la función  $f : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  es de clase  $C^1$  con  $W = D \times \Omega$  abierto en  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^r$ .

Consideremos el problema con datos iniciales

$$x(t_0) = x_0 \quad (0.4)$$

para el sistema (0.3). Generalmente se busca la una solución  $x = x(t, x_0, u)$  de (0.3) con la condición inicial (0.4) y se estudia sobre la continuidad y diferenciabilidad de la función  $x(t, x_0, u)$  respecto del parámetro  $u$ .

En la teoría de control (TC) se considera el problema (0.3) donde en lugar de una parámetro  $u$  figura una función  $u(t)$  usualmente continua a trozos. A tales sistemas se le llaman sistemas de control.

- a) Si el control  $u = u(t)$  con  $t \in [t_0, T]$ , puede tomar todos los valores de  $\Omega = \mathbb{R}^r$ , el sistema (0.3) se llama sistema de control sin restricción.
- b) Si el control  $u = u(t)$  puede tomar valores de un subconjunto propio  $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ , en particular,  $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^r : \|u\| \leq L\}$ , entonces el sistema (0.3) se llama sistema de control con restricción en el control  $u(t)$ .

Un caso particular del sistema (0.3), es el siguiente sistema de control de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (0.5)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m \times r}$  son matrices constantes con entradas reales, a este sistema se le llama sistema de control lineal.

Existen dos problemas principales en la TC para los sistemas (0.3) y (0.5):

- 1) Determinar si el sistema de control es controlable, es decir, determinar si cualquier estado del sistema de control se puede trasladar a otro estado distinto en algún tiempo finito  $T$ , en virtud a un control  $u(t)$  definido en  $[t_0, T]$  (ver definición 3.2 para el sistema lineal (0.5)).
- 2) Determinar el conjunto de controles que realicen el traslado de un estado a otro.

El problema 1) para sistemas de control lineal ha sido resuelto tanto para sistemas sin restricción como para sistemas con restricción en el control  $u$ , ver [2] para el caso sin restricción y [8], [9], para el caso con control restringido.

En esta tesis se considera el problema 1) el cual resolvemos mediante métodos distintos a los a los utilizados en [8] y [9]. El problema 2) es resuelto para un caso particular del sistema de la forma (0.5). Para la solución de 1) y 2), utilizamos el método de problema trigonométrico de momentos truncado clásico en combinación con el método de la desigualdad matricial de Potapov y la función de Carathéodory.

### 0.1. Planteamiento del problema.

Sea dado el sistema de control

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u, \\
 \dot{x}_{2k} &= k x_{2k+1} + u, \quad |u| \leq L, \\
 \dot{x}_{2k+1} &= -k x_{2k}, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad n \geq 2.
 \end{aligned} \tag{0.6}$$

Dada una condición inicial  $x_0$  y  $L > 0$ , se requiere hallar el conjunto de todos los controles  $u_{x_0}(t)$ , definidos y continuos a trozos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , con valores que satisfacen la restricción  $|u_{x_0}(t)| \leq L$ , tales que la trayectoria  $x(t)$  del sistema (0.6) con  $u = u_{x_0}(t)$  traslade la posición inicial  $x_0$  al origen en tiempo  $T = 2\pi$ . Tal problema se llama problema de control admisible en tiempo  $2\pi$ . En adelante denotado como problema de CA. El conjunto de puntos  $x_0$  desde los cuales se pueden alcanzar el origen en tiempo  $2\pi$  lo denotamos como  $X_{0,n} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  el cual es llamado conjunto 0-controlable del sistema (0.6). Daremos una descripción analítica y geométrica del conjunto  $\mathcal{S}_{0,n} = \partial X_{0,n}$  para  $n = 2$  y una descripción analítica para  $n = 3$ . La estrategia que seguimos para resolver el problema planteado es el siguiente:

- a) Reducimos el problema CA a un problema trigonométrico de momentos truncado de Markov (TMTM).
- b) El problema TMTM se reduce a un problema trigonométrico de momentos truncado clásico (TMTC).
- c) El problema TMTC se reduce al problema de resolver una desigualdad fundamental matricial (DFM).

d) Resolvemos la DFM.

Este camino permite hallar la solución del problema CA en forma analítica y explícita. Un método similar, pero para otro sistema de control ha sido utilizado en [3]. En [11] con métodos análogos se estudia el tiempo de control óptimo para sistemas de control de la forma (0.6).

OBSERVACIÓN 0.1. El sistema (0.6) se deriva como parte de la resolución de un problema de control de una ecuación de onda no homogénea en un intervalo cerrado con control acotado, ver [10].

Ahora daremos algunas nociones que utilizaremos en este trabajo.

**0.2. Problema trigonométrico de momentos truncado clásico.** Antes de plantear el problema trigonométrico de momentos truncado clásico damos algunas definiciones.

DEFINICIÓN 0.2. Una matriz  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  Hermitiana se dice que es positiva definida (no negativa definida) si  $z^T A z > 0$  ( $z^T A z \geq 0$ ) para todo  $z \in \mathbb{C}^n$  distinto de cero.

DEFINICIÓN 0.3. La secuencia  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  se llama positiva definida (no negativa definida) si

$$\mathbf{T}_{n-1} := \begin{pmatrix} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \bar{\gamma}_1 & \cdots & \bar{\gamma}_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \cdots & \bar{\gamma}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix} \quad (0.7)$$

es positiva definida (no negativa definida).

DEFINICIÓN 0.4. Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función no decreciente. Decimos que  $\sigma(t)$  es una función de distribución si  $\sigma(t)$  es continuo por izquierda, es decir si satisface

$$\sigma(t-0) = \sigma(t).$$

El problema TMTC consiste en: dada una secuencia de números complejos  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ . Se requiere hallar el conjunto de funciones de distribución  $\sigma(t)$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$  tales que

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = \int_0^{2\pi} d\sigma(t), \quad \gamma_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1). \quad (0.8)$$

Se conoce que el problema TMTC tiene solución si y solo si la matriz  $\mathbf{T}_{n-1}$  es no negativa definida ver [1], [13].

Un método para encontrar la solución  $\sigma(t)$  no decreciente en el intervalo  $[0, 2\pi]$  del problema TMTC es asociar la función distribución  $\sigma(t)$  con una función  $s(z)$  holomorfa definida en  $|z| < 1$  tal que  $\Re s(z) \geq 0$  en  $|z| < 1$ , tales funciones se llaman funciones de Carathéodory o C-función. En virtud a que  $s(z)$  es una función analítica, ésta satisface la expansión de la forma:

$$s(z) = s_0 + s_1z + s_2z^2 + \cdots + s_{n-1}z^{n-1} + \cdots, \quad |z| < 1.$$

donde  $s_k$  son números complejos. Resulta que la función de Carathéodory  $s(z)$  asociada a la función de distribución  $\sigma(t)$  ver (0.8), tiene la siguiente expansión:

$$s(z) = \gamma_0 + \gamma_1z + \gamma_2z^2 + \cdots + \gamma_{n-1}z^{n-1} + \cdots, \quad |z| < 1, \quad (0.9)$$

es decir los primeros  $n$  coeficientes de (0.9) coinciden con los  $n$  momentos dados en (0.8) (ver teorema 2.7).

La relación mencionada entre  $\sigma$  y  $s$ , que en realidad es una relación biyectiva ver [1, Página 51], permite abordar un problema TMTC (hallar  $\sigma$ ) como un problema de interpolación de una función de Carathéodory.

Usando la fórmula ver [1, Página 51]

$$\frac{\sigma(t-0) + \sigma(t+0)}{2} = \text{const} + \lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1}{\pi} \int_0^t \Re s(re^{-i\tau}) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

se puede obtener  $\sigma$  a partir de una función de Carathéodory  $s(z)$ .

**0.3. Problema trigonométrico de momentos truncado de Markov.** Sea dada una secuencia de números complejos  $(c_k)_{k=0}^{n-1}$ . Se requiere hallar el conjunto de funciones continuas a trozos  $f(t) \in \mathbb{R}$  definidos en  $[0, 2\pi]$  con valores  $-L \leq f(t) \leq L$ , tales que

$$c_k = \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (0.10)$$

Nos referiremos a este problema como problema de TMTM. Este problema tiene solución (Ver, [1, Página 61]) si y solo si

$$-2\pi L \leq c_0 \leq 2\pi L \quad (0.11)$$

y si la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  determinada por la expansión

$$\exp\left(\frac{i}{2L} \left(\frac{c_0}{2} + c_1z + c_2z^2 + \cdots + c_{n-1}z^{n-1}\right)\right) = \gamma_0 + \gamma_1z + \gamma_2z^2 + \cdots + \gamma_{n-1}z^{n-1} + \dots \quad (0.12)$$

es no negativo definida.

**0.4. Desigualdad matricial fundamental.** En los 60 del siglo pasado, V.P. Potapov [5], [12] introdujo un método para la solución de problemas de interpolación, entre éstos el problema TMTC. Este método reduce el problema TMTC a una desigualdad matricial:

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{n-1} & R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) \\ \hline * & \frac{s(z)+\bar{s}(z)}{1-z\bar{z}} \end{array} \right) \geq 0, \quad (0.13)$$

con  $T_{n-1} = (\delta_{j,k+1})_{j,k=0}^{n-1}$ ,  $R_{n-1}(z) = \frac{1}{z} \left( I - \frac{1}{z} T_{n-1} \right)^{-1}$ ,  $v_{n-1} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ ,  $u_{n-1} = \text{col}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$  donde  $\delta_{j,k}$  denota el símbolo de Kronecker.

**TEOREMA 0.5.** *La función holomorfa  $s(z)$  en  $|z| < 1$  es solución asociada al problema TMTC si y solo si  $s$  es solución de (0.13).*

(Ver, [12, Página 422])

**0.5. Resultados de la tesis.** Antes de mencionar los resultados principales recordemos que  $X_{0,n}$  es el conjunto de todas las condiciones iniciales  $x_0$  del sistema (0.6) para los cuales la trayectoria del sistema (0.6) comienza en  $x_0$  y termina en el origen en tiempo  $T = 2\pi$ , y la matriz  $\mathbf{T}_{n-1}$  es definido como en (0.7).

El siguiente teorema es anunciado y se demuestra por primera vez, en la página 29.

**TEOREMA A.** Sea  $x_0$  una condición inicial para el sistema de control (0.6). El conjunto 0-controlable  $X_{0,n}$  esta dado por:

$$X_{0,n} = \{x_0 \in \mathbb{R}^{2n-1} : \mathbf{T}_{n-1} \geq 0, \quad -2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L\}.$$

Los siguientes teoremas B y C son una aplicación del teorema 2.9 que describen el conjunto de controles para las condiciones iniciales  $x_0 \in \partial X_{0,n}$  del sistema (0.6).

**TEOREMA B.** Si la matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}_{n-1}$  es nula y  $-2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L$ , entonces

(a) El conjunto 0-controlable  $X_{0,n}$  es

$$X_{0,n} = \{x_1, x_2\}$$

$$\text{donde } x_1 := (2\pi L, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{y} \quad x_2 := (-2\pi L, 0, 0, \dots, 0).$$

(b) El control que resuelve el problema de CA es:

$$u_{x_1}(t) = -L, \quad u_{x_2}(t) = L, \quad t \in [0, 2\pi].$$

TEOREMA C. Si la matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}_{n-1}$  es no nulo y no negativa definida de rango  $p < n$  y  $-2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L$  entonces existen  $\tau_1, t_1, \tau_2, \dots, t_p$  que pertenecen al intervalo  $[0, 2\pi]$  tales que:

$$u_{x_0}(t) = \begin{cases} L, & (\tau_j < t < t_j) \\ -L, & (t_j < t < \tau_{j+1}) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, p; \tau_{p+1} = \tau_1 + 2\pi)$$

donde,  $\tau_1, t_1, \tau_2, \dots, t_p$  satisfacen

$$s(z) = -i \prod_{k=1}^p \frac{e^{-\frac{i}{2}\tau_k} - e^{\frac{i}{2}\tau_k z}}{e^{-\frac{i}{2}t_k} - e^{\frac{i}{2}t_k z}}. \quad (0.14)$$

El siguiente teorema es una aplicación del método de la desigualdad fundamental matricial de Potapov, (ver teorema 2.13) para la solución del problema de CA del sistema (0.6).

Este método permite hallar de manera explícita la función asociada  $s(z)$  de Carathéodory a la función no decreciente  $\sigma(t)$  definida en  $[0, 2\pi]$  que a su vez es la solución del problema de TMTC.

TEOREMA D. Con las mismas condiciones del teorema anterior, la función de Carathéodory  $s(z)$  se representa de la siguiente forma:

$$s(z) = \frac{\xi^* R_{n-1}(z) u_{n-1}}{\xi^* R_{n-1}(z) v_{n-1}}, \quad (0.15)$$

con  $R_{n-1}(z) = \frac{1}{z} \left( I - \frac{1}{z} \mathbf{T}_{n-1} \right)^{-1}$ ,  $v_{n-1} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ ,  $u_{n-1} = \text{col}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$  y  $\mathbf{T}_{n-1} = (\delta_{j,k+1})_{j,k=0}^{n-1}$ , ( $\delta_{j,k+1} - \text{Kronecker}$ ). Donde  $\xi \in \mathbb{C}^n$  es tal que  $\mathbf{T}_{n-1}\xi = 0$ .

**0.6. Algoritmo de solución.** A continuación presentamos el algoritmo basado en los teoremas A, B, C y D para encontrar la solución del problema de CA. Sea dada  $x_0 \in \mathbb{R}^{2n-1}$  una condición inicial y  $L > 0$  para el sistema (0.6) .

**Paso 1** Reducir el problema de CA al problema de TMTM, es decir hallar  $c_k$  donde  $k = 0, 1, \dots, n-1$  mediante las siguientes igualdades:

$$c_0 = \int_0^{2\pi} u_{x_0}(t) dt, \quad c_1 = \int_0^{2\pi} e^{it} u_{x_0}(t) dt, \quad \dots, \quad c_{n-1} = \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)t} u_{x_0}(t) dt. \quad (0.16)$$

donde,

$$c_0 := -x_{10}, \quad c_1 := -x_{20} - ix_{30}, \quad \dots, \quad c_{n-1} := -x_{2(n-1)0} - ix_{(2n-1)0}. \quad (0.17)$$

**Paso 2** hallar la secuencia  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  a partir de (0.17) mediante la igualdad.

$$\exp\left(\frac{i}{2L}\left(\frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{n-1} z^{n-1}\right)\right) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots$$

En particular, los primeros momentos de la secuencia  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  que se generan de la anterior igualdad son los siguientes:

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 &= 2 \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right), \\ \gamma_1 &= \frac{1}{2L} \left( \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{30} - \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20} - i \left( \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20} + \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{30} \right) \right), \\ \gamma_2 &= \frac{1}{8L^2} \left( -\cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20}^2 + x_{30}^2 \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) + 4Lx_{50} \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 2x_{20}x_{30} \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 4Lx_{40} \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -x_{30}^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 4Lx_{50} \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 2x_{20}x_{30} \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 4Lx_{40} \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20}^2 \right) i \right). \end{aligned}$$

**Paso 3** Construimos la matriz de Toeplitz

$$\mathbf{T}_{n-1} := \begin{pmatrix} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \bar{\gamma}_1 & \cdots & \bar{\gamma}_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \cdots & \bar{\gamma}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix} \quad (0.18)$$

y verificamos si esta matriz es no negativa definida, si fuese el caso pasamos al siguiente paso. En caso negativo, no existe un control  $u_{x_0}(t)$  tal que  $x_0$  llegue al origen en tiempo  $T = 2\pi$ .

**Paso 4** hallamos el control  $u_{x_0}(t)$ , como sigue. Si la matriz  $\mathbf{T}_{n-1}$  no nulo es no negativa definida tal que  $\det \mathbf{T}_{n-1} = 0$ , construimos el vector  $u_{n-1}$  (ver teorema D).

Determinamos un vector  $\xi \in \mathbb{C}^n$  tal que  $\mathbf{T}_{n-1}\xi = 0$ , luego calculamos

$$s(z) = \frac{\xi^* R_{n-1}(z) u_{n-1}}{\xi^* R_{n-1}(z) v_{n-1}}, \quad (0.19)$$

esta función llevamos a la forma

$$s(z) = -i \prod_{k=1}^p \frac{e^{-\frac{i}{2}\tau_k} - e^{\frac{i}{2}\tau_k z}}{e^{-\frac{i}{2}t_k} - e^{\frac{i}{2}t_k z}} \quad (0.20)$$

donde,  $p$  es el rango de la matriz de Toeplitz dada en (0.18),  $\tau_1, t_1, \tau_2, \dots, t_p \in [0, 2\pi]$  y  $\tau_1 < t_1 < \tau_2 < \dots < t_p < \tau_1 + 2\pi$ .

**Paso 5** El control  $u_{x_0}(t)$  buscado es dado por:

$$u_{x_0}(t) = \begin{cases} L, & (\tau_j < t < t_j) \\ -L, & (t_j < t < \tau_{j+1}) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, p; \tau_{p+1} = \tau_1 + 2\pi)$$

**OBSERVACIÓN 0.6.** El caso en que la matriz  $\mathbf{T}_{n-1}$  sea nula, le corresponde a las condiciones iniciales

$$x_0 = \begin{pmatrix} \mp 2\pi \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y el control  $u_{x_0}(t)$  correspondiente esta dado por  $u_{x_0}(t) = \pm L$  (ver teorema B).

## 0.7. Conclusiones.

- (a) En la presente tesis se ha resuelto el problema de controlabilidad del sistema (0.6) con *control acotado* para el caso degenerado, es decir cuando  $\det \mathbf{T}_{n-1} = 0$  donde  $\mathbf{T}_{n-1}$  es una matriz de Toeplitz construida en base a la condición inicial  $x_0$  del sistema (0.6) (ver (3.31)).
- (b) Se obtiene el conjunto de controles admisibles  $u = u_{x_0}(t)$  con  $|u_{x_0}(t)| \leq L$  que trasladan cualquier posible posición inicial  $x_0 \in \mathcal{S}_{0,n}$  (recordemos que  $\mathcal{S}_{0,n} = \partial X_{0,n}$ ) al origen en tiempo  $T = 2\pi$ .
1. Cabe señalar que los resultados (a) y (b) no habían sido resueltos anteriormente.
  2. Nótese que el inciso (b), se puede tratar mediante el método de Ahiezer-Krein ver teorema 2.9, o mediante la DFM ver teorema 2.13.
- (c) Queda por resolver el caso no degenerado es decir cuando  $\mathbf{T}_{n-1}$  es positiva definida, que corresponde a hallar el conjunto de controles  $u_{x_0}(t)$  acotados para  $x_0 \in \text{int}X_{0,n}$ . Aparentemente este problema se deja resolver utilizando el método de Potapov (DFM). (ver (2.17))

## Capítulo 1

### Preliminares

En este capítulo reproducimos los resultados que aparecen en el libro de Ahiezer-Krein, que permiten abordar el problema de existencia de solución del problema TMTC.

DEFINICIÓN 1.1. Sea dada una sucesión de números complejos,

$$c_0 > 0, \quad c_1, c_2, \dots, c_n. \quad (1.1)$$

Definimos en el espacio de todos los quasi-polinomios, con coeficientes complejos, de la forma

$$T_n(z) = \sum_{k=-n}^n A_k z^k, \quad (z = e^{it})$$

de “grado” no mayor que  $n$  el funcional  $\mathfrak{G}$  dado por

$$\mathfrak{G}\{T_n\} = \sum_{k=-n}^n A_k c_k,$$

donde

$$c_{-k} = \bar{c}_k \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

(la barra denota el número complejo conjugado).

OBSERVACIÓN 1.2. Notemos que, si  $T_n(e^{it})$  es un polinomio trigonométrico real ( $A_{-k} = \bar{A}_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ ), entonces todo valor del funcional  $\mathfrak{G}\{T_n\}$  es un valor real.

DEFINICIÓN 1.3. La sucesión (1.1) se llama *positiva definida* ( o *no negativa definida* ) en la circunferencia  $0 \leq t \leq 2\pi$ , si

$$T_n(z) \neq 0, \quad T_n(e^{it}) \geq 0$$

implica que

$$\mathfrak{G}\{T_n\} > 0 \quad (\text{o } \mathfrak{G}\{T_n\} \geq 0).$$

Ahora veremos algunas propiedades de la sucesión (1.1), en el caso cuando es positiva definida (no negativa definida) sobre la circunferencia  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Por brevedad lo llamaremos simplemente sucesión positiva definida (no negativa definida) sin mencionar la circunferencia.

DEFINICIÓN 1.4. El quasi-polinomio  $T_n(z) = \sum_{k=-n}^n A_k z^k$  se llama simétrico si

$$\overline{T}_n(z) = T_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right). \quad (1.2)$$

TEOREMA 1.5. La sucesión (1.1) es positiva definida (no negativa definida) si y solo si la forma de Toeplitz

$$\sum_0^n c_{\lambda-\mu} \xi_\lambda \bar{\xi}_\mu \quad (1.3)$$

es positiva (no negativa).

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$T_n(z) = \sum_{k=-n}^n A_k z^k \quad (1.4)$$

un polinomio trigonométrico real ( $A_{-k} = \bar{A}_k$ ). Demostramos que  $T_n(z)$  es simétrico, en efecto:

$$\begin{aligned} \overline{T}_n(z) &= \overline{\sum_{k=-n}^n A_k z^k} \\ &= \overline{\sum_{k=1}^n A_{-k} z^{-k} + A_0 + \sum_{k=1}^n A_k z^k} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{A_{-k} z^{-k}} + A_0 + \overline{\sum_{k=1}^n A_k z^k} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \bar{z}^{-k} + A_0 + \sum_{k=1}^n \overline{A_{-k} z^k} \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^k + A_0 + \sum_{k=1}^n A_{-k} \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-k} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{-k} \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-k} + A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^k \\ &= T_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right). \end{aligned}$$

Además, si  $\zeta$  es raíz de  $T_n(z)$ , entonces  $\frac{1}{\bar{\zeta}}$  es también una raíz; de esto se sigue que

$$T_n(z) = \frac{1}{z^m} \prod_{\lambda=1}^k (z - z_\lambda) \left(z - \frac{1}{\bar{z}_\lambda}\right) \prod_{\mu=1}^l (z - \zeta_\mu), \quad (1.5)$$

donde  $|z_\lambda| < 1$ ,  $|\zeta_\mu| = 1$ ,  $2k + l = 2m$ ,  $m \leq n$  ( $m < n$ , si  $A_n = 0$ ), reescribiendo (1.5) tenemos

$$T_n(z) = \left\{ \prod_{\lambda=1}^k (z - z_\lambda) \left( \frac{1}{z} - \bar{z}_\lambda \right) \right\} \left\{ \frac{C}{z^s} \prod_{\mu=1}^{2s} (z - \zeta_\mu) \right\}, \quad (1.6)$$

con  $C$  una constante y  $s = m - k$ .

El primer factor tiene valores no negativos para  $z = e^{it}$ ; por lo tanto el segundo factor tiene la misma propiedad y además, no puede tener raíces de multiplicidad impar, lo que significa que podemos establecer que

$$\prod_{\mu=1}^{2s} (z - \zeta_\mu) = \prod_{\mu=1}^s (z - \zeta_\mu)^2. \quad (1.7)$$

Luego sea  $\Gamma$  tal que  $|\Gamma|^2 = C$ , Entonces

$$\Gamma z^{n-m} \prod_{\lambda=1}^k (z - z_\lambda) \prod_{\mu=1}^s (z - \zeta_\mu) = \sum_{v=0}^n \xi_v z^v, \quad (1.8)$$

así tenemos

$$T_n(z) = \sum_{v=0}^n \xi_v z^v \sum_{k=0}^n \bar{\xi}_k \frac{1}{z^k}. \quad (1.9)$$

La función  $T_n$  no asume valores negativos, entonces

$$T_n(e^{it}) = \left| \sum_{k=0}^n \xi_k e^{ikt} \right|^2 = \sum_0^n \xi_\lambda \bar{\xi}_\mu e^{i(\lambda-\mu)t},$$

donde  $\xi_k$  son números complejos. Por lo tanto

$$\mathfrak{G}\{T_n\} = \sum_0^n c_{\lambda-\mu} \xi_\lambda \bar{\xi}_\mu.$$

□

NOTACIÓN. De ahora en adelante denotaremos por  $\mathbf{T}_n$  a la matriz

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_{-1} & \cdots & c_{-n} \\ c_1 & c_0 & \cdots & c_{1-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n-1} & \cdots & c_0 \end{pmatrix}$$

llamada matriz de Toeplitz.

OBSERVACIÓN 1.6. Si la sucesión (1.1) es no negativa definida y no todos sus elementos son ceros (consideraremos solo tales sucesiones) entonces  $c_0 > 0$ . En efecto, basta observar que

$$c_0 \geq 0, \begin{vmatrix} c_0 & c_k \\ c_{-k} & c_0 \end{vmatrix} \geq 0 \quad \text{o} \quad c_0 \geq |c_k| \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

DEFINICIÓN 1.7. Diremos que la sucesión  $c_0 > 0, c_1, c_2, \dots, c_n$  no negativa definida tiene rango  $p$  si

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_k \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-k} & c_{-k+1} & \cdots & c_0 \end{vmatrix} > 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

para  $p = n + 1$ , y

$$\Delta_0 > 0, \Delta_1 > 0, \dots, \Delta_{p-1} > 0, \Delta_p = 0,$$

para  $p < n + 1$ .

OBSERVACIÓN 1.8. Si la sucesión no negativa definida tiene rango  $p < n + 1$ , entonces la sucesión  $c_0 > 0, c_1, \dots, c_{p-1}$  es positiva definida.

En vista de la observación (1.8), estudiaremos las propiedades de la sucesión

$$c_0 > 0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \tag{1.10}$$

positiva definida, para luego extender a una sucesión no negativa definida con rango  $p \leq n$ . Con este propósito, vamos a examinar la región  $C_n$  del plano complejo  $\zeta$  definida por la desigualdad

$$\Delta_n(\zeta) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & \zeta \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\zeta} & c_{-n+1} & \cdots & c_{-1} & c_0 \end{vmatrix} \geq 0, \tag{1.11}$$

donde  $C_n$  es un círculo con centro en el punto

$$\zeta_0 = \frac{(-1)^{n-1}}{\Delta_{n-2}} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} & 0 \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n+2} & c_{-n+3} & \cdots & c_0 & c_1 \end{vmatrix} \tag{1.12}$$

y con radio

$$r = \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}. \tag{1.13}$$

La demostración de (1.12) y (1.13) se puede ver en [1, Página 15].

TEOREMA 1.9. [1, Teorema 7, Página 15] *Dependiendo de si el punto  $c_n$  se encuentra en la frontera del círculo  $C_n$ , dentro de este o fuera de este, todas las raíces del polinomio*

$$W_n(z) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \cdots & c_1 \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} \quad (1.14)$$

*se encuentra en la frontera, dentro o fuera del círculo unitario.*

TEOREMA 1.10. *Si una sucesión  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  es positiva definida y  $c_n$  se encuentra en la frontera de  $C_n$ , es decir,*

$$\Delta_n = \Delta_n(c_n) = |c_{\lambda-\mu}|_0^n = 0, \quad (1.15)$$

*entonces todas las raíces del polinomio  $W_n(z)$ , definido en (1.14) son distintos y tiene módulo unitario.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se puede encontrar en [1, Página 17]. □

TEOREMA 1.11. *Si  $c_0 > 0, c_1, \dots, c_{n-1}$  es una sucesión positiva definida, entonces para todo número complejo  $c_n$  ubicado en el círculo  $C_n$ , cuya ecuación es*

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} & \zeta \\ c_{-1} & c_0 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \bar{\zeta} & c_{-n+1} & \cdots & c_{-1} & c_0 \end{vmatrix} = 0,$$

*le corresponde una y sólo una representación canónica*

$$c_k = \sum_{j=1}^n \rho_j \alpha_j^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.16)$$

*donde  $\rho_j > 0, |\alpha_j| = 1$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), además todos los  $\alpha_j$  son distintos tal que*

$$c_n = \sum_{j=1}^n \rho_j \alpha_j^n. \quad (1.17)$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este teorema se puede encontrar en [1, Página 19]. □

TEOREMA 1.12. *Si una sucesión  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  no negativa definida tiene rango  $p < n$ , entonces existe una única representación canónica*

$$c_k = \sum_{j=1}^p \rho_j \alpha_j^k \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (1.18)$$

*en la cual  $\rho_j > 0$ ,  $|\alpha_j| = 1$  y todas las  $\alpha_j$  son distintas.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración se puede ver en [1, Página 24,25].

□

## Capítulo 2

### Problema trigonométrico de momentos

En este capítulo reproducimos los resultados relevantes sobre problema TMTC descritos en el libro de Ahiezer-Krein [1]. Estos resultados se usan en la demostración del teorema (2.9) para el desarrollo del presente trabajo.

#### 1. Problema trigonométrico de momentos y funciones de Carathéodory

En esta sección nos enfocamos en la aplicación de los teoremas del capítulo anterior a la solución del problema TMTC.

El problema TMTC puede formularse como sigue: sea dada una sucesión de números complejos  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ . Hallar el conjunto de funciones distribución  $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  no decrecientes tales que

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t), \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.1)$$

El siguiente teorema da la condición necesaria y suficiente para la existencia de tal función  $\sigma$  definida en el intervalo  $[0, 2\pi]$  tal que satisface (2.1).

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $f(t)$  una función no decreciente continua por izquierda definida en  $[0, 2\pi]$ . El punto  $t_0 \in [0, 2\pi)$  se llama punto de crecimiento de la función  $f(t)$  si

$$f(t_0) < f(t_0 + 0).$$

TEOREMA 2.2. Sea dada una sucesión  $\{c_k\}$  con al menos  $p$  elementos. Para que exista una función no decreciente  $\sigma(t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , tal que tenga exactamente  $p$  puntos de crecimiento y satisfaga

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.2)$$

es necesario y suficiente que la sucesión  $\{c_k\}$  sea no negativa definida y tenga rango  $p$ .

DEMOSTRACIÓN. Si la sucesión  $\{c_k\}$  es no negativa definida y tiene rango  $p$ , entonces por el teorema 1.12 del capítulo 1, existe una única representación,

$$c_k = \sum_{j=1}^p \rho_j \alpha_j^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1, \dots)$$

donde  $\rho_j > 0$ ,  $\alpha_j = e^{it_j}$ , con  $\alpha_j$  distintos, entonces podemos suponer que

$$0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_p < 2\pi$$

definimos  $\sigma(t)$  como

$$\sigma(t) \equiv \sigma_p(t) = \sum_{t_j < t} \rho_j \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

entonces obtenemos la representación (2.2).

Recíprocamente, si la representación (2.2) se cumple, entonces la sucesión  $\{c_k\}$  es no negativa definida. En efecto, supongamos

$$\sum_{k=-m}^m A_k e^{ikt} \geq 0 \quad (0 \leq t \leq 2\pi, \sum |A_k| > 0) \quad (2.3)$$

como  $\sigma(t)$  tiene exactamente  $p$  puntos de crecimiento, para  $m \leq p-1$ , entonces tenemos la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=-m}^m A_k c_k = \int_0^{2\pi} \sum_{k=-m}^m A_k e^{ikt} d\sigma(t) \quad (A_{-k} = \bar{A}_k, c_{-k} = \bar{c}_k)$$

lo que implica que

$$\sum_{k=-m}^m A_k c_k > 0.$$

Por otro lado, para  $m \geq p$  el polinomio trigonométrico (2.3) siempre puede ser seleccionado tal que sea igual a cero en todos los puntos de crecimiento de la función  $\sigma(t)$  por lo tanto

$$\sum_{k=-m}^m A_k c_k = 0.$$

□

TEOREMA 2.3 (F. Riesz - G. Herglotz). *Para que exista una función no decreciente  $\sigma(t)$  con un conjunto infinito de puntos de crecimiento, es necesario y suficiente que satisfaga la condición*

$$c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

y que la sucesión  $\{c_k\}$  sea positiva definida.

La demostración de este teorema se puede ver en [1, Teorema 2, Página 45]

DEFINICIÓN 2.4. Una función  $f(z)$  es llamada función de Carathéodory o una C-función si es analítica en el círculo  $|z| < 1$  y tiene valores en la parte real positiva.

TEOREMA 2.5. (F. Riesz - Herglotz) Para que una función  $f(z)$  sea una C-función, es necesario y suficiente que

$$f(z) = i\Im f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dw(t) \quad (|z| < 1) \quad (2.4)$$

donde  $w(t)$  es una función no decreciente.

DEMOSTRACIÓN. La condición necesaria del teorema es inmediata, ya que la parte derecha de la fórmula (2.4) es analítica en la región  $|z| < 1$  y

$$\Re \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dw(t) \right\} = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2} dw(t) \geq 0,$$

donde  $r = |z| < 1$  y  $\varphi = \arg z$ .

Probaremos ahora que la condición es suficiente. Asumimos que  $f(z)$  es una función analítica y que tiene la parte real no negativa definida en el círculo  $|z| < 1$ . Entonces, como es conocido por la teoría de funciones analíticas, (ver [15])  $f(z)$  es dado, para  $|z| < r < 1$ , por

$$f(z) = i\Im f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} u(re^{it}) dt,$$

donde

$$u(re^{it}) = \frac{f(re^{it}) + \overline{f(re^{it})}}{2}$$

es la parte real de la función  $f(z)$ . Por tanto

$$\Re f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{it}) dt.$$

La representación indicada se puede escribir como

$$f(z) = i\Im f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} dw_r(t), \quad (2.5)$$

donde

$$w_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t u(re^{is}) ds.$$

Ya que  $u(re^{it}) \geq 0$  por hipótesis,  $w_r(t)$  es una función no decreciente de  $t$  y, para  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,

$$0 \leq w_r(t) \leq w_r(2\pi) = \Re f(0).$$

Por lo tanto, el conjunto de funciones  $w_r(t)$  ( $0 < r < 1$ ) es uniformemente acotado. Por el teorema de Helly, (ver [7]) existe una función no decreciente  $w(t)$  y la secuencia

$$r_1 < r_2 < r_3 \dots (r_j \rightarrow 1),$$

tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} w_j(t) = w$$

en todo los puntos de continuidad de  $w(t)$ . Aplicando el segundo teorema de Helly (ver [7]) a (2.5), tenemos que

$$f(z) = i\Im f(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dw(t) \quad (2.6)$$

para todo  $z$  en el círculo  $|z| < 1$ . Por lo tanto, el teorema esta probado.  $\square$

OBSERVACIÓN 2.6. Si consideramos la expansión de la función  $f(z)$

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots$$

entonces por (2.6) obtenemos los coeficientes de la función  $f(z)$  de Carathéodory.

$$\gamma_0 + \overline{\gamma_0} = 2 \int_0^{2\pi} dw(t),$$

$$\gamma_k = 2 \int_0^{2\pi} e^{-ikt} dw(t) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

TEOREMA 2.7. Para que una función  $f(z)$  sea una  $C$ -función, es necesario y suficiente que

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots = \frac{\gamma_0 - \overline{\gamma_0}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} d\sigma(t) \quad (|z| < 1) \quad (2.7)$$

donde  $\sigma(t)$  es una función no decreciente en  $[0, 2\pi]$ .

DEMOSTRACIÓN. Si

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots$$

es una C-función, entonces para todo  $n$  y todo  $x_0, x_1, \dots, x_n$ : Se tiene lo siguiente (ver [1]):

$$(\gamma + \bar{\gamma}) \sum_{\alpha=0}^n |x_\alpha|^2 + \sum_{\substack{\alpha, \beta=0 \\ \alpha \neq \beta}}^n \gamma_{\alpha-\beta} x_\alpha \bar{x}_\beta = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{f(re^{it}) + \overline{f(re^{it})}\} |x_0 + x_1 e^{-it} + \dots + x_n e^{-int}|^2 dt \geq 0.$$

Esto significa que la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$  es no negativa definida. Entonces por los teoremas 2.2 y 2.3, existe una función  $\sigma(t)$  no decreciente que satisface las ecuaciones

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = \int_0^{2\pi} d\sigma(t), \quad \gamma_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} d\sigma(t) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

y por lo tanto

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it} z}{1 - e^{it} z} d\sigma(t) \quad (|z| < 1).$$

Recíprocamente. Si para alguna función  $\sigma(t)$  no decreciente la ecuación de arriba se cumple, entonces  $f(z)$  es analítica en el círculo  $|z| < 1$  y

$$\Re f(z) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta + t) + r^2} d\sigma(t) \geq 0.$$

El teorema queda demostrado. □

De los teoremas 2.2 y 2.3 tenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 2.8. (Carathéodory - Toeplitz)

1) Para que exista una C-función  $f(z)$  satisfaciendo la condición

$$f(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + O(z^n), \quad |z| < 1$$

es necesario y suficiente que la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  sea no negativa definida.

2) La C-función  $f(z)$  es determinada únicamente por sus primeros coeficientes  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  si y sólo si el rango  $p$  de la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  es menor que  $n$ , y en este y solo este caso es una función racional de la forma

$$f(z) = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{1 + e^{it_j} z}{1 - e^{it_j} z} \rho_j, \quad \rho_j > 0, \quad t_j \in [0, 2\pi].$$

DEMOSTRACIÓN. 1) La primera parte se sigue del teorema anterior. Por lo tanto probaremos la segunda parte como sigue.

2) Si la función  $f(z)$  tiene la forma

$$f(z) = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{1 + e^{it_j z}}{1 - e^{it_j z}} \rho_j.$$

entonces los coeficientes  $\gamma_k$  tiene una representación (llamada representación canónica)

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_p \quad \gamma_k = \sum_{j=1}^p \rho_j e^{ikt_j} \quad (k = 1, \dots),$$

lo cual significa que la sucesión no negativa definida tiene rango  $p$ . Recíprocamente, si la sucesión no negativa definida  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_1, \dots$  tiene rango  $p$ , entonces construyendo la representación canónica tenemos que

$$\frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{1 + e^{it_j z}}{1 - e^{it_j z}} \rho_j = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + O(z^n).$$

Por lo tanto el teorema queda demostrado. □

## 2. El L-problema de momentos o problema de momentos de Markov

En la presente sección consideramos el problema TMTM, que consiste en hallar el conjunto de funciones continuas a trozos  $f(t)$  definidos en  $[0, 2\pi]$  con valores  $-L \leq f(t) \leq L$ , tales que

$$c_k = \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt} dt \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (2.8)$$

NOTA. En este problema suponemos que existe la derivada acotada de la función distribución  $\mu : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} d\mu(t) &= f(t)dt \\ -L &\leq f(t) \leq L. \end{aligned}$$

El académico A. A. Markov fue el primero en estudiar este problema. Tales problemas se llaman L-problema de momentos, o problema de momentos de Markov. Por abuso de notación la función  $f(t)$  no es la misma que en los teoremas anteriores. La función  $f$  representa una función real definida en  $[0, 2\pi]$ .

En el siguiente teorema, veremos la relación que existe entre el problema TMTM y problema TMTM. Este teorema es crucial para el desarrollo de la presente tesis.

TEOREMA 2.9. [1, Ahiezer, Krein] *Para que exista una función continua a trozos  $f(t)$  que satisfaga las relaciones*

$$\begin{aligned} -L \leq f(t) \leq L \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \\ c_k = \int_0^{2\pi} f(t)e^{ikt} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

*es necesario y suficiente que se satisfaga la desigualdad*

$$-2\pi L \leq c_0 \leq 2\pi L \quad (2.10)$$

*y que la sucesión*

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$$

*definidas por la expansión*

$$\begin{aligned} e^{\left\{ \frac{i}{2L} (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{n-1} z^{n-1}) \right\}} = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots, \\ \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = 2 \cos \frac{c_0}{4L} \end{aligned} \quad (2.11)$$

*sea no negativa definida.*

DEMOSTRACIÓN. Sí existe una función  $f(t)$  tal que satisface las relaciones (2.9), entonces la función

$$\Phi(z) = \frac{1}{4L} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it} z}{1 - e^{it} z} f(t) dt = \frac{1}{2L} \left( \frac{c_0}{2} + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + \dots \right) \quad (2.12)$$

es regular en el círculo  $|z| < 1$  y su parte real está dado por:

$$\Re \Phi(z) = \frac{1}{4L} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t + \theta) + r^2} f(t) dt \quad (z = re^{i\theta})$$

Por lo tanto, poniendo

$$F(z) = e^{i\Phi(z)},$$

tenemos que

$$\Re F(z) = |F(z)| \cos \{ \Re \Phi(z) \} \geq 0,$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$  tal que  $|z| < 1$ .

Es decir,  $F(z)$  es una C-función. Pero observando (2.12) y (2.11) tenemos que:

$$F(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots .$$

Así, por el teorema 2.7, la sucesión

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1},$$

es no negativa definida. La condición (2.10) es inmediata.

Recíprocamente, supongamos que la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  es no negativa definida y que cumple (2.10).

Si  $c_0 = \pm 2\pi L$ , entonces  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = 0$ , y como la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  es no negativa definida esto significa que  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  son iguales a cero, lo cual implica que  $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$  y así obtenemos la solución trivial  $f(t) \equiv \pm L$ .

Supongamos ahora que,

$$|c_0| < 2\pi L. \quad (2.13)$$

Entonces como la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$  es no negativa definida, entonces por los teoremas 1.11 y 1.12 del capítulo I, existe una representación

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 &= \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_p \\ \gamma_k &= \rho_1 \alpha_1^k + \rho_2 \alpha_2^k + \dots + \rho_p \alpha_p^k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned}$$

donde  $p \leq n, \rho_j > 0$  y  $\alpha_j = e^{it_j}$  son distintos, así podemos asumir que

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < t_1 + 2\pi.$$

Luego definimos la siguiente función

$$F(z) = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \rho_j \frac{1 + \alpha_j z}{1 - \alpha_j z}.$$

Luego vemos que

$$F(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots,$$

es una función racional cuyo numerador y denominador son polinomios de grado  $p$ . Pero ya que

$$F_1(t) = iF(e^{it}) = i \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \rho_j \cot \frac{t + t_j}{2},$$

entonces para cualquier  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño tenemos,

$$F_1(-t_k + \epsilon) < 0, \quad F_1(-t_k - \epsilon) > 0 \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Así los ceros de la función  $F(z)$  se encuentran en el círculo  $|z| = 1$  y alternan con los puntos  $\bar{\alpha}_j$ . Por lo tanto

$$F(z) = A \prod_{k=1}^p \frac{e^{-\frac{i}{2}\tau_k} - e^{\frac{i}{2}\tau_k} z}{e^{-\frac{i}{2}t_k} - e^{\frac{i}{2}t_k} z},$$

donde podemos asumir que

$$\tau_1 < t_1 < \tau_2 < \dots < t_p < \tau_1 + 2\pi.$$

Pero como  $|F(0)| = |\gamma_0| = 1$ , tenemos que  $|A| = 1$ ; y como la función  $F(z)$  tiene valores puramente imaginarios en la circunferencia  $|z| = 1$ , tenemos que  $A = \pm i$ ; por otro lado, como

$$\Re F(0) = \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 > 0$$

y

$$F(0) = \pm i e^{\frac{i}{2} \sum_{k=1}^p (t_k - \tau_k)},$$

además

$$0 < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (t_k - \tau_k) < \pi,$$

por lo tanto tenemos  $A = -i$ , lo cual significa que

$$F(z) = -i \prod_{k=1}^p \frac{e^{-\frac{i}{2}\tau_k} - e^{\frac{i}{2}\tau_k z}}{e^{-\frac{i}{2}t_k} - e^{\frac{i}{2}t_k z}}. \quad (2.14)$$

Definimos la función

$$f_L(t) := \begin{cases} L, & (\tau_j < t < t_j) \\ -L, & (t_j < t < \tau_{j+1}) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, p; \tau_{p+1} = \tau_1 + 2\pi) \quad (2.15)$$

$$f_L(t + 2\pi) := f_L(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado de (2.14) y (2.15) tenemos:

$$\frac{1}{4L} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} f_L(t) dt = \frac{1}{i} \log F(z), \quad (2.16)$$

donde la rama del logaritmo se escoge de tal manera que:

$$\frac{1}{i} \log F(0) = \frac{1}{4L} \int_0^{2\pi} f_L(t) dt = \sum_{k=1}^p \frac{t_k - \tau_k}{2} - \frac{\pi}{2},$$

lo cual significa por (2.13) que es igual a  $\frac{c_0}{4L}$ . Pero como

$$F(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} = e^{\frac{i}{2L}} \left( \frac{c_0}{2} + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + \dots \right),$$

entonces de (2.16) tenemos

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{it}z}{1 - e^{it}z} f_L(t) dt = \frac{c_0}{2} + c_1 z + \dots + c_{n-1} z^{n-1} + \dots,$$

del cual se sigue que

$$c_k = \int_0^{2\pi} f_L(t) e^{ikt} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Por lo tanto la función  $f_L$  constante a trozos satisface las condiciones dadas en (2.9), esto completa la prueba del teorema.

□

**OBSERVACIÓN 2.10.** En el capítulo 4 la función  $f_L(t)$  definida en (2.15) jugará el papel del control  $u_{x_0}(t)$  buscado en el problema de CA. Por otro lado la función  $F(z)$  en (2.14), determina la forma conveniente para la función  $s(z)$  ver (4.6) y (4.9), que determinan los puntos de salto  $\tau_j$  y  $t_j$  del control  $u_{x_0}(t)$ , ver teorema C.

### 3. Desigualdad fundamental matricial de Potapov

A continuación presentamos algunas aplicaciones del método de la desigualdad fundamental matricial (DMF) de Potapov para resolver el problema de CA.

En los 60 del siglo pasado, V.P. Potapov desarrolló un enfoque particular para tratar problemas clásicos de interpolación y problema de momentos en su versión matricial. Su método se basa en la transformación del problema original en una desigualdad matricial. Utilizando esta estrategia varios problemas de interpolación matricial fueron tratados con éxito, ver ([4], [3], [5], [12]).

La formulación matricial del problema es motivada por la siguiente consideración:

Existen problemas físicos de naturaleza esencialmente multi-dimensional, por ejemplo en la teoría de circuitos electrónicos, para la construcción de una red de 4 polos con frecuencia característica dada. En [6] la impedancia (medida de resistencia que presenta un circuito a una corriente cuando se aplica un voltaje) es una matriz de segundo orden. Nosotros aplicaremos el método de Potapov al caso escalar.

A continuación planteamos el problema de interpolación para funciones de Carathéodory. Sea dada una secuencia de números complejos  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ , se requiere:

1. Encontrar las condiciones necesarias y suficientes para que  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  sea los coeficientes iniciales del desarrollo en serie en el disco unitario

$$s(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \dots + O(z^n), \quad (|z| < 1).$$

2. Describir las soluciones.

**OBSERVACIÓN 2.11.** Del teorema 2.2 y teorema 2.8, los siguientes problemas son equivalentes:

- a. Hallar el conjunto de soluciones del problema TMTC,
- b. Hallar el conjunto de soluciones del problema de interpolación de Carathéodory.

El Problema de Carathéodory está asociado a una desigualdad matricial fundamental (DFM), de la forma :

$$\left( \begin{array}{cc} A & B \\ B^* & C \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \gamma_{-1} & \cdots & \gamma_{1-n} & z^{-1} [s(z) - \gamma_0] \\ \gamma_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \cdots & \gamma_{2-n} & z^{-2} [s(z) - (\gamma_0 + \gamma_1 z)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & z^{-n} [s(z) - (\gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_{n-1} z^{n-1})] \end{array} \right) \geq 0 \quad (|z| < 1),$$

\*  $\frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}}$

(2.17)

donde \* indica la transpuesta conjugada del bloque

$$\begin{aligned} & z^{-1} [s(z) - \gamma_0] \\ & z^{-2} [s(z) - (\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z})] \\ & \cdots \\ & z^{-n-1} [s(z) - (\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{z} + \cdots + \frac{\gamma_n}{z^n})] \end{aligned}$$

El siguiente teorema dá las condiciones necesarias y suficientes para que una función  $s(z)$  sea una función de Carathéodory en términos de la desigualdad (2.17).

Previo a este teorema damos un lema que dá las condiciones necesarias y suficientes para que la matriz hermitiana

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix}$$

con A y C matrices cuadradas, sea no negativa, más precisamente

LEMA 2.12. [6, Página 88] *La matriz H es no negativa definida si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones*

- 1  $A \geq 0$
- 2 La ecuación  $AX = B$  tiene por lo menos una solución
- 3 Para toda solución X se satisface la desigualdad

$$C - X^* A X \geq 0.$$

TEOREMA 2.13. [12, Potapov-Kovalishina] *Dada una secuencia de números complejos  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ . Para que una función  $s(z)$  sea una función de Karathéodory satisfaciendo*

$$s(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \cdots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \cdots \quad (2.18)$$

es necesario y suficiente que  $s(z)$  satisfaga la desigualdad (2.17).

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la función

$$s(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots .$$

satisface (2.17), Entonces tenemos

$$\frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}} \geq 0,$$

ya que  $|z| < 1$ , se sigue que  $s(z)$  es una C-función. Ahora demostraremos que

$$b_0 = \gamma_0, \quad b_1 = \gamma_1, \dots, b_{n-1} = \gamma_{n-1}$$

Escribimos  $b_0 - \gamma_0 = a_0, b_1 - \gamma_1 = a_1, \dots, b_{n-1} - \gamma_{n-1} = a_{n-1}$  y consideramos la no negatividad del bloque menor de segundo orden,

$$\left( \begin{array}{c|c} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & z^{-n} [a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots] \\ * & \frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}} \end{array} \right) \geq 0.$$

Multiplicamos esta desigualdad a la derecha por la matriz rectangular  $T = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$  y a la izquierda por  $T^*$ , donde  $f$  y  $g$  son vectores arbitrarios. La no negatividad del determinante implica la desigualdad

$$\left| \frac{1}{z^n} (f^* a_0 g + f^* a_1 g z + \cdots + f^* a_{n-1} g z^{n-1} + \cdots) \right|^2 \leq f^* (\gamma_0 + \bar{\gamma}_0) f g^* \frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}} g$$

y como la parte derecha esta acotada, entonces haciendo  $z \rightarrow 0$ , tenemos  $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$ . Por lo tanto

$$b_0 = \gamma_0, \quad b_1 = \gamma_1, \dots, b_{n-1} = \gamma_{n-1}.$$

Recíprocamente. Supongamos que  $s(z)$  es una función de Carathéodory entonces,

$$s(z) = \frac{\gamma_0 - \bar{\gamma}_0}{2} + \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\tau(\theta).$$

Verificamos la desigualdad (2.17) primero para una constante imaginaria pura ( $\Im s(0)$ ) y luego para la función escalar

$$s_0(z) = \frac{1}{2} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ik\theta} z^k$$

En el primer caso, la matriz se reduce a la matriz cero; en el segundo, tiene una representación

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & C \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & e^{i(n-1)\theta} & (e^{i\theta} - z)^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ e^{-i(n-1)\theta} & \dots & 1 & e^{-i(n-1)\theta} (e^{i\theta} - z)^{-1} \\ \hline & * & & |e^{i\theta} - z|^{-2} \end{array} \right) \quad (2.19)$$

Luego verificamos las hipótesis del lema anterior, esto es:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\theta} \\ \vdots \\ e^{-i(n-1)\theta} \end{pmatrix} (1, e^{i\theta}, \dots, e^{i(n-1)\theta}) \geq 0.$$

2. La ecuación  $AX = B$  tiene solución

$$X = \begin{pmatrix} (e^{i\theta} - z)^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. C - X^*AX = |e^{i\theta} - z|^{-2} - |e^{i\theta} - z|^{-2} = 0.$$

Para mostrar que (2.17) es válido para una C-función  $s(z)$ , queda sólo multiplicar a (2.19) por  $2 \cdot d\tau(\theta)$  e integrar de 0 a  $2\pi$ .  $\square$



## Capítulo 3

### Del problema de control admisible al problema de momentos

En la primera sección de este capítulo introducimos algunos conceptos básicos de la teoría de control, para controles sin restricción, es decir  $u(t)$  para  $t \in [t_0, T]$  toma valores en  $\mathbb{R}^r$ .

En la segunda sección obtenemos el conjunto  $X_{0,n}$ , ver definición (3.7) para el sistema (3.20) con restricción del control  $|u(t)| \leq L$  ( $r=1$ ).

#### 1. Control no acotado. Criterio de Kalman

El objeto básico en el estudio de la teoría de control es un sistema lineal de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.1)$$

con la condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.2)$$

donde  $A \in \mathcal{M}_{m \times m}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{m \times r}$  son matrices constantes con entradas reales y  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^r$ .

DEFINICIÓN 3.1. Si para un par de puntos  $x_0, x_1 \in D \subset \mathbb{R}^m$  existe un control  $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$  tal que la solución  $x(t)$  del problema de valor inicial,

$$\dot{x} = Ax + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.3)$$

satisface  $x(T) = x_1$ , entonces se dice que el control  $u(t)$  traslada la posición  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo  $T$ .

DEFINICIÓN 3.2. El sistema lineal (3.1) se llama completamente controlable en el intervalo  $[t_0, T]$  si para cualquiera dos puntos  $x_0, x_1 \in D \subset \mathbb{R}^m$  existe un control  $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^r$  que traslada  $x_0$  a  $x_1$  en tiempo  $T$ .

El problema de determinar si un sistema de control es completamente controlable se llama problema de controlabilidad.

Antes de enunciar el proximo teorema que da un criterio de controlabilidad del sistema (3.3) enunciamos el siguiente lema que dice que una matriz exponencial se puede escribir como suma finita.

LEMA 3.3. Sea  $A$  una matriz constante de  $m \times m$ , con polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^m + c_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0; \quad (3.4)$$

entonces

$$e^{At} = \alpha_1(t)I + \alpha_2(t)A + \alpha_3(t)A^2 + \cdots + \alpha_m(t)A^{m-1}, \quad (3.5)$$

donde los  $\alpha_k(t)$ ,  $1 \leq k \leq m$ , son las soluciones de la ecuación diferencial de orden  $m$

$$\alpha^{(m)} + c_{m-1}\alpha^{(m-1)} + \cdots + c_1\alpha' + c_0\alpha = 0 \quad (3.6)$$

satisfaciendo la condición inicial

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1(0) = 1 & \alpha_2(0) = 0 & \alpha_m(0) = 0 \\ \alpha_1'(0) = 0 & \alpha_2'(0) = 1 & \alpha_m'(0) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{(m-1)}(0) = 0 & \alpha_2^{(m-1)}(0) = 0 & \alpha_m^{(m-1)}(0) = 1 \end{array}$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración de este lema se puede ver en [14] □

Uno de los principales resultados para la controlabilidad, dado por R. Kalman (ver [2]) es el teorema 3.4. La demostración de este teorema la incluimos integramente en virtud a que es difícil encontrarla en la literatura sobre la teoría de control.

TEOREMA 3.4 (Criterio de controlabilidad de sistemas lineales). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a) El sistema lineal (3.1) es completamente controlable en el intervalo  $[t_0, T]$
- (b)  $\text{rang}(B, AB, \dots, A^{m-1}B) = m$ , (Criterio de Kalman)
- (c) La matriz  $N(T)$  es positiva definida donde  $N(T)$  está definido por

$$N(T) := \int_{t_0}^T e^{-At} B B^* e^{-A^*t} dt \quad (3.7)$$

Además la función

$$u(t) = B^* e^{-A^*t} N^{-1}(T) (e^{-AT} x_1 - e^{-At_0} x_0) \quad (3.8)$$

es uno de los posibles controles que trasladan el punto  $x_0$  al punto  $x_1$  en tiempo  $T$ .

DEMOSTRACIÓN. [(a)  $\Rightarrow$  (b)]

Sea  $Q = (B, AB, \dots, A^{m-1}B)$ . Asumimos que el sistema lineal (3.1) es completamente controlable y probaremos que  $\text{rang}(Q) = m$ .

Supongamos lo contrario, es decir,  $\text{rang}(Q) < m$ . Entonces las filas de  $Q$  son linealmente dependientes, de ahí existe un vector  $\zeta \in \mathbb{R}^m$  distinto de cero tal que  $\zeta^* Q = 0$ , desarrollando esta desigualdad tenemos:

$$\zeta^* B = \zeta^* AB = \dots = \zeta^* A^{m-1} B = 0. \quad (3.9)$$

Por otro lado utilizando la fórmula de Cauchy para (3.1) tenemos:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (3.10)$$

Luego por hipótesis el sistema (3.1) es completamente controlable, tomando  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \zeta$ , entonces existe un control  $u(t)$  tal que traslada  $x_0 = 0$  a  $x_1 = \zeta$  en tiempo  $T$ , entonces

$$\zeta = \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

Luego por el lema anterior desarrollamos la exponencial  $e^{At}$  como suma finita.

$$e^{At} = \sum_{s=1}^m \alpha_s(t) A^{s-1}. \quad (3.12)$$

Reemplazando (3.12) en (3.11) tenemos:

$$\zeta = \int_{t_0}^T \left( \sum_{s=1}^m \alpha_s(T-\tau) A^{s-1} \right) Bu(\tau) d\tau \quad (3.13)$$

Ahora multiplicando por  $\zeta^*$  por la izquierda a (3.13) y empleando (3.9) tenemos:

$$\zeta^* \zeta = \|\zeta\|^2 = \int_{t_0}^T \sum_{s=1}^m \alpha_s(T-\tau) \zeta^* A^{s-1} Bu(\tau) d\tau = 0$$

lo cual implica que  $\zeta = 0$ , que es una contradicción. Y por lo tanto tenemos que  $\text{rang}(Q) = m$  [(b)  $\Rightarrow$  (c)] por contradicción. Supongamos que  $N(T)$  no es definida positiva entonces existe un  $x \in \mathbb{R}^m$  distinto de cero tal que

$$V(x) := x^* N(T)x \leq 0 \quad (3.14)$$

tomando en cuenta (3.7) tenemos

$$V(x) = \int_{t_0}^T (x^* e^{-At} B)(B^* e^{-A^*t} x) dt$$

lo que implica que:

$$V(x) = \int_{t_0}^T \|B^* e^{-A^*t} x\|^2 dt \geq 0 \quad (3.15)$$

de (3.14) y (3.15) se sigue que existe  $\zeta$  distinto de cero tal que  $V(\zeta) = 0$  entonces,

$$\int_{t_0}^T \|B^* e^{-A^*t} \zeta\|^2 dt = 0 \quad (3.16)$$

lo que equivale a

$$B^* e^{-A^*t} \zeta = 0 \quad (3.17)$$

para todo  $t \in [t_0, T]$ .

Luego derivando (3.17) respecto de  $t$  tenemos:

$$\begin{cases} \zeta^* e^{-At} B = 0 \\ -\zeta^* A e^{-At} B = 0 \\ \vdots \\ (-1)^m \zeta^* A^{n-1} e^{-At} B = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

tomando en cuenta que  $e^{At} A^k = A^k e^{At}$  y denotando  $q^* = \zeta e^{-At_0}$ , donde  $q^* \neq 0$ , las relaciones de (3.18) se reescriben como sigue:

$$\begin{cases} q^* B = 0 \\ q^* AB = 0 \\ \vdots \\ q^* A^{n-1} B = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

lo cual quiere decir que:  $q^* Q = 0$  así el  $\text{rang}(Q) < m$ . Lo que contradice a la condición del inciso (b), de donde  $N(T)$  es positiva definida.

[(c)  $\Rightarrow$  (a)]. Como  $N(T) > 0$  entonces  $N(T)$  es invertible y por lo tanto existe  $N^{-1}(T)$ , colocando (3.8) en (3.10) para  $t = T$  tenemos:

$$\begin{aligned}
 x(T) &= e^{A(T-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau \\
 &= e^{A(T-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^T e^{A(T-\tau)} B \left( B^* e^{-A^* \tau} N^{-1}(T) (e^{-AT} x_1 - e^{-At_0} x_0) \right) d\tau \\
 &= e^{AT} \left( e^{At_0} x_0 + \int_{t_0}^T e^{-A\tau} B B^* e^{-A^* \tau} d\tau \cdot N^{-1}(T) (e^{-AT} x_1 - e^{-At_0} x_0) \right) \\
 &= e^{AT} \left( e^{-At_0} x_0 + N(T) \cdot N^{-1}(T) (e^{-AT} x_1 - e^{-At_0} x_0) \right) \\
 &= e^{AT} (e^{-At_0} x_0 + e^{-AT} x_1 - e^{-At_0} x_0) = x_1
 \end{aligned}$$

para cualquier  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^m$ . Por lo tanto el sistema lineal (3.1) es completamente controlable.  $\square$

OBSERVACIÓN 3.5. El teorema anterior no es válido para sistemas de control con restricción (ver [8] y [9]).

## 2. Problema de control admisible como problema trigonométrico de momentos

En esta sección construimos la matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}_{n-1}$  vease (0.7) cuyos elementos  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  dependen de la condición inicial  $x_0$  del sistema de control (3.20). Más adelante verificaremos en términos de esta matriz si el sistema de control (3.20) es controlable.

Reproducimos el sistema de CA considerado en esta tesis

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u, \\
 \dot{x}_{2k} &= k x_{2k+1} + u, \quad |u| \leq L, \\
 \dot{x}_{2k+1} &= -k x_{2k}, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad n \geq 2
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

con la condición inicial  $x_0 = x(0)$ .

DEFINICIÓN 3.6. El sistema lineal (3.20) se llama 0-controlable en  $D \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  en tiempo  $T$ , si para cualquier  $x \in D$  existe un control  $u : [t_0, T] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}$  tal que traslada  $x$  al origen en tiempo  $T$ .

DEFINICIÓN 3.7. Sea  $X_{0,n}$  el conjunto de todas las condiciones iniciales  $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  del sistema (3.20) para los cuales la trayectoria del sistema (3.1) con  $u = u(t)$  comienza en  $x_0$  y termina en el origen en tiempo  $T$ . El conjunto  $X_{0,n}$  se llama conjunto 0-controlable.

Ahora reducimos el problema CA a un problema TMTC como sigue. El sistema (3.20) se reescribe en forma vectorial de la siguiente manera:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad |u| \leq L, \tag{3.21}$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

$A \in \mathcal{M}_{(2n-1) \times (2n-1)}$  y  $B \in \mathbb{R}^{2n-1}$ . Por la fórmula de Cauchy vease (3.23) para  $t_0 = 0$ , la solución del sistema (3.20) con la condición inicial  $x(0) = x_0$  tiene la forma

$$x(t) = e^{At} \left( x_0 + \int_0^t e^{-\tau A} B u(\tau) d\tau \right). \quad (3.23)$$

La matriz fundamental del sistema homogéneo asociado a (3.20) es

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sen t & & 0 & 0 \\ 0 & -\sen t & \cos t & & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cos(n-1)t & \sen(n-1)t \\ 0 & 0 & 0 & -\sen(n-1)t & \cos(n-1)t \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Para que el sistema (3.20) sea 0-controlable en  $X_{0,n} \subset \mathbb{R}^{2n-1}$  en tiempo  $T = 2\pi$ , la trayectoria  $x(t)$  del sistema (3.20) que se inicia en  $x(0) = x_0 \in X_{0,n}$  dada por la fórmula (3.23), debe satisfacer  $x(2\pi) = 0$  en virtud a algún control  $u_{x_0}(t)$  que satisface  $|u_{x_0}(t)| \leq L$ . De esta manera se debe satisfacer la ecuación

$$-x_0 = \int_0^{2\pi} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau. \quad (3.25)$$

Sustituyendo (3.24) y  $B$  de (3.22) a la igualdad (3.25) tenemos

$$\int_0^{2\pi} e^{-At} B u(t) dt = \begin{pmatrix} \int_0^{2\pi} u_{x_0}(t) dt \\ \int_0^{2\pi} \cos t u_{x_0}(t) dt \\ \vdots \\ \int_0^{2\pi} \cos((n-1)t) u_{x_0}(t) dt \\ \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}((n-1)t) u_{x_0}(t) dt \end{pmatrix}.$$

Usando las coordenadas del vector  $x_0$  la igualdad (3.25) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} -x_{10} &= \int_0^{2\pi} u_{x_0}(t) dt \\ -x_{20} &= \int_0^{2\pi} \cos t u_{x_0}(t) dt \\ &\vdots \\ -x_{(2n-1)0} &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}((n-1)t) u_{x_0}(t) dt \end{aligned}$$

donde  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{(2n-1)0})$ . Empleando la fórmula de Euler  $e^{it} = \cos(t) + i \operatorname{sen}(t)$ , el sistema (3.20) se representa de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^{2\pi} u_{x_0}(t) dt \\ c_1 &= \int_0^{2\pi} e^{it} u_{x_0}(t) dt \\ &\vdots \\ c_{n-1} &= \int_0^{2\pi} e^{i(n-1)t} u_{x_0}(t) dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde la sucesión  $\{c_k\}_{k=0}^{n-1}$  están definidas por:

$$c_0 := -x_{10}, c_1 := -x_{20} - ix_{30}, \dots, c_{n-1} := -x_{2(n-1)0} - ix_{(2n-1)0} \quad (3.27)$$

y sus respectivos conjugados estan dadas por:

$$\overline{c_0} := -x_{10}, \overline{c_{-1}} := -x_{20} + ix_{30}, \dots, \overline{c_{-(n-1)}} := -x_{2(n-1)0} + ix_{(2n-1)0}.$$

Los valores  $c_k$  de la parte izquierda de (3.26) se llama momentos del problema TMTM.

De esta manera hemos reducido el problema de CA al problema TMTM, que se distingue del problema TMTC en lo siguiente: en el primer problema de busca una función continua a trozos  $u_{x_0}(t)$  en  $[0, 2\pi]$  tal que  $-L \leq u(t) \leq L$ , mientras el problema TMTC busca una función distribución no decreciente  $\sigma(t)$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

Ahora utilizando la igualdad (2.11), hallamos los valores  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ , que representan los momentos del problema TMTC. Desarrollando la parte derecha de (2.11) tenemos

$$e^{\frac{ic_0}{4L}} + \frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_1 z}{2L} + \left( \frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_2}{2L} - \frac{e^{\frac{ic_0}{4L}} c_1^2}{8L^2} \right) z^2 + \left( -\frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_1^3}{48L^3} - \frac{e^{\frac{ic_0}{4L}} c_2 c_1}{4L^2} + \frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_3}{2L} \right) z^3 + \dots \quad (3.28)$$

Luego comparando coeficientes de (2.11) y (3.28) tenemos

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= e^{\frac{ic_0}{4L}} \\ \gamma_1 &= \frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_1}{2L} \\ \gamma_2 &= \frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_2}{2L} - \frac{e^{\frac{ic_0}{4L}} c_1^2}{8L^2} \\ \gamma_3 &= \left( -\frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_1^3}{48L^3} - \frac{e^{\frac{ic_0}{4L}} c_2 c_1}{4L^2} + \frac{ie^{\frac{ic_0}{4L}} c_3}{2L} \right) \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tomando en cuenta (3.27) y (3.29) tenemos los primeros coeficientes del desarrollo de (2.11) en términos de la condición inicial  $x_0$  del sistema (3.20)

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= e^{-\frac{ix_{10}}{4L}} \\ \gamma_1 &= \frac{ie^{-\frac{ix_{10}}{4L}} (-x_{20} - ix_{30})}{2L} \\ \gamma_2 &= \frac{ie^{-\frac{ix_{10}}{4L}} (-x_{40} - ix_{50})}{2L} - \frac{e^{-\frac{ix_{10}}{4L}} (-x_{20} - ix_{30})^2}{8L^2}. \end{aligned}$$

Así, obtenemos los primeros momentos

$$\begin{aligned}
\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 &= 2 \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) \\
\gamma_1 &= \frac{1}{2L} \left( \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{30} - \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20} - i \left( \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20} + \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{30} \right) \right) \\
\gamma_2 &= \frac{1}{8L^2} \left( -\cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20}^2 + x_{30}^2 \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) + 4Lx_{50} \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 2x_{20}x_{30} \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 4Lx_{40} \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left( -x_{30}^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 4Lx_{50} \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 2x_{20}x_{30} \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) - 4Lx_{40} \cos\left(\frac{x_{10}}{4L}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x_{10}}{4L}\right)x_{20}^2 \right) i \right).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

de la secuencia  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  del problema TMTC, en términos de la condición inicial  $x_0$  del sistema (3.20).

De manera análoga es posible obtener los restantes  $\gamma_3, \gamma_4, \dots, \gamma_{n-1}$  momentos. Con la secuencia  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  construimos la matriz de Toeplitz

$$\mathbf{T}_{n-1} := \begin{pmatrix} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \bar{\gamma}_1 & \cdots & \bar{\gamma}_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \cdots & \bar{\gamma}_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

OBSERVACIÓN 3.8. Claramente la matriz construida en (3.31) depende de la condición inicial  $x_0$  del sistema (3.20).

### 3. Caracterización del conjunto 0-controlable $X_{0,n}$

En esta sección caracterizamos el conjunto 0-controlable  $X_{0,n}$  para el sistema lineal (3.20). Por la observación (3.8), de ahora en adelante consideraremos matrices de Toeplitz  $\mathbf{T}_{n-1}$  que están construidos apartir de la condición inicial  $x_0$  de sistema (3.20) como en (3.31).

TEOREMA A. Sea  $x_0$  una condición inicial para el sistema de control (0.6). El conjunto 0-controlable  $X_{0,n}$  está dado por:

$$X_{0,n} = \{x_0 \in \mathbb{R}^{2n-1} : \mathbf{T}_{n-1} \geq 0, \quad -2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x_0 \in X_{0,n}$  entonces  $\mathbf{T}_{n-1} \geq 0$  esto equivale a que la sucesión  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  es no negativa definida, luego como  $-2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L$  entonces por el teorema (2.9) existe  $u_{x_0}(t)$  tal que:

$$\begin{aligned} -L \leq u(t) \leq L \quad (0 \leq t \leq 2\pi), \\ c_k = \int_0^{2\pi} u(t) e^{ikt} dt \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Tomando en cuenta (3.27), la igualdad (3.32) es equivalente a

$$-x_0 = \int_0^{2\pi} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau. \quad (3.33)$$

De la fórmula de Cauchy esta igualdad es equivalente a la igualdad  $x(2\pi) = 0$ . De esta manera para todo  $x_0 \in X_{0,n}$  existe un control acotado  $u_{x_0}(t)$  mediante el cual  $x_0$  llega al origen en tiempo  $T = 2\pi$ .  $\square$

**3.1. Ejemplo del Conjunto 0-controlable para  $n = 2$ .** Para el caso  $n = 2$  el sistema (3.20) toma la forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_2, \quad |u| \leq 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

Luego reescribiendo de forma más compacta el sistema (3.34) de CA tenemos

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad |u| \leq 1, \quad (3.35)$$

donde

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De (3.30) tenemos los siguientes momentos del problema TMTC:

$$\begin{aligned} \gamma_0 + \overline{\gamma_0} &= 2 \cos \frac{x_{10}}{4}, \\ \gamma_1 &= \frac{x_{30} \cos(\frac{x_{10}}{4}) - x_{20} \sin(\frac{x_{10}}{4})}{2} + \frac{(-x_{20} \cos(\frac{x_{10}}{4}) - x_{30} \sin(\frac{x_{10}}{4})) i}{2}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Luego por el teorema 2.9 nuestro sistema de CA (3.34) tiene solución si y sólo si, se cumple las condiciones siguientes:

$$-2\pi \leq x_{10} \leq 2\pi \quad (3.37)$$

y que matriz de Toéplitz

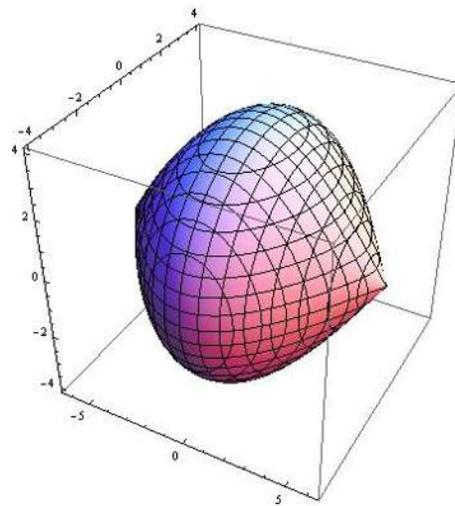
$$\mathbf{T}_1 := \begin{pmatrix} \gamma_0 + \overline{\gamma_0} & \gamma_{-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 + \overline{\gamma_0} \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

es no negativa definida.

En coordenadas del estado inicial  $x_0$ , (3.37) y (3.38) se reescribe de la siguiente manera

$$X_{0,2} = \left\{ \begin{array}{l} -2\pi \leq x_{10} \leq 2\pi \\ 16 \cos^2\left(\frac{x_{10}}{4}\right) - x_{20}^2 - x_{30}^2 \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (3.39)$$

Estas desigualdades describe el conjunto 0-controlable  $X_{0,2}$ .



El conjunto 0-controlable  $X_{0,2}$  para  $n = 2$

Lo anterior quiere decir que para cualquier estado inicial  $x_0$  ubicado en el conjunto 0-controlable  $X_{0,2}$ , podemos encontrar un control  $u_{x_0}(t)$  tal que la solución  $x(t)$  del sistema lineal (3.34) traslada mediante el control  $u_{x_0}(t)$  del estado inicial  $x_0$  al origen  $x_1 = (0, 0, 0)$  en tiempo  $T = 2\pi$ . Y para los estados iniciales que se encuentran en  $\mathbb{R}^3 - X_{0,2}$  el sistema (3.34) no es controlable.

**3.2. Ejemplo del conjunto 0-controlable para  $n = 3$ .** El sistema (3.20) para  $n = 3$  tiene la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad |u| \leq 1. \quad (3.40)$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De manera análoga al caso  $n = 2$  obtenemos el conjunto 0-controlable  $X_{0,3}$  que esta dado por:

$$X_{0,3} = \left\{ \begin{array}{l} 2\pi \geq x_{10} \geq -2\pi \\ 16 \cos^2\left(\frac{x_{10}}{4}\right) - x_{20}^2 - x_{30}^2 \geq 0 \\ \cos\left(\frac{x_{10}}{4}\right) x_{20}^4 + \left(2 \cos\left(\frac{x_{10}}{4}\right) x_{30}^2 - 8 \left(4 \cos\left(\frac{x_{10}}{4}\right) + \sin\left(\frac{x_{10}}{4}\right) x_{40}\right) x_{20}^2 - 16 \sin\left(\frac{x_{10}}{4}\right) x_{30} x_{50} x_{20} + \right. \\ \left. + \cos\left(\frac{x_{10}}{4}\right) x_{30}^4 - 8 x_{30}^2 \left(4 \cos\left(\frac{x_{10}}{4}\right) - \sin\left(\frac{x_{10}}{4}\right) x_{40}\right) + 16 \cos\left(\frac{x_{10}}{4}\right) \left(16 \cos^2\left(\frac{x_{10}}{4}\right) - x_{40}^2 - x_{50}^2\right) \geq 0 \end{array} \right\}. \quad (3.41)$$

## Solución del problema de control admisible.

### 1. Caso degenerado

En este capítulo damos solución al problema de CA, es decir dada una condición inicial  $x_0 \in X_{0,n}$  del sistema (3.20) y  $L > 0$ , obtenemos el conjunto de todo los controles  $u_{x_0}(t)$  continuos a trozos definidos en el intervalo  $[0, 2\pi]$  y con valores que satisfacen  $|u_{x_0}(t)| \leq L$ . En particular consideramos las condiciones iniciales  $x_0$  de  $X_{0,n}$  tales que  $\det \mathbf{T}_{n-1} = 0$  donde  $\mathbf{T}_{n-1}$  es una matriz de Toeplitz construida apartir de la condición inicial  $x_0$  del sistema (3.20) (ver (3.31)).

**TEOREMA B.** Si la matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}_{n-1}$  es nula y  $-2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L$ , entonces

(a) El conjunto 0-controlable  $X_{0,n}$  es

$$X_{0,n} = \{x_1, x_2\}$$

$$\text{donde } x_1 := (2\pi L, 0, 0, \dots, 0) \quad \text{y} \quad x_2 := (-2\pi L, 0, 0, \dots, 0).$$

(b) El control que resuelve el problema de CA es:

$$u_{x_1}(t) = -L, \quad u_{x_2}(t) = L, \quad t \in [0, 2\pi].$$

**DEMOSTRACIÓN.** (a) Si  $\mathbf{T}_{n-1}$  es idénticamente nulo, entonces cada elemento de la sucesión

$$\gamma_0 + \bar{\gamma}_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1} \tag{4.1}$$

son nulos donde  $\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 = 2 \cos \frac{c_0}{4L}$  este último implica que

$$2 \cos \frac{c_0}{4L} = 0 \tag{4.2}$$

equivalentemente tenemos,

$$\pm \frac{c_0}{4L} = (2l - 1) \frac{\pi}{2} \tag{4.3}$$

para cualquier  $l \in \mathbb{Z}$ . Pero de la condición de que  $-2\pi L \leq c_0 \leq 2\pi L$  implica que

$$c_0 = \pm 2\pi L \tag{4.4}$$

y en consecuencia tenemos  $x_{10} = \mp 2\pi L$ . Por otro lado como  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$  son iguales a cero, esto implica que  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$  son todos nulos.

Por lo tanto

$$x_{10} = \mp 2\pi L, \quad x_{20} = 0, \quad \dots, \quad x_{2n-1} = 0. \quad (4.5)$$

(b) De (3.33) se sigue que existe  $u_{x_0}(t) = \pm L$  tal que  $c_k = \int_0^{2\pi} e^{ikt} u_{x_0}(t) dt$ . Por lo tanto  $u_{x_0}(t)$  es el control que traslada de  $x_0$  al origen en tiempo  $T = 2\pi$ .

□

En el siguiente teorema damos el conjunto de soluciones del problema CA en el caso degenerado ( $\det \mathbf{T}_{n-1} = 0$ ) para el sistema (3.20) mediante el método de Ahiezer- Krein [1], ver observación 2.10.

**TEOREMA C.** Sea  $x_0 \in X_{0,n}$ , si la matriz de Toéplitz  $\mathbf{T}_{n-1}$  es no nulo y es no negativa definida de rango  $p < n$  y  $-2\pi L \leq x_{10} \leq 2\pi L$  entonces existen  $\tau_1, t_1, \tau_2, \dots, t_p \in [0, 2\pi]$  tales que:

$$u_{x_0}(t) = \begin{cases} L, & (\tau_j < t < t_j) \\ -L, & (t_j < t < \tau_{j+1}) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, p; \tau_{p+1} = \tau_1 + 2\pi)$$

donde,  $\tau_1, t_1, \tau_2, \dots, t_p$  satisfacen

$$s(z) = -i \prod_{k=1}^p \frac{e^{-\frac{i}{2}\tau_k} - e^{\frac{i}{2}\tau_k z}}{e^{-\frac{i}{2}t_k} - e^{\frac{i}{2}t_k z}} \quad (4.6)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $\mathbf{T}_{n-1}$  es no negativa definida de rango  $p < n$  entonces por el teorema 2.8 tenemos que

$$s(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + O(z^n) \quad (4.7)$$

es una función de Carathéodory determinado por los primeros coeficientes  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ .

Luego por (2.14) existen  $\tau_1, t_1, \tau_2, \dots, t_p \in [0, 2\pi]$  tales que la función de Carathéodory  $s(z)$  tiene la representación siguiente:

$$s(z) = -i \prod_{k=1}^p \frac{e^{-\frac{i}{2}\tau_k} - e^{\frac{i}{2}\tau_k z}}{e^{-\frac{i}{2}t_k} - e^{\frac{i}{2}t_k z}} \quad (4.8)$$

y por (2.15) y la observación (2.10) resulta que la función continuo a trozos

$$u_{x_0}(t) = \begin{cases} L, & (\tau_j < t < t_j) \\ -L, & (t_j < t < \tau_{j+1}) \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, p; \tau_{p+1} = \tau_1 + 2\pi)$$

es el control del sistema (3.20).

□

El siguiente resultado es una aplicación de Kovalishina y Potapov, ver [12].

TEOREMA D. Sea  $x_0 \in X_{0,n}$ . Con las mismas hipótesis del teorema anterior, la función de Carathéodory  $s(z)$  se representa de la siguiente forma:

$$s(z) = \frac{\xi^* R_{n-1}(z) u_{n-1}}{\xi^* R_{n-1}(z) v_{n-1}}, \quad (4.9)$$

donde  $R_{n-1}(z) = \frac{1}{z} \left( I - \frac{1}{z} T_{n-1} \right)^{-1}$   $v_{n-1} = \text{col}(1, 0, \dots, 0)$ ,  $u_{n-1} = \text{col}(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$  y  $T_{n-1} = (\delta_{j,k+1})_{j,k=0}^{n-1}$ , ( $\delta_{j,k+1}$ — símbolo de Kronecker).

DEMOSTRACIÓN. Como  $T_{n-1}$  es no negativa definida de rango  $p < n$ , entonces por el teorema 2.8 existe una función de Carathéodory

$$s(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1} + O(z^n), \quad |z| < 1, \quad (4.10)$$

determinado por los primeros coeficientes  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$ .

Luego aplicando el teorema 2.13 para la función de Caratheodory  $s(z)$ , resulta que  $s(z)$  es solución de la desigualdad de Potapov, esto es:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \gamma_{-1} & \cdots & \gamma_{1-n} & z^{-1}[s(z) - \gamma_0] \\ \gamma_1 & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & \cdots & \gamma_{2-n} & z^{-1}[s(z) - (\gamma_0 + \gamma_1 z)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \cdots & \gamma_0 + \bar{\gamma}_0 & z^{-n}[s(z) - (\gamma_0 + \gamma_1 z + \dots + \gamma_{n-1} z^{n-1})] \\ \hline & & * & & \frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - \bar{z}z} \end{array} \right) \geq 0 \quad (4.11)$$

reescribiendo de manera más compacta tenemos

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{n-1} & R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) \\ \hline * & \frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - \bar{z}z} \end{array} \right) \geq 0 \quad (4.12)$$

con  $R_{n-1}(z) = \frac{1}{z} \left( I - \frac{1}{z} T_{n-1} \right)^{-1}$ , donde

$$T_{n-1} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

es una matriz de dimensión  $n$ , y

$$u_{n-1} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que

$$R_{n-1}(z) := \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{z^n} & \cdots & \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Por hipótesis  $\mathbf{T}_{n-1}$  tiene rango  $p$ , entonces  $\det \mathbf{T}_p = \det \mathbf{T}_{p+1} = \dots = \det \mathbf{T}_{n-1} = 0$ , de ahí que existe un  $\xi$  distinto de cero en  $\mathbb{C}^n$  tal que

$$\mathbf{T}_{n-1}\xi = 0. \quad (4.15)$$

Por otro lado, multiplicando a (4.12) la matriz

$$\left( \begin{array}{c|c} \xi^* & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

por izquierda, y multiplicando a (4.12) la matriz

$$\left( \begin{array}{c|c} \xi & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

por derecha, tenemos la siguiente matriz no negativa definida

$$\left( \begin{array}{c|c} \xi^* & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{n-1} & R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) \\ \hline * & \frac{s(z) + \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|c} \xi & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \geq 0$$

lo que equivale a la desigualdad

$$\left( \begin{array}{c|c} \xi^* \mathbf{T}_{n-1} \xi & \xi^* R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) \\ \hline (R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}))^* \xi & \frac{s(z) - \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}} \end{array} \right) \geq 0.$$

Luego calculando el determinante de la siguiente matriz

$$\left( \begin{array}{c|c} \xi^* \mathbf{T}_{n-1} \xi & \xi^* R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) \\ \hline (R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}))^* \xi & \frac{s(z) - \bar{s}(z)}{1 - z\bar{z}} \end{array} \right)$$

de dimensión 2 y observando (4.15) tenemos

$$-\left| \xi^* R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) \right|^2 \geq 0 \quad (4.16)$$

lo que implica lo siguiente

$$\xi^* R_{n-1}(z)(v_{n-1}s(z) - u_{n-1}) = 0 \quad (4.17)$$

por lo tanto la función de Carathéodory esta dada por

$$s(z) = \frac{\xi^* R_{n-1}(z)u_{n-1}}{\xi^* R_{n-1}(z)v_{n-1}}. \quad (4.18)$$

□

**OBSERVACIÓN 4.1.** Para resolver el problema de CA generalmente utilizamos la forma (4.18) para representar la función de Carathéodory  $s(z)$  y luego esta función lo representamos como en la relación (4.6) esta estrategia lo utilizamos en los siguientes ejemplos.

## 2. Ejemplos

En esta sección encontraremos controles  $u_{x_0}$  definido y continuo a trozos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , con valores que satisfacen la restricción  $|u_{x_0}(t)| \leq 1$ , tales que la trayectoria  $x(t)$  del sistema (3.20) para el caso  $n = 2$  y  $n = 3$  traslade la posición inicial  $x_0$  al origen en tiempo  $T = 2\pi$  de manera explícita.

**2.1. Solución para el sistema de control para  $n = 2$ .** Para encontrar el control del sistema (3.34), resolveremos en dos casos:

a) Caso  $\mathbf{T}_1 = 0$ . Para las condiciones iniciales de la forma  $x_0 = (\mp 2\pi, 0, 0)$  para el sistema (3.34) resulta que la matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}_1$  es nula, entonces por el teorema B, existe un control  $u_{x_0}(t) = \pm 1$  tal que la solución  $x(t)$  del sistema lineal (3.34) traslada mediante el control  $u_{x_0}(t) = \pm 1$  del estado inicial  $x_0$  al origen  $x_1 = (0, 0, 0)$  en tiempo  $T = 2\pi$ .

Por otro lado notemos que el teorema de Kalman tambien resuelve este problema de CA para  $x_0 = (\mp 2\pi, 0, 0)$  como sigue. Observemos que el rango de  $\text{rang}(B, AB, AB^2) = 3$ , por lo tanto existe un control  $u_{x_0}$  tal que traslada  $x_0$  al origen en tiempo  $T = 2\pi$ , uno de los controles posibles es

$$u_{x_0}(t) = -B^* e^{-A^* t} N^{-1}(2\pi)x_0, \quad (4.19)$$

donde

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad N(2\pi) = \int_0^{2\pi} e^{-As} BB^* e^{-A^*s} ds. \quad (4.20)$$

Así el control  $u_{x_0}(t)$  esta dado por:

$$u_{x_0}(t) = -(1, 1, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos(t)}{\pi} & \frac{\sin(t)}{\pi} \\ 0 & \frac{\sin(t)}{\pi} & \frac{\cos(t)}{\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp 2\pi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \pm 1$$

para todo  $t \in [0, 2\pi]$ .

Para  $u_{x_0}(t) = -1$ , la solución de (3.34) con  $x_0 = (2\pi, 0, 0)$  es

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2\pi - t \\ (\cos(t) - 1) \sin(t) - \cos(t) \sin(t) \\ \sin^2(t) + (\cos(t) - 1) \cos(t) \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

b) Caso  $\mathbf{T}_1 \neq 0$  y  $\det \mathbf{T}_1 = 0$ . Consideremos la condición inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

para el sistema (3.34), es fácil de ver que  $x_0 \in X_{0,2}$ . luego de (3.36) obtenemos los siguientes momentos

$$\begin{aligned} \gamma + \overline{\gamma_0} &= \sqrt{2}, \\ \gamma_1 &= -i \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Entonces la matriz de Toeplitz es

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \sqrt{2} \\ -i \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

que es claramente no negativa definida.

Observemos que  $\text{rang} \mathbf{T}_1 = 1$  y  $\det \mathbf{T}_1 = 0$ , entonces por el teorema D tenemos que

$$s(z) = \frac{\xi^* R_1(z) u_1}{\xi^* R_1(z) v_1} \quad (4.24)$$

donde

$$R_1(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

y

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

es tal que satisface  $\mathbf{T}_1 \xi = 0$ . Luego reemplazando (4.26) y (4.25) en (4.24) tenemos que la función de Carathéodory toma la siguiente expresión:

$$s(z) = \frac{\xi_{-2}\gamma_0 + (\gamma_0\xi_{-1} + \xi_{-2}\gamma_1)z}{\xi_{-1}z + \xi_{-2}}. \quad (4.27)$$

Esta claro que

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

satisface  $\mathbf{T}_1 \xi = 0$ . Luego reemplazando (4.22) y (4.28) en (4.27) tenemos la siguiente función de Carathéodory

$$s(z) = -\frac{(1+i)(z+1)}{\sqrt{2}(z-i)} \quad (4.29)$$

pero esta función de Carathéodory se puede escribir como

$$s(z) = -i \frac{e^{-\frac{i}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\pi}z}{e^{-\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi}z}. \quad (4.30)$$

En efecto;

$$\begin{aligned}
s(z) &= - \frac{(1+i)(z+1)}{\sqrt{2}(z-i)} \\
&= \frac{(1+i)(z+1)}{\sqrt{2}i - \sqrt{2}z} \\
&= \frac{i(1+i)(z+1)}{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}z} \\
&= - \frac{i(1+i)(z+1)}{-\frac{i\sqrt{2}}{2}(-1-i+z-iz-i+1+iz+z)} \\
&= -i \frac{-(1+i)(z+1)}{-\frac{i\sqrt{2}}{2}(1+i)(-1-i+z-iz)} \\
&= -i \frac{2(-i-iz)}{\sqrt{2}(-1-i+z-iz)} \\
&= -i \frac{-i-iz}{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i+z-iz)} \\
&= -i \frac{-i-iz}{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)z} \\
&= -i \frac{-i-iz}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)z} \\
&= -i \frac{e^{-\frac{i}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\pi}z}{e^{-\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi}z}.
\end{aligned}$$

Luego por el teorema C el control del sistema (3.34) con la condición inicial  $x_0$  es

$$u_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \pi) \\ -1, & t \in [\pi, \frac{3}{2}\pi) \\ 1, & t \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

**2.2. Solución del sistema de control con  $n = 3$  y  $T_2$  de rango 2.** Dada la condición inicial

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$L = 1$  para el sistema (3.40), se requiere hallar un control  $u_{x_0}(t)$ , definido y continuo a trozos en el intervalo  $[0, 2\pi]$ , con valores que satisfacen la restricción  $|u_{x_0}(t)| \leq 1$ , tales que la trayectoria  $x(t)$

del sistema (3.40) traslade la posición inicial  $x_0$  al origen en tiempo  $T = 2\pi$ , para encontrar dicho control observemos (3.30) del cual tenemos los siguientes momentos:

$$\begin{aligned}\gamma_0 + \bar{\gamma}_0 &= \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \gamma_1 &= -i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \gamma_{-1} &= i\sqrt{2 - \sqrt{2}} \\ \gamma_2 &= -\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ \gamma_{-2} &= -\sqrt{2 + \sqrt{2}}\end{aligned}\tag{4.31}$$

y consecuentemente la matriz de Toeplitz,

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2 + \sqrt{2}} & \sqrt{2 - \sqrt{2}}i & -\sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ -\sqrt{2 - \sqrt{2}}i & \sqrt{2 + \sqrt{2}} & \sqrt{2 - \sqrt{2}}i \\ -\sqrt{2 + \sqrt{2}} & -\sqrt{2 - \sqrt{2}}i & \sqrt{2 + \sqrt{2}} \end{pmatrix}.\tag{4.32}$$

Notemos que  $\text{rang}\mathbf{T}_2 = 2$  y  $\det \mathbf{T}_2 = 0$ , entonces por el teorema D, tenemos

$$s(z) = \frac{\xi^* R_2(z) u_2}{\xi^* R_2(z) v_2},\tag{4.33}$$

donde

$$R_2(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 0 & 0 \\ \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} & 0 \\ \frac{1}{z^3} & \frac{1}{z^2} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$$

y

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\tag{4.34}$$

es tal que satisface  $\mathbf{T}_2 \xi = 0$ . Luego reemplazando (4.33) y (4.34) en (4.33) tenemos que la función de Carathéodory toma la siguiente expresión:

$$s(z) = \frac{(\gamma_0\xi_{-1} + \gamma_1\xi_{-2} + \gamma_2\xi_{-3})z^2 + (\gamma_0\xi_{-2} + \gamma_1\xi_{-3})z + \gamma_0\xi_{-3}}{\xi_{-1}z^2 + \xi_{-2}z + \xi_{-3}}. \quad (4.35)$$

Por otra parte notemos que

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

es tal que satisface  $\mathbf{T}_2\xi = 0$ , luego reemplazando (4.36) y (4.31) en (4.35) obtenemos la siguiente función de Carathéodory

$$s(z) = \frac{1}{2(1+z^2)} \left( (1+z) \left( \sqrt{2+\sqrt{2}}(1-z) - \sqrt{2-\sqrt{2}}(1+z)i \right) \right). \quad (4.37)$$

Pero la igualdad anterior podemos reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} s(z) &= \frac{1}{2(1+z^2)} \left( (1+z) \left( \sqrt{2+\sqrt{2}}(1-z) - \sqrt{2-\sqrt{2}}(1+z)i \right) \right) \\ &= \frac{(z+1) \left( -\sqrt{2+\sqrt{2}}z - i\sqrt{2-\sqrt{2}}z + \sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)}{2(z^2+1)} \\ &= -\frac{i(-iz-i) \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}z - \frac{1}{2}i\sqrt{2-\sqrt{2}}z + \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{2-\sqrt{2}} \right)}{\left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} - \frac{(1+i)z}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{(1-i)z}{\sqrt{2}} - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)} \\ &= -i \frac{(-iz-i) \left( \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}z}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}z}{2} \right)}{\left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} - z\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} - z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)} \\ &= -i \frac{(-iz-i) \left( \cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) - z \left( \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) \right)}{\left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - z \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) \right) \left( \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) - z \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right) \right)} \\ &= -\frac{i(-iz-i) \left( e^{-\frac{i\pi}{8}} - e^{\frac{i\pi}{8}}z \right)}{\left( e^{-\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}}z \right) \left( e^{-\frac{3i\pi}{4}} - e^{\frac{3i\pi}{4}}z \right)} \\ &= -i \frac{\left( e^{-\frac{i}{2}\frac{\pi}{4}} - e^{\frac{i}{2}\frac{\pi}{4}}z \right) \left( e^{-\frac{i}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\pi}z \right)}{\left( e^{-\frac{i}{2}\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{i}{2}\frac{\pi}{2}}z \right) \left( e^{-\frac{i}{2}\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{i}{2}\frac{3\pi}{2}}z \right)}. \end{aligned}$$

Así del teorema C tenemos que el control admisible para la condición inicial  $x_0 = (\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, 1, -3)$  es

$$u_{x_0}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ -1, & t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ 1, & t \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -1, & t \in [\pi, 3\frac{\pi}{2}] \\ 1, & t \in [3\frac{\pi}{2}, 2\pi]. \end{cases}$$

**2.3. Solución del sistema de control con  $n = 3$  y  $\mathbf{T}_2$  de rango 1.** Al igual que los ejemplos anteriores si consideramos la condición inicial  $x_0 = (\pi, 2, 2, 0, -2)$  para el sistema (3.20), entonces la matriz de Toeplitz asociada a  $x_0$  resulta ser:

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & \sqrt{2} & -i\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

A diferencia del ejemplo anterior esta matriz de Toeplitz  $\mathbf{T}_2$  tiene rango 1.

Por otra parte observese que

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

es tal que  $\mathbf{T}_2\xi = 0$

Luego por reemplazando (4.39) en (4.35) y observando los elementos de la matriz de Toeplitz dado en (4.38) tenemos la siguiente función de Carathéodory

$$s(z) = \frac{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)z^2 - i\sqrt{2}z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}}{z^2 + 1}.$$

Pero la anterior igualdad se puede escribir como

$$\begin{aligned}
s(z) &= \frac{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)z^2 - i\sqrt{2}z + \frac{1-i}{\sqrt{2}}}{z^2 + 1} \\
&= \frac{(1-i)z^2 - 2z^2 - i2z + 1 - i}{\sqrt{2}(z-i)(z+i)} \\
&= \frac{(1-i)(z-i)(z+i) - 2z(z+i)}{\sqrt{2}(z-i)(z+i)} \\
&= \frac{(1-i)(z-i) - 2z}{\sqrt{2}(z-i)} \\
&= -\frac{(1+i)(z+1)}{\sqrt{2}(z-i)} \\
&= -i \frac{e^{-\frac{i}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\pi}z}{e^{-\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi} - e^{\frac{i}{2}\frac{3}{2}\pi}z}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto por el teorema C el control  $u_{x_0}(t)$  esta dado como en el primer ejemplo.

## Bibliografía

- [1] N. I. Akhiezer, M. Krein: *Some questions in the theory of moments*. Volumen II Traslations of Mathematical Monographs 1962.
- [2] V. V. Alexandrov, Y. V. Bolotin , S. S. Lemark, N. A. Parusnikov, S. I. Zlochevsky, S. W. Guerrero: *Introduction to control of Dynamic Systems*. Dirección de fomento editorial. Puebla Pue. México. 2009.
- [3] A. E. Choque Rivero, V. I. Korobov, G. M. Sklyar: *The admissible control problem from the moment problem point of view*, *Applied Mathematics Letters*. Vol.23, No. 1, (2010), 58-63.
- [4] V. K. Dubocoj, B. Fritzsche, B. Kirstein: *Matricial Version of the Classical Schur Problem*. Teubner-Texte zur Mathematik, Bd. 129, B.G Teubner, Stuttgart-Leipzig 1992.
- [5] A. V. Efimov, V. P. Potapov: *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytical theory of electrical circuits*. Russian Math. Surveys, **28** (1973), 69–140.
- [6] A. V. Efimov, V. P. Potapov: *J–expansive matrix-valued functions and their role in the analytical theory of electric circuits*. Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), no. 1 (169), 65-130; English transl. in Russian Math. Surveys, **28** (1973).
- [7] G. M. Goluzin: *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*, (1969).
- [8] V. I. Korobov, A. P. Marinic, E. N. Podol’skii: *Controllability of linear autonomous systems in the presence of constraints on the control*. (Russian) *Differencial’nye Uravnenija* 11 (1975), no. 11, 1967-1979.
- [9] V. I. Korobov: *A geometric criterion of local controllability of dynamical systems in the presence of constraints on the control*. (Russian) *Differentsial’nye Uravneniya* 15 (1979), no. 9, 1592-1599.
- [10] V. I. Korobov, G. M. Sklyar: *Time-optimality and the trigonometric moment problem*. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 53 (1989), no. 4, 868-885; translation in *Math. USSR-Izv.* 35 (1990), no. 1, 203-220.
- [11] V. I. Korobov, G. M. Sklyar: *Time optimality and the power moment problem*, *Mat. Sb.* 134 (176) (1987), 186–207;
- [12] I. V. Kovalishina: *Analytic theory of a class of interpolation problems*. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, Volume 47, Issue 3, (1983), 455-497.
- [13] M. Krein, A. Nudelman: *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*, AMS, (1976).
- [14] I. E. Leonard: *The matrix exponential*. Vol. 38, No. 3, (1996), 507-512.
- [15] A. I. Markushevich: *Theory of Functions of a Complex Variable*. Volumen II. Prentice-Hall, 1978.
- [16] J. H. Mathews, Kurtis D. Fink: *Numerical methods using MATLAB*, Prentice-Hall 1998.
- [17] V. Poussin: *Cours d’ analyse*, *The American Mathematical Monthly*. Volume II, 1978.