



**Universidad Michoacana
de San
Nicolás de Hidalgo**



**Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas
“Luis Manuel Rivera Gutiérrez”**

"Geometría, un enfoque vectorial"

**Tesis profesional para obtener el grado de
Licenciado en Ciencias Físico Matemáticas**

Presenta:

Abel Gerardo Cruz López

Asesor:

Doctor en Matemáticas Rigoberto Vera Mendoza

Morelia Michoacán, septiembre de 2014

INDICE

	Página
1.- Resumen	3
2.- Abstract	4
3.- Capítulo I	
Álgebra de vectores	5
- Bases o sistemas referenciales y producto punto	13
- Identificación de puntos del plano y vectores	21
4.- Capítulo II	
La línea recta	26
- Distancias	32
- Área de un triángulo	36
5.- Capítulo III	
Vectores en el espacio	39
- Rectas y planos en el espacio	42
- Bases o sistemas referenciales	45
- Producto vectorial	50
- Más acerca de planos	52
- Ecuaciones paramétricas y general de un plano	55
Bibliografía	59

RESUMEN

En esta tesis, revisamos, usando técnicas vectoriales, los tópicos de un curso normal de Geometría Analítica a nivel preparatoria o licenciatura. Las ventajas de emplear técnicas vectoriales en lugar de la forma tradicional, es porque, se pueden aprovechar los tópicos anteriores y visualizar fácilmente las cónicas (circunferencia, elipse, parábola e hipérbola) y la línea recta, sin las dificultades normales de las ecuaciones, sin pérdida de formalidad. Pero estoy seguro de que no es todo, porque es el primer intento de hacerlo y probablemente mucho más accesible, comprensible y mejor porque está escrito en español.

Palabras clave: Vector, base, planos.

ABSTRACT

In this thesis we review, using vectorial techniques, the usual topics of the undergraduate course Analytic Geometry, of any university or college. The advantage of using vectorial techniques rather than the traditional ones is because, besides given a new approach to those topics, they give an easy way of visualize the conicals (circumference, ellipse, parabola and hyperbola) and the straight line, without the usual troublesome equations and with no loss of formality of any kind. I am well aware that this is not, at all, the first time this approach is intended but, probably, in this work it is much more accessible and comprehensible and better than that, it was written in Spanish language.

Key words: Vector, basis and plane(s).

Capítulo I.

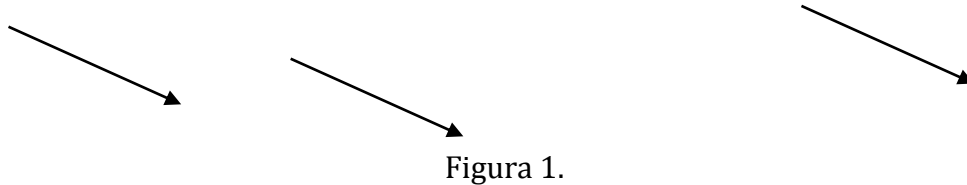
ALGEBRA DE VECTORES

El objetivo de este capítulo, es presentar un tratado sistemático, tan riguroso como sea posible del álgebra de vectores en dos y tres dimensiones, desembocando primeramente en el plano cartesiano, en donde se revisará un poco de álgebra lineal.

Haremos uso de ciertas ideas intuitivas tales como punto, línea recta, plano, Etc.

Desde el punto de vista de la física, una fuerza actuando en una cierta dirección es un vector, por lo tanto, las unidades del vector son unidades de fuerza, $\frac{m}{seg}$, $\frac{km}{hr}$ y se usan los números reales para indicar la cantidad de fuerza que está actuando. Por convención se usan flechas ($\rightarrow$) para representar simbólicamente a los vectores, ya sea en un plano ó en el espacio. Nosotros estaremos interesados en describir el álgebra de estos vectores para la unidad de fuerza arbitraria pero fija.

Empecemos por considerar un plano, el cual está constituido por puntos. Nuestros vectores serán libres, es decir, si una flecha determinada representa a un vector y a esta flecha la dibujamos en el plano, no importará en qué lugar del plano hagamos su dibujo, siempre y cuando respetemos su dirección, su longitud (magnitud) y su sentido. Las siguientes flechas representan al mismo vector



Definición 1. Con la letra V , denotaremos al conjunto de vectores y con las letras, u, v, w , etc., a los vectores. Cada elemento de V , un vector, puede ser representado por una de las flechas, $\nearrow \searrow \rightarrow \leftarrow$ etc.

Para fines de identificación, aclararemos a que le estaremos llamando punto inicial y punto final de un vector o de la flecha que lo representa.

Definición 2. Para los vectores $A \nearrow B$, $P \rightarrow Q$, $C \leftarrow D$, sus puntos iniciales son, respectivamente A , P y D y sus puntos finales son B , Q y C .

Definición 3. La dirección de un vector u ($\text{dir}(u)$) será el ángulo entre 0° y 360° que la flecha que lo representa forma con la recta horizontal que pasa por el punto inicial de u , medido a la derecha de dicho punto inicial y con un movimiento contrario al de las manecillas del reloj (ver fig. 2).

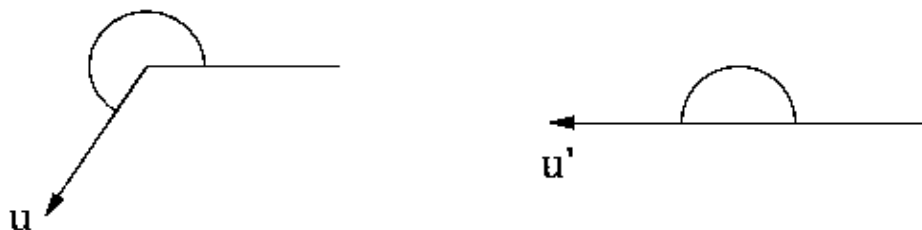


Figura 2

Definición 4. A la magnitud o norma de un vector u , que es el valor absoluto del número que nos dice la cantidad de fuerza del vector, la representaremos haciendo que la flecha que lo identifica tenga por longitud dicho número. A la magnitud del vector u la denotaremos así $\|u\|$.

De la figura 2 podemos decir que $\|u\| = 1 = \|u\| = \|w\|$ y $\|u'\| = 1.3 = \|w'\|$. Estos números son, por un lado, las longitudes de las flechas que representan a los vectores u, v, w, u', w' y por otro nos dicen que la cantidad de fuerza de dichos vectores es de 1 o -1, 1.3 o -1.3.

Observemos que al ser la magnitud de un vector, el valor absoluto de un número, es siempre mayor o igual a cero ($\|u\| \geq 0$) y por eso puede ser identificada con una longitud.

Nota 1. Así es que un vector queda completamente caracterizado en cuanto sabemos su dirección y magnitud, por lo tanto:

Definición 5. Diremos que DOS VECTORES SON IGUALES si tienen la misma magnitud y la misma dirección, si las flechas que los representan tienen la misma longitud y además, forma cada una de ellas, el mismo ángulo con la recta horizontal que pasa por su respectivo punto inicial.

Otra manera de caracterizar la igualdad de vectores es diciendo que dos vectores son iguales si trasladando (sin girar) a una de las flechas que los representan hasta hacer que coincidan en su punto inicial con el de la otra flecha, sus puntos finales también coinciden, es decir, las dos flechas se funden en una sola.

Definición 6. Se denota por $-u$, al único vector que tiene la misma magnitud que el vector u ($\| -u \| = \| u \|$) y la siguiente dirección:

- a) $\text{dir}(-u) = \text{dir}(u) + 180^\circ$ si $0^\circ \leq \text{dir}(u) \leq 180^\circ$ $180^\circ \leq \text{dir}(-u) \leq 360^\circ$
b) $\text{dir}(-u) = \text{dir}(u) - 180^\circ$ si $180^\circ \leq \text{dir}(u) \leq 360^\circ$ $0^\circ \leq \text{dir}(-u) \leq 180^\circ$

Observemos en la definición anterior que $|\text{dir}(u) - \text{dir}(-u)| = 180^\circ$

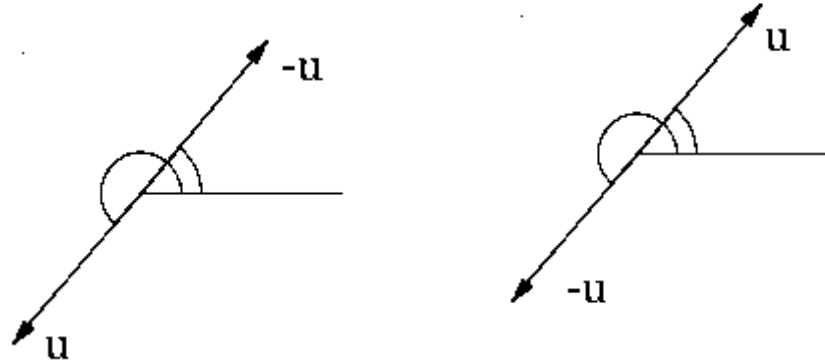


Figura 3

Definición 7. Dado el vector u y el número real $r \neq 0$, obtenemos un nuevo vector ru cuya dirección será:

- a) $\text{dir}(ru) = \text{dir}(u)$ si $r > 0$ y
b) $\text{dir}(ru) = \text{dir}(-u)$ si $r < 0$.

La magnitud de ru es, en ambos casos, “ $|r|$ veces la magnitud de u ”, es decir, $\|ru\| = |r|\|u\|$, donde $|r|$ denota el valor absoluto de r , es decir, $|r| = r$ si $r > 0$ y $|r| = -r$ si $r < 0$.

Teorema 1. $u = -(-u)$

Demostración. Probaremos que los vectores u y $-(-u)$ tienen igual magnitud y dirección:

De la definición 6, tenemos que $\| -(-u) \| = \| -u \| = \| u \|$

De acuerdo a la misma definición:

- a) $\text{dir}(-(-u)) = \text{dir}(-u) + 180^\circ$ si $0^\circ \leq \text{dir}(-u) \leq 180^\circ$ pero a su vez $0^\circ \leq \text{dir}(-u) \leq 180^\circ$ si y solo si $180^\circ \leq \text{dir}(u) \leq 360^\circ$, es decir, si y solo si $\text{dir}(-u) = \text{dir}(u) - 180^\circ$, de donde

$$\text{dir}(-(-u)) = (\text{dir}(u) - 180^\circ) + 180^\circ = \text{dir}(u)$$

b) $\text{dir}(-(-u)) = \text{dir}(-u) - 180^\circ$ si $180^\circ \leq \text{dir}(-u) \leq 360^\circ$, esto último sucede si y solo si $0^\circ \leq \text{dir}(u) \leq 180^\circ$, en cuyo caso

$$\text{dir}(-u) = \text{dir}(u) + 180^\circ, \text{ de donde}$$

$$\text{dir}(-(-u)) = \text{dir}(\text{dir}(u) + 180^\circ) - 180^\circ = \text{dir}(u)$$

Nota 2. Haremos la siguiente aclaración: Si el número r es cero, entonces estaremos admitiendo un “vector especial”, al que llamaremos el VECTOR CERO $\vec{0}$, el cual tiene magnitud cero ($\|\vec{0}\| = 0$) pero NO TIENE DIRECCIÓN y su representación es solamente un punto, no una flecha. Lo “especial” de este vector es que será el único vector de magnitud cero y sin dirección.

$$\|(-2)u\| = |-2|\|u\| = 2\|u\| \text{ y } \text{dir}(-2u) = \text{dir}(-u),$$

$$\|\sqrt{3}u\| = |\sqrt{3}|\|u\| = \sqrt{3}\|u\| \text{ y } \text{dir}(\sqrt{3}u) = \text{dir}(u)$$

$$\|0u\| = |0|\|u\| = 0\|u\| = 0 = \|\vec{0}\|, \text{ de donde } 0u = \vec{0}.$$

Nota3. Recordemos que por dos puntos distintos en el plano pasa una y solo una línea recta; así es que cada vez que tenemos la representación de un vector por medio de una flecha dibujada en el plano, podemos referirnos también a la recta que determinan sus puntos inicial y final, que no es de ningún modo, la recta determinada por el vector, ya que como vector, la flecha que lo representa puede ser dibujada en cualquier parte del plano, es decir, los puntos del plano que pueden ser sus puntos inicial y final, no son únicos.

Podemos decir que las rectas que determina un vector distinto del vector cero son paralelas.

Notemos que si $u = \vec{0}$, entonces $r\vec{0}$ tiene magnitud $|r|\|\vec{0}\| = |r|0 = 0$, por lo tanto $r\vec{0} = \vec{0}$.

Nosotros sabemos que cuando las unidades son las mismas, es posible sumar dos o más vectores, lo cual conduce a poder “sumar” dos o más flechas (la representación de los vectores en el plano), lo interesante de esto es que el vector suma tiene por representación a la flecha que a continuación se describe:

Definición 8. *Dados dos vectores $u, v \in V$, su suma es un tercer vector, denotado*

$$u + v \in V.$$

La flecha que lo representa se obtiene en dos pasos:

1. Hacemos coincidir (trasladando sin girar) al punto inicial de v con el punto final de u . Entonces
2. El punto inicial del vector $u+v$ será el punto inicial del vector u y el punto final del vector $u+v$ será el punto final del vector v ver (fig. 4)



Figura 4

De acuerdo a la definición anterior, el vector $v+u$ queda representado por la flecha que va del punto inicial de v , al punto final de u , después de haber hecho coincidir el punto inicial de u con el punto final de v (ver fig. 5)

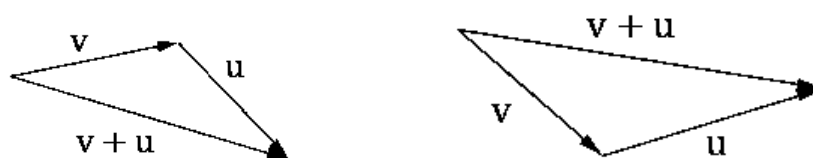


Figura 5

Los triángulo de la figura 5, son congruentes ya que dos de sus lados, u y v , y el ángulo que ellos determinan, $\angle$, son respectivamente iguales, de donde obtenemos que las magnitudes (longitudes) de $u+v$ y $v+u$ son iguales; además, si deslizamos a uno de esos triángulos hasta hacer coincidir al vector v que está en cada uno de ellos, obtenemos un paralelogramo, es decir, un cuadrilátero con lados opuestos paralelos, (fig. 5) y por lo tanto $u+v$ y $v+u$ tienen la misma dirección, lo cual nos dice que $u+v = v+u$.

Lo anterior es la demostración del siguiente lema:

Lema 1. Para cualquier par de vectores u, v , $u+v = v+u$.

Nota 4. Particularmente, cuando v sea el vector cero, $u+\vec{0} = u = \vec{0} + u$.

Teorema 2. Para r y s números reales, u y v vectores, tenemos las siguientes igualdades:

$$a) 1u = u$$

$$b) (rs)u = r(su)$$

$$c) r(u+v) = ru + rv$$

$$d) (r+s)u = ru + su$$

Demostración:

- a) El vector $1u$ tiene, por definición, la misma dirección que u , ya que $1 > 0$ y también la misma magnitud que u ya que

$$\|1u\| = |1| \|u\| = 1 \|u\| = \|u\|$$

- b) Caso 1: si r o s es el número 0, entonces $rs=0$ y $(rs)u=0u=\vec{0}$, y por otro lado $r(su)=0(su)=\vec{0}$ o $r(su) = r(0u) = r\vec{0} = \vec{0}$.

Caso 2: Si r y s tienen el mismo signo, entonces $rs > 0$ y, por lo tanto, el vector $(rs)u$ tiene la misma dirección que u y además, $\|(rs)u\| = (rs)\|u\|$.

En particular, si $r, s > 0$ entonces

$$\text{dir}(r(su)) = \text{dir}(su) = \text{dir}(u) = \text{dir}((rs)u).$$

Si $r, s < 0$ entonces $-s > 0$ y

$$\text{dir}(r(su)) = \text{dir}(-(su)) = \text{dir}((-s)u) = \text{dir}(u) = \text{dir}((rs)u) \text{ y}$$

$$\|r(su)\| = |r| \|su\| = |r|(|s| \|u\|) = (|r||s|) \|u\| = |rs| \|u\| = rs \|u\|$$

de donde, dado que en este caso los vectores $(rs)u$ y $r(su)$ tienen la misma dirección (la del vector u) y la misma magnitud ($rs\|u\|$), ellos son iguales.

Caso 3: Si $r < 0$ y $s > 0$ ($rs < 0$) entonces, de la definición 6 tenemos que los vectores $(rs)u$ y $-u$ tienen la misma dirección. Por otro lado, de acuerdo a la definición 7 $\text{dir}(r(su)) = \text{dir}(-(su)) = \text{dir}(su) + 180^\circ$, si $0^\circ \leq \text{dir}(su) \leq 180^\circ$, pero si este es el caso, y dado que $\text{dir}(su) = \text{dir}(u)$, tendremos que $0^\circ \leq \text{dir}(u) \leq 180^\circ$ y entonces $\text{dir}(-u) = \text{dir}(u) + 180^\circ$, de donde $\text{dir}(r(su)) = \text{dir}(u) + 180^\circ = \text{dir}(-u)$. su magnitud es

$$\|r(su)\| = |r| \|su\| = |r| |s| \|u\| = (-r)(s) \|u\| = -(rs) \|u\| = |rs| \|u\| = \|(rs)u\|$$

El caso en que $r > 0$ y $s < 0$ es análogo al anterior.

- c) La magnitud del vector $r(u+v)$ es $|r|\|u+v\|$. Si $r > 0$ y su dirección $\text{dir}(ru) = \text{dir}(u)$ y $\text{dir}(rv) = \text{dir}(v)$, es la misma que la de $u+v$; si $r < 0$ entonces su dirección es la misma que la del vector $-(u+v)$.

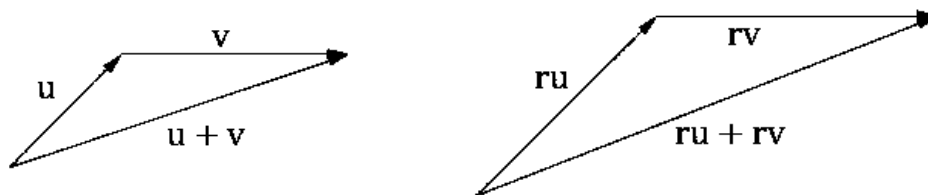


Figura 6.

En la figura 6 tenemos dos triángulos, uno cuyos lados son los vectores u , v y $u+v$, el otro, con lados ru , rv y $ru+rv$. Dado que los dos de los lados del primer triángulo tienen longitudes $\|u\|$ y $\|v\|$ y estos son proporcionales a las longitudes del segundo triángulo $|r|\|u\|$ y $|r|\|v\|$, respectivamente, con coeficiente de proporcionalidad $|r|$ y el ángulo que forman dichos lados, tanto en un triángulo como en el otro, son iguales, los triángulos son semejantes. Esto implica que los terceros lados de cada triángulo son también proporcionales, con el mismo coeficiente de proporcionalidad, $|r|$, es decir, $\|ru+rv\| = |r|\|u+v\|$, de donde, los vectores $r(u+v)$ y $ru+rv$ tienen la misma magnitud.

En la figura 6 podemos ver que los vectores $u+v$ y $ru+rv$ tienen la misma dirección si $r > 0$ y que si $r < 0$ entonces el vector $ru+rv$ tiene la misma dirección que el vector $-(u+v)$, por lo tanto, en cualquier caso, $r(u+v)$ y $ru+rv$ tienen la misma dirección y junto con que tienen la misma magnitud, ellos son iguales.

- d) Recordemos que los vectores ru y su , forman un ángulo de 0° si r y s tienen el mismo signo, y forman un ángulo de 180° si tienen signos contrarios.

Si $r+s = 0$, es decir, $r = -s$ entonces $(r+s)u = 0u = \vec{0}$ y $ru+su = -su+su = \vec{0}$.

Si $r, s \geq 0$ entonces $(r+s)u = ru+su$, tienen la misma dirección que u . Sus magnitudes son $\|(r+s)u\| = (r+s)\|u\|$ y $\|ru+su\|^2 = \|ru\|^2 + \|su\|^2 + 2\|ru\|\|su\|\cos 0^\circ = r^2\|u\|^2 + s^2\|u\|^2 + 2rs\|u\|^2 = (r+s)^2\|u\|^2$, de donde, $\|ru+su\| = (r+s)\|u\| = \|(r+s)u\|$. Por lo tanto, los vectores $(r+s)u$ y $ru+su$ tienen igual magnitud y dirección, es decir son iguales.

Si $r, s \leq 0$ entonces los vectores $(r+s)u$ y $ru+su$ tienen la misma dirección que el vector $-u$. $\|(r+s)u\| = -(r+s)\|u\|$ y $\|ru+su\|^2 = \|ru\|^2 + \|su\|^2 + 2\|ru\|\|su\|\cos 0^\circ = |r|^2\|u\|^2 + |s|^2\|u\|^2 + 2|r||s|\|u\|^2 = (-r)^2\|u\|^2 + (-s)^2\|u\|^2 + 2(-r)(-s)\|u\|^2 \cos 0^\circ = (-r-s)^2\|u\|^2 = (r+s)\|u\|$. Los casos restantes se dejan como ejercicio.

Nota 5. De acuerdo a las definiciones anteriores, el vector $(-1)u$ tiene por dirección $\text{dir}(u)+180^\circ$ y $\|(-1)u\| = |-1|\|u\| = 1\|u\| = \|u\|$, es decir, las flechas que representan a los vectores u y $(-1)u$ tienen igual longitud.

Lema 2. $(-1)u = -u$

Demostración: $\|(-1)u\| = |-1|\|u\| = 1\|u\| = \|-u\|$

$\text{Dir}((-1)u) = \text{dir}((-u))$ por la Definición 7.

Definición 9. *Dados los vectores u, v se define el vector $u-v$ como el vector $u+(-v)$, es decir $u-v = u+(-v)$.*

Así es que $u-u = u+(-u) = 1u+(-1)u = (1+(-1))u = 0u = \vec{0}$ y también $-(u-v) = (-1)(u-v) = (-1)(u)+(-1)(v) = -u+v = v-u$.

Si $r < 0$ entonces ru tiene la misma dirección que $-u$, es decir, los vectores $-2u$ y $2(-u)$, $-5v$ y $5(-v)$, $-\pi w$ y $\pi(-w)$, etc., tienen la misma dirección y la misma magnitud y por lo tanto son iguales.

$u-v = u+(-v) = (-v)+u = (-1)v+1u = (-1)(v+(-1)u) = -(v-u)$, es decir, $\text{dir}(u-v) = \text{dir}(v-u)+180^\circ$ y $\|u-v\| = \|-(v-u)\| = \|v-u\|$.

Definición 10. *Diremos que dos vectores u y v distintos del vector cero son paralelos si existe un número r tal que $u = rv$ ó equivalentemente, $v = su$ con $s = \frac{1}{r}$*

Nota 6. Fijémonos en que decir que dos vectores son paralelos, es equivalente a que las rectas que determinan sus respectivos puntos inicial y final (ver nota 3) son paralelas. Por otro lado, al vector cero, técnicamente, lo consideraremos, de acuerdo a la definición anterior, paralelo a todos los vectores ya que $\vec{0} = 0v$ para todo vector $v \in V$.

BASES Ó SISTEMAS REFERENCIALES Y PRODUCTO PUNTO

Definición 11. Una base ordenada o un sistema referencial ordenado para el plano es una terna $\{u, v, O\}$ donde u y v son vectores no paralelos cuyos puntos iniciales coinciden en O , y O es un punto en el plano, al cual le llamaremos punto de referencia de la base o también origen del sistema referencial.

Nota 7. De lo anterior tendremos que dos bases $\{u, v, O\}$ y $\{u', v', O'\}$ son iguales si y solo si $u=u', v=v'$ y $O=O'$. En particular, $\{u, v, O\}$ y $\{v, u, O\}$ son sistemas referenciales distintos, ya que el orden de los vectores juega un papel fundamental en la definición. Por otro lado, si los puntos O y O' son distintos, las bases $\{u, v, O\}$ y $\{u, v, O'\}$ son distintas ya que difieren en su origen.

Teorema 3. Si $\{u, v, O\}$ es una base ó sistema referencial para el plano, entonces para cualquier vector w existen números únicos a y b tales que $w = av + bu$.

De la igualdad anterior diremos que el vector w es una combinación lineal de los vectores v y u , con coeficientes a y b .

Demostración. Primero pongamos a las flechas que representan a los vectores u , v y w de tal forma que O sea el punto inicial de los tres. Segundo, a partir del punto final de w tracemos líneas paralelas a los vectores u y v hasta que intersecten a las líneas que determinan los puntos inicial y final de cada uno de ellos. Entonces, de acuerdo a la definición de suma de vectores, w es la suma de los vectores cuyos puntos iniciales son el punto O y sus puntos finales son, respectivamente, los puntos de intersección anteriormente referidos. Estos vectores así representados, son de la forma av y bu , con a y b números reales y por lo tanto $w=av+bu$ (figura 7).

En particular, $u=1u+0v$, $v=0u+1v$ y el vector cero $0=0u+0v$.

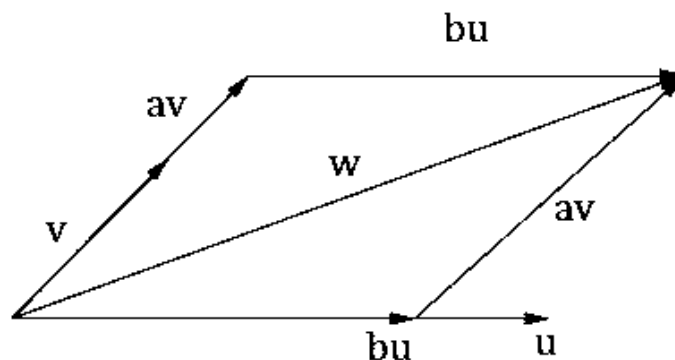


Figura 7.

La unicidad de los números a y b se prueba de la siguiente manera:

Si $av+bu=w=a'v+b'u$ entonces $(a-a')v=(b-b')u$. Si $a \neq a'$ entonces $v=ru$ con $r=\frac{b'-b}{a-a'}$, lo cual diría que u y v son paralelos, contradiciendo la hipótesis. Por los tanto, $a=a'$, pero entonces $(b'-b)u=(a-a')v=0v=\vec{0}$, de aquí, si $b \neq b'$ entonces $u=\left(\frac{b'-b}{b'-b}\right)u = \frac{1}{b'-b}\vec{0}$ lo cual también contradice la hipótesis.

Así es que una de las ventajas de los sistemas referenciales es que podemos asociarle a cada vector w del plano, coordenadas, es decir, si $\{v, u, O\}$ es un sistema referencial y $w = av+bu$, entonces diremos que el vector w tiene por coordenadas (a,b) con respecto al sistema referencial $\{v, u, O\}$, las cuales son únicas con respecto al sistema.

El orden de descripción del sistema referencial es muy importante, por ejemplo, si al anterior sistema lo describimos $\{u, v, O\}$, entonces, $w = bu+av$ y sus coordenadas asociadas son (b,a)

Antes de ejemplificar todo lo anterior, necesitamos definir lo que entenderemos por el ángulo entre vectores, para lo cual, sin pérdida de generalidad supondremos que las flechas que los representan tienen el mismo punto inicial, ya que si no fuera este el caso, las trasladaremos (sin girar), a una de ellas o a ambas hasta hacer que sus puntos iniciales coincidan, sin que por ello dejen de estar representando a los mismos vectores.

Definición 12. *Dados los vectores u y v con el mismo punto inicial, al ángulo que forman y cuya medida se encuentre entre 0° y 180° le llamaremos el ángulo entre u y v y lo denotaremos así: $\angle(u,v)$.*

Nota 8. De la definición vemos que $\angle(u,v) = \angle(v,u)$.

Habiendo definido el concepto de ángulo entre vectores, podemos encontrar las normas de los vectores suma y resta usando la Ley de Cosenos (LC):

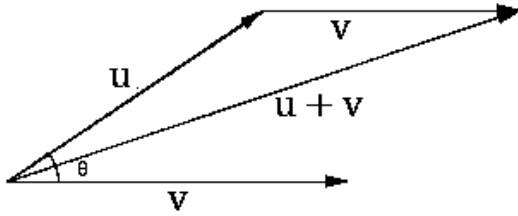


Figura 8(a)

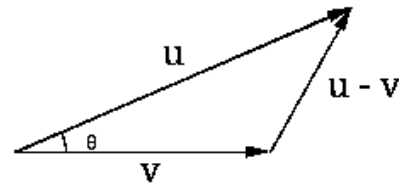


Figura 8(b)

En la figura 8(a) tenemos un par de vectores u y v formando un ángulo θ . Dichos vectores forman, con el vector $u+v$, un triángulo, de donde por Ley de Cosenos tenemos

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos(180^\circ - \theta) \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\|\cos\theta\end{aligned}$$

Por otro lado, en la figura 8(b) tenemos el triángulo formado por los vectores u, v y $u-v$, nuevamente por Ley de Cosenos tenemos

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$$

El número $\|u\|\|v\|\cos\theta$ resulta de particular importancia y por lo tanto se le identifica como el producto punto de los vectores u y v .

Definición 13. Para todo par de vectores u y v distintos del vector cero, su **PRODUCTO PUNTO** es $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos \angle(u, v)$.

Cuando uno de ellos (o ambos) sea el vector cero definimos:

$$\vec{0} \cdot v = 0 = v \cdot \vec{0} = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$$

Ahora podemos decir que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2u \cdot v \qquad \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$$

Nota 9. Observemos inmediatamente que $u \cdot v = v \cdot u$ ya que el producto de números reales es conmutativo ($\|u\|\|v\| = \|v\|\|u\|$) y $\angle(u, v) = \angle(v, u)$ y notemos que el producto punto de dos vectores NO ES otro vector sino un número.

Ejemplos. Para los ejercicios siguientes supondremos que $\angle(u,v)=60^\circ$, $\|v\|=2$, $\|u\|=3$ y estaremos encontrando los números a y b que sean los coeficientes del vector w cuando lo representamos como una combinación lineal de v y u , es decir a y b sean tales que $w=av+bu$. Además, calcularemos $u \cdot w$ y $v \cdot w$

1.- $\|w\| = 1$ $\angle(w,u) = 45^\circ$, $\angle(w,v)=15^\circ$

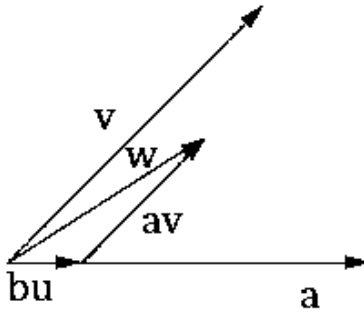


Figura 9.

En la figura 9 podemos ver que se forma un triángulo con los vectores av , bu y w con ángulos de 45° , 120° y 15° aplicando la Ley de Senos tenemos que

$$\frac{\sin 45^\circ}{\|av\|} = \frac{\sin 120^\circ}{\|w\|} = \frac{\sin 15^\circ}{\|bu\|}$$

de aquí

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{2|a|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{.2588}{3|b|}$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores y observando que a y b deben ser positivas, tenemos que $a = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $b = \frac{.5176}{3\sqrt{3}}$, de donde

$$w = \frac{1}{\sqrt{6}}v + \frac{.5176}{3\sqrt{3}}u$$

$$u \cdot w = \|u\| \|w\| \cos \angle(u, w) = (3)(1) \cos 45^\circ = 3 \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \angle(v, w) = (2)(1) \cos 15^\circ = 2(.965) = 1.931$$

2.- $\|w\| = 2$, $\angle(w,u)=30^\circ$, $\angle(w,v)=90^\circ$.

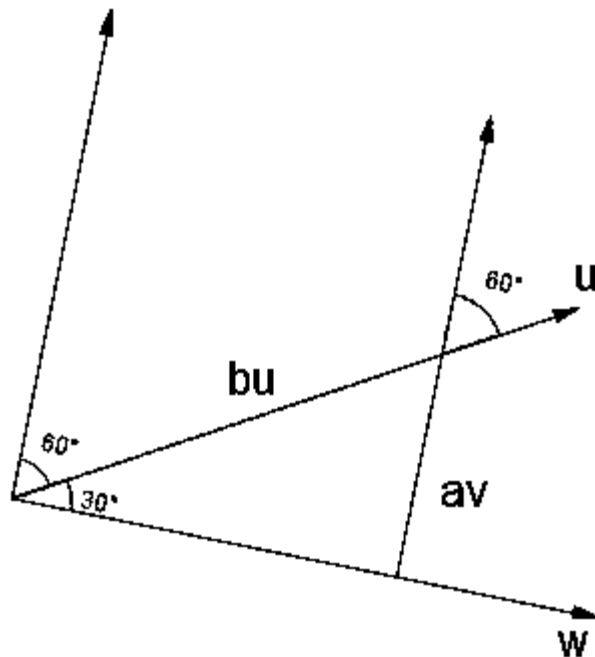


Figura 10.

En la figura 10 vemos que en el triángulo formado por los vectores av , bu y w , los ángulos que se forman son de 90° , 60° y 30° .

Aplicando la Ley de Senos tenemos

$$\frac{\text{sen } 90^\circ}{\|bu\|} = \frac{\text{sen } 30^\circ}{\|av\|} = \frac{\text{sen } 60^\circ}{\|w\|}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{3|b|} = \frac{\frac{1}{2}}{2|a|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

Por lo tanto $|a| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Resolviendo las ecuaciones anteriores y viendo que ahora a , debe ser negativa y b debe ser positiva, tenemos que $a = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ y $b = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ de donde

$$w = -\frac{1}{\sqrt{3}}v + \frac{4}{3\sqrt{3}}u$$

$$u \cdot w = (3)(2)\cos 30^\circ = 6\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$v \cdot w = (2)(2)\cos 90^\circ = 4(0) = 0$$

$$3. -\|w\| = \pi, \angle(u, w) = 120^\circ, \angle(v, w) = 180^\circ$$

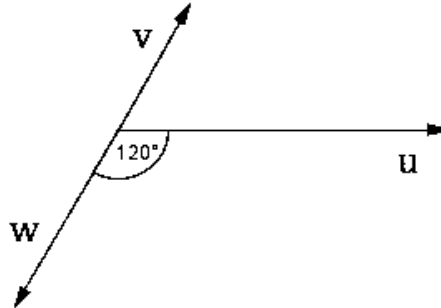


Figura 11.

En la figura 11 vemos que $w = \frac{\pi}{2}v$, es decir, $a = -\frac{\pi}{2}$ y $b=0$

$$u \cdot w = (3)(\pi)\cos 120^\circ = 3\pi\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\pi$$

$$v \cdot w = (2)(\pi)\cos 180^\circ = -2\pi$$

Definición: Dado un sistema referencial o base $\{v, u, O\}$, diremos que:

Es un sistema ortogonal si los vectores u y v son perpendiculares, $\angle(v, w) = 90^\circ$

Es un sistema normal si los vectores u y v tienen norma 1, $\|u\| = 1 = \|v\|$

Es un sistema ortonormal si es ortogonal y normal

Una de las ventajas de tener un sistema referencial ortonormal es que por medio de él podemos calcular fácilmente el producto punto de dos vectores:

Tomemos un sistema referencial (base) $\{e_1, e_2, O\}$ ortonormal, es decir, $\angle(e_1, e_2) = 90^\circ$ y $\|e_1\| = 1 = \|e_2\|$. Tomemos ahora dos vectores cualesquiera u, v y sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $u = ae_1 + be_2$ y $v = ce_1 + de_2$, representan a los vectores ae_1, be_2 y u , entonces por el Teorema de Pitágoras tenemos

$$\|u\|^2 = \|ae_1\|^2 + \|be_2\|^2 = |a|^2\|e_1\|^2 + |b|^2\|e_2\|^2 = a^2 + b^2$$

Análogamente, en el triángulo T' formado por las flechas que representan a los vectores ce_1 , de_2 y v tenemos

$$\|v\|^2 = c^2 + d^2$$

En el triángulo T vemos que $\cos \angle(u, e_1) = \frac{\|ae_1\|}{\|u\|} = \frac{|a|}{\|u\|}$ y $\sin \angle(u, e_1) = \frac{\|be_2\|}{\|u\|} = \frac{|b|}{\|u\|}$

En el triángulo T' tenemos que $\cos \angle(v, e_1) = \frac{\|ae_1\|}{\|v\|} = \frac{|a|}{\|v\|}$ y $\sin \angle(v, e_1) = \frac{\|be_2\|}{\|v\|} = \frac{|b|}{\|v\|}$

Además $\angle(u, v) = \angle(u, e_1) - \angle(v, e_1) = \angle(v, e_2) - \angle(u, e_2)$

De donde,

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^2 &= \|u\|^2 \|v\|^2 \cos^2 \angle(u, v) \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (\cos(\angle(u, e_1) - \angle(v, e_1)))^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 (\cos \angle(u, e_1) \cos \angle(v, e_1) - \sin \angle(u, e_1) \sin \angle(v, e_2))^2 \\ &= \|u\|^2 \|v\|^2 \left[\left(\frac{|a|}{\|u\|} \frac{|c|}{\|v\|} \right)^2 + 2 \frac{|a|}{\|u\|} \frac{|c|}{\|v\|} \frac{|b|}{\|u\|} \frac{|d|}{\|v\|} + \left(\frac{|b|}{\|u\|} \frac{|d|}{\|v\|} \right)^2 \right] \\ &= a^2 c^2 + 2|abcd| + b^2 d^2 = (ac + bd)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, sacando raíces cuadradas tenemos $uv = ac + bd$

Aunque la demostración anterior asumió que el producto $abcd \geq 0$, el resultado es igualmente válido para $abcd < 0$ con tal de que en la demostración anterior hagamos los respectivos ajustes.

Sin embargo, algo muy importante es que lo anterior solo es válido cuando tenemos una base ortogonal. Enunciémoslo en el siguiente teorema:

Teorema 4. Si los vectores u y v tienen asociadas, respectivamente, las coordenadas (a, b) y (c, d) con respecto a un sistema referencial ortogonal cualquiera, entonces $u \cdot v = ac + bd$.

El producto punto satisface las siguientes propiedades

Teorema 5. a) Los vectores u, v son ortogonales si y solo si $u \cdot v = 0$

b) $u \cdot u = \|u\|^2$

c) $ru \cdot sv = rs(u \cdot v)$ para todo par de números reales r y s

d) $u \cdot (v+w) = u \cdot v + u \cdot w$ para toda terna de vectores u , v y w .

Demostración:

- a) Los vectores u , v (distintos de cero) son ortogonales (perpendiculares) si y solo si $\angle(u,v) = 90^\circ$, de donde, $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos 90^\circ = \|u\| \|v\| 0 = 0$. Por otro lado, si $0 = uv = \|u\| \|v\| \cos \angle(u,v)$ siendo $\|u\| \neq 0 \neq \|v\|$ entonces $\cos \angle(u,v) = 0$ y como el ángulo de dos vectores está entre cero y 180° , el único valor posible es $\angle(u,v) = 90^\circ$, es decir, u y v son perpendiculares (ortogonales).
- b) Como $\angle(u,u) = 0^\circ$, $u \cdot u = \|u\| \|u\| \cos 0^\circ = \|u\|^2 1 = \|u\|^2$
- c) En la figura 11(a) vemos que si $r, s > 0$ ó si $r, s < 0$, es decir $rs > 0$, entonces $\angle(ru, sv) = \angle(u, v)$ por lo tanto, $(ru)(sv) = \|ru\| \|sv\| \cos \angle(ru, sv) = |r| \|u\| |s| \|v\| \cos \angle(u, v) = |r| |s| u \cdot v = |rs| u \cdot v = rs(u \cdot v)$

En la figura 11(b) vemos que si r y s tienen signos contrarios, es decir $rs < 0$, entonces $\angle(ru, sv) = 180^\circ - \angle(u, v)$, de donde $(ru) \cdot (sv) = |r| \|u\| |s| \|v\| \cos(180^\circ - \angle(u, v)) = |rs| \|u\| \|v\| (-\cos \angle(u, v)) = (-rs)(-uv) = rs(u \cdot v)$

- d) Para probar este inciso tomemos un sistema referencial (base) ortonormal $\{e_1, e_2, O\}$ y supongamos que $u = ae_1 + be_2$, $v = ce_1 + de_2$, y $w = fe_1 + ge_2$. De aquí obtenemos, que con respecto a la base tomada, $v+w = (c+f)e_1 + (d+g)e_2$.
De acuerdo al teorema anterior tenemos: $u \cdot v = ac + bd$, $u \cdot w = af + bg$ y $u \cdot (v+w) = a(c+f) + b(d+g) = ac + af + bd + bg = (ac + bd) + (af + bg) = u \cdot v + u \cdot w$

Nota 10. El proceso anterior, es decir, dar un par de vectores v , u no paralelos con punto inicial en O y encontrar los números a y b tales que $w = av + bu$, suele también expresarse diciendo que los números que forman la pareja ordenada (a,b) son las coordenadas del vector w en términos de la base $\{v, u, O\}$, notando que el orden en que se expresan las coordenadas está de acuerdo al orden en que se expresa la base, es decir, si (a,b) son las coordenadas del vector w con respecto a la base $\{v, u, O\}$; la pareja de coordenadas de w con respecto a la base $\{v, u, O\}$, es la pareja ordenada $(b,a) \neq (a,b)$ si $a \neq b$.

IDENTIFICACIÓN DE PUNTOS DEL PLANO Y VECTORES

Podemos ahora “ubicar” a los puntos del plano tomando como marco de referencia a una base $(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{O})$ arbitraria, pero fija, a la cual la representaremos con un par de flechas con un mismo punto inicial $\mathbf{O}$.

Entonces, dado cualquier punto $\mathbf{P}$ del plano, consideramos la flecha con punto inicial en $\mathbf{O}$ y punto final $\mathbf{P}$, como la representación de un vector $\mathbf{w}$, hecho esto, procedemos como en los ejemplos 1,2 y 3 a encontrar las coordenadas (a,b) del vector $\mathbf{w}$ con respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{O}\}$.

Con estas mismas coordenadas identificamos al punto $\mathbf{P}$. Es necesario desde luego mantener fija a la base, ya que, como lo hicimos notar anteriormente, aunque tomemos el mismo punto $\mathbf{P}$ del plano y el mismo punto $\mathbf{O}$ como punto de referencia de una base (origen), si cambiamos a uno de los vectores, ya sea $\mathbf{u}$ o $\mathbf{v}$, cambian las coordenadas que identifican al punto $\mathbf{P}$ (ver figura 12). Si cambiamos el origen, también cambian las coordenadas aunque permanezcan los mismos vectores.

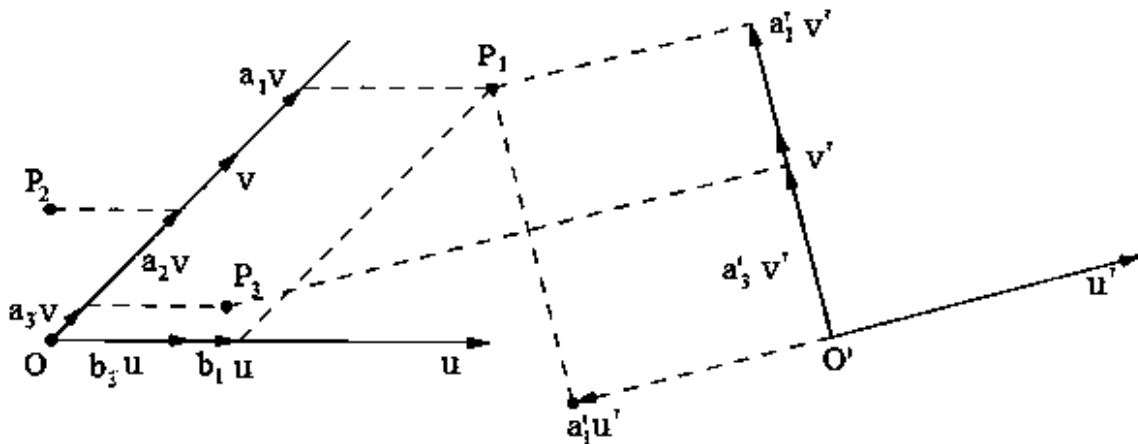


Figura 12(a) Figura 12(b)

En la figura 12(a) vemos que los puntos $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$, y $\mathbf{P}_3$ tienen con respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{O}\}$, coordenadas (a_1, b_1) , (a_2, b_2) y (a_3, b_3) respectivamente y con respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}', \mathbf{u}', \mathbf{O}'\}$ figura 12(b) sus coordenadas son (a'_1, b'_1) , (a'_2, b'_2) y (a'_3, b'_3) .

Lo que estamos haciendo es “etiquetar” a cada punto $\mathbf{P}$ del plano, con una pareja ordenada de números reales (a, b) , para ubicarlo de manera precisa con respecto a un sistema referencial de vectores $\{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{O}\}$ fijado previamente. Por cierto, al primer

número de esta pareja ordenada, a , se le llama la abscisa del punto P y al segundo número en este orden, b , se le llama la ordenada del punto P .

La manera de expresar esta identificación o “etiquetación” será $P=(a,b)$ manteniendo en mente que aunque el punto P permanezca, los números a y b cambian (la etiqueta cambia) si cambiamos de base.

Inversamente, dado un sistema referencial, entonces, para cada par de números (a,b) podemos asociarle de manera única un punto P en el plano. Es decir, dada una base ordenada, existe una correspondencia biunívoca (uno a uno) entre los puntos del plano y parejas ordenadas de números reales que sirven como identificación del punto.

Habiendo fijado un punto O en el plano (origen), el proceso inverso al anterior es asociarle a cada vector w un punto P único en el plano. Esto se consigue apoyando el punto inicial del vector w en el origen O y llamarle P a su punto final; de esta manera volvemos a tener una correspondencia uno a uno entre los vectores y puntos del plano.

Habiendo fijado ya una base $\{v, u, O\}$ podemos definir las operaciones suma y resta entre los puntos del plano de la siguiente manera:

Definición 14. Si $P=(a,b)$ y $Q=(c,d)$ entonces los puntos $P+Q$ y $P-Q$ del plano son aquellos cuyas coordenadas son $P+Q=(a+c,b+d)$ y $P-Q=(a-c,b-d)$

También podemos definir lo que se entenderá por producto escalar:

Definición 15. Dado $P=(a,b)$ y $t \in \mathbb{R}$, $tP=(ta,tb)$.

Por otro lado, nos podemos preguntar si el proceso de encontrar las coordenadas de un punto o el proceso inverso, es decir, dadas las coordenadas, localizar al punto, es menos laborioso o más sencillo con respecto a unas bases y más complicado con respecto a otras; la respuesta es sí con ciertas bases los cálculos resultan más sencillos que con otras; este tipo de bases que facilitan los procesos anteriores son aquellos en donde los vectores que conforman la base, son ambos de magnitud uno y forman entre sí un ángulo de 90° , a estas bases se les refiere como bases ortonormales.

Ejemplos:

Para los ejercicios 4,5, y 6 supondremos que los vectores básicos v, u son perpendiculares y de magnitud 1 (ortonormales), lo cual de entrada nos dice que $\|av\| = |a|\|v\| = |a|$ y $\|bv\| = |b|\|v\| = |b|$.

Sin embargo, pondremos a las flechas que los representan de tres formas distintas ver las figuras 13(a), 13(b) y 13(c). El vector w será el mismo en cada caso, de norma 3. ($\|w\| = 3$).

Veremos que por el hecho de que la base conste de vectores ortonormales, no importando en qué posición los representemos, ni qué punto O como origen escojamos, los cálculos para encontrar sus coordenadas se facilitan (comparar lo que sigue con lo hecho en los ejercicios 1,2 y 3).

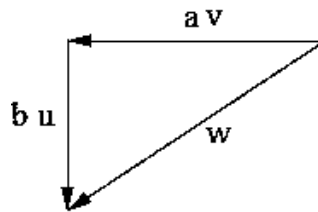


Figura 13(a)

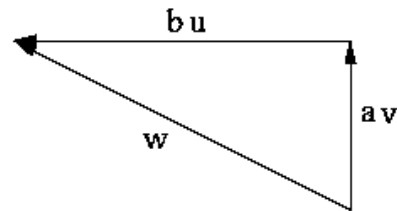
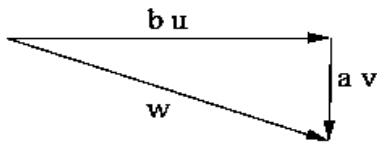


Figura 13(b) Figura 13(c)

4.- $\angle(v,w)=60^\circ$, $\angle(u,w)=30^\circ$. En la figura 13(a) vemos que el triángulo determinado por los vectores bu , av , w es rectángulo, por lo tanto, podemos hacer uso de las funciones trigonométricas seno y coseno: $\text{sen}30^\circ = \frac{\|av\|}{\|w\|}$, $\text{cos}30^\circ = \frac{\|bu\|}{\|w\|}$, de donde $a = \frac{3}{2}$ y $b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Por lo tanto $w = \frac{3}{2}v + \frac{3\sqrt{3}}{2}u$.

5.- $\angle(v,w)=105^\circ$, $\angle(w,u)=15^\circ$, de donde $\text{sen}15^\circ = \frac{\|av\|}{\|w\|}$ y $\text{cos}15^\circ = \frac{\|bu\|}{\|w\|}$ de donde, observando en la figura 13(b) que a , debe ser negativa y b positiva, $a = -$, y $b = 3(.9659) = 2.8977$.

6.- $\angle(v,w)=60^\circ$, $\angle(w,u)=150^\circ$ por lo que $\sin 30^\circ = \frac{\|av\|}{\|w\|} = \frac{1}{2} = \frac{\|av\|}{\|w\|} = \frac{|a|}{3} \rightarrow |a| = \frac{3}{2}$ y observando la figura 13(b) obtenemos que $a = \frac{3}{2}$. De aquí usando el Teorema de Pitágoras obtenemos que

$\|bu\|^2 = \|w\|^2 - \|av\|^2 \rightarrow |b|^2 = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$ y observando nuevamente la figura 13(c) vemos que $b = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Por otro lado, también vemos la siguiente situación: dado el sistema referencial $\{v, u, O\}$, a cada par de puntos $P=(a,b)$, $Q=(c,d)$ podemos asociarles dos vectores, ambos que tengan punto inicial en O y magnitud igual a la distancia que hay de P a Q y ambos paralelos al segmento PQ , la única diferencia entre estos vectores es su punto final, en un caso es el punto $Q-P$ y en el otro su punto final es $P-Q$. A dichos vectores los referimos precisamente como $Q-P$ y $P-Q$, los cuales, si los trasladamos (sin girar), el primero tendrá punto inicial P y punto final Q y el segundo tendrá punto inicial y punto final P .

Habiendo aprendido a asociar puntos y vectores y partes de puntos con partes de vectores, en términos de una base, previamente determinada y habiendo visto que las coordenadas de un punto o un vector con respecto a la base elegida son únicas (aunque diferentes de base a base) procederemos en el siguiente capítulo a describir las distintas representaciones de la línea en el plano que se describe analíticamente de manera más sencilla que es la recta.

EJERCICIOS PARA EL CAPÍTULO 1.

- 1.- Prueba que si u es un vector entonces $-3u+3u$ y $3(-u)+3u$ son el vector cero.
- 2.- Muestra que los vectores $5u$ y $23v$ forman el mismo ángulo que los vectores u y v , así como los vectores $-4u$ y $-6v$.
- 3.- Encuentra $7u \cdot 2u$, $-3u \cdot u$, y $-8u \cdot 5u$ si $\|u\| = \frac{3}{2}$.
- 4.- Encuentra $u \cdot v$ si
 - a) $\|u\|=3=\|v\|$ y $\angle(u,v)=60^\circ$
 - b) $\|u\|=2$, $\|v\|=4$ y $\angle(u,-v)=30^\circ$.
- 5.- Si con un sistema referencial u,v las coordenadas del vector w son (a,b) . ¿Cuáles serán las coordenadas del mismo vector w si los sistemas referenciales son
 - a) $u, -v$
 - b) $-2u, 3v$
 - c) $-3u, -3v$
- 6.- Si el sistema referencial u, v es ortonormal y las coordenadas de los vectores w, z son $(-2,5)$ y $(4,-7)$ respectivamente, encuentra $w \cdot z$ para
 - a) El sistema referencial original
 - b) $u,-v$
 - c) $-u,-v$
- 7.- Obtén las magnitudes de los vectores w,z del ejercicio anterior y el ángulo que forman.
- 8.- Obtén $w \cdot z$ del ejercicio 6, con respecto a los sistemas referenciales del ejercicio 5, observando que estos últimos sistemas ya no son normales.
- 9.- Encuentra los vectores $w+z$, $3w-5z$ y sus normas respectivas (w y z como en el ejercicio 6).

CAPITULO II

LA LÍNEA RECTA

Podemos ver en la figura 14 que tomando dos vectores arbitrarios w_1, w_2 con el mismo punto inicial, se obtiene la familia de vectores de la forma $\{w_1 + rw_2 | r \in \mathbb{R}\}$, para los cuales, los puntos finales de las flechas que los representan forman una línea recta; este hecho no depende de que tengamos o no una base.

Definición 1. Al conjunto $\{w_1 + rw_2 | r \in \mathbb{R}\}$ le llamaremos la *representación vectorial de la recta que pasa por el punto final del vector w_1 , paralela al vector w_2* .

Al número r variando en el conjunto de todos los números reales se le llama *parámetro* y al vector w_2 que va multiplicado por el parámetro r le llamaremos *vector guía*.

Nota 1. Si en la representación vectorial de una recta reemplazamos al vector guía por cualquier otro vector paralelo a él, distinto del vector cero, obtendremos otra representación vectorial de la misma recta.

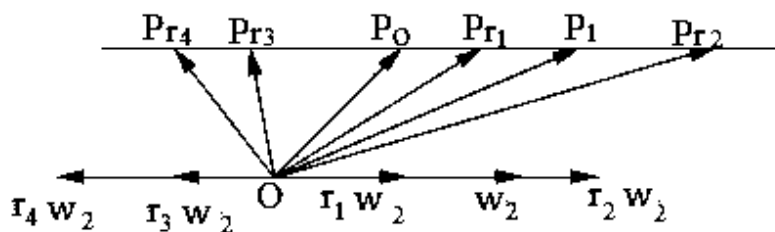


Figura 14.

Si fijamos un punto O en el plano y si al punto inicial de cada flecha que representa a un vector de la forma $w_1 + rw_2$ lo hacemos coincidir con O y finalmente le llamamos P_r , al punto final de dicha flecha (P_0 será el punto final de w_1) podemos decir que el conjunto de puntos $\{P_r | r \in \mathbb{R}\}$ forman una línea recta cuyo vector guía es w_2 .

Notemos también que dicha línea recta es paralela, precisamente, a la flecha que representa al vector w_2 .

De este modo, el conjunto de puntos finales de las flechas que representan a los vectores de la forma $w_2 + tw_1$, haciendo variar el parámetro t en el conjunto de todos los

números, describe una línea recta que pasa por el punto final de w_2 (P_2) y es paralela a la flecha que representa al vector w_1 , que es, en este caso, el vector guía de la recta.

Si w_3 es un tercer vector cuyo punto inicial también es O , entonces el conjunto de puntos finales de las flechas que representan a los vectores $\{w_3 + sw_2 | s \in \mathbb{R}\}$ es una línea recta que pasa por el punto final de w_3 y es paralela a w_2 (vector guía). Si denotamos por P_s al conjunto de dichos puntos finales, diremos que, haciendo variar al parámetro s en el conjunto de números reales, los puntos P_s forman una línea recta.

Nota 2. Por lo tanto, dos rectas serán paralelas únicamente si sus vectores guía lo son.

Por otro lado, en el siguiente teorema probaremos lo que mencionamos anteriormente, es decir, que la representación vectorial de una recta no es única.

Teorema 1. Sean w_1, w_2, w_3 y w_4 vectores tales que $w_3 = w_1 + r_0 w_2$ para algún número real r_0 y w_4 paralelo a w_2 , es decir, $w_4 = t_0 w_2$ para algún real t_0 distinto de cero, entonces, $\{w_1 + r w_2 | r \in \mathbb{R}\} = \{w_3 + s w_4 | s \in \mathbb{R}\}$, es decir, las dos son representaciones vectoriales de la misma recta.

Demostración: La primera hipótesis del teorema nos dice que el punto final de w_3 pertenece a la recta que pasa por el punto final de w_1 y es paralela al vector w_2 .

Probaremos la siguiente contención de conjuntos: $\{w_3 + s w_4 | s \in \mathbb{R}\} \subset \{w_1 + r w_2 | r \in \mathbb{R}\}$

Sea $w = w_3 + r w_4 = (w_1 + r_0 w_2) + r(t_0 w_2) = w_1 + (r_0 + r t_0) w_2$, lo cual dice que la recta determinada por w_3 y w_4 está contenida en la que determinan w_1 y w_2 .

Dado que dos rectas que tienen dos puntos en común son iguales, el teorema queda probado.

Para ilustrar lo anterior procedamos a fijar una base ortonormal con origen O , es decir, $\hat{e}_1, \hat{e}_2$ dos vectores ortogonales y de norma uno (ortonormales) con punto inicial común O .

De esta forma, cualquier vector w se puede representar como $w = a \hat{e}_1 + b \hat{e}_2$, lo cual lo expresaremos simplemente como $w = (a, b)$, en donde, a los números a, b los referiremos como las coordenadas del vector w con respecto a la base, más aún, al número a se le llama abscisa y al número b la ordenada del vector w .

Particularmente, identificaremos al vector cero con el punto en el origen O , de esta forma $\vec{0} = 0 \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2$, es decir, las coordenadas del vector $\vec{0}$ son $(0, 0)$ que serán las mismas que identifiquen al punto O . $\hat{e}_1 = 1 \hat{e}_1 + 0 \hat{e}_2$ y $\hat{e}_2 = 0 \hat{e}_1 + 1 \hat{e}_2$, es decir, las coordenadas de los vectores básicos $\hat{e}_1$ y $\hat{e}_2$ son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente.

Veamos los siguientes ejemplos:

1.- Sean $w_1=(3,2)$ y $w_2=(-2,4)$ entonces, la recta $\{w_1+rw_2|r\in\mathbb{R}\}=\{(3,2)+r(-2,4)|r\in\mathbb{R}\} = \{(x,y)|x=3-2r, y=2+4r\}$ este último conjunto nos dice que la recta es el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas son de la forma $(3-2r, 2+4r)$.

A las ecuaciones $x=3-2r$, $y=2+4r$ que son satisfechas SOLAMENTE por los puntos de las rectas, se les llaman las ECUACIONES PARAMÉTRICAS de la recta (parámetro r). De esta forma, si queremos conocer algunos de los puntos que conforman la recta, todo lo que tendremos que hacer es darle valores al parámetro, por ejemplo, para $r=0$, obtenemos el punto de coordenadas $(3,2)$, para $r=1$ obtenemos que $(1,6)$ pertenece a la recta, para $r=-1$, $(5,-2)$ está en la recta, etc.

A su vez, estas ecuaciones también sirven para decidir si un punto dado pertenece o no a la recta, por ejemplo, el punto del plano cuyas coordenadas son $(1,-5)$ NO pertenece a la recta ya que no existe un número real r que haga ciertas, simultáneamente a las igualdades $1=3-2r$, $-5=2+4r$, así mismo, $(4,7)$ TAMPOCO pertenece a la recta ya que no existe ningún número real r que haga posible simultáneamente a las igualdades

$$4=3-2r \text{ y } 7=2+4r.$$

2.- Sean $w_1=(1,-3)$ y $w_2=(5,2)$, entonces, la recta $\{w_1+tw_2|t\in\mathbb{R}\}=\{(1,-3)+t(5,2)|t\in\mathbb{R}\} = \{(x,y)|x=1+5t, y=-3+2t\}$, este último conjunto nos dice que las ecuaciones paramétricas de la recta son $x=1+5t$, $y=-3+2t$, por lo tanto, podemos afirmar que los puntos del plano cuyas coordenadas son $(11,1)$ [$t=2$], $(-14,-9)$ [$t=-3$], $(\frac{7}{2}, -2)$ [$t=\frac{1}{2}$] pertenecen a la recta y puntos tales como $(0,0)$, $(-2,2)$ NO pertenecen, ya que no existe un número real t , tal que satisfaga simultáneamente las igualdades $0=1+5t$, $0=-3+2t$ y por otro lado $-2=1+5t$, $2=-3+2t$.

Definición 2. Se le llama **ÁNGULO DE INCLINACIÓN** de la recta $\{w_1+rw_2|r\in\mathbb{R}\}$ al ángulo α entre 0° y 180° que se obtiene cuando hacemos el movimiento circular en sentido contrario al de las manecillas del reloj, empezando en el punto final del vector $\hat{e}_1$ y terminando en la recta $\{0+rw_2|r\in\mathbb{R}\}$.

Definición 3. A la recta $\{0+re_1|r\in\mathbb{R}\}$ la referiremos como el eje X y a la recta $\{0+re_2|r\in\mathbb{R}\}$ la referiremos como el eje Y . Le llamaremos la parte positiva (negativa) del eje a los puntos donde el parámetro r es positivo (negativo).

Así es que el ángulo de inclinación de una recta es el ángulo que forma la recta con el eje X medido desde la parte positiva del mismo, en movimiento contrario al de las manecillas del reloj.

Nota 3. Por lo tanto, dos rectas serán paralelas si sus ángulos de inclinación son iguales. El ángulo de inclinación del eje X es 0° y del eje Y es 90° .

Definición 4. Diremos que el número m es la PENDIENTE DE UNA RECTA si $m = \tan \alpha$ donde α es el ángulo de inclinación de la recta y $\alpha \neq 90^\circ$ y diremos que $m = \infty$ si $\alpha = 90^\circ$.

Nota 4. Dos rectas serán paralelas si sus pendientes son iguales. La pendiente del eje X es cero y la del eje Y es ∞ .

Teorema 2. Si el vector guía de una recta es $\hat{u} = (u_1, u_2)$, entonces:

i) $m = \frac{u_2}{u_1}$ si $u_1 \neq 0$

ii) $m = \infty$ si $u_1 = 0$

Demostración: Sea α el ángulo e inclinación de la recta.

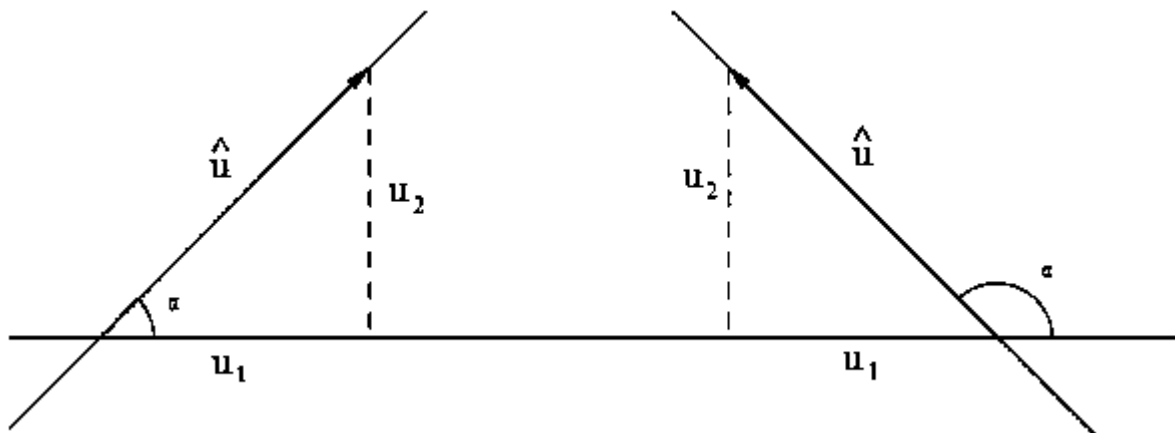


Figura 15(a) 15(b).

i) si $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ (figura 15(a)) entonces $m = \tan \alpha = \frac{u_2}{u_1}$

Si $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ (figura 15(b)) entonces $m = \tan \alpha = -\tan(180^\circ - \alpha) = \frac{u_2}{u_1}$.

ii) Si $u_1 = 0$ entonces el ángulo que forman el vector $\hat{e}_1$ y la recta $\{0 + ru\}$ es de 90° y por lo tanto $m = \infty$.

Corolario 1. Sean $u=(u_1,u_2)$ el vector guía de una recta, α su ángulo de inclinación y $u_1>0$ entonces:

1. Si $u_2 \geq 0$ entonces $\alpha = \arctan \frac{u_2}{u_1}$
2. Si $u_2 < 0$ entonces $\alpha = 180^\circ + \arctan \frac{u_2}{u_1}$

Si $u_1=0$ entonces $\alpha=90^\circ$

Demostración: Consecuencias inmediatas del teorema anterior.

Corolario 2. Si la abscisa u_1 del vector guía u es negativa entonces, para conocer el ángulo de inclinación de la recta tomamos como vector guía a $u'=(-u_1,u_2)$ y aplicamos el corolario anterior.

Una vez que tenemos las ecuaciones paramétricas de una recta podemos obtener, a partir de ellas, su ecuación general y su ecuación punto pendiente.

Ejemplos:

3. Del ejemplo 1, $x=3-2r$, $y=2+4r$, despejamos en cada igualdad a r , $\frac{x-3}{-2} = r = \frac{y-2}{4}$, de donde $4(x-3)=(-2)(y-2)$ por lo que $4x+2y-16=0$ ó equivalentemente $2x+y-8=0$ que es la ecuación general de la recta. Si de esta ecuación despejamos a y , obtenemos su ecuación punto pendiente $y=-2x+8$ la cual nos dice que la pendiente de la recta es -2 y su ordenada al origen es 8 (el punto $(0,8)$ es donde la recta corta al eje Y).

Obsérvese que los coeficientes de x y y son, respectivamente, los números u_2 y $-u_1$.

Nota 5. La situación anterior es para todas las rectas, es decir, si $ax+by+c=0$ es la ecuación general de una recta, entonces, un vector guía para esta recta es el vector u de coordenadas $u_1=-b$, $u_2=a$.

El problema inverso también se puede resolver; dada la ecuación de una recta en el plano en su forma general o en su forma punto pendiente, podemos obtener su ecuación vectorial y sus ecuaciones paramétricas:

Ejemplos:

4. $3x-4y+25=0$, equivalentemente $y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$ Entonces, $u=(4,3)$ es un vector guía para la recta. Por otro lado, el punto final del vector w de coordenadas $(-3,4)$ pertenece a la

recta, por lo tanto la ecuación vectorial de la misma es $\{w+ru|r\in\mathbb{R}\}$ y además $x=-3+4r$, $y=4+3r$ son sus ecuaciones paramétricas.

De acuerdo a la última sección del Capítulo 1, fijada la base $\hat{e}_1, \hat{e}_2$, con punto inicial O (origen), identificaremos a los vectores con sus puntos finales, haciendo que su punto inicial sea O, ó, equivalentemente, identificaremos al vector con sus coordenadas con respecto a la base $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, O\}$. Así es que si P es el punto final del vector w y u es cualquier otro vector, entonces $\{P+ru|r\in\mathbb{R}\}$ es la ecuación vectorial de la recta que pasa por P y es paralela al vector u, donde u es un vector guía para la recta, tanto como cualquier otro vector paralelo a él distinto del vector cero.

Hemos establecido: Dado un punto P del plano y un vector distinto de cero, u, existe una única línea recta que pasa por P y es paralela a u, para la cual hay cuatro formas distintas de referirla, a saber; su forma vectorial, su forma paramétrica, su forma general y por medio de su pendiente y el punto en donde cruza al eje Y, a cuya ecuación se le llama ecuación punto-pendiente .

De acuerdo a la última sección del capítulo anterior, dos puntos distintos en el plano P, Q determinan dos vectores, uno con punto inicial en P y punto final en Q, denotado Q-P y otro con punto inicial en Q y punto final en P, denotado P-Q. Con cualquiera de estos vectores ó uno paralelo a ellos (distinto de cero) podemos representar a la única recta que pasa por P y Q.

Proposición1. *Dados P y Q puntos del plano y $u=Q-P$ entonces $L=\{P+ru|r\in\mathbb{R}\}$ es la representación vectorial de la línea recta que determinan P y Q.*

Demostración: Tomando $r=0$ vemos que $P \in L$ y para $r=1$ vemos que

$P+1(Q-P)=P+Q-P=Q$, es decir, $Q \in L$, por lo tanto L es la única recta que contiene a los puntos P y Q dados.

Corolario 3. *Si L es la recta que pasa por los puntos P y Q, de coordenadas (a,b) y (c,d) respectivamente, con respecto a un sistema referencial ortonormal, entonces su pendiente m, es igual a:*

$$i) \quad m = \frac{d-b}{c-a} \quad \text{si } a \neq c$$

$$ii) \quad m = \infty \quad \text{si } a = c$$

Demostración. Por la proposición 1, $u=Q-P=(c-d, d-b)$ es un vector guía para la recta que pasa por los puntos P y Q, de aquí, el resultado se sigue del Teorema 2.

Ejemplos:

5. Sean $P=(2,-5)$, $Q=(-1,3)$, de esto, $u=Q-P=(-1-2, 3-(-5))=(-3,8)$, por lo que una representación vectorial de la recta que pasa por P y Q es $\{P+tu|t\in\mathbb{R}\}=\{(2,-5)+t(-3,8)|t\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)|x=2-3t, y=-5+8t\}$

éstas últimas son las ecuaciones paramétricas de dicha recta, con parámetro t (número real); su pendiente es $m = \frac{8}{-3} = -\frac{8}{3}$, de donde,

$y-(-5) = \frac{8}{-3}(x-2)$, $y = \frac{8}{-3}x + \frac{1}{3}$ que es su ecuación punto-pendiente y finalmente $8x+3y=1$ es su ecuación general.

Cabe mencionar que la representación vectorial también es correcta si en vez del punto P tomamos a Q y/o si en vez del vector Q-P tomamos como guía al vector P-Q ó a cualquier múltiplo distinto de cero de uno de ellos: $(3,-8)$, $(-4,16)$, $(-9,24)$, etc.

6.- Sean $P=(-4,-2)$, $Q=(-4,1)$. En este caso, el vector guía es $u=Q-P=(0,3)$ que tiene abscisa cero, por lo tanto, su pendiente es $m=\infty$. Una representación vectorial de la recta es $\{Q+su|s\in\mathbb{R}\}=\{(-4,-2)+s(0,3)|s\in\mathbb{R}\}=\{(x,y)|x=-4, y=-2+3s\}$, que son sus ecuaciones paramétricas, sin embargo, en este caso, como la x no depende del parámetro s, la única ecuación que se toma en cuenta es precisamente $x=-4$, lo cual nos dice que lo único que necesita un punto del plano para pertenecer a esta recta es que su abscisa sea -4.

DISTANCIAS

Seguimos suponiendo que hemos escogido y fijado un sistema referencial (base) ortonormal, de modo que en todo lo que sigue las coordenadas asociadas a cada punto estarán dadas con respecto a esa base fija.

Dados dos puntos cualesquiera, que tengan la misma abscisa ó la misma ordenada, digamos $P=(a,b)$, $Q=(a,d)$ ó $P=(a,b)$ y $Q=(c,d)$, la distancia de P a Q, $d(P,Q)$ es simplemente $|b-d|$ para el primer caso y $|a-c|$ para el segundo caso (ver figura 16).

En donde $|\cdot|$ significa el valor absoluto del número, en este caso, $|a-c| = a-c$ si $a > c$

y $|a-c| = c-a$ si $c > a$ Análogamente para $|b-d|$.

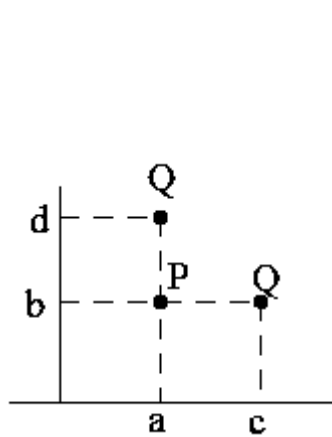


Figura 16(a)

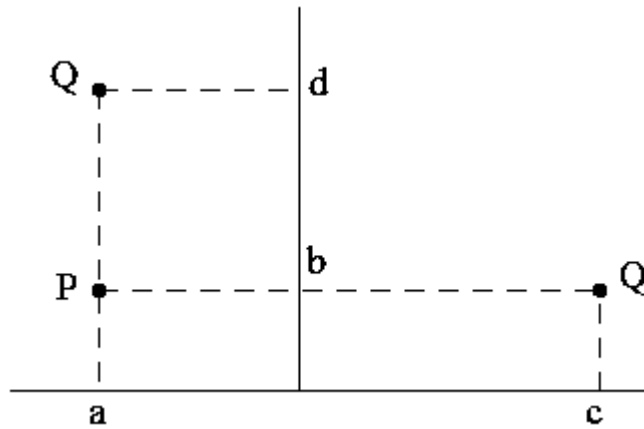


Figura 16(b)

Ejemplos

$$7. d((3,-5),(3,1))=|-5-1|=1-(-5)=6,$$

$$d((0,3),(0,1))=|3-1|=3-1=2,$$

$$d((4,-1),(-1,-1))=|4-(-1)|=4+1=5$$

$$d((3,-2),(7,2))=|3-7|=7-3=4.$$

Proposición 2. Sean $P=(a,b)$, $Q=(c,d)$ dos puntos en el plano, entonces, la distancia entre los puntos P y Q está dada por la fórmula $d(P,Q)=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$.

Demostración:

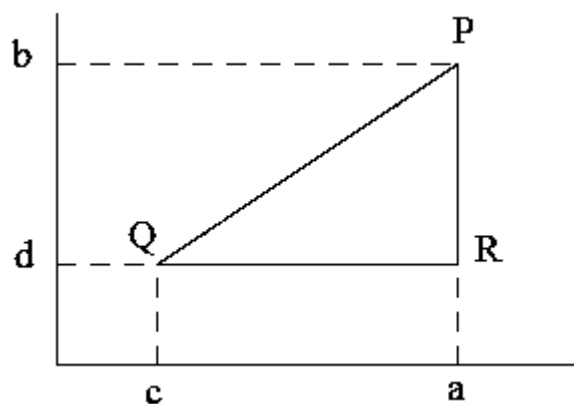


Figura 17.

Consideremos el triángulo rectángulo $P, Q, R = (a,d)$, figura 17, en donde la hipotenusa es el lado PQ , por lo tanto, por el Teorema de Pitágoras

$d(P,Q)^2 = d(R,Q)^2 + d(P,R)^2$; por lo visto en el primer párrafo de esta sección $d(R,Q)=|a-c|$ y $d(P,R)=|b-d|$, como al elevar al cuadrado desaparecen las barras de valor absoluto, $d(P,Q)^2=(a-c)^2+(b-d)^2$, de donde, el resultado se sigue sacando la raíz cuadrada positiva a ambos lados de la igualdad.

Ejemplos:

$$8. d((8,-11),(3,5))=\sqrt{(8-3)^2+(-11-5)^2}=\sqrt{25+256}=\sqrt{281}$$

$$9. d((-4,6),(7,-3))=\sqrt{(-4-7)^2+(6-3)^2}=\sqrt{121+9}=\sqrt{130}$$

Por supuesto que la distancia entre dos puntos dados es siempre la misma y no depende del sistema de coordenadas que usemos, en cualquier caso, la fórmula que hemos definido anteriormente nos da siempre la distancia correcta, mientras la base que utilicemos sea ortonormal.

Existe también el concepto de distancia de un punto a una recta:

Definición 5. Sean P_0 un punto y L una recta en el plano, entonces, la distancia del punto P_0 a la recta L está dada por la fórmula $d(P_0, L) = \min \{d(P_0, Q) | Q \in L\}$.

Proposición 3. Dados P_0 y L siempre existe $Q_0 \in L$ tal que $d(P_0, L) = d(P_0, Q_0)$

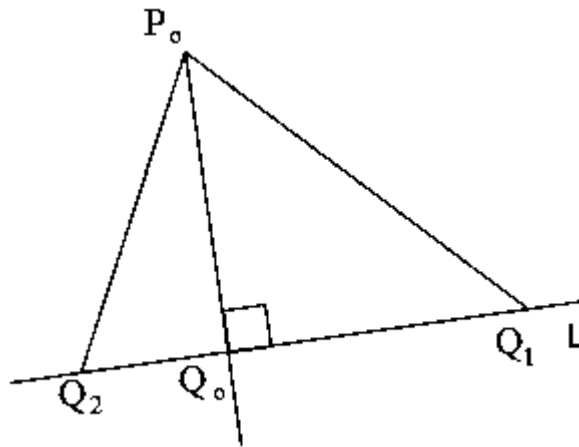


Figura 18.

Demostración: En la figura 18 vemos que si trazamos por P_0 una recta perpendicular a L y le llamamos Q_0 , al punto de intersección, entonces, para cualquier otro punto $Q \in L$, el segmento P_0Q resulta ser la hipotenusa del triángulo rectángulo P_0Q_0Q y por lo tanto $d(P_0, Q) > d(P_0, Q_0)$.

Teorema 3. Si $P_0=(x_0,y_0)$ y la ecuación general de L es $Ax+By=C$ entonces

$$d(P_0,L) = \frac{|Ax_0+By_0-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Demostración: Consideremos primero que $B \neq 0$, Observemos que entonces la pendiente de la recta L es $-\frac{A}{B}$ y por lo tanto, cualquier recta perpendicular a ella tiene pendiente $\frac{B}{A}$, de donde, la ecuación de la recta perpendicular que pasa por P_0 es $y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$. Resolviendo el sistema simultáneo de ecuaciones entre esa y la recta L obtenemos que el punto de intersección de ellas es $Q_0=\left(\frac{AC+B^2-AB y_0}{A^2+B^2}, \frac{BC+A^2 y_0-AB x_0}{A^2+B^2}\right)$

Por lo que

$$d(P_0,L) = d(P_0,Q_0) = \frac{\sqrt{A^2(Ax_0+By_0-C)^2+B^2(Ax_0+By_0-C)^2}}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|Ax_0+By_0-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Si $B=0$ entonces se trata de una recta paralela al Eje Y ($x=\frac{C}{A}$), (si también A fuera cero, no tendríamos una recta), por lo tanto, las rectas perpendiculares a ella son paralelas al Eje X, es decir, de pendiente cero, de donde, la recta que contiene al punto P tiene por ecuación $y=y_0$ y el punto de intersección es $Q_0=\left(\frac{C}{A}, y_0\right)$ de aquí

$$d(P_0,L)=d(P_0,Q_0)=\left|x_0 - \frac{C}{A}\right| = \frac{|Ax_0-C|}{|A|}.$$

Ejemplos:

10. Sea $P=(2,5)$ y $3x+7y=6$ la ecuación de la recta L, entonces

$$d(P,L)=\frac{|3(2)+7(5)-6|}{\sqrt{3^2+7^2}} = \frac{12}{\sqrt{58}}$$

11. $P=(8,0)$ y $-2x+4y=-5$, entonces

$$d(P,L)=\frac{|-2(8)+4(0)+5|}{\sqrt{(-2)^2+4^2}} = \frac{|-11|}{\sqrt{20}} = \frac{11}{2\sqrt{5}}$$

La distancia entre dos rectas paralelas se define como la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta.

12. Sean $L_1=\{(x,y)|x-3y-4=0\}$ y $L_2=\{(x,y)|2x-6y+9=0\}$. Estas dos rectas son paralelas porque sus pendientes son iguales $\left(\frac{1}{3}\right)$ pero distintas ya que L_1 corta al eje Y en el punto $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y L_2 lo hace en el punto $\left(0, \frac{3}{2}\right)$. En este caso la distancia de L_1 a L_2 es

$$d(L_1, L_2) = d\left(\left(0, -\frac{4}{3}\right), L_2\right) = \frac{|2(0) - 6\left(-\frac{4}{3}\right) + 9|}{\sqrt{2^2 + 6^2}} = \frac{17}{\sqrt{40}} = \frac{17}{2\sqrt{10}}$$

$$d\left(\left(0, \frac{3}{2}\right), L_1\right) = \frac{|0 - 3\left(\frac{3}{2}\right) - 4|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\frac{17}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{17}{2\sqrt{10}}$$

ÁREA DE UN TRIÁNGULO

Existe también algo que podríamos llamar una fórmula para encontrar el área de un triángulo si conocemos las coordenadas de sus tres vértices.

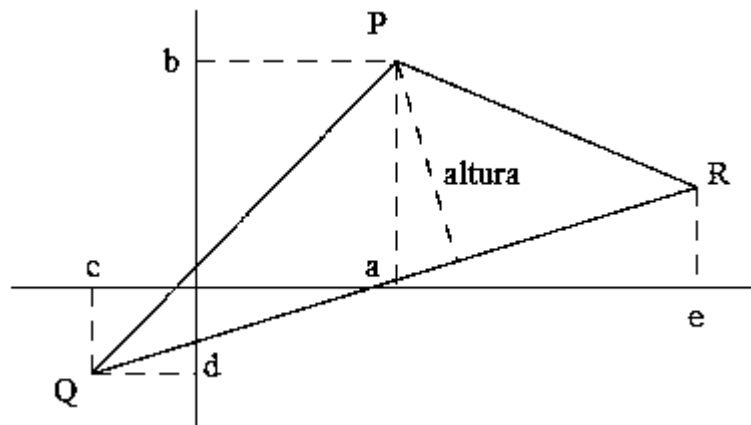


Figura 19

Supongamos que las coordenadas de los vértices de un triángulo son $P=(a,b)$, $Q=(c,d)$, $R=(e,f)$ (figura 19). Escojamos como base el lado QR , es decir, $\text{base}=d(Q,R)=\sqrt{(c-e)^2+(d-f)^2}$. Entonces, la altura en este caso es la distancia del vértice P a la recta L que determinan Q y R ; esta recta tiene por pendiente $m=\frac{f-d}{e-c}$, por lo tanto su ecuación es $y-d=m(x-c)$, $(e-c)(y-d)=(f-d)(x-c)$,

$(d-f)x+(e-c)y+cf-de=0$, ya que la ecuación general de dicha recta (L). Por lo tanto, $\text{altura}=d(P,L)=\frac{|(d-f)a+(e-c)b+cf-de|}{\sqrt{(d-f)^2+(e-c)^2}}$. De donde

$$\text{Área} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura})$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{(c-e)^2 + (d-f)^2} \right) \left(\frac{|(d-f)a + (e-c)b + cf - de|}{\sqrt{(d-f)^2 + (e-c)^2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} |a((d-f) - b(c-e) + (cf - de))|$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

Este último es un determinante de 3x3 y para fines de área tomaremos siempre su valor absoluto.

Ejemplos.

13. Si los vértices de un triángulo T son $P = (2,5)$, $Q = (1,4)$ y $R = (6,3)$, entonces

$$\text{área}(T) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(4 - 3) - 5(1 - 6) + (1)(3) - (6)(4) = 6$$

EJERCICIOS PARA EL CAPÍTULO 2

En los siguientes ejercicios estaremos suponiendo que tenemos un sistema referencial ortonormal (no importa cuál), con el cual daremos las coordenadas de los demás vectores.

- 1.- Describe la recta que pasa por los vectores $(7,3)$, $(2,-\sqrt{3})$ tanto en forma vectorial como paramétrica.
- 2.- Haz lo mismo que en el ejercicio 1, si los vectores son $(8,-8)$, $(\sqrt{2},12)$.
- 3.- Encuentra el ángulo que forman las rectas de los ejercicios 1 y 2, así como las pendientes de cada una de ellas.
- 4.- Si las ecuaciones paramétricas de una recta son $x=3-r$, $y=2+4r$, encuentra su vector guía y su ecuación punto-pendiente.
- 5.- Si la pendiente de una recta es $\left(\frac{3}{4}\right)$ y pasa por el punto de coordenadas $\left(\frac{9}{5}, 2\right)$ encuentra su ecuación vectorial y su ecuación general.
- 6.- Si la ecuación general de una recta es $3x-4y+25=0$ encuentra su vector guía y sus ecuaciones paramétricas.
- 7.- Obtén la distancia entre los puntos $\left(\frac{2}{3}, 5\right)$, $(-1,6)$ y entre $(1,-8)$, $\left(\frac{1}{10}, 7\right)$.
- 8.- Encuentra las distancias entre los puntos del ejercicio 7 y la recta del ejercicio 6.
- 9.- Calcula el área del triángulo determinado por los puntos $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, $(-2,-5)$, $(0,0)$.
- 10.- Determina los ángulos interiores del triángulo del ejercicio anterior.
11. Encuentra las ecuaciones de las rectas a) de pendiente $\sqrt{3}$ y ordenada al origen $2\ln 3$.
b) con pendiente $\frac{2}{5}$ y ordenada al origen -3 .
- 12.- Calcula el área del triángulo que forma la recta del ejercicio anterior con los ejes de coordenadas.
- 13.- Obtén la distancia del origen a las rectas del ejercicio 11.

CAPÍTULO III

VECTORES EN EL ESPACIO

En este capítulo volvemos a considerar el mismo tipo de vectores que en el Capítulo I. Su representación será también por medio de flechas, solo que ahora dichas flechas no estarán situadas en un plano sino en el espacio de tres dimensiones, es decir, ahora podemos tener tres vectores mutuamente perpendiculares.

Seguiremos hablando de plano y recta como conceptos “primitivos” (no definidos), seguiremos usando las letras u, v, w (solas, con primas o subíndices) para representar a los vectores y las letras a, b, c, r, s nos servirán para los números reales; igualmente $\|u\|$ será el número real (positivo si u no es el vector cero) que nos indica cual es la magnitud del vector u o equivalentemente, la longitud de la flecha que lo representa. De igual forma que antes, el ángulo entre dos vectores será el ángulo entre cero y 180 grados, que formen las flechas que los representan cuando a estas las hacemos coincidir en sus puntos iniciales.

La manera de sumar dos vectores es tal como se definió en el Capítulo I, es decir, la flecha que representa al vector $u+v$ es la que se obtiene de la siguiente forma: hacemos coincidir el punto inicial de v (trasladándolo sin cambiar dirección ni sentido) con el punto final de u y entonces trazamos el segmento que une al punto inicial de u (también punto inicial del vector $u+v$) con el punto final de v (que será también el punto final del vector $u+v$).

Análogamente, ru será el vector cuya magnitud es $|r|\|u\|$, de donde, si $r=0$, ru es el vector cero, pero si $r \neq 0$ tenemos que dar un dato adicional a fin de determinar al vector ru de manera única, dicho dato depende del signo de r ; si $r > 0$ el ángulo entre los vectores ru y u es cero grados y si $r < 0$, el ángulo entre ru y u es de 180 grados.

De acuerdo con lo anterior u y $-u$ tienen la misma magnitud y forman un ángulo de 180°, además, $u+(-u)=\vec{0}$.

Hay, sin embargo, una diferencia importante entre considerar sólo vectores en un plano y vectores en el espacio y es el concepto de dirección de un vector, ya que como podemos recordar, en el Capítulo I dijimos que un vector queda determinado de manera única cuando especificamos su magnitud y dirección.

Definición I. *Dados un vector u y un plano Π en el espacio que contenga al punto inicial de la flecha que representa a u , definimos al vector proyección de u sobre el plano Π a*

aquel vector cuya representación es la flecha totalmente contenida en Π , que se obtiene de la siguiente manera: a partir del punto final de u trazamos un segmento perpendicular a Π y le llamamos Q al punto de intersección del segmento con el plano, entonces, el vector proyección es la flecha cuyo punto inicial coincide con el de u y su punto final es Q (ver figura 1).

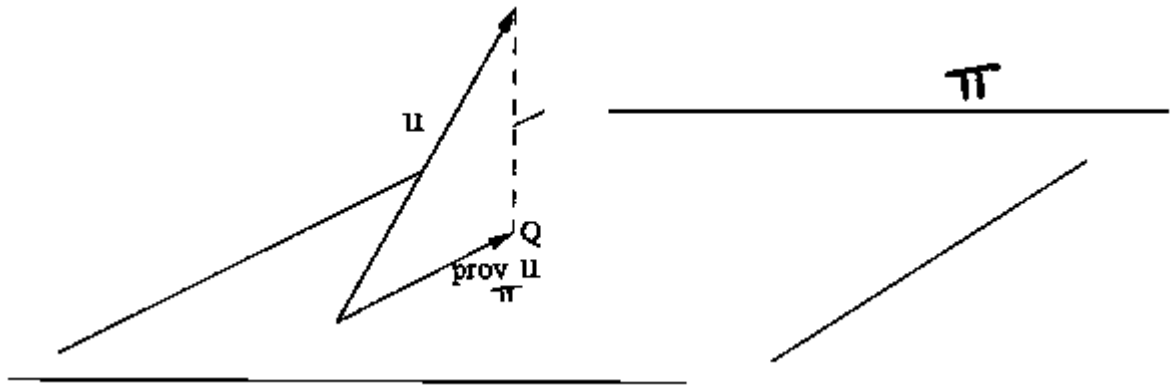


Figura 1.

Definición 2. La dirección de un vector u en el espacio es la pareja de ángulos (ρ, θ) donde ρ es el ángulo que forma la flecha que representa al vector u con el plano horizontal apoyado en su punto inicial, de aquí que la variación del ángulo ρ será $0^\circ \leq \rho \leq 90^\circ$ si el vector u está por encima de dicho plano horizontal y su variación será $-90^\circ \leq \rho \leq 0^\circ$ si u queda por debajo del plano. θ es la dirección del vector proyección de u sobre el plano (ver figura 1).

Nota 1. Observemos en la figura 2, que el vector u es la suma del vector proyección y el vector w con punto inicial igual al punto final de la proyección y punto final de w igual al de u ($u = \text{proy} + w$) y por el Teorema de Pitágoras, $\|u\|^2 = \|\text{proy}\|^2 + \|w\|^2$.

Definición 3. Dos vectores en el espacio u, v son iguales si y sólo si tienen la misma magnitud y la misma dirección, es decir, si y solo si $\|u\| = \|v\|$, $\rho_u = \rho_v$ y $\theta_u = \theta_v$.

Notemos que si dos vectores son iguales entonces están contenidos en un mismo plano, es decir, son coplanares. Por otro lado, dos vectores en un mismo plano no tienen que ser iguales.

Definición 4. Dos vectores u, v se dirán paralelos si existe un número real s , tal que, $u = sv$ ó $v = su$.

De acuerdo a ésta definición el vector cero es paralelo a cualquier otro vector.

Se pueden probar las siguientes propiedades:

Proposición 1. $u+v = v+u$; $(u+v)+w=u+(v+w)$; $r(u+v)=ru+rv$; $(r+s)u=ru+su$;
 $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$; $\|u-v\| \geq \|u\| - \|v\|$.

Demostración: Probemos $u+v=v+u$

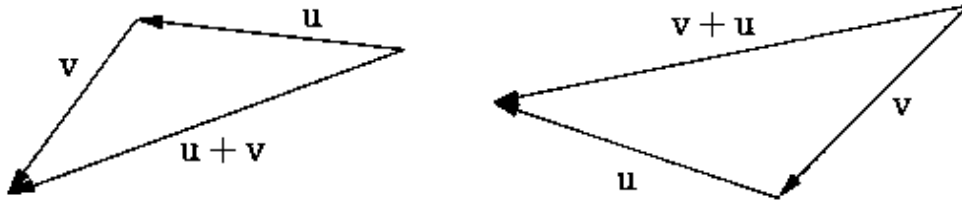


Figura 2.

Vemos en la Figura 2 que los triángulos son congruentes ya que tienen dos lados respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre ellos es el mismo, por lo tanto los terceros lados también son iguales, es decir, $\|u+v\| = \|v+u\|$, más aún, dado que los dos triángulos son coplanares, los terceros lados de dicho triángulo son paralelos y por lo tanto, tomando en cuenta que los puntos iniciales de $u+v$ y $v+u$ coinciden con el punto inicial de u y v , ellos tienen la misma dirección.

Probemos $r(u+v)=ru+rv$.

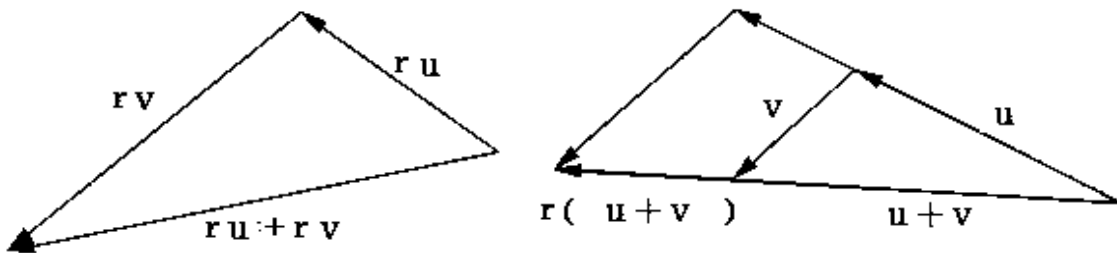


Figura 3(a) Figura 3(b)

Si $r=0$ entonces $ru+rv = 0u+0v = \vec{0}+\vec{0} = 0(u+v) = r(u+v)$.

Si $r \neq 0$, aplicamos la ley de cosenos al triángulo de la figura 3(a) y tendremos que
 $\|ru+rv\|^2 = \|ru\|^2 + \|rv\|^2 - 2\|ru\|\|rv\|\cos \angle (ru, rv) =$

$$= r^2(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \angle(ru, rv))$$
 Si $r > 0$ ó si $r < 0$ tenemos que $\angle(ru, rv) = \angle(u, v)$, entonces, extrayendo raíz cuadrada en la igualdad anterior obtenemos que

$$\|ru + rv\| = |r|\sqrt{\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \angle(u, v)}$$

$$= |r|\sqrt{\|u + v\|^2} = |r|\|u + v\| = \|r(u + v)\|.$$

Nos resta probar que los vectores $r(u+v)$ y $ru+rv$ tienen la misma dirección.

En los triángulos de la Figura 4, observamos que sus ángulos son respectivamente iguales y los lados $r(u+v)$ y $ru+rv$ tienen igual longitud, por lo tanto, los triángulos son congruentes y los lados respectivos son paralelos y coplanares, de donde, los vectores $r(u+v)$ y $ru+rv$ tienen la misma dirección.

Probemos ahora que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Aplicando nuevamente la ley de cosenos al triángulo de la figura 3(b) y recordando que el coseno de un ángulo es un número entre -1 y 1, tenemos

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos \angle(ru, rv) \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2,$$
 de donde, extrayendo raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad obtenemos lo que queríamos.

Las demostraciones no escritas aquí siguen un proceso análogo.

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

Análogamente a como se hizo en el Capítulo 1, diremos que el conjunto de puntos finales de los vectores de la forma $v+tu$, con $t \in \mathbb{R}$, $u \neq \vec{0}$ están en una línea recta. Esta recta contiene al punto final del vector v ($t=0$); así es que le llamamos P a dicho punto final, entonces, podemos decir que la recta pasa por P ó contiene a P y tiene por vector guía al vector u . De hecho, la flecha que representa al vector u y la recta $v+tu$, son paralelas, de donde, dos rectas son paralelas (perpendiculares u ortogonales) únicamente si sus vectores guía lo son.

Notemos que el conjunto de puntos finales de los vectores $u+tv$ (variando t) están en una línea recta que contiene al punto final de u y su vector guía es v . El conjunto de puntos finales de los vectores $3v+tu$ con $t \in \mathbb{R}$, es una recta que contiene al punto final del vector $3v$ con vector guía u . Finalmente $u+t3v$, están en una recta que contiene al punto final de u y tiene por vector guía al vector $3v$.

Por otro lado, dados dos vectores v, u , no paralelos, en particular ambos distintos del vector cero, el conjunto de puntos finales de los vectores de la forma $rv+su$ con $r, s \in \mathbb{R}$

están en un plano. Observemos en este caso que no solo los puntos iniciales ($r=0=s$) y finales ($r=1, s=0; r=0, s=1$) de v y u respectivamente están en dicho plano sino también están todos los puntos de las flechas que representan a cada uno de ellos, entre el inicial y final. De hecho, lo que está sucediendo es que cualquier otro vector cuya representación esté contenida en dicho plano, será una combinación lineal de los vectores v y u , en particular, rectas como las definidas en los párrafos anteriores están contenidas en este plano.

Notemos que dos rectas en el espacio pueden no intersectarse y no ser paralelas, Figura 4, sin embargo, dos planos que no se intersecten serán necesariamente paralelos; además, la intersección de dos planos es un conjunto infinito de puntos.

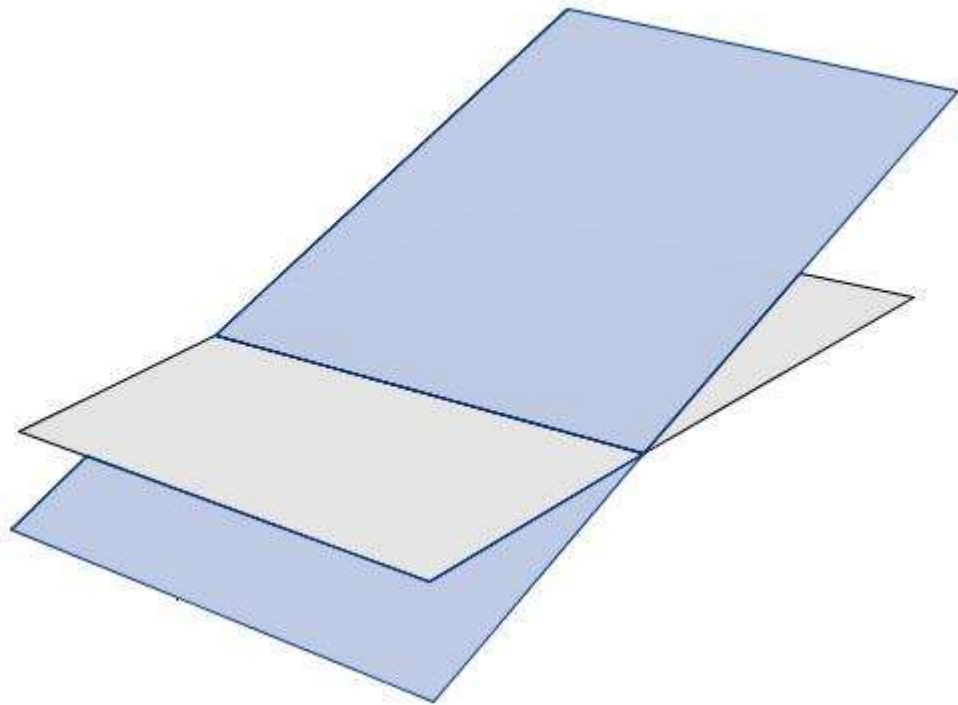


Figura 4.

Teorema1. *La intersección de dos planos distintos no paralelos es una línea recta.*

Demostración. Sean $P=\{rv+su|r,s\in\mathbb{R}\}$ y $P'=\{r'v'+s'u'|r',s'\in\mathbb{R}\}$, dos planos distintos no paralelos, sea O el punto inicial de los vectores v y u , sea O' el punto inicial de los vectores u' y v' , sin pérdida de generalidad podemos suponer que $O\notin P'$ y $O'\notin P$, de esta forma los vectores $u, v \notin P'$ y $u', v' \notin P$.

Si $q_0 \in P \cap P'$ entonces q_0 es el punto final de un vector $w_0 \in P$ con punto inicial O y por lo tanto es combinación lineal de u y v , es decir, existen números reales r_0, s_0 tales que $w_0 = r_0 v + s_0 u$, q_0 también es el punto final de un vector $w'_0 \in P'$ con punto inicial O' y por lo tanto también existen números reales r'_0, s'_0 tales que $w'_0 = r'_0 v' + s'_0 u'$. Si $q_1 \neq q_0$ es otro punto en la intersección de dichos planos, entonces, por las mismas razones de antes, q_1 es el punto final de vectores $w_1 \in P$, $w'_1 \in P'$, los cuales son, respectivamente, combinaciones lineales de v y u (con escalares r_1, s_1) y v', u' (con escalares (r'_1, s'_1)).

Sean $w = w_1 - w_0 = (r_1 - r_0)v + (s_1 - s_0)u$ y $w' = w'_1 - w'_0$

Afirmación 1. *El conjunto de puntos finales de $L = \{w_0 + tw \mid t \in \mathbb{R}\}$ coincide con el conjunto de puntos finales de $L' = \{w'_0 + t'w' \mid t' \in \mathbb{R}\}$, en otras palabras, las rectas L y L' son iguales.*

Para $t=0$, tenemos $q_0 \in L$ que es también el punto final de w'_0 ($t'=0$), de donde $q_0 \in L'$. Para $t=1$ tenemos a $q_1 \in L$ que es el punto final de los vectores w_1 y w'_1 ($t'=1$) de aquí, $q_1 \in L'$.

Lo anterior nos está indicando que las rectas L y L' tienen dos puntos en común y por lo tanto tienen que ser la misma recta, es decir, $L = L'$.

Afirmación 2. $L = P \cap P'$

Sea $q \in L$, es decir, q es el punto final de un vector de la forma $w_0 + tw = r_0 v + s_0 u + t(r_1 v + s_1 u - r_0 v - s_0 u) = ((1+t)r_0 + tr_1)v + ((1+t)s_0 + ts_1)u \in P$.

Por otro lado, q es también (Afirmación 1) el punto final de un vector de la forma $w'_0 + t'w' = ((1-t')r'_0 + t'r'_1)v' + ((1-t')s'_0 + t's'_1)u' \in P'$, de donde, $q \in P \cap P'$, es decir, $L \subset P \cap P'$.

Sea ahora $q \in P \cap P'$, donde q es el punto final de vectores de la forma $v = rv + su \in P$ y $v' = r'v' + s'u' \in P'$,

$$v = w_0 + (v - w_0) = w_0 + ((r - r_0)v + (s - s_0)u) = w_0 + \left(\frac{r - r_0}{r_1 - r_0} (r_1 - r_0)v + \frac{s - s_0}{s_1 - s_0} (s_1 - s_0)u \right) = w_0 + tw \in L$$
 lo cual implica que $P \cap P' \subset L$.

Antes de dar por terminada la demostración tenemos que referirnos a las diferencias $r_1 - r_0$ y $s_1 - s_0$ ya que aparecen como denominadores. Primero, no pueden ser ambas cero porque entonces tendríamos que $w_0 = w_1$ y por lo tanto $q_0 = q_1$ lo cual contradice la elección de dichos puntos. Lo mismo se puede decir de las diferencias $r'_1 - r'_0$ y $s'_1 - s'_0$.

Así es que si $r_1 - r_0 = 0$ entonces $s_2 = s_1 - s_0 \neq 0$ y además $w = s_2 u$. El hecho de que una de las igualdades anteriores sea cero nos asegura que $r'_2 = r'_1 - r'_0$ y $s'_2 = s'_1 - s'_0$ son ambos distintos de cero, ya que de lo contrario sucedería que, por ejemplo, si $r'_2 = 0$ entonces $w' = s'_2 u'$, de aquí, para $t' = \frac{1}{s'_2}$ existe t tal que $w'_0 + u' = w'_0 + t' w' = w_0 + t' w' = w_0 + t w = w_0 + t s_2 u$, de donde, $s_2 u - s'_2 u' = w_0 - w'_0 = u' - t s_2 u$, lo cual implica que $s_2(1+t)u = (1+s'_2)u'$ esto último diría que $u, u' \in P \cap P'$ que está en contradicción con nuestra hipótesis adicional.

Una contradicción similar se obtiene si suponemos que $s'_2 = 0$. Con estas observaciones, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $r_1 - r_0$ y $s_1 - s_0$ son ambos números distintos de cero ya que en otro caso nos remitiríamos a probar que $P \cap P' \subset L' = L$.

BASES Ó SISTEMAS REFERENCIALES

Recordemos que en el capítulo 1, cuando tratamos sólo vectores en el plano, dijimos que una base o sistema referencial es una terna ordenada $\{v, u, O\}$, donde u y v son vectores no paralelos y O un punto del plano, los cuales tienen la propiedad de que cualquier otro vector w cuyo punto inicial coincida con O se puede representar como una combinación lineal de v y u ($w = av + bu$ con a y b números reales únicos para cada w).

De acuerdo al orden que se menciona en el párrafo anterior nos dice que las bases

$\{v, u, O\}$ y $\{u, v, O\}$ no son iguales.

Definición 5. En el espacio una base o sistema referencial es un conjunto ordenado de cuatro elementos $\{u_1, u_2, u_3, O\}$, donde u_1, u_2 y u_3 son vectores del espacio no contenidos en un mismo plano los tres, dos a dos no paralelos y O un punto arbitrario en el espacio, pero fijo.

Nuevamente, el orden al que nos referimos es que las bases $\{u_1, u_2, u_3, O\}$, $\{u_2, u_1, u_3, O\}$, $\{u_3, u_1, u_2, O\}$, etc., no nos iguales.

Teorema 2. Si $\{u_1, u_2, u_3, O\}$ es una base, entonces, cualquier otro vector v con punto inicial O se puede representar de manera única como una combinación lineal de ellos, es decir, existen números reales a, b, c (únicos para cada v) tales que $v = au_1 + bu_2 + cu_3$.

Demostración. Sea v un vector cualquiera en el espacio con punto inicial O . Si el vector v es paralelo a u_1 , entonces $v = au_1 + 0u_2 + 0u_3$, si v es paralelo a u_2 entonces $v = 0u_1 + bu_2 + 0u_3$ y análogamente si es paralelo a u_3 . Sea P el plano determinado por los

vectores u_1, u_2 , es decir $P = \{ru_1 + su_2 | r, s \in \mathbb{R}\}$. Si $v \in P$ entonces $a=r, b=s$ y $c=0$, es decir, $v = r u_1 + s u_2 + 0 u_3$. Si $v \notin P$, entonces trazamos por q , punto final de v , una línea L paralela a u_3 (ver figura 5) y consideramos los siguientes vectores $v_1 \in P$ con punto inicial O y final $q_1 = L \cap P$ y $v_2 \in L$ con punto inicial q_1 y punto final q .

Podemos observar en la figura 5 que, de acuerdo a la definición de suma de vectores $v = v_1 + v_2$ y que, por construcción, v_2 es paralela al vector u_3 .

Como el vector v_1 está contenido en el plano P , $v_1 = ru_1 + su_2$ y por el paralelismo de v_2 y u_3 , $v_2 = cu_3$, por lo tanto $v = v_1 + v_2 = ru_1 + su_2 + cu_3$.

Para probar la unicidad de los números a, b, c para cada vector v , procedemos suponiendo que $a'u_1 + b'u_2 + c'u_3 = v = au_1 + bu_2 + cu_3$, de donde

$(a'-a)u_1 + (b'-b)u_2 + (c'-c)u_3 = \vec{0}$, de aquí que si alguna de las diferencias $a'-a, b'-b, c'-c$ fuera distinta de cero, entonces podríamos escribir a uno de los vectores como combinación lineal de los otros dos, lo cual diría que los tres vectores están en el mismo plano, contradiciendo la definición de base, por lo tanto $a' = a, b' = b$ y $c' = c$.

Nota 2. Habiendo probado el teorema anterior, podemos decir que por cada base que tomemos existe una biyección (función uno a uno y sobre) entre vectores y ternas ordenadas de números reales de la siguiente forma: Si $\{u_1, u_2, u_3, 0\}$ es una base, entonces a cada vector v le asociamos la terna (a, b, c) única, tal que $v = au_1 + bu_2 + cu_3$. Más aún, habiendo fijado el punto O del espacio, también tenemos una correspondencia biyectiva entre vectores y puntos del espacio de la siguiente manera: A cada vector v lo representamos con una flecha cuyo punto inicial sea O y su punto final q , entonces, la asociación es $v \rightarrow q$ y viceversa, a cada punto q del espacio le asociamos el vector v con punto inicial O y final q ($v = \overrightarrow{Oq}$). En particular el vector cero queda identificado con el punto O .

Por lo tanto, habiendo fijado una base, también tenemos una biyección entre puntos del espacio y ternas ordenadas que es: a cada punto q , le asociamos la terna (a, b, c) cuyos números sean los coeficientes con los que el vector $\overrightarrow{Oq}$ se representa como combinación lineal de la base. En particular, al punto O le asociamos la terna $(0, 0, 0)$.

Definición 6. En este contexto, dados los puntos del espacio q, q' cuyas ternas asociadas sean (a, b, c) y (a', b', c') respectivamente, entonces definimos $q + q'$ como el punto del espacio cuya terna asociada es $(a+a', b+b', c+c')$ que es también la terna asociada al vector $Oq + Oq'$; similarmente, si r es un número, entenderemos por rq al punto del espacio cuya terna asociada es (ra, rb, rc) que es la que se le asocia al vector rOq , en

otras palabras, los vectores asociados a los puntos $q+q'$ y rq son, respectivamente $Oq+Oq'$ y rOq .

Definición 7. Si $v=au_1+bu_2+cu_3$ entonces a los números a,b,c , se les llama las coordenadas del vector v con respecto a la base $\{u_1, u_2, u_3, O\}$.

Nota 3. Finalmente, gracias a estas biyecciones, estaremos abusando del lenguaje y de la notación identificando a un vector indistintamente con una terna ordenada de números o con un punto del espacio ó a un punto con un vector o con una terna y a una terna con un punto ó un vector.

Como lo comentamos en el capítulo 1, escoger bases con vectores mutuamente ortogonales y de norma uno (ortonormales), es con el fin de que las “cuentas”, sean menos complicadas y geoméricamente más manejables.

Así que, para todo lo que sigue trabajaremos con una base ortonormal ordenada fija $B=\{e_1, e_2, e_3, O\}$.

Definición 8. Sea P_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ el plano que determinan los vectores e_i, e_j , es decir $P_{ij}=\{re_i+se_j/r, s \in \mathbb{R}\}$.

Lema 1. Si $u=a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3$, entonces el vector proyección u_{ij} del vector u sobre el plano P_{ij} es $a_ie_i+a_je_j$.

Demostración. Daremos la prueba para el caso $i=1, j=2$. Las demás son similares

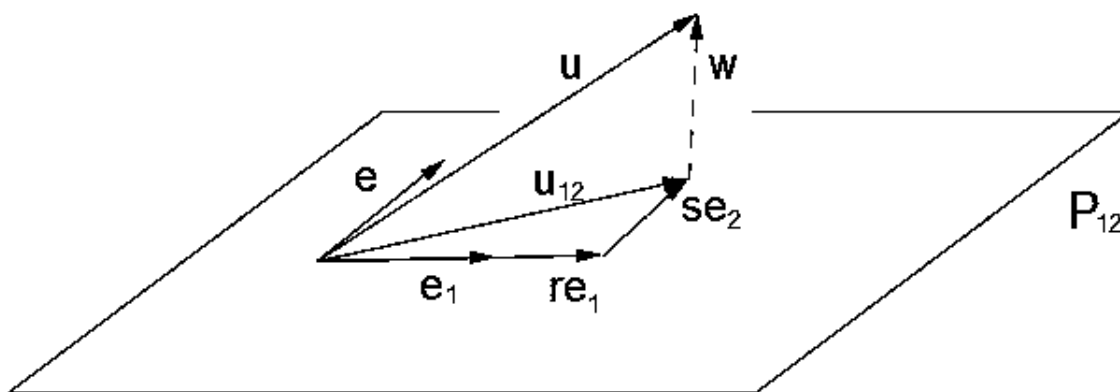


Figura 5.

Sea u_{12} el vector proyección de u sobre el plano P_{12} , existen entonces números reales r, s tales que $u_{12} = re_1 + se_2$ y $u = u_{12} + w$ (ver figura 5). Los vectores e_3 y w son paralelos ya que ambos son perpendiculares al plano P_{12} , de donde, $w = te_3$. Por lo tanto $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = u = re_1 + se_2 + te_3$ y por el teorema sobre la unicidad de la representación de un vector, tenemos que $a_1 = r$, $a_2 = s$, $a_3 = t$ y en consecuencia $u_{12} = a_1e_1 + a_2e_2$.

Proposición 2. Sean u, v vectores cuyas ternas asociadas con una base B son (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) respectivamente, es decir $u = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $v = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3$ que, de acuerdo a las identificaciones mencionadas anteriormente, podemos decir

$u = (a_1, a_2, a_3)$, $v = (b_1, b_2, b_3)$. Entonces

- i) $u \neq \vec{0}$ si y solo si alguna de las a_i no es el número cero.
- ii) $u + v = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$, $ru = (ra_1, ra_2, ra_3)$
- iii) $\|u\|^2 = u \cdot u = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
- iv) $u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- v) $\angle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Demostración iii) Fijándonos nuevamente en la figura 5 y el Lema 1 observamos que por el Teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo del plano P_{12} , tenemos $\|u_{12}\|^2 = \|a_1e_1\|^2 + \|a_2e_2\|^2 = |a_1|^2 \|e_1\|^2 + |a_2|^2 \|e_2\|^2 = a_1^2 1^2 + a_2^2 1^2 = a_1^2 + a_2^2$. Aplicando nuevamente el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que forman los vectores u , u_{12} y $w = a_3e_3$ tenemos que $\|u\|^2 = \|u_{12}\|^2 + \|w\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + |a_3|^2 \|e_3\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

iv) Por definición $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos \angle(u, v)$

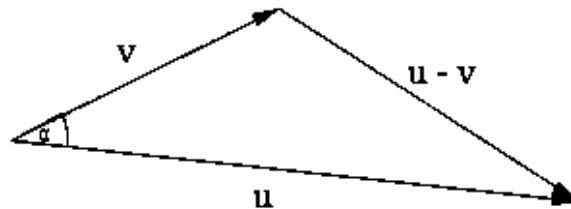


Figura 6.

Consideremos el triángulo rectángulo de la figura 6, formado por los vectores u, v y $u-v$, $\alpha = \angle(u, v)$. Por la ley de cosenos $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\alpha$, esto implica que $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 - 2u \cdot v$, desarrollando los binomios del lado izquierdo y cancelando términos iguales obtenemos que $u \cdot v = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Podemos ahora encontrar la distancia entre dos puntos Q_1 y Q_2 del espacio en términos de sus ternas asociadas, recordando que estas ternas son también las que les asocian a los vectores $u = \overrightarrow{OQ_1}$ y $v = \overrightarrow{OQ_2}$, respectivamente.

Lema 2. Sean (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) las ternas asociadas a los puntos Q_1 y Q_2 , entonces $\text{dist}(Q_1, Q_2) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$.

Demostración

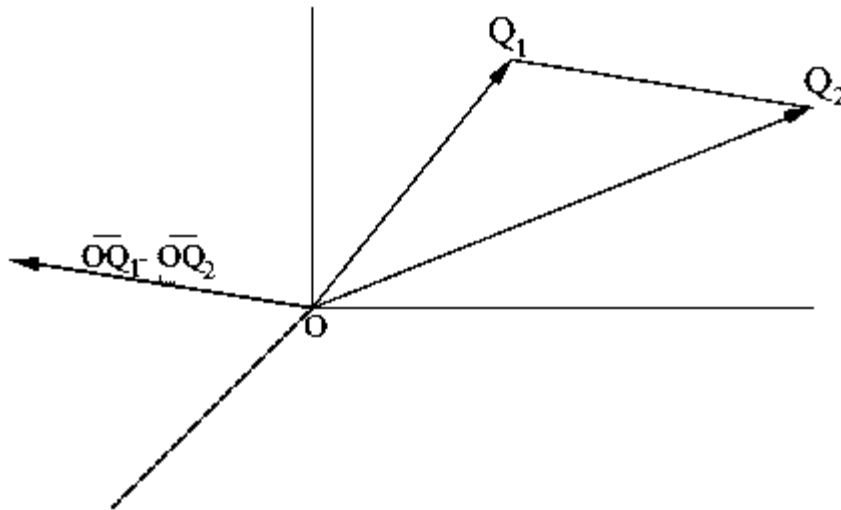


Figura 7

Notemos que en la figura 7 que la distancia entre Q_1 y Q_2 es igual a la norma del vector $\overrightarrow{OQ_1} - \overrightarrow{OQ_2} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$ ver Figura 6, y por lo tanto el resultado se sigue de esta observación.

PRODUCTO VECTORIAL

Una diferencia importante entre sólo considerar vectores en un plano y vectores en el espacio es que dados dos vectores cualesquiera en el espacio siempre existen vectores distintos del vector cero, ortogonales a ambos; en un solo plano, esto es imposible. De hecho, en el plano, habiendo obtenido uno, todos los demás son múltiplos de él, es decir, todos los vectores paralelos a uno dado, distinto del vector cero son paralelos entre sí.

Así es que procedamos a encontrar, en el espacio, un vector ortogonal a dos vectores dados.

Sean $u=\{a_1, a_2, a_3\}$, $v=\{b_1, b_2, b_3\}$ dos vectores cualesquiera.

Si el vector w va a ser ortogonal tanto a u como a v , si el ángulo que formen los vectores u y w , v y w va a ser de 90 grados, entonces, de acuerdo a la definición de producto punto, $u \cdot w = \|u\| \|w\| \cos 90^\circ = 0 = v \cdot w$ ya que $\cos 90^\circ = 0$, así es que andamos buscando un vector w cuya terna asociada (x, y, z) que son sus coordenadas con respecto a la base B , satisfaga las siguientes dos igualdades

$$u \cdot w = a_1x + a_2y + a_3z = 0$$

$$v \cdot w = b_1x + b_2y + b_3z = 0$$

que no es otra cosa que resolver un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Una terna particular que satisface dicho sistema es $x=a_2b_3-a_3b_2$, $y=a_3b_1-a_1b_3$, $z=a_1b_2-a_2b_1$. Así es que el vector w cuyas coordenadas son los números anteriores es ortogonal a los vectores u y v .

Definición 9. Se le llama *producto vectorial* de u y v , uxv , al vector cuyas coordenadas son las anteriormente descritas, es decir, $uxv = (a_2b_3-a_3b_2, a_3b_1-a_1b_3, a_1b_2-a_2b_1)$.

Nota 4. Observemos que en la definición anterior de producto vectorial el orden de los factores es importante: $vxu = (b_2a_3-b_3a_2, b_3a_1-b_1a_3, b_1a_2-b_2a_1)$, de donde podemos ver que $vxu = -(uxv)$ o equivalentemente $uxv = (-uxv)$, en cualquier caso, lo que nos dicen estas igualdades es que uxv y vxu son paralelos pero con direcciones opuestas, lo cual no impide que ambos sean ortogonales a los vectores u y v .

Por otro lado, el producto vectorial también existe cuando uno de los factores es el vector $\tilde{0} = (0,0,0)$, $\tilde{0}xu = \tilde{0} = ux\tilde{0}$. Solo que en este caso, se pierde la interpretación geométrica de ortogonalidad.

Lema 3. Si el vector w es ortogonal tanto al vector u como al vector v , entonces es paralelo al vector uxv .

Demostración. Sean (a,b,c) la terna asociada al vector w con respecto a una base fija B , es decir, $w=(a,b,c)$. El hecho de que w sea ortogonal a u y a v , lo que dice es que dicha terna es solución del sistema (*). Como el espacio de soluciones del sistema (*) tiene dimensión vectorial 1, se sigue que $w=t(uxv)$.

Ejemplos

1.- $u=(2,-1,3)$ $v=(3,-2,1)$, entonces $uxv= \{(-1)(1)-(3)(-2), (3)(3)-(2)(1), (2)(-2)-(-1)(3)\} = (5,7,-1)$.

$$u \cdot (uxv) = (2,-1,3) \cdot (5,7,-1) = (2)(5) + (-1)(7) + (3)(-1) = 0,$$

$$v \cdot (uxv) = (3,-2,1) \cdot (5,7,-1) = (3)(5) + (-2)(7) + (1)(-1) = 0.$$

Además, $vxu = -(uxv) = -(5,7,-1) = (-5,-7,1)$. ¿Es el vector $w=(2,3,4)$ ortogonal a u y a v ? NO, porque $w \neq r(uxv)$ para todo real r , es decir, porque w y uxv no son paralelos.

2.- $u=(3,4,0)$, $v=(-2,0,-5)$.

$$uxv = \{(4)(-5)-(0)(0), (0)(-2)-(3)(-5), (3)(0)-(4)(-2)\} = (-20,15,8)$$

$$vxu = -(-20,15,8) = (20,-15,-8).$$

¿Es el vector $w=(5, -\frac{15}{4}, -2)$ ortogonal a u y a v ? Si, porque $w = -\frac{1}{4}(uxv)$, es decir, los vectores w y uxv son paralelos.

3.- $u=(3,-2,7)$, $v=(9,-6,21)$. $uxv = \{(-2)(21)-(7)(-6), (7)(9)-(3)(21), (3)(-6)-(-2)(9)\} = (0,0,0) = \vec{0} = vxu$.

Proposición 3. Sean u,v,w vectores y r,s números reales.

- i) $ux(v+w) = (uxv) + (uxw)$
- ii) $ruxs v = rsuxv = uxrsv = rs(uxv)$
- iii) $(uxv)xw = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$

Demostración. Probaremos solo iii).

Sean $u=(a_1,a_2,a_3)$, $v=(b_1,b_2,b_3)$ y $w=(c_1,c_2,c_3)$.

$uxv = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$, así es que $(uxv)xw = \{(a_3b_1 - a_1b_3)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2, (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 - (a_2b_3 - a_3b_2)c_3, (a_3b_1 - a_1b_3)c_1\}$

$$(u \cdot w)v = (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)(b_1, b_2, b_3)$$

$$(v \cdot w)u = (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)(a_1, a_2, a_3)$$

Proposición 4. Sean $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ vectores. $uxv = \vec{0} \Leftrightarrow u \parallel v$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u \neq \vec{0} \neq v$.

Más aún, el caso en que dos de las coordenadas de un vector sean cero, se deja al lector.

Supongamos que $b_2 \neq 0$.

$\Rightarrow$) Si $a_2b_3 - a_3b_2 = 0$, $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$, $a_1b_2 - a_2b_3 = 0$, entonces $\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = r$, de donde, $a_2 = rb_2$ y $a_3 = rb_3$. Sustituyendo a a_3 en la segunda igualdad y despejando a a_1 , tenemos $a_1 = rb_1$ y con esto hemos probado que $u = rv$.

$\Leftarrow$) Si $v = su = (sa_1, sa_2, sa_3)$ entonces $uxv = (a_2sa_3 - a_3sa_2, a_3sa_1 - a_1sa_3, a_1sa_2 - a_2sa_1) = (0, 0, 0) = \vec{0}$.

Corolario 1. $uxu = \vec{0} = vxv$

Teorema 3. Si los vectores u, v no son paralelos, $N = uxv$ y O es un punto cualquiera del espacio, entonces $\{N, u, v, O\}$ es una base, es decir, cualquier otro vector ó punto del espacio es una combinación lineal de ellos.

Demostración. Definición 5 y Teorema 2.

Nota 5. Si q y q' son puntos del espacio, identificamos al punto qxq' como el punto del espacio cuyo vector asociado sea $OqxOq'$ ó la terna asociada a este último vector.

MÁS ACERCA DE PLANOS.

Seguimos trabajando con una base ordenada ortonormal arbitraria $\{e_1, e_2, e_3, O\}$.

Definición 10. Dados dos vectores no paralelos u, v al conjunto $P = \{ru + sv | r, s \in \mathbb{R}\}$ le llamaremos la representación vectorial del plano determinado por los vectores u, v .

De la representación anterior vemos que si $r = 0 = s$, entonces el vector cero pertenece al plano P ó equivalentemente el punto O está en P .

Como no todos los planos que consideraremos contendrán necesariamente al punto O , necesitamos también la representación vectorial del plano determinado por los vectores u y v que contenga a un punto q_0 del espacio, $P_{q_0} = \{q | q = q_0 + ru + sv \text{ con } r, s \in \mathbb{R}\}$ ó $P_{q_0} = \{q_0 + ru + sv | r, s \in \mathbb{R}\}$.

Si $q_0 = O$, entonces simplemente escribimos $P = \{q | q = ru + sv \text{ con } r, s \in \mathbb{R}\}$ ó $P = \{q | q = ru + sv \text{ con } r, s \in \mathbb{R}\}$.

Cabe aclarar que la representación vectorial de un plano no es única, sin embargo, esto lo ejemplificaremos después de los siguientes resultados.

Sean $N = u \times v$ entonces para cualquier punto q de $P = \{q = q_0 + ru + sv | r, s \in \mathbb{R}\}$, es decir, $q = q_0 + ru + sv$ tenemos $N \cdot (q - q_0) = N \cdot (ru + sv) = r(N \cdot u) + s(N \cdot v) = r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$, es decir, el vector N es ortogonal a cualquier vector de la forma $q - q_0$ cuando $q \in P_{q_0}$.

Nota 6. Aclaremos la notación que usaremos si q_1 y q_2 son puntos del espacio y u , un vector cualquiera, diremos que $q_1 - q_2$ forma un ángulo α con el vector u , refiriéndonos al ángulo que forme el vector $Oq_1 - Oq_2$ con u . En particular, diremos que $q_1 - q_2$ es ortogonal (paralelo) al vector u si $(Oq_1 - Oq_2) \cdot u = 0$ ($(Oq_1 - Oq_2) \times u = \vec{0}$).

Recordemos que las ternas asociadas a los vectores Oq_1 y Oq_2 son las mismas que las asociadas a los puntos q_1 y q_2 respectivamente. Supongamos ahora que $q_1 = (a_1, b_1, c_1)$ $q_2 = (a_2, b_2, c_2)$ entonces la terna asociada al vector $Oq_1 - Oq_2$ es $(a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ que es la misma que tiene asociada el punto $q_1 - q_2$.

Podemos decir más, tomando en cuenta que los vectores u y v no son paralelos.

Teorema 4. *Cualquier punto p del espacio tal que $q - q_0$ sea ortogonal a $N = u \times v$ pertenece al plano P_{q_0} , es decir, $q = q_0 + ru + sv$.*

Demostración. Supongamos que el vector $q - q_0$ no se puede representar como una combinación lineal de los vectores u y v , es decir, el vector $q - q_0$ no está contenido en el plano $P = \{ru + sv | r, s \in \mathbb{R}\}$ por lo tanto de acuerdo a la definición $\{q - q_0, u, v, O\}$ es una base y por el teorema cualquier otro vector es una combinación lineal de ellos, en particular para el vector N , existen números reales a, b, c tales que $\|N\| = 0$, de aquí $N = \vec{0}$ y de esto último u y v serían paralelos. Esta contradicción nos dice que $q - q_0 \in P$ y por lo tanto $q = q_0 + ru + sv$.

Corolario 2. *Si q es ortogonal a N entonces $q \in P = \{ru + sv | r, s \in \mathbb{R}\}$.*

Demostración. En este caso podemos considerar que $q_0 = O$ y el resultado se sigue del teorema anterior y del hecho de que $q = q - O = q - q_0$.

Corolario 3. El vector $N=uxv$ es ortogonal al plano $P=\{ru+sv/r,s\in\mathbb{R}\}$.

Corolario 4. Si $q_0 \notin P=\{ru+sv/r,s\in\mathbb{R}\}$ entonces los planos P y $P_{q_0}=\{q=q_0+tu+zv/t,z\in\mathbb{R}\}$ son ajenos y por lo tanto paralelos.

Demostración. Supongamos que $q\in P\cap P_{q_0}$. Entonces existen números r,s,t,z tales que $ru+sv=q=q_0+tu+zv$, de donde, $q_0=(r-t)u+(s-z)v\in P$, lo cual contradice la hipótesis.

Corolario 5. Si $q_0\in P$ entonces $P=P_{q_0}$.

Demostración. $q_0\in P \Rightarrow q_0=r_0u+s_0v$

Sean $q=ru+sv\in P$ entonces $q-q_0=(r-r_0)u+(s-s_0)v$, de aquí $N\cdot(q-q_0)=(r-r_0)(N\cdot u)+(s-s_0)(N\cdot v)=(r-r_0)0+(s-s_0)0=0$ y de acuerdo al teorema $q\in P_{q_0}$. Con esto hemos probado que $P\subset P_{q_0}$. Sea ahora $q\in P_{q_0}$, es decir, $q=q_0+tu+zv=(r_0u+s_0)+tu+zv=(r_0+t)u+(s_0+z)v\in P$, de donde $P_{q_0}\subset P$ y por lo tanto $P_{q_0}=P$.

Corolario 6. Si $P\cap P_{q_0}\neq\emptyset$ entonces $P=P_{q_0}$.

Demostración. Si $q\in P\cap P_{q_0}$, la prueba del corolario anterior nos muestra que $q_0\in P$ y el resultado se sigue del corolario 5.

Corolario 7. Sean $P_1=\{q_1+ru+sv\}$ y $P_0=\{q_0+tu+zv\}$. Si $P_1\cap P_0\neq\emptyset$ entonces $P_1=P_0$.

Demostración. Sea $q_2\in P_1\cap P_0$, entonces existen números reales r_2,s_2,t_2,z_2 tales que $q_1+r_2u+s_2v=q_2=q_0+t_2u+z_2v$, de aquí obtenemos las siguientes dos igualdades: $q_1=q_0+(t_2-r_2)u+(z_2-s_2)v\in P_0$ y $q_0=q_1+(r_2-t_2)u+(s_2-z_2)v\in P_1$. Tomemos ahora un punto q cualquiera en el plano P_1 , es decir, $q=q_1+ru+sv=(q_0+(t_2-r_2)u+(z_2-s_2)v)+ru+sv=q_0+(t_2-r_2+r)u+(z_2-s_2+s)v\in P_0$, es decir, $P_1\subset P_0$.

Por otro lado, si $q\in P_0$ entonces $q=q_0+tu+zv=q_1+(r_2-t_2)u+(s_2-z_2)v+tu+zv=q_1+(r_2-t_2+t)u+(s_2-z_2+z)v\in P_1$, es decir, $P_0\subset P_1$.

Con esto hemos probado la doble contención entre los conjuntos P_1 y P_0 y por lo tanto, ellos son iguales.

Nota 7. Observemos que en todo plano de la forma $P_0=\{q_0+ru+sv\}$ e punto q_0 está en P así como también los puntos finales de los vectores u,v .

Lema 4. Si $q_1, q_2 \in P$, entonces la recta que ellos determinan, $\{q/q=q_1+t(q_2-q_1)\}$, está contenida en P .

Demostración. Sean $q_1=q_0+r_1u+s_1v$ y $q_2=q_0+r_2u+s_2v$, entonces $q=q_1+t(q_2-q_1) = q_0+r_1u+s_1v+t(r_2-r_1)u+t(s_2-s_1)v \in P$.

Ejemplos: 4) Sean $P=\{(2,3,5)+r(-1,4,-2)+s(0,-3,1)\}$ y

$P'=\{(1,4,4)+t(-1,4,2)+z(0,-3,1)\}$. Afirmación $P=P'$.

Como $q'=(1,4,4)=(2,3,5)+(-1,4,-2)+(0,-3,1)$, $q' \in P$ y como

$q'=(1,4,4)+0(-1,4,2)+0(0,-3,1)$, $q' \in P'$, por lo tanto $P \cap P' \neq \emptyset$ y por el corolario $P=P'$.

Proposición 5. Dos planos $P_{q_0}=\{q_0+ru+sv\}$ y $P_{q_1}=\{q_1+tu'+zv'\}$ son paralelos si y solo si $N=uxv$ y $N'=u'xv'$ son paralelos.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $P_{q_0}=P_{q_1}$ entonces existen números r, s, t, z tales que $ru+sv=q_0-q_1=tu'+zv'$.

Además $N \cdot (q_0-q_1)=0 = N' \cdot (q_0-q_1)$, lo cual dice que los vectores N y N' son ortogonales al plano $\{ru+sv\}$ (también al plano $\{tu'+zv'\}$) y por lo tanto ellos son paralelos.

Si $P_{q_0} \cap P_{q_1} = \emptyset$

Si N' es perpendicular a P_1 entonces también es perpendicular a P_0 y entonces es paralelo a N .

$\Leftarrow$) Sean N y N' paralelos ($N=kN'$).

Supongamos que existe un punto $q_2 \in P_{q_0} \cap P_{q_1}$ entonces $N \cdot (q_2-q_0)=0$ y $N' \cdot (q_2-q_1)=0$, $q \in P_0 \Rightarrow N \cdot (q-q_0)=0$ de aquí $N' \cdot (q-q_1)=N' \cdot ((q-q_0)+(q_0-q_2)+(q_2-q_1)) = N' \cdot (q-q_0) + N' \cdot (q_0-q_2) + N' \cdot (q_2-q_1)=0+0+0=0$, de donde $q \in P_{q_1}$, es decir $P_{q_0} \subset P_{q_1}$. Lo que hemos probado es que si los planos P_{q_1}, P_{q_0} se intersectan, entonces son iguales, en otras palabras si no son iguales son paralelos.

ECUACIONES PARAMÉTRICAS Y GENERAL DE UN PLANO

Sean $u=(u_1, u_2, u_3)$ y $v=(v_1, v_2, v_3)$ vectores no paralelos, $q_0=(a_0, b_0, c_0)$ un punto cualquiera del espacio, $N=uxv=(a,b,c)$ y $P=\{q=(x,y,z)|q=q_0+ru+sv\}$ la ecuación vectorial del plano P . Es decir,

$P=\{q=(x,y,z)|x=a_0+ru_1+sv_1, y=b_0+ru_2+sv_2, z=c_0+ru_3+sv_3\}$. A las tres igualdades de esta representación de P se les conoce como las ecuaciones paramétricas del plano P .

Por otro lado, sabemos que $q \in P \Leftrightarrow N \cdot (q - q_0) = 0$, es decir, si y solo si $N \cdot q = N \cdot q_0$, ó en otras palabras, $q = (x, y, z) \in P$ únicamente si su terna asociada satisface la igualdad $ax + by + cz = d$, donde $d = a a_0 + b b_0 + c c_0$. De aquí que $P = \{q = (x, y, z) | ax + by + cz = d = N \cdot q_0\}$. A la igualdad que aparece en esta representación se le conoce como la ecuación general del plano P.

Ejemplos:

5. Sean $q_0 = (1, -1, 0)$, $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 2, 1)$. De aquí $N = u \times v = ((2)(1) - (2)(3), (3)(-1) - (1)(1), (1)(2) - (-1)(2)) = (-4, -4, 4)$. Por lo tanto, la ecuación general del plano determinado por los vectores u y v y que pasa por q_0 consta de los puntos $q = (x, y, z)$ que satisfacen la igualdad $N \cdot q = N \cdot q_0$, es decir, $(-4, -4, 4) \cdot (x, y, z) = (-4, -4, 4) \cdot (1, -1, 0)$ de donde, la ecuación es $-4x - 4y + 4z = 0$. Así es que puntos tales como $(0, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(2, -1, 1)$ pertenecen a este plano porque al sustituir sus coordenadas en la ecuación satisfacen la igualdad a cero; puntos tales como $(2, 3, 5)$, $(-3, 1, -4)$ no pertenecen a este plano porque sus coordenadas no satisfacen la ecuación general. Por lo cierto, las ecuaciones paramétricas de este plano son $x = 1 + r - s$, $y = -1 + 2r + 2s$, $z = 0 + 3r + s$. Se puede checar también que las coordenadas de los puntos que están en el plano satisfacen simultáneamente las tres ecuaciones paramétricas.

6. Sean $q_1 = (4, 2, -3)$, $u = (1, -3, 5)$, $v = (3, 2, 2)$, de aquí $N = u \times v = (-16, 13, 11)$ y la ecuación general de este plano es $-16x + 13y + 11z = -71 = N \cdot q_1$. Las ecuaciones paramétricas en este caso son $x = 4 + t + 3s$, $y = 2 - 3t + 2s$, $z = -3 + 5t + 2s$. Ahora $(0, 0, 0)$, $(3, -1, 2)$ no son puntos de este plano; $(5, -1, 2)$, $(7, 4, -1)$ sí lo son.

Nota 8. Cabe recordar que para definir la ecuación general de un plano no es requisito indispensable usar al vector $N = u \times v$, es suficiente con cualquier vector no cero que sea paralelo a N , es decir, si N y N' son vectores paralelos ($N' = tN$) distintos de cero ($t \neq 0$), los puntos q del espacio que satisfacen la igualdad $N \cdot q = N \cdot q_0$, es decir, tampoco la ecuación general de un plano tiene una representación única. En el ejercicio 5 podemos ver que $4x + 4y - 4z = 0$ ó $x + y - z = 0$ son representaciones equivalentes de la ecuación general del mismo plano, para las cuales estamos tomando, respectivamente, los vectores $N' = (4, 4, -4) = -N$ y $N'' = (1, 1, -1) = -\frac{1}{4}N$.

Puede ser que a veces, la información que tengamos de un plano no sea un punto de él y los vectores que lo determinan sino sepamos de tres puntos no colineales perteneciendo al plano. ¿Cómo encontrar sus ecuaciones vectoriales, paramétricas y generales?

Proposición 6. Si los puntos q_1, q_2, q_3 pertenecen al plano P y no son colineales, definimos $u = q_3 - q_1$, $v = q_2 - q_1$ y $P = \{q | q = q_1 + ru + sv\} = \{q | N \cdot (q - q_1) = 0\}$, entonces $P = P'$ (N es cualquier vector paralelo a $u \times v$ distinto de cero).

Demostración. Sea $q \in P$. La no colinealidad de los puntos q_1, q_2, q_3 implica que los vectores u y v no son paralelos y de acuerdo al lema ellos están contenidos en P . Por lo tanto, cualquier otro vector contenido en P es una combinación lineal de ellos, en particular $q - q_1 = ru + sv$, de donde, $q = q_1 + ru + sv \in P'$. Hemos probado que $P \subset P'$ y por lo tanto son iguales.

Ejemplo.

7. Sean $q_1 = (4, 2, -3)$, $q_2 = (5, -1, 2)$, $q_3 = (7, 4, -1)$. $u = q_3 - q_1 = (3, 2, 2)$, $v = q_2 - q_1 = (1, -3, 5)$, $N = u \times v = (-16, 13, 11)$. Por lo tanto, la ecuación del plano que contiene a los tres puntos dados es

$$\begin{aligned} P &= \{q = (x, y, z) | q = (4, 2, -3) + r(3, 2, 2) + s(1, -3, 5)\} = \\ &= \{q = (x, y, z) | -16x + 13y + 11z = -71\}. \end{aligned}$$

PROBLEMAS PARA EL CAPÍTULO 3.

1.- Dado el vector u en el espacio y P un plano conteniendo al punto de aplicación de u y sea w el vector de proyección del vector u sobre el plano P . Obtén la magnitud de w en términos de la magnitud de u y el ángulo que este vector forma con el plano P .

Para los siguientes ejercicios, supondremos que tenemos un sistema referencial de tres vectores ortonormales fijos, con los cuales podremos expresar a cualquier otro vector, de manera única, con una terna ordenada.

Escribe las ecuaciones paramétricas y vectoriales de las rectas que:

2.- Contiene al vector $u=(2,-3,4)$.

3.- Es perpendicular a dos de los vectores del sistema referencial por el origen.

4.- Es paralela a dos de los vectores del sistema referencial por el origen.

Encuentra las ecuaciones del plano que:

5.- Determinan las rectas de los ejercicios 2 y 3, 2 y 4 y 3 y 4, respectivamente

6.- Los vectores $u=(2,-1,7)$ y $(-3,8,9)$.

7.- Encuentra el ángulo que forma el plano del ejercicio 6 con cada uno de los planos del ejercicio 5.

Encuentra todos los vectores ortogonales a los siguientes pares de vectores.

8.- $u=(3,-2,1)$ y $v=(5,7,-1)$

9.- $u=(3,4,0)$ y $v=(5,-6,-8)$

10.- $u=(0,0,0)$ y $v=(9,7,5)$.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- “Geometría Analítica” Charles Wexler.
Montaner y Simon, S.A. Barcelona 1968
- 2.- “Analytic Geometry” Charles H. Lehmann.
John Wiley and Sons, Inc. New York 1961
- 3.- “The Geometry of Rene Descartes”
David E. Smith and Marcial L. Latham.
Dover Publications, Inc. New York 1954
- 4.- “Analytic Trigonometry with applications”
Raymond A. Barnett.
Wadsworth Publishing Company 1992
- 5.- “College Algebra”
Roland E. Larson and Robert P. Hostetler.
D.C. Heath and Company, Toronto 1989
- 6.- “Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica”
Earl W. Swokowski.
Wadsworth International 1988
- 7.- “Álgebra Lineal” (Segunda Edición)
Seymour Lipschutz.
Mc Graw Hill, 1992.