

UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
“Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”



SUPERCONDUCTIVIDAD Y ORDEN TOPOLÓGICO

T E S I S

Que para obtener el grado de:

Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas

Presenta:

José Guadalupe Torres González

Director de tesis:

Doctora Yesenia Arredondo León

Morelia, Michoacán, México; Noviembre de 2014

“Gracias a esas personas importantes en mi vida, que siempre estuvieron dispuestas a brindarme su ayuda, por sus consejos y darme la mano cuando sentía que el camino se terminaba, a ustedes con todo mi cariño y mi agradecimiento les dedico esta tesis:

A mis padres María y Leonardo

A mis hermanos Ramón y Bladimir

A mis asesores Yesenia y Oracio

A mi compañero Héctor Alonso

Índice general

Resumen	5
Abstract	7
Introducción	9
1. Estados exóticos de la materia	13
1.1. Fenomenología del estado superconductor	13
1.1.1. Descubrimiento y primeras observaciones	14
1.1.2. Teoría de London	17
1.1.3. Teoría de Ginzburg-Landau	22
1.1.4. Teoría BCS	29
1.1.5. Superconductividad de altas temperaturas críticas	43
1.2. Efecto Hall Cuántico	48
1.2.1. Efecto Hall clásico	49
1.2.2. Efecto Hall Cuántico Entero	56
1.2.3. Efecto Hall Cuántico Fraccionario	61
2. Orden topológico	65
2.1. Concepto de orden en física	65
2.2. Orden topológico	67
2.3. Definiciones matemáticas	70
3. Superconductividad y orden topológico	73
3.1. Orden local vs. orden topológico	73
3.2. Naturaleza fraccionaria en el fenómeno de superconductividad	79
3.3. Estado fundamental degenerado	81
Conclusiones	85
Bibliografía	87

Resumen

La superconductividad es un fenómeno físico que se presenta en la materia a temperaturas que no han sobrepasado los $113K$, aproximadamente. Hay dos características principales en un superconductor; la primera es que se comporta como conductor perfecto, la segunda es que se trata de un material que es un diamagneto perfecto. Esta última característica produce el efecto Meissner-Ochsenfeld. Los materiales superconductores se dividen en dos tipos: los superconductores de tipo I o convencionales y los superconductores de tipo II o de alta temperatura crítica. Se tiene más conocimiento teórico de los superconductores tipo I que de los tipo II. Estos últimos tienen estructuras complejas y comportamientos diferentes a los de tipo I.

En esta tesis realizamos un estudio del fenómeno de la superconductividad. Nos interesa saber el tipo de orden que éste presenta, para tratar de entender el fenómeno en general y buscar herramientas que puedan conectar los superconductores tipo I y tipo II. Para esto, se realizó un estudio de la teoría de transiciones de fase de Landau, la cual se aplica a la mayoría de las fases de la materia. Es una teoría que describe el orden de una fase mediante rompimiento de simetrías. Sin embargo, han aparecido estados exóticos de la materia que no pueden ser descritos mediante la teoría de transiciones de Landau. Fenómenos como el efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE por sus siglas en inglés), el cual no presenta rompimiento de simetrías cuando pasa de una fase a otra. Debido a esto, surge la necesidad de analizar este fenómeno desde otra perspectiva, a la cual se le llama de orden topológico.

El orden topológico es una noción de orden que puede asociarse a ciertos fenómenos de la materia según su topología. Es decir, si dos materiales tienen el mismo invariante topológico, entonces tienen la misma fase topológica. El FQHE tiene orden topológico y las características principales de este fenómeno son: fraccionalización algunas propiedades, degeneración del estado fundamental y la existencia de un invariante topológico.

Nuestro trabajo consiste en emparar las observaciones realizadas del fenómeno de superconductividad y relacionarlas con una teoría de orden topológico

Palabras clave: Superconductividad, efecto Hall cuántico fraccionario, orden topológico.

Abstract

Superconductivity is a physical phenomenon that occurs not beyond $113K$, approximately. There are two main characteristics of a superconductor; the first one is that it is a perfect conductor, the second it is a perfect diamagnet. This last feature produces the Meissner-Ochsenfeld effect. Superconducting materials are divided into two types: conventional superconductors, type I; and type II superconductors or high-critical temperature superconductors. More theoretical knowledge of type I superconductors is available as that for the type II. The latter group has complex structures and different behaviors to those of type I.

In this thesis, we conducted a study of the phenomenon of superconductivity. We want to investigate the type of order present in this phenomenon, to try to understand it in general, and search for tools that can connect the superconducting type I and type II. For this, we studied the Landau theory of phase transitions, which applies to most of the phases of matter. It is a theory that describes the order of a phase by breaking symmetries. However, there have appeared exotic states of matter that cannot be described by the Landau theory of transitions. Phenomena such as the fractional quantum Hall effect (FQHE), in which there are no breaking of symmetries when moving from one phase to another. Because of this, the topological order is a better mainframe to investigate the FQHE.

The topological order is a notion of order that may be associated with certain phenomena of matter according to their topology. That is, if two materials have the same topological invariant, then have the same topological phase. The FQHE has topological order and the main features of this phenomenon are: fractionalization, degeneration of the ground state and has a topological invariant.

Our job consists in relating the topological order with the phenomenon of superconductivity in order to try to gain insight into the superconducting behaviour of such different materials.

Keywords: superconductivity, fractional quantum Hall effect, topological order.

Introducción

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo principal, realizar un estudio sobre el fenómeno de la superconductividad, mediante las teorías que se han desarrollado históricamente desde su descubrimiento, es decir, desde el año 1911 por el físico Neerlandés Heike Kamerlingh Onnes hasta la actualidad. Relacionar el tipo de orden que presenta el fenómeno el efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE) con el tipo de orden en la superconductividad; para esto, se realiza un estudio de los distintos fenómenos de efecto Hall, comenzando por el más simple de estos (efecto Hall clásico u ordinario OHE) y terminando con el cuántico (este se divide en entero IQHE y fraccionario FQHE).

La superconductividad es un fenómeno físico que se presenta en algunos materiales a bajas temperaturas, el fenómeno ocurre por debajo de una temperatura crítica T_c que es propia de cada material. Existen dos tipos de materiales superconductores, los convencionales y los de alta temperatura crítica. La diferencia principal entre estos dos tipos de materiales, es que los convencionales tienen temperaturas críticas muy bajas no mayores a $23K$ y los de alta temperatura crítica como su nombre lo dice, tienen temperaturas más elevadas que los convencionales. Cabe mencionar que aún no se ha logrado obtener un material superconductor a temperatura ambiente.

En la física de la materia condensada, es muy importante identificar el tipo de orden que tienen los materiales de nuestro alrededor, porque esto permite explicar el comportamiento físico, que estos presentan cuando se intentan estudiar en diferentes circunstancias. Al identificar el tipo de orden que tiene un material, se pueden deducir algunas propiedades mecánicas; por ejemplo, resistencia, deformación, dureza, entre otros.

Una teoría que ha logrado asignar el tipo de orden que tienen los materiales en diferentes fases, ha sido la teoría de transiciones de fase de Landau; sin embargo, esta teoría no ha podido aplicarse a unos casos muy peculiares tales como el FQHE. Esta teoría se ocupa de analizar el rompimiento de simetría cuando se pasa de una fase a otra; el FQHE no presenta rompimiento de simetría en su transición de fase, por esa razón no es posible aplicar dicha teoría al FQHE. Entonces, para este tipo de fenómenos se propone un orden topológico debido a que son sensibles a la topología del espacio en que son estudiados; además, este tipo de orden presenta una fraccionización de carga, degeneración del estado base, entre otros.

Una vez que tenemos conocimiento teórico acerca de los materiales superconductores, es muy natural preguntarnos: ¿cuál es la naturaleza del ordenamiento en la superconductividad? Esta pregunta es difícil de responder, sin embargo se puede relacionar lo que ya se conoce en otros fenómenos (en este caso el fenómeno del FQHE) similares para ver si existe un patrón entre ambos, que pueda asociar la teoría del fenómeno conocido con el que se desea conocer. Esto fue lo que nos motivó a realizar el estudio del ordenamiento en la superconductividad, con lo cual nos dimos a la tarea de analizar como es el orden topológico que representa al FQHE.

En el capítulo 1 de la tesis comienza con una breve introducción al fenómeno de la superconductividad, puntualizando las propiedades principales que lo definen. El comportamiento de conductor perfecto es una de las propiedades de este fenómeno; es decir, estos materiales conducen corriente eléctrica sin que se tenga una resistencia eléctrica. Otra propiedad muy importante y que principalmente caracteriza el fenómeno, es que un superconductor se comporta como diamagneto perfecto, y con esto se refiere a que un material superconductor repele todo campo magnético que sea inducido sobre éste y dicha característica trajo consigo un efecto de levitación magnética, cuando dichos materiales se colocan sobre un campo magnético, y se conoce como *efecto Meissner-Ochsenfeld* debido los físicos Walter Meissner y Robert Ochsenfeld quienes descubrieron el efecto.

Con la finalidad de entender lo que ocurre en el fenómeno de la superconductividad, se empezaron a desarrollar teorías en las que se hace uso de la física y matemáticas hasta entonces conocidas. En el capítulo 1 se platica brevemente de cada teoría relevante que existe y que ha contribuido a la comprensión (desde el punto de vista teórico) del fenómeno. La primera teoría que empezó por dar una descripción matemática al fenómeno de la superconductividad, se conoce como teoría de London y se realizó por los hermanos F. London y H. London. Básicamente lo que se hace es aplicar la teoría electromagnética a la superconductividad, y una de las aportaciones más importantes, es la introducción de la longitud de penetración λ_L , y físicamente representa la longitud que penetra el campo magnético sobre el material superconductor.

Enseguida se habla de la teoría de Ginzburg-Landau, en donde se describe el fenómeno a partir de una transición de fase de segundo orden que desarrollo Landau. La teoría propone un parámetro de orden (función de onda ψ) el cual sirve para analizar la transición de fase del estado normal al estado superconductor. En esta teoría no se dijo explícitamente como era esa función de onda ψ , de manera que este parámetro de orden local se utiliza para analizar la transición de fase cerca de T_c . Por primera vez aparece el concepto de longitud de coherencia ξ que conceptualmente se entiende como la magnitud máxima en la cual se pueden aparear los electrones para formar cuasipartículas (más tarde conocidas como pares de Cooper) de dos electrones con momentos y espín contrarios.

La teoría que tuvo más relevancia por sus grandes aportaciones descriptivas del fenómeno de la superconductividad, es la teoría BCS, propuesta por los físicos J. Bardeen, L. Cooper R. Shrieffer (de aquí las siglas BCS) donde se dice que “la superconductividad es la física de los pares de Cooper”. Estos pares son electrones que interactúan con la red cristalina mediante los fonones; la diferencia de dos estados vibracionales en la red, donde cada estado es un tipo de vibración, es lo que forma las cuasipartículas que se conocen como fonones. La interacción electrón-fonón-electrón, para electrones que tienen momento y espín contrarios, es lo que forma un par de Cooper.

Otra aportación muy importante de esta teoría, es la proposición explícita de una función de onda para los estados de las cuasipartículas (pares de Cooper) que forman la fase superconductora. Mediante un estudio del hamiltoniano H_{BCS} , se encuentra una brecha Δ , y físicamente se entiende como la energía necesaria para romper el enlace entre dos electrones que están formando el par de Cooper. La importancia de esta teoría es que explica muy bien desde el punto de vista físico, lo que sucede en los superconductores convencionales o de baja temperatura crítica. Sin embargo, existen superconductores de alta T_c que no se pueden entender con esta teoría.

En lo que sigue del capítulo 1, se describen el efecto Hall ordinario (OHE), y el efecto Hall cuántico entero y fraccionario (IQHE y FQHE). El primero fue descubierto por Herbert Hall a finales del siglo XIX. Este consiste en aplicar una corriente eléctrica a un material conductor (lo cual genera un campo eléctrico), así mismo se induce un campo magnético perpendicular a la superficie del mismo. El resultado en dicho experimento, crea un reordenamiento de los portadores de carga, lo cual genera otro campo eléctrico conocido como campo Hall, de tal manera que la fuerza que aparece por medio de este nuevo campo eléctrico, y el potencial que define este campo Hall permite encontrar el número de portadores de carga en el material, así como encontrar una relación de la conductividad eléctrica del mismo.

El QHE es similar al OHE, con la diferencia de que se realiza en un gas bidimensional de electrones, en presencia de un campo magnético intenso y con temperaturas muy bajas. La diferencia principal es que la conductividad eléctrica esta cuantizada en términos de cantidades físicas de la mecánica cuántica, de aquí el nombre de QHE. Por último, esta el FQHE en el que la conductividad eléctrica es cuantizada en múltiplos fraccionarios.

En el capítulo 2 se explica lo que es el orden en la física de la materia condensada, mencionando que existen diferentes estados de la materia y que a cada uno de estos se les asocia diferentes tipos de orden. Se platica brevemente el comportamiento de los materiales al pasar de una fase a otra mediante la teoría de transiciones de Landau. La manera en que dicha teoría tiene sus límites para algunos fenómenos exóticos de la materia.

El FQHE es un fenómeno que requiere un nuevo tipo de orden, porque la teoría de transiciones de Landau no se puede aplicar a éste. El problema que enfrenta la teoría de Landau sobre el FQHE es que no hay rompimiento de simetrías cuando se pasa de una fase a otra en este fenómeno. El orden topológico es una teoría que intenta caracterizar las fases de un sistema mediante invariantes topológicos, fraccionalización de algunas propiedades asociadas al sistema y mediante la descripción de la degeneración del estado base. Dichas propiedades se presentan en el FQHE; es por esto que inicialmente se describen relacionadas a este fenómeno. El concepto de invariante topológico se refiere a una cantidad que se mantendrá constante ante cambios suaves del Hamiltoniano que describe algún sistema de interés. Es así que sistemas, que pudiesen parecer distintos, pueden catalogarse dentro de una misma clasificación universal, siempre y cuando estén descritos por el mismo valor del invariante topológico. En el capítulo 2 se pretende estudiar las propiedades antes mencionadas que caracterizan el FQHE, explicar como es el tipo de orden topológico, y por qué se asigna a los fenómenos que no pueden ser descritos mediante transiciones de fase de Landau. Se termina el capítulo con algunas definiciones que se usan en la topología.

En el capítulo 3 se intenta introducir la matemática necesaria para percibir las diferencias entre el orden local y el orden topológico, se plasma la necesidad de proponer un nuevo tipo de orden (no local) que pueda explicar fenómenos exóticos, como el FQHE y para nuestros intereses el fenómeno de la superconductividad. Si podemos entender profundamente lo que ocurre en la superconductividad, entonces podríamos deducir lo que pasa en los SATEC (superconductores de alta temperatura crítica). Finalmente, se describe la naturaleza fraccionaria en el fenómeno de la superconductividad y se termina con la degeneración del estado fundamental en el FQHE.

En el apartado de las conclusiones, mencionamos las aportaciones que realizamos en este proyecto, se platica sobre las propiedades que describe el fenómeno de la superconductividad en relación con el orden topológico. Se concluye que el orden topológico puede aplicarse a la superconductividad y abre las puertas a estudios de sistemas poco conocidos y que tendrían muchas aplicaciones al comprender completamente su naturaleza.

Capítulo 1

Estados exóticos de la materia

1.1. Fenomenología del estado superconductor

La superconductividad es un fenómeno físico que se presenta en algunos materiales cuando son enfriados por debajo de una temperatura crítica (T_c) propia de cada material. Se dice que un material es superconductor si para $T < T_c$ el material es un:

- Conductor perfecto, es decir, presenta cero resistencia eléctrica.
- Diamagneto perfecto, las líneas de flujo magnético no penetran el material, también conocido como *efecto Meissner-Ochsenfeld*.

Cuando el material superconductor se encuentra en su estado normal, esto es, por arriba de su temperatura crítica, existe una resistencia eléctrica $\rho \neq 0$ que provoca la disipación de energía en forma de calor cuando se le aplica una corriente eléctrica al material; sin embargo, si se enfría el material de tal manera que la temperatura se encuentre por debajo de T_c , la resistencia eléctrica abruptamente se hace cero en este punto. Se han hecho experimentos para medir la resistencia eléctrica de un superconductor, usando un lapso de tiempo necesario para que se acabe la paciencia del observador, por ejemplo, durante un año no se ha registrado pérdida alguna de energía en forma de calor [1].

El estado superconductor puede perderse si se aplica una densidad de corriente eléctrica muy grande, de tal manera que rebase un valor J_c , esto provoca que el estado superconductor se pierda y pase a su estado normal. El valor de J_c se conoce como densidad de corriente crítica y es característico de cada material.

La otra propiedad que todo material superconductor presenta es de tipo magnética, si el material se encuentra en su estado normal ($T > T_c$) y se coloca en presencia de

un campo magnético, las líneas de flujo magnético asociadas a dicho campo, penetran el material. Contrario a lo anterior, si el material se encuentra en su estado superconductor ($T < T_c$), entonces las líneas de flujo magnético son repelidas por el material. Este efecto se conoce como *efecto Meissner-Ochsenfeld*.

Así como hay una densidad de corriente eléctrica crítica J_c , existe un campo magnético crítico H_c . Si se aplica un campo magnético externo al material, de igual o mayor intensidad que H_c , entonces el estado superconductor se destruye y el material regresa al estado normal.

1.1.1. Descubrimiento y primeras observaciones

Originalmente el fenómeno de la superconductividad fue descubierto en 1911 por el físico neerlandés Heike Kamerlingh Onnes (1853-1926) en Leiden, algunos años después de que se lograra la licuefacción del helio. La fase líquida del helio se encuentra a una temperatura de $4,22K$. Usando los métodos refrigerantes con los que se logró la licuefacción del helio y haciendo uso del mismo helio líquido como refrigerante, Onnes empezó a hacer estudios en los metales a bajas temperaturas. El estudio lo hizo con mercurio, estaño, plomo, etc. y en estos metales encontró resultados bastante interesantes, distintos a los que las teorías de los metales podían predecir, estas nuevas manifestaciones en los metales a bajas temperaturas dio origen al descubrimiento del fenómeno.

Para entonces era reciente el modelo de Drude para metales, en el cual se dice que la resistividad eléctrica de los mismos a bajas temperaturas es de la forma $\rho(T) = \rho_0 + aT^2 + bT^5$, donde ρ_0 es una resistividad eléctrica residual y depende únicamente de las impurezas presentes en los metales [2]. De acuerdo al modelo de Drude la resistividad eléctrica de los metales a temperatura cero es $\rho(T = 0K) = \rho_0$, para algunos metales como el oro, cobre, plata y hierro (Ver **a**) de la Figura 1.1), los cuales sabemos que son buenos conductores, el modelo de Drude predice muy bien lo ocurrido, ya que la resistividad eléctrica como función de la temperatura es como lo describe dicho modelo; pero para otro tipo de metales como el aluminio, el mercurio y el estaño, Onnes se llevó una gran sorpresa debido a que la resistividad eléctrica desaparecía repentinamente a partir de cierto valor de la temperatura, la temperatura crítica, T_c (Ver **b**) Figura 1.1).

Si se tiene que la resistividad es nula, entonces uno se podría imaginar que no hay pérdida de energía al inducir una corriente eléctrica sobre el material superconductor. Cualquier metal conductor a temperatura ambiente disipa energía en forma de calor, cuando el conductor es utilizado para transportar corriente eléctrica. La pérdida de energía eléctrica a través de energía calorífica tiene que ver con la resistividad propia del material. El flujo de electrones no es libre debido a la resistividad, se pierde la energía eléctrica en forma de calor y, si no hay una fuente de energía constante, la corriente eléctrica inicial desaparece. La resistividad eléctrica en los metales provo-

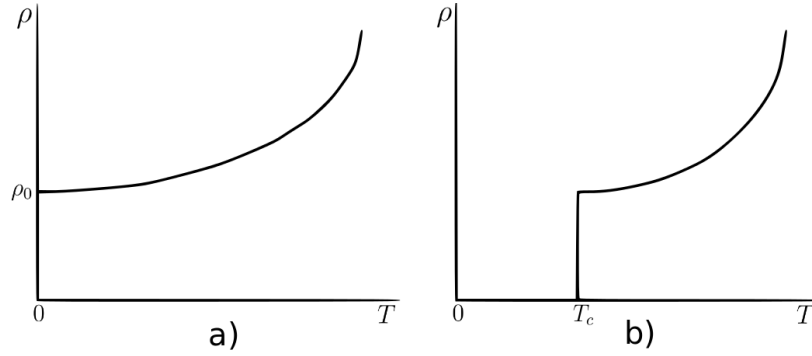


Figura 1.1: Comparación de las gráficas en los metales antes y después del descubrimiento de la superconductividad: **a)** gráfica de la resistividad eléctrica vs temperatura para los metales a bajas temperaturas; **b)** gráfica de la resistividad eléctrica vs temperatura para un metal superconductor a bajas temperaturas.

ca un calentamiento, precisamente porque el flujo de electrones originado por una diferencia de potencial aplicado, no es libre por la resistividad, se pierde la energía eléctrica en forma de calor y, si no hay una fuente de energía constante, la corriente eléctrica inicial desaparece.

Como los superconductores no tienen resistividad eléctrica, los electrones pueden fluir libremente dentro del material sin pérdida de energía por disipación de calor. La manera en que se mueven los electrones de conducción en el material, cuando son excitados por medio de una corriente eléctrica, es un factor importante para determinar si existe o no resistividad eléctrica. La entropía de un sistema mide el desorden que existe en dicho sistema, en el estado superconductor los electrones se mueven de una manera más ordenada que cuando se encuentra en su estado normal; esto lo podemos ver a partir de la diferencia de entropía en el estado normal y la entropía del estado superconductor del sistema. Para un metal en presencia de un campo magnético la entropía se define como:

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{H,P} \quad (1.1)$$

donde $G = gV$ y H son la energía libre de Gibbs y el campo magnético, respectivamente. La diferencia de energía libre por unidad de volumen entre el estado normal y el estado superconductor en presencia de un campo magnético aplicado, H , viene dada por [3],

$$g_n(T, H_c) - g_s(T, H) = \frac{1}{2}\mu_0(H_c^2 - H^2). \quad (1.2)$$

Por lo tanto teniendo en consideración que el campo aplicado, H , no depende de la temperatura, la diferencia de entropías por unidad de volumen entre el estado normal y el estado superconductor resulta,

$$S_n - S_s = -\mu_0 H_c \frac{\partial H_c}{\partial T}, \quad (1.3)$$

debido a que H_c disminuye cuando la temperatura aumenta, es decir $\frac{\partial H_c}{\partial T}$, siempre es negativa, por lo tanto,

$$S_n - S_s > 0, \quad S_n > S_s. \quad (1.4)$$

Esto indica que el estado superconductor es más ordenado que el estado normal, dado que la entropía de una material superconductor disminuye cuando se enfría por debajo de su temperatura crítica T_c (Figura 1.2). Como el estado superconductor es más ordenado, los electrones de conducción presentan menos choques, entonces se mueven con mayor facilidad, lo cual presenta menos resistividad eléctrica.

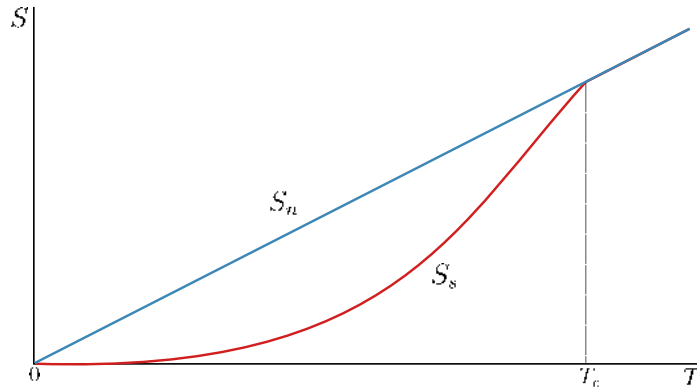


Figura 1.2: Entropía del estado normal en un metal (línea azul) y entropía del estado superconductor de un metal (línea en rojo).

Pero los materiales superconductores, no solamente tienen la propiedad de conducir corriente eléctrica indefinidamente sin pérdida de energía. Hay otra característica importante de un superconductor que tiene que ver con sus propiedades magnéticas.

En 1933 los físicos Walter Meissner (1882-1974) y Robert Ochsenfeld (1901-1993) descubrieron otra propiedad que tienen los materiales superconductores. Básicamente lo que hicieron fue colocar un material en su estado superconductor dentro de un campo magnético, y observaron que la densidad de flujo magnético no penetra el material y que el campo magnético es cero dentro del superconductor. Este descubrimiento fue llamado *efecto Meissner-Ochsenfeld*. Dicha propiedad hace la diferencia entre un conductor perfecto y un superconductor, esto se puede visualizar mejor mediante la Figura 1.4, en la cual se pretende describir 2 procesos distintos para inducir un campo magnético a las muestras, mientras se llegan al estado de un conductor perfecto y el estado de un superconductor en los metales respectivos. Y es que el estado superconductor de un material en presencia de un campo magnético es un proceso reversible, mientras que el estado de conductor perfecto de un material en presencia de un campo magnético es un proceso irreversible.

La primera parte de la Figura 1.4 representa las dos formas de inducir el campo H a un conductor perfecto. El proceso A se realiza enfriando la muestra hasta llegar al

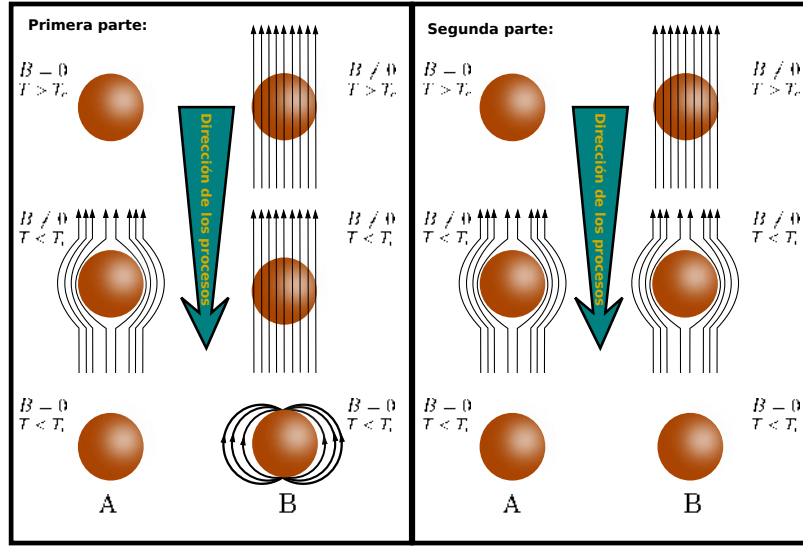


Figura 1.3: Esquema que ilustra dos partes, la primera para un conductor perfecto y la segunda para un superconductor. Cada parte describe dos procesos distintos de aplicar un campo magnético al material, mientras se hace bajar la temperatura. En el proceso B para el conductor perfecto el campo magnético queda atrapado, mientras que el mismo proceso efectuado en el superconductor no deja campo magnético atrapado en el mismo.

estado de conductor perfecto en ausencia de campo magnético, ya que está en estado de conductor perfecto se aplica H y se puede apreciar que las líneas de flujo magnético no penetran, enseguida se quita el campo H y las líneas de campo no quedan atrapadas. El proceso B se realiza primeramente aplicando el campo H a la muestra, después se hace el enfriamiento hasta llegar al estado de conductor perfecto, como podemos apreciar las líneas de flujo magnético siguen penetrando el material en todo el proceso, por último se quita el campo H y las líneas de campo quedan atrapadas.

En la segunda parte de la Figura 1.4 se trabaja con un material superconductor, en el cual se realizaron los mismos procesos A y B que se aplicaron al conductor perfecto; sin embargo, en este material nunca quedan atrapadas las líneas de flujo, lo cual es una propiedad que hace la diferencia entre un conductor perfecto y un superconductor.

Es necesario señalar que, si bien existe una clara diferencia entre lo que es un superconductor y un conductor perfecto, los únicos conductores perfectos que se han encontrado hasta ahora en la naturaleza son, precisamente, los superconductores. Aún no se descubren conductores perfectos solamente, es decir, materiales con resistencia cero y sin que presenten el *efecto Meissner-Ochsenfeld*.

1.1.2. Teoría de London

La primera teoría sobresaliente que utilizó un camino cuantitativo para describir el *efecto Meissner-Ochsenfeld* apareció en 1934 y fue desarrollada por los hermanos F. London y H. London. El modelo parte de la teoría electromagnética clásica, usando

las ecuaciones de Maxwell. En física, las ecuaciones de Maxwell están bien definidas y es difícil modificarlas ya que son útiles para describir muchos experimentos electromagnéticos, por lo tanto, para tratar de explicar el fenómeno de la superconductividad, los hermanos London únicamente hicieron algunas modificaciones a la ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, donde $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente eléctrica, σ es la conductividad eléctrica y $\mathbf{E}$ es el campo eléctrico; que describe la conducción eléctrica de los metales en estado normal. Proponen cambiar la densidad de corriente $\mathbf{J}$ por una densidad de supercorriente $\mathbf{J}_s$, que tiene la propiedad de no presentar resistividad eléctrica. Para poder introducir esta nueva densidad de corriente, se hace el uso del modelo de los dos fluidos de Gorter y Casimir [4]. Las densidades n_s , n_n son llamadas densidad de superelectrones de conducción y densidad de electrones de conducción normal respectivamente. De tal manera que n es la suma ambas densidades, esto es $n = n_s + n_n$.

De dicho modelo se toma en cuenta que para $T < T_c$, únicamente una fracción de los electrones de conducción, n_s/n , interactúan con el campo $\mathbf{E}$ generado por una corriente eléctrica inducida, de tal manera que no presentan resistividad eléctrica; mientras que la otra fracción n_n/n no tienen contribución en el estado superconductor. Si el material se encuentra a una temperatura $T > T_c$, entonces se dice que la fracción n_n/n entra en acción contribuyendo a la resistividad eléctrica y la fracción complementaria no presenta interacción con nada. Como los electrones de la densidad n_s no contribuyen a la resistividad eléctrica, entonces ellos pueden ser libremente acelerados mediante un campo eléctrico. Es decir, si $\mathbf{v}_s$ es la velocidad con la que se mueven, se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$m \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = e\mathbf{E}, \quad (1.5)$$

la cual representa la fuerza con la que es movido un electrón de masa m y carga eléctrica e cuando hay un campo eléctrico $\mathbf{E}$. Si en lugar de tener un electrón, se tiene una densidad n_s de superelectrones con una velocidad de movimiento $\mathbf{v}_s$, es necesario definir una densidad de supercorriente, $\mathbf{J}_s = n_s \mathbf{v}_s e$. Con el uso de $\mathbf{J}_s$, la ec. (1.5) y la ley de inducción de Faraday donde $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, se obtienen las ecuaciones de London [3]:

$$\frac{d(\Delta \mathbf{J}_s)}{dt} = \mathbf{E}, \quad \Delta \equiv \frac{m}{n_s e^2}, \quad (1.6)$$

$$\nabla \times (\Delta \mathbf{J}_s) = -\frac{\mathbf{B}}{c}. \quad (1.7)$$

Estas ecuaciones que relacionan la densidad de supercorriente con los campos eléctrico, $\mathbf{E}$ y magnético, $\mathbf{B}$, son de suma importancia para el desarrollo de la teoría de London. La primer ecuación describe la conductividad perfecta, donde cualquier campo eléctrico $\mathbf{E}$ acelera el conjunto de electrones n_s de acuerdo a la ley de Ohm. Las densidades de electrones de conducción normal n_n y de electrones superconductores n_s , dan origen a las densidades de corriente, $\mathbf{J}_n$ y $\mathbf{J}_s$, respectivamente, donde $\mathbf{J}_n = \sigma \mathbf{E}$. Además, la densidad de corriente total tiene que ser la suma de ambas corrientes, es

decir $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$. Combinando las ecuaciones de London con las siguientes ecuaciones de Maxwell,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad (1.9)$$

se pueden realizar los siguientes cálculos,

$$\nabla \times (\Delta(\mathbf{J} - \mathbf{J}_n)) = -\frac{\mathbf{B}}{c}, \quad (1.10)$$

donde hemos hecho uso de la ec. (1.7) y el resultado donde $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n + \mathbf{J}_s$. Luego, utilizando la segunda ecuación de de Maxwell ec. (1.8), podemos llegar a lo siguiente,

$$-c\nabla \times (\Delta \mathbf{J}) = \mathbf{B} + \sigma \Delta \dot{\mathbf{B}}, \quad (1.11)$$

si usamos el resultado $\mathbf{J}_s = \mathbf{J} - \sigma \mathbf{E}$ en la ec. (1.6) obtenemos,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta \mathbf{J}) = \mathbf{E} + \sigma \Delta \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.12)$$

Ahora calculemos el rotacional a la última de las ecuaciones de Maxwell (ec. (1.9)), llegamos a lo siguiente,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \times \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.13)$$

Enseguida calculemos la derivada a la segunda ecuación de (1.8), entonces se tiene,

$$\nabla \times \dot{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \ddot{\mathbf{B}}. \quad (1.14)$$

Substituyendo la ec. (1.10) en la ec. (1.9), llegamos al siguiente resultado,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{J} - \frac{1}{c^2} \ddot{\mathbf{B}}, \quad (1.15)$$

por consiguiente,

$$-c\nabla \times \Delta \mathbf{J} = -\left(c\Delta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{\Delta}{c} \ddot{\mathbf{B}}\right) \frac{c}{4\pi}, \quad (1.16)$$

sustituyendo este resultado en la ec. (1.7) obtenemos,

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{4\pi \mathbf{B}}{\Delta} + 4\pi \sigma \dot{\mathbf{B}} + \ddot{\mathbf{B}}. \quad (1.17)$$

De la misma manera se puede desarrollar el proceso para determinar las ecuaciones que caracterizan $\mathbf{E}$ y $\mathbf{J}$, entonces llegamos a lo siguiente,

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{4\pi \mathbf{E}}{\Delta} + 4\pi \sigma \dot{\mathbf{E}} + \ddot{\mathbf{E}}. \quad (1.18)$$

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{J}) + \frac{4\pi \mathbf{J}}{\Delta} + 4\pi \sigma \dot{\mathbf{J}} + \ddot{\mathbf{J}}. \quad (1.19)$$

Para campos cuasi-estacionarios vamos a tener,

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{4\pi \mathbf{B}}{\Delta} = 0, \quad (1.20)$$

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{4\pi \mathbf{E}}{\Delta} = 0, \quad (1.21)$$

$$c^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{J}) + \frac{4\pi \mathbf{J}}{\Delta} = 0. \quad (1.22)$$

Ahora bien, estas ecuaciones las podemos reescribir usando la relación, $4\pi\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ (no hay campo eléctrico en el interior). Con esto y con la última ecuación de Maxwell se llega a lo siguiente,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\dot{\rho} = 0, \quad (1.23)$$

además de que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Las ecuaciones anteriores se pueden resumir a un tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) usando la identidad vectorial, $\nabla \times (C \times D) = (D \cdot \nabla)C + C(\nabla \cdot D) - (C \cdot \nabla)D + D(\nabla \cdot C)$ [5], de tal manera que de la ec. (1.16) a la ec. (1.18), se simplifican al siguiente tipo de ecuación,

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{u}}{\lambda^2} = 0, \quad \lambda^2 = \frac{c^2 \Delta}{4\pi}, \quad (1.24)$$

cuya solución es del tipo

$$\mathbf{u}(x) = A e^{-\sqrt{\frac{4\pi}{\Delta c^2}} x}. \quad (1.25)$$

Encontrar la solución a la EDO que relaciona el campo magnético $\mathbf{B}$, es de utilidad ya que se obtiene una ecuación de la forma $B(x) = B_0 e^{-\frac{x}{\lambda_L}}$, con esto se puede llegar a que $\lambda_L = c \sqrt{\frac{\Delta}{4\pi}} \simeq 10^{-5} \text{cm}$. Dicha solución define la longitud de penetración de London λ_L , y es la cantidad que puede penetrar el campo magnético inducido $\mathbf{B}$ en el material, (Figura 1.4). Con estas condiciones, la solución para el campo magnético describe el *efecto Meissner-Ochsenfeld*, es decir, $B = 0$ dentro del material, bajo la condición de que el campo inducido $\mathbf{B}$ desaparece continuamente en la superficie del superconductor.

En 1947 Laurman y Shoenberg [6] encontraron experimentalmente una relación para la longitud de penetración λ respecto a la temperatura, misma que posteriormente utilizaron para hallar el número de superelectrones, lo cual fue posible con la longitud de penetración de London. El resultado experimental que obtuvieron para $\lambda(T)$ fue el siguiente:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.26)$$

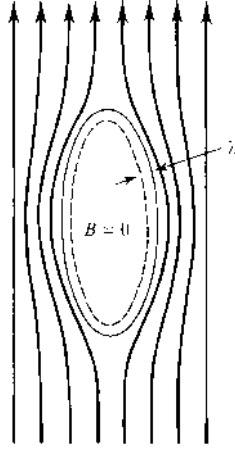


Figura 1.4: Material superconductor en el cual se muestra la longitud λ que puede penetrar el campo magnético externo.

donde λ_0 es una constante propia de cada material.

Para encontrar el número de superelectrones, es necesario usar las ecuaciones de London:

$$\nabla \times \mathbf{J}_s = -\frac{\mathbf{B}}{c\Delta}, \quad (1.27)$$

$$\mathbf{J}_s = \frac{\mathbf{E}}{\Delta}, \quad (1.28)$$

recordando que

$$\Delta = \frac{m}{n_s e^2}. \quad (1.29)$$

Por otro lado tenemos que la longitud de penetración de London es $\lambda_L = c\sqrt{\frac{\Delta}{4\pi}}$, con la cual tenemos:

$$\lambda_L = \frac{c}{e} \left(\frac{m}{4\pi n_s} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 10^{-5} cm, \quad (1.30)$$

entonces, el número de superelectrones se puede escribir a partir de la longitud de penetración:

$$n_s = \frac{mc^2}{4\pi e^2 (\lambda_L)^2}. \quad (1.31)$$

Finalmente, de la expresión para $\lambda(T)$ encontrada por Laurman y Shoenberg se obtiene que:

$$n_s = n_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^4 \right] \quad (1.32)$$

donde n_0 es una constante.

De esta manera, la teoría de London adquiere mucha importancia en el estudio del fenómeno de la superconductividad, y precisamente la importancia radica en que introduce un nuevo parámetro λ , con el cual podemos darnos una idea de lo que sucede en el superconductor cuando se le aplica un campo magnético. Sin embargo aún existen algunas limitaciones en esta teoría, ya que se sustenta puramente con física clásica cuya teoría trata a los electrones como partículas clásicas y no cuánticas. Además, no se toma en cuenta que para $H > H_c$ también se destruye el estado superconductor del material. Más tarde aparecerá una teoría revolucionaria donde se incluyen dichas consideraciones y que proporciona resultados muy importantes que valen la pena ser estudiados. Enseguida platicaremos de esta teoría.

1.1.3. Teoría de Ginzburg-Landau

En 1950 Vitaly Lazarevich Ginzburg(1916-2009) y Lev Davidovich Landau(1908-1968) proponen una teoría para tratar de describir el fenómeno de la superconductividad, utilizando algunos conceptos de la mecánica cuántica y con la intención de incluir aquellos aspectos que no se tomaron en cuenta en la teoría de London. En esta última, por ejemplo, hizo falta considerar para la longitud de penetración λ_L , que el estado superconductor desaparece para campos magnéticos $H > H_c$, esto quiere decir que la longitud de penetración de London λ_L debe tener una relación con el campo magnético crítico porque sabemos que la aplicación de un campo magnético intenso modifica la densidad n_s .

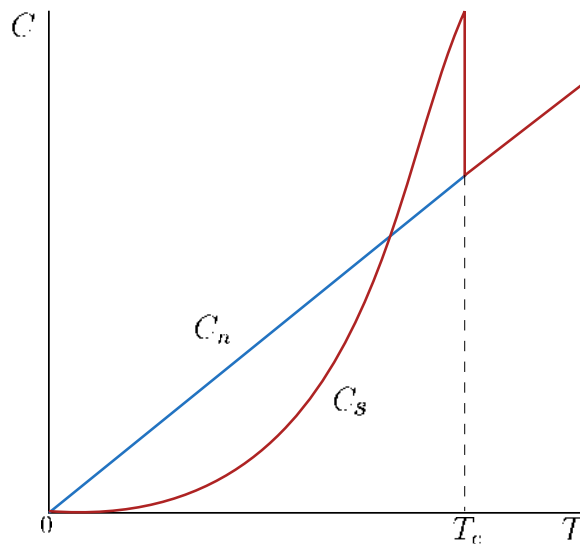


Figura 1.5: Capacidad calorífica en los metales en su estado normal y superconductor.

Originalmente, Landau había desarrollado una teoría para las transiciones de fase de segundo orden, para explicar el comportamiento de aquellos metales que pasan de

ferromagnéticos a paramagnéticos. Las transiciones de fase de segundo orden son nombradas de esta manera porque $(\partial^2 G / \partial T^2)$ es discontinua, donde G es la energía libre y T la temperatura; dicho de otra manera, el calor específico $C = T \partial S / \partial T = T \frac{\partial}{\partial T} (-\frac{\partial G}{\partial T})$ presenta un salto en (T_c) el punto de la transición de fase (Figura 1.5). Además, los materiales que experimentan este tipo de transiciones, no presentan cambios desde el punto de vista macroscópico, pero dichos cambios suceden cuando pasan de una fase a otra, es decir, son de carácter microscópico, tal es el caso de la superconductividad, que se manifiesta en materiales donde la temperatura es $T < T_c$ y se caracteriza por tener una transición de fase de segundo orden cuando el material está en ausencia de campos magnéticos externos; también no presenta un cambio macroscópico pero desde el punto de vista de la mecánica cuántica hay un cambio drástico. En la teoría de transiciones de segundo orden de Landau, se utiliza un parámetro de orden η , el cual caracteriza la transición de fase del sistema, de tal manera que es cero en el estado donde $T > T_c$ y distinto de cero para $T < T_c$ [3]. En el caso de la superconductividad dicho parámetro se acerca cada vez más a cero cuando la temperatura del sistema se encuentra alrededor de T_c .

Para la transición de fase de los materiales que pasan de ferromagnéticos a paramagnéticos, Landau utilizó como parámetro de orden la magnetización $M(r)$, precisamente $M(r)$ la cual es distinta de cero para $T < T_c$ (T_c es, en este caso, la temperatura de Curie), pero cuando se encuentra a temperaturas $T > T_c$, es cero. Básicamente Ginzburg y Landau aplicaron la teoría de transiciones de fase de segundo orden de Landau al fenómeno de la superconductividad, en donde introdujo una función de onda $\psi(r)$ como parámetro de orden con las siguientes propiedades:

$$\psi(r) = \begin{cases} \psi(r) = 0 & \text{si } T \geq T_c, \\ \psi(r) \neq 0 & \text{si } T < T_c, \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\psi(r)^* \psi(r) = |\psi(r)|^2 = n_s,$$

$\psi(r)$ es una función compleja cuya norma al cuadrado representa la densidad de electrones superconductores n_s la cual es nula en el estado normal con $T > T_c$. Esta función $\psi(r)$ se encuentra localmente en un volumen unitario con centro en el punto r . El potencial termodinámico que será desarrollado en serie de potencias para este caso es la energía libre de Gibbs G . Dicha energía debe ser real, por lo tanto como $\psi(r)$ es un número escalar complejo, se debe usar el valor real $|\psi(r)|^2$ en el desarrollo de G . Para temperaturas cercanas a T_c únicamente son necesarios los dos primeros términos de la expansión, de tal manera que si nuestro sistema se encuentra en ausencia de campos magnéticos externos, la energía libre por unidad de volumen ($g = G/V$) es la siguiente:

$$\Delta g = g_s(T) - g_n(T) = a(T)|\psi(r)|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(r)|^4 + \dots, \quad (1.34)$$

recordando que $|\psi(r)|$ es pequeño. Aquí $g_s(T)$ y $g_n(T)$ son las densidades de energía libre en los estados superconductor y estado normal, respectivamente. La ec. (1.34)

es la única función posible que es real para un complejo ψ cercano a $\psi = 0$ y que puede ser una función diferenciable de ψ y ψ^* cerca de $\psi = 0$. Los términos $a(T)$ y $b(T)$ deben adecuarse a la transición de fase de segundo orden cerca de T_c ; para esto es necesario tomar a $b(T) > 0$, ya que de otra manera la densidad de energía libre no podría tener un mínimo.

Graficando Δg respecto de ψ , se puede observar que la ec. (1.34) tiene dos posibles curvas, dependiendo del signo del parámetro $a(T)$, como se muestra en la Figura 1.6 [7]. Para el caso donde $a(T) > 0$, la densidad de energía libre tiene un mínimo en $\psi = 0$. Por otra parte, en el caso donde $a(T) < 0$, la densidad de energía libre tienen dos mínimos de acuerdo a $|\psi|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)}$. Ginzburg y Landau supusieron que para temperaturas altas, por encima de T_c , el parámetro $a(T)$ es positivo, donde la energía libre tiene un mínimo en el valor $\psi = 0$, así mismo dicha región contiene el estado normal del material. Por debajo de esta temperatura, la solución donde la energía libre es mínima cambia ya que $\psi \neq 0$. Por lo tanto, podemos observar que si la temperatura se acerca a T_c , entonces $a(T) = 0$ en T_c .

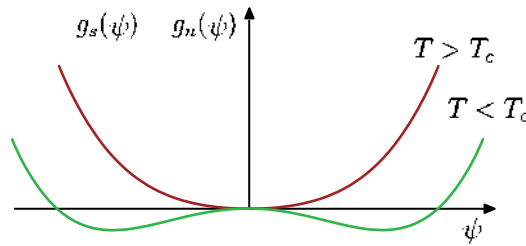


Figura 1.6: Gráficas de la energía respecto de la función ψ . Para $a(T) > 0$ hay un mínimo de la energía en $\psi = 0$, gráfica color rojo. Si $a(T) < 0$ hay dos mínimos para la energía libre, gráfica color verde.

Cerca de la temperatura crítica, T_c , y suponiendo que los parámetros $a(T)$ y $b(T)$ se comportan suavemente respecto a la temperatura, se puede hacer una expansión en series de Taylor de ambos parámetros,

$$\begin{aligned} a(T) &= \alpha \times (T - T_c) + \dots \\ b(T) &= \beta + \dots, \end{aligned} \tag{1.35}$$

donde tenemos que α y β son dos constantes fenomenológicas. Por lo tanto, la función de onda ψ , en términos de estas dos constantes es:

$$|\psi| = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(T_c - T)^{\frac{1}{2}} & \text{si } T < T_c \\ 0 & \text{si } T \geq T_c. \end{cases} \tag{1.36}$$

Si ahora sustituimos este valor de $|\psi|$ en la ec. (1.34), podemos encontrar el valor mínimo correspondiente de la energía libre. Esta energía libre mínima es la diferencia entre las energías en el estado superconductor y el estado normal del material

superconductor, respectivamente, y regularmente se le conoce como energía libre de condensación del superconductor

$$g_s(T) - g_n(T) = -\frac{\alpha^2(T - T_c)^2}{2\beta}. \quad (1.37)$$

Por otro lado, si estudiamos la termodinámica de un superconductor, se puede llegar a la ec. (1.2) para una relación de la energía libre en términos del campo magnético crítico H_c , de tal manera que dicha energía libre es la siguiente [3],

$$g_s(T) - g_n(T) = \frac{1}{2}\mu_0(H_a^2 - H_c^2). \quad (1.38)$$

Empíricamente se encontró que H_c depende de la temperatura crítica, como enseguida se muestra, (Figura 1.7), [1]

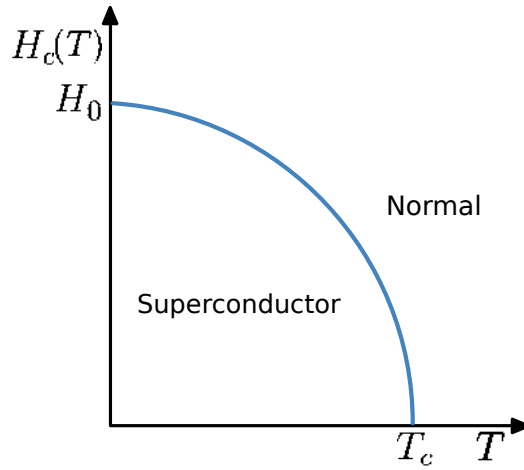


Figura 1.7: Relación experimental del campo magnético crítico respecto de la temperatura.

$$H_c = H_0 \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (1.39)$$

en este caso $H_a = 0$ porque no hay campos externos. Juntando las ecs. (1.37) y (1.38) podemos hallar una relación entre el campo magnético crítico termodinámico H_c y los parámetros $a(T)$ y $b(T)$ que caracterizan la función de onda $|\psi|^2 = -\frac{a(T)}{b(T)} = n_s$, entonces tenemos,

$$-\frac{\alpha^2(T - T_c)^2}{2\beta} = -\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2, \quad (1.40)$$

de lo cual resulta

$$H_c = \frac{\alpha}{(\mu_0\beta)^{\frac{1}{2}}}(T - T_c), \quad (1.41)$$

esto es cerca de T_c . De esta manera tanto $n_s \propto |\psi|^2 \propto (1 - \frac{T}{T_c})$ como H_c , lo cual es consistente con la densidad de electrones superconductores en la teoría de London,

puesto que $n_s \propto \lambda^{-2} \propto (1 - \frac{T}{T_c})$.

Hasta aquí sólo hemos tratado el caso más sencillo de la teoría de G-L para el fenómeno de la superconductividad, en donde no hay interacción con campos externos; sin embargo, lo más interesante que ofrece la teoría es cuando se hace el estudio con la presencia de campos externos. Supongamos ahora que aplicamos un campo magnético al superconductor, en este caso el campo magnético puede penetrar cierta longitud (longitud de London λ_L) dentro del material. Esto es lo que realmente muestra que dicha teoría estudia el fenómeno de la superconductividad, ya que de esta manera se relaciona con el *efecto Meissner* y con la longitud de penetración de London.

Ahora que se tiene la presencia de un campo magnético, tanto la función de onda ψ como el campo en el interior del material dependen de la posición en el espacio, esto implica que se deben hacer algunos ajustes para poder calcular la energía libre Δg . Lo anterior significa que se debe incluir la energía correspondiente al campo magnético aplicado y las correcciones de energía debidas a la inhomogeneidad de la función de onda ψ . Ginzburg y Landau postularon que si la variación de ψ es pequeña, entonces se pueden tomar correcciones del orden de $|\nabla\psi|^2$ a la energía libre [2].

En realidad el parámetro de orden ψ , tiene un significado físico ya que representa la función de onda de un par de Cooper (más adelante se estudiará en la teoría BCS de la superconductividad), así se les conoce a los portadores de carga en el estado superconductor y son partículas de carga $2e$. Por lo tanto, si ψ , y por consiguiente n_s , tiene una variación en el espacio, existe una energía cinética asociada con tal variación, es decir, existe un momento $\frac{\hbar}{i}\nabla$ para las partículas cargadas. Como además existe un campo magnético que puede ser descrito por un potencial vectorial $\mathbf{A}(r)$, con un momento de campo $-q\mathbf{A}$, entonces la energía cinética de acuerdo a la mecánica cuántica es,

$$\frac{1}{2m^*} |(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A})\psi|^2, \quad (1.42)$$

donde m^* y q representan la masa y la carga de los pares de Cooper, respectivamente. Con estas sustituciones, la densidad de energía libre total de G-L desarrollada anteriormente para el superconductor toma la siguiente forma,

$$g_s(T) = g_n(T) + a(T)|\psi(r)|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(r)|^4 + \frac{1}{2m^*} |(\frac{\hbar}{i}\nabla - q\mathbf{A})\psi|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2. \quad (1.43)$$

En la ec. (1.43) se agregaron los términos correspondientes a la energía cinética de los portadores en el estado superconductor, la energía debida al campo magnético y el resto es la contribución del caso de ausencia de campos externos. Ahora bien, para obtener la energía libre total, ésta se debe integrar sobre todo el volumen del sistema. Separando los dos términos de la energía total, el que depende del campo magnético y el otro con ausencia de campo, respectivamente son:

$$G_s(T) = G_n(T) + \int \left(a(T)|\psi(r)|^2 + \frac{1}{2}b(T)|\psi(r)|^4 \right) dV + \int \left(\frac{1}{2m^*} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{1}{2}\mu_0 H^2 \right) dV. \quad (1.44)$$

La condición para que el estado de mínima energía libre ocurra, se encuentra realizando la diferenciación funcional respecto de ψ o ψ^* a la función G_s e imponiendo que sea cero. Dicha diferenciación puede hacerse también respecto del potencial $\mathbf{A}$, estos cálculos permiten darnos una idea de cómo es el comportamiento de la función de onda y del potencial $\mathbf{A}$ para un material superconductor. El resultado de hacer la variación de G_s respecto de ψ^* es de la forma,

$$\delta G_s(T) = \int \left(a(T)\psi(r) + \frac{1}{2}b(T)|\psi(r)|^2\psi(r) + \frac{1}{2m^*} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \cdot \left(-\frac{\hbar}{i} \nabla - q\mathbf{A} \right) \psi \right) \delta\psi^* dV = 0, \quad (1.45)$$

donde se esta proponiendo que la energía libre sea cero. Para que esta integral sea cero, lo que esta dentro de los paréntesis tiene que ser igual a cero, bajo esta condición llegamos al siguiente resultado,

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left(\nabla - \frac{qi}{\hbar} \mathbf{A} \right)^2 \psi + \left(a(T) + \frac{1}{2}b(T)|\psi(r)|^2 \right) \psi(r) = 0. \quad (1.46)$$

Esta es la ecuación de Ginzburg-Landau, es parecida a la ecuación de Schrödinger para ψ con la diferencia de que ésta es una ecuación no lineal. Si en la ec. (1.46) consideramos que $\mathbf{A} = 0$ y que el término $b|\psi|^2$ puede despreciarse cuando se compara con a , se tiene que la ecuación de G-L en una dimensión es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\psi}{dx^2} = a\psi. \quad (1.47)$$

Esta es una ecuación diferencial cuya solución es del tipo $e^{\frac{ix}{\xi}}$, donde ξ esta definida de la siguiente manera,

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m^*a}}. \quad (1.48)$$

Obsérvese que ξ tiene dimensiones de longitud. Este concepto se conoce como longitud de coherencia de G-L, se asocia al tamaño del par de Cooper (se platicara más adelante de esta propiedad), representa la distancia más corta sobre la cual la superconductividad se puede establecer en un material y suele tener una magnitud del orden de $1000\text{\AA}$ para los superconductores convencionales [3]. Es un parámetro físico importante para caracterizar los materiales superconductores. Además de que el radio adimensional que se define como $\kappa = \frac{\lambda_L}{\xi}$, donde λ_L es la longitud de penetración de London, hace la diferencia entre los materiales superconductores de tipo **I**

($\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$) con los de tipo **II** ($\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$).

Existen dos tipos de materiales, los superconductores tipo **I** o suaves y los superconductores tipo **II** o duros. Hasta este momento sólo hemos platicado un poco de los superconductores tipo **I**, en los que sólo hay un campo magnético crítico H_c y el estado superconductor desaparece cuando se aplica un campo mayor a H_c .

En 1957, por primera vez, el científico soviético Abrikosov publicó un estudio teórico en el que señalaba que podía haber otra clase de superconductores con propiedades diferentes a los estudiados hasta entonces. Describía a estos materiales como superconductores que tienen dos campos magnéticos críticos diferentes, H_{c1} y H_{c2} , con $H_{c1} < H_{c2}$. Dichos materiales si existen y son nombrados superconductores tipo **II**.

Pero aún hay otro aspecto importante en la teoría de G-L. Recordemos que también podemos hacer la variación de la energía libre respecto al potencial vectorial $\mathbf{A}$, haciendo esto se llega a un concepto importante de la mecánica cuántica,

$$\delta G_s = \int \left[\left(\frac{-i\hbar q}{2m^*} \nabla |\psi|^2 + \frac{q^2}{m^*} \mathbf{A} |\psi|^2 \right) \cdot \delta \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} H \delta H \right] dV = 0 \quad (1.49)$$

$$\Rightarrow \int \left[\left(\frac{-i\hbar q}{2m^*} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{q^2}{m^*} \mathbf{A} |\psi|^2 \right) \cdot \delta \mathbf{A} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) \right] dV = 0. \quad (1.50)$$

utilizando la siguiente identidad vectorial: $a \cdot \nabla \times b = b \cdot \nabla \times a - \nabla(a \times b)$, con $a = \nabla \times \mathbf{A}$ y $b = \delta \mathbf{A}$ obtenemos que

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \delta \mathbf{A}) = \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}), \quad (1.51)$$

por lo tanto:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \left[\frac{-i\hbar q}{2m^*} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{q^2}{m^*} \mathbf{A} |\psi|^2 \right] \quad (1.52)$$

que es una de las ecuaciones de Maxwell (ley de Ampère):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.53)$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \frac{-i\hbar q}{2m^*} (\psi \nabla \psi^* - \psi^* \nabla \psi) + \frac{q^2}{m^*} \mathbf{A} |\psi|^2. \quad (1.54)$$

En mecánica cuántica la ec. (1.54) es la densidad de corriente para las partículas cuya función de onda es ψ , carga eléctrica q y masa m^* , que se encuentran en presencia de un campo magnético definido mediante un potencial vectorial, $H = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{A}$.

1.1.4. Teoría BCS

Las teorías de London y de G-L, que ofrecen una descripción propia al fenómeno de la superconductividad, fueron de vital importancia para que se originara en 1957 una teoría que dio un sustento firme al fenómeno de la superconductividad de bajas temperaturas. Es justamente en ese año cuando J. Bardeen, L. Cooper y R. Schrieffer (de aquí las siglas BCS) publicaron su teoría de la superconductividad y tuvo un reconocimiento muy grande porque explica correctamente las observaciones fenomenológicas, predice muy bien lo que ocurre con los superconductores metálicos de tipo **I**, la fase de condensación de los átomos de He^3 .

Otra predicción muy importante es la existencia de una brecha de energía en el nivel de Fermi. Tanto en los aislantes como en los semiconductores, la banda prohibida se conoce como la brecha energética, que es justamente una brecha que separa la banda de conducción de la banda de valencia. En los materiales superconductores la brecha tienen un significado diferente, en este caso se refiere a la energía necesaria para destruir los pares de Cooper. Esta brecha de energía fue descubierta experimentalmente y dicho resultado se dio a conocer a la vez que la teoría BCS fue publicada.

La teoría BCS es la unión de un conjunto de ideas propuestas por los autores que integran el nombre de la teoría. Entre las ideas principales se encuentra la interacción electrón-fonón, los pares de Cooper y la propuesta de una función de onda asociada a los pares de Cooper. Es importante estudiar cada una de estas ideas para poder entender la teoría BCS, de tal manera que empezaremos por dar una explicación de cada una.

Primero veamos que son los pares de Cooper. Estos son dos electrones u hoyos firmemente ligados que tienen momento y espín opuestos, respectivamente. Si se colocan dos electrones encima del nivel de Fermi puede darse una atracción entre los mismos, formando lo que se conoce como par de Cooper. Más adelante se dará una explicación un poco más detallada de la manera en que, L. Cooper abordó el problema de un potencial atractivo entre dos electrones, mejor conocido como el problema de Cooper. Veamos cómo es la interacción electrón-fonón de un material superconductor y cómo esta interacción puede hacer que se de la atracción entre dos electrones.

La teoría de bandas ha servido para explicar muchas diferencias entre los metales, aislantes y los semiconductores, sin embargo esta teoría se sustenta con hipótesis donde no hay interacción directa electrón-electrón y electrón-ión, sino que se usa al electrón como partícula independiente que interactúa con un potencial efectivo. Dicho potencial contiene cualquier interacción que pueda haber en el sistema. Sin embargo, se puede tomar en cuenta la interacción electrón-electrón mediada por un fonón y, bajo algunas circunstancias, se puede dar la atracción entre dos electrones.

Para estudiar los metales es muy útil verlos como un conjunto de iones y electrones, en estado sólido se acostumbra a usar la red de Bravais porque se pueden

trabajar los iones de manera más fácil cuando hay un orden simétrico. Un metal es una red donde los iones pueden vibrar como osciladores, estas vibraciones se conocen como estados vibracionales justamente porque tienen energía y momento asociados. Los estados vibracionales pueden formar fonones, los fonones son cuasipartículas que se forman por la diferencia entre dos estados vibracionales, digamos que un fonón es una cuantización de las vibraciones de la red.

La primer persona en introducir un Hamiltoniano que considera la posibilidad de una atracción entre electrones fue Fröhlich [8] y es de la siguiente forma,

$$H_F = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k + \sum_q \hbar \omega_q a_q^\dagger a_q + \sum_{k,k',q} V_{kk'} (a_{-q}^\dagger + a_q) c_k^\dagger c_{k'}, \quad (1.55)$$

donde $c_k^\dagger$ y c_k son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, de un electrón con vector de onda k . Los operadores $a_q^\dagger$ y a_q son los operadores de creación y aniquilación, respectivamente, para un fonón con vector de onda q ; finalmente $V_{kk'}$ son los elementos de la matriz de la interacción electrón-fonón. Los dos primeros términos corresponden al Hamiltoniano de un sistema de electrones y fonones que no interactúan, el tercer término corresponde a la interacción electrón-fonón, es decir, $H_F = H_0 + H_{e-f}$.

El término H_{e-f} , es el que bajo ciertas consideraciones puede proporcionar una interacción atractiva entre dos electrones. La primer persona que investigó sobre este tipo de problema fue Leon Cooper [3], quien básicamente demostró que la atracción entre dos electrones se da cuando estos dos se encuentran en lados opuestos sobre la superficie de un mar de Fermi, con momentos y espín opuestos, pero que la energía de ambos debe estar dentro de un pequeño intervalo de energía sobre la superficie de Fermi, de tal manera que el siguiente potencial lo expresa,

$$V_{kk'} = \sum_{k,k',q} |M_q|^2 \frac{\hbar \omega_q}{(\epsilon_k - \epsilon_{k-q})^2 - (\hbar \omega_q)^2}, \quad (1.56)$$

donde M_q son los elementos de la matriz de acoplamiento electrón-fonón. Para que se de la interacción atractiva se debe cumplir,

$$|\epsilon_k - \epsilon_{k-q}| < \hbar \omega_q, \quad (1.57)$$

lo que permite que pares de electrones formen estados ligados con menor energía que la correspondiente a dos electrones libres. Es una interacción atractiva para frecuencias del fonón ω , donde $\omega < \omega_D$ y es repulsiva si $\omega > \omega_D$, aquí ω_D es la frecuencia de Debye que normalmente se asigna a la energía del fonón. Pero solo nos interesa el primer caso porque eso permite que se formen los pares de Cooper. La teoría BCS aproxima el potencial de la siguiente forma,

$$V_{kk'} = \begin{cases} -|V|, & \text{si } \omega < \omega_D \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.58)$$

Los pares de Cooper están formados por electrones y espines opuestos tal y como se mencionó anteriormente. La forma en que se crean es debido a que un electrón con momento $\hbar k_1$, pierde momento $\hbar q$ cuando interacciona con la red y por conservación del momento el otro electrón recibe dicha pérdida, $\hbar k_2 + \hbar q$, (Figura 1.8), eso implica que si sumamos los momentos iniciales o los momentos finales, $\hbar k_1$. El resultado de dicha suma es $\hbar K$ y se conoce como el momento del centro de masas de los electrones, cuando no hay corriente neta $\hbar K = 0$ lo que quiere decir que $\hbar k_1 = -\hbar k_2$, dicho en otras palabras un electrón tiene k y el otro $-k$.

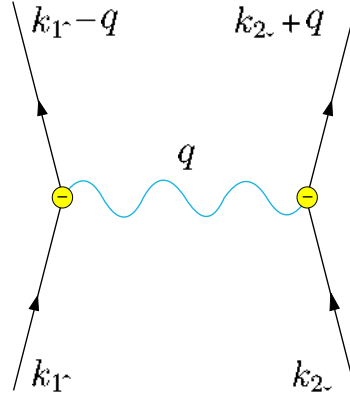


Figura 1.8: Diagrama de Feynman que representa la interacción electrón-fonón-electrón, el momento que pierde el electrón cuyo momento es k_1 , lo adquiere otro electrón con momento k_2 que interactúa con el mismo fonón.

En la teoría BCS se dice que "la superconductividad es la física de los pares de Cooper". Justamente los pares de Cooper son el sustento de la teoría BCS. En ella se empieza con el estudio del Hamiltoniano de la ec. (1.55), la intención es encontrar la energía de los pares de Cooper y verificar si es menor a la energía de los electrones separados, y si es de esa manera, entonces tendríamos que el estado superconductor (donde se forman los pares de Cooper) es un estado fundamental. De manera concreta el Hamiltoniano BCS es,

$$H_{BCS} = \sum_k \epsilon_k (c_{k\uparrow}^\dagger c_{k\uparrow} + c_{-k\downarrow}^\dagger c_{-k\downarrow}) + \sum_{k,k'} V_{kk'} c_{k'\uparrow}^\dagger c_{-k'\downarrow} c_{-k\downarrow}^\dagger c_{k'\uparrow}, \quad (1.59)$$

las flechas $\uparrow, \downarrow$ indican espín hacia arriba o espín hacia abajo, respectivamente. Es un Hamiltoniano exclusivamente para los pares de Cooper, el potencial $V_{kk'}$ incluye toda interacción entre iones y electrones.

Existen muchas formas de encontrar la energía del hamiltoniano BCS, sin embargo hay un camino un poco más elegante que consiste en diagonalizar el Hamiltoniano BCS por medio de una transformación canónica (es decir, que no cambia los valores propios del Hamiltoniano). Para esto vamos a usar la transformación de Valatin-Bogoliubov [3]. La transformación consiste en cambiar los operadores c_k 's por unos operadores que les llamaremos γ_k 's, definidos por:

$$\gamma_k = u_k c_k - v_k c_{-k}^+ \quad (1.60)$$

$$\gamma_{-k} = u_k c_{-k} + v_k c_k^+ \quad (1.61)$$

y los conjugados correspondientes son:

$$\gamma_k^+ = u_k c_k^+ - v_k c_{-k} \quad (1.62)$$

$$\gamma_{-k}^+ = u_k c_{-k}^+ + v_k c_k, \quad (1.63)$$

donde vemos que u_k y v_k son funciones reales simétricas respecto de $k \rightarrow -k$. Para que se cumpla que la nueva transformación canónica sea unitaria, debe cumplirse que,

$$u_k^2 + v_k^2 = 1. \quad (1.64)$$

Los operadores de ascenso y descenso se aplican a electrones que, de acuerdo a su espín son fermiones, entonces deben satisfacer las relaciones de conmutación ordinarias para los operadores de Fermi; así mismo los operadores que acabamos de definir deben cumplir las mismas relaciones de conmutación que son las siguientes,

$$\{\gamma_k, \gamma_{k'}\} = \{\gamma_k, \gamma_{-k'}\} = \{\gamma_k^+, \gamma_{-k'}^+\} = 0, \quad (1.65)$$

$$\{\gamma_k^+, \gamma_{k'}\} = \{\gamma_{-k}^+, \gamma_{-k'}\} = \delta_{kk'}. \quad (1.66)$$

Enseguida usaremos la propiedades de u_k y v_k para encontrar las relaciones de los operadores c_k 's en términos de los operadores nuevos. Si multiplicamos la ec. (1.60) por u_k y la ec. (1.63) por v_k , obtenemos lo siguiente,

$$u_k \gamma_k = u_k^2 c_k - u_k v_k c_{-k}^+ \quad \text{y} \quad v_k \gamma_{-k}^+ = u_k v_k c_{-k}^+ + v_k^2 c_k. \quad (1.67)$$

Sumando estos dos resultados llegamos a lo siguiente:

$$c_k = u_k \gamma_k + v_k \gamma_{-k}^+, \quad (1.68)$$

análogamente se obtienen los demás operadores:

$$c_k^+ = v_k \gamma_{-k} + u_k \gamma_k^+, \quad (1.69)$$

$$c_{-k} = u_k \gamma_{-k} - v_k \gamma_k^+, \quad (1.70)$$

$$c_{-k}^+ = u_k \gamma_{-k}^+ - v_k \gamma_k. \quad (1.71)$$

El primer término del Hamiltoniano BCS corresponde a la energía cinética H_c y el segundo corresponde a la energía potencial H_p . Entonces haciendo la transformación de los operadores c_k 's en términos de los operadores γ_k 's, en cada término por separado, se llega a lo siguiente:

$$H_c = \sum_k \epsilon_k [u_k^2 \gamma_k^+ \gamma_k + u_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_{-k} \gamma_k) + v_k^2 \gamma_k \gamma_k^+ + u_k^2 \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k} - u_k v_k (\gamma_{-k}^+ \gamma_k^+ + \gamma_k \gamma_{-k})]. \quad (1.72)$$

Esta ecuación aún se puede simplificar usando las reglas de conmutación para las γ_k 's, también se puede definir una variable nueva que cumpla el papel de los operadores de ascenso y descenso, es decir,

$$m_k = \gamma_k^+ \gamma_k \quad \text{y} \quad m_{-k} = \gamma_{-k}^+ \gamma_{-k}; \quad (1.73)$$

de las reglas de conmutación para fermiones, tenemos:

$$\gamma_{-k} \gamma_k = -\gamma_k \gamma_{-k} \quad \text{y} \quad \gamma_{-k}^+ \gamma_k^+ = -\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+. \quad (1.74)$$

Con las expresiones anteriores, llegamos finalmente al Hamiltoniano de energía cinética

$$H_c = \sum_k \epsilon_k [2v_k^2 + (u_k^2 - v_k^2)(m_k + m_{-k}) + 2u_k v_k (\gamma_k^+ \gamma_{-k}^+ + \gamma_{-k} \gamma_k)]. \quad (1.75)$$

Siguiendo este mismo procedimiento, podemos expresar el Hamiltoniano que corresponde a la parte del potencial en términos de los operadores γ_k 's,

$$H_p = \sum_{k,k'} V_{kk'} [u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (1 - m_k - m_{-k}) + u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (u_k^2 - v_k^2) (\gamma_{-k} \gamma_k + \gamma_k^+ \gamma_{-k}^+) + \text{términos de 4}^{\text{to}} \text{ orden}]. \quad (1.76)$$

Así como se ven de grandes las ec. (1.75) y (1.76), podría pensarse que en vez de simplificar el problema se está complicando más, lo cierto es que sí se simplifica porque al unir las dos ecuaciones el Hamiltoniano BCS puede ser escrito de una forma más simple,

$$H_{BCS} = H_c + H_p = E_0 + H_0 + H_1 + H_2, \quad (1.77)$$

donde se tienen que E_0 es un término constante que no depende de las γ_k 's, el segundo término H_0 es un operador diagonal porque sus términos son constantes o dependen solamente de m , H_1 no es diagonal y H_2 tiene términos de cuarto orden respecto de γ .

De la manera en que escribimos el Hamiltoniano BCS en la ec. (1.77), los primeros tres términos tienen la siguiente forma. Primero,

$$E_0 = \sum_k 2\epsilon_k v_k^2 - \sum_{k,k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k, \quad (1.78)$$

como se dijo antes es un término constante independiente de los operadores de Fermi y corresponde a la energía del estado fundamental. El segundo término,

$$\begin{aligned}
H_0 = & \sum_k \epsilon_k (u_k^2 - v_k^2) (m_k + m_{-k}) \\
& + \sum_{k,k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k (1 - m_{k'} - m_{-k'}) (m_k + m_{-k}) \\
& + \sum_{k,k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k (m_{k'} + m_{-k'})
\end{aligned} \tag{1.79}$$

es el Hamiltoniano diagonal. El siguiente término es,

$$\begin{aligned}
H_1 = & \sum_k [2\epsilon_k u_k v_k - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - m_{k'} - m_{-k'}) \\
& \times (u_k^2 - v_k^2)] (\gamma_{-k} \gamma_k + \gamma_k^+ \gamma_{-k}^+).
\end{aligned} \tag{1.80}$$

El último término H_2 , no contribuye con mucho a la energía en el estado fundamental ($T = 0K$), esto se puede probar realizando el cálculo. El término que complica las cosas es H_1 , pero podemos seleccionar las funciones reales u_k y v_k de tal manera que dicho término se anule. Para esto basta con imponer la siguiente condición,

$$2\epsilon_k u_k v_k - (u_k^2 - v_k^2) \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} = 0. \tag{1.81}$$

Es una condición que al mismo tiempo nos da como resultado la mínima energía del estado fundamental, $\frac{\partial E_0}{\partial u_k} = 0$, haciendo uso de la ec. (1.64). Se puede observar que las funciones u_k y v_k no son independientes. Una forma de definir las es la siguiente:

$$u_k = \sqrt{\frac{1}{2} - x_k} \quad \text{y} \quad v_k = \sqrt{\frac{1}{2} + x_k}. \tag{1.82}$$

Una cantidad muy importante que se puede calcular es la energía de condensación ε_c , esto se puede hacer con las energías del estado superconductor (Hamiltoniano BCS) y estado normal. Hacer este cálculo es importante porque si la energía de condensación es negativa quiere decir que el estado superconductor tiene menor energía que el estado normal. Con eso se podría concluir que la superconductividad es un estado fundamental. Para realizar dicho cálculo es necesario utilizar la ec. (1.78) y la energía del estado normal, ε_n que como sabemos es la energía de un sistema de electrones libres. Tenemos entonces que

$$\varepsilon_c = \varepsilon_s - \varepsilon_n, \tag{1.83}$$

donde ε_s , que es la energía del estado superconductor, se puede calcular con el operador Hamiltoniano BCS usando una función de onda $|\psi_0\rangle$ en el estado fundamental, sin embargo podemos reducir aún más el Hamiltoniano poniendo la condición de que $m_k = m_{-k} = 0$; esto por supuesto tiene justificación, lo que pasa es que los operadores m_k y m_{-k} son los contadores de los **bogolones**. Un bogolón es una cuasi-partícula

capaz de excitar los electrones para crear pares de Cooper, es por tal razón que en el estado fundamental $m_k = m_{-k} = 0$, es decir, no hay excitaciones. Dicho lo anterior,

$$\begin{aligned}\varepsilon_s &= \langle \psi_0 | H_{BCS} | \psi_0 \rangle = \langle \psi_0 | E_0 | \psi_0 \rangle \\ &= \sum_k 2\epsilon_k v_k^2 - \sum_{k,k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} u_k v_k.\end{aligned}\quad (1.84)$$

Con la ayuda de las expresiones para u_k y v_k de la ec. (1.82) obtenemos:

$$\varepsilon_s = \sum_k \epsilon_k (1 + 2x_k) - \sum_{k,k'} V_{kk'} \left[\left(\frac{1}{4} - x_{k'}^2 \right) \left(\frac{1}{4} - x_k^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.85)$$

Juntando los términos que dependen de k en una sola sumatoria en la expresión anterior, se tiene,

$$\varepsilon_s = \sum_k \left[\epsilon_k (1 + 2x_k) - \left(\frac{1}{4} - x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta_k \right] \quad (1.86)$$

donde

$$\Delta_k = \sum_{k'} V_{kk'} \left(\frac{1}{4} - x_{k'}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.87)$$

A Δ_k de la ecuación anterior se le conoce como la brecha, sirve para determinar algunas características del comportamiento termodinámico en los materiales superconductores. El valor de Δ_k depende del espectro de las energías ϵ_k de los estados de una sola partícula (electrones sin interacción), calculados con respecto al nivel de Fermi, y de las funciones $V_{kk'}$ determinadas por la fuerza de interacción atractiva entre los electrones. Con la ayuda de la ec. (1.81) se puede calcular el valor de x_k :

$$x_k = \pm \frac{\epsilon_k}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_k^2)^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.88)$$

Sustituyendo este valor en la ec. (1.87), se obtiene,

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{\sqrt{\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2}}. \quad (1.89)$$

Aquí se aprecia mejor la dependencia del espectro con las energías ϵ_k . Tomando en cuenta algunas consideraciones como usar el potencial de la ec. (1.58) e integrando, para encontrar un valor de Δ bajo una sola dirección, se puede llegar a lo siguiente,

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad (1.90)$$

donde $N(0)$ es la densidad de estados al nivel de Fermi para una sola dirección de espín. Más adelante observaremos que se trata de un estado de menor energía que en el estado normal donde $\Delta_0 = 0$.

La energía en el estado normal es la que conocemos para un conjunto de electrones libres,

$$\varepsilon_n = \sum_{k < k_F} 2\epsilon_k, \quad (1.91)$$

se toma a k menor o igual al radio de la esfera de Fermi, es decir, al vector de Fermi, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \sum_k \left[\epsilon_k(1 + 2x_k) - \left(\frac{1}{4} - x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_k \right] - \sum_{k < k_F} 2\epsilon_k \\ &= \sum_{k < k_F} \epsilon_k(2x_k - 1) + \sum_{k > k_F} \epsilon_k(2x_k + 1) - \sum_k \left(\frac{1}{4} - x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_k. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Para obtener la integral de ε_c , es necesario usar el hecho de que la energía ϵ_k por debajo del nivel de Fermi es negativa. Haciendo uso de la hipótesis BCS para el potencial, donde la brecha ya no depende de los k 's, se puede hacer la sustitución $\Delta_k \rightarrow \Delta_0$. Con esto,

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= \sum_{k < k_F} \epsilon_k(2x_k - 1) + \sum_{k > k_F} \epsilon_k(2x_k + 1) - \sum_k \left(\frac{1}{4} - x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \Delta_k \\ &= \sum_{k < k_F} |\epsilon_k| \left[1 - \frac{2|\epsilon_k|}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right] + \sum_{k < k_F} \epsilon_k \left[1 - \frac{2\epsilon_k}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \\ &\quad - \sum_k \left[\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_k^2}{4(\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \Delta_0, \end{aligned} \quad (1.93)$$

para lo cual se ha usado el resultado,

$$x_k = -\frac{\epsilon_k}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1.94)$$

siendo para cualquier k . Agrupando para una sola k e integrado se obtiene lo siguiente,

$$\varepsilon_c = N(0) \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \left[|\epsilon_k| - \frac{2\epsilon_k^2 + \Delta_0^2}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)} \right] d\epsilon_k. \quad (1.95)$$

Tomando en cuenta que la función anterior es par,

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= 2N(0) \int_0^{\hbar\omega_D} \left[|\epsilon_k| - \frac{2\epsilon_k^2 + \Delta_0^2}{2(\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)} \right] d\epsilon_k \\ &= N(0) [(\hbar\omega_D)^2 - \hbar\omega_D \{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta_0^2\}^{\frac{1}{2}}]. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Si ahora se usa el hecho de que

$$\Delta_0^2 = \left(\frac{\hbar\omega_D}{\sinh\left(\frac{1}{N(0)V}\right)} \right)^2, \quad (1.97)$$

para simplificar el término $(\hbar\omega_D)^2 + \Delta_0^2$,

$$\begin{aligned} (\hbar\omega_D)^2 + \Delta_0^2 &= (\hbar\omega_D)^2 + \frac{(\hbar\omega_D)^2}{\sinh^2\left(\frac{1}{N(0)V}\right)} \\ &= (\hbar\omega_D)^2 \left[1 + \operatorname{csch}^2\left(\frac{1}{N(0)V}\right) \right] \\ &= (\hbar\omega_D)^2 \left[\coth^2\left(\frac{1}{N(0)V}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Esto simplifica un poco más la ec. (1.96), quedando de la siguiente forma,

$$\varepsilon_c = N(0)(\hbar\omega_D)^2 \left[1 - \coth\left(\frac{1}{N(0)V}\right) \right]. \quad (1.99)$$

Para el caso de acoplamiento débil ($N(0) \ll V$), se puede hacer la siguiente aproximación:

$$1 - \coth\left(\frac{1}{N(0)V}\right) \approx -2e^{-\frac{2}{N(0)V}}, \quad (1.100)$$

así la energía de condensación queda como:

$$\varepsilon_c \simeq -2(\hbar\omega_D)^2 N(0) e^{-\frac{2}{N(0)V}} = -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2. \quad (1.101)$$

Se puede ver que la energía de condensación es negativa, lo cual quiere decir que la energía del estado superconductor es menor que la del estado normal, como ya se había mencionado antes. Con esto se concluye que el estado superconductor es el estado fundamental. Es un resultado que permite encontrar el campo crítico en función de la brecha. Anteriormente se hizo mención que la diferencia entre la energía del estado superconductor y el estado normal. Con cálculos puramente termodinámicos es $-\frac{1}{2}\mu_0 H_c$ (ec. (1.38)), con esto se llega a lo siguiente,

$$\begin{aligned} \varepsilon_c &= -\frac{1}{2} N(0) \Delta_0^2 = -\frac{1}{2} \mu_0 H_c \\ \Rightarrow H_c &= \Delta_0 \sqrt{\frac{N(0)}{\mu_0}}, \end{aligned} \quad (1.102)$$

es una relación del campo crítico termodinámico en función de un parámetro puramente de la superconductividad, la brecha.

Ahora, si sabemos que el estado superconductor es un estado fundamental ec. (1.101), entonces es lógico buscar una interpretación para los estados, es decir, la función de onda del estado fundamental. Es una función de onda difícil de encontrar, precisamente porque tienen que ser eigenfunción del operador Hamiltoniano BCS, sin embargo lo que se hace es encontrar la función mediante un método variacional; para esto, se propone de la manera más burda una función de onda ψ_N , definida mediante el producto de un conjunto de funciones de onda ψ , tal como se muestra enseguida,

$$\psi_N(r_1, r_2, \dots, r_N) = \hat{A}\psi(r_1, r_2)\psi(r_3, r_4)\dots\psi(r_{N-1}, r_N), \quad (1.103)$$

donde $\hat{A}$ es un operador que genera todas las permutaciones de los subíndices, es la manera de antisimetrizar la función de onda total y $\psi(r_i, r_{i+1})$ es la función de onda de un par con impulso neto cero. De manera que esta expresión en el lenguaje de segunda cuantización es [8]:

$$|\psi\rangle = \sum_k d_k c_{k\uparrow}^+ c_{-k\downarrow}^+ |0\rangle = \sum_k d_k b_k^+ |0\rangle, \quad (1.104)$$

luego,

$$|\psi_N\rangle = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_{\frac{N}{2}}} \prod_{i=1}^{\frac{N}{2}} d_{k_i} b_{k_i}^+ |0\rangle. \quad (1.105)$$

Aquí $b_k = c_k c_{-k}$ y $b_k^+ = c_k^+ c_{-k}^+$, es decir crean y destruyen pares, $|0\rangle$ es el estado fundamental o los estados ocupados del mar de Fermi, las d_{k_i} 's son las que permiten calcular la energía mínima para los eigenestados. Lo que se hace es calcular $\langle\psi_N|H_{BCS}|\psi_N\rangle$ y a este resultado se le calcula la primera derivada respecto de d_k , lo cual permite encontrar los d_{k_i} 's que minimizan el Hamiltoniano. Sin embargo existe un problema con la ec. (1.104), porque si el número de partículas N es impar nos quedaría un electrón desapareado, pero como nos vamos a interesar por el límite termodinámico en el que $N \sim 10^{23}$, el efecto del electrón desacoplado en la energía será despreciable.

Para encontrar la expresión de la energía respecto de las d_{k_i} 's, es mejor usar el ensemble gran canónico del estado superconductor, porque de esa manera se facilita el cálculo. La función de onda gran canónica se genera superponiendo estados $|\psi_N\rangle$ con todos los valores posibles de N . Llamaremos a esta función $|\Psi_0\rangle$. Entonces $|\Psi_0\rangle$ va a estar dada por:

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= c \prod_k (1 + d_k b_k^+) |0\rangle \\ &= c \left[|0\rangle + \sum_k d_k b_k^+ |0\rangle + \sum_k d_k d_{k'} b_k^+ b_{k'}^+ |0\rangle \dots \right], \end{aligned} \quad (1.106)$$

donde c es una constante de normalización. Se puede simplificar esta expresión en la forma:

$$|\Psi_0\rangle = \sum_N \lambda_N |\psi_N\rangle. \quad (1.107)$$

Aquí se imponen las condiciones de normalización, $\sum_N |\lambda_N|^2 = 1$ y $\langle \psi_N | \psi_N \rangle = 1$, donde λ_N es un número complejo. Para operar con el estado Ψ_0 es conveniente escribirlo en la forma:

$$|\Psi_0\rangle = \prod_k (u_k + v_k b_k^+) |0\rangle, \quad (1.108)$$

con la condición de normalización $u_k^2 + v_k^2 = 1$. Esta es la función de onda propuesta inicialmente por Barden, Cooper y Schrieffer (BCS). Entonces con la función de onda BCS podemos calcular, por ejemplo, la probabilidad de que el estado de par $(k, -k)$ este ocupado, esto es $\langle \Psi_0 | c_k^+ c_k | \Psi_0 \rangle = |v_k|^2$. Esto sucede porque el operador $c_k^+ c_k$ cuenta cuántas partículas existen en el estado k . Si se aplica este mismo operador directamente al estado fundamental, sobre la esfera de Fermi definida mediante $|0\rangle$, el resultado sería 0 o 1 dependiendo si se encuentra ocupado o no. Pero en este caso, como se aplicó a la función BCS, el resultado es el que se obtuvo arriba.

La probabilidad de que dos pares k y k' estén ocupados es

$$\langle \Psi_0 | c_k^+ c_k c_{k'}^+ c_{k'} | \Psi_0 \rangle = |v_k|^2 |v_{k'}|^2. \quad (1.109)$$

La función de onda del estado superconductor $|\Psi_0\rangle$, como ya se dijo antes es una eigenfunción del Hamiltoniano BCS diagonalizado, con $m_{k'} = m_k = 0$ para todo k , es decir, está definida como el estado vacío de las partículas descritas por los operadores γ . Por lo tanto,

$$\gamma_k |\Psi_0\rangle = \gamma_{-k} |\Psi_0\rangle = 0, \quad (1.110)$$

lo cual se puede demostrar recordando como se definen los operadores γ y utilizando las propiedades de las c_k 's cuando operan con $|0\rangle$.

Otra propiedad de los operadores γ definidos en la transformación de Bogoliubov-Valatin, es que cuando operan en la función de onda BCS $|\Psi_0\rangle$ del estado fundamental generan estados excitados. Eso se puede ver por medio del siguiente cálculo,

$$\begin{aligned} \gamma_k^+ |\Psi_0\rangle &= (u_k c_k^+ - v_k c_{-k}) \prod_l (u_l + v_l c_l^+ c_{-l}^+) |0\rangle \\ &= (u_k^2 c_k^+ + u_k v_k - u_k v_k c_k^+ c_k^+ c_{-k}^+ - u_k v_k c_{-k} - v_k^2 c_{-k} c_k^+ c_{-k}^+) \\ &\quad \times \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_l^+ c_{-l}^+) |0\rangle \\ &= c_k^+ \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_l^+ c_{-l}^+) |0\rangle \equiv |\Psi_{k\uparrow}\rangle, \end{aligned} \quad (1.111)$$

de la misma manera se puede obtener

$$\gamma_{-k}^+ |\Psi_0\rangle = c_{-k}^+ \prod_{l \neq k} (u_l + v_l c_l^+ c_{-l}^+) |0\rangle \equiv |\Psi_{-k\downarrow}\rangle. \quad (1.112)$$

De esta forma demostramos que los operadores γ_k^+ y γ_{-k}^+ al actuar sobre $|\Psi_0\rangle$, crean bogolones de momento k y espín $\uparrow$, los cuales son excitaciones o cuasi-partículas, es decir partículas con su entorno modificado, capaces de formar pares de Cooper. Se llaman bogolones (por Bogoliubov) y sus operadores de número son m_k y m_{-k} . Por eso en el estado fundamental m_k y m_{-k} son cero, es decir, no hay excitaciones. La parte diagonal del Hamiltoniano cuando hay excitaciones es,

$$H_{BCS} = \epsilon_s + \sum_k (m_k + m_{-k}) \left[(u_k^2 - v_k^2) \epsilon_k - 2u_k v_k \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} \right], \quad (1.113)$$

donde el término entre corchetes se puede escribir de la siguiente manera:

$$(u_k^2 - v_k^2) \epsilon_k - 2u_k v_k \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} = (\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.114)$$

Entonces

$$\begin{aligned} H_{BCS} &= \epsilon_s + \sum_k (m_k + m_{-k}) (\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \epsilon_s + \sum_k E_k (m_k + m_{-k}), \end{aligned} \quad (1.115)$$

donde

$$E_k = (\epsilon_k^2 + \Delta_0^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.116)$$

es la energía de las excitaciones. La eigenfunción correspondiente a E_k es el estado de un bogolón (ec.(1.111) o ec.(1.112)).

Hasta esta parte hemos estado trabajando a $T = 0$, donde todos nuestros cálculos fueron en el estado fundamental, pero algo interesante es ver que cambios suceden cuando se toma una temperatura finita. En primer lugar tendríamos excitaciones ($m_k = m_{-k} \neq 0$) lo cual implica que el Hamiltoniano BCS no sea tan simple como en el estado fundamental. En un estado excitado de fermiones con temperatura finita, T , el promedio de ocupación de cada estado esta determinado por la distribución de Fermi-Dirac:

$$\bar{m}_k = \bar{m}_{-k} = f(E_k) = \left[\exp\left(\frac{E_k}{k_b T}\right) + 1 \right]^{-1}. \quad (1.117)$$

Esto puede ayudar a simplificar el corchete de H_1 (ec. (1.80)) de tal manera que tenga la siguiente forma:

$$2\epsilon_k u_k v_k - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - 2f(E_{k'})). \quad (1.118)$$

La ecuación anterior es similar a la ec. (1.81), con la única diferencia del factor $(1 - 2f(E_{k'}))$ entonces podemos minimizarla realizando un procedimiento similar al que se hizo anteriormente. Definiendo la brecha con temperatura finita $\Delta(T)$ de la siguiente manera:

$$\Delta_k(T) = \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'} (1 - 2f(E_{k'})), \quad (1.119)$$

obtenemos,

$$2\epsilon_k \left(\frac{1}{4} - x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2x_k \Delta_k(T) = 0, \quad (1.120)$$

donde se esta utilizando los valores de u_k y v_k definidos en la ec. (1.82). La ecuación de arriba tiene una solución:

$$x_k = -\frac{\epsilon_k}{2[\epsilon_k^2 + \Delta_k^2(T)]}. \quad (1.121)$$

Por lo tanto, la ecuación para $\Delta_k(T)$, estará dada por:

$$\begin{aligned} \Delta_k(T) &= \sum_{k'} V_{kk'} \left(\frac{1}{4} - \frac{\epsilon_{k'}^2}{4[\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2(T)]} \right)^{\frac{1}{2}} [1 - 2f(E_{k'})] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k'} V_{kk'} \frac{\Delta_{k'}}{[\epsilon_{k'}^2 + \Delta_{k'}^2(T)]^{\frac{1}{2}}} [1 - f(E_{k'})]. \end{aligned} \quad (1.122)$$

De la misma forma que se calculó la brecha de la ec. (1.89), en este caso se llega a lo siguiente,

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh \left[\frac{(\epsilon^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}}}{2k_B T} \right]}{(\epsilon^2 + \Delta^2)^{\frac{1}{2}}} d\epsilon. \quad (1.123)$$

En la ec. (1.119) se esta usando la condición para el potencial (ec. (1.58)) propuesta por BCS, la diferencia es que ahora la condición del potencial implica un nuevo condicionamiento en la brecha:

$$\Delta_k(T) = \begin{cases} \Delta(T) & \text{si } \omega < \omega_D \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.124)$$

En ec. (1.123) si usamos $T = 0$, se tienen las mismas condiciones para llegar a la expresión obtenida anteriormente en la ec. (1.90).

El valor de T_c en el modelo BCS se encuentra a partir de la expresión para Δ (ec. (1.123)), para lo cual se usa el caso límite, es decir, cuando $T = 0$. Dicha expresión se puede integrar realizando unos cambios de variable que permiten hacer más simple el cálculo, con lo dicho obtenemos,

$$N(0)V \int_0^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} x^{-1} \tanh(x) dx = 1, \quad (1.125)$$

o bien,

$$\frac{1}{N(0)V} = [\ln(x) \tanh(x)]_0^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} - \int_0^{\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}} x^{-1} \tanh(x) dx. \quad (1.126)$$

En el caso de superconductores con acoplamiento débil ($\hbar\omega_D \gg k_B T_c$) se puede reemplazar la $\tanh\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}\right)$ por la unidad y extender el límite superior de la integral hasta infinito, de tal forma que se obtiene lo siguiente,

$$\frac{1}{N(0)V} = \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}\right) - \int_0^\infty \text{sech}(x) \ln(x) dx. \quad (1.127)$$

La última integral es más fácil estimarla que evaluarla, de cualquier modo se tiene que es $\ln(0,44)$, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N(0)V} &= \ln\left(\frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c}\right) + \ln(0,44)^{-1} \\ \Rightarrow e^{\frac{1}{N(0)V}} &= \frac{\hbar\omega_D}{2k_B T_c} (0,44)^{-1} \end{aligned} \quad (1.128)$$

y finalmente,

$$k_B T_c = 1,14 \hbar\omega_D e^{-\frac{1}{N(0)V}}. \quad (1.129)$$

Por lo tanto, en este modelo la razón (radio de energía) entre el gap de energía al cero absoluto y la temperatura crítica, independientemente del material es,

$$\frac{2\Delta_0}{k_B T_c} = 3,53. \quad (1.130)$$

La universalidad de este radio es esencialmente una consecuencia de la teoría, es un resultado cercano a los valores experimentales observados para superconductores convencionales.

Para comparar la magnitud de T_c con los valores observados, es necesario conocer las magnitudes de $\hbar\omega_D$ y V . La teoría BCS realmente no proporciona valores para estos parámetros, sin embargo se pueden conocer exactamente solo si se realiza la integral para una interacción real. Se ha demostrado que $\hbar\omega_D$ no es pequeño pero si del orden de $K_B \Theta_D$, donde Θ_D es la temperatura de Debye. Estamos diciendo que T_c es muy sensible con la magnitud de V , y dado que $\hbar\omega_D$ es del orden de $K_B \Theta_D$, una buena aproximación para $N(0)V$ está dada por la siguiente ecuación

$$N(0)V = \left[\ln \left(\frac{\Theta_D}{T_c} \right) \right]^{-1}. \quad (1.131)$$

Este valor de $N(0)V$ es denotado por $[N(0)V]_{\text{mes}}$ es llamada como constante de acoplamiento. Experimentalmente se han encontrado algunos valores para $[N(0)V]_{\text{mes}}$, por ejemplo para el Zn, $[N(0)V]_{\text{mes}} = 0,18$ con una temperatura $\Theta_D = 235K$, entonces se puede calcular que $T_c = 0,91K$. De esa manera se calculan las temperaturas críticas para muchos metales convencionales.

Con esto podemos concluir que la teoría BCS explica muy bien el comportamiento de muchos materiales superconductores convencionales, es porque se apega muy bien a los resultados experimentales, sin embargo la teoría no se puede aplicar a los metales de altas temperaturas críticas, precisamente porque no concuerda con los resultados experimentales. Para nuestro estudio es de vital importancia entender la teoría, eso se podrá observar conforme avancemos en el desarrollo de nuestra investigación.

1.1.5. Superconductividad de altas temperaturas críticas

Descubrimiento y primeras observaciones

Desde el descubrimiento de los primeros materiales superconductores en 1911 por el físico holandés Heike Kamerlingh Onnes, la investigación por encontrar este tipo de materiales cuya temperatura crítica sea mayor ha sido impresionante. Hasta poco antes de los años 80 del siglo pasado, la temperatura crítica más alta era de $23K$, la temperatura más baja que se ha registrado en el polo sur es de aproximadamente $213,15K$, esto nos da más o menos una idea de la escala a la que se encontraban las temperaturas más altas de los superconductores hasta entonces; a este tipo de superconductores se les conoce como convencionales. La mayoría de las temperaturas críticas en los superconductores convencionales eran insuficientes para el uso de nuevas tecnológicas desde el punto de vista práctico.

Mucha investigación se hizo sobre este tipo de materiales, con la intención de aumentar la temperatura crítica de estos mismos, así como buscar la forma de fabricar nuevos materiales que pudieran tener una temperatura crítica mayor. Después de años de intensa investigación, la mayoría de investigadores en el tema pensaban que ya no era posible aumentar la temperatura crítica en estos materiales; sin embargo, cuando algunos laboratorios de investigación comenzaban a dejar el tema, precisamente en 1986 Johannes Georg Bednorz y Karl Alexander Müller [9] lograron sintetizar el material lantano, bario, óxido de cobre (LBCO) cuya temperatura crítica es alrededor de $35K$.

Con este gran descubrimiento se abrió una nueva etapa para el fenómeno de la superconductividad. Estos materiales son distintos a los convencionales en el sentido de que son cerámicos y los anteriores eran totalmente metálicos; no hay consenso acerca del mecanismo que produce la transición de fase, aunque hay distintos grupos de materiales HTSC como lo son los cupratos conformados por óxido de hierro, “las FeAs” que son compuestos de arseniuro de hierro, entre otros. Nosotros nos vamos a referir únicamente en los cupratos porque son en los que hemos encontrado mas información y estudios experimentales. Son materiales cuya temperatura crítica se puede alcanzar con la ayuda del nitrógeno líquido, lo cual permite realizar investigaciones de una manera mas económica.

Otra diferencia de estos materiales respecto a los convencionales, es que la mayoría de estos están formados por óxido de cobre, por tales razones se les suele nombrar cupratos. Es importante mencionar que estos materiales superconductores de alta temperatura crítica (HTSC, por su nombre en inglés), toman mucha importancia por sus posibles aplicaciones tecnológicas, como lo es en medicina, transporte de personas, detectores magnéticos, etc.

A la mayoría de estos HTSC se les ha encontrado una estructura cristalina parecida a la *Perovskita* (Figura 1.9), no son iguales debido a unas ligeras modificaciones, entre las cuales se tiene que existen tres elementos clave. Uno de los materiales HTSC que se han estudiado más detalladamente es el $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ cuya estructura se puede desglosar en: los planos de CuO_2 , las cadenas de CuO y un eje simultáneamente perpendicular a los planos y las cadenas. Los planos de CuO_2 adquieren mucha importancia en los HTSC porque participan en las propiedades principales que dan origen a la superconductividad. Hay una gran cantidad de teorías que se refieren únicamente al plano de CuO_2 .

Entre las propiedades que tienen los materiales superconductores de altas temperaturas críticas, y que las distinguen de los demás, se encuentran: la longitud de coherencia, la brecha superconductora y la longitud de penetración, entre otras. Haciendo una comparación de dichas propiedades que caracterizan a los materiales superconductores, se encuentra por ejemplo la longitud de coherencia que obedece la siguiente relación [1]:

$$\xi = \frac{\hbar v_F}{\pi \Delta_0} = \frac{\hbar v_F}{2\pi T_c}, \quad (1.132)$$

donde v_F es la velocidad de Fermi y $\frac{\hbar}{2\pi} = \hbar$, mejor conocida como constante de Planck. En esta ecuación podemos ver que la longitud de coherencia es inversamente proporcional a la brecha superconductora y por consiguiente a la temperatura crítica. Recordemos que la longitud de coherencia define el tamaño que tienen los pares de Cooper lo cual nos da una idea del volumen en el que se pueden generar. Quiere decir que mientras mas grande sea la longitud de coherencia, mayor es la interacción entre los electrones.

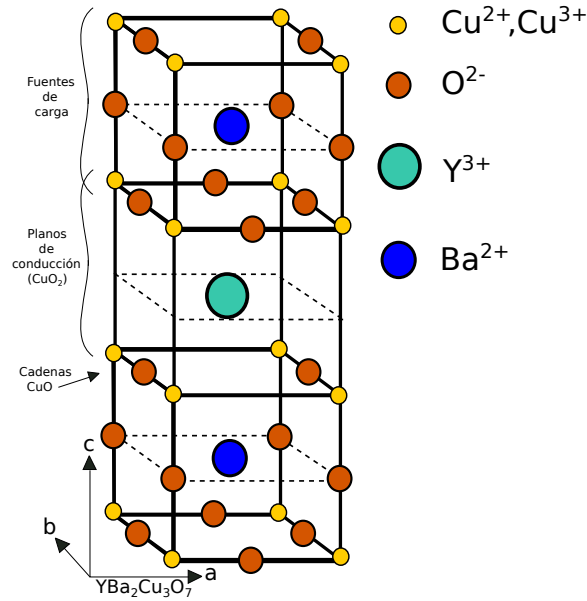


Figura 1.9: Estructura Perovskita del $YBa_2Cu_3O_7$.

Si en la ec. (1.132) sustituimos los valores de la temperatura crítica que se han encontrado en los HTSC, la longitud de coherencia será menor, además de que en estos materiales se ha experimentado que la v_F es más pequeña. Esto quiere decir que para los HTSC es poco el volumen donde ocurre la formación de los pares de Cooper, suponiendo que exista tal apareamiento.

Otra característica de estos materiales se presenta en la conductividad, la cual es distinta para cada parte de su estructura; es decir, no se tiene la misma conducción en las cadenas que en los planos de CuO_2 y tampoco sobre el eje perpendicular a estos. En el caso del $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ se puede elegir x de tal modo que el material aumenta o disminuye su conductividad, por ejemplo si $x = 0$ las cadenas proveen de huecos a los planos y adquieren el doble de conducción en el sentido de las cadenas que paralelamente y perpendicular sobre las mismas. Los planos de Cu-O, además, cambian totalmente el paradigma de que "la superconductividad es la física de los pares de Cooper", porque se ha observado que en dicho escenario los electrones se comportan de forma normal por debajo de la temperatura crítica. Al cambio de valor en x se le suele nombrar el dopaje del material, en este caso se está dopando el $YBa_2Cu_3O_7$ de tal manera que se extrae oxígeno en la muestra.

Existen tres tipos de dopaje; está el dopado óptimo donde x tiene un valor que maximiza la temperatura crítica de los HTSC, el sub-dopado en el cual x está por debajo del dopado óptimo, y por último hay un sobre-dopado donde x está por encima del dopado óptimo. Aumentar o quitar oxígeno en un cuprato es hacer un dopaje, y dependiendo del régimen en el que se encuentre dicho dopaje, se obtendrá mayor o menor temperatura crítica. Cuando se quita oxígeno al material lo que se está haciendo es aumentar el número de huecos, los cuales se generan en los planos de CuO_2 ; los

portadores de carga en la interacción portador-fonón en los HTSC sucede con huecos, no con electrones como sucede en los superconductores convencionales.

La gran anisotropía en la conductividad, la pequeña longitud de coherencia en los planos de CuO_2 y la interacción entre los planos y las cadenas abre la posibilidad de que distintas partes de los cupratos tengan la misma T_c pero diferente longitud de coherencia y de la brecha del estado superconductor. Si las cosas suceden de esa manera, entonces la ec. (1.132) tendría que ser modificada para que se pudiera aplicar a este tipo de materiales. Hay varias evidencias experimentales acerca de la existencia de dos brechas, por ejemplo se ha encontrado experimentalmente que la relación universal $\frac{2\Delta(0)}{k_B T_c} \sim 5$ para los planos (mucho mayor que BCS) y $\sim 1,8$ (mucho menor que BCS) sobre las cadenas. Con esto se puede concluir que la brecha es distinta dentro del mismo material.

Aún no se sabe si la interacción es mediada por fonones en los nuevos HTSC. Eso se puede saber haciendo una medición del parámetro de acoplamiento hueco-fonón; sin embargo no ha sido fácil medir con precisión el espectro fonónico. Únicamente se ha podido estimar el valor de acoplamiento hueco-fonón en algunos HTSC, a partir de la constante de Sommerfeld (constante de estructura fina α), se ha encontrado que el acoplamiento hueco-fonón es más fuerte para estos materiales que el acoplamiento electrón-fonón para los superconductores convencionales.

El primer intento que se llevo a cabo para dar una explicación del fenómeno de la superconductividad en los nuevos HTSC, fue el de utilizar la teoría que hasta entonces se conocía de dicho fenómeno. Se deseaba ver si la interacción electrón-fonón podía explicar la superconductividad en estos materiales HTSC, no era una idea descabellada ya que se haría uso de teorías básicas para la superconductividad convencional y tratar de ver si se podrían generalizar.

El resultado a dicho intento no fue muy bueno ya que existen muchas incongruencias entre la teoría y la práctica. El primer argumento en contra de la interacción electrón-fonón es lo pequeño del efecto isótopo. Este efecto relaciona la temperatura crítica del material con la masa del isótopo, $T \sim M^{-\alpha}$ donde $\alpha = 0,5$. En el caso de los materiales superconductores convencionales, es un efecto que enfatiza el papel crucial de las vibraciones de la red en el problema de la superconductividad convencional. En los HTSC los valores de α son mucho más pequeños; en base a esto se ha afirmado que en estos materiales el mecanismo fonónico no prevalece; sin embargo, hay experimentos que muestran que el efecto isótopo tiene aspectos muy sutiles que hacen muy difícil hacer una conclusión precipitada.

El mecanismo del electrón-fonón para los materiales superconductores convencionales cuentan con una brecha de simetría s , en donde la brecha de energía es casi isotrópica en el espacio de los momentos, de modo que la brecha tiene la misma magnitud y fase en todas las direcciones (Ver **a**) de la Figura 1.10). Por el contrario, en los materiales de alta T_c se piensa que la brecha de energía es de simetría d (Ver **b**) de

la Figura 1.10), debido a que los cupratos de alta temperatura crítica son materiales con capas de CuO_2 en dos dimensiones altamente anisótropas. Este sería otro factor en contra para las posibles aplicaciones de la teoría de los materiales convencionales a los nuevos HTSC.

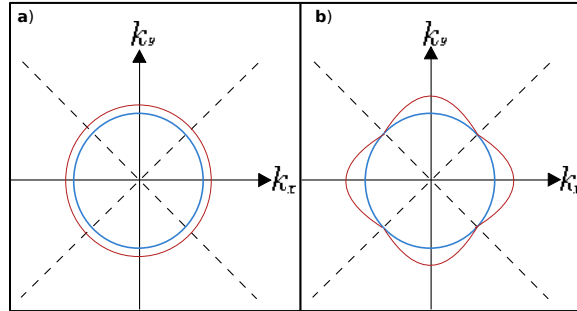


Figura 1.10: Esquema de la brecha para materiales superconductores convencionales y HTSC: **a)** representación de la brecha para los superconductores convencionales en el espacio de los momentos, cuya simetría es tipo s , **b)** brecha de simetría d que podrían tener los HTSC.

Los cupratos exhiben fuertes interacciones magnéticas en forma de correlaciones de espín antiferromagnéticas que suelen ser mutuamente excluyente con la superconductividad. Esto ha motivado la investigación de varios mecanismos, que posiblemente pudiera dar una interpretación a la interacción de emparejamiento lo suficientemente fuerte, para crear la superconductividad a estas temperaturas elevadas. La distinción de cada modelo propuesto es su predicción para la simetría del parámetro de orden, implícita por el mecanismo de apareamiento específico.

Entre algunos modelos se encuentra el de Hubbard, el cual es de aproximación y tratar de describir la transición de materiales conductores, es el modelo más sencillo de interacción de partículas en una red. En el cual se propone un Hamiltoniano mejor conocido como Hamiltoniano de Hubbard que tiene la siguiente forma:

$$H = \sum_{i,j,\sigma} t_{i,j} c_{i,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma} + U \sum_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow}, \quad (1.133)$$

donde $t_{i,j}$ a grandes rasgos se refiere a la probabilidad de salto de los portadores entre los sitios i y j , $c_{i,\sigma}^\dagger$ el operador que crea un electrón con espín σ sobre el sitio i y el operador $c_{j,\sigma}$ destruye un electrón con espín σ sobre el sitio j . El operador que calcula el número de electrones está dado por $n_{j\sigma} = c_{j,\sigma}^\dagger c_{j,\sigma}$. U es la interacción entre dos electrones sobre el mismo sitio (Figura 1.11). El Hamiltoniano de Hubbard conduce a que el apareamiento tiene simetría d .

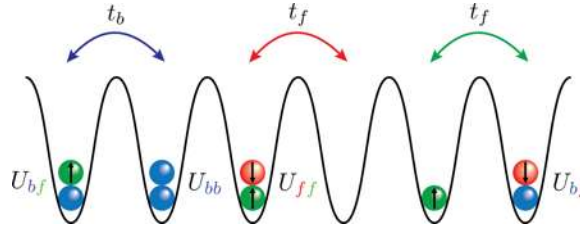


Figura 1.11: Esquema que ilustra un poco lo que representa el Hamiltoniano de Hubbard para partículas, ya sean fermiones (partículas con espín semi-entero como los electrones) o bosones (partículas con espín entero como los protones), los fermiones deben obedecer el principio de exclusión de Pauli para poder estar en el mismo nivel energético.

1.2. Efecto Hall Cuántico

A finales de los ochentas del siglo XIX, mientras realizaba su trabajo doctoral Edwin Herbert Hall(1855-1938), detectó un efecto en un experimento de investigación, el cual llevaría su nombre posteriormente como efecto Hall (efecto Hall ordinario, OHE de acuerdo a sus siglas en inglés). Éste consiste en un arreglo como el de la Figura 1.13, en donde se tiene un material conductor al que se le aplica una corriente eléctrica (lo cual genera un campo eléctrico), así mismo se induce un campo magnético perpendicular a la muestra, tal como se aprecia en la Figura 1.13. El resultado en dicho experimento fue que se crea un reordenamiento de los portadores de carga, lo cual genera otro campo eléctrico conocido como campo Hall, de tal manera que la fuerza que aparece por medio de este nuevo campo eléctrico, equilibra la fuerza generada por el campo magnético. La importancia radica en la aparición de este campo Hall, y es porque el potencial que define este campo Hall permite encontrar el número de portadores de carga en el material, así como encontrar una relación de la conductividad eléctrica del mismo.

El efecto Hall cuántico (QHE) es similar al efecto Hall ordinario, con la diferencia de que éste se realiza en un gas bidimensional de electrones, en presencia de un campo magnético intenso y con temperaturas muy bajas. La diferencia principal es que la conductividad eléctrica esta cuantizada en términos de cantidades físicas de la mecánica cuántica, de aquí el nombre de QHE. Existen diferentes tipos de QHE, está el efecto Hall cuántico entero IQHE, así como el efecto Hall cuántico fraccionario FQHE. La diferencia entre estos dos se debe a que la conductividad eléctrica es cuantizada en múltiplos enteros o fraccionarios, respectivamente.

Para tratar de entender lo que es el QHE, empezaremos analizando la física del OHE para posteriormente analizar el QHE tratando de ver la similitud de los aspectos físicos que hay en ambos efectos, es decir, pasar de la física clásica a la cuántica.

1.2.1. Efecto Hall clásico

Consideremos una partícula de masa m y de carga q posicionada en un punto $(x_0, y_0, 0)$ con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$ sobre una región del espacio donde existan simultáneamente un campo eléctrico $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ y un campo magnético $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. La fuerza resultante que se ejerce sobre la partícula cargada será, evidentemente,

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.134)$$

mejor conocida como fuerza de Lorentz. Se puede reescribir de la siguiente manera:

$$m\left(\frac{dv_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dv_z}{dt}\mathbf{k}\right) = qE\mathbf{j} + q\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}, \quad (1.135)$$

donde se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales,

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m}v_y, \quad (1.136)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m}v_x, \quad (1.137)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (1.138)$$

Estamos usando el hecho de que la velocidad a lo largo del eje z es constante e igual a la velocidad inicial $v_{0z} = v_z = 0$. Para este caso nombraremos $w = \frac{qB}{m}$, que es la velocidad angular de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme. Sustituyendo el valor de w en la ecuación (1.136), después despejamos v_y y lo sustituimos en la ecuación (1.137). Llegamos a la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} + w^2v_x = q^2\frac{EB}{m^2}. \quad (1.139)$$

La solución a esta ecuación diferencial es del tipo

$$v_x = A\cos(wt) + C\sin(wt) + c, \quad (1.140)$$

que al introducir esta solución en la ecuación diferencial se determina el valor de c dando una solución particular,

$$v_x = A\cos(wt) + C\sin(wt) + \frac{E}{B}. \quad (1.141)$$

Es útil esta solución para determinar la componente v_y , y nos queda

$$v_y = \frac{1}{w}\frac{dv_x}{dt} = -A\sin(wt) + C\cos(wt). \quad (1.142)$$

Los valores de las constantes A, C se determinan a partir de las condiciones iniciales, para $t = 0$ la velocidad inicial es $(v_{0x}, v_{0y}, 0)$, entonces

$$v_x = \left(v_{0x} - \frac{E}{B}\right) \cos(wt) + v_{0y} B \sin(wt) + \frac{E}{B}, \quad (1.143)$$

$$v_y = -\left(v_{0x} - \frac{E}{B}\right) \sin(wt) + v_{0y} B \cos(wt). \quad (1.144)$$

Calculemos la integral respecto de t en las ecuaciones anteriores, así mismo usando las condiciones iniciales donde tenemos que para $t = 0$ el punto inicial es $(x_0, y_0, 0)$, se obtiene

$$x - x_0 - \frac{v_{0y}}{w} - v_l t = \frac{1}{w} \left((v_{0x} - v_l) \sin(wt) - v_{0y} \cos(wt) \right), \quad (1.145)$$

$$y - y_0 - \frac{1}{w} (v_{0x} - v_l) = \frac{1}{w} \left((v_{0x} - v_l) \cos(wt) + v_{0y} \sin(wt) \right), \quad (1.146)$$

donde hemos asignado $\frac{E}{B} = v_l$ y se conoce como velocidad de arrastre.

Se pueden combinar estas ecuaciones de tal manera que sea más clara la solución. Si elevamos al cuadrado las dos ecuaciones y las sumamos nos queda,

$$\left(x - x_0 - \frac{v_{0y}}{w} - v_l t\right)^2 + \left(y - y_0 - \frac{v_{0x}}{w} - \frac{v_l}{w}\right)^2 = \frac{1}{w^2} \left((v_{0x} - v_l)^2 + v_{0y}^2 \right). \quad (1.147)$$

Puede apreciarse que tiene la forma de la ecuación de una circunferencia fuera del origen, $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ de radio r y centrada en el punto (a, b) , donde

$$a = x_0 + \frac{v_{0y}}{w} + v_l t, \quad (1.148)$$

$$b = y_0 + \frac{v_{0x}}{w} - \frac{v_l}{w}, \quad (1.149)$$

$$r = \frac{1}{w} \sqrt{(v_{0x} - v_l)^2 + v_{0y}^2}, \quad (1.150)$$

entonces el vector de posición lo podemos escribir de la siguiente manera,

$$\mathbf{r} = (X + \zeta, Y + \eta), \quad (1.151)$$

en el cual se están usando las coordenadas del centro de movimiento denotadas por (X, Y) y también las coordenadas relativas (ζ, η) , éstas últimas se relacionan con las velocidades de la siguiente manera,

$$\zeta = \frac{v_y}{\omega}, \quad \eta = -\frac{v_x}{\omega}. \quad (1.152)$$

Con esto se tiene que la trayectoria de la partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme puede ser de diferentes maneras, según sean las condiciones iniciales, (Figura 1.12). Este movimiento sirve de apoyo en el estudio del efecto Hall en un metal, como enseguida se explica.

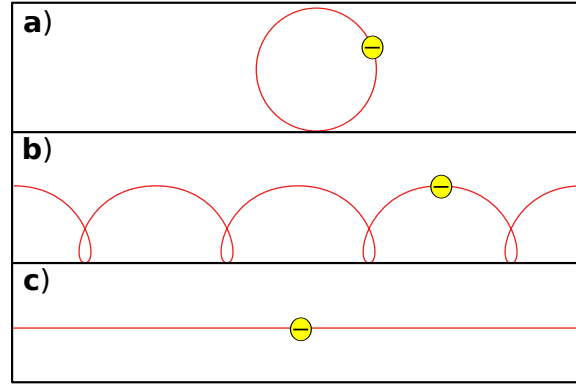


Figura 1.12: Casos particulares del movimiento de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético: **a)** el movimiento es circular cuando el campo eléctrico $\mathbf{E} = 0$ y $v_l = 0$, **b)** el movimiento es el de un cicloide cuando las condiciones iniciales son cero y además el radio es $r = v_l \omega = \frac{E}{B\omega}$, **c)** el movimiento es rectilíneo si $v_{0y} = 0$ y $v_{0x} = v_l = \frac{E}{B}$.

Ahora consideremos una tira metálica de anchura a y grosor d por la cual circula una corriente eléctrica de intensidad I . Si los ejes x, y, z los colocamos como se muestra en la Figura 1.13, los electrones libres se moverán en el sentido negativo del eje y y en el conductor existirá un campo eléctrico $\mathbf{E}$ dirigido en el sentido positivo del eje y , dicho campo es el que mantiene la corriente.

Ahora bien, al aplicar un campo magnético $\mathbf{B}$ con la dirección y el sentido del eje z , los electrones libres van a estar sometidos a una fuerza dada como la de la ec. (1.134), donde $q = -e$, esta fuerza tiene una componente en el sentido negativo del eje x eso implica que los electrones se van a mover hacia el borde del fondo de tal manera que se irá cargando negativamente, mientras que el borde de enfrente se cargará positivamente debido a la ausencia de electrones libres. Este reordenamiento de las cargas eléctricas va a generar un campo eléctrico nuevo $\mathbf{E}_H$ de tal manera que la fuerza que genera este campo eléctrico tenga que equilibrar la fuerza del campo magnético, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= q(\mathbf{E}_H + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \\ \Rightarrow \quad \mathbf{E}_H &= -\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{1.153}$$

Al campo $\mathbf{E}_H$ se le llama *campo eléctrico de Hall* en honor al físico americano Edwin Herbert Hall (1855-1938), descubridor de este efecto que lleva su nombre. Ahora bien, para un conjunto de electrones en movimiento suele usarse la velocidad media $\mathbf{v}$ de los electrones que esta relacionada con la densidad de corriente $\mathbf{J}$ mediante la ecuación

$$\mathbf{J} = -en\mathbf{v}. \tag{1.154}$$

Con esta ecuación podemos obtener la velocidad $\mathbf{v}$ en función de la densidad de corriente. Realizando dicho despeje y usando el resultado en la ec. (1.153), se obtiene

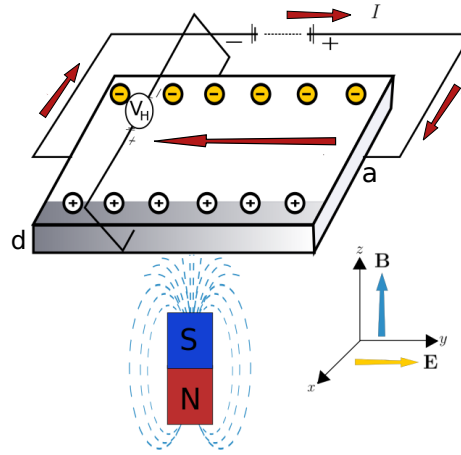


Figura 1.13: Tira metálica a la cual se le aplica una corriente eléctrica I y un campo magnético B .

$$\mathbf{E}_H = \frac{\mathbf{J}}{ne} \times \mathbf{B}, \quad (1.155)$$

de acuerdo a la regla de la mano derecha el campo $\mathbf{E}_H$ se mueve en la dirección $-x$. En los bordes izquierdo y derecho aparecerá un diferencial de potencial $V_H = E_H a$ al cual se le conoce como *fem Hall*. Tenemos que $E_H = \frac{1}{ne} JB$ ya que $\mathbf{J}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares, luego

$$V_H = \frac{a}{ne} JB \quad \text{y como} \quad J = \frac{I}{ad}, \quad (1.156)$$

resulta

$$V_H = \frac{IB}{ned} \quad \text{y haciendo} \quad R_H = \frac{1}{n(-e)}, \quad (1.157)$$

queda

$$V_H = -R_H \frac{IB}{d}, \quad (1.158)$$

donde R_H es el llamado *coeficiente de Hall*.

La fem V_H puede medirse experimentalmente. Conocidas las cantidades I , B y d , la medida de V_H permitiría conocer R_H y como de la ec. (1.157) se tiene

$$n = \frac{1}{(-e)R_H}, \quad (1.159)$$

con el conocimiento del coeficiente de Hall se puede determinar el número de electrones por unidad de volumen del metal examinado.

A continuación desarrollaremos otro proceso que permite describir el movimiento de las partículas cargadas en presencia de un campo electromagnético. Es un desarrollo más útil que el anterior, porque permite trabajar con la energía total del sistema

y a la vez con las ecuaciones de Euler-Lagrange, éstas son de gran ayuda para describir sistemas. Desarrollaremos el Lagrangiano para una partícula en presencia de un campo electromagnético a partir de la definición del mismo. Este es

$$\mathcal{L} = \mathbf{T} - \mathbf{U}, \quad (1.160)$$

donde $\mathbf{T}$ y $\mathbf{U}$ son la energía cinética y la energía potencial de nuestro sistema, respectivamente. Ahora expresemos los campos eléctrico y magnético en términos de los potenciales escalar, ϕ , y vectorial, $\mathbf{A}$, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (1.161)$$

De esta manera el Lagrangiano nos queda de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_e v^2 - q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v}), \quad (1.162)$$

donde el potencial $\mathbf{U} = q(\phi - \mathbf{A} \cdot \mathbf{v})$, se conoce como potencial “generalizado”. Los momentos conjugados y las velocidades se definen a partir del Lagrangiano de la siguiente manera

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m_e v_i + e A_i, \\ \dot{x}_i &= \frac{P_i}{m}, \end{aligned} \quad (1.163)$$

los cuales forman parte del Hamiltoniano del sistema, también incluyendo el Lagrangiano, esto es

$$\mathcal{H}(\vec{P}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i P_i - \mathcal{L}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (1.164)$$

Entonces, cuando calculamos los momentos conjugados y las velocidades para sustituirlos en la ecuación anterior, junto con el Lagrangiano, nos queda lo siguiente

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^2 + q\phi. \quad (1.165)$$

Se pueden calcular las ecuaciones de movimiento usando este Hamiltoniano mediante las siguientes ecuaciones canónicas de Hamilton

$$\begin{aligned} \dot{P}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i}, \\ \dot{x}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \end{aligned} \quad (1.166)$$

cuya solución ya se desarrollo arriba. La intención de presentar este formalismo es porque más adelante hablaremos del efecto hall cuántico y para pasar del efecto hall clásico al cuántico, este formalismo es el que nos servirá de apoyo, así como la mecánica cuántica.

También es necesario mencionar de que manera se comporta la conductividad eléctrica en un sistema bidimensional, el cual se encuentra inmerso en un campo magnético. Si tenemos un sistema que se le aplica un campo eléctrico, de tal manera que se genere una densidad de corriente, en ausencia de campo magnético la densidad de corriente ec. (1.154), se relaciona con el campo eléctrico mediante la ley de Ohm ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$). Si el electrón se encuentra colisionando en el material entonces la velocidad promedio que tiene cada electrón de acuerdo a las colisiones es de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = \frac{-e\mathbf{E}\tau}{m}, \quad (1.167)$$

donde τ es el tiempo promedio entre colisiones de cada electrón. Al combinar esta ecuación con la ley de Ohm obtenemos

$$\mathbf{J} = -en\mathbf{v} = \left(\frac{ne^2\tau}{m}\right)\mathbf{E}, \quad (1.168)$$

entonces podemos encontrar que

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad (1.169)$$

donde σ_0 es la conductividad eléctrica en ausencia de campo magnético.

Sin embargo, cuando se aplica un campo magnético $\mathbf{B}$ al sistema, de tal manera que éste sea perpendicular al plano de movimiento de los electrones (Figura 1.13). La densidad de corriente eléctrica en este caso puede que no sea paralela al campo eléctrico, en tal caso se tiene lo siguiente

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (1.170)$$

donde

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} = \sigma, \quad (1.171)$$

es la matriz de conductividad eléctrica. En este caso, de acuerdo a la isotropía, se tienen que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ y $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, además este tensor sirve para calcular el tensor de resistividad eléctrica mediante la relación $\sigma_{\mu\nu} = (\rho^{-1})_{\mu\nu}$, con la cual se llega a lo siguiente

$$\rho_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad \rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2}, \quad (1.172)$$

donde ρ_{xx} y ρ_{xy} se conocen como resistividad diagonal y resistividad de Hall respectivamente.

Las componentes del tensor de conductividad se pueden determinar a partir de la ecuación de movimiento, si se toma en cuenta el tiempo de relajación τ , la ecuación de movimiento para un electrón arbitrario en presencia de un campo electromagnético es del tipo:

$$m\dot{\mathbf{v}} = -\frac{m}{\tau}\mathbf{v} - e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.173)$$

donde el primer término del lado derecho describe la fricción debido a la relajación. Permitiendo un estado estacionario ($\dot{\mathbf{v}} = 0$) tal que

$$\mathbf{v} = -\frac{e\tau}{m}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.174)$$

En términos de la frecuencia de ciclotrón $\omega_c = \frac{eB}{m}$, la solución con $E_y = 0$ es

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{e\tau}{m}E_x + \omega_c\tau v_y, \\ v_y &= \omega_c\tau E_x v_x, \end{aligned} \quad (1.175)$$

Combinando las ecuaciones (1.175) podemos determinar el valor que tienen cada componente de la velocidad, entonces realizando algunos cálculos llegamos a lo siguiente

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\frac{e\tau}{m}}{1 + (\omega_c\tau)^2}E_x, \\ v_y &= -\frac{\frac{\omega_c e\tau^2}{m}}{1 + (\omega_c\tau)^2}E_x. \end{aligned} \quad (1.176)$$

Por lo tanto la densidad de corriente (ec. (1.170)) es

$$\begin{aligned} J_x &= \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}E_x = \sigma_{xx}E_x, \\ J_y &= \frac{\omega_c\tau\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}E_x = \sigma_{xy}E_x, \end{aligned} \quad (1.177)$$

entonces

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{yy} = \frac{\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}, \\ \sigma_{xy} &= -\sigma_{yx} = \frac{\omega_c\tau\sigma_0}{1 + (\omega_c\tau)^2}, \end{aligned} \quad (1.178)$$

donde estamos usando la ec. (1.169) para σ_0 .

1.2.2. Efecto Hall Cuántico Entero

Es un efecto que se descubrió en 1980 por el físico alemán Klaus von Klitzing [10], al medir la resistividad (diagonal y de Hall) en un sistema electrónico bidimensional, el cual se encuentra a muy bajas temperaturas por debajo de los $4K$; también a dicho sistema se aplica un potente campo magnético, alrededor de $10T$ (Tesla), el campo magnético de la tierra oscila entre $25\mu T$ y $60\mu T$.

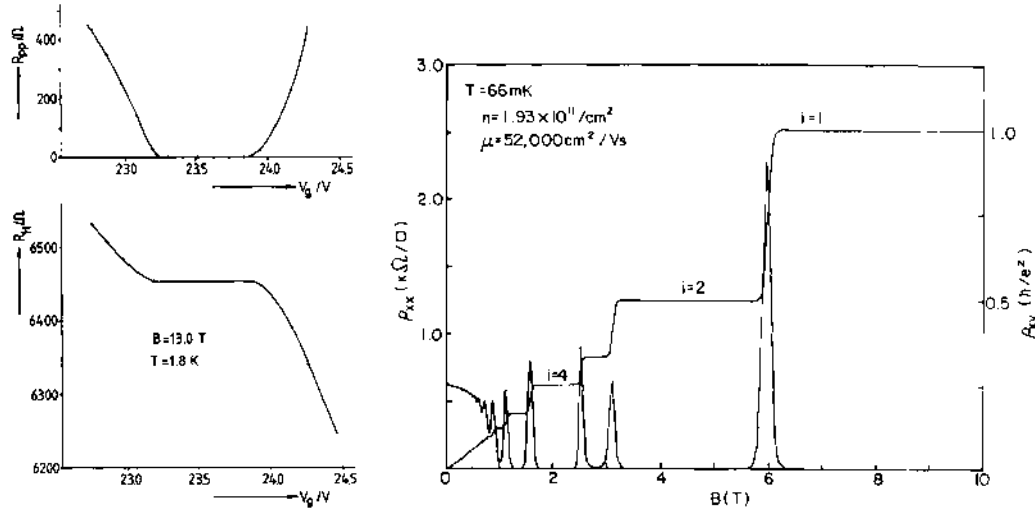


Figura 1.14: Mediciones realizadas por von Klitzing de las resistividades diagonal y Hall [11, 12].

Bajo las condiciones anteriores para un sistema electrónico bidimensional, von Klitzing obtuvo las mediciones para las resistividades diagonal y de Hall mostradas en la Figura 1.14. En una medición donde la densidad de electrones fue variada en un campo magnético fijo, encontraron lo siguiente:

- Hay regiones con mesetas en la resistividad Hall donde ésta tiene un valor constante mientras la densidad de electrones es variada. En esta región la resistividad diagonal desaparece.
- El valor de la resistividad Hall en las regiones donde hay mesetas está dado exactamente por h/e^2 dividido por un entero. Quiere decir que la conductividad σ_{xy} en las regiones donde hay mesetas es *cuantizada* con múltiplos enteros de e^2/h .

Debido a estas características, el fenómeno fue llamado efecto Hall cuántico (QHE), mejor conocido como IQHE, después del descubrimiento del FQHE en 1982.

Estos pueden comprobarse a partir de la ec. (1.178), en la cual se tiene que para campos magnéticos muy fuertes, $\omega_c\tau \gg 1$,

$$\sigma_{xx} \simeq \frac{\sigma_0}{(\omega_c \tau)^2} \sim \frac{1}{\tau} \quad \text{para } \tau \rightarrow \infty. \quad (1.179)$$

Con esto se llega a la siguiente relación para la resistividad eléctrica diagonal y Hall

$$\rho_{xx} = 0 = \rho_{yy} \quad \text{y} \quad \rho_{xy} = \frac{1}{\sigma_H} = -\rho_{yx}, \quad \text{donde} \quad \sigma_H = \frac{en}{B}. \quad (1.180)$$

En términos de unidades atómicas (aportación experimental del descubrimiento de von Klitzing):

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h}. \quad (1.181)$$

Usando la ec. (1.180)

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h} = \frac{en}{B}, \quad \text{entonces} \quad n = \nu \frac{eB}{h}, \quad (1.182)$$

indicando que para un campo magnético fijo eB/h tiene las unidades apropiadas de concentración de electrones. De hecho, $eB/h = 1/2\pi\ell_B^2$, donde $\ell_B = \sqrt{\hbar/eB}$ es el radio de la órbita ciclotrón correspondiente a la energía $\epsilon_0 = \hbar\omega_c/2$ (estado base del ciclotrón), el cual desarrollaremos enseguida.

El Hamiltoniano de la ec. (1.165) se puede representar en la mecánica cuántica, reemplazando las variables de la mecánica clásica por operadores, respectivamente, es decir

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - e\mathbf{A})^2 + q\phi. \quad (1.183)$$

En esta ecuación, $\mathbf{P}$ es el operador del momento canónico y $\mathbf{A}$ es el operador del potencial vectorial. Para encontrar los estados energéticos de este Hamiltoniano consideremos únicamente el primer término del lado derecho, el cual representa una partícula cargada en presencia de un campo magnético ($\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$) perpendicular al plano de movimiento de las partículas. Usando la norma de Landau ($\mathbf{A} = Bx\hat{\mathbf{j}}$), se puede ver que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{k}}$, el cual es de la forma más simple. Bajo estas condiciones el Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(P_x^2 + (P_y - eBx)^2), \quad (1.184)$$

es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}\left(x - \frac{P_y}{eB}\right)^2, \\ &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega_c^2}{2}(x - X)^2, \end{aligned} \quad (1.185)$$

cuya representación es parecida a la del Hamiltoniano del oscilador armónico, con la diferencia de que este se encuentra centrado en $(X = \frac{P_y}{eB})$. Existen diferentes maneras de resolver el problema de encontrar los estados energéticos para este Hamiltoniano, una de ellas es resolviendo las ecuaciones diferenciales que éste representa; sin embargo nosotros utilizaremos los operadores de ascenso y descenso para resolverlo de una manera más elegante, sean

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{\ell_B}{\sqrt{2}\hbar}(P_x - i\mathcal{P}_y), \\ \mathbf{a}^+ &= \frac{\ell_B}{\sqrt{2}\hbar}(\mathcal{P}_x + i\mathcal{P}_y).\end{aligned}\tag{1.186}$$

donde el operador $\mathcal{P} = (\mathbf{P} - e\mathbf{A})$ el cual satisface las relaciones de conmutación $[\mathcal{P}_x, \mathcal{P}_y] = i\hbar eB = -i\frac{\hbar^2}{\ell_B^2}$; así mismo, para los operadores de ascenso y descenso también se cumplen las relaciones de conmutación:

$$\begin{aligned}[\mathcal{H}, \mathbf{a}] &= -\hbar\omega_c, \\ [\mathcal{H}, \mathbf{a}^+] &= \hbar\omega_c.\end{aligned}\tag{1.187}$$

Si ψ es un eigenestado de $\mathcal{H}$, tal que $\mathcal{H}\psi = E\psi$, entonces usando los conmutadores anteriores:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\mathbf{a}^+\psi &= \mathbf{a}^+\mathcal{H}\psi + \hbar\omega_c\mathbf{a}^+\psi, \\ &= (E + \hbar\omega_c)\mathbf{a}^+\psi.\end{aligned}\tag{1.188}$$

Es decir $\mathbf{a}^+\psi$ también es un eigenestado de $\mathcal{H}$, al cual le corresponde la energía $(E + \hbar\omega_c)$. Cuando se aplica reiteradamente $\mathbf{a}^+$, se obtiene un número infinito de eigenestados:

Eigenestado	Eigenvalor	
ψ	E	
$\mathbf{a}^+\psi$	$E + \hbar\omega_c$	
$(\mathbf{a}^+)^2\psi$	$E + 2\hbar\omega_c$	
$(\mathbf{a}^+)^3\psi$	$E + 3\hbar\omega_c$	
...	...	

(1.189)

Por ello al operador $\mathbf{a}^+$ se le llama operador de creación (para eigenestados del oscilador armónico). Trabajando de manera similar con la relación de conmutación entre $\mathcal{H}$ y $\mathbf{a}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\mathbf{a}\psi &= \mathbf{a}\mathcal{H}\psi - \hbar\omega_c\mathbf{a}\psi, \\ &= (E - \hbar\omega_c)\mathbf{a}\psi.\end{aligned}\tag{1.190}$$

Esto quiere decir que si E es un eigenvalor, también lo son $E - 2\hbar\omega_c$, $E - \hbar\omega_c$, $E + \hbar\omega_c$, $E + 2\hbar\omega_c$, ... Esto es, los niveles energéticos se encuentran separados por la misma distancia:

$$E_n = E \pm n\hbar\omega_c. \quad (1.191)$$

Aún hace falta el valor energético del estado base. Éste se encuentra de acuerdo al eigenestado base ψ_0 donde $E_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2}$ es el eigenvalor a dicho estado base para el oscilador armónico, entonces

$$\mathcal{H}\psi_0 = E_0\psi_0, \quad (1.192)$$

se obtiene que

$$\mathcal{H}\psi_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2}\psi_0, \quad (1.193)$$

luego,

$$E_0 = \frac{\hbar\omega_c}{2}. \quad (1.194)$$

Así, los valores de energía son:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (1.195)$$

El hamiltoniano en términos de los operadores de ascenso y descenso puede ser escrito como

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c \left(\mathbf{a}^+ \mathbf{a} + \frac{1}{2}\right). \quad (1.196)$$

Los eigenvalores de este Hamiltoniano se conocen como *niveles de Landau* y están degenerados debido a la independencia del Hamiltoniano respecto a la coordenada y , es decir, esto implica que el Hamiltoniano conmuta con el momento $\mathbf{P}_y$; lo cual quiere decir que existe un conjunto de eigenestados en común para estos dos operadores de manera que se pueden factorizar de la siguiente manera

$$\psi_\alpha = \varphi_\alpha(x)\chi_k(y), \quad (1.197)$$

con $\alpha = (n, k)$. Los factores satisfacen los eigenvalores que corresponde a las siguientes ecuaciones

$$\mathbf{P}_y\chi_k = \hbar k\chi_k(y) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(k)\varphi_\alpha(x) = E_\alpha\varphi_\alpha(x), \quad (1.198)$$

donde en representación de las coordenadas tenemos:

$$\mathcal{H}(k) = -\frac{\hbar^2}{(2m)^2}\partial_x^2 + \frac{m\omega_c^2}{2}(x - X)^2 \quad (1.199)$$

$$X = -\ell_B^2 k. \quad (1.200)$$

La solución para $\chi_k(y)$ de la ec. (1.197) consiste en una función de onda plana en la dirección y con número de onda k . Una manera estándar de encontrar esta función es imponiendo las condiciones que debe cumplir; se tiene la condición de normalización y la condición de ser periódica, esto es

$$\int_0^{L_y} |\chi(y)|^2 dy = 1 \quad \text{y} \quad \chi(y + L_y) = \chi(y), \quad (1.201)$$

donde L_y es la longitud en la dirección y , estas se satisfacen por las funciones

$$\chi_k(y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{iky}, \quad (1.202)$$

con los valores de k discretos,

$$k = \frac{2\pi}{L_y} \kappa, \quad \kappa = 0, \pm 1, \dots, \quad (1.203)$$

Por otro lado tenemos que la función $\varphi_\alpha(x)$ actúa con el Hamiltoniano cuya forma es la del oscilador armónico, entonces se tienen las mismas soluciones para las funciones de estado que el oscilador armónico, es decir, para este caso tenemos los siguientes estados de onda

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_\alpha(x - X), \quad \varphi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell_B}} e^{\frac{-x^2}{2\ell_B}} H_n\left(\frac{x}{\ell_B}\right) \quad (1.204)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$ y $H_n(x)$ denota los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2^n n! \pi^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}. \quad (1.205)$$

Una manera de calcular estos polinomios es mediante los operadores de ascenso y descenso, empezando con la condición de que $\mathbf{a}\varphi_0 = 0$, y se llega a que $\varphi_0 = a_0 e^{-\frac{m\omega_c}{2\hbar}x^2}$, donde a_0 se puede calcular con la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0^* \varphi_0 dx = 1, \quad \text{lo cual implica que} \quad a_0^2 = \sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega_c}}. \quad (1.206)$$

Usando la condición de normalización para las φ_n de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 1 &= \langle \varphi_{n+1} | \varphi_{n+1} \rangle = \langle C_n^+ \mathbf{a}^+ \varphi_n | C_n^+ \mathbf{a}^+ \varphi_n \rangle \\ &= |C_n^+|^2 \langle \varphi_n | \mathbf{a} \mathbf{a}^+ \varphi_n \rangle = |C_n^+|^2 \langle \varphi_n | (n+1) \varphi_n \rangle \\ &= |C_n^+|^2 (n+1), \end{aligned} \quad (1.207)$$

esto es,

$$|C_n^+| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \quad (1.208)$$

Por lo tanto,

$$\varphi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \mathbf{a}^+ \varphi_n. \quad (1.209)$$

De manera análoga se obtiene

$$|C_n^-| = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad y \quad \varphi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{a} \varphi_n. \quad (1.210)$$

Una vez que se tiene φ_0 se pueden calcular $\mathbf{a}^+ \varphi_0$, $(\mathbf{a}^+)^2 \varphi_0$, etc. y el resultado general es parecido al de la ec. (1.204). Con esto tenemos que los eigenestados en común para $\mathcal{H}$ y $\mathbf{P}_y$ son de la forma

$$\psi_\alpha(x, y) = \frac{1}{\sqrt{L_y}} e^{iky} \varphi_n(x - X), \quad (1.211)$$

con $X = -\ell_B^2 k$, son llamados los *estados de Landau* y le corresponden los *niveles de Landau* (ec. (1.195)).

1.2.3. Efecto Hall Cuántico Fraccionario

El descubrimiento del IQHE trajo consigo nuevas investigaciones en sistemas bidimensionales, los cuales se fueron haciendo con menos impurezas. El IQHE fue descubierto en un sistema bidimensional de nombre Si MOSFET (metal-oxide-semiconductor field-effect transistor), que es un transistor de efecto de campo que sirve para controlar la resistividad de un material a base de una diferencia de potencial. El Si MOSFET fue utilizado por Klaus von Klitzing para fabricar un gas bidimensional de electrones.

Después Daniel Chee Tsui empezó a hacer investigaciones en sistemas bidimensionales de electrones utilizando el GaAs/AlGaAs heterounión el cual se puede desarrollar con menos impurezas que el Si MOSFET, de tal manera que hay más movilidad de los electrones. En esta muestra se encontraron resultados muy sorprendentes que revolucionaron las investigaciones hasta entonces existentes para el IQHE. Dichos resultados dieron origen a lo que hoy se conoce como efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE) el cual fue descubierto en 1982 por los investigadores Daniel Chee Tsui, Horst Ludwig Störmer y Arthur C. Gossard[13].

En el caso del IQHE se tiene que la resistividad esta cuantizada en términos de cantidades universales de acuerdo a la relación $\nu \frac{e^2}{h}$ donde ν que es conocido como el factor de llenado, toma valores enteros; sin embargo, para el FQHE se encontró que la resistividad esta en términos de $\nu \frac{e^2}{h}$, con la diferencia de que en este caso $\nu = p/q$ con q impar, como se observa en la Figura 1.15; es decir, son fraccionarios (1/2, 1/3, ...).

Para explicar el fenómeno del IQHE, es importante observar que los niveles de Landau fueron encontrados a partir del Hamiltoniano (ec. (1.185)), que involucra el movimiento de un electrón libre. Pero en un sistema Hall existen muchos electrones que participan y además interactúan entre ellos por medio de la fuerza de Coulomb.

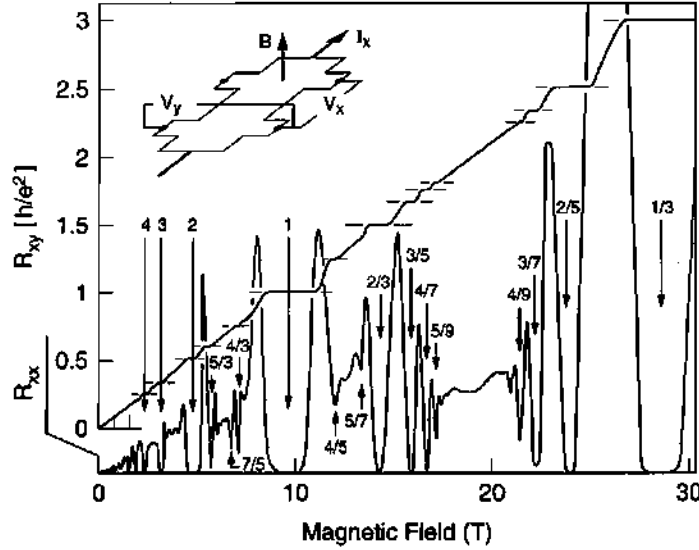


Figura 1.15: Efecto Hall cuántico fraccionario (FQHE). Al aumentar la intensidad del campo magnético y disminuir la temperatura el factor de llenado ν adquiere valores fraccionarios [13].

Por lo tanto un Hamiltoniano que incluye estas propiedades, adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_K + \mathcal{H}_U \\ &= \sum_j^N \left(\frac{1}{2m} | -i\hbar\nabla_j - eA_j |^2 + V_{ion}(z_j) \right) + \sum_{j>k}^N \frac{e^2}{|z_j - z_k|}, \end{aligned} \quad (1.212)$$

donde V_{ion} es el potencial debido a la interacción que se tiene de los iones con los electrones, y está presente sólo para lograr la estabilidad del sistema con la neutralización de la interacción de electrones; se está usando a $z_j = x_j + iy_j$ para denotar la localización de la partícula j -ésima como un número complejo.

Poco tiempo después del descubrimiento del FQHE, se desarrolló una teoría por Robert Betts Laughlin que explica satisfactoriamente el fenómeno[13]. Una de las características de esta teoría es que toma en cuenta la interacción electrón-electrón; es decir, trabaja con un Hamiltoniano como el de la ec. (1.212) en el cual está incluido el potencial de interacción Coulombiana, al hacer dicha inclusión es necesario encontrar una función de onda Ψ como una solución al Hamiltoniano de muchos cuerpos. Para resolver este problema, en 1983 Laughlin[13] propuso una función de onda de la forma

$$\Psi = \left[\prod_{j<k} f(z_j - z_k) \right] e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2}. \quad (1.213)$$

Al sustituirla en la ecuación de Schrödinger con Hamiltoniano ec. (1.212) y minimizando la energía respecto a f , encuentra que esta debe ser un polinomio en z . La

antisimetría de Ψ requiere que f sea impar y la conservación del momento angular implica que $\prod_{j < k} f(z_j - z_k)$ sea un polinomio homogéneo de grado m , donde m es el momento angular total. Entonces, se tiene que $f(z) = z^m$, con m impar, de modo que

$$\Psi = \left[\prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \right] e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2}. \quad (1.214)$$

Para determinar si m minimiza la energía, lo que hace es sustituir esta expresión nuevamente en la ecuación de Shrödinger con Hamiltoniano ec. (1.212) y, resolviendo numéricamente, encuentra que el factor de llenado ν es el inverso de m , lo cual explica los valores impares de q .

Capítulo 2

Orden topológico

2.1. Concepto de orden en física

Las nociones de orden y desorden son fundamentales para el estudio en la física de la materia condensada moderna. Desde el punto de vista del estado sólido un sistema está ordenado cuando se encuentra formado por estructuras internas que se repiten a lo largo de todo el espacio, estas estructuras internas son llamadas órdenes. Además, las variables de estado (presión, temperatura, volumen, etc.) están bien definidas para un sistema ordenado. Contrario a lo anterior se habla de un desorden cuando no hay orden, aunque parezca algo trivial ésta es la mejor manera de definir el desorden. La manera de describir un sistema que no está ordenado es ver que las condiciones que se cumplen cuando está ordenado sean alteradas hasta acabar con un sistema en el que no se cumplan.

Existen diferentes estados o fases de la materia en el mundo que nos rodea; por ejemplo, podemos encontrar el estado gaseoso, el estado líquido y el estado sólido. Específicamente estos tres estados los podemos encontrar en el agua, por supuesto que cada estado se presenta en dicho líquido bajo ciertas circunstancias, como por ejemplo a diferentes temperaturas o bajo diferentes presiones. Estos son los estados más conocidos y estudiados de la materia. A temperaturas altas, la materia suele tener la forma de gas. Todos los átomos en un gas suelen moverse de manera aleatoria, independiente de otras partículas. Entonces, los gases son muy desordenados y un estado con muy poca correlación.

Al bajar la temperatura de los gases, el movimiento de los átomos tiene más correlación (es decir, el movimiento de un átomo depende del movimiento de otro átomo). De tal manera que los átomos forman un patrón muy regular y se desarrolla un orden en la estructura cristalina; en realidad, los átomos pueden formar una gran cantidad de órdenes en la estructura cristalina. Además de los cristales, los físicos descubrieron

otros estados de la materia en el siglo pasado, tales como superfluidos, materiales ferromagnéticos y antiferromagnéticos, y el cristal líquido que se utiliza para fabricar algunas calculadoras. Todos esos estados de la materia tienen diferentes estructuras y órdenes internos.

Para la física de la materia condensada un tema recurrente ha sido el descubrimiento y la clasificación de las distintas fases de la materia. Con tantos estados de la materia, se necesita una teoría general para obtener una comprensión más profunda de los estados de la materia y los órdenes internos asociados. Un paso clave que se dió en el desarrollo de esta problemática fue el de asociar los órdenes internos con las simetrías (o mejor dicho, el rompimiento de simetrías). Para ejemplificar, pensemos en el agua solidificada transformándose a líquido, inicialmente el sólido tiene ciertas simetrías si lo percibimos desde el punto de vista de el estado sólido, sin embargo, al pasar a líquido dichas simetrías tienden a romperse.

Fenómeno	Parámetro de orden
Estado superconductor	$ \psi(r) $
Ferromagnetismo	$M(r)$

Figura 2.1: Parámetros de orden en la teoría de transiciones de fase de Landau.

Basándose en la relación que hay entre los órdenes y las simetrías en los estados de la materia donde la correlación no es muy fuerte, Landau desarrolló una teoría general de órdenes y sus transiciones. Las fases pueden ser entendidas desde el enfoque de Landau, en el cual se caracterizan los estados en simetrías subyacentes que son espontáneamente rotas. El rompimiento de una simetría esta caracterizado mediante un parámetro de orden (Fig. (2.1)) distinto de cero que es el valor de expectación de un valor local

$$\psi(\vec{r}) = \langle \psi(\vec{r}) \rangle, \quad (2.1)$$

donde $\psi(\vec{r}) \neq 0$ para el estado ordenado y para el desordenado $\psi(\vec{r}) = 0$ en el cual hay un rompimiento de simetría.

Sin embargo, el descubrimiento del efecto Hall cuántico trajo consigo un nuevo estado de la materia el cual no puede ser caracterizado mediante la teoría de rompimiento de simetrías de Landau. El efecto Hall cuántico es un estado fuertemente correlacionado en el cual pueden existir muchas fases que no presentan rompimiento de simetrías. Con el paso del tiempo fue necesario buscar nuevas maneras de clasificar las fases en la física de la materia condensada. Entonces, se desarrolló una teoría de orden que retoma el estudio de las transiciones de fase, haciendo uso de la topología. Enseguida se tratará de explicar en que consiste el orden topológico.

2.2. Orden topológico

Las teorías de Landau como la de rompimiento de simetrías, han sido exitosas y por durante mucho tiempo no había sistema en la materia que no pudiera ser descrito por estas, fueron predominando en la caracterización de las fases en la física de la materia condensada; sin embargo, con el descubrimiento del efecto Hall cuántico se encontró otro estado de la materia el cual no pudo ser explicado mediante las teorías de Landau, es por eso que surge un nuevo paradigma sobre el orden en la física de la materia condensada.

Los nuevos estados de la materia como los que se encuentran en el FQHE, tienen diferentes estructuras internas, que son llamados diferentes tipos de orden. Como hemos venido diciendo, la definición precisa de orden involucra transiciones de fase, dos estados de un sistema de muchos cuerpos tienen el mismo orden si se puede pasar de un estado al otro mediante un cambio suave y sin tropezar con una transición de fase. En 1989 fue introducido el concepto de “orden topológico” para describir estos nuevos conceptos de ordenamiento, principalmente el efecto Hall cuántico (Figura (2.2)). El orden topológico es una propiedad general de un estado cuántico a temperatura cero con una brecha de energía finita.

Fenómeno	Parámetro de orden
IQHE	n
FQHE	ν

Figura 2.2: Parámetros de orden topológico.

El orden topológico es una teoría que intenta caracterizar las fases de un sistema mediante invariantes topológicos, fraccionización de algunas propiedades asociadas al sistema y mediante la descripción de la degeneración del estado base. Dichas propiedades se presentan en el FQHE; es por esto que inicialmente se describen relacionadas a este fenómeno. El concepto de invariante topológico se refiere a una cantidad que se mantendrá constante ante cambios suaves del Hamiltoniano que describe algún sistema de interés. Es así que sistemas, que pudiesen parecer distintos, pueden catalogarse dentro de una misma clasificación universal, siempre y cuando estén descritos por el mismo valor del invariante topológico.

Imaginemos que se tiene un sistema como el de la Figura 2.3, donde se encuentran en contacto el FQHE con el vacío. En dicho sistema existen dos tipos de invariantes topológicos, $n = 0$ asociado al vacío y $n = 1$ para el FQHE; sin embargo, se puede apreciar que los electrones más cercanos a la frontera entre el vacío y el gas de electrones libres, se comporta como un conductor, mientras que en el centro del sistema

Hall se tiene un comportamiento de aislante, entonces tenemos un sistema que tiene dos fases distintas, caracterizadas con un mismo invariante. En estos sistemas se aplica muy bien la teoría de orden topológico, ya que no hay rompimientos de simetría al pasar de una fase a otra.

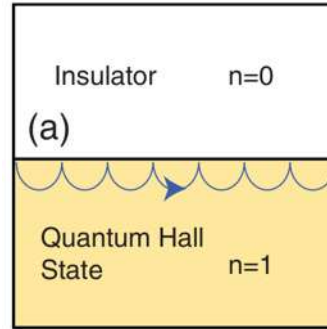


Figura 2.3: Invariante topológico n en un aislante (a) y para el FQHE cuando se encuentran en contacto los dos sistemas.

Para ganar un poco de conocimiento intuitivo sobre el orden topológico, primero recordemos como se describe un orden cristalino. En un cristal, los átomos se encuentran en posiciones relativamente fijas, respecto un átomo de los demás. El orden del cristal es sólo un orden posicional que describe como son la posiciones de los átomos respecto a los otros átomos. Sin embargo, los estados del efecto Hall cuántico son líquidos y los electrones no tienen orden posicional. Pero, el movimiento de los electrones no es precisamente aleatorio dentro del QHE. Cada uno se mueve alrededor de otro de una manera altamente correlacionada.

Si tratamos de visualizar el movimiento de los electrones en un estado del QHE, un simple electrón en un campo magnético siempre se mueve a lo largo de círculos (que son llamados movimientos del ciclotrón). Debido a la propiedad ondulatoria del electrón, los movimientos de ciclotrón pueden ser cuantizados tal que la órbita circular contienen un número entero de la longitud de onda. A bajas temperaturas los electrones siempre están en el primer nivel de Landau y debido a la interacción de Coulomb, los electrones tratan de estar lejos entre sí. Esto significa que a un electrón le toma más pasos para ir alrededor de otro electrón, si es posible.

Debido a estas características, el movimiento cuántico de los electrones en un estado del QHE es altamente organizado. Todos los electrones se mueven armónicamente de acuerdo a las siguientes reglas estrictas de colectividad armónicas:

(a) Todos los electrones hacen su movimiento de ciclotrón en el primer nivel de Landau.

(b) Un electrón siempre toma pasos impares para ir alrededor de otro electrón.

(c) Los electrones siempre tratan de estar alejados entre ellos tanto como sea posible.

Quiere decir que el movimiento armónico de cada electrón está correlacionado no solamente con un electrón, sino con todos los demás electrones. Entonces, se dice que hay unos patrones de baile global en el que todos los electrones bailan juntos. Este baile colectivo hace que el líquido del QHE sea un sistema altamente organizado que contiene unos órdenes bien definidos.

La caracterización de los patrones de baile (o el orden topológico) pueden ser mediante una matriz entera y simétrica K y un vector entero de carga Q . Las entradas del vector Q , son de carga (en unidades de e) referentes a las partículas en el fluido. Las entradas de la matriz K son el número de pasos que le toma a la partícula en ir alrededor de otra partícula. Todas las propiedades físicas asociadas con los órdenes topológicos pueden expresarse en términos de K y Q . Por ejemplo el factor de llenado está dado por $\nu = Q^T K^{-1} Q$. [14]

Los líquidos en el QHE son similares a los cristales en el sentido de que ambos contienen muchos patrones internos (u órdenes internos). La diferencia principal es que los patrones en los cristales son estáticos relativamente con las posiciones de los átomos, mientras que los patrones en los líquidos de QHE son dinámicos, asociados con la manera en que los electrones “bailan” alrededor de los demás.

Ahora que estamos haciendo la comparación de los cristales con los líquidos en el QHE, es necesario analizar la manera en que se miden los órdenes topológicos. En un cristal los órdenes pueden ser medidos mediante la difracción de los rayos X. En los líquidos del QHE la medición de los órdenes topológicos tiene que ver con la degeneración del estado base; y es que una propiedad especial en estos líquidos es que la degeneración de su estado base depende de la topología del espacio.

De acuerdo a la experiencia en los cristales, la aparición de los órdenes implica la existencia de defectos del orden. El tipo de defectos que pueden existir y la estructura de los defectos dependerá de los defectos del orden del estado causante. Entonces se puede hacer el estudio de un orden examinando estos defectos. La misma estrategia se puede aplicar para los órdenes topológicos en los líquidos del QHE. Los defectos en un orden topológico son llamados cuasipartículas. Éstas son excitaciones en los estados del QHE y las propiedades de sus comportamientos son muy inusuales; pueden tener una carga fraccionaria y una estadística fraccional. Esos números cuánticos reflejan la estructura interna de una cuasipartícula y la estructura interna de los líquidos del QHE.

2.3. Definiciones matemáticas

A todo esto es necesario introducir algunas definiciones matemáticas que permitan entender los conceptos matemáticos que se han utilizado hasta este momento. Para empezar una pregunta muy importante que conviene hacernos es: ¿qué es la topología? Respondiendo a esto, podemos entender que la topología es una parte de la geometría de tal manera que esta rama de las matemáticas, se encarga del estudio de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo transformaciones continuas para llegar de una figura a otra, cuando dichas figuras son plegadas, dilatadas, contraídas o deformadas de modo que no aparezcan nuevos puntos o se hagan coincidir puntos diferentes, por ejemplo las de la Figura (2.4). Para tener una idea de los orígenes de la topología, pues cabe mencionar que aparece en el siglo XVII, con el nombre de análisis situs, esto es análisis de la posición.

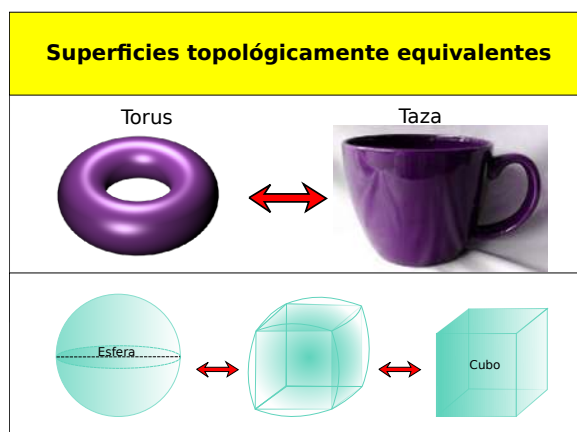


Figura 2.4: Algunas superficies topológicamente equivalentes.

Las transformaciones permitidas presuponen, en otras palabras, que hay una correspondencia biunívoca entre los puntos de la figura original y la transformada, y que la transformación hace corresponder puntos próximos a puntos próximos. Esta última propiedad se llama continuidad y lo que se requiere es que la transformación y su inversa sean ambas continuas: así, trabajamos con homeomorfismos.

El topólogo considera los mismos objetos que el geómetra, pero de modo distinto: no se fija en las distancias o los ángulos, ni siquiera de la alineación de los puntos. Para el topólogo un círculo es equivalente a una elipse; una bola no se distingue de un cubo: se dice que la bola y el cubo son objetos topológicamente equivalentes, porque se pasa de uno al otro mediante una transformación continua y reversible.

Desde el punto de vista matemático la base de la topología son los conjuntos, los cuales se utilizan para definir los espacios topológicos, estos espacios pueden ser homeomorfos u homotópicos. Entonces empezemos por definir cada uno de estos conceptos:

Un espacio topológico es un par (X, τ) donde X es un conjunto, y τ es una familia de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:

(1) $X \in \tau$ y $\emptyset \in \tau$.

(2) Dada una familia $\{A_i \in \tau \mid i \in I\}$ de elementos de τ , su unión $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ también está en τ .

(3) Si $A_1, A_2 \in \tau$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \tau$ (la intersección de dos elementos de la familia τ también es una familia).

Diremos entonces, que la familia τ es una topología sobre X y a sus elementos les llamaremos conjuntos abiertos de (X, τ) .

Se define a un mapeo continuo entre dos espacios topológicos X e Y , al mapeo $f : X \rightarrow Y$ que lleva puntos cercanos a puntos cercanos. El concepto de cercanía depende del espacio en el que se este trabajando; la idea intuitiva es que se trabaja con transformaciones que plegan, dilatan, contraen o deforman, sin romper los espacios involucrados.

Un homeomorfismo entre los espacios topológicos X e Y es un mapeo $f : X \rightarrow Y$ biyectivo, continuo, y tal que la inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ es también continua.

Sean X, Y espacios topológicos y f, g dos mapeos continuos cualquiera tales que $f, g : X \rightarrow Y$. Una homotopía de f a g es una función continua

$$H : X \times I \rightarrow Y,$$

en la que I representa el intervalo $[0, 1]$ y tal que para cualquier $x \in X$,

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, 1) = g(x),$$

en tal caso se dice que f es homotópica a g .

Un invariante topológico es cualquier propiedad de un espacio que se preserva bajo homeomorfismos.

Capítulo 3

Superconductividad y orden topológico

En este capítulo, nuestro objetivo consiste en describir el estado superconductor de bajas temperaturas dentro de una teoría topológica. Para lograr esto se identifican tres tareas:

- Describir el estado superconductor a partir de un parámetro de orden no-local.
- Identificar propiedades de naturaleza fraccionaria.
- Identificar estados fundamentales degenerados.

3.1. Orden local vs. orden topológico

Transformaciones locales de gauge

En la teoría de GL se tiene un parámetro de orden, el cual es local.

La teoría de Ginzburg-Landau para la superconductividad que se estudió en el capítulo 1 es un ejemplo de un campo escalar complejo acoplado a un campo electromagnético.[15, 16, 17, 18]. En tres dimensiones, el campo escalar se expresa como:

$$\sigma(\vec{r}) = \sigma_1(\vec{r}) + i \sigma_2(\vec{r}), \quad (3.1)$$

el cual está acoplado al vector potencial $\mathbf{A}$. El campo escalar describe estados enlazados de pares de electrones, los cuales existen en un superconductor por debajo de la temperatura crítica. Además, la teoría BCS de la superconductividad determinó que los pares de electrones se encuentran en un estado enlazado de singlete cuya función de onda tiene simetría S y carga $q = 2e$. El conjunto de estos estados enlazados se

puede describir en la vecindad de la temperatura crítica de transición T_c usando el campo escalar complejo insertado en una acción euclídeana

$$\mathcal{A}_E = \int \left[\frac{1}{2} \nabla \sigma^* \nabla \sigma + \frac{m^2}{2} \sigma^* \sigma + \frac{g}{4} (\sigma^* \sigma)^2 \right] d^3 \vec{r}, \quad (3.2)$$

donde está implícitamente el término del Lagrangiano dentro de los corchetes.

De la ec. (1.31), se tiene que $m^2 \propto (T - T_c)/T_c$, así que arriba de la temperatura crítica el parámetro m^2 es positivo, y por debajo de la misma m^2 es negativo. El resultado final es un rompimiento de simetría que separa los estados superconductor y normal. El grupo de simetría que se rompe es el de la simetría $U(1)$

$$\sigma(\vec{r}) \rightarrow e^{-i\Lambda} \sigma(\vec{r}), \quad (3.3)$$

bajo el cual, la acción $\mathcal{A}_E$ es invariante. Por esta razón, es una cuestión de convención seleccionar la fase de $\sigma(\vec{r})$. Sin embargo, una vez hecha la selección de la fase, por ejemplo, para un tiempo inicial t , entonces las ecuaciones de evolución en el tiempo de $\sigma(\vec{r})$ determinarán el valor de la fase en algún otro valor de t , es decir, la teoría sólo determina la diferencia de fases. En este sentido, se puede hablar de un sistema degenerado, ya que las funciones $\sigma(\vec{r})$, con el mismo módulo, pero diferentes fases, describen de manera independiente los estados del mismo sistema. En el caso particular en que $\sigma(\vec{r})$ sea una función de onda normalizada de la mecánica cuántica, la fase pierde sentido porque el contenido físico de la función de onda reside solamente en el módulo de la misma, el cual define la probabilidad del sistema de encontrarse en la región del espacio correspondiente.

La acción en la ec. (3.2) corresponde a la versión euclídeana de una teoría de campo relativista en $D = 2 + 1$ dimensiones con una acción en general dada por

$$A = \int \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \sigma^* \partial^\mu \sigma - \frac{m^2}{2} \sigma^* \sigma - \frac{g}{4} (\sigma^* \sigma)^2 \right] d^D \vec{r}. \quad (3.4)$$

Para $T > T_c$, cuando el término de masa es positivo, se generan pequeñas oscilaciones alrededor del punto $\sigma = 0$, las cuales surgen de los modos degenerados asociados a σ_1 y a σ_2 , ambos de masa m^2 . Para $T < T_c$, cuando el término de masa es negativo, la energía se minimiza por un campo σ con valor esperado real y distinto de cero, es decir,

$$\langle \sigma(\vec{r}) \rangle \equiv \phi_0. \quad (3.5)$$

Entonces, la simetría entre σ_1 y a σ_2 se rompe dando origen a dos modos distintos de oscilaciones: uno ortogonal a $\langle \sigma \rangle$, el cual corresponde al modo sin masa de Nambu-Goldstone, y uno paralelo $\langle \sigma \rangle$, el cual tiene masa positiva $-2m^2 > 0$.

Consideremos ahora transformaciones locales de fase y veamos si la acción de la ec. (3.4) se mantiene igualmente invariante. Una transformación local estará dada por

$$\sigma(\vec{r}) \rightarrow e^{iq\Lambda(\vec{r})} \sigma(\vec{r}). \quad (3.6)$$

La variación local no afectará el término de la masa, el cual involucra la transformación del campo en las mismas coordenadas de espacio y tiempo. En cuanto comparamos los campos en distintos puntos espacio-temporales, entonces el carácter local de la transformación es crucial. La derivada estará sujeta a las transformaciones de los campos en una vecindad infinitesimal. Para verificar lo anterior podemos evaluar el efecto de la transformación sobre $\partial_\mu \sigma$,

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu (e^{iq\Lambda(\vec{r})} \sigma(\vec{r})) \quad (3.7)$$

$$\rightarrow e^{iq\Lambda(\vec{r})} (\partial_\mu \sigma(\vec{r}) + iq \partial_\mu \Lambda(\vec{r}) \sigma(\vec{r})). \quad (3.8)$$

Observamos que $\partial_\mu \sigma(\vec{r})$ no se transforma de la misma manera que $\sigma(\vec{r})$. Existe un término extra originado por las transformaciones en puntos vecinos, el cual es proporcional a la derivada del parámetro de transformación Λ . Este término es responsable de que la acción de la ec. (3.4) deje de ser invariante bajo transformaciones locales de fase. Para resolver esta situación, podemos considerar introducir otros términos cuya variación compense el efecto de $\partial_\mu \Lambda$ en la ec. (3.8). Lo primero que podemos intentar es construir una derivada *modificada* D_μ , la cual esperamos que se transforme de la siguiente manera,

$$D_\mu \sigma(\vec{r}) \rightarrow e^{iq\Lambda(\vec{r})} (D_\mu \sigma(\vec{r})). \quad (3.9)$$

Como la transformación de $D_\mu \sigma$ está determinada por completo por el parámetro Λ , al igual que la transformación de σ , a D_μ se le llama *derivada covariante*¹.

Comparando las ecs. (3.8) y (3.9), observamos que la derivada modificada debe tener términos que anulen la derivada parcial de Λ . Definamos entonces lo siguiente:

$$D_\mu \sigma(\vec{r}) = (\partial_\mu - iq A_\mu(\vec{r})) \sigma(\vec{r}), \quad (3.10)$$

de lo cual obtenemos que,

$$D_\mu \sigma(\vec{r}) \rightarrow (\partial_\mu \sigma(\vec{r}))' - iq (A_\mu \sigma(\vec{r}))' \quad (3.11)$$

$$\rightarrow e^{iq\Lambda(\vec{r})} (\partial_\mu \sigma(\vec{r}) + iq \partial_\mu \Lambda(\vec{r}) \sigma(\vec{r}) - iq A'_\mu \sigma(\vec{r})). \quad (3.12)$$

Comparando lo anterior con la ec.(3.9), la nueva cantidad A_μ debe transformarse siguiendo la regla

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda(\vec{r}). \quad (3.13)$$

¹El término *covariante* se deja apreciar mejor si pensamos que una transformación local de fase puede tratarse como el producto de transformaciones de fases independientes, cada una de las cuales actúa en distintas coordenadas espacio-temporales. Es posible que existan entonces cantidades locales que se transformen sólo bajo una transformación gauge tomada en el mismo punto de espacio-tiempo. Se dice entonces que estas cantidades se transforman de manera *covariante*. Por ejemplo, el campo σ se transforma de manera covariante bajo transformaciones locales de fase mientras que la derivada ordinaria es *no covariante* (ver ec.(3.8)). Motivados por tener cantidades que se transformen de forma covariante, es que se ha definido la derivada covariante de la ec. (3.9).

Finalmente tenemos todos los elementos para garantizar que la versión euclidiana de la acción en la ec. (3.4) sea invariante bajo transformaciones locales de gauge². Sin embargo, para que dicha acción describa el fenómeno de superconductividad, se debe incluir la contribución electromagnética libre,

$$\mathcal{A}_\gamma = - \int \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 d^D \vec{r}, \quad (3.14)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.15)$$

Siendo la acción total, el resultado de acoplar un campo escalar con un campo electromagnético,

$$\mathcal{A} = \int \left[\frac{1}{2} |D_\mu \sigma|^2 - \frac{m^2}{2} |\sigma|^2 - \frac{g}{4} |\sigma|^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \right] d^D \vec{r}, \quad (3.16)$$

la cual es invariante bajo las transformaciones

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{r}) &\rightarrow e^{iq\Lambda(\vec{r})} \sigma(\vec{r}), \\ A_\mu(\vec{r}) &\rightarrow A_\mu(\vec{r}) + \partial_\mu \Lambda(\vec{r}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Veamos ahora cómo es que podemos recuperar las características de un superconductor de la teoría anterior.

Mecanismo abeliano de Higgs

El lagrangiano completo de la teoría de Ginzburg-Landau, que se emplea para calcular la acción en la ec.(3.17) es:

$$\mathcal{L}_{GL} = (D_\mu \sigma)^\dagger (D^\mu \sigma) - m^2 |\sigma|^2 - \frac{1}{2} \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (3.18)$$

Consideremos las pequeñas fluctuaciones del campo escalar alrededor de su mínimo, σ_0 y realicemos la siguiente expansión,

$$\sigma(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) e^{i\theta(\vec{r})} = \left(\sigma_0 + \eta(\vec{r}) \right) e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (3.19)$$

donde $\theta(\vec{r})$ es la componente real de la fase del campo y el campo (real) $\eta(\vec{r})$ describe las fluctuaciones del sistema. Al sustituir la ec. (3.19) en el Lagrangiano de la ec. (3.18), obtenemos³

²Un ingrediente fundamental de la teoría de electrodinámica cuántica es la invarianza bajo transformaciones de gauge, cuya formulación clásica se debe a James C. Maxwell. Bajo estas transformaciones, las funciones de onda (o campos) asociados con partículas cargadas cambian su fase en una cantidad que puede variar de un punto del espacio a otro. Es posible generalizar estas transformaciones de gauge a grupos de transformaciones más complicados, lo cual lleva a un conjunto de teorías gauge.

³Se eliminan las contribuciones no físicas de la transformación $A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{2e} \partial_\mu \theta$.

$$\mathcal{L} = [D_\mu(\sigma_0 + \eta(\vec{r}))e^{i\theta(\vec{r})}]^\dagger [D^\mu(\sigma_0 + \eta(\vec{r}))e^{i\theta(\vec{r})}] - \quad (3.20)$$

$$m^2|(\sigma_0 + \eta(\vec{r}))|^2 - \frac{1}{2}|(\sigma_0 + \eta(\vec{r}))|^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (3.21)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\eta + \mathcal{L}_{h.o.} \quad (3.22)$$

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2q\sigma_0^2 A_\mu A^\mu, \quad (3.23)$$

$$\mathcal{L}_\eta = (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - 2m^2 \eta^2, \quad (3.24)$$

$$\mathcal{L}_{h.o.} = \mathcal{O}(\eta^3). \quad (3.25)$$

La última parte de la ecuación anterior se refiere a términos de tercero y cuarto orden y para fluctuaciones muy pequeñas, este término no será considerado. Sin embargo, el lagrangiano $\mathcal{L}_A$ coincide con aquél de un fotón con masa m_A dada por

$$m_A^2 = 8e^2\sigma_0^2, \quad (3.26)$$

mientras que $\mathcal{L}_\eta$ describe un campo escalar (real) η con masa m_η dada por

$$m_\eta^2 = 4\lambda\sigma_0^2 = -2m^2. \quad (3.27)$$

Nótese que la fase θ ha desaparecido debido a la transformación gauge. Entonces, para $T > T_c$ el sistema de pares de Cooper puede ser descrito por un campo escalar complejo σ con parámetro de masa m^2 , con las interacciones electromagnéticas de orden infinito descritas por el campo (sin masa) A_μ . Pero para $T < T_c$, nos quedamos con un campo escalar real η con parámetro de masa $m_\eta^2 = -2m^2$, el cual describe las fluctuaciones del sistema, además tenemos el campo A_μ de orden finito descrito por un fotón masivo.

Para fluctuaciones pequeñas, las ecuaciones de campo electromagnético se simplifican a

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_A^2 A^\nu = 0, \quad (3.28)$$

es decir,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -m_A^2 A^0, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{B} = -m_A^2 \mathbf{A}. \quad (3.30)$$

Después de tomar el gradiente y el rotacional de las ecuaciones anteriores, en el caso estacionario obtenemos,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = m_A^2 \mathbf{E}, \quad (3.31)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = m_A^2 \mathbf{B}. \quad (3.32)$$

Si nos concentramos en la ecuación para el campo magnético y lo simplificamos a una sola dirección, tenemos entonces que

$$\frac{d^2 B}{dx^2} = m_A^2 B. \quad (3.33)$$

La solución de la ecuación anterior es:

$$B = B_0 e^{-x/\lambda}, \quad (3.34)$$

de lo cual recuperamos el *efecto Meissner* con una longitud de penetración

$$\lambda = \frac{1}{m_A} \simeq \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}}. \quad (3.35)$$

Por otra parte, la ecuación dinámica para el campo de fluctuaciones η es

$$\partial^\mu \partial_\mu \eta + m_\eta^2 \eta = 0, \quad (3.36)$$

lo cual, en el caso estacionario y uni-dimensional se reduce a

$$\frac{d^2 \eta}{dx^2} = m_\eta^2 \eta, \quad (3.37)$$

cuya solución es de la forma

$$\eta = \eta_0 e^{-x/\xi}, \quad (3.38)$$

con longitud de coherencia

$$\xi = \frac{1}{m_\eta} = \frac{1}{\sqrt{-2m^2}} \simeq \frac{\xi_0}{\sqrt{2 \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)}}. \quad (3.39)$$

Concluimos entonces que, en el formalismo de Lagrange, se ha recuperado aspectos fundamentales de la transición superconductor. Es importante observar la relación entre los parámetros de la teoría lagrangiana y los parámetros del fenómeno superconductor.

Una teoría topológica no tiene un parámetro de orden local, sino uno no-local.

Parámetro de orden no-local

Se puede encontrar un parámetro de orden no-local que de todas maneras exprese la física de los materiales superconductores y permita dar el primer paso en la inserción de una teoría topológica.

Un ejemplo de dicho parámetro de orden no-local es el parámetro de orden de Dirac, invariante bajo transformaciones de gauge,

$$\sigma_D^\dagger(\vec{r}) = e^{i \int \vec{E}_c(\vec{r}' - \vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}') d^3 \vec{r}'} \sigma^\dagger(\vec{r}). \quad (3.40)$$

En la ecuación anterior $\vec{E}_c(\vec{r})$ es un campo eléctrico clásico generado por una carga puntual en el origen, es decir, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_c(\vec{r}) = \delta(\vec{r})$, y σ y A son operadores cuánticos de campo. Integrando parcialmente se concluye que una transformación de gauge deja la combinación σ_D invariante. La interpretación física del operador σ_D es la de un operador de creación de una partícula cargada σ con su correspondiente campo de Coulomb de largo alcance⁴. Si seleccionamos el gauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, el campo coulombiano se describe por completo por el potencial escalar A^0 , además σ_D se simplifica a σ . La conclusión es que en el gauge de Coulomb el parámetro de orden de Dirac *parece* local, lo cual puede verificarse al escribir $\vec{E}_c(\vec{r})$ como gradiente e integrar por partes. Con esto, un superconductor queda caracterizado por un orden de largo alcance en σ_D . Una demostración rigurosa de lo anterior la realizaron Kennedy y King [19] empleando una generalización covariante de la ec. (3.40). Su demostración incluye la prueba de que σ_D no puede ser usado al igual que un parámetro de orden local. Se encuentra que la función de correlación temporal de σ_D decae en forma algebraica a un valor asintótico. Con un parámetro de orden local, esto sería la señal de bosones de Goldstone. Sin embargo, el mecanismo Anderson-Higgs prohíbe la existencia de dichos bosones en su espectro, lo cual demuestra que una descripción basada en σ_D no tiene las mismas características del modelo sigma estándar.

3.2. Naturaleza fraccionaria en el fenómeno de superconductividad

Entre las excitaciones de baja energía que podemos encontrar para un superconductor se encuentran las cuasipartículas formadas por el rompimiento de pares de Cooper, vórtices o líneas de vórtice en 2 y 3 dimensiones espaciales, respectivamente.

Recuperemos el modelo de la ec. 3.18, ahora con el término de corriente generado por cargas e :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GL} &= (D_\mu \sigma)^\dagger (D^\mu \sigma) - m^2 |\sigma|^2 - \frac{1}{2} \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - e A_\mu j^\mu \\ &= \frac{1}{2M} |i D_\mu \sigma|^2 - \frac{m^2}{2} \sigma^\dagger \sigma - \frac{\lambda}{4} (\sigma^\dagger \sigma)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - e A_\mu j^\mu. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Reescribamos la ecuación anterior con $\sigma = \sqrt{\rho} e^{i\varphi}$, además, haremos énfasis en el caso $m^2 \ll 0$:

$$\mathcal{L}_{GL} = \frac{\bar{\rho}}{2M} (\partial_\mu \varphi + 2e A_\mu)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - e A_\mu j^\mu + \dots, \quad (3.42)$$

donde se empleó el valor clásico de la amplitud, $\bar{\rho} = -m^2 \lambda$ y los puntos indican fluctuaciones de la densidad que serán ignorados. Si realizamos la siguiente transformación de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{2e} \partial_\mu \varphi \quad (3.43)$$

⁴Es decir, se tiene un conjunto de estados coherentes de fotones.

obtendremos el siguiente Lagrangiano efectivo:

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \frac{m_s^2}{2}A_\mu^2 - eA_\mu j^\mu, \quad (3.44)$$

donde

$$m_s^2 = \lambda_L^{-2} = \frac{4e^2\bar{\rho}}{M}. \quad (3.45)$$

El Lagrangiano de la ec. (3.44) corresponde a aquel de un campo abeliano masivo acoplado a una corriente que se conserva. En ausencia de la corriente, se obtienen los modos colectivos, con una brecha de energía, del superconductor⁵. En presencia de una corriente, la ecuación de movimiento clásica se convierte en la versión relativista de la ecuación de London:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu - m_s^2 A^\mu = j^\mu + j_{sc}^\mu, \quad (3.46)$$

donde se identifica $m_s^2 A^\mu$ como la corriente de apantallamiento en el medio. Si $m^2 \neq 0$, entonces la ec. (3.46) significa que $\partial_\mu A^\mu = 0$, es decir, la corriente de apantallamiento se conserva y la ecuación de movimiento se simplifica a

$$(\Delta + m^2)A^\mu = j^\mu, \quad (3.47)$$

de lo cual se concluye que *todos* los campos y corrientes clásicos son apantallados exponencialmente a lo largo de una longitud λ_L . Esto es una consecuencia del efecto Meissner. Nótese que en la ec. (3.44) no se ha incluido términos de vórtices ni de líneas de vórtice, los cuales ya poseen una propiedad fraccionaria asociada a su naturaleza cuantizada.

El apantallamiento que se analizó previamente, tiene consecuencias importantes para los números cuánticos de las cuasipartículas: no poseen carga eléctrica [20]. Analicemos lo anterior de la siguiente manera: considérese el paquete de ondas de una cuasipartícula en reposo en un sistema de referencia dado. En ese sistema de referencia, el potencial escalar es la única componente de A^μ distinta de cero y se anula a lo largo de la longitud λ_L . Si realizamos una transformación de Lorentz, obtendremos los potenciales de la cuasipartícula en movimiento y de todas maneras encontraremos que todas las componentes de A^μ decaen exponencialmente a lo largo de λ_L . Como no se origina ningún campo una vez sobrepasada esta frontera, la cuasipartícula es clásicamente neutra para grandes longitudes de onda. Las cosas se complican cuando las longitudes de apantallamiento longitudinal y transversal son distintas. En el caso extremo de los metales, para los cuales la longitud de apantallamiento transversal es infinita, una carga en movimiento dará origen a un patrón dipolar de corriente en contra flujo, lo cual decaerá solo algebraicamente a grandes distancias [21]. Para un superconductor, este patrón dipolar se truncará a una distancia de λ_L , mientras que la corriente longitudinal y los potenciales decaerán en la escala de la longitud de Thomas-Fermi. En el problema planteado por la ec. (3.47), ambas componentes, longitudinal y transversal, decaen igualmente y, por lo tanto, no existe ningún residuo de corriente alguna. El hecho de que desaparezca la carga de la cuasipartícula, es un indicio de la característica fraccionaria de los números cuánticos.

⁵La ausencia de modos sin gap corresponde al mecanismo de Anderson-Higgs.

3.3. Estado fundamental degenerado

Como ya se había mencionado anteriormente, una de las características que tiene un orden topológico, es que el estado fundamental se encuentra degenerado. Para comprender como se puede presentar la degeneración del estado fundamental en el fenómeno de la superconductividad, vamos a empezar por entender la degeneración del estado fundamental en el FQHE, en el cual se han realizado muchos estudios sobre el tema.

Los diferentes estados del FQHE pueden ser clasificados por órdenes topológicos; a su vez, se ha demostrado que los ordenes topológicos pueden ser caracterizados por la degeneración de los estados fundamentales en un espacio compacto. Para los estados más simples del FQHE dados por la función de onda de Laughlin ec. (1.213), se ha encontrado que el estado base no esta degenerado en una esfera y en un toroide esta q -veces degenerado (con genero $g = 1$). En base a los resultados que se han obtenido para diferentes espacios topológicos, es que se puede decir que la degeneración del estado fundamental en el FQHE, depende de la topología del sistema geométrico.

Enseguida desarrollaremos la degeneración del estado fundamental de un sistema FQHE usando una geometría toroidal mediante métodos elementales. Para esto, comencemos por revisar brevemente el grupo de traslación magnética. Considere un electrón de carga $-e$ en un plano rectangular de $L_1 \times L_2$, con un campo magnético B en la dirección perpendicular ($\hat{z}$). En ausencia de impurezas, el Hamiltoniano es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x \right)^2 + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y \right)^2 \right], \quad (3.48)$$

en donde (A_x, A_y) es el vector potencial tal que $\frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x = B$. El Hamiltoniano tienen una simetría de traslación magnética [22]

$$t(\mathbf{a}) = e^{i\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}}{\hbar}}, \quad (3.49)$$

donde $\mathbf{a}$ es un vector en el plano, y $\mathbf{k}$ es un operador (pseudomomento) definido por

$$\begin{aligned} k_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x + eBy, \\ k_y &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y - eBx. \end{aligned} \quad (3.50)$$

El momento dinámico se define como

$$\begin{aligned} \Pi_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eA_x, \\ \Pi_y &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} + eA_y, \end{aligned} \quad (3.51)$$

este puede conmutar con $\mathbf{k}$ y con el Hamiltoniano (3.48). Del conmutador

$$[k_x, k_y] = i\hbar B, \quad (3.52)$$

se obtiene

$$t(\mathbf{a})t(\mathbf{b}) = t(\mathbf{b})t(\mathbf{a}) \cdot e^{i\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{l^2}}, \quad (3.53)$$

donde $l \equiv (\frac{\hbar}{eB})^{\frac{1}{2}}$ es la longitud magnética.

Cuando hay N_e electrones, cada uno con una energía cinética (3.49), interactuando mutuamente por medio de un potencial

$$\mathbf{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (3.54)$$

la traslación magnética de muchos cuerpos

$$T(\mathbf{a}) = \prod_{j=1}^{N_e} t_j(\mathbf{a}), \quad (3.55)$$

deja el Hamiltoniano del sistema invariante, donde t_j actúa con el j -ésimo electrón. A fin de utilizar esta simetría, se debe imponer en la función de onda de muchos cuerpos, las condiciones periódicas de frontera:

$$\begin{aligned} t_j(\mathbf{L}_1)\psi &= \psi, \\ t_j(\mathbf{L}_2)\psi &= \psi, \end{aligned} \quad (3.56)$$

donde $\mathbf{L}_1 = L_1\hat{x}$, $\mathbf{L}_2 = L_2\hat{y}$. Esto significa que la función de onda es la misma cuando un electrón esta magnéticamente trasladado $\mathbf{L}_1$ o $\mathbf{L}_2$ a través del plano.

Asumiendo que hay N_s (entero) cuantos de flujo magnético a través de la superficie

$$N_s = \frac{L_1 L_2}{2\pi l^2}, \quad (3.57)$$

que es también el número total de estados de una sola partícula en un nivel de Landau. Correspondiente a una fracción de llenado del nivel más bajo de Landau, tenemos

$$N_e = \frac{p}{q} N_s, \quad (3.58)$$

donde p y q son mutuamente enteros primos. Las traslaciones que también dejan las condiciones de frontera invariantes son

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv T \frac{L_1}{N_s}, \\ T_2 &\equiv T \frac{L_2}{N_s}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

y sus potencias enteras. Entonces podemos escoger un estado base ψ_0 que sea un eigenestado de T_2 , por lo tanto,

$$T_2\psi_0 = e^{i\lambda}\psi_0, \quad (3.60)$$

donde λ es un número real debido a la unitariedad de T_2 . Además, dado

$$\begin{aligned} T_1T_2 &= T_2T_1e^{\frac{-iN_e(L_1 \times L_2)}{N_e^2t^2}}, \\ &= T_2T_1e^{\frac{-i2\pi p}{q}}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

habrá $q - 1$ más estados degenerados (en energía) con ψ_0 . Estos son

$$\psi_n \equiv T_1^n\psi_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, q - 1, \quad (3.62)$$

y son eigenestados de T_2 ,

$$T_2\psi_n = e^{i\lambda}e^{\frac{i2\pi pn}{q}}\psi_n, \quad (3.63)$$

con diferentes eigenvalores, y por lo tanto son ortogonales a ψ_0 y viceversa. Esto implica que los estados fundamentales son por lo menos q -veces degenerados.

En el caso del estado superconductor, la degeneración del estado fundamental se describe en forma paralela a lo anteriormente desarrollado. Lo anterior es de especial interés porque, de acuerdo a R.V. Laughlin [23], hay una relación entre el estado superconductor de altas temperaturas críticas y el efecto Hall cuántico fraccionario. Esto sigue siendo tema de intensa discusión.

Conclusiones

En este trabajo se han querido conciliar dos tipos de fenómenos que, en una primera aproximación, no estarían relacionados entre sí. En la física de la materia condensada, uno de los principales intereses es el de clasificar los estados y fases de la materia. Para ello, la teoría de Landau para transiciones de fase de segundo orden, se ha mantenido como un recurso exitoso. Sin embargo, la realización de experimentos, como el de Klaus von Klitzing, motivaron una reflexión sobre la posibilidad de la existencia de fases ordenadas de la materia que no impliquen un rompimiento de simetría del sistema en cuestión. A esto se le conoce como *orden topológico*.

Tenemos entonces, por una parte, a los efectos Hall cuántico entero y fraccionario⁶ con las características de estar descritos por un orden que no implica el rompimiento de alguna simetría, además de presentar estados conductores de superficie. En especial, el trabajo relacionado con el efecto Hall cuántico fraccionario, sigue activo debido a que se teoriza la existencia de cargas fraccionarias para entender el fenómeno, lo cual aún no goza de un consenso.

Por otra parte, tenemos el fenómeno de la superconductividad que, igualmente, es vasto por sí mismo. Hasta el momento no se cuenta con una teoría que describa todos los aspectos observados relacionados a este fenómeno. Tampoco sabemos todavía cómo obtener un material superconductor a temperatura ambiente. Además, descubrimientos recientes han modificado nuestro conocimiento original de la superconductividad. Con lo anterior hacemos referencia a los sistemas de hierro y arsénico en los cuales se ha observado superconductividad a una temperatura crítica de entre 30 y 40 K [25], lo cual contradice el paradigma de que el magnetismo y la superconductividad son fenómenos excluyentes.

En este trabajo de tesis se ha presentado la propuesta de hacer compatibles los fenómenos arriba descritos, es decir, se ha planteado un escenario plausible en el cual la superconductividad dejaría de obedecer a una transición de fase y se entendería como un aspecto topológico en materia condensada. Se estudiaron los fenómenos de superconductividad y de efecto Hall cuántico, en sus versiones entera y fraccionaria y, partiendo de un modelo basado en el mecanismo abeliano de Higgs, se recupera la descripción de Ginzburg-Landau para la superconductividad. Además, se analiza la naturaleza fraccionaria de la superconductividad y los estados degenerados del efecto Hall cuántico fraccionario. Entre el trabajo que queda por hacer, se encuentra el reconocimiento de los estados degenerados correspondientes al estado superconductor,

⁶En el grafeno, se ha observado el efecto Hall cuántico fraccionario con $\nu = 1/2$, lo cual se ha reconocido con características anómalas incluso comparadas con el FQHE original [24].

además de poder introducir una descripción de la termodinámica asociada a este último estado.

Esperamos que este trabajo sirva para invitar a otros estudiantes a observar las distintas posibilidades que pueden existir para entender nuestro universo.

Bibliografía

- [1] C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. Wiley, 1995.
- [2] James F. Annett. *Superconductivity, Superfluids and Condensates*. Oxford, 2003.
- [3] O. Navarro y R. Baquero. *Ideas fundamentales de la superconductividad*. Morevallado, 2007.
- [4] Neil W. Ashcroft and N. David Mermin. *Solid state physics*. Harcourt, 1976.
- [5] George B. Arfken and Hans J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Elsevier, 2005.
- [6] E. Laurman and D. Shoenberg. Penetration of magnetic field into superconductors. *Nature*, 160:747, 1947.
- [7] Peter J. Hirschfeld. Ginzburg-Landau Theory. *Topics in Theoretical Physics*, 7428:21, 1996.
- [8] M. Thinkham. *Introduction to superconductivity*. McGraw-Hill, 1996.
- [9] Jr. Charles P. Poole. *Handbook of Superconductivity*. Academic Press, 2000.
- [10] U. Fastenrath M. Janssen, O. Viehweger and J. Hajdu. *Introduction to the Theory of the Integer Quantum Hall Effect*. VCH, 1994.
- [11] Daijiro Yoshioka. *The Quantum Hall Effect*. Springer, 2002.
- [12] D. C. Tsui. The strange physics of two-dimensional electrons in a strong magnetic field. *Physica B: Condensed Matter*, 164:59, 1990.
- [13] Arthur C. Gossard Horst L. Stormer, Daniel C. Tsui. The fractional quantum Hall effect. *Rev. Mod. Phys.*, 71:298, 1999.
- [14] Xiao-Gang Wen. *An Introduction of Topological Orders*. PhD thesis, Dept. of Physics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, 2000.
- [15] E. Di Grezia, S. Esposito, and A. Naddeo. Quantum phase excitations in Ginzburg-Landau superconductors. *Int. J. Mod. Phys. B*, 20:737, 2006.

- [16] H. Arodz, J. Dziarmaga, and W. H. Zurek (Eds.). *Patterns of symmetry breaking*. NATO Science Series, 2006.
- [17] M. D. Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge University Press, 2014.
- [18] E. Bick and F. D. Steffen (Eds.). *Topology and geometry in physics*. Springer, 2005.
- [19] T. Kennedy and C. King. Symmetry breaking in the lattice abelian Higgs model. *Phys. Rev. Lett.*, 55:776, 1985.
- [20] S.A. Kivelson and D.S. Rokhsar. Bogoliubov quasiparticles, spinons, and spin-charge decoupling in superconductors. *Phys. Rev. B*, 41:11693, 1990.
- [21] D. Pines and P. Nozieres. *The theory of quantum liquids*. Addison-Wesley, 1989.
- [22] Q.Niu X.G. Wen. Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus riemann surfaces. *Physical Review B*, 9377:9395, 1989.
- [23] R. B. Laughlin. The relationship between high-temperature superconductivity and the fractional quantum Hall effect. *Science*, 242:525, 1988.
- [24] K. S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S. V. Morozov, H. L. Stormer, U. Zeitler, J. C. Maan, G. S. Boebinger, P. Kim, and A. K. Geim. Room-temperature quantum Hall effect in graphene. *Science*, 315(5817):1379, 2007.
- [25] Michael R. Norman. High-temperature superconductivity in the iron pnictides. *Physics*, 1:21, 2008.