



**UNIVERSIDAD MICHOACANA DE SAN NICOLÁS DE HIDALGO**

**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**  
**MAT. LUIS MANUEL RIVERA GUTIÉRREZ**

**UN ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LAS CARACTERÍSTICAS  
GEOMÉTRICAS DE UNA MALLA LÓGICAMENTE RECTANGULAR EN LA  
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE ADVECCIÓN SOBRE  
REGIONES PLANAS IRREGULARES**

**TESIS**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

**LIC. EN CIENCIAS FÍSICO MATEMÁTICAS**

PRESENTA

**GERALDINE JASSÍ VEGA**

ASESOR:

**DR. JOSÉ GERARDO TINOCO RUIZ**

MORELIA MICHOACÁN, FEBRERO 2015

# Agradecimientos

Este trabajo está dedicado de manera muy especial a la memoria de una gran persona, una gran mujer, que aunque ya no está físicamente conmigo, fue mi inspiración y motivación para que yo estudiara y me superara, a mi Mamá Piedad, que espero que desde el cielo me esté viendo y se sienta aunque sea un poquito orgullosa de mí...

Son tantas las personas a las cuales tengo algo o mucho que agradecerles por apoyarme en la vida que espero no se olvide alguna. Quiero empezar por agradecer a Dios por permitirme estar hoy aquí, agradecerle también a mi familia por ser eso, mi familia... a mis padres Rosa y Fidel por darme la vida y en especial a mi mamá que sin duda alguna es la persona que más quiero y respeto, la que a lo largo de mi existencia me ha dado todo lo que necesario e incluso mucho más, ella me brindó todo lo material y lo más importante su amor, su compañía, su lealtad, su comprensión, sus consejos, su ejemplo y más... para mí es una mujer y una madre admirable, como pocas, con ese carácter tan fuerte para cuidar a sus hijos y al mismo tiempo ese amor por los mismos; ella siempre fue un ejemplo de trabajo, fortaleza, sinceridad, humildad, bondad, justicia, y tantas otras virtudes que le admiro que no terminaría de describir, aunque frecuente nos estamos peleando por la manera tan distinta que tenemos de pensar es gracias a ella, a mi madre, que soy lo que soy, también gracias a ella han sido y seguirán siendo mis logros en la vida, me enseñó a luchar por lo que quiero y a no darme por vencida, a hacer todo siempre de la manera correcta y a ser independiente, y aunque últimamente se le olvida que ella es la mamá, ya me dio todo lo que necesitaba para la vida y siempre estará ahí para mí. Las cualidades que mi mamá me admira también son cosecha de lo que ella sembró en mí, no tengo palabras para agradecerle todo mamá, gracias... bueno ahora seguiré con mi papá, pues creo que lo que si he de agradecerle es que gracias a su ausencia aprendí a no depender de nadie, a defenderme sola, a ser fuerte y no dejar que nada ni nadie “me haga menos” y pues en parte mi orgullo y terquedad (que a veces eso es bueno), lo que indirectamente formó mi carácter fuerte, también le agradezco el apoyo económico que algunas veces me da. Para seguir con mi familia, también quiero agradecerles a mis tres hermanos Juan Carlos, Aldo Iván y Amed Giovanni por su apoyo, aunque con Carlos de repente tenemos muchas diferencias también me apoya e incluso me inspiró mucho mis primeros años académicos, a Aldo por siempre estar conmigo, por quererme y defenderme, por su cariño y por todo su apoyo y comprensión, por recogerme cuando ando sola en las noches en la calle y tantas cosas más, a Giovanni por su comprensión y cariño, porque siempre me ayuda cuando lo necesito, en especial cuando le pasa algo al carro me ayuda, claro después de un “taruga”, en fin gracias hermanos por su amor y su ayuda, gracias por ser mis hermanos y aguantarme tanto y tantas cosas, de verdad muchas gracias. Siguiendo con la familia toca el turno a dos personitas muy especiales, a quienes me quitaron el trono, a Aldo Jair y Diego Jaret mis “chiquiados favoritos”, los “herrrmanos” por tanto amor que me dan, porque con sus travesuras y ocurrencias me alegran la vida (bueno a veces también me hacen enojar), a Jair por sus cafés “hechos con mucho amor” que me prepara cuando hacía tarea, revisaba exámenes y muchas otras veces más, a Diego por esas noches en las que yo me desvelaba haciendo tarea él se desvelaba conmigo para “no estar sola”, de todo corazón gracias familia.

Como creo que ya van a estar más grandes mis agradecimientos que mis conclusiones, mejor sigo con quienes formaron parte de mi vida universitaria, empezaré con el profe Mariano, quien fue mi profesor en mi primer semestre de la licenciatura, y desde ese momento hasta ahora ha formado parte de mi vida, más que como maestro (por que no me gusta la física) y aunque sabía que yo quería ser matemática y trataba de convencerme de ser física (creo que en fondo sabía que no cambiaría de opinión pero era una manera de alentarme) como persona tengo tanto que agradecerle como sus consejos, su cariño, su apoyo, por aguantarme, en fin por convertirse en mi familia y dejarme ser parte de la suya, y para seguir con la familia postiza cabe mencionar a Any, quien gracias a ella tuve mi primer trabajo oficial, y siempre me da buenos consejos llenos de sabiduría y sensatez, sigo con el otro hijo de Mariano Mike, que también ha estado conmigo desde primer semestre y me ha apoyado, con Didier y Gerardo los otros dos hijos del profe, “mis guaruras” gracias por estar en el momento más doloroso de mi vida, por estar ahí para darme consuelo... Didi gracias por ser de mis mejores amigos y decirme siempre lo que no quiero escuchar, por tus consejos y por escucharme cuando estoy media melancólica y Gerardo gracias por que siempre que tengo un problema con mi cel, mi compu, la tablet o hasta mi comida siempre solucionaba la vida, bueno para resumir gracias a los 5 Profe, Any, Mike, Didier y Gerardo por ser mi otra familia, cuidarme y quererme como tal.

Gracias a quienes fueron mis compañeros de distintos cursos, a Hugo y Marlene por ser mi equipo de laboratorio y hacer mis clases divertidas y más cuando no estábamos en ellas. A Paloma por obligarme y acostumbrarme a hacer tareas aunque no fueran para derecho a examen, esos cursos que fuimos compañeras sin duda marcaron un

antes y un después en mi carrera, por ser también mi amiga y por tanto que vivimos juntas. Gracias también a mis amigas de los últimos semestres Blanca, Ale, Adri, Nanci y Maritza por hacerme madurar como estudiante y por dejarme ser parte de su grupo a pesar de que yo soy tan distinta a ellas, con ellas aprendí muchas cosas incluso a comer soya y cosas raras que no me gustaban y a divertirme sin alcohol, las quiero... ahora a Cinthia y a Perla que aunque académicamente no fueron mis compañeras, si se convirtieron en parte muy importante de mi vida, en unas amigas excepcionales, siempre incondicionales, gracias por todo lo que compartieron conmigo, por esas noches que por ayudarme no durmieron, ahora les digo que valieron la pena, por el fútbol y demás cosas que vivimos gracias de verdad mil gracias.

A mis demás compañeros y/o amigos Ale “la mugrosa”, Talhia, Yareth, Diana, Yury, Dany, Tinoquito, Lucy, Fer, Gustavo y Misha; espero no se me haya olvidado alguien, y así fue una disculpa ya saben como soy de despistada.

Un agradecimiento a todos mis profesores de la facultad, a muchos de ellos los recordaré con respeto y admiración, al Dr. Mario César por su amistad, sus consejos, por permitirme hacer si servicio social con él y por confiar en mí para ser su tesista, bueno eso ya no pudo concluir. Un agradecimiento muy especial y muy merecido al profe Mota que fue mi maestro de planta de los últimos semestres, por sus palabras llenas de sabiduría, sin duda una gran inspiración porque siempre tiene una respuesta todas las preguntas que le hacen y por supuesto por apoyarme en la realización de este trabajo, en su revisión y corrección. Por último al Dr. Tinoco quien también fue mi profesor en muchos cursos y me brindó su amistad, sus consejos y su cariño desde mi primer semestre en la facultad hasta los últimos semestres y a pesar de ello ofrecerme ser mi asesor de tesis, gracias por la confianza que depositó en mí y por permitirme realizar y dirigir este trabajo y hacer posible el concluir mi licenciatura...

Por último agradecer a mis sinodales por la revisión y aprobación de mi tesis: Francisco Domínguez, Azucena Chávez, Joaquín Estévez y Cuauhtémoc Rivera.



# Índice general

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| Agradecimientos                                               | II        |
| Índice general                                                | v         |
| Resumen                                                       | 1         |
| Abstract                                                      | 2         |
| Introducción                                                  | 3         |
| <b>1. Ecuaciones Diferenciales Parciales</b>                  | <b>5</b>  |
| 1.0.1. Ecuaciones elípticas . . . . .                         | 6         |
| 1.0.2. Ecuaciones parabólicas . . . . .                       | 7         |
| 1.0.3. Ecuaciones hiperbólicas . . . . .                      | 7         |
| 1.1. Diferencias finitas en dos dimensiones . . . . .         | 8         |
| 1.1.1. Consistencia . . . . .                                 | 11        |
| 1.1.2. Estabilidad . . . . .                                  | 13        |
| 1.1.3. Convergencia . . . . .                                 | 14        |
| <b>2. Generación de mallas</b>                                | <b>15</b> |
| 2.1. Métodos para generar mallas estructuradas . . . . .      | 17        |
| 2.1.1. Métodos algebraicos . . . . .                          | 17        |
| 2.1.2. Métodos que utilizan Ecuaciones Diferenciales. . . . . | 20        |
| 2.2. Métodos Variacionales . . . . .                          | 20        |
| 2.2.1. Generación variacional continua . . . . .              | 20        |
| 2.2.2. Generación variacional discreta . . . . .              | 29        |
| 2.2.3. Modificación del funcional . . . . .                   | 39        |
| <b>3. Ecuación de advección</b>                               | <b>47</b> |
| 3.1. Advección en 1+1D . . . . .                              | 48        |
| 3.1.1. Método Upwind en 1 +1D . . . . .                       | 49        |
| 3.1.2. Esquema FTCS en 1+1D . . . . .                         | 51        |
| 3.1.3. Esquema de Lax-Friedrichs . . . . .                    | 52        |
| 3.1.4. Esquema Leapfrog en 1+1D . . . . .                     | 53        |
| 3.1.5. Esquema de Lax-Wendroff en 1+1D . . . . .              | 54        |
| 3.2. Advección en 2+1D . . . . .                              | 56        |
| 3.2.1. El caso rectangular . . . . .                          | 56        |
| 3.2.2. El caso en regiones no rectangulares . . . . .         | 57        |
| 3.2.3. Advección en 2+1D: esquema de 4 puntos . . . . .       | 61        |
| 3.2.4. Advección en 2+1D: esquema de 6 puntos . . . . .       | 62        |
| <b>4. Pruebas y resultados</b>                                | <b>65</b> |
| 4.1. Esquema explícito de 4 puntos . . . . .                  | 68        |
| 4.2. Esquema implícito . . . . .                              | 71        |
| 4.3. Esquema explícito de 6 puntos . . . . .                  | 74        |

---

|                        |           |
|------------------------|-----------|
| <b>5. Conclusiones</b> | <b>77</b> |
| <b>Apéndice</b>        | <b>79</b> |
| <b>Bibliografía</b>    | <b>93</b> |

# Resumen

En la actualidad existen varios esquemas para la aproximación de Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP), basados en diferencias finitas.

Dentro de las EDPs podemos encontrar una muy particular, la ecuación de advección, la cual forma parte importante dentro de la modelación matemática para problemas relacionados con aguas someras en lagos y estanques, a pesar de ello, los esquemas para su solución en regiones no rectangulares y de fácil aplicación son pocos.

Cuando se tienen regiones irregulares y sobre ellas se requiere hacer una aproximación, es necesario contar con una malla, la cual debe de cumplir con ciertas características geométricas, a saber: que el área de sus celdas sea lo más uniforme posible, que los lados de dichas celdas sean lo más ortogonales posible o que la variación de las líneas de coordenadas no tenga cambio bruscos.

En años recientes se ha trabajado en la implementación de métodos de la generación numérica de mallas, en este trabajo se presenta una breve revisión de ellos, en particular para la ecuación de advección.

También se presentan algunos de los métodos antes mencionados y se analizarán 4 distintas regiones para aproximar la ecuación de advección en  $2+1D$  dimensiones, con tres esquemas, a saber, esquema implícito y esquema explícito de 4 y 6 puntos; así también se muestran los resultados obtenidos, que en algunos casos las aproximaciones son muy satisfactorias.

Palabras clave: *Ecuaciones diferenciales parciales, diferencias finitas, mallas, ecuación de advección.*

# Abstract

Currently there are several schemes for the approximation of Partial Differential Equations (PDE) based on finite differences.

Within the PDEs we can find a very particular, advection equation, which is an important part in the mathematical modeling for problems related to shallow-water in lakes and ponds, nevertheless, schemes for solving non-rectangular regions and easy to apply are few.

When have irregular regions and about them to make an approach required, it is necessary to find a mesh, which must meet certain geometric characteristics, namely: that the area of their cells is as uniform possible, that the sides of said cells are more orthogonal as possible or that the variation of coordinate lines without a abrupt change.

In last years it has worked on implementing methods of the numerical grid generation, this paper presents a brief review of them, especially for advection equation.

As well presents some of the above methods and is analyzed four different regions to approximate advection equation in  $2 + 1D$  dimensions, with three schemes, namely, implicit scheme and explicit scheme of 4 to 6 points; show the results obtained, which in some cases are very satisfactory approximations.

Keywords: *Partial differential equations, finite difference, meshes, advection equation.*

# Introducción

Todos estamos en contacto continuo con la naturaleza, algunos con mayor frecuencia que otros, entonces ¿por qué no tratar de describirla?, para tratar de describir muchos fenómenos de ella se usan las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.

Si nos damos a la tarea de buscar soluciones para las distintas ecuaciones diferenciales parciales, nos encontraremos con el hecho de que para muchas de ellas existe una solución exacta, la cual se puede encontrar de manera analítica, pero para una gran variedad de dichas ecuaciones no existe tal solución, en ese caso se debe aproximar la solución por medio de los métodos numéricos.

Como es de esperarse existe una gran variedad de métodos numéricos, para la aproximación de las soluciones de las ecuaciones diferenciales parciales los hay para geometrías regulares así como para irregulares, claro que éstos últimos son más complejos, entre ellos podemos destacar los de elementos finitos, volúmenes finitos, elementos de frontera, métodos espectrales y de diferencias finitas, sobre éstos últimos los abordaremos en este trabajo; los cuales consisten en la discretización del dominio donde se desea aproximar la solución de alguna ecuación diferencial parcial y se reemplaza las distintas derivadas por combinaciones lineales por los valores de la función en algunos nodos de los cuales se tiene conocimiento, lo cual nos arroja un sistema de ecuaciones y dicha solución es una aproximación a la ecuación diferencial parcial.

Como ya se mencionó en el actual trabajo se presentan algunas aproximaciones por medio de diferencias finitas; en el primer capítulo se da una breve introducción a las ecuaciones diferenciales parciales, en el segundo capítulo se aborda la generación de mallas, así como los diferentes métodos para su generación, en el tercer capítulo se estudia la ecuación de advección y un poco más a fondo los esquemas que serán utilizados para las pruebas, las cuales se muestran en el cuarto capítulo, así como sus respectivos resultados y por último se presenta unas pequeñas conclusiones.



## Capítulo 1

# Ecuaciones Diferenciales Parciales

La modelación matemática de algunos problemas continuos de la física y la ingeniería usualmente da lugar a ecuaciones diferenciales parciales sobre una región en el plano o en el espacio (región física) donde el modelo está definido. El problema de resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales surge del hecho de que dichas ecuaciones sólo se pueden resolverse de manera analítica para casos muy simples, por lo que es necesario desarrollar métodos numéricos que proporcionen buenas aproximaciones y éstos sean lo más eficientes posible. Modelar un problema de la vida real desde el punto de vista matemático en el que se haga intervenir dos o más variables independientes conduce a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

La solución de sistemas de ecuaciones diferenciales parciales por lo general requiere de la discretización del dominio en un conjunto de celdas en las cuales se realizan aproximaciones que transforman la ecuación diferencial en un sistema algebraico de ecuaciones el cual se resuelve numéricamente.

**Definición 1:** Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales (EDP) a la ecuación de la forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^m u}{\partial k^1 x_1 \partial k^2 x_2 \dots \partial k^n x_n}) = 0 \quad (1.1)$$

que permite relacionar las variables independientes  $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$  la función que se busca y sus derivadas parciales.

Se cumple que  $k_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , son enteros no negativos tales que:  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = m$ ; la función  $F$  es una función prefijada de sus argumentos.

**Definición 2:** Se le llama orden de una EDP al orden mayor de las derivadas parciales que aparecen en la ecuación.

**Definición 3:** Sea la EDP definida de orden  $m$ , se llama solución de dicha EDP en cierta región  $D$  de variación de las  $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , a una función cualquiera  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^m(D)$  (conjunto de funciones continuas en la región  $D$  junto con todas las derivadas de hasta orden  $m$  inclusive), tal que al sustituir  $u$ , y sus derivadas en (1.1) la última se convierte en la identidad respecto a  $x_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ , en la región  $D$ .

Una EDP lineal de segundo orden, en particular puede escribirse como

$$Au_{xx}^2 + Bu_{xy}^2 + Cu_{yy}^2 + Du_x + Eu_y + F = 0 \quad (1.2)$$

donde  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son coeficientes que pueden depender tanto de  $x$  como de  $y$  pero no de la función  $u$ . Podemos clasificar algunas EDPs en hiperbólicas (problemas que refieren fenómenos oscilatorios: vibraciones de

cuerda, membranas, oscilaciones electromagnéticas), parabólicas (problemas que se presentan al estudiar los procesos de conductibilidad térmica y difusión) y elípticas (problemas que aparecen al estudiar procesos estacionarios, o sea que no cambian con el tiempo); la forma más usual para determinar el grupo al cual pertenece una EDP consiste en obtener el determinante de una matriz cuyos coeficientes son los coeficientes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de la ecuación (1.2), esto es si

$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$  entonces es una ecuación del tipo hiperbólico, un ejemplo es la ecuación de onda  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$  es del tipo parabólico, un ejemplo es la ecuación de calor  $u_t = k u_{xx}$ , con  $k > 0$ ,

$Z = \det \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$  es del tipo elíptico, el ejemplo canónico es el problema de *Poisson*  $u_{xx} + u_{yy} = f$ .

En el caso parabólico e hiperbólico se utiliza  $t$  en lugar de  $y$  ya que estos son problemas típicos que dependen del tiempo. Todo esto se puede extender a más dimensiones espaciales.

Estas ecuaciones describen los fenómenos de naturaleza distinta y requieren diferentes técnicas para su solución (tanto analítica como numérica), y por lo que es conveniente tener nombres para clases de ecuaciones que exhiben las mismas características generales. Hay otras ecuaciones que tienen algunas de las mismas características y el esquema de clasificación se puede extender más allá de la forma lineal de segundo orden dada anteriormente.

### 1.0.1. Ecuaciones elípticas

El ejemplo clásico de las ecuaciones elípticas es el problema de *Poisson*

$$\nabla^2 u = f$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano y  $f$  es una función dada de  $\vec{x} = (x, y)$  en el dominio espacial  $\Omega$ . Buscamos una función  $u(\vec{x})$  en  $\Omega$  que satisfaga  $\nabla^2 u = f$  junto con algunas condiciones de contorno o frontera a lo largo de la frontera de  $\Omega$ . Las ecuaciones elípticas suelen modelar fenómenos de estado estacionario o de equilibrio, y que no hay dependencia temporal. Las ecuaciones elípticas también pueden surgir en la solución de problemas que dependen del tiempo si estamos modelando algunos fenómenos que están siempre en equilibrio local y equilibran en escalas de tiempo que son mucho más rápido que la escala de tiempo que se está modelando. Por ejemplo, en un fluido incompresible las ondas acústicas no se modelan y en lugar de ello se calcula la presión mediante la resolución de un problema de Poisson en cada paso que modela el efecto global de estas ondas de tiempo.

Las ecuaciones elípticas dan problemas de contorno de donde la solución en todos los puntos debe ser determinada de forma simultánea sobre la base de las condiciones de frontera de todo el dominio. Esto normalmente conduce a un sistema muy grande escaso de ecuaciones lineales que hay que resolver para los valores de  $U$  en cada punto de la cuadrícula. Una ecuación elíptica debe ser resuelta en cada paso de tiempo de un cálculo dependiente del tiempo, como en los ejemplos anteriores, es crucial que estos sistemas se puedan resolver tan eficientemente como sea posible.

Más generalmente, una ecuación elíptica lineal tiene la forma

$$Lu = f$$

donde  $L$  es un operador elíptico.

### 1.0.2. Ecuaciones parabólicas

Si  $L$  es un operador elíptico entonces la ecuación dependiente del tiempo

$$u_t = Lu - f$$

se llama parabólica. Si  $L = \nabla^2$  es el Laplaciano, entonces la ecuación anterior se conoce como la *ecuación de calor* o *ecuación de difusión* y modela la difusión de calor en un material, por ejemplo.

Ahora  $u(\vec{x}, t)$  varía con el tiempo y requiere un dato inicial  $u(\vec{x}, 0)$  para cada  $\vec{x} \in \Omega$ , así como condiciones de frontera para cada tiempo  $t > 0$ . Si las condiciones de frontera son independientes del tiempo, entonces podríamos esperar que la distribución de calor alcance un estado de equilibrio en el que  $u$  es independiente de  $t$ . Entonces podríamos solucionar para el estado estacionario directamente mediante el establecimiento de  $u_t = 0$ , que resulta en la ecuación elíptica  $Lu = f$ .

### 1.0.3. Ecuaciones hiperbólicas

El problema lineal en una dimensión espacial tiene la forma

$$u_t + Au_x = 0$$

donde  $u(x, t) \in \mathbb{R}^m$  y  $A$  una matriz  $m \times m$ . el problema es llamado hiperbólico si  $A$  tiene eigenvalores reales y es diagonalizable, es decir, tiene un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes. Estas condiciones permiten dimensionar la solución en términos de ondas que se propagan, y de hecho los sistemas hiperbólicos normalmente surgen de los procesos físicos como el movimiento de ondas o el transporte advectivo.

El ejemplo más simple de una ecuación hiperbólica es la *ecuación de advección* con coeficiente constante

$$u_t + au_x = 0$$

donde  $u$  es la velocidad de advección. La solución es simplemente  $u(x, t) = u(x - at, 0)$ , por lo que cualquier  $u$  simplemente advecta con el flujo a la velocidad  $a$ .

Como un simple ejemplo de un sistema hiperbólico lineal, las ecuaciones linealizadas de la acústica que surgen de la dinámica de elasticidad o de gas se pueden escribir como un sistema de primer orden de dos ecuaciones en una dimensión espacio como

$$\begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & \kappa_0 \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}_x = 0$$

en términos de presión y velocidad de las perturbaciones, donde  $\rho_0$  es la densidad del fondo y  $\kappa_0$  es el módulo de compresión del material. Se debe tener en cuenta que si diferenciamos la primera ecuación con respecto a  $t$ , la segunda con respecto a  $x$ , y luego eliminamos  $u_{xt} = u_{tx}$  obtenemos la ecuación de onda de segundo orden para la presión:

$$p_{tt} = c^2 p_{xx}$$

donde  $c = \sqrt{\frac{\kappa_0}{\rho}}$  es la velocidad del sonido en el material.

Una solución de una ecuación diferencial es una función que al reemplazar a la función incógnita, en cada caso con las derivaciones correspondientes, verifica la ecuación, es decir, la convierte en una identidad. Hay dos tipos de soluciones:

1. **Solución general:** la solución general de una ecuación diferencial parcial es expresada con una o más constantes; es gráficamente una familia de curvas. Una constante corresponde a una familia simplemente infinita de soluciones, dos constantes a una familia doblemente infinita, etc. En caso de que la ecuación sea lineal, la solución general se logra como combinación lineal de las soluciones (tantas como el orden de la ecuación) de la ecuación homogénea (que resulta de hacer el término no dependiente de  $y(x)$  igual a 0) más una solución particular de la ecuación completa.
2. **Solución particular:** la solución particular de una ecuación diferencial es una de las curvas que conforman a la familia de curvas de la solución general, obtenida a partir de ciertas condiciones (de frontera o condiciones iniciales) fijando algún punto por donde debe pasar necesariamente la solución de la ecuación diferencial, existe un único valor para la o las constantes, y por lo tanto de la curva integral que satisface la ecuación, ésta recibirá el nombre de solución particular de la EDP. La solución particular de una ecuación diferencial obedece a dos tipos de condiciones:

-Condiciones iniciales: un problema de valores iniciales está regido por una ecuación diferencial de orden  $n$  y  $n - 1$  condiciones independientes todas ellas válidas en el mismo valor inicial de la variable independiente.

- Valores en la frontera: un problema de valores en la frontera se establece por condiciones que prevalecen en dos puntos de la variable independiente que normalmente establecen un intervalo de solución de la ecuación diferencial. Tenemos fundamentalmente dos tipos de condiciones de frontera: Dirichlet (cuando se da el valor de la función en la frontera) y de Neumann (cuando se dan los valores de la derivada en la frontera); cuando éstos dos tipos de condiciones se combinan linealmente se les llama condiciones de Robin.

## 1.1. Diferencias finitas en dos dimensiones

Ya con algunos conocimientos de las ecuaciones diferenciales parciales y sus soluciones analíticas, comenzaremos con la solución numérica, para esto, en el caso de dos dimensiones se obtendrá un esquema de diferencias finitas; haremos uso del siguiente teorema:

**Teorema de Taylor:** Sea  $f(x)$  una función continua en el intervalo  $[a, b]$  la cual tiene derivadas continuas hasta de orden  $N$  sobre  $(a, b)$ ; dado un punto  $x_0$  en  $(a, b)$ , entonces para cualquier punto  $x$  en  $(a, b)$ .

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(x - x_0) + \frac{df^2(x_0)}{dx^2} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{d^{N-1}f(x_0)}{dx^{N-1}} \frac{(x - x_0)^{N-1}}{(N-1)!} + R(x)^N \quad (1.3)$$

en donde  $R(x)^N = \frac{df^N(\varepsilon)}{dx^N} \frac{(x-x_0)^N}{N!}$ ,  $\varepsilon \in (a, b)$  es el residuo [21].

Sea  $u(x)$  tal que cumple con las hipótesis del teorema de Taylor, entonces usando su expansión alrededor del punto  $x_{i+1}$  en el intervalo  $[a, b]$  obtenemos:

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + \frac{du}{dx}(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \mathcal{O}(\Delta x_i^2) \quad (1.4)$$

donde  $\mathcal{O}(\Delta x_i^2)$  es el residuo de orden 2 y  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ , de donde obtenemos

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2) \quad (1.5)$$

la cual es la expresión de diferencias finitas en una dimensión, diferencias hacia adelante, de manera similar obtenemos la expresión para diferencias hacia atrás

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{x_{i-1} - x_i} + \mathcal{O}(\Delta x_i^2) \quad (1.6)$$

y para diferencias centradas la expresión correspondiente es

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} + \mathcal{O}(\Delta x_i^3). \quad (1.7)$$

En el caso de se que sea una malla uniforme, es decir  $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$  el cual es nuestro caso las ecuaciones anteriores se reducen a

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.8)$$

$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i-1}) - u(x_i)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.9)$$

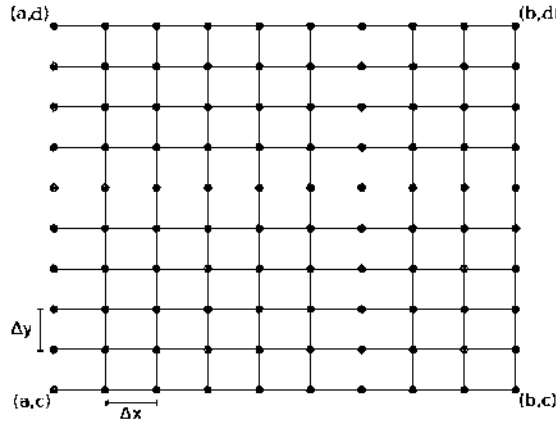
$$\frac{du}{dx}(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (1.10)$$

Para los esquemas de diferencias finitas en dos dimensiones, consideremos una región rectangular definida en  $[a, b] \times [c, d]$  sobre la cual construimos los nodos interiores de la siguiente manera

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$y_j = a + j\Delta y$$

donde  $\Delta x$  es el tamaño de paso horizontal y  $\Delta y$  el tamaño de paso vertical.



**Figura 1.** Mallado uniforme en el intervalo  $[a, b] \times [c, d]$

De manera similar al caso de una dimensión, usando el *Teorema de Taylor para dos dimensiones* y usando la expansión de  $u(x, y)$  alrededor del punto  $(x_i, y_j)$  y considerando las ecuaciones (1.8), (1.9) y (1.10) podemos escribir las siguientes expresiones

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_i, y_j)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_j)}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y^2) \quad (1.14)$$

Debido a que nos encontramos en el caso de dos dimensiones obtendremos un término cruzado y su expresión sería la siguiente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u(x_{i+1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j+1}) - u(x_{i-1}, y_{j-1}) - u(x_{i+1}, y_{j-1})}{4\Delta x \Delta y}. \quad (1.15)$$

Ya contamos con algunos esquemas en diferencias finitas que aproximan a la solución de ciertas ecuaciones diferenciales, ésto haciendo uso de una expansión en serie de Taylor con cierto orden.

**Ejemplo:** Consideremos la ecuación de calor en dos dimensiones, una en el espacio y otra en el tiempo

$$v_t(x, t) = \nu v_{xx}(x, t) \quad x \in (0, 1) \quad (1.16)$$

donde  $\nu$  es la constante de difusividad, con condición inicial

$$v(x, 0) = f(x) \quad x \in [0, 1]$$

y condiciones de frontera

$$v(0, t) = a(t) \quad v(1, t) = b(t), \quad t \geq 0.$$

El objetivo es escribir un esquema en diferencias finitas asociado a esta ecuación, sobre su solución analítica podemos ver más en [22].

Ahora, vamos a aproximar a  $v$  que depende de  $x$  y de  $t$ , por  $u$ ,  $u_m^n$  denotará la función definida en el punto  $(m\Delta x, n\Delta t)$  o, por simplicidad, el punto  $(m, n)$ , con  $m = 0, 1, 2, \dots, M$  y  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Vamos a utilizar una malla uniforme (por simplicidad) con  $\Delta x = 1/M$  (ver figura 2). Discretizamos de la misma manera el tiempo con un mallado uniforme con  $\Delta t$  entre los nodos del tiempo. Con este proceso obtenemos un mallado que aproximará el dominio espacio-tiempo como el mostrado en la figura 3.

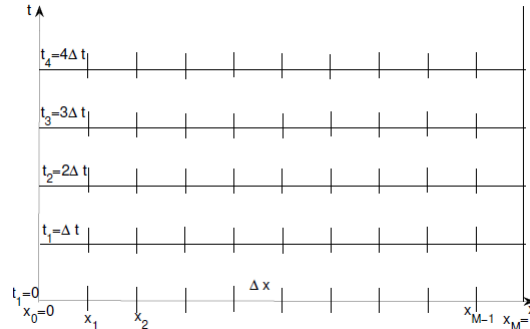


Figura 2. Mallado uniforme en el intervalo  $[0,1]$ .

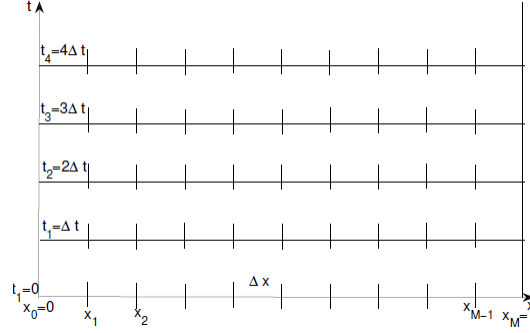


Figura 3. Mallado uniforme en dominio espacio-tiempo.

Lo que sigue es aproximar la solución de  $v_t = \nu v_{xx}$  utilizando algún esquema de diferencias finitas, en este caso elegimos *diferencias finitas hacia adelante* para hacer la discretización del tiempo, para así obtener

$$\frac{dv}{dt}(m\Delta x, n\Delta t) = v_t \approx \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t}$$

después utilizamos la expresión de la segunda derivada para aproximar  $v_{xx}$  y esto nos arroja

$$\frac{d^2v}{dx^2}(m\Delta x, n\Delta t) = v_{xx} \approx \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2}$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores para así aproximar la EDP (1.16) obtenemos

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2}$$

si despejamos  $u_m^{n+1}$  nos resulta

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n) \quad (1.17)$$

que es el esquema de diferencias finitas para la aproximación de la EDP (1.16). Ahora, las condiciones iniciales y de frontera están dadas por

$$\begin{aligned} u_k^0 &= f(k\Delta x) & k &= 0, \dots, M \\ u_0^{n+1} &= a((n+1)\Delta t) & n &= 0, \dots, N \\ u_M^{n+1} &= b((n+1)\Delta t) & n &= 0, \dots, N \end{aligned}$$

El objetivo es obtener una buena aproximación a la solución de la ecuación diferencial parcial en  $(0, 1) \times (0, 1)$  resolviendo el caso discreto dado por (1.17) y sus condiciones iniciales y de frontera. El qué tan “buena” será la aproximación dependerá de la elección tanto de  $\Delta x$  como de  $\Delta t$ ; debemos ser muy cuidadosos al momento de elegirlos, ya que éstos serán quienes determinen el comportamiento de la aproximación a la solución. A continuación analizaremos con más detalle el cuidado de esta elección, y haremos una ligera revisión de los conceptos de consistencia, estabilidad y convergencia.

### 1.1.1. Consistencia

Comenzamos introduciendo la siguiente notación: la función que aproximará a  $U$  la llamaremos  $u$  y dependerá de  $x$  y  $t$ ;

Por simplicidad vamos a usar un mallado uniforme, es decir, el espacio entre un nodo y el siguiente será de  $\Delta x = \frac{1}{M}$ , de manera similar discretizamos el tiempo y  $\Delta t = \frac{1}{N}$  es la separación de los nodos temporales. Con  $m = 0, 1, 2, \dots, M$  y  $n = 0, 1, 2, \dots, N$

Como ya se mencionó para aproximar una EDP por medio de un esquema de diferencias finitas utilizamos la expansión en serie de Taylor alrededor de algunos puntos específicos para así obtener dicha aproximación. En particular, si lo hacemos alrededor de  $(n\Delta t, m\Delta x)$  obtendremos

$$u_m^{n+1} = u((n+1)\Delta t, m\Delta x) = u(n\Delta t, m\Delta x) + \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta t}{1!} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta t^2}{2!} \quad (1.18)$$

Nótese que solo están escritos los primeros términos y haciendo algo de álgebra a la ecuación anterior la podemos ver como

$$\frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, k\Delta x) + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_k^n + \dots \quad (1.19)$$

Y si  $u$  es lo suficientemente suave la reescribimos como

$$\frac{\partial u}{\partial t}(n\Delta t, k\Delta x) = \frac{u_k^{n+1} - u_k^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (1.20)$$

Ahora para conocer el orden del esquema de diferencias finitas que aproxima la segunda derivada, utilizamos la expansión en serie de Taylor de diferencias finitas hacia adelante en una dimensión (19)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(m\Delta x, n\Delta t) \approx \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.21)$$

Eso nos da

$$u_{m+1}^n = u(m\Delta x, n\Delta t) + \frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.22)$$

$$u_{m-1}^n = u(m\Delta x, n\Delta t) - \frac{\partial u}{\partial x}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta x^2}{2!} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(n\Delta t, m\Delta x) \frac{\Delta x^3}{3!} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.23)$$

Sumando las ecuaciones anteriores y haciendo un poco de álgebra llegamos al siguiente esquema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.24)$$

el cual aproxima a  $u_{xx}$ , para el caso particular de la ecuación de difusión en una variable y una en el tiempo  $u_t(x, t) = \nu u_{xx}(x, t)$ , ( $\nu$  es la constante de difusividad), la podemos reescribir como

$$u_t(n\Delta t, m\Delta x) - \nu u_{xx}(n\Delta t, m\Delta x) = \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{\Delta t} - \frac{\nu}{\Delta x^2} (v_{m+1}^n - 2v_m^n + v_{m-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (1.25)$$

Observemos que esta ecuación (1.25) nos muestra que tan eficaz es el esquema en diferencias finitas para aproximar la solución de la ecuación original. Aunque esto no nos dice directamente como la solución del esquema en diferencias se aproxima a la solución de la EDP.

**Definición 4:** Se dice que el esquema en diferencias  $L_m^n u_m^n = G_m^n$  es consistente punto a punto con la ecuación diferencial  $LU = F$  si existe alguna  $\phi(x, t)$ , suave y continua, tal que

$$(L\phi - F)|_m^n - [L_m^n \phi(n\Delta t, m\Delta x) - G_m^n] \longrightarrow 0 \quad (1.26)$$

cuando  $\Delta x, \Delta y$  y  $((n+1)\Delta t, m\Delta x) \rightarrow 0$ .

Una vez definida la consistencia punto a punto, podemos ver que en el esquema descrito en (1.25) es consistente punto a punto con la ecuación diferencial parcial original.

Podemos elegir como la solución  $u$  de la EDP, entonces la expresión (1.26) la escribimos

$$L_m^n u_m^n - G_m^n \rightarrow 0 \quad (1.27)$$

cuando  $\Delta x$  y  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Si escribimos el esquema en diferencias como

$$u^{n+1} = Qu^n + \Delta t G^n \quad (1.28)$$

donde  $u^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T$ ,  $G^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T$  y  $Q$  es un operador que actúa en el espacio apropiado, entonces podemos escribir una definición de consistencias más fuerte.

**Definición 5:** El esquema  $u^{n+1} = Qu^n + \Delta t G^n$  es consistente con la ecuación diferencial parcial con la norma  $\|\cdot\|$ , si la solución de la ecuación diferencial parcial  $u$  satisface  $u^{n+1} = Qu^n + \Delta t G^n + \Delta t \tau^n$  y  $\|\tau^n\| \rightarrow 0$  cuando  $\Delta x$  y  $\Delta t \rightarrow 0$ , donde  $u^n$  denota el vector cuya  $k$ -ésima componente es  $u(n\Delta t, m\Delta x)$ .

Notemos que la diferencia entre la consistencia punto a punto y la consistencia con la norma, es que la consistencia con la norma obliga a todos los componentes del vector  $\tau^n$  a converger a cero de una manera uniforme.

### 1.1.2. Estabilidad

Podemos entender como si el esquema en diferencias de un problema con condiciones iniciales tiene errores “pequeños” de entrada, entonces los errores de la aproximación final serán también “pequeños”.

La estabilidad de un esquema con dos niveles de tiempo se explica en términos de una ecuación de la forma

$$u^{n+1} = Qu^n \quad (1.29)$$

con  $n \geq 0$ .

**Definición 6:** Se dice que el esquema de diferencias con la forma  $u^{n+1} = Qu^n$ , con  $n \geq 0$ , es estable con respecto a la norma  $\|\cdot\|$  si existen constantes positivas  $\Delta x, \Delta y, \alpha$  y  $\beta$  tales que

$$\|u^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|u^0\| \quad (1.30)$$

para  $0 \leq t \leq (n+1)\Delta t, 0 \leq \Delta x \leq x_0$  y  $0 \leq \Delta t \leq \Delta t_0$ .

Notemos que al igual que la consistencia, la definición de estabilidad está dada en términos de una norma que puede variar dependiente del problema, pero independientemente de la norma, la solución puede crecer con el tiempo pero no con un número de pasos de tiempo. Es importante señalar que existen muchas definiciones de estabilidad, un ejemplo de una de ellas es aquella que no permite un crecimiento exponencial, entonces en la desigualdad anterior sería remplazado por  $\|u^{n+1}\| \leq K\|u^0\|$ , aquí el valor de  $K$  es quien dice si el esquema es consistente o inconsistente. Si  $0 < K < 1$  entonces el sistema será incondicionalmente estable. Si  $K = 1$ , será condicionalmente estable y si  $K > 1$ , será incondicionalmente inestable.

### 1.1.3. Convergencia

Ahora nos interesa garantizar la convergencia de nuestros esquemas para poder describir “buenos resultados” de las aproximaciones que generamos. En general, no es fácil de conseguir, y, en muchas ocasiones, el proceso para conseguirla llega a ser muy largo y laborioso.

Consideremos la siguiente EDP

$$Lv = F \quad (1.31)$$

con  $v$  y  $F$  funciones definidas en  $R$  y con condición inicial  $v(x, 0) = f(x)$ . Supongamos que tenemos una aproximación a la solución, obtenida por medio de algún esquema de diferencias finitas, que llamaremos  $L_m^n$ . Para este problema  $u_m^n$  define una malla uniforme con  $\Delta x$  y  $\Delta t$  distancias entre nodos y satisface la condición inicial  $u_0^n = f(m\Delta x) \in [a, b]$ . Denotemos a  $v$  como a solución exacta del problema inicial.

**Definición 7:** Un esquema de diferencias  $L_m^n u_k^n = G_m^n$  que aproxima a la EDP  $Lv = F$  es un esquema que converge punto a punto para algún  $x$  y  $t$ , mientras  $(m\Delta x, (n+1)\Delta t)$  converge a  $(a, t)$ ,  $u_m^n$  converge a  $v(x, t)$  cuando  $\Delta x$  y  $\Delta t$  tienden a cero.

En general es muy difícil probar la convergencia punto a punto, y no suele ser tan útil como un tipo de convergencia uniforme, en vez de eso utilizamos una definición de convergencia en términos de una norma de la diferencia entre la solución exacta y la aproximación obtenida. Si queremos probar la convergencia en términos de la rapidez con la que la aproximación converge a la solución exacta, debemos definir la convergencia de orden  $(p, q)$  como sigue:

**Definición 8:** Un esquema de diferencias  $L_m^n u_k^n$  que aproxima a la ecuación diferencial parcial  $Lv = F$ , es un esquema convergente de orden  $(p, q)$  si para  $t$ , cuando  $(n+1)\Delta t \rightarrow T$

$$\|u^{n+1} - v^{n+1}\| = \mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q) \quad (1.32)$$

cuando  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ .

En este caso  $\mathcal{O}$  dependerá de  $t$ . Usando esta definición estamos en condiciones de discutir el rango de convergencia de  $u^n$  a  $v^n$ .

Hasta ahora hemos dado una leve revisada de lo que son las ecuaciones diferenciales parciales, así como sus soluciones y una breve introducción de los esquemas de diferencias finitas y lo que ello implica, estamos listos para introducir el concepto de malla, su generación, los diversos tipos de mallas y su utilidad para este trabajo.

## Capítulo 2

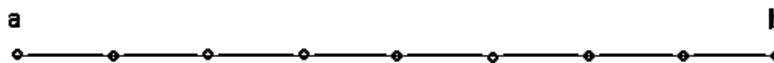
# Generación de mallas

El problema de resolver numéricamente ecuaciones diferenciales parciales surge del hecho de que las EDPs sólo se pueden resolver de manera analítica para casos muy simples, por lo que es necesario desarrollar métodos numéricos eficientes que proporcionen buenas aproximaciones a la solución de las EDPs.

La solución de sistemas de EDPs por lo general requiere de la discretización del dominio en un conjunto de celdas en las cuales se realizan las aproximaciones que convertirán la ecuación diferencial en un sistema algebraico de ecuaciones se resuelve numéricamente.

Entre los métodos numéricos más usados en la actualidad podemos mencionar los de diferencias finitas y los de elemento finito. Los métodos de diferencias finitas son de implementación sencilla y conducen a excelentes resultados cuando la región donde está definido el problema es sencilla (de ésto se hablará adelante); en cambio los de elementos finitos son más adecuados para el caso de regiones irregulares.

En la busca de la solución de EDPs sobre una región física complicada, primero se transforma esta región de tal manera que el resultado de dicha transformación sea una región sencilla (un cuadrado), una vez logrado esto, se puede resolver la ecuación diferencial usando algún esquema de diferencias finitas. A este proceso de transformación de la región física en un cuadrado se le conoce como *Generación de Mallas o Redes*. Dichas mallas pueden ser uniformes o no uniformes; en una dimensión, las primeras consisten en partir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos todos de la misma longitud, mientras que las segundas son partir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos pero éstos de longitudes distintas.

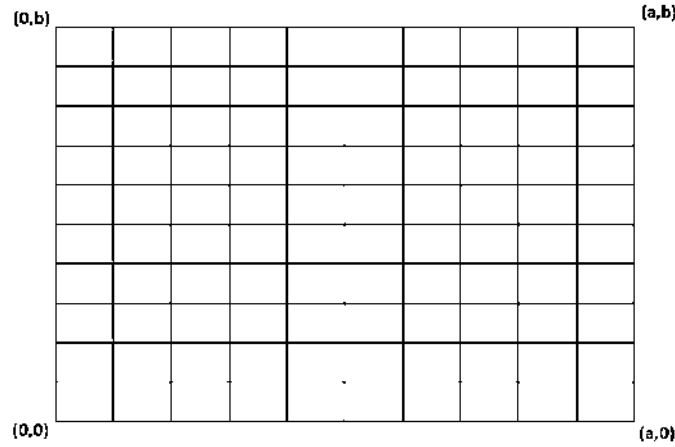


*Figura 2. Malla uniforme en una dimensión.*

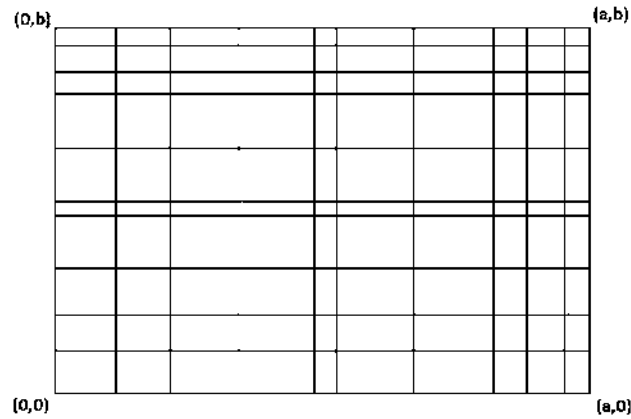


*Figura 3. Malla no uniforme en una dimensión.*

Para el caso de 2 dimensiones, consideramos dos tipos de regiones los dominios simples (por simplicidad rectángulos  $[0, a] \times [0, b]$ ) y los dominios que no cuentan con una geometría regular y sencilla de discretizar. Las primeras se puede hacer fácilmente la discretización dividiendo la región en rectángulos regulares más pequeños, al igual que en una dimensión puede ser de manera uniforme o no uniforme, sobre segundas se tratarán más adelante.



*Figura 4. Malla uniforme en dos dimensiones.*

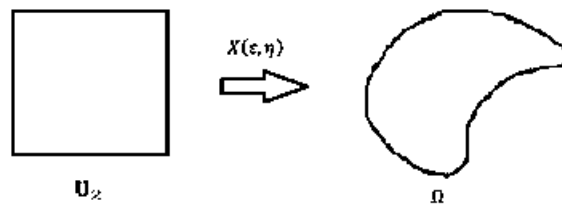


*Figura 5. Malla no uniforme en dos dimensiones.*

**Definición 5.** Una malla  $\mathbf{X}(\varepsilon, \eta) = (x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta))^t$  sobre una región  $\Omega \subset R^2$  es una función continua

$$\mathbf{X} : U_2 \longrightarrow \Omega \quad (2.1)$$

donde  $U_2$  es el cuadrado unitario  $[0, 1] \times [0, 1]$ .



*Figura 6. Transformación  $U_2 \longrightarrow \Omega$*

Si se toma  $\varepsilon = cte$  o  $\eta = cte$  en  $U_2$ , su imagen es una curva, y estas curvas las llamamos curvas coordenadas.

Si elegimos una colección de líneas coordenadas (una retícula) en  $U_2$  la función  $x$  proporciona una retícula en  $\Omega$ , de ahí el término malla o red.

Decimos que las funciones tales que

$$\mathbf{X}(\partial U_2) = \partial \Omega \quad (2.2)$$

ajustan la frontera, o la conforman. El problema de generación de mallas se puede establecer como [3]:

*“dada una función biyectiva y continua de la frontera de  $U_2$  en la frontera de  $\Omega$ , extenderla a una función continua de  $U_2$  a  $\Omega$ ”.*

De entre las posibles mallas existentes en  $U_2$  nos serán de interés aquellas que cumplen ciertas propiedades; a saber:

1. Se pretende que diferentes puntos en  $U_2$  tengan como imagen puntos diferentes en  $\Omega$ ; esto implica que diferentes líneas coordenadas que no se cruzan en  $U_2$  tendrán imágenes que no se cruzan en  $\Omega$ . Es decir, queremos que  $\mathbf{X}$  sea 1-1.
2. Se requiere  $\mathbf{X}$  que llene a  $\Omega$ ; es decir, que  $\mathbf{X}$  sea un mapeo sobre.
3. Es deseable que la imagen de una curva suave en  $U_2$  sea una curva suave en  $\Omega$ ; esto es, se requiere que las funciones  $x(\varepsilon, \eta)$  y  $y(\varepsilon, \eta)$  tengan derivadas continuas al ser consideradas como funciones de  $\varepsilon$  y  $\eta$  separadamente.

Las mallas que cumplen las primeras dos propiedades se llaman *mallas convexas*, en contraparte las que no gozan de esta propiedad se les denomina *no convexas* o *dobladas*, éstas últimas no son útiles para la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales cuando se usan mapeos. Una función que posee las tres características es denominada difeomorfismo entre  $U_2$  y  $\Omega$ . El problema de generación de mallas es replanteado entonces de manera más especializada como:

*Dado un difeomorfismo*

$$\mathbf{X} : \partial(U_2) \longrightarrow \partial\Omega$$

*extenderlo a un difeomorfismo*

$$\mathbf{X} : U_2 \longrightarrow \Omega.$$

Cabe mencionar que los resultados que se muestran en este capítulo son extraídos de [3].

## 2.1. Métodos para generar mallas estructuradas

### 2.1.1. Métodos algebraicos

Se basan en la transformación de coordenadas de un dominio físico, dada su naturaleza algebraica se han aprovechado sus características de cálculo rápido con el que se generan en comparación con los métodos que utilizan

ecuaciones diferenciales parciales; sin embargo este tipo de métodos no garantizan suavidad de la malla. Entre los métodos más utilizados en la generación de mallas algebraicas se puede mencionar al método de interpolación Lagrange, la interpolación de Hermite, Splines o bien la interpolación Transfinita (TFI por sus siglas del inglés).

### El método de interpolación transfinita

Como ya se mencionó anteriormente, los métodos más simples usados en la generación de mallas son los basados en interpolación. Dichos métodos tienen la ventaja de ser de fácil implementación y muy rápidos en comparación con los métodos variacionales continuos y discretos que veremos más adelante. Sin embargo, tienen la desventaja de que transmiten la falta de suavidad de la frontera hacia el interior y más aún, para regiones que no son convexas, a menudo dan lugar a mallas dobladas, esto es, que no son 1-1. No obstante, debido a su simplicidad, estos métodos son usados extensivamente en diferentes áreas y a que las mallas que producen son usadas como punto de partida por los métodos que se estudian más adelante, es conveniente revisar al menos la versión más usada de ellos, el llamado método de interpolación transfinita (TFI).

Para generar una malla sobre una región  $\Omega$  es necesario conocer las imágenes de los lados del cuadrado unitario; esto es, se requiere del conocimiento de las cuatro partes en las cuales la frontera de  $\Omega$  es dividida y que son imágenes de los correspondientes cuatro segmentos de frontera de  $U_2$ . Supóngase que la descripción de la frontera de  $\Omega$  está dada por cuatro ecuaciones paramétricas:

$$x_b(\xi) \quad x_t(\xi) \quad 0 < \xi < 1,$$

$$x_l(\eta) \quad x_r(\eta) \quad 0 < \eta < 1$$

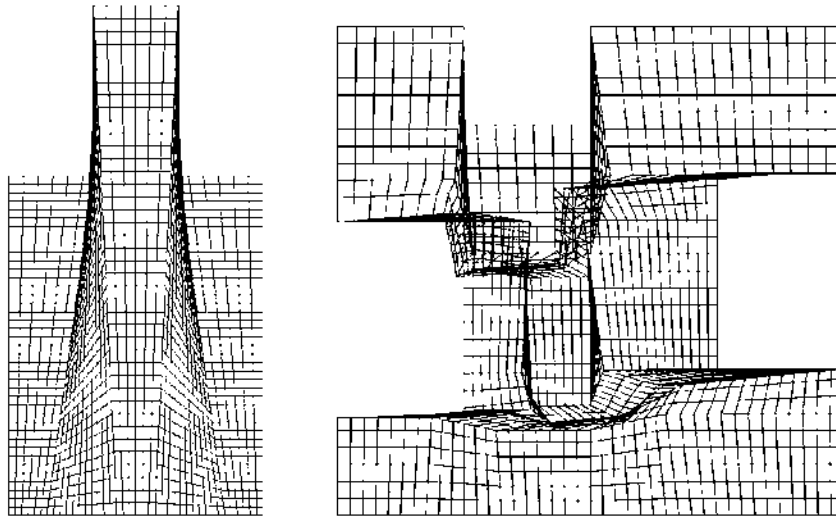
aquí los subíndices  $b, r, t, l$  son abreviaturas en inglés de *bottom, right, top y left*. Naturalmente que la orientación se debe conservar y, como queremos que  $\mathbf{X}$  sea continua, se debe cumplir que en las esquinas los correspondientes mapeos coincidan; es decir,

$$x_b(0) = x_l(0), \quad x_b(1) = x_r(0), \quad x_r(1) = x_t(1), \quad x_t(0) = x_l(1)$$

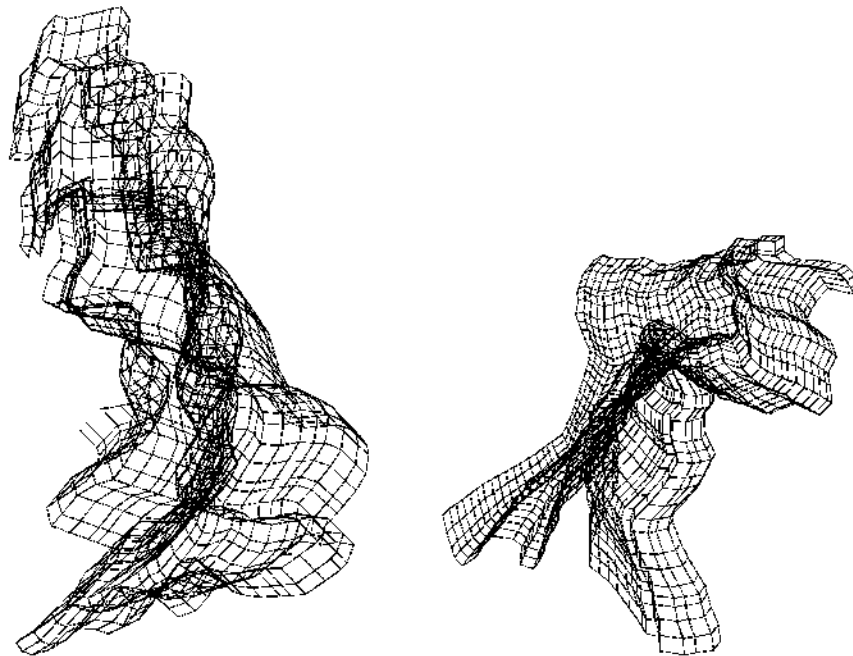
La fórmula básica de interpolación transfinita usa estos 4 mapeos para generar una malla sobre  $\Omega$ :

$$x(\xi, \eta) = (1-\eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) + (1-\xi)x_l(\eta) + \xi x_r(\eta) - [\xi\eta x_t(1) + (1-\eta)x_b(1) + \eta(1-\xi)x_t(0) + (1-\xi)(1-\eta)x_b(0)] \quad (2.3)$$

Se muestran mallas generadas por TFI para cuatro regiones no convexas (fig. 7) (M13 y M19 han sido extensamente usadas por varios autores para ejemplificar las características de las diferentes técnicas de generación de mallas y las siguientes dos son regiones “difíciles”, en el sentido de que no se logra convexidad de las mallas correspondientes cuando se usan métodos clásicos) y para dos regiones que son aproximaciones a regiones geográficas reales (fig. 8). Dichas mallas se obtuvieron tomando la malla uniforme de 41 por 41 puntos por lado del cuadrado unitario, y serán usadas a lo largo de este trabajo.



*Figura 7. Mallas generadas con TFI para las regiones M13 y M19.*



*Figura 8. Mallas generadas con TFI para las regiones ENG y HAB respectivamente.*

Notemos que ninguna de estas mallas es convexa, a continuación se muestra el número de celdas no convexas correspondiente a cada una de ellas.

| Malla | Celdas no convexas |
|-------|--------------------|
| M13   | 88                 |
| M19   | 253                |
| ENG   | 575                |
| HAB   | 394                |

*Tabla 1: Número de celdas no convexas de las mallas generadas por TFI.*

### 2.1.2. Métodos que utilizan Ecuaciones Diferenciales.

#### Métodos Elípticos

Los métodos elípticos se basan en la solución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas con algunas condiciones sobre ellas que son los llamados términos fuerza (forcing terms). Este problema es formulado por medio de un conjunto de ecuaciones de Poisson. La solución del sistema puede ser obtenida por medio de un método iterativo, por ejemplo el método de sobre relajaciones (SOR) o bien algún otro método iterativo. Los sistemas elípticos producen mallas muy suaves, además pueden ser utilizadas para suavizar mallas con picos.

#### Métodos Hiperbólicos

Los métodos hiperbólicos se basan en la solución de ecuaciones diferenciales del tipo hiperbólico, éstas son resueltas hacia afuera de la frontera del dominio. La idea de utilizar ecuaciones diferenciales parciales hiperbólicas es muy efectiva para flujos externos donde se tiene paredes en las fronteras. La formulación básica de mallas hiperbólicas sienta su base en condiciones sobre la ortogonalidad y el área de las celdas. Estos métodos operan suavizando líneas en la malla y checando la ortogonalidad de las celdas.

#### Métodos Ortogonales

Las mallas que tienen la propiedad de que sus líneas coordenadas son ortogonales (ó casi ortogonales) son preferidas en la solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, debido a que con tales mallas el error de truncamiento se ve reducido. También tienen la ventaja de que al transformar la ecuación a resolver, aparecen menos términos que para una malla no ortogonal y que las condiciones de frontera se pueden representar más fácilmente. Una desventaja es que requieren de una parametrización muy particular en la frontera. En la práctica, el encontrar una malla ortogonal para una región dada puede ser extremadamente difícil. Los sistemas ortogonales no necesitan ser conformes, y pueden ser generados tanto por sistemas hiperbólicos como elípticos.

## 2.2. Métodos Variacionales

De entre los métodos que se han desarrollado en esta área estamos interesados en los que se obtienen por medio de una formulación variacional de las propiedades geométricas de la malla deseada. A esta rama se le conoce como Generación Variacional de Mallas. Dentro de esta formulación variacional se puede hacer una gran subdivisión entre los métodos continuos y los discretos.

### 2.2.1. Generación variacional continua

Entenderemos como un funcional continuo a una función de la forma:

$$I(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 L(\xi, \eta, x, y, x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi \quad (2.4)$$

que a cada malla  $\mathbf{X} : U_2 \rightarrow \Omega$  le asocia un número real. Aunque la mayoría de los funcionales que consideraremos son más simples, son de la forma

$$I(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) d\eta d\xi \quad (2.5)$$

donde  $L$  es una función que contendrá información acerca de ciertas cantidades geométricas que se desea controlar con el objeto de generar mallas adecuadas y que conformen a la frontera de  $\Omega$ .

El problema de generación variacional continua de mallas es encontrar  $\mathbf{X}^*$  que conforme la frontera y que haga mínimo el valor de  $I(\mathbf{X})$ ; además  $x$  debe tener un valor predeterminado sobre la frontera de  $U_2$ . Esto es, se requiere calcular  $\mathbf{X}^*$  tal que

$$I(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X}} I(\mathbf{X}) \quad (2.6)$$

Del cálculo de variaciones se sigue que  $\mathbf{X}^*$  debe ser solución del problema de valores a la frontera

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial x_\eta} \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\xi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial y_\eta} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$\mathbf{X}(\partial U_2)$  dado, el cual consta de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales, comúnmente acoplado y no lineal de condiciones a la frontera dadas por el valor de la malla en la frontera a las cuales llamamos Ecuación de Euer-Lagrange (E-L). Comúnmente éste problema de valores a la frontera se resuelve numéricamente usando algún esquema de diferencias finitas, tomando la malla generada por TFI como una aproximación inicial.

## Funcional de longitud

El funcional clásico de longitud  $\Phi_l$  en su forma más simple se obtiene haciendo

$$\lambda = L(x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta) = x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2 \quad (2.9)$$

Minimizando el funcional  $\Phi_l(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 \lambda d\eta d\xi$ , se trata de obtener una malla que tenga la característica de que las longitudes de líneas coordenadas sean lo más cercanas posibles a un mismo valor. Este funcional lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \Phi_l(\mathbf{X}) &= \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2] d\eta d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) d\eta d\xi \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2] d\eta d\xi + 2 \int_0^1 \int_0^1 J d\eta d\xi \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$  es el jacobiano de la transformación  $\mathbf{X}$ .

$\int_0^1 \int_0^1 J d\eta d\xi = \text{Area}(\Omega)$ , entonces minimizar  $\Phi_l(x)$  equivale a minimizar  $\int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi - y_\eta)^2 + (x_\eta + y_\xi)^2] d\eta d\xi$ , esto es, el mínimo de  $\Phi_l(x)$  se consigue en una transformación que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

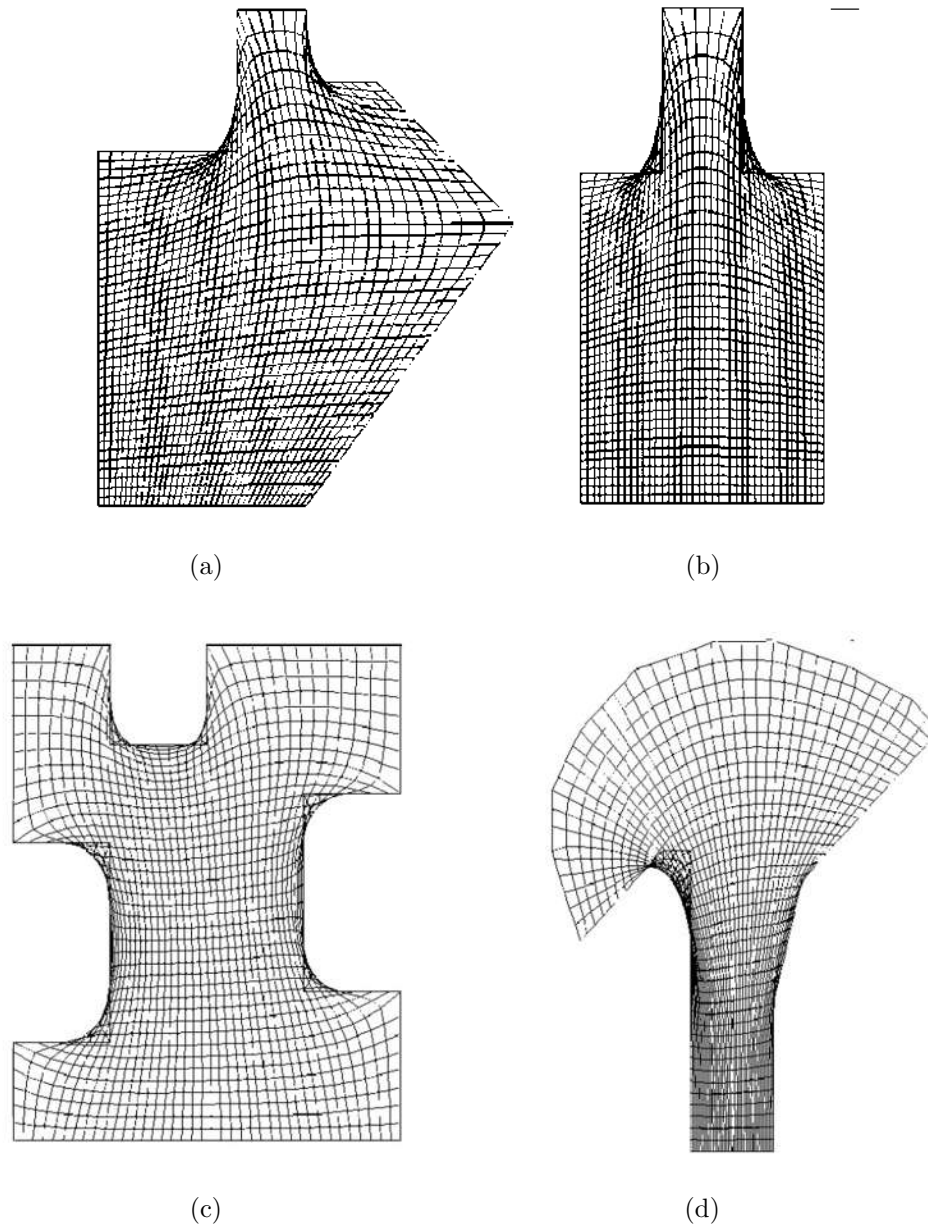
$$x_\xi = y_\eta \quad x_\eta = -y_\xi \quad (2.11)$$

en el sentido de los cuadrados mínimos, y las ecuaciones de Euler-Lagrange de este funcional son

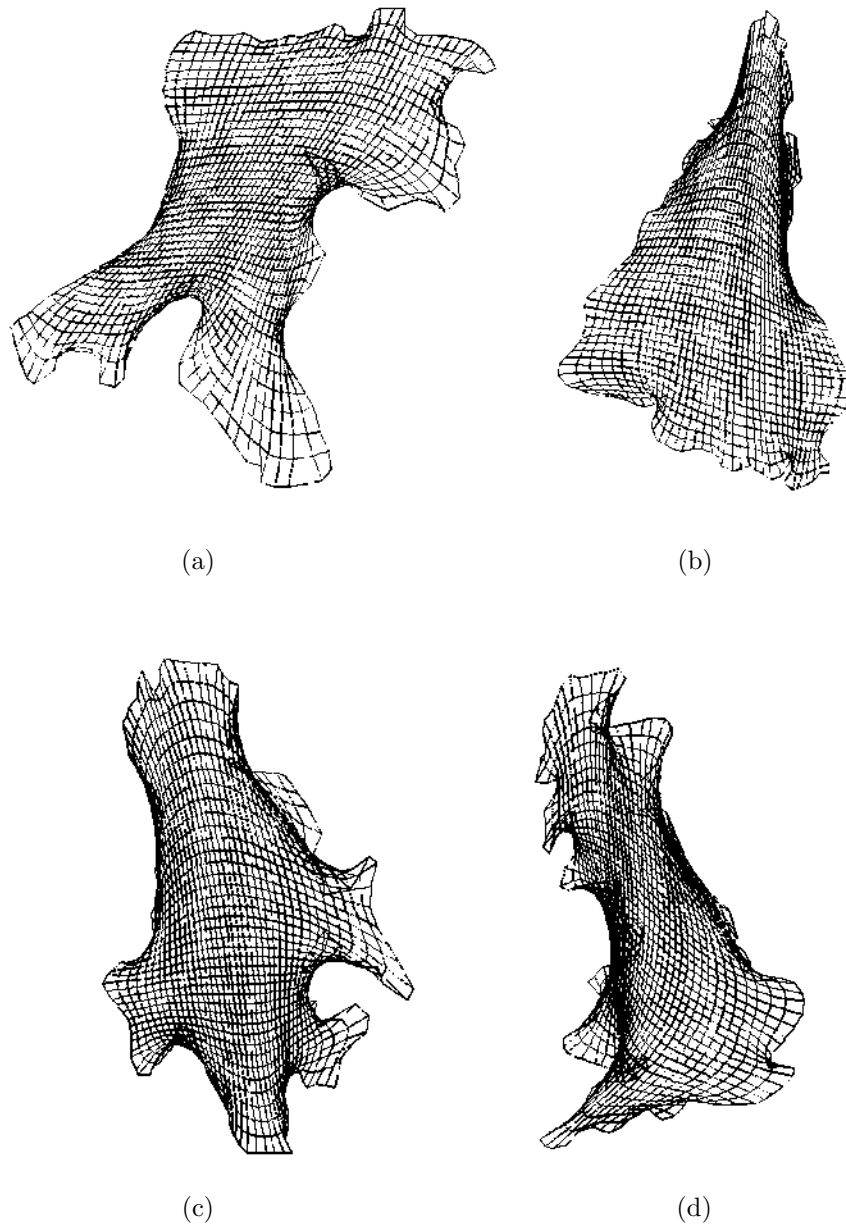
$$x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = 0 \qquad y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = 0 \qquad (2.12)$$

las cuales son elípticas, lineales y no acopladas y además son exactamente las ecuaciones de Laplace para las componentes de la transformación. El hecho de que el sistema sea elíptico garantiza que sus soluciones tienen derivadas continuas de orden más alto que las condiciones de frontera; por tanto, si se eligen condiciones de frontera suaves, las soluciones del problema elíptico correspondiente serán suaves.

A pesar de la simplicidad de este funcional, las mallas producidas por él no son satisfactorias ya que para la mayoría de las regiones no convexas estas mallas son dobladas; esto es, no son 1 – 1. Sin embargo, son muy suaves. Ahora se muestran las mallas producidas sobre ocho regiones de prueba minimizando el funcional de longitud, usando el algoritmo de solución que aparece en [7].



*Figura 9. (a), (b), (c), (d), Mallas óptimas generadas usando el funcional continuo de longitud en las regiones M12, M13, M19 y M26 respectivamente.*



*Figura 10. (a), (b), (c), (d), Mallas óptimas generadas usando el funcional continuo de longitud en las regiones HAB, SUD, UCH y ENG respectivamente.*

| Malla | Celdas no convexas |
|-------|--------------------|
| M12   | 28                 |
| M13   | 42                 |
| M19   | 78                 |
| M26   | 69                 |
| HAB   | 94                 |
| SUD   | 83                 |
| UCH   | 168                |
| ENG   | 245                |

*Tabla 2: Número de celdas no convexas; funcional continuo de longitud.*

### Funcional de área

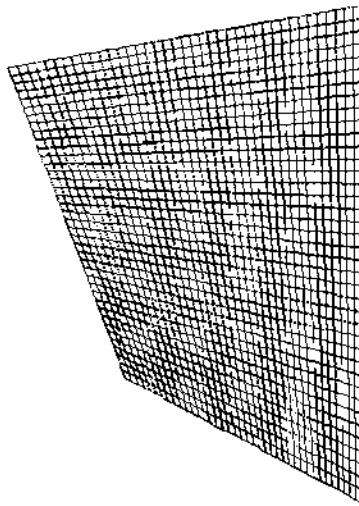
En su versión más simple, el funcional continuo de área  $\Phi_A$  está diseñado para producir mallas tales que la variación del jacobiano sea lo menor posible en el sentido de los cuadrados mínimos. Dicho funcional tiene la forma

$$\Phi_A(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^1 J^2 d\eta d\xi \quad (2.13)$$

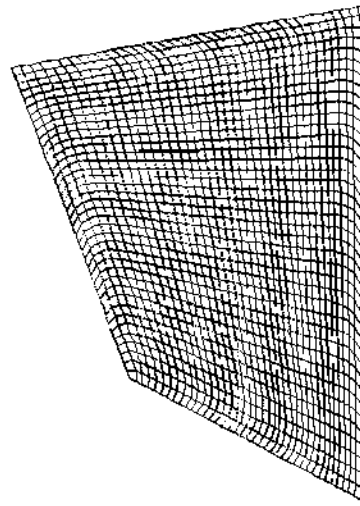
con  $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ . Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este funcional son

$$\begin{aligned} y_\eta^2 x_{\xi\xi} - x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} - 2y_\xi y_\eta x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + y_\xi^2 x_{\eta\eta} - x_\xi y_\eta y_{\eta\eta} &= 0 \\ -x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} + x_\eta^2 y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} - 2x_\xi x_\eta y_{\xi\eta} - x_\xi y_\eta x_{\eta\eta} + x_\xi^2 y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

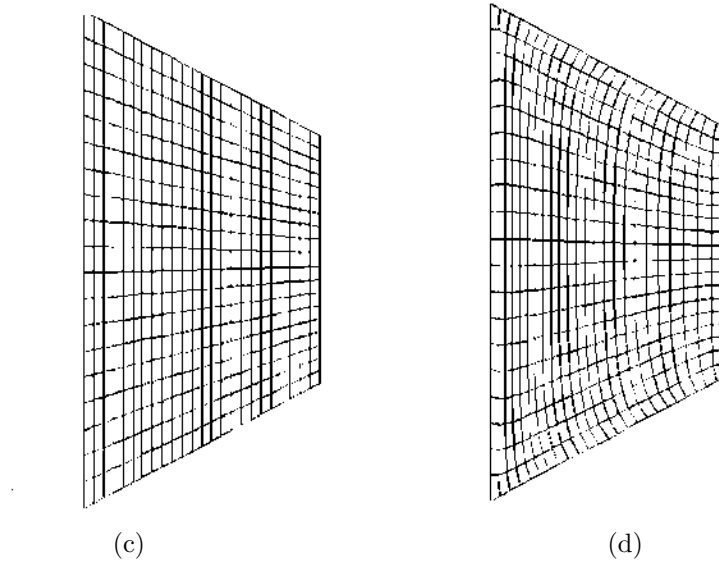
De hecho son un sistema cuasilineal, acoplado y no elíptico. Hasta la fecha no hay existencia o unicidad de las soluciones de este sistema. Las mallas producidas con este funcional no son suaves y, salvo en casos simples, son dobladas. El algoritmo de solución de [7] no convergió por ninguna de las mallas de prueba, sin embargo, esto no significa que no se pueda encontrar la solución numérica. Por esta razón y para fines de ilustración sólo se muestran algunas mallas producidas por el funcional de área en regiones simples (figura 11), en ambos casos presentados las mallas iniciales ya son convexas y así lo son también las mallas óptimas. Se puede notar su falta de suavidad.



(a)



(b)



**Figura 11.** Mallas generadas usando el funcional continuo de área; mallas iniciales (a) y (b) y mallas óptimas (c) y (d).

### Funcional de ortogonalidad

Nuestro objetivo al usar este funcional es obtener mallas con líneas coordenadas que sean lo más ortogonales posibles. Esto es equivalente a pedir que las líneas tangentes a dichas líneas coordenadas sean ortogonales en cada punto, lo que se puede describir por la relación

$$O = \mathbf{X}_\xi^t \mathbf{X}_\eta = 0 \quad (2.15)$$

Para la mayoría de las regiones no existe una malla que tenga esta característica; se trata entonces de calcular una, la más cercana posible a la ortogonalidad. Una manera de lograrlo es calcular una malla que satisfaga estas condiciones de ortogonalidad en el sentido de los cuadrados mínimos; esto es, se calcula el mínimo de

$$\Phi_O(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 (\mathbf{X}_\xi^t \mathbf{X}_\eta)^2 d\eta d\xi = \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi x_\eta + y_\eta y_\xi)^2 d\eta d\xi \quad (2.16)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este funcional son

$$\begin{aligned} x_\eta^2 x_{\xi\xi} + x_\eta y_\eta y_{\xi\xi} + (4x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta) x_{\xi\eta} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) y_{\xi\eta} + x_\xi^2 x_{\eta\eta} + x_\xi y_\xi y_{\eta\eta} &= 0 \\ x_\eta y_\eta x_{\xi\xi} + y_\eta^2 y_{\xi\xi} + (x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi) x_{\xi\eta} + (4y_\xi y_\eta + 2x_\xi x_\eta) y_{\xi\eta} + x_\xi y_\xi x_{\eta\eta} + y_\xi^2 y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

las cuales también son cuasilineales, acopladas y no elípticas. Muy frecuentemente su proceso de solución no converge; cuando lo hace, las mallas generadas son a menudo severamente dobladas y es por esa razón que al usar este funcional de manera aislada no es recomendable.

### Combinación de funcionales

Knupp y Steinberg [7] introducen el uso de combinaciones convexas de los funcionales anteriormente descritos con el objetivo de lograr mallas que gocen, en cierta medida, de las ventajas que ofrecen cada funcional por separado. Dicha combinación tiene la forma general

$$\Phi(\mathbf{X}) = \sigma_I \Phi_I(x) + \sigma_A \Phi_A(x) + \sigma_O \Phi_O(x) \quad (2.18)$$

donde

$$\sigma_I, \sigma_A, \sigma_O \geq 0 \text{ y } \sigma_I + \sigma_A + \sigma_O = 1$$

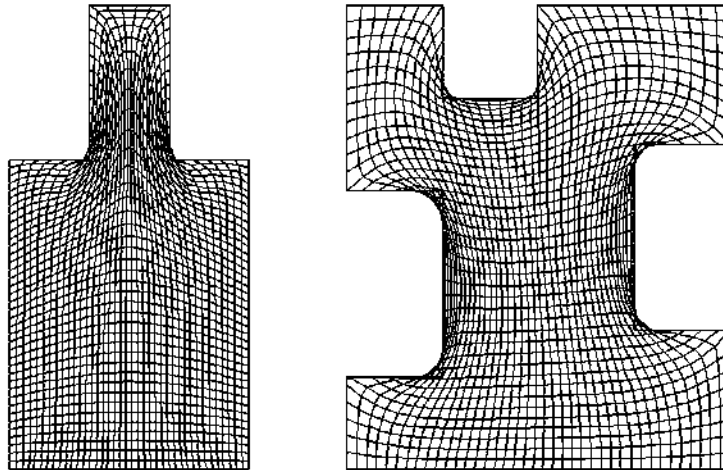
La elección de los parámetros  $\sigma_I$ ,  $\sigma_A$  y  $\sigma_O$  depende fuertemente de la experiencia personal y ésta es una gran limitante para el uso de esta combinación.

### Funcionales de área-longitud

Las combinaciones con  $\sigma_O = 0$ , que generan los llamados funcionales de área-longitud son muy usados, ya que para regiones no convexas y geoméricamente no muy complicadas producen mallas convexas (no dobladas) y aceptablemente suaves; sin embargo en la mayoría de las regiones no simples, la convexidad no logra ser alcanzada. Para las regiones de prueba HAB y ENG, el algoritmo de solución de ecuaciones diferenciales mostrado en [7] no convergió. En la siguiente tabla se muestra el número de celdas no convexas para estos ejemplos, así como los valores de  $\sigma_A$  correspondientes y las mallas obtenidas para las regiones M13 y M19.

| Malla | Celdas no convexas | $\sigma_A$ |
|-------|--------------------|------------|
| M13   | 14                 | .80        |
| M19   | 44                 | .50        |

*Tabla 3. Número de celdas no convexas usando el funcional continuo de área-longitud.*



*Figura 12. Mallas generadas usando el funcional continuo de área-longitud para M13 y M19.*

### Funcionales de área-ortogonalidad

Un generador que sí es automático, es decir, que no depende de los parámetros, lo obtenemos usando los valores  $\sigma_l = 0, \sigma_A = \frac{1}{2}, \sigma_O = \frac{1}{2}$ , y que dan lugar al funcional de área-ortogonalidad de Knupp. Éste tiene la forma

$$\begin{aligned}\Phi_{AO} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [J^2 + O^2] d\eta d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 [(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 + (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2] d\eta d\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi^2 y_\eta^2 + x_\eta^2 y_\xi^2 + x_\xi^2 x_\eta^2 + y_\xi^2 y_\eta^2) d\eta d\xi = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 (x_\xi^2 + y_\xi^2) + (x_\eta^2 + y_\eta^2) d\eta d\xi\end{aligned}\quad (2.19)$$

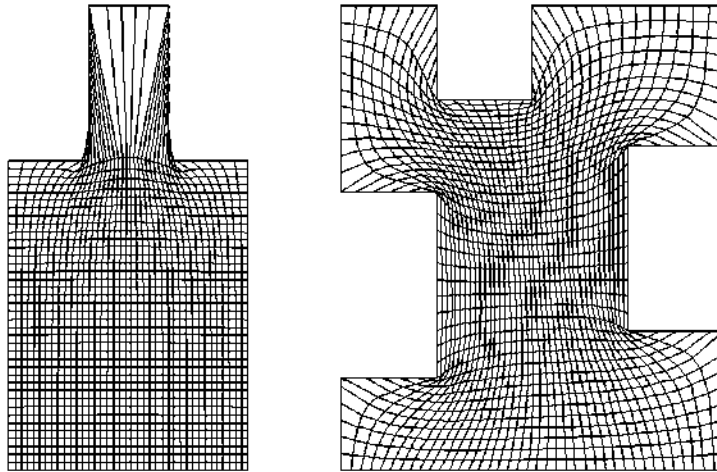
Esto es,  $L$  se puede interpretar como producto de los cuadrados de los segmentos “verticales” y “horizontales”. Las ecuaciones de  $E - L$  correspondientes a este funcional son

$$\begin{aligned}(x_\eta^2 + y_\eta^2)x_{\xi\xi} + 4x_\xi x_\eta x_{\xi\eta} + 2(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)y_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2)x_{\eta\eta} &= 0 \\ (x_\eta^2 + y_\eta^2)y_{\xi\xi} + 2(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi)x_{\xi\eta} + 4y_\xi y_\eta y_{\xi\eta} + (x_\xi^2 + y_\xi^2)y_{\eta\eta} &= 0\end{aligned}\quad (2.20)$$

A pesar de que las ecuaciones de Euler-Lagrange no siempre son elípticas, las mallas producidas por el funcional de área-ortogonalidad son suaves. También se logra convexidad si la región es relativamente simple, se tiene una variación relativamente baja del jacobiano y las mallas óptimas son casi ortogonales. En la tabla 4 se muestra el número de celdas no convexas para cada malla óptima lograda con este funcional en las figuras las mallas

| Malla | Celdas no convexas |
|-------|--------------------|
| M13   | 2                  |
| M19   | 2                  |
| ENG   | 80                 |
| HAB   | 12                 |

*Tabla 4: número de celdas no convexas usando el funcional continuo de área-ortogonalidad.*



*Figura 13. Mallas generadas usando el funcional de área-ortogonalidad en las regiones M13 y M19.*

### Funcional de suavidad

El funcional de longitud definido para la transformación inversa

$$\xi(x) = \begin{pmatrix} \xi(x, y) \\ \eta(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\xi : \Omega \longrightarrow U_2$$

está dado por

$$\int \int_{\Omega} (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \eta_x^2 + \eta_y^2) dx dy \quad (2.21)$$

el cual, al hacer el cambio de coordenadas hacia el espacio lógico se escribe como

$$\Phi_S(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_\xi^2 + x_\eta^2 + y_\xi^2 + y_\eta^2}{J} d\eta d\xi \quad (2.22)$$

Éste es el funcional de suavidad de Winslow, también referido como el funcional Thompson-Thames-Mastin homogéneo (TTM). Las ecuaciones de Euler-Lagrange para este funcional son las ecuaciones de Laplace para la transformación inversa

$$\begin{aligned} \xi_{xx} + \xi_{yy} &= 0 \\ \eta_{xx} + \eta_{yy} &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

que, sin embargo, no son fácilmente resueltas de esta manera. En lugar de éstas se resuelven las correspondientes al mapeo directo, las cuales son cuasilineales y acopladas:

$$\begin{aligned} g_{22}x_{\xi\xi} - 2g_{12}x_{\xi\eta} + g_{11}x_{\eta\eta} &= 0 \\ g_{22}y_{\xi\xi} - 2g_{12}y_{\xi\eta} + g_{11}y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

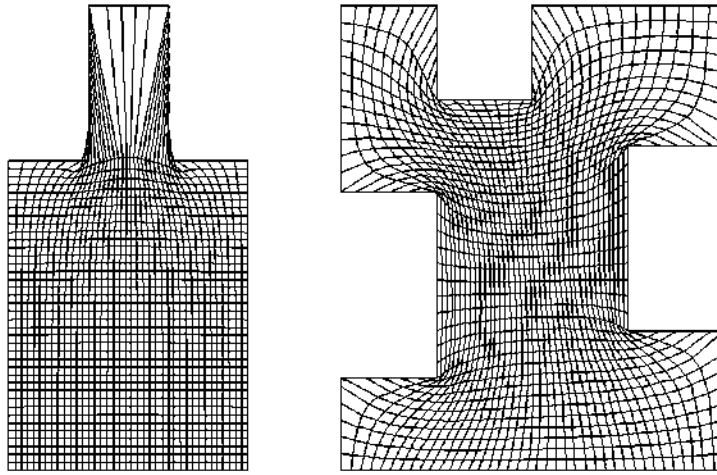
donde

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ g_{12} &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2. \end{aligned}$$

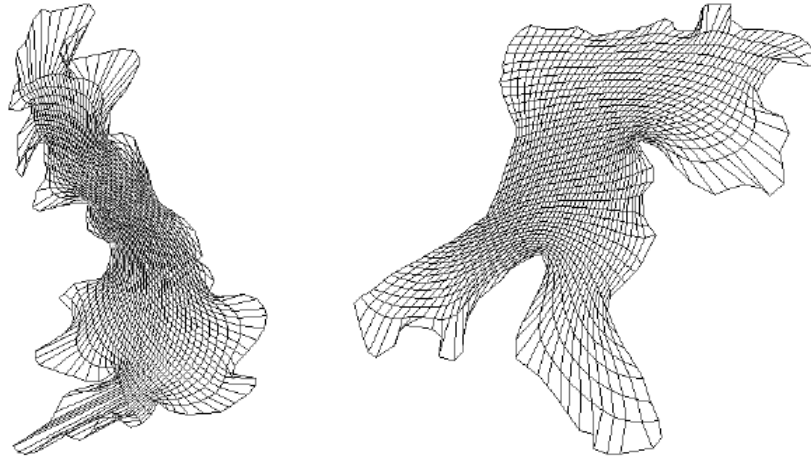
Este funcional, al igual que los anteriores, tiene la desventaja de que a menudo no converge a una malla convexa. Sin embargo cabe aclarar que el uso de este funcional usualmente se restringe a mejorar (hablando de suavidad) una malla que se ha optimizado por otros métodos. En este sentido, solo se realizan unas cuantas iteraciones del proceso de optimización del funcional de suavidad. En la siguiente tabla se muestran el número de celdas no convexas para cada una de las mallas y algunas mallas generadas con dicho funcional.

| Malla | Celdas no convexas |
|-------|--------------------|
| M13   | 6                  |
| M19   | 11                 |
| ENG   | 64                 |
| HAB   | 21                 |

*Tabla 5. Número de celdas no convexas usando el funcional continuo de suavidad.*



*Figura 14. Mallas generadas usando el funcional continuo de suavidad para las regiones M13 y M19 respectivamente.*



*Figura 15. Mallas generadas usando el funcional continuo de suavidad para las regiones ENG y HAB respectivamente.*

### 2.2.2. Generación variacional discreta

Como ya vimos, en los métodos variacionales continuos la generación de mallas se realiza resolviendo las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al funcional a minimizar. Esta solución se realiza de manera numérica eligiendo una malla sobre el cuadrado unitario, esto es, puntos

$$(\xi_i, \eta_j) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

y aplicando un esquema de diferencias finitas para obtener aproximaciones  $P_{i,j}$  a los valores de  $x(\xi_i, \eta_j)$ . Algunos autores como Barrera ([4] y [5]), Castillo ([8], [9], [10], [11] y [12]) e Ivanenko ([15] y [16]) han propuesto realizar primeramente la discretización del funcional a minimizar y después resolver el correspondiente problema de optimización multivariada. Esto es, el funcional continuo

$$\Phi(\mathbf{X}) = \int_0^1 \int_0^1 L(x_\xi x_\eta y_\xi y_\eta) d\eta d\xi \quad (2.25)$$

se reemplaza por una función de  $m \times n$  variables

$$P_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$F(P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{i,n}, P_{2,1}, P_{2,2}, \dots, P_{2,n}, \dots, P_{m,1}, P_{m,2}, \dots, P_{m,n}) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^{n-1} f_{i,j} \quad (2.26)$$

donde es una aproximación al valor  $L$  en la celda del cuadrado unitario definida por los puntos,

$$(\xi_{i-1}, \eta_{j-1}), (\xi_{i-1}, \eta_j), (\xi_i, \eta_j), (\xi_i, \eta_{j-1})$$

los puntos

$$\{P_{1,j}\}, \{P_{m,j}\} \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \{P_{j,1}\}, \{P_{i,n}\} \quad i = 1, 2, \dots, m$$

son los valores correspondientes al mapeo  $\chi$  en los puntos frontera del cuadrado unitario

$$\begin{aligned} \{\xi_1, \eta_j\}, \{\xi_m, \eta_j\} \quad j = 1, 2, \dots, n \\ \{\xi_i, \eta_1\}, \{\xi_i, \eta_m\} \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

que están fijos y los puntos interiores

$$\{P_{i,j}\} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1.$$

Que son las imágenes bajo el mapeo  $\chi$  buscado de los puntos del cuadrado unitario

$$\{(\xi_i, \eta_j)\} \quad i = 2, \dots, m-1 \quad j = 2, \dots, n-1$$

se calculan de tal forma que minimicen  $F$ .

Esta minimización de  $F$  se realiza partiendo de una malla inicial, muy comúnmente generada por la versión discreta de TFI. Se usa un método de optimización multivariada de gran escala, por ejemplo L-BFGS ó Newton Truncado. Cabe mencionar que aunque los métodos discretos clásicos se obtienen a partir de la discretización del funcional continuo correspondiente, también pueden pensarse en generar funcionales discretos directamente, en otras palabras, proponer una cantidad geométrica que se quiera minimizar sobre cada malla.

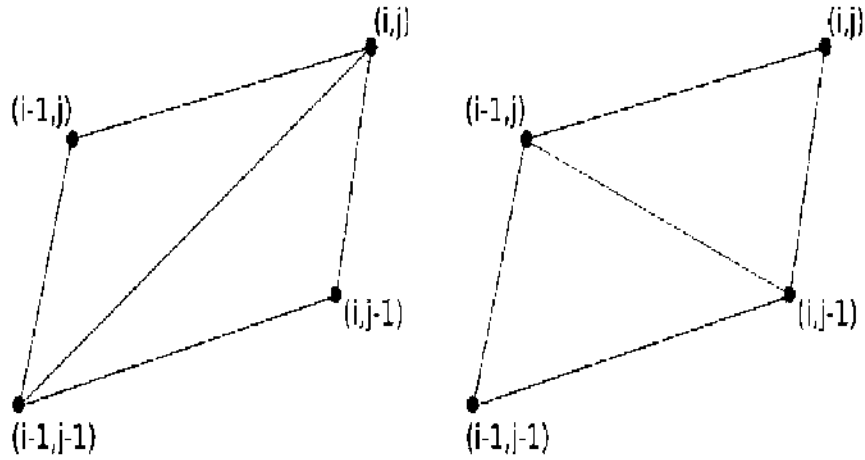
### Funcional discreto de longitud

El funcional de longitud en su forma más simple es

$$F_l = \frac{1}{2N\bar{\alpha}} \sum_{q=1}^N l(\Delta_q) = \frac{1}{2N\bar{\alpha}} \sum_{q=1}^N l_q \quad (2.27)$$

donde  $N = 4(m-1)(n-1)$  es el número de triángulos relevantes en la malla (Figura 16),  $m$  y  $n$  representan el tamaño de la malla y  $\bar{\alpha}$  es el doble del área promedio de todos los triángulos. Este funcional es usado debido a los buenos resultados que otorga al ser combinada con otros funcionales que se mencionarán un poco más adelante.

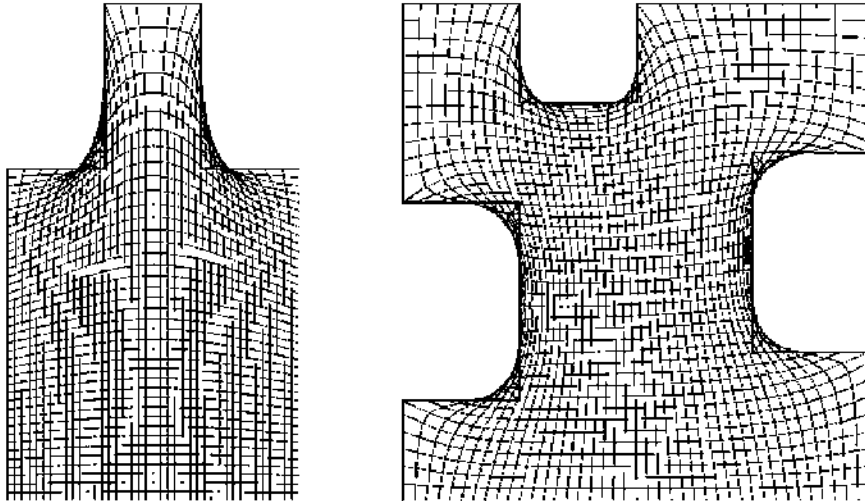
Una versión más general es la propuesta en [4] y [5].



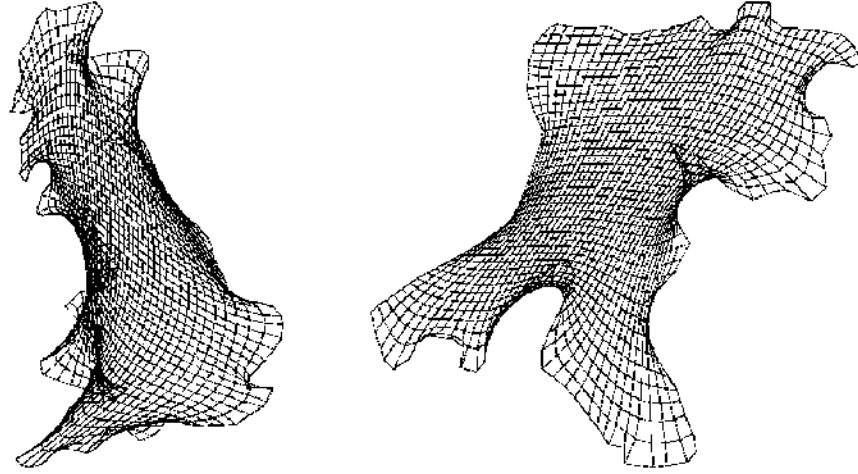
*Figura 16. Formación de los triángulos relevantes.*

$F_l$  es el funcional cuadrático, por lo cual su optimización es muy eficiente y también tiene la propiedad de que su hessiana es definida positiva en todas partes [5], lo cual garantiza la existencia de un único mínimo.

En las siguientes figuras 17 y 18 se muestran las mallas generadas para las regiones de prueba minimizando este funcional, tomando como malla inicial una generada por el método TFI en su versión discreta



*Figura 17. Mallas generadas usando el funcional discreto de longitud para M13 y M19.*



*Figura 18. Mallas generadas usando el funcional discreto de longitud para ENG y HAB.*

En la siguiente tabla 6 se muestran el número de celdas no convexas y la cantidad de iteraciones necesarias para la convergencia numérica.

| Malla | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------------------|-------------|
| M13   | 42                 | 5           |
| M19   | 81                 | 5           |
| ENG   | 252                | 1           |
| HAB   | 91                 | 5           |

*Tabla 6. Número de celdas no convexas usando el funcional discreto de longitud.*

#### Funcional clásico de área en su versión discreta.

En su versión discreta el funcional clásico de área es

$$F_{A^2} = \frac{1}{N\alpha^2} \sum_{q=1}^N (\alpha_q^2) \quad (2.28)$$

Sean  $\Omega$ ,  $m$  y  $n$  fijos, este funcional tiene las siguientes propiedades:

1. Si existe una malla  $G$  tal que los triángulos de todas las celdas tienen la misma área, entonces  $G$  es un punto crítico para el funcional de área.
2. La hessiana del funcional de área es semipositiva definida.

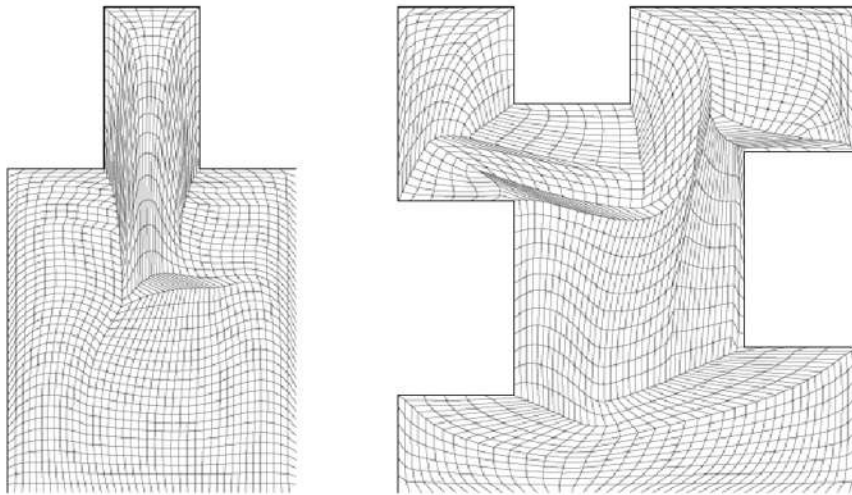
Su demostración se puede corroborar en [5] y una forma más general de estos resultados la encontramos en [3]. Las propiedades antes mencionadas garantizan que, si es que existe una malla ideal para el funcional de área, su minimización conduce a ella; en caso de que no exista dicha malla ideal, el mínimo estará en una malla que sea lo más cercana posible a tener triángulos de igual área. La existencia de una malla ideal para este funcional de área depende fuertemente de la frontera de la región y de la distribución de los puntos sobre dicha frontera. Una malla ideal  $G^*$  para el funcional de área es aquella en la cual las áreas de todos los triángulos son iguales.

El proceso de minimización del funcional siempre converge. Los resultados obtenidos sobre las mallas de prueba minimizando este funcional en la tabla 7.

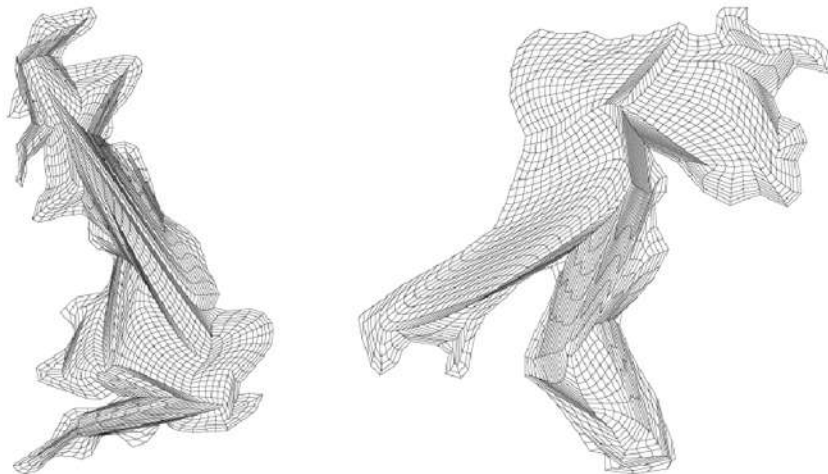
| Malla | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------------------|-------------|
| M13   | 0                  | 43          |
| M19   | 1                  | 108         |
| ENG   | 31                 | 180         |
| HAB   | 6                  | 126         |

*Tabla 7. Número de celdas no convexas usando el funcional discreto de área.*

En las figuras 19 y 20 se muestran las mallas generadas mediante la optimización de este funcional. Observemos que aunque las mallas están lejos de ser suaves, tienen menos celdas no convexas.



*Figura 19 . Mallas generadas usando el funcional discreto de área para M13 y M19.*



*Figura 20 . Mallas generadas usando el funcional discreto de área para ENG y HAB.*

### Funcional discreto de ortogonalidad

La forma que tiene el funcional de ortogonalidad en su versión discreta es

$$F_O = \frac{1}{N\alpha^2} \sum_{q=1}^N O(\Delta_q^2) = \frac{1}{N\alpha^2} \sum_{q=1}^N O_q^2 \quad (2.29)$$

donde  $O_q^2$  es la discretización del integrando del funcional continuo de ortogonalidad

$$o^2 = \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \cos^2 \theta \quad (2.30)$$

El uso de este funcional no conduce a buenas mallas cuando se usa de manera aislada para casi ninguna región, sin embargo, la combinación con otros funcionales sí lo hace.

Una malla ideal para el funcional de ortogonalidad es aquella en la que las celdas son rectángulos. Utilizando este funcional en las regiones de prueba no se obtuvo ninguna malla convexa, a pesar de que el número de iteraciones realizado fue alto.

### Funcionales combinados

Al igual que en caso continuo, en el caso discreto es conveniente usar combinaciones de diferentes funcionales para producir mallas más adecuadas. La forma más general de dicha combinación es

$$F = \tau_1 F_{A^2} + \tau_2 F_l + (1 - \tau_1 - \tau_2) F_o \quad (2.31)$$

donde

$$0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1 \text{ y } \tau_1 + \tau_2 \leq 1.$$

Los funcionales que se usan están en su forma normalizada.

### Funcional de área-longitud

Cuando se hace  $\tau_1, \tau_2 = 1 - \tau$  obtenemos la familia de funcionales

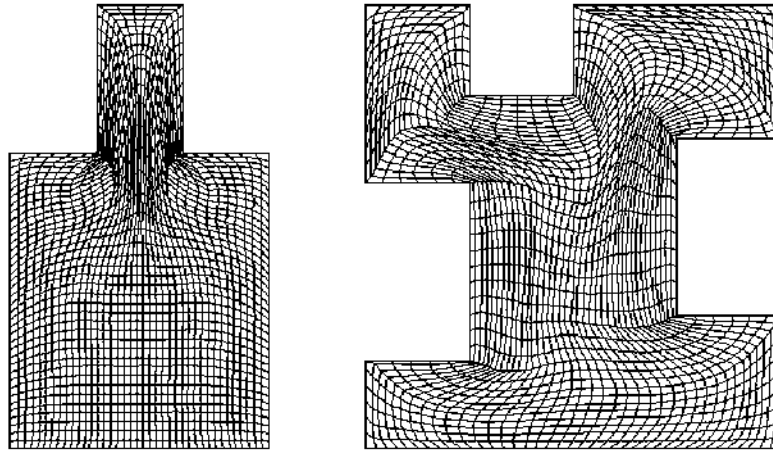
$$F = \tau F_{A^2} + (1 - \tau) F_l \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (2.32)$$

que con las elecciones adecuadas de (generalmente cercano a 1) dan lugar a mallas que son aceptables para la mayoría de las regiones sencillas. Se hicieron diferentes pruebas, con distintos valores de  $\tau$ , y sus resultados se muestran en la siguiente tabla:

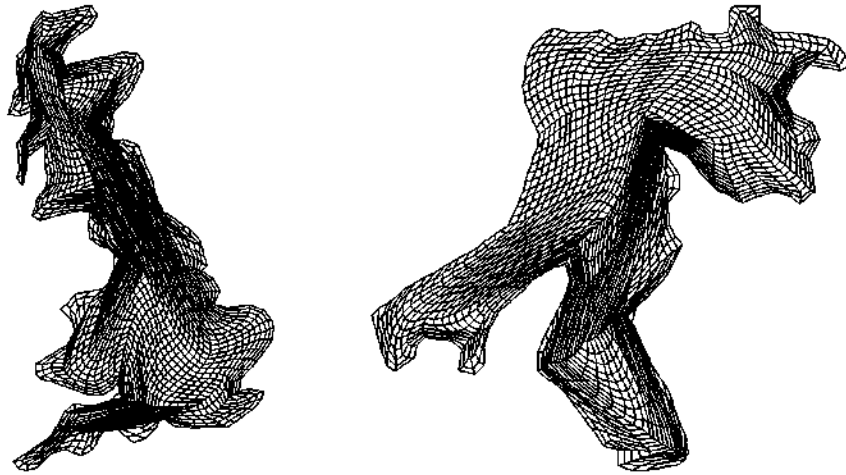
| Malla | $\tau$ | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------|--------------------|-------------|
| M13   | .75    | 14                 | 17          |
|       | .95    | 6                  | 28          |
|       | .99    | 0                  | 47          |
| M19   | .75    | 8                  | 23          |
|       | .95    | 2                  | 4           |
|       | .99    | 0                  | 82          |
| ENG   | .75    | 42                 | 30          |
|       | .95    | 13                 | 62          |
|       | .99    | 11                 | 126         |
| HAB   | .75    | 128                | 36          |
|       | .95    | 58                 | 111         |
|       | .99    | 29                 | 114         |

*Tabla 8. Resultados para el funcional de área-longitud*

Las siguientes figuras 21 y 22 se muestran las mallas correspondientes a  $\tau = 0,95$  de las regiones de prueba.



*Figura 21. Mallas generadas usando el funcional discreto de área-longitud para M13 y M19 respectivamente.*



*Figura 22. Mallas generadas usando el funcional discreto de área-longitud para ENH y HAB respectivamente.*

Se observa que éstas son más suaves que las correspondientes al funcional de área, pero tienen más celdas no convexas.

### Funcional discreto de área-ortogonalidad.

Al hacer  $\tau_2 = 0$  se obtiene la familia conocida como funcionales de área-ortogonalidad. La forma de estos funcionales es

$$F_{ao}^{(\tau)} = \tau_1 F_{A^2} + (1 - \tau_1) F_o. \quad (2.33)$$

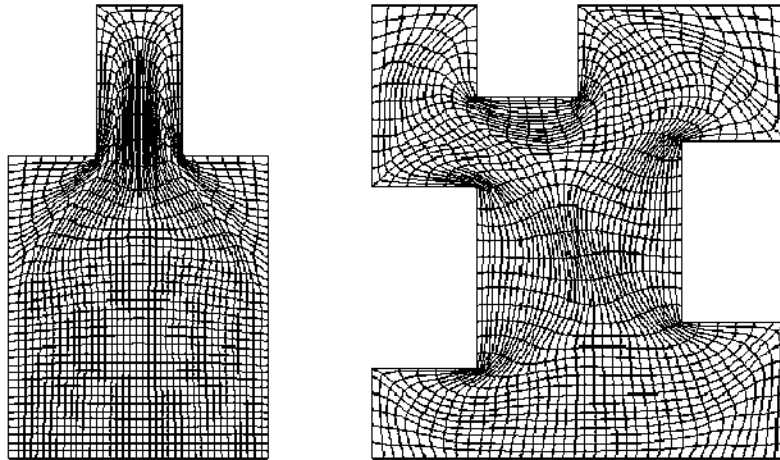
Cuando se habla del *funcional de área-ortogonalidad*, sin especificar el valor del parámetro  $\tau$ , se hace referencia al miembro de esta familia correspondiente al valor  $\tau = 0,5$ . La forma que toma para un triángulo  $\Delta cab$  es

$$F_{ao} = \frac{1}{2}(\alpha_q^2 + o_q^2) = \frac{1}{2}(\|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \cos^2 \theta + \|c - a\|^2 \|b - a\|^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2}(\|c - a\|^2 \|b - a\|^2) \quad (2.34)$$

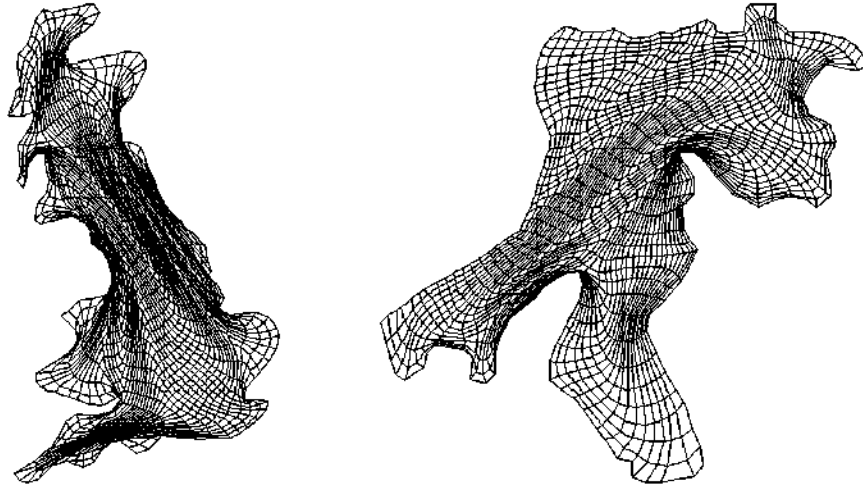
A pesar de que los funcionales no producen mallas suaves, la combinación de área-ortogonalidad dan lugar a mallas relativamente suaves, las área de los triángulos tienen poca variación y el número de iteraciones es menor que para el funcional de área, sin embargo, en la mayoría de las regiones de prueba no se logra obtener mallas convexas. En la tabla 9 se muestran los resultados obtenidos en las regiones de prueba para distintos valores de  $\tau$  y en las figuras 23 y 24 se muestran las mallas correspondientes a este funcional.

| Malla | $\tau$ | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------|--------------------|-------------|
| M13   | .75    | 2                  | 23          |
|       | .95    | 2                  | 24          |
|       | .99    | 0                  | 54          |
| M19   | .75    | 2                  | 21          |
|       | .95    | 1                  | 30          |
|       | .99    | 2                  | 48          |
| ENG   | .75    | 32                 | 46          |
|       | .95    | 11                 | 38          |
|       | .99    | 13                 | 62          |
| HAB   | .75    | 115                | 60          |
|       | .95    | 66                 | 79          |
|       | .99    | 58                 | 194         |

**Tabla 9. Resultados para el funcional área-ortogonalidad.**



**Figura 23. Mallas generadas usando el funcional discreto de área-ortogonalidad para M13 y M19 respectivamente.**



*Figura 24 . Mallas generadas usando el funcional discreto de área-ortogonalidad para ENG y HAB respectivamente.*

### Funcionales de suavidad y área adaptivos de Tinoco

En la generación de mallas sobre regiones planas irregulares, el principal objetivo a conseguir es el conseguir que la malla sea convexa, ya que de otro modo no nos es útil para el propósito que se pretende. Los métodos hasta ahora revisados en este trabajo no garantizan que logremos el objetivo, ya que en muchos casos la malla óptima no es convexa. Se desea contar con un funcional de tal forma que el proceso de minimizarlo nos conduzca siempre a una malla convexa y que se garantice que eso siempre suceda.

Estableciendo la idea de optimización de una malla, se considera una región plana  $\Omega$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , y los correspondientes puntos frontera

$$\{P_{1,j}\}_{j=1,\dots,m} \quad \{P_{m,j}\}_{j=1,\dots,n} \quad \{P_{i,1}\}_{i=1,\dots,m} \quad \{P_{i,n}\}_{i=1,\dots,m}$$

también fijos.

En [3] está definida, para una malla  $G$  sobre  $\Omega$ , la cantidad

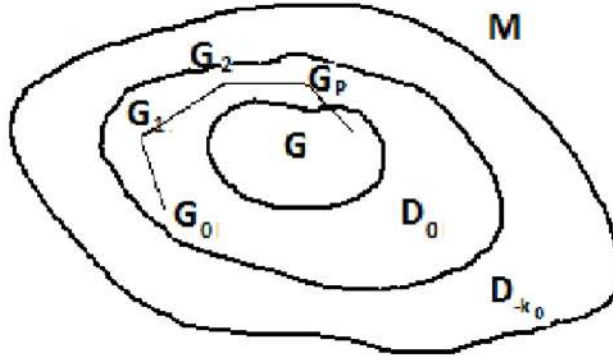
$$\alpha_-(G) = \min_{\Delta \in G} \{\alpha(\Delta)\}$$

la cual es el doble del mínimo de las áreas de los triángulos en la malla. Ahora definimos el conjunto  $D_k = \{G : G \in M \text{ y } \alpha_-(G) > -k\}$  para  $k$  real, donde  $M$  es el conjunto de mallas definidas sobre  $\Omega$ .

Naturalmente si  $k < k'$ , se da la contención  $D_k \subset D_{k'}$ , y además si  $k \leq -\bar{\alpha} = -\frac{\text{Area}(\Omega)}{(m-1)(n-1)}$  entonces  $D_k = \phi$ . De esta manera, el conjunto de las  $k$  tales que  $D_k \neq \phi$  es un conjunto de números reales, no vacío y acotado inferiormente. Sea  $k_- = \inf\{k : D_k \neq \phi\}$ , si  $k_- < 0$  entonces el conjunto de las mallas convexas sobre  $\Omega$ ,  $D_0$  es no

vacío. El proceso de optimización de un funcional comienza con una malla  $G_0$  tal que  $\alpha_-(G_0) > k_0$ , es decir  $G_0 \in D_{k_0}$ .

Si las mallas producidas en cada paso de esta optimización son consideradas como los puntos de una trayectoria en el conjunto de mallas sobre  $\Omega$ , se puede parafrasear nuestro objetivo de generación de mallas convexas como el de calcular una trayectoria  $\Gamma : [-k_0, 0] \rightarrow M$  tal que  $\Gamma(-k_0) = G_0$  y  $\Gamma(0) = G \in D_0$  si es que  $D_0 \neq \phi$  (fig. 25)



*Figura 25. Trayectoria hacia una malla convexa.*

En caso de no existir una malla convexa sobre  $\Omega$ , sería deseable que el punto dinas de dicha trayectoria fuera lo más cercano posible a la convexidad; en otra palabras, se desea poder obtener una malla de con  $k$  lo mas pequeño posible.

### Funcional de suavidad adaptativa

El funcional discreto de suavidad esta definido como

$$\sum_{q=1}^N \frac{l_q}{\alpha_q} \quad (2.35)$$

Un objetivo deseable es obtener funcionales tales que en su proceso de optimización no se requieran condiciones de arranque muy estrictas y produzcan mallas suaves. Supongase que se tiene una malla no convexa tal que el área de cada triángulo que contribuye al funcional es mayor que  $\frac{-k}{2}$ . Entonces la función  $f_k = \frac{l}{k+\alpha}$  toma valores positivos para cada triángulo en la malla. Esta función de lugar al funcional

$$F_s = \frac{1}{2N} \sum_{q=1}^N \frac{l}{k + \alpha} \quad (2.36)$$

Minimizando este funcional se obtiene una malla que está más cerca de ser convexa que la original. Una adecuada actualización de  $k$  produce, un número finito de pasos, una malla convexa, si existe.

### Funcional de área adaptiva

En su versión discreta del funcional de área para una malla discreta  $G$  es de la forma:

$$F_{A^{-1}}(G) = \sum_{\Delta \in G} \frac{1}{\alpha(\Delta)} \quad (2.37)$$

y usando una numeración adecuada de triángulos se puede escribir como

$$F_{A^{-1}}(G) = \sum_{q=1}^N \frac{1}{\alpha_q} \quad (2.38)$$

Nótese que para que el proceso de optimizar  $F_{A^{-1}}$  genere una malla convexa, es necesario que la malla inicial sea convexa. Aunque esto sea una seria limitación para el uso de este funcional, se puede mejorar, más adelante se dirá como.

### 2.2.3. Modificación del funcional

Debido al buen resultado obtenido en [3] al modificar el funcional de suavidad para ampliar su dominio de definición, considérese el funcional discreto dado por

$$F_{A^{-1},k} = \frac{k + \bar{\alpha}}{N} \sum_{q=1}^N \frac{1}{\alpha_q + k} \quad (2.39)$$

el cual se puede optimizar partiendo de una malla  $G$  tal que  $\alpha_-(G) > -k$  y producirá una malla óptima y  $k$  se elige adecuadamente,  $\alpha_-(\hat{G}) > \alpha_-(G)$

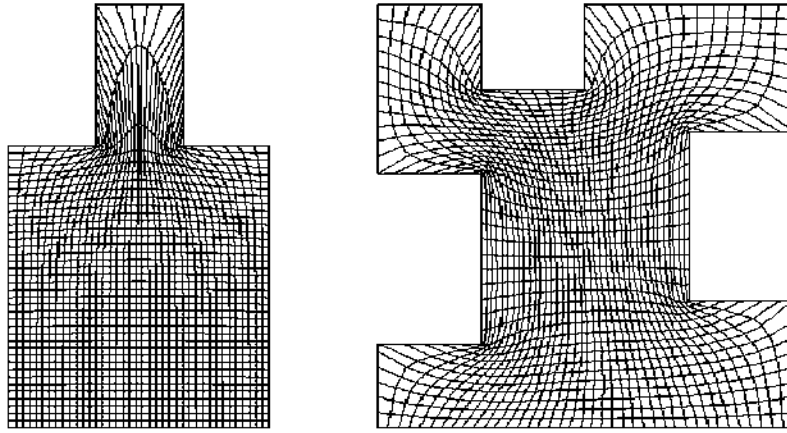
En la tablas 10 y 11 se muestran los resultados obtenidos con la optimización de los funcionales de suavidad y área respectivamente. En el caso del funcional de área, los resultados para las regiones de prueba se alcanzaron tomando como dato inicial la malla óptima para el funcional de longitud; esto fue necesario debido a que el proceso de optimización del funcional de área no convergió tomando como condición inicial la malla generada por TFI. Esto constituye una desventaja para este funcional la cual se puede superar usando combinaciones adecuadas con otros funcionales, como se explica un poco más adelante. Las gráficas de las mallas óptimas correspondientes se muestran en las figuras 26, 27, 28 y 29.

| Malla | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------------------|-------------|
| M13   | 0                  | 50          |
| M19   | 0                  | 55          |
| ENG   | 0                  | 85          |
| HAB   | 0                  | 210         |

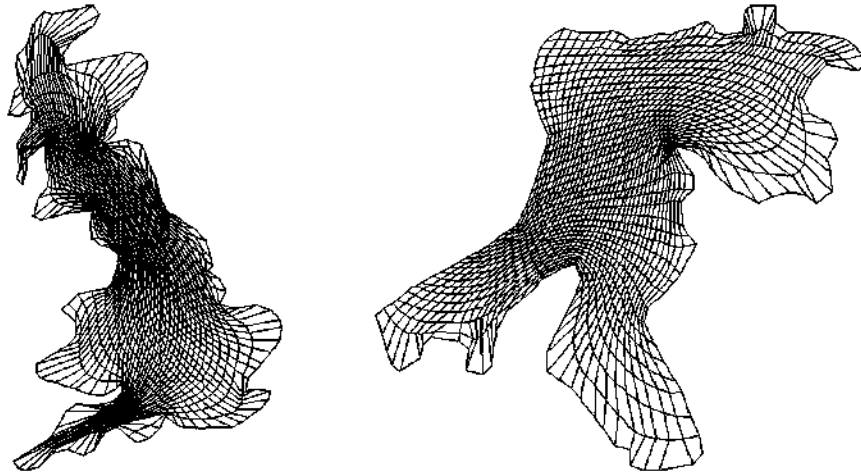
**Tabla 10. Resultados para el funcional de suavidad.**

| Malla | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------------------|-------------|
| M13   | 0                  | 245         |
| M19   | 0                  | 107         |
| ENG   | 0                  | 281         |
| HAB   | 0                  | 500         |

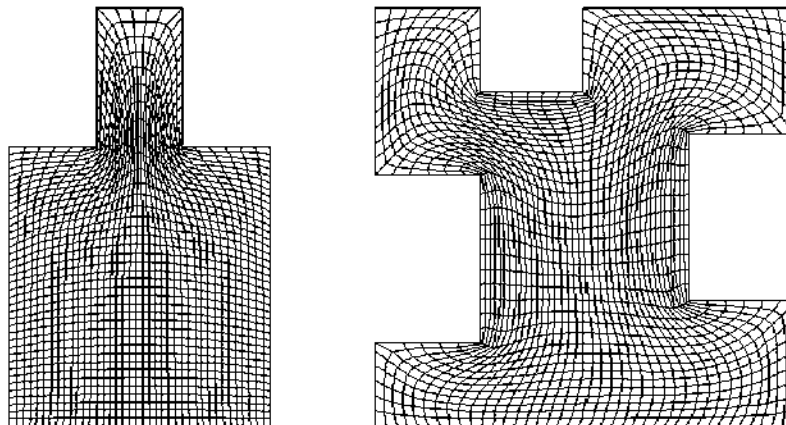
**Tabla 11. Resultados para el funcional de área.**



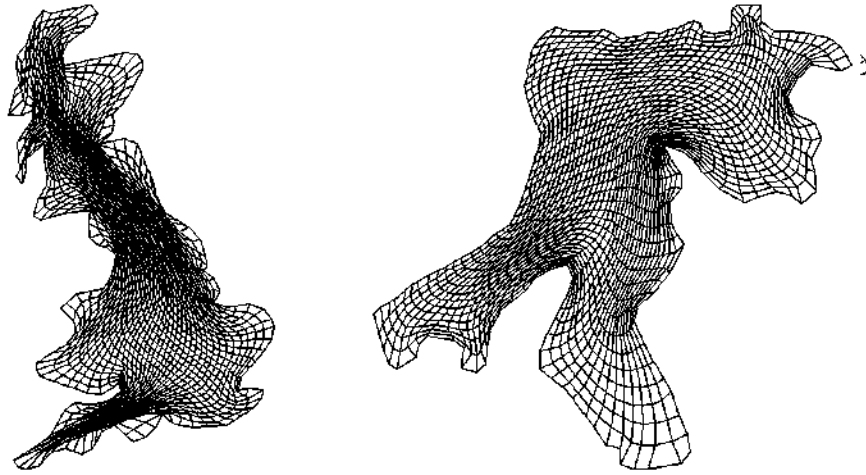
*Figura 26. Mallas generadas usando el funcional suavidad para M13 y M19 respectivamente.*



*Figura 27. Mallas generadas usando el funcional de suavidad para ENG y HAB respectivamente.*



*Figura 28. Mallas generadas usando el funcional de área para M13 y M19 respectivamente.*



*Figura 29. Mallas generadas usando el funcional de área para ENG y HAB respectivamente.*

### Combinación de funcionales

Como ya vimos, el funcional de suavidad nos proporciona una manera de obtener mallas muy suaves, sin embargo el control de las áreas no es muy eficiente, en cambio el funcional de área produce un mejor control del tamaño de las celdas, pero distan mucho de proporcionar á mallas óptimas suaves y el número de iteraciones necesaria para minimizarlo es muy grande. De ahí que como en casos anteriores, es conveniente combinar diferentes funcionales para tratar de conservar las ventajas de cada funcional por separado y disminuir sus inconvenientes. En todos los casos se usarán las formas normalizadas de los funcionales.

### Combinación de área con longitud

Una forma de suavizar las mallas producidas con los funcionales de área es continuar con la idea de usarlos en combinación con el funcional de longitud, lo cual también nos lleva a disminuir los tiempos necesarios para obtener convergencia.

El uso del funcional de área recíproca, además de los inconvenientes comunes a todos los funcionales de área ya mencionados, tiene la desventaja de que requiere, en muchos casos, que las mallas iniciales reciban un tratamiento con otros funcionales a fin de obtener convergencia. Sin embargo al combinarlo con el funcional de longitud, este inconveniente se ve superado en los casos estudiados. Dicha combinación tiene la forma

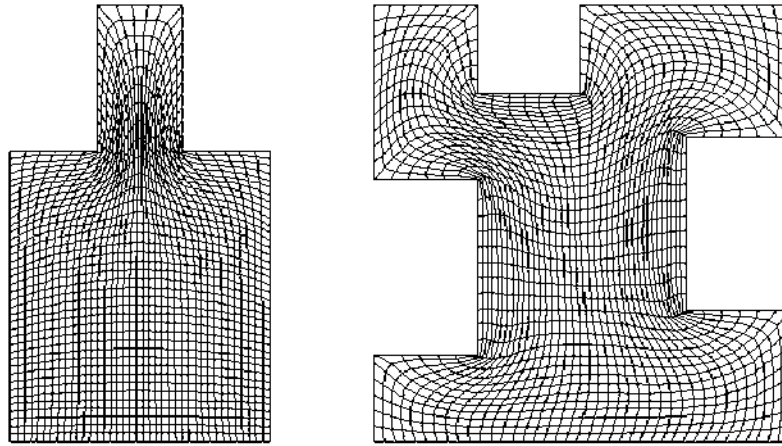
$$F_{A^{-1}-l}^{(\tau)} = \tau F_{A^{-1}} + (1 - \tau) F_l \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (2.40)$$

Los resultados de optimizar algunos de estos funcionales partiendo de las mallas iniciales generadas con TFI se muestran en la siguiente tabla

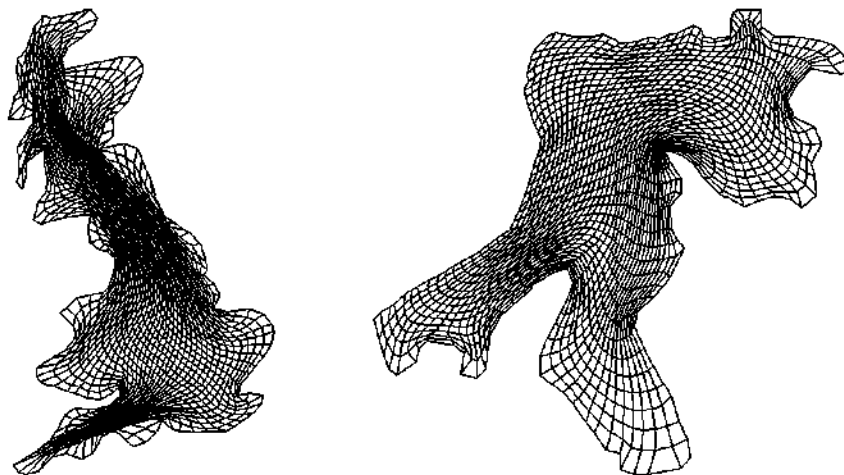
| Malla | $\tau$ | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------|--------------------|-------------|
| M13   | .50    | 0                  | 37          |
|       | .75    | 0                  | 32          |
|       | .95    | 0                  | 70          |
| M19   | .50    | 0                  | 69          |
|       | .75    | 0                  | 49          |
|       | .95    | 0                  | 60          |
| HAB   | .50    | 0                  | 94          |
|       | .75    | 0                  | 93          |
|       | .95    | 0                  | 93          |
| ENG   | .50    | 0                  | 164         |
|       | .75    | 0                  | 184         |
|       | .95    | 0                  | 266         |

*Tabla 12. Resultados para el funcional adaptivo de área-longitud.*

En particular se observa que el valor  $\tau = 0,75$  conduce a excelentes resultados. Las siguientes figuras 33 y 34 muestran las gráficas de las mallas correspondientes a dicho valor. Para estos ejemplos se siguió la estrategia TOPE.



*Figura 30. Mallas generadas usando el funcional adaptivo de área-longitud para M13 y M19 respectivamente.*



*Figura 31. Mallas generadas usando el funcional adaptivo de área-longitud para ENG y HAB.*

### Combinaciones de suavidad con área

El combinar el esquema adaptivo de los funcionales de suavidad con algún funcional de área nos proporciona una manera de obtener mallas convexas y suaves que tenga una buena distribución del tamaño de las celdas. Esta idea nos da buenos resultados para las combinaciones con el funcional clásico de área

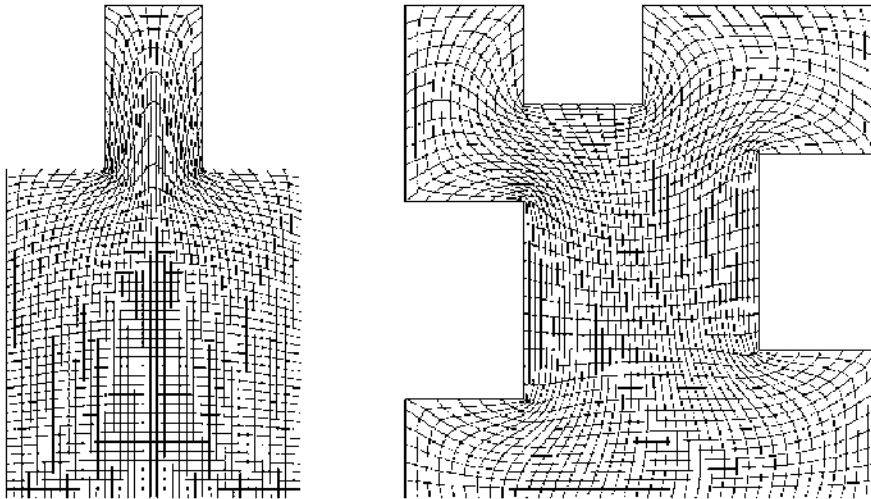
$$F_{S-A}^{(\tau)} = \tau F_k + (1 - \tau) F_{A^2} \quad 0 \leq \tau \leq 1 \quad (2.41)$$

Los resultados de optimizar las mallas iniciales de 41 por 41 usando los funcionales anteriores están en la tabla siguiente:

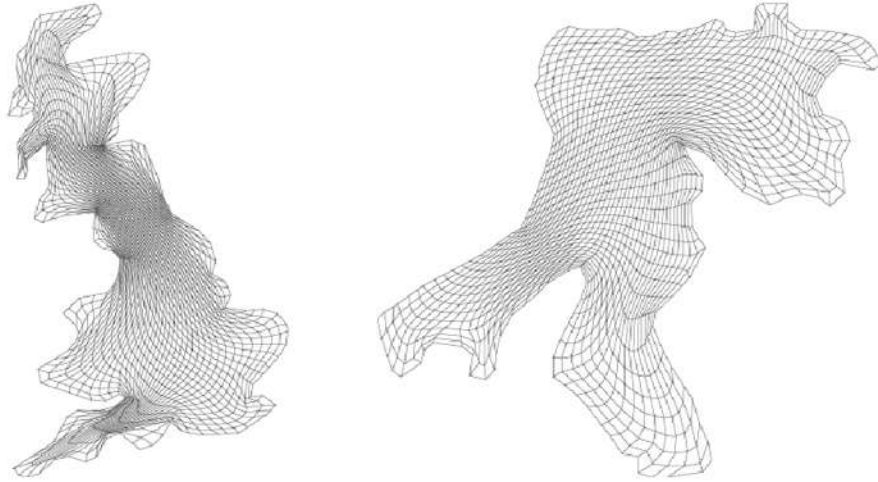
| Malla | $\tau$ | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|--------|--------------------|-------------|
| M13   | .25    | 0                  | 63          |
|       | .50    | 0                  | 54          |
|       | .75    | 0                  | 46          |
| M19   | .25    | 0                  | 62          |
|       | .50    | 0                  | 59          |
|       | .75    | 0                  | 57          |
| HAB   | .25    | 0                  | 123         |
|       | .50    | 0                  | 114         |
|       | .75    | 0                  | 94          |
| ENG   | .25    | 0                  | 217         |
|       | .50    | 0                  | 207         |
|       | .75    | 0                  | 203         |

**Tabla 13.** Resultados para el funcional combinado de suavidad y área.

Las figuras 32 y 33 son las mallas correspondientes al valor de  $\tau = 0,5$



**Figura 32.** Mallas generadas usando el funcional combinado de suavidad-área  $F_{SA} = \tau F_k + (1 - \tau) F_{A^2}$  para M13 y M19.



**Figura 33.** Mallas generadas usando el funcional combinado de suavidad-área  $F_{SA} = \tau F_k + (1 - \tau)F_{A^2}$  para ENG y HAB.

### Funcional Quasi-armónico de Domínguez

Domínguez-Mota y Barrera-Sánchez proponen [13] un nuevo funcional quasi-armónico que depende de un parámetro  $\omega > 0$ , basado en el funcional armónico de Ivanenko [17]

$$H(G) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^4 \frac{\lambda(\Delta_{i,j}^k)}{\alpha(\Delta_{i,j}^k)} = \sum_{q=1}^N \frac{\lambda(\Delta_q)}{\alpha(\Delta_q)} \quad (2.42)$$

Donde  $m$  y  $n$  son el número horizontal y vertical respectivamente, de puntos de la malla, y  $k$  denota los 4 triángulos formados por cada celda de la misma. En este caso  $N$  usa para denotar el número total de triángulos de la malla, esto es,  $N=4mn$ .

La idea principal es remplazar  $\alpha^{-1}$  en el funcional  $H(G)$  de Ivanenko por una función capaz de actuar como una barrera continua y definiendo  $f(\Delta q) = \lambda(\Delta q)\varphi_\omega(\alpha)$ . Una opción para  $\varphi_\omega(\alpha)$  es una función continua, convexa y estrictamente decreciente que tienda a  $\frac{1}{\alpha}$  para  $\alpha \geq \omega$ . Entonces, se considera para un número real positivo  $\omega$

$$\varphi_\omega(\alpha) = \begin{cases} \frac{2\omega - \alpha}{\omega^2} & \text{si } \alpha < \omega \\ \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha \geq \omega \end{cases}$$

y gracias a esta función se define el funcional  $H_\omega$  como

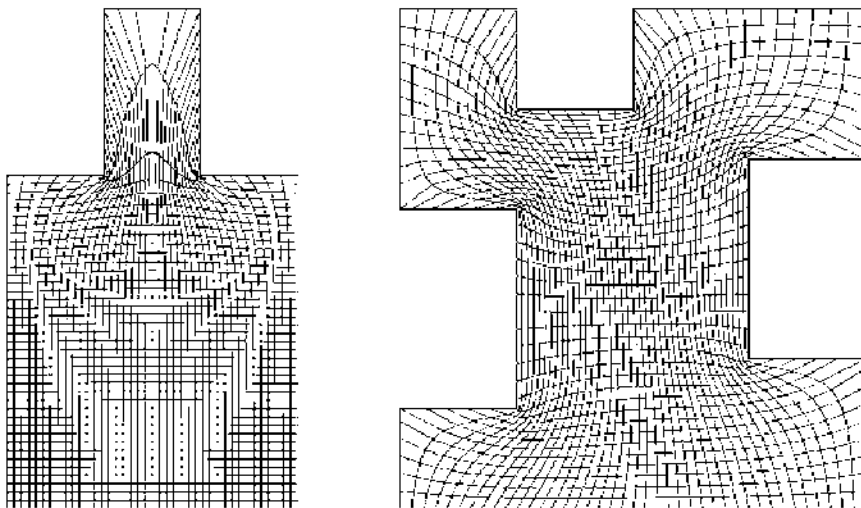
$$H_\omega(G) = \sum_{q=1}^N \lambda(\Delta q)\varphi_\omega(\Delta q) \quad (2.43)$$

Un estudio más a fondo de este funcional, así como su implementación los encontramos en [13].

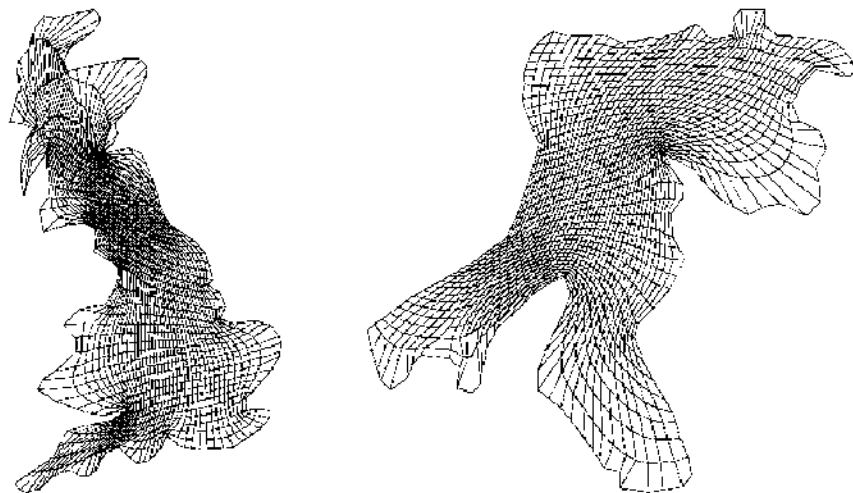
Con este funcional se obtienen mallas de muy buena calidad; en la tabla 14 se muestran los resultados de las regiones de prueba y en las figuras 34 y 35 observamos las mallas de las regiones de prueba con 41 por 41 puntos generadas con este funcional, el uso de dicho funcional produce mallas convexas, con buenas características de suavidad. Notemos que mezclar éste funcional con funcionales de área, además de producir mallas convexas, genera mallas con una buena distribución de áreas.

| Malla | n  | Celdas no convexas | Iteraciones |
|-------|----|--------------------|-------------|
| M13   | 21 | 0                  | 17          |
|       | 41 | 0                  | 39          |
|       | 81 | 0                  | 143         |
| M19   | 21 | 0                  | 26          |
|       | 41 | 0                  | 37          |
|       | 81 | 0                  | 96          |
| HAB   | 21 | 0                  | 38          |
|       | 41 | 0                  | 80          |
|       | 81 | 0                  | 180         |
| ENG   | 21 | 0                  | 75          |
|       | 41 | 0                  | 166         |
|       | 81 | 0                  | 387         |

*Tabla 14. Resultados para el funcional  $H_\omega(G)$ .*



*Figura 34. Mallas generadas usando el funcional  $H_\omega(G)$  en M13 y M19*



*Figura 35. Mallas generadas usando el funcional  $H_\omega(G)$  para las regiones ENG y HAB*

**Funcional área de Domínguez-Mota**

Domínguez-Mota y Barrera-Sánchez proponen [36] un nuevo funcional, la idea básica es usar el parámetro  $t$  en la función

$$\varphi_{\omega}(\alpha) = \begin{cases} (\alpha - 1)(\alpha - 2) + 1 & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha} & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

junto con el parámetro  $\omega$  y con ello definen el nuevo funcional de área

$$S_{\omega}(G) = \sum_{q=1}^N \varphi(\omega + t\alpha_q) \quad (2.44)$$

## Capítulo 3

# Ecuación de advección

La ecuación de advección es una combinación de las ecuaciones de transporte y de calor. Tiene una serie de aplicaciones desde el punto de vista físico tales como modelos de dispersión de poblaciones, transferencia de contaminantes, calidad de aire. La ecuación de advección es una ecuación diferencial parcial que muestra la variación de un campo escalar en un punto dado, por efecto de un campo vectorial. Dicha ecuación se deriva de la *Ley de conservación escalar* y del *Teorema de Gauss*, tomado el límite infinitesimal.

Consideremos la ecuación de advección

$$u_t + au_x = 0 \quad (3.1)$$

con  $a$  una constante. Para el problema de Cauchy necesitamos de condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \nu(x)$$

este es el ejemplo más sencillo de una ecuación hiperbólica y es tan simple que podemos escribir su solución exacta

$$u(x, t) = \nu(x - at)$$

Se puede verificar directamente que se trata de la solución. Sin embargo, muchas de las cuestiones que se plantean en términos más generales de discretizar las ecuaciones hiperbólicas se puede ver más fácilmente con esta ecuación.

Una primera aproximación usando diferencias finitas centradas en el espacio y hacia adelante en el tiempo [2]

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{k} = -\frac{a}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

la cual puede reescribirse como

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

Aunque en la práctica, este método no es útil debido a consideraciones de estabilidad. Una pequeña modificación da un método más útil, si reemplazamos  $U_j^n$  en la ecuación anterior por el promedio  $\frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)$  entonces obtenemos el método de Lax-Friedrichs:

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{2}(U_{j-1}^n + U_{j+1}^n) - \frac{ak}{2h}(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n)$$

Debido a la poca precisión, este método no es de uso común en la práctica, pero sirve para ilustrar algunos problemas de estabilidad.

Aunque la ecuación de advección es fácil de resolver analíticamente, su solución numérica presenta una gran dificultad de solución, esto se debe a que es una EDP hiperbólica.

### 3.1. Advección en 1+1D

Una sustancia que es transportada (o advectada) en un fluido a una velocidad constante  $a$ , podemos escribir su función de flujo como

$$f(u) = au \quad (3.2)$$

Entonces para obtener el flujo de materia que pasa por un punto  $x$  simplemente multiplicamos la densidad local  $u(x, t)$  por la velocidad de transporte. Debido a que el total de masa que pasa entre y depende únicamente del flujo en los puntos finales, puede calcularse como

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)) \quad (3.3)$$

el signo negativo es porque  $f$  es, por definición, el flujo a la derecha.

Asumiendo que  $u$  y  $f$  son funciones suaves, en otras palabras tienen tantas derivadas como necesitemos, la ecuación anterior (3.3) puede escribirse como

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) \right] dx = 0 \quad (3.4)$$

Como es válido para todos los valores de  $x_1$  y  $x_2$ , esto nos indica que el integrando es igual a cero, con lo cual se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x, t)) = 0 \quad (3.5)$$

la ecuación anterior es conocida como *Ley de conservación escalar*, y es una ecuación, muy usada en los diferentes campos de la física. Para el problema del transporte de una sustancia en un fluido a una velocidad constante  $a$ , tenemos que  $f(u) = au$ , sustituyendo estos valores en (3.5) obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + a \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = 0 \quad (3.6)$$

que es la ecuación de advección. Esta ecuación requiere de condiciones iniciales y, en la mayoría de los casos, condiciones de frontera para que su solución pueda ser determinada. El caso más sencillo es el problema de Cauchy en  $-\infty < x < \infty$ , donde no hay frontera y por ello es llamado también un problema de condición inicial pura. Entonces sólo requiere la información inicial

$$u(x, 0) = \nu(x) \quad (3.7)$$

Físicamente se espera que el perfil inicial de  $\nu$  sea transportado con el fluido a una velocidad  $a$ , entonces se debe cumplir que

$$u(x, t) = \nu(x - at) \quad (3.8)$$

se puede verificar fácilmente que esta ecuación satisface la ecuación de advección.

Para los problemas en los cuales tenemos condiciones de frontera, las cosas se complican un poco más, afortunadamente hoy en día existen varios métodos para aproximar numéricamente la solución de la ecuación. En este trabajo sólo se abordarán en los esquemas de diferencias finitas y se mencionarán solo algunos de los principales.

### 3.1.1. Método Upwind en 1 +1D

Haciendo la expansión en Serie de Taylor de la función  $u(x, t)$  alrededor del punto  $(x_j, t_n)$  se obtiene

$$u(x_j, t_n + \Delta t) = u(x_j, t_n) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.9)$$

o también lo podemos escribir siguiendo la notación del capítulo como

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n)\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.10)$$

Despejando  $\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n)$  obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.11)$$

que es una forma de aproxima la derivada respecto al tiempo, ahora necesitamos aproximar la derivada espacial de la ecuación (3.6). Como utilizaremos un método tipo upwind (ver figura 36), la aproximación que tendremos solo dependerá del valor de  $a$  en (3.6). En este trabajo se considerará a como un número positivo. De forma similar como se obtuvo (3.11), pero ahora para la derivada espacial tenemos

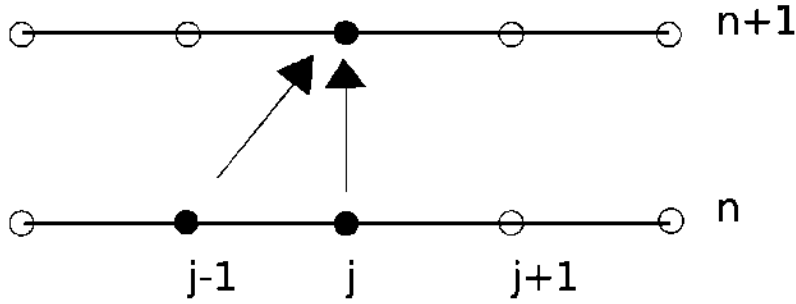
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) = \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.12)$$

en este caso utilizaremos una malla uniforme tanto en el tiempo como en espacio, esto es,  $\Delta t$  y  $\Delta x$  son constantes. Con ambas expresiones para las derivadas, si se sustituyen en la EDP original se obtiene

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -a\left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}\right) + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x) \quad (3.13)$$

despejando  $u_j^{n+1}$ , se obtiene el esquema tipo upwind para la ecuación de advección

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\frac{\Delta t}{\Delta x}(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (3.14)$$



*Figura 36. Ejemplo de un estencil tipo upwind*

Se analizará la estabilidad de este esquema haciendo el análisis de Von Neumann. Para ello, escribimos la solución en la forma

$$u_j^n = \xi^n e^{ijkx} \quad (3.15)$$

donde  $k$  es el número de onda espacial. Si consideramos la representación simbólica del esquema como

$$u_j^{n+1} = \tau(\Delta t^p, \Delta x^q) u_j^n \quad (3.16)$$

con  $\tau(\Delta t^p, \Delta x^q)$  siendo el operador de evolución de orden  $p$  en el tiempo y  $q$  en el espacio, entonces podemos ver que el criterio de estabilidad debe ser aquel donde el módulo del factor de amplificación siempre es menor que 1

$$|\xi|^2 = \xi \xi^* \leq 1$$

Para obtener el factor de amplificación se hace

$$\xi^{n+1} e^{ikjx} = \xi^n e^{ikjx} - \alpha (\xi^n e^{ikjx} - \xi^n e^{ik(j-1)x})$$

de donde se puede obtener

$$\xi = 1 - \alpha(1 - e^{-ik\Delta x}) = (1 - \alpha) + \alpha \cos(k\Delta x) - i\alpha \sin(k\Delta x) \quad (3.17)$$

donde  $\alpha = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x}$  y su módulo  $|\xi|^2 = \xi \xi^*$

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= (1 - \alpha)^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\cos(k\Delta x) + \alpha^2 \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 - 2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha(1 - \alpha)\cos(k\Delta x) + \alpha^2 \\ &= 1 - 2\alpha(1 - \alpha)(1 - \cos(k\Delta x)) \end{aligned}$$

que es siempre menor que 1 cuando se satisface la condición de Courant- Friedrichs-Löwy (CFL)  $\alpha \leq 1$ .

### 3.1.2. Esquema FTCS en 1+1D

Considerando la ecuación de advección (3.6), pero ahora se considerará una aproximación con más precisión para la derivada espacial. Para hacer esto, se calcula la expansión en Taylor en  $x_j + \Delta x$

$$u(x_j + \Delta x, t^n) = u(x_j, t^n) + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x, t^n) \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (3.18)$$

similarmente en  $x_j - \Delta x$

$$u(x_j - \Delta x, t^n) = u(x_j, t^n) - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (x, t^n) \Delta x^2 + \mathcal{O}(\Delta x^3) \quad (3.19)$$

Si hacemos la diferencia de estas dos expresiones, y después dividimos el resultado entre  $2\Delta x$  podemos eliminar los términos de primer orden y de esta manera se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.20)$$

usando la aproximación a la derivada temporal de la sección anterior tenemos

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -a \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta x^2) \quad (3.21)$$

para así obtener un esquema basado en diferencias de segundo orden en el espacio y primero en el tiempo

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2 \Delta t) \quad (3.22)$$

Desafortunadamente el esquema FTCS es incondicionalmente inestable. Utilizando la definición (3.15) en la ecuación (3.20), obtenemos

$$\xi^{n+1} e^{ikxj} = \xi^n e^{ikxj} - \frac{\alpha}{2} (\xi^n e^{ikxj+1} - \xi^n e^{ikxj-1}) \quad (3.23)$$

de donde se puede obtener el factor de amplificación

$$\xi = 1 - \frac{\alpha}{2} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = 1 - \alpha i \sin(k\Delta x) \quad (3.24)$$

el cual tiene un módulo

$$|\xi|^2 = 1 + (\alpha \sin(k\Delta x))^2 > 1$$

De aquí resulta que el esquema es incondicionalmente inestable.

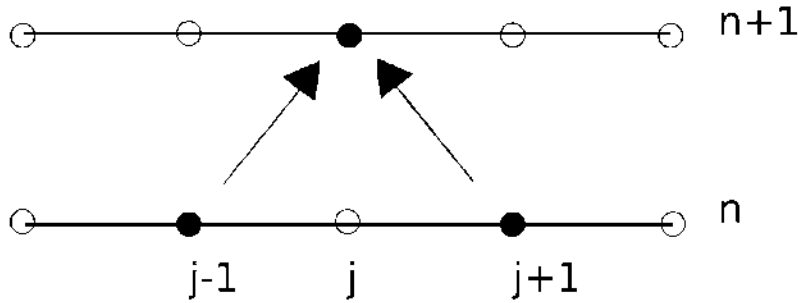
### 3.1.3. Esquema de Lax-Friedrichs

Lax y Friedrichs propusieron una manera de tratar el problema de estabilidad del esquema FTCS. La idea básica es bastante simple y está basada en reemplazar, en el esquema FTCS, el término  $u_j^n$  por su promedio espacial, esto es,  $u_j^n = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2}$ , y así obtener el esquema de Lax-Friedrichs

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.25)$$

Para este esquema estamos asumiendo que se satisface la condición CFL, es por eso que tenemos  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$  en lugar de  $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2 \Delta t)$ . En adelante asumiremos que siempre se cumple.

En la siguiente figura (37) podemos ver un estencil utilizando dicho esquema



*Figura 37. Un ejemplo de un estencil para el esquema de Lax-Friedrichs.*

Este nuevo esquema es condicionalmente estable, lo cual puede verificarse si se hace el análisis de estabilidad de Von Neumann. De manera muy similar que como se hizo para el esquema FTCS, pero ahora para (3.25) obtenemos

$$\xi^{n+1} e^{ikxj} = \frac{1}{2}(\xi^n e^{ikxj+1} - \xi^n e^{ikxj-1}) - \frac{\alpha}{2}(\xi^n e^{ikxj+1} - \xi^n e^{ikxj-1})$$

de donde podemos observar que el módulo del factor de amplificación está dado por

$$\xi = \frac{1}{2}(e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x}) - \frac{\alpha}{2}(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) = \cos(k\Delta x) + \alpha \sin(k\Delta x) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \cos^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 - \sin^2(k\Delta x) + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 - (1 - \alpha^2) \sin^2(k\Delta x) \end{aligned}$$

cuyo módulo al cuadrado es siempre menor que 1 y cuando la condición CFL.

Para esta corrección Lax-Friedrichs introducen disipación numérica (viscosidad).

Veamos

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = -a\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta t}\right) + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta t}\right) \quad (3.27)$$

Esta expresión es la representación en diferencias finitas de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.28)$$

donde aparece un término de difusión  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ .

### 3.1.4. Esquema Leapfrog en 1+1D

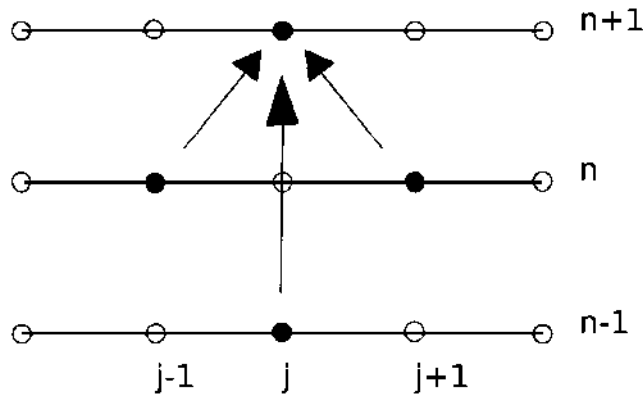
Para obtener una aproximación de segundo orden en el tiempo puede obtenerse si se inserta

$$\frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.29)$$

en el esquema FTCS, de esta manera llegamos al esquema Leapfrog

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.30)$$

el cual utiliza un estencil como el que se muestra en la siguiente figura



*Figura 38. Un ejemplo de un estencil para el esquema de Leapfrog.*

Debemos tomar en consideración ciertos aspectos de dicho esquema

- En un esquema Leapfrog que es estable en el sentido de Courant, no hay disipación de la amplitud, esto es,  $|\xi|^2 = 1$ . De hecho, si se hace el análisis de estabilidad de Von Neumann, se tiene que utilizar

$$\xi^{n+1} e^{ikxj} = \xi^{n-1} e^{ikxj} - \alpha(\xi^n e^{ikxj+1} - \xi^n e^{ikxj-1})$$

para obtener

$$\begin{aligned} \xi^2 &= 1 - \alpha\xi(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) \\ &= 1 - 2\alpha\sin(k\Delta x)i\xi \end{aligned}$$

ahora al resolver el sistema cuadrático

$$\xi^2 + 2\alpha\sin(k\Delta x)i\xi - 1 = 0$$

obtenemos el factor de amplificación

$$\xi = -i\alpha\sin(k\Delta x) \pm \sqrt{1 - [\alpha\sin(k\Delta x)]^2} \quad (3.31)$$

entonces, si  $\alpha < 1$ ,

$$|\xi|^2 = \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) + (1 - [\alpha\sin(k\Delta x)]^2) = 1$$

lo que nos dice que el factor de amplificación es siempre 1.

- El esquema Leapfrog es un esquema de “tres niveles”, por lo que son necesarios los valores en el tiempo  $n$  y  $n-1$  para poder calcular la aproximación en el tiempo  $n+1$ .

### 3.1.5. Esquema de Lax-Wendroff en 1+1D

El método de Lax-Wendroff es una extensión de segundo orden de precisión del esquema de Lax-Friedrichs. En este caso ocuparemos dos niveles de tiempo para obtener la aproximación en un nuevo nivel de tiempo.

Para obtener el esquema de Lax-Wendroff existen varias maneras de obtenerlo, una de ellas es verlo como una combinación del esquema de Lax-Friedrichs y el de Leapfrog. En particular el esquema de Lax-Wendroff puede obtenerse como:

1. Un esquema de Lax-Friedrichs con “medio paso”:

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.32)$$

$$u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^n) - \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.33)$$

2. Un esquema Leapfrog con medio paso:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.34)$$

Más específicamente los “medios pasos” pueden ser calculados de la siguiente manera

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n) \mp \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.35)$$

y, entonces, si se usa Leapfrog de medio paso, la solución en un nuevo nivel de tiempo es

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (3.36)$$

sustituyendo en (3.35) obtenemos el esquema de Lax-Wendroff

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a^2}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (3.37)$$

Debemos tomar en cuenta los siguientes aspectos que son importantes:

En el esquema de Lax-Wendroff puede existir dispersión del factor de amplificación. De hecho, si hacemos el análisis de Von Neumann, donde utilizamos

$$\xi^{n+1} e^{ikx_j} = \xi^n e^{ikx_j} - \frac{\alpha}{2} (\xi^n e^{ikx_{j+1}} - \xi^n e^{ikx_{j-1}}) + \frac{\alpha^2}{2} (\xi^n e^{ikx_{j+1}} - 2\xi^n e^{ikx_j} + \xi^n e^{ikx_{j-1}})$$

Para obtener el factor de amplificación

$$\xi = 1 - \frac{\alpha}{2} (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}) + \frac{\alpha^2}{2} (e^{ik\Delta x} - 2 + e^{-ik\Delta x}) = 1 - \alpha \sin(k\Delta x) - \alpha^2 (1 - \cos(k\Delta x)) \quad (3.38)$$

y, entonces, su módulo al cuadrado es

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= [1 - \alpha^2 (1 - \cos(k\Delta x))]^2 + \alpha^2 \sin^2(k\Delta x) \\ &= 1 - \alpha^2 [2 - 2\cos(k\Delta x) - \alpha^2 (1 - \cos(k\Delta x))^2 - \sin^2(k\Delta x)] \\ &= 1 - \alpha^2 [(1 - \cos(k\Delta x)) - \alpha^2 (1 - \cos(k\Delta x))^2] \\ &= 1 - \alpha^2 (1 - \alpha^2) (1 - \cos^2(k\Delta x)) \end{aligned}$$

esto nos dice que siempre y cuando se cumpla que  $\alpha^2 \leq 1$  tendremos que  $0 \leq |\xi|^2 \leq 1$ , que es equivalente a pedir que se cumpla la condición CFL. Nótese que si  $\alpha^2 = 1$  entonces  $|\xi|^2 = 1$  y se presentará algo de disipación. En este sentido las propiedades de dispersión del método de Lax-Friedrichs no se pierden por completo, pero en el esquema de Lax-Wendroff son mucho menos severas.

- El esquema de Lax-Wendroff es un esquema de dos niveles, pero puede ser escrito en forma de un nivel por medio de manipulación algebraica. Esto lo podemos ver claramente en la expresión (3.37), donde sólo aparecen cantidades en los niveles de tiempo  $n$  y  $n+1$ .

## 3.2. Advección en 2+1D

En la actualidad existen muy pocos trabajos sobre este tema, por esta razón solo se presentará en este trabajo el esquema de Lax-Wendroff para la aproximación a la ecuación de advección.

En el caso 2+1D la ecuación de advección tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (3.39)$$

pero, para nuestra conveniencia la escribiremos como sigue:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.40)$$

### 3.2.1. El caso rectangular

Si se tiene una malla rectangular en la cual se pueden tomar los tamaños de pasos espaciales constantes  $\Delta x$  y  $\Delta y$ , se puede obtener con facilidad el esquema de Lax-Wendroff para la ecuación de advección en 2+1D de los desarrollos en serie de Taylor de  $u$

$$u(x + \Delta x, y, t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} (\Delta x) + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.41)$$

$$u(x, y + \Delta y, t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} (\Delta y) + \mathcal{O}(\Delta y) \quad (3.42)$$

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} (\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.43)$$

En las expresiones anteriores podemos despejar los términos que contienen las derivadas parciales, esto es

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} = \frac{u(x + \Delta x, y, t) - u(x, y, t)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = \frac{u(x, y + \Delta y, t) - u(x, y, t)}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \frac{u(x, y, t + \Delta t) - u(x, y, t)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.46)$$

Para seguir con la notación del capítulo 1, reescribimos las ecuaciones anteriores como

$$\frac{u_{i,j}^n}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (3.47)$$

$$\frac{u_{i,j}^n}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y) \quad (3.48)$$

$$\frac{u_{i,j}^n}{\partial t} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.49)$$

Sustituyendo (3.47), (3.48) y (3.49) en (3.40) se obtiene

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} - b \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n}{\Delta y} \quad (3.50)$$

la cual con un poco de álgebra se puede reescribir como

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) - b \frac{\Delta t}{\Delta y} (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) \quad (3.51)$$

que es el esquema de Lax-Wenderoff para la ecuación de advección en 2+1D.

### 3.2.2. El caso en regiones no rectangulares

Ahora nos encontramos en el caso en el que tenemos regiones irregulares en las cuales no se puede generar una malla con espaciado uniforme y por tanto no se puede usar el esquema anterior. Es por ello que surge la necesidad de contar con algún esquema que se pueda adaptar a nuestro contexto, i.e., que se adapte a las regiones irregulares.

En general los esquemas de diferencias finitas se obtienen de considerar un punto central  $p_0$ , y un conjunto finito de nodos vecinos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  en una cierta región de interés, para los cuales es necesario encontrar los coeficientes  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$  tales que cumplan

$$\sum_{i=0}^q \Gamma_i \varphi(p_i) \approx \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^l \partial y^{k-l}} \Big|_{x=p_0} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad 0 \leq l \leq k.$$

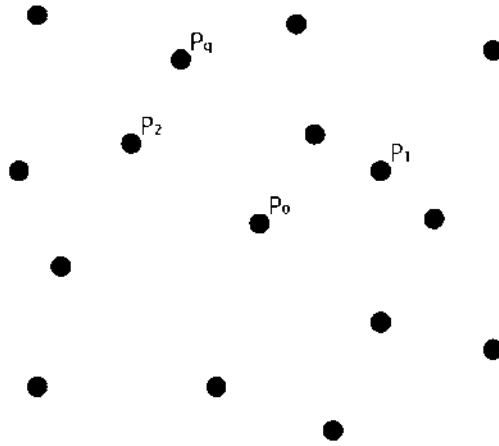
Recordemos la forma general de las ecuaciones lineales de segundo orden:

$$L\varphi = A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y + F \quad (3.52)$$

entonces, para aproximar dicho operador en el punto  $p_0$  utilizando aproximaciones a los valores de  $\varphi$  en algunos de los nodos vecinos  $(p_1, p_2, \dots, p_q)$  de  $p_0$  (ver figura 39), utilizando un esquema de diferencias finitas, el cual también se puede escribir como la combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_0\varphi(p_0) + \Gamma_1\varphi(p_1) + \dots + \Gamma_q\varphi(p_q) \quad (3.53)$$

con  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$  constantes.



**Figura 39. Distribución arbitraria de  $p_0$  y sus vecinos.**

Para tener un esquema que cumple que la aproximación se acerque a la solución a medida que los nodos vecinos se aproximan al nodo central  $p_0$ , i.e., que sea un esquema consistente, necesitamos que cumpla:

$$\sum_{i=0}^q \Gamma_i \varphi(p_i) - [A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y]_{p_0} \longrightarrow 0.$$

Usando la expansión en serie de Taylor hasta el segundo orden y agrupando términos podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} [A\varphi_{xx} + B\varphi_{xy} + C\varphi_{yy} + D\varphi_x + E\varphi_y + F]_{p_0} - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \varphi(p_i) &= \left( F(p_0) - \sum_{i=0}^q \Gamma_i \right) \varphi(p_0) + \left( D(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \right) \varphi_x(p_0) \\ &+ \left( E(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta y_i \right) \varphi_y(p_0) + \left( A(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta x_i)^2}{2} \right) \varphi_{xx}(p_0) + \left( B(p_0) - \sum_{i=1}^q \Gamma_i \Delta x_i \Delta y_{i,0} \right) \varphi_{xy}(p_0) \\ &+ \left( C(p_0) - \sum_{i=1}^q \frac{\Gamma_i (\Delta y_i)^2}{2} \right) \varphi_{yy}(p_0) + \mathcal{O}(\max\{\Delta x_i, \Delta y_i\})^4 \end{aligned} \quad (3.54)$$

donde  $\Delta x$  y  $\Delta y$  son las distancias horizontal y vertical respectivamente del nodo central  $p_0$  a cada uno de los nodos vecinos  $p_i$ .

Lo que pretendemos es que los coeficientes que acompañan a las derivadas parciales en (3.54) sean cero, ya que con esto asegurariamos que la diferencia entre nuestro esquema y el operador estará acotada por una función  $\mathcal{O}$ , que involucra a las derivadas de orden mayor, y la cual disminuirá conforme los nodos vecinos se acerquen a  $p_0$  [18].

Para encontrar los valores de las  $\Gamma_i$  que cumplen esto, es necesario resolver el siguiente sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Pero este sistema tiene 6 ecuaciones y  $q + 1$  incógnitas, lo que nos indica que en la mayoría de los casos no estará bien determinado. Una manera sobrellevar esta indeterminación es resolver el sistema en un sentido de cuadrados mínimos. Entonces, para hacerlo, de una manera no iterativa, consideremos únicamente las últimas 5 ecuaciones de (3.55), esto es

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

cuyas ecuaciones normales pueden ser resueltas utilizando cualquier algoritmo de solución de sistemas de ecuaciones lineales (por ejemplo el algoritmo de factorización de Cholesky), para obtener los valores de  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_q$ .

Ya que conocemos  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ , nos resta calcular el valor de  $\Gamma_0$ , tomamos la primera ecuación de (3.55) con la cual obtenemos

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 - \dots - \Gamma_q \quad (3.57)$$

con esto ya conocemos el conjunto de coeficientes  $\Gamma$  que necesitábamos para definir el esquema (3.53) [14].

De esta manera tenemos un esquema para aproximar ecuaciones diferenciales parciales, ahora apliquémoslo a la ecuación de advección en 2+1D

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

la cual podemos escribirla, a conveniencia, como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.58)$$

aplicando regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (3.59)$$

Ahora, tomando en cuenta el desarrollo en serie de Taylor de  $u$  alrededor de  $(x, y, t + \Delta t)$

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots \quad (3.60)$$

sustituyendo (3.58) y (3.59) en la ecuación anterior obtenemos (3.60) [20]

$$u(x, y, t + \Delta t) = u(x, y, t) + \Delta t \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \dots \quad (3.61)$$

El esquema que definimos en (3.56) y (3.57) se puede aplicar al operador

$$-\Delta t \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.62)$$

y los coeficientes  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_q$  que se obtienen definen el esquema modificado de Lax-Wendroff

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k \quad (3.63)$$

donde  $p_0, p_1, \dots, p_q$  son los nodos involucrados en el estencil. Este esquema puede ser usado tanto en mallas estructuradas como en mallas no estructuradas.

### 3.2.3. Advección en 2+1D: esquema de 4 puntos

El uso de mallas lógicamente rectangulares no nos permite aprovechar la estructura dada por los índices en una malla  $G = \{p_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .

Primero usaremos un esquema que involucre cada nodo de la malla y 3 nodos vecinos, para ello utilizaremos un estencil tipo *upwind* como el que se muestra en la figura 40.

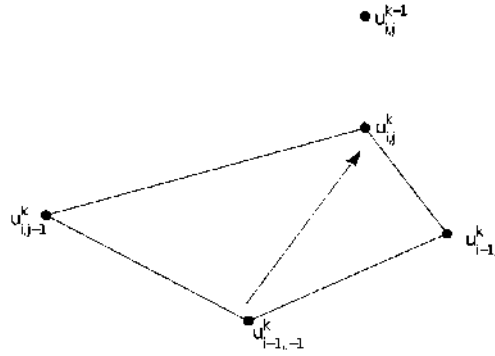


Figura 40. Estencil tipo *upwind*.

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k \quad (3.64)$$

toma la siguiente forma

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Gamma_0 u_{i,j}^k + \Gamma_1 u_{i-1,j}^k + \Gamma_2 u_{i,j-1}^k + \Gamma_3 u_{i-1,j-1}^k \quad (3.65)$$

en esta expresión consideramos  $u_{i,j}^k$  como la aproximación a  $u$  en el punto  $i, j$  de la malla en el nivel de tiempo  $k$ . Este esquema (3.65) es un esquema de Lax- Wendroff **explícito**, que será el que utilizaremos para aproximar la solución del problema de advección.

También se puede definir un esquema **implícito** de Lax-Wendroff; para hacerlo tomemos el esquema (3.63) y agreguémosle un parámetro  $\lambda$  para tener 2 niveles de tiempo (en el lado derecho), con lo que obtenemos el siguiente esquema

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \lambda \left[ \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^k \right] + (1 - \lambda) \left[ \sum_{i=0}^q \Gamma_i u_i^{k+1} \right]. \quad (3.66)$$

Si utilizamos nuevamente el estencil tipo *upwind* donde tomamos tres vecinos de  $p_0$ , el esquema anterior tendrá la forma

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \lambda [\Gamma_0 u_{i,j}^k + \Gamma_1 u_{i-1,j}^k + \Gamma_2 u_{i,j-1}^k + \Gamma_3 u_{i-1,j-1}^k] + (1 - \lambda) [\Gamma_0 u_{i,j}^{k+1} + \Gamma_1 u_{i-1,j}^{k+1} + \Gamma_2 u_{i,j-1}^{k+1} + \Gamma_3 u_{i-1,j-1}^{k+1}] \quad (3.67)$$

la cual, con un poco de álgebra para simplificarla, se puede reescribir como

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{E + Bu_{i-1,j}^{k+1} + Cu_{i-1,j-1}^{k+1} + Du_{i,j-1}^{k+1}}{A} \quad (3.68)$$

donde

$$\begin{aligned} A &= 1 + (\lambda - 1)\Gamma_0 \\ B &= (\lambda - 1)\Gamma_1 \\ C &= (\lambda - 1)\Gamma_2 \\ D &= (\lambda - 1)\Gamma_3 \\ E &= \lambda[\Gamma_1 u_{i-1,j}^k + \Gamma_2 u_{i-1,j-1}^k + \Gamma_3 u_{i,j-1}^k] + u_{i,j}^k[1 + \lambda\Gamma_0] \end{aligned}$$

Obtuvimos un esquema implícito para aproximar la solución de la ecuación de advección. Este tipo de esquemas suelen llegar a ser incondicionalmente estable, es por ello el interés de obtenerlo.

### 3.2.4. Advección en 2+1D: esquema de 6 puntos

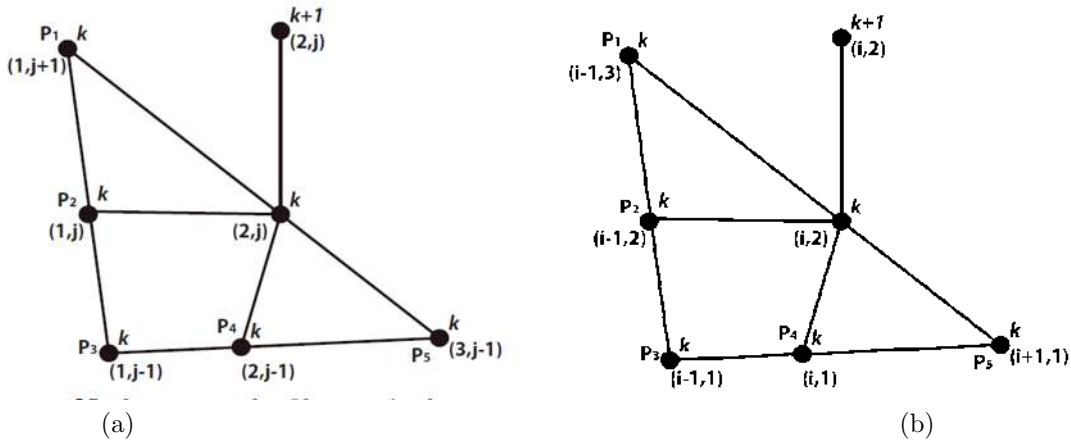
Nuestro grupo de trabajo ha diseñado otro esquema para aproximar la ecuación de advección, utilizando el esquema (3.63), utilizaremos cada nodo de la malla y sus vecinos pero ahora tomaremos 5 y de esta forma calcularemos  $u$  en cada nodo de la malla. Para este esquema el estencil que se utiliza no siempre es el mismo, varía dependiendo de la localización lógica del nodo correspondiente a lo largo de la malla (véase figura 30).

En cada caso obtenemos

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k + \Gamma_0 u_{i,j}^k + \Gamma_1 u_1^k + \Gamma_2 u_2^k + \Gamma_3 u_3^k + \Gamma_4 u_4^k + \Gamma_5 u_5^k \quad (3.69)$$

donde los  $u_i^k$  son las aproximaciones a  $u$  en el tiempo  $k$  en los nodos correspondientes a cada estencil.

Este esquema también es un explícito para la aproximación de la ecuación de advección, en este caso, al usar 5 estenciles distintos que involucran 6 nodos e la malla, el esquema logra una precisión mayor que los anteriores.



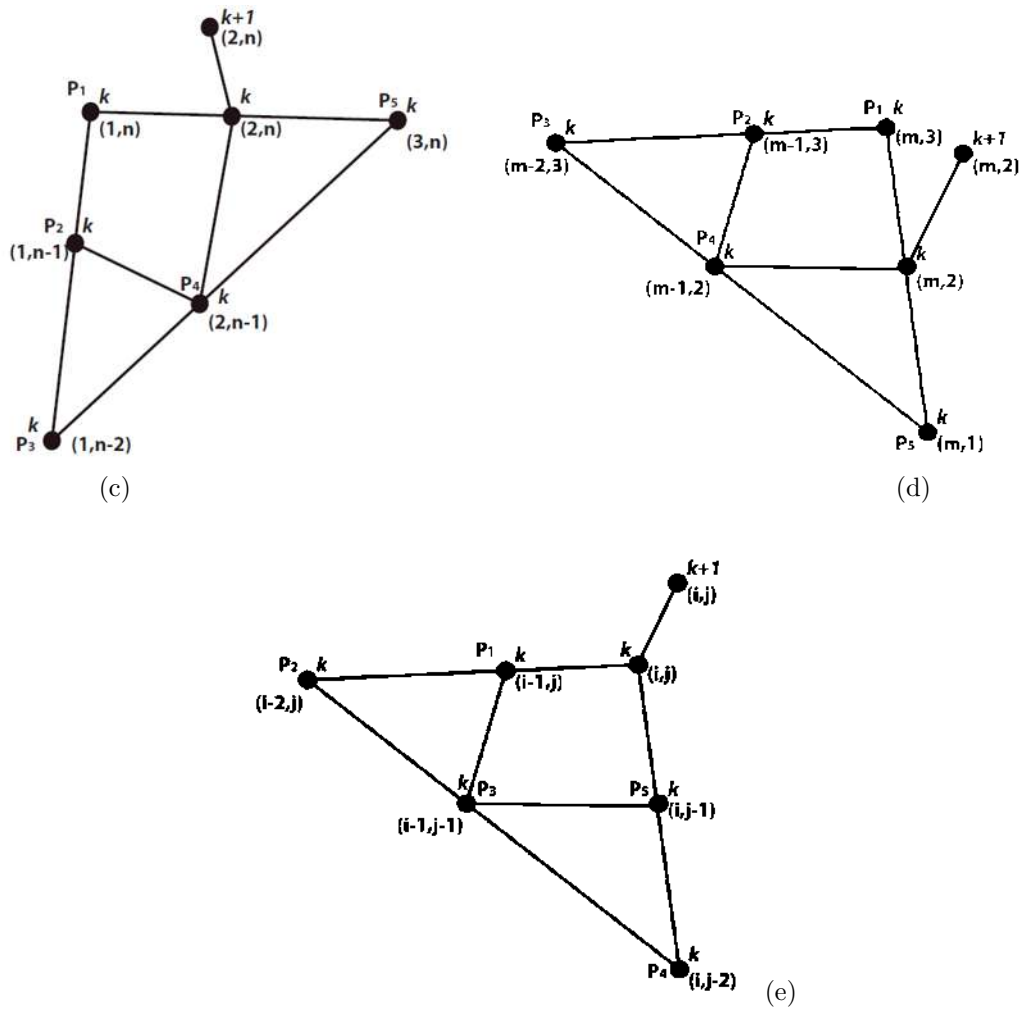


Figura 41. estenciles para el esquema de 6 puntos. (a) Nodos segunda fila vertical. (b) Nodos segunda fila horizontal. (c) Nodo  $(2,n)$ . (d) Nodo  $(m,2)$ . (e) Nodos restantes.



## Capítulo 4

# Pruebas y resultados

Se usaron las siguientes regiones debido que en la experiencia previa (trabajos anteriores que se han hecho durante años) se observó que por sus características nos proporcionan satisfactorios resultados bajo la condición de estabilidad semejante a Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

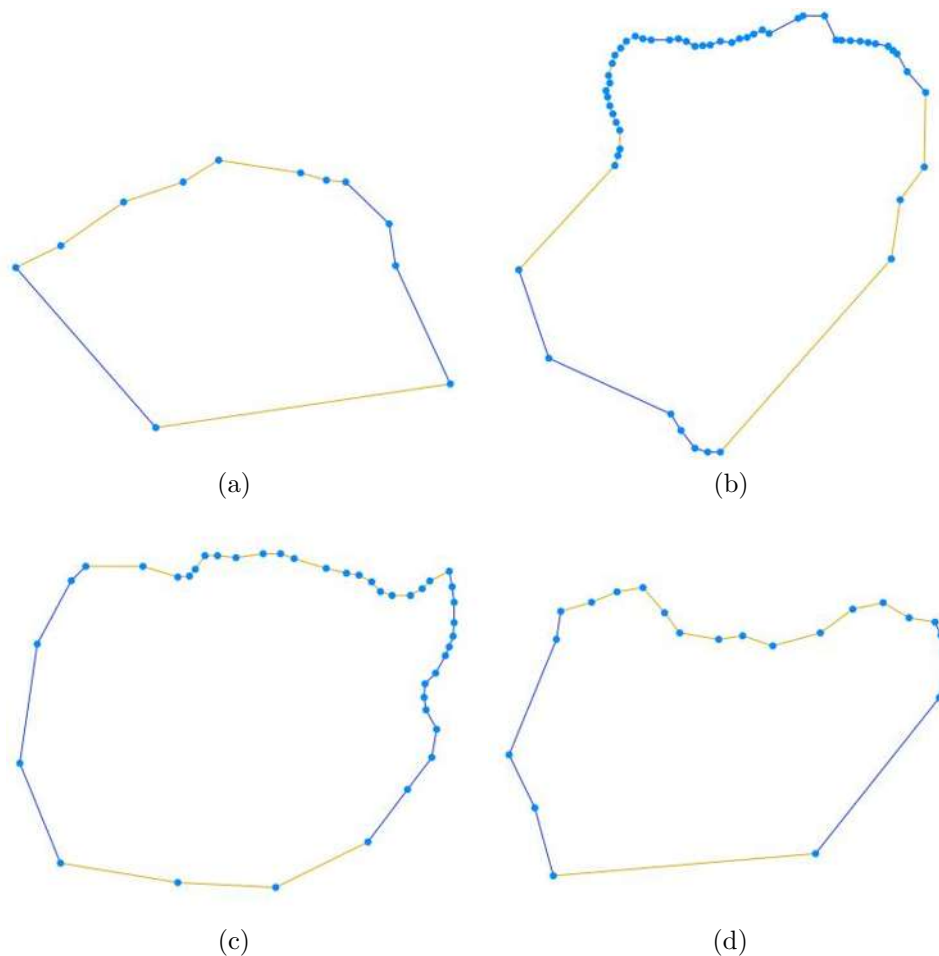


Figura 42. Contorno de las regiones de prueba (a) cab, (b) ha, (c) mi y (d) uc.

El procedimiento que se realizó para cada una de las 4 regiones antes mencionadas fue el siguiente:

1. Crear el contorno y definir cuales son sus lados. Esto se hizo con *ContourCreator 1.5 RC* del software *UNAMalla 4.5* [22] y la almacenamos .

2. En UNAMalla realizamos lo siguiente:

- Abrimos el archivo generado en el paso anterior.
- Generamos una malla con *TFI* fijando el número de puntos por lado, en nuestro caso fue 21 por 21, 41 por 41 y 81 por 81.
- Con la malla generada la optimizamos eligiendo el tipo funcional y el valor de  $\sigma$ , y lo almacenamos en un archivo con extensión *.red* para este trabajo se utilizaron los funcionales:
  - H-A: es el funcional de suavidad-área  $\sigma H_w + (1 - \sigma)F_{A^2}$ .
  - H-A-O: es el funcional de suavidad-área-ortogonalidad  $\sigma H_w + (1 - \sigma)F_{AO}$ .
  - H-O: es el funcional de suavidad-ortogonalidad  $\sigma H_w + (1 - \sigma)F_O$ .
  - S-A-O: es el funcional de suavidad-área-ortogonalidad  $\sigma S_w + (1 - \sigma)F_{AO}$ .
  - S-L: es el funcional de suavidad-longitud  $\sigma S_w + (1 - \sigma)F_L$ .
  - S-O: es el funcional de suavidad-ortogonalidad  $\sigma S_w + (1 - \sigma)F_O$ .

Los valores de  $\sigma$  usados fueron:

- $\sigma = 0$
- $\sigma = 0,1$
- $\sigma = 0,25$
- $\sigma = 0,50$
- $\sigma = 0,75$
- $\sigma = 0,90$
- $\sigma = 1$

3. En *Matlab* se hizo lo siguiente:

- Fijamos los valores de  $a$ ,  $b$  y  $t$  en nuestro caso, por simplicidad, elegimos  $a = b = 0,2$  y  $t \in [0, 2]$  con  $t = 1/1023$ . La función para la cual se reportan resultados en este trabajo es

$$u(x, y, t) = 0,2e^{\frac{-(x-0,5-at)^2 - (y-0,3-bt)^2}{0,01}}$$

- Mediante la rutina *lee* (es una función que lee la red inicial y obtiene los parámetros asociados a la malla) extraemos la información en forma matricial del archivo *.red* previamente creado.
- Dibujamos nuevamente la malla y nos aseguramos de que esté correctamente orientada, de no ser así, la rotamos.
- Aplicamos diferentes esquemas, en particular se usó
  - *implicit5* que es el esquema implícito de 4 puntos.
  - *wendroffg* que es el esquema explícito de Lax-Wendroff de 4 puntos.
  - *wendroffg6* que es nuestro esquema explícito del tipo Lax-Wendroff de 6 puntos.
- Con la rutina *errors* se calculó el error de nuestra aproximación. Al final del capítulo se anexan cada uno de los códigos de las rutinas utilizadas.

Con la información obtenida con este procedimiento se realizó el análisis que se muestra más adelante.

Ahora mostramos las mallas generadas con *TFI* para cada región

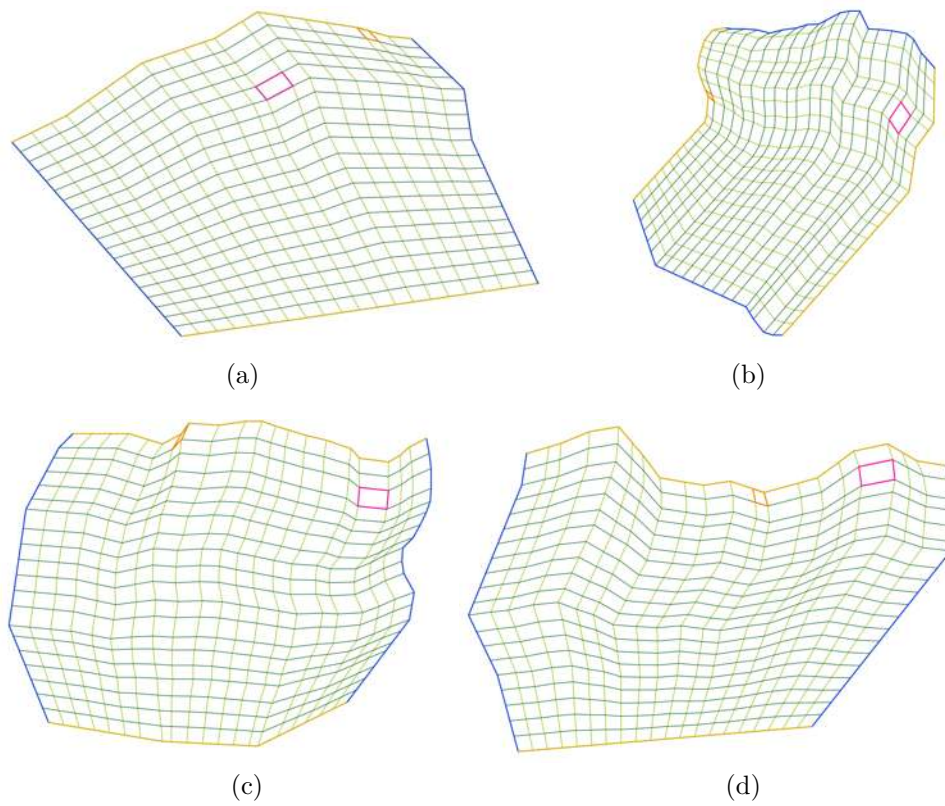


Figura 43. Mallas generadas por TFI con 21 por 21 nodos o puntos en las regiones de prueba (a) cab, (b) ha, (c) mi y (d) uc.

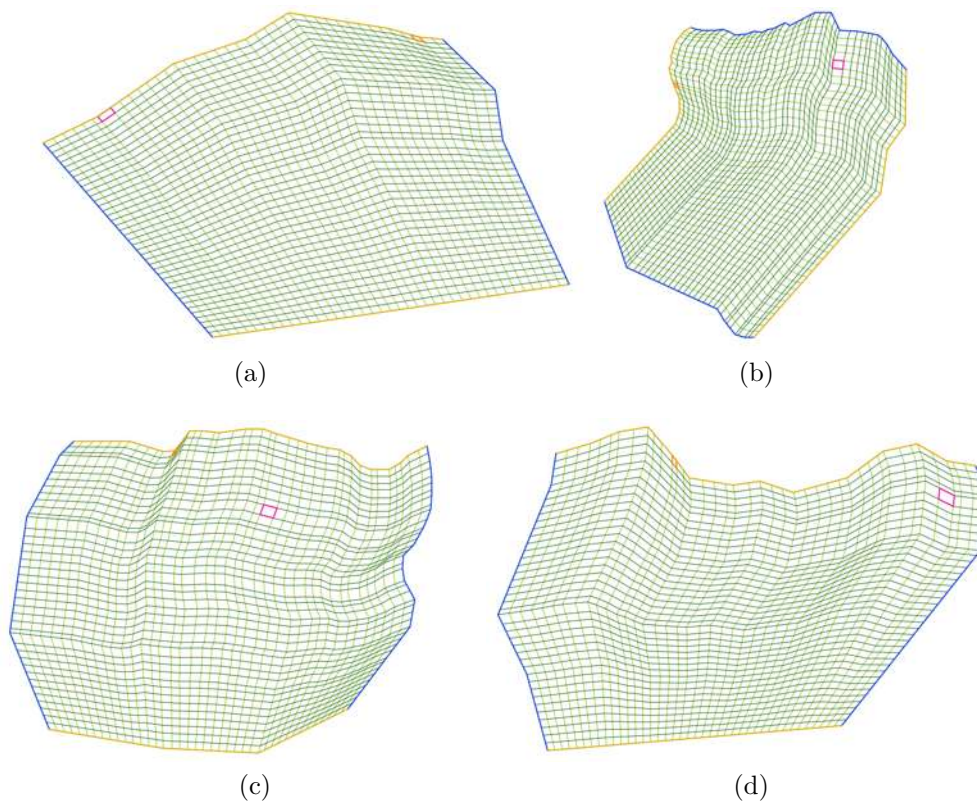


Figura 44. Mallas generadas por TFI con 41 por 41 nodos o puntos en las regiones de prueba (a) cab, (b) ha, (c) mi y (d) uc.

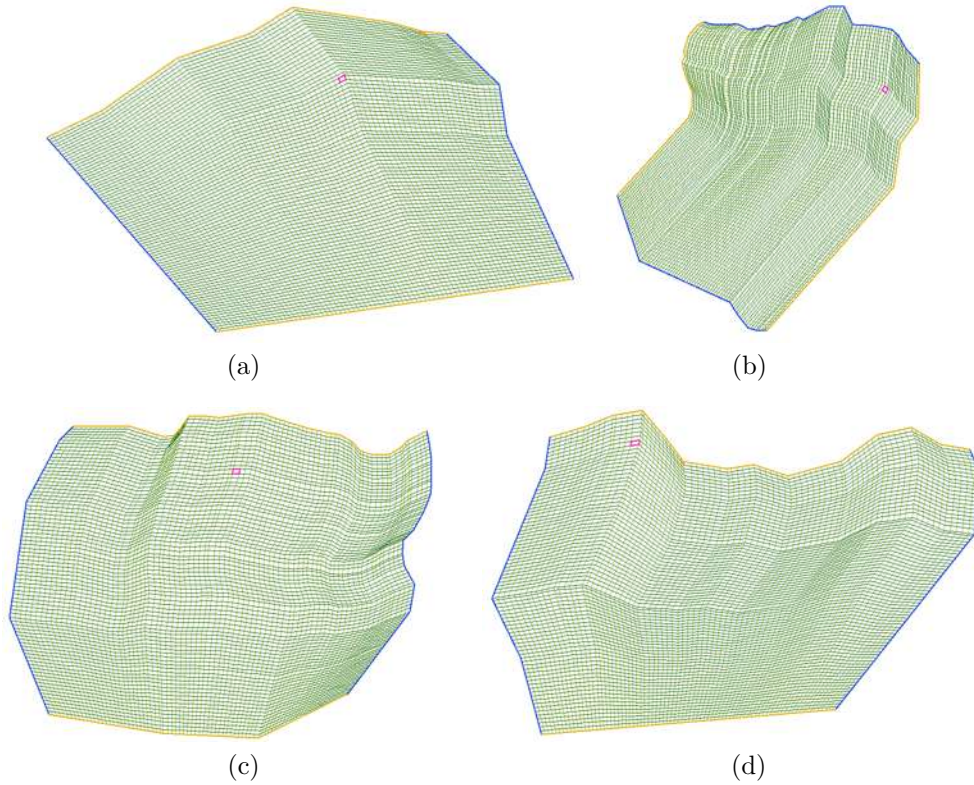


Figura 45. Mallas generadas por TFI con 81 por 81 nodos o puntos en las regiones de prueba (a) cab, (b) ha, (c) mi y (d) uc.

Ahora, veamos que se cumple la ecuación de advección (3.39) en  $2 + 1D$ , en nuestro caso con

$$u(x, y, t) = 0,2e^{\frac{-(x-0,5-at)^2-(y-0,3-bt)^2}{0,01}}$$

nos resulta

$$20(2a(-0,5-at+x) + 2b(-0,3-bt+y))e^{\frac{-(x-0,5-at)^2-(y-0,3-bt)^2}{0,01}} + a\left(-40(-0,5-at+x)e^{\frac{-(x-0,5-at)^2-(y-0,3-bt)^2}{0,01}}\right) \\ + b\left(-40(-0,3-bt+y)e^{\frac{-(x-0,5-at)^2-(y-0,3-bt)^2}{0,01}}\right) = 0$$

efectivamente satisface la ecuación de advección.

Durante este capítulo presentamos el error cuadrático obtenido con  $\|\cdot\|_2$ . En la siguiente tabla (tabla 9) se muestra el error obtenido con  $\|u - v\|_2 = \sqrt{\sum_i^M (u_i - v_i)^2 \Delta x}$ , donde  $v$  y  $u$  son las soluciones exacta y aproximada respectivamente, y  $M$  es el número de nodos en  $t = 1$ .

## 4.1. Esquema explícito de 4 puntos

En este apartado se presentan los resultados del esquema explícito de Lax-Wendroff de 4 puntos. En la siguiente tabla (tabla 9) se muestra el error obtenido en  $t = 1$  para la región Cab de 41 por 41 nodos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados para el esquema explícito de 4 puntos y su respectiva gráfica (figura 46).

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0.006161 | 0.006404 | NaN      | 0.006404 | 0.006946 | NaN      |
| 0.10  | 0.006189 | 0.006713 | 0.006722 | 0.006531 | 0.006728 | 0.006934 |
| 0.25  | 0.006280 | 0.006497 | 0.006646 | 0.006630 | 0.006510 | 0.006761 |
| 0.50  | 0.006383 | 0.006530 | 0.006627 | 0.006478 | 0.006338 | 0.006668 |
| 0.75  | 0.006497 | 0.006554 | 0.006608 | 0.006606 | 0.006189 | 0.006580 |
| 0.90  | 0.006551 | 0.006575 | 0.006594 | 0.006529 | 0.006134 | 0.006692 |
| 1     | 0.006582 | 0.006582 | 0.006582 | 0.006108 | 0.006108 | 0.006108 |

Tabla 9. Errores producidos para el esquema explícito para la región Cab.

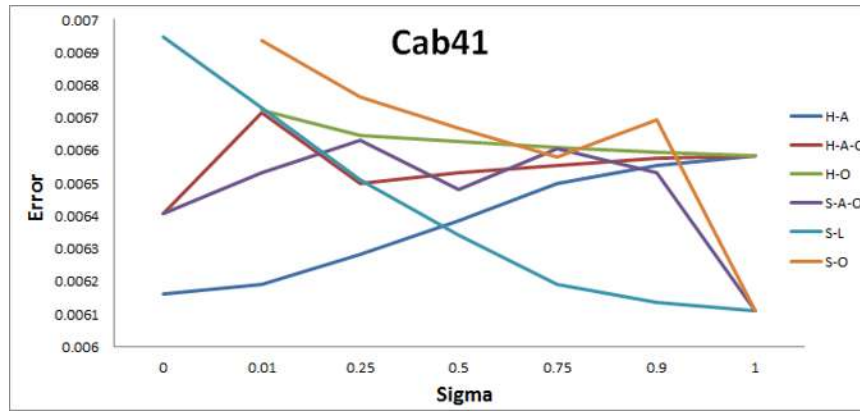


Figura 46. Error para las región Cab de 41 por 41 nodos.

Para la región *Cab* en general obtenemos resultados muy cercanos a la solución exacta, en la tabla 9 podemos ver que para todos los funcionales utilizados y los distintos valores de  $\sigma$  los errores son relativamente “pequeños” a excepción del valor  $\sigma = 0$  para los funcionales de H-O y S-O.

En la siguiente tabla (tabla 10) se muestra el error obtenido en  $t = 1$  para la región *Ha* de 41 por 41 nodos con en esquema explícito de 4 puntos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados, así como su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A       | H-A-O    | H-O      | S-A-O     | S-L      | S-O       |
|-------|-----------|----------|----------|-----------|----------|-----------|
| 0     | 91.587901 | 50053.41 | NaN      | 50053.406 | 0.010572 | NaN       |
| 0.10  | 1.286380  | 3.381022 | 0.012293 | 97862.686 | 0.017136 | 915.82175 |
| 0.25  | 0.293511  | 0.123092 | 0.012966 | 101998.98 | 0.051056 | 662560.69 |
| 0.50  | 0.072497  | 0.050317 | 0.013279 | 71602.874 | 0.337471 | 1045252.0 |
| 0.75  | 0.032527  | 0.023956 | 0.013530 | 14900.263 | 1.784660 | 90622.772 |
| 0.90  | 0.016075  | 0.016581 | 0.012907 | 672.63444 | 4.837824 | 6447.9755 |
| 1     | 0.012434  | 0.012434 | 0.012434 | 400.00303 | 400.0030 | 400.00303 |

Tabla 10. Errores producidos para el esquema explícito para la región Ha.

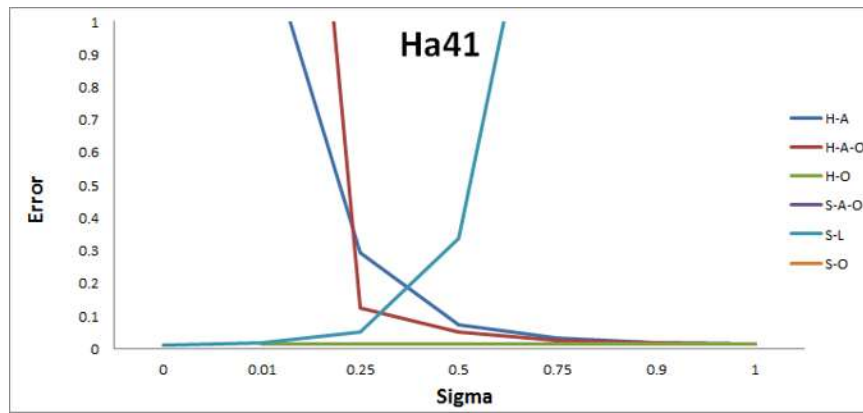


Figura 47. Error para las región Ha de 41 por 41 nodos.

De la fig. 47 y la tabla 10 podemos concluir que los resultados de los funcionales H-A y H-A-O con valor de  $\sigma$  cercano a cero el error que presentan es demasiado grande, pero conforme el valor de  $\sigma$  se acerca a 1 el error disminuye, opuesto a esto el funcional S-L el cual mientras que los valores de  $\sigma$  son cercanos a cero el error que presentan es poco, pero conforme el valor de  $\sigma$  se acerca a 1 el error aumenta considerablemente; para el caso de H-O los errores reportados son “pequeños”, aunque no los mejores excepto para valor  $\sigma = 0$  y por último los funcionales S-A-O y S-O simplemente no aproximan la solución y como consecuencia de ello el valor del error se dispara, al igual que pasó en el caso implícito.

De igual manera se hizo para la región Mi de 41 por 41 nodos y los resultados obtenidos se encuentran en la tabla con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0.008199 | 0.008729 | NaN      | 0.008729 | 8.08E-03 | Inf      |
| 0.10  | 0.007912 | 0.007885 | 7.32E-03 | 0.008695 | 0.007898 | 0.008792 |
| 0.25  | 0.007807 | 0.007666 | 0.007484 | 0.008635 | 0.007918 | 0.008860 |
| 0.50  | 0.007660 | 0.007643 | 0.007541 | 0.008512 | 0.007929 | 0.008726 |
| 0.75  | 0.007601 | 0.007602 | 0.007537 | 0.008298 | 0.008007 | 0.008591 |
| 0.90  | 0.007545 | 0.007558 | 0.007529 | 0.007911 | 0.008097 | 8.31E-03 |
| 1     | 0.007519 | 0.007519 | 0.007519 | 0.008247 | 0.008247 | 0.008247 |

Tabla 11. Errores producidos para el esquema explícito de 4 puntos para la región Mi.

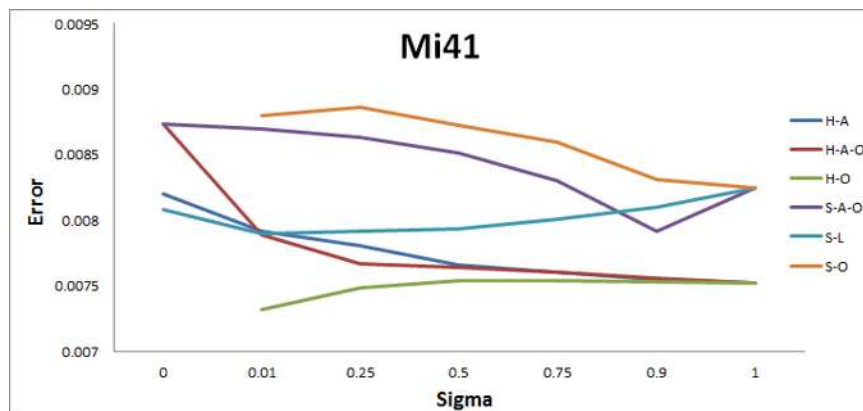


Figura 48. Error para las región Mi de 41 por 41 nodos.

Para la región Mi los errores son muy semejantes para los distintos funcionales y valores de  $\sigma$ , solo se disparan en los funcionales H-O y S-O con el valor  $\sigma = 0$ , el cual los hace que sean simplemente funcionales de ortogonalidad .

En la tabla 16 se muestra el error obtenido en  $t = 1$  para la región  $Uc$  de 41 por 41 nodos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados para el esquema explícito de 4 puntos y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O       |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 0     | 0.005128 | 0.007648 | 1.81E+85 | 0.007648 | 0.005664 | 2.61E+141 |
| 0.10  | 0.004599 | 0.006612 | 0.005898 | 0.007608 | 0.005395 | 0.007534  |
| 0.25  | 0.004845 | 0.005718 | 0.005477 | 0.007952 | 0.005111 | 0.007515  |
| 0.50  | 0.005006 | 0.005427 | 0.005256 | 0.007354 | 0.004825 | 0.007539  |
| 0.75  | 0.005041 | 0.005222 | 0.005134 | 0.007105 | 0.004641 | 0.007447  |
| 0.90  | 0.005050 | 0.005113 | 0.005084 | 0.007220 | 0.004617 | 0.007274  |
| 1     | 0.005046 | 0.005046 | 0.005046 | 0.005445 | 0.005445 | 0.005445  |

Tabla 12. Errores producidos para el esquema de Lax- Wendroff de 4 puntos para la región  $Uc$ .

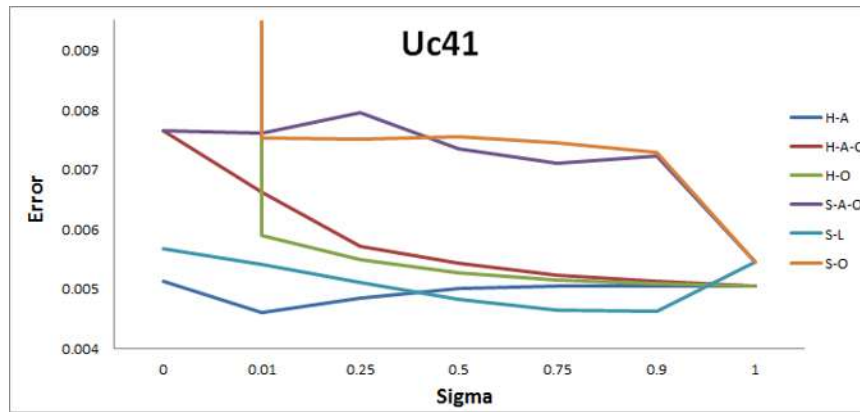


Figura 49. Error para las región  $Uc$  de 41 por 41 nodos.

En la región  $Uc$  en general se tienen soluciones muy cercanas a la solución exacta y como consecuencia de ello, errores “pequeños” para todos los funcionales utilizados y los distintos valores de  $\sigma$  a excepción del valor  $\sigma = 0$  para los funcionales de H-O y S-O.

## 4.2. Esquema implícito

Para la región  $Cab$  de 41 por 41 nodos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados para el esquema implícito de 4 puntos y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0.006172 | 0.006411 | NaN      | 0.006411 | 0.006957 | NaN      |
| 0.10  | 0.006201 | 0.006722 | 0.006731 | 0.006538 | 0.006739 | 0.006935 |
| 0.25  | 0.006293 | 0.006508 | 0.006657 | 0.006638 | 0.006521 | 0.006766 |
| 0.50  | 0.006395 | 0.006542 | 0.006638 | 0.006485 | 0.006350 | 0.006675 |
| 0.75  | 0.006509 | 0.006566 | 0.006619 | 0.006614 | 0.006201 | 0.006587 |
| 0.90  | 0.006563 | 0.006586 | 0.006605 | 0.006540 | 0.006146 | 0.006701 |
| 1     | 0.006593 | 0.006593 | 0.006593 | 0.006119 | 0.006119 | 0.006119 |

Tabla 13. Errores producidos para el esquema implícito para la región  $Cab$ .

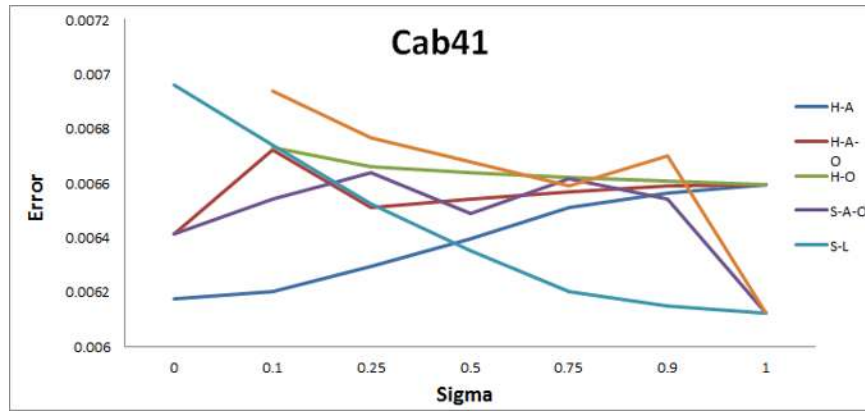


Figura 50. Error para las región Cab de 41 por 41 nodos.

Observemos que para la región *Cab* en general obtenemos resultados muy cercanos a los deseados, al igual que en el esquema implícito, en la tabla 13 podemos ver que para todos los funcionales utilizados y los distintos valores de  $\sigma$  los errores son relativamente “pequeños” a excepción del valor  $\sigma = 0$  para los funcionales de H-O y S-O.

En la siguiente tabla (tabla 14) se muestra el error obtenido en  $t = 1$  para la región *Ha* de 41 por 41 nodos con en esquema implícito, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados, así como su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A       | H-A-O       | H-O      | S-A-O       | S-L       | S-O         |
|-------|-----------|-------------|----------|-------------|-----------|-------------|
| 0     | 92.202923 | 50514.75656 | NaN      | 50514.75656 | 0.010535  | NaN         |
| 0.10  | 1.293260  | 3.49490676  | 0.012209 | 98598.11621 | 0.017046  | 948.800     |
| 0.25  | 0.293791  | 0.122989572 | 0.012875 | 103166.1752 | 0.050813  | 620680.656  |
| 0.50  | 0.072284  | 0.050051822 | 0.013192 | 72810.40465 | 0.337903  | 1027412.649 |
| 0.75  | 0.032354  | 0.023794511 | 0.013445 | 15390.70491 | 1.796292  | 92042.028   |
| 0.90  | 0.015977  | 0.016474783 | 0.012832 | 707.9471016 | 4.903902  | 6685.337    |
| 1     | 0.012366  | 0.012366906 | 0.012366 | 403.4491088 | 403.44910 | 403.449     |

Tabla 14. Errores producidos para el esquema implícito para la región *Ha*.

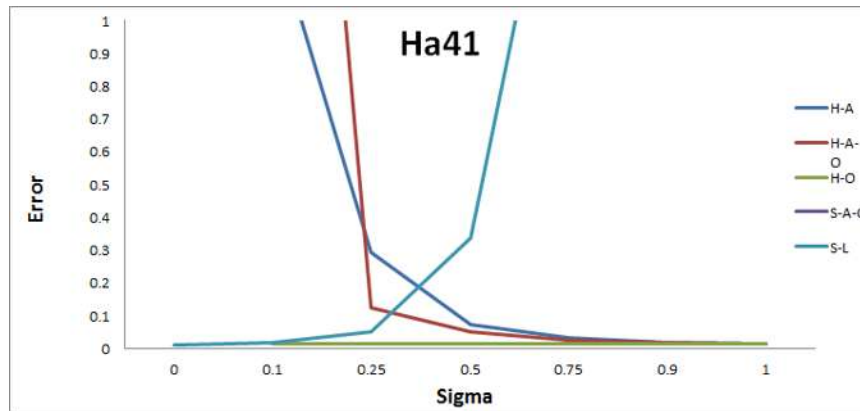


Figura 51. Error para las región Ha de 41 por 41 nodos.

Para esta región vamos a analizar los resultados de los funcionales un poco más a detalle, debido a que presentan errores muy distintos entre ellos, los funcionales H-A y H-A-O con valor de  $\sigma$  cercano a cero el error que presentan es demasiado grande, pero conforme el valor de  $\sigma$  se acerca a 1 el error disminuye, contrario a esto es lo que pasa con el funcional S-L, el cual mientras que los valores de  $\sigma$  son cercanos a cero el error que presentan es poco, pero conforme el valor de  $\sigma$  se acerca a 1 el error aumenta considerablemente; para el caso de H-O los errores reportados son relativamente chicos, aunque no los deseados, a excepción del valor  $\sigma = 0$  y por último los funcionales S-A-O y S-O simplemente no aproximan la solución y como consecuencia de ello el valor del error se dispara.

De igual manera se hizo para la región  $Mi$  de 41 por 41 nodos y los resultados obtenidos se encuentran en la tabla con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0.008201 | 0.008727 | NaN      | 0.008727 | 8.07E-03 | Inf      |
| 0.10  | 0.007904 | 0.007876 | 7.31E-03 | 0.008691 | 0.007890 | 0.008793 |
| 0.25  | 0.007799 | 0.007658 | 0.007476 | 0.008631 | 0.007910 | 0.008860 |
| 0.50  | 0.007651 | 0.007634 | 0.007532 | 0.008507 | 0.007922 | 0.008723 |
| 0.75  | 0.007591 | 0.007593 | 0.007528 | 0.008291 | 0.008000 | 0.008586 |
| 0.90  | 0.007536 | 0.007549 | 0.007519 | 0.007903 | 0.008091 | 0.008306 |
| 1     | 0.007511 | 0.007511 | 0.007511 | 0.008249 | 0.008249 | 0.008249 |

Tabla 15. Errores producidos para el esquema implícito para la región  $Mi$ .

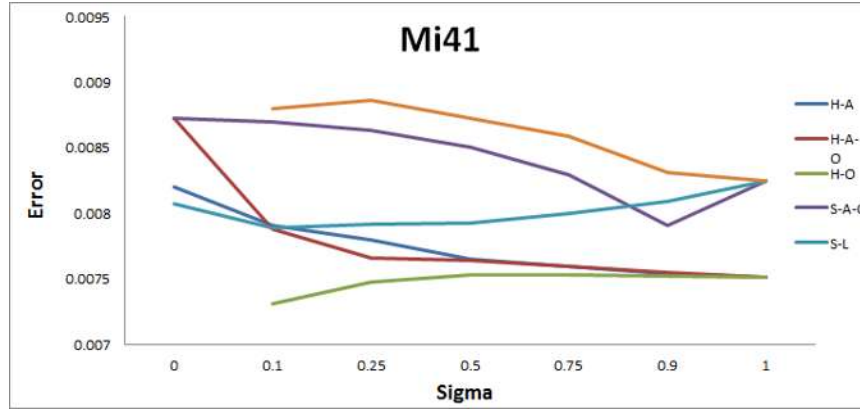


Figura 52. Error para las región  $Mi$  de 41 por 41 nodos.

Para la región  $Mi$  los resultados son buenos a excepción de cuando el valor de  $\sigma = 0$ , que son los funcionales originales de ortogonalidad.

En la tabla 12 se muestra el error obtenido en  $t = 1$  para la región  $Uc$  de 41 por 41 nodos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados para el esquema implícito de 4 puntos y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O       |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|
| 0     | 0.005113 | 0.007643 | 4.58E+86 | 0.007643 | 0.005648 | 3.02E+142 |
| 0.10  | 0.004582 | 0.006598 | 0.005884 | 0.007602 | 0.005379 | 0.007532  |
| 0.25  | 0.004828 | 0.005700 | 0.005460 | 0.007947 | 0.005094 | 0.007512  |
| 0.50  | 0.004990 | 0.005410 | 0.005241 | 0.007347 | 0.004808 | 0.007534  |
| 0.75  | 0.005025 | 0.005206 | 0.005119 | 0.007094 | 0.004624 | 0.007440  |
| 0.90  | 0.005034 | 0.005098 | 0.005069 | 0.007205 | 0.004600 | 0.007265  |
| 1     | 0.005031 | 0.005031 | 0.005031 | 0.005436 | 0.005436 | 0.005436  |

Tabla 16. Errores producidos para el esquema implicit para la región  $Uc$ .

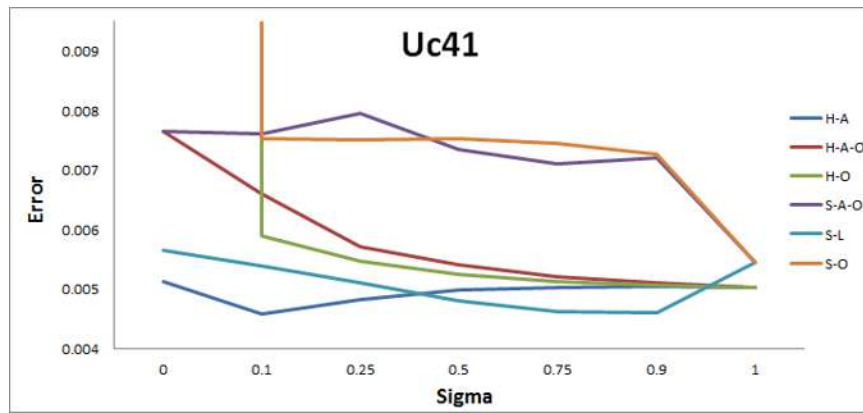


Figura 53. Error para la región *Uc* de 41 por 41 nodos.

Podemos observar que para la región *Uc* en general obtenemos resultados muy cercanos a los deseados, tanto en la tabla y en la gráfica anteriores podemos ver que para todos los funcionales utilizados y los distintos valores de  $\sigma$  los errores son relativamente “pequeños” a excepción del valor  $\sigma = 0$  para los funcionales de H-O y S-O.

### 4.3. Esquema explícito de 6 puntos

Ahora presento los resultados del esquema explícito de Lax-Wendroff de 6 puntos. Comenzando con la región *Cab* con 41 por 41 nodos, en la siguiente tabla se muestran los errores obtenidos en  $t = 1$  con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados, así mismo la gráfica correspondiente.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0.002652 | 0.002332 | NaN      | 0.002332 | 0.002564 | NaN      |
| 0.10  | 0.002634 | 0.002444 | 0.002551 | 0.002442 | 0.002558 | 0.002804 |
| 0.25  | 0.002612 | 0.002431 | 0.002419 | 0.002378 | 0.002564 | 0.002453 |
| 0.50  | 0.002608 | 0.002478 | 0.002472 | 0.002345 | 0.002575 | 0.002331 |
| 0.75  | 0.002594 | 0.002518 | 0.002527 | 0.002388 | 0.002611 | 0.002455 |
| 0.90  | 0.002587 | 0.002550 | 0.002557 | 0.002574 | 0.002623 | 0.002482 |
| 1     | 0.002577 | 0.002577 | 0.002577 | 0.002646 | 0.002646 | 0.002646 |

Tabla 17. Errores producidos para el esquema explícito para la región *Cab*.

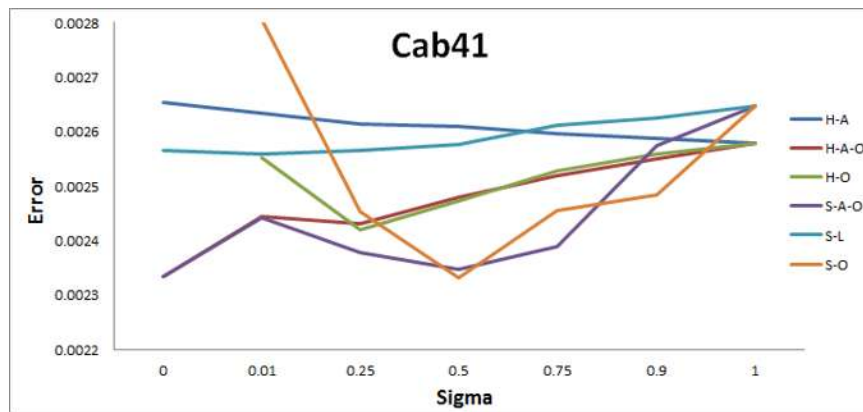


Figura 54. Error para la región *Cab* de 41 por 41 nodos.

Para la región *Cab*, de manera similar al caso explícito e implícito de 4 puntos, nuevamente en general obtenemos resultados muy cercanos a los deseados, como se observa en la tabla 17 y en la fig. 54, para todos los funcionales utilizados y los distintos valores de  $\sigma$  las aproximaciones son “buenas” excepto cuando  $\sigma = 0$  para los funcionales

de H-O y S-O.

Ahora se muestra los errores obtenidos en  $t = 1$  para la región  $Ha$  de 41 por 41 nodos con en esquema explícito de Lax-Wendroff de 6 puntos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A         | H-A-O       | H-O         | S-A-O       | S-L         | S-O         |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0     | 47655072639 | 4.11516E+14 | NaN         | 4.11516E+14 | 1813.039438 | NaN         |
| 0.10  | 212749203.2 | 4209866582  | 5242.062497 | 1.30E+15    | 1274.910924 | 3.72687E+13 |
| 0.25  | 3313048.68  | 3391103.71  | 1073.316884 | 1.91E+15    | 39668.27553 | 6.29E+16    |
| 0.50  | 39711.22    | 30671.0599  | 726.051554  | 3.43E+15    | 7331057.795 | 2.89E+16    |
| 0.75  | 8207.476468 | 3078.68427  | 630.191455  | 3.97E+15    | 558344607.5 | 4.01E+15    |
| 0.90  | 1009.399265 | 927.844516  | 504.939804  | 3.07792E+14 | 9356565488  | 1.77E+15    |
| 1     | 462.7844963 | 462.784496  | 462.784496  | 5.87776E+11 | 5.87776E+11 | 5.87776E+11 |

Tabla 18. Errores producidos para el esquema explícito para la región  $Ha$ .

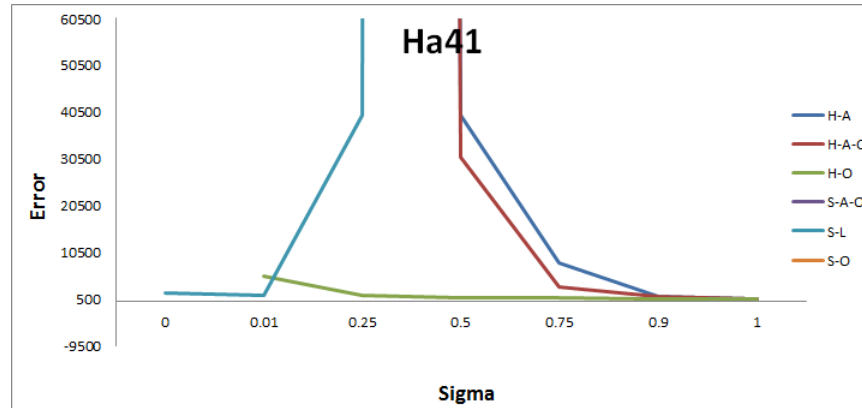


Figura 55. Error para las región  $Cab$  de 41 por 41 nodos.

Para la región  $Ha$  en general el esquema implícito de 6 puntos no produce aproximaciones.

De la misma forma se hizo para la región  $Mi$  de 41 por 41 nodos y los resultados obtenidos se encuentran en la tabla con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados y su gráfica correspondiente.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 3.14E-03 | 3.79E-03 | NaN      | 3.79E-03 | 3.12E-03 | NaN      |
| 0.10  | 3.04E-03 | 2.96E-03 | 2.63E-03 | 3.69E-03 | 3.01E-03 | 3.50E-03 |
| 0.25  | 3.00E-03 | 2.81E-03 | 2.67E-03 | 3.67E-03 | 3.02E-03 | 3.73E-03 |
| 0.50  | 2.96E-03 | 2.82E-03 | 2.78E-03 | 3.59E-03 | 3.03E-03 | 3.70E-03 |
| 0.75  | 2.92E-03 | 2.85E-03 | 2.83E-03 | 3.43E-03 | 3.06E-03 | 3.63E-03 |
| 0.90  | 2.89E-03 | 2.86E-03 | 2.86E-03 | 3.09E-03 | 3.09E-03 | 2.99E-03 |
| 1     | 2.88E-03 | 2.88E-03 | 2.88E-03 | 3.18E-03 | 3.18E-03 | 3.18E-03 |

Tabla 19. Errores producidos para el esquema explícito de 6 puntos para la región  $Mi$ .

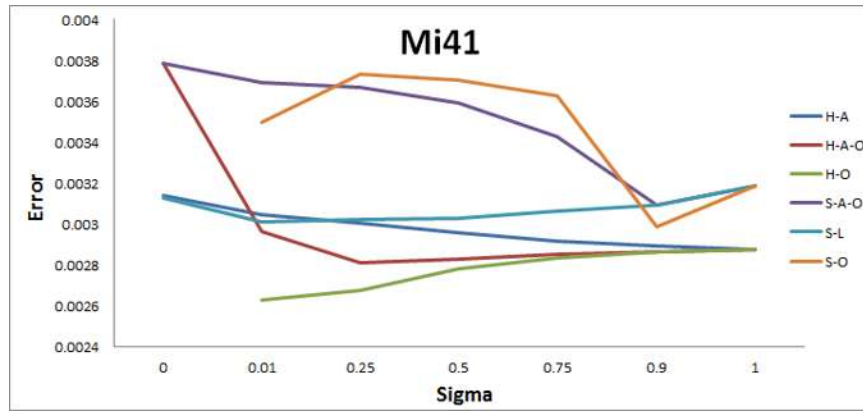


Figura 56. Error para las región *Mi* de 41 por 41 nodos.

Para la región *Mi* en general el esquema implícito de 6 puntos tiene un comportamiento similar al implícito y explícito de 4 puntos.

En la tabla 20 se muestra el error obtenido en  $t = 1$  para la región *Uc* de 41 por 41 nodos, con los diferentes valores de  $\sigma$  y los funcionales utilizados para el esquema explícito de 6 puntos y su respectiva gráfica.

| Sigma | H-A      | H-A-O    | H-O      | S-A-O    | S-L      | S-O      |
|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0     | 0.002764 | 0.003389 | NaN      | 0.003389 | 8.17E+40 | NaN      |
| 0.10  | 0.002598 | 0.002872 | 0.002299 | 0.003422 | 0.002374 | 0.043327 |
| 0.25  | 0.002531 | 0.002485 | 0.002202 | 0.003658 | 0.002386 | 0.003300 |
| 0.50  | 0.002440 | 0.002390 | 0.002213 | 0.003522 | 0.002464 | 0.003598 |
| 0.75  | 0.002336 | 0.002311 | 0.002227 | 0.003547 | 0.002572 | 0.003564 |
| 0.90  | 0.002274 | 0.002269 | 0.002230 | 0.004195 | 0.002668 | 0.003625 |
| 1     | 0.002232 | 0.002232 | 0.002232 | 0.002697 | 0.002697 | 0.002697 |

Tabla 20. Errores producidos para el esquema explícito de Lax-Wendroff de 6 puntos para la región *Uc*.

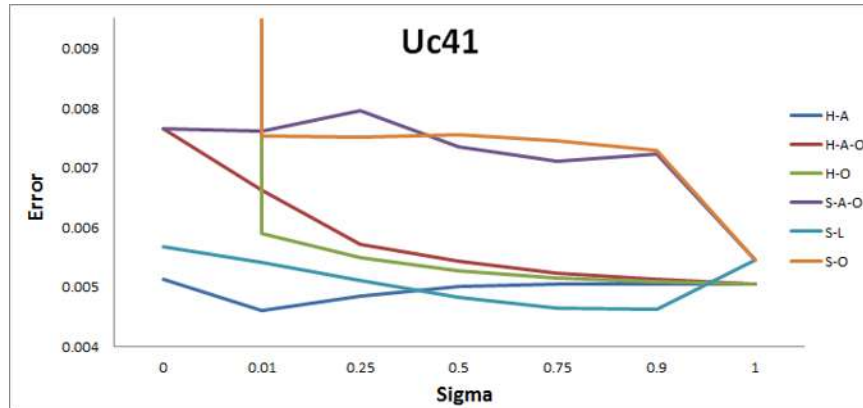


Figura 57. Error para las región *Uc* de 41 por 41 nodos.

En general el esquema explícito de Lax-Wendroff de 6 puntos para la región *Uc* nos proporciona buenas aproximaciones como podemos ver la tabla 20 y fig. 57 para los distintos funcionales utilizados y los valores de  $\sigma$ , salvo en el caso de  $\sigma = 0$  en los funcionales H-O, S-L y S-O.

## Capítulo 5

# Conclusiones

En este trabajo se presentan tres esquemas de diferencias finitas, que son implícito y explícito de 4 y 6 puntos, los cuales logran aproximaciones buenas, aunque la ecuación de advección no sea sencilla de manipular numéricamente. Debemos de considerar varios aspectos, entre ellos uno muy importante es la geometría de la región analizada. Las regiones de prueba utilizadas en este trabajo son regiones irregulares.

De las regiones de prueba y su análisis podemos decir:

Para *Cab* observemos que los esquemas implícito y explícito de 4 puntos nos dan resultados muy buenos, ambos resultados son muy similares, en especial los funcionales  $S - A - O$ ,  $S - L$  y  $S - O$  con el parámetro  $\sigma = 1$ , lo cual implica que son los funcionales de área-ortogonalidad, longitud y ortogonalidad respectivamente, los resultados arrojados por el esquema explícito de 6 puntos son mejores, en particular con el funcional  $S - O$  con el valor de  $\sigma = 0,5$ , el cual los dice que usamos  $0,5S_w + 0,5F_O$ .

Para la región *Ha* los resultados fueron muy variados, por esa razón analizaremos cada funcional por separado, para el esquema implícito y explícito de 4 puntos el funcional  $H - A$  con el valor de  $\sigma = 0$ , es decir con el funcional clásico de área la solución que genera dista mucho de la solución exacta, pero conforme aumenta el valor de  $\sigma$  la aproximación de la solución es mucho mejor; algo muy similar sucede con el funcional  $H - A - O$ ; ahora para el funcional  $H - O$ , nuevamente el valor de  $\sigma = 0$  que es el funcional clásico de ortogonalidad simplemente no se tiene aproximación, para todos los otros valores del parámetro  $\sigma$  las soluciones aproximadas son buenas; para el caso del funcional  $S - L$  con el valor de  $\sigma \leq 0,5$  los resultados son cercanos a los esperados, mientras que los valores más altos de  $\sigma$  esto no nos acerca nada a la solución y finalmente los funcionales  $S - A - O$  y  $S - O$  no nos aproxima la solución de la ecuación de advección. Ahora, con el esquema explícito de Lax-Wendroff de 6 puntos no aproxima la solución.

En la región *Mi* los resultados aproximados con el esquema implícito y los funcionales  $H - A$ ,  $H - A - O$  y  $S - A - O$  fueron muy buenos, aunque para los funcionales  $S - L$  y  $S - O$  también nos producen buenas aproximaciones, excepto para el caso de  $\sigma = 0$  lo que nos lleva a los funcionales clásicos de longitud y ortogonalidad respectivamente, y por último el funcional  $H - O$  produce buenos resultados cuando le damos más peso al funcional combinado, incluso cuando es sólo suavidad, mientras que si le el que predomina es el de ortogonalidad esto nos aleja de la solución. Cuando hacemos las aproximaciones con el esquema explícito de 4 y 6 puntos en general nos acercamos mucho a la solución exacta con todos los funcionales usados en este trabajo, a excepción del de ortogonalidad, correspondiente al  $H - O$  y  $S - O$  con  $\sigma = 0$ , y como era de esperarse son aún más cercanos las aproximaciones con el esquema de 6 puntos, en particular el funcional  $H - O$  con  $\sigma = 0,10$ .

Por último, en la región *Uc* se obtuvieron resultados muy satisfactorios para todos los funcionales, con excepción del funcional de ortogonalidad, que es cuando tomamos el parámetro  $\sigma = 0$  en los funcionales  $H - O$  y  $S - O$ , esto para los casos implícito y explícito de 4 puntos; mientras que para el esquema de Lax-wendroff de 6 puntos los funcionales

clásicos de longitud y ortogonalidad son los que no aproximan la solución, mientras que los combinados de suavidad-longitud y suavidad-ortogonalidad, así como el resto de los funcionales nos dan muy buenas aproximaciones a la solución exacta.

Notemos que esquema que produce errores más pequeños es el de Lax-Wendroff de 6 puntos, ya que en comparación de los otros dos, tiene más datos con los cuales aproximar.

En estos problemas aparecen celdas elongadas cuya geometría queda adelante del frente de onda, por tal motivo se observa que no hay estabilidad[2], como es el caso de la región *Ha*. En resumen, aprendimos que para las regiones usadas en este trabajo (y en general) la convergencia de la solución de la ecuación de advección la podemos mejorar al elegir un valor correcto de  $\sigma$  y el funcional más apropiado, y ésto solo lo podemos hacer mediante “prueba y error”, es decir experimentando mucho, esto es generar muchas mallas con muchos funcionales y muchas regiones.

# Apéndice

En esta sección están los programas usados para el presente trabajo, todos fueron escritos en el lenguaje de programación *MATLAB* [23].

## Esquema implícito de 4 puntos

```
% Implícito
% Esta es la versión con más precisión hasta el momento del método de
% Lax-Wendroff programado de manera implícita.
% Es importante revisar que la matriz coincida con los límites de la malla.
% Esta versión funciona calculando el método implícito primeramente para
% utilizar como semilla del método implícito.
% Cuenta con ambas versiones para calcular las gammas, la versión donde se
% resuelve el sistema de ecuaciones y la versión donde se tienen las
% fórmulas explícitas.
% La llamada al método se hace:
%
%      U = implicit5(x,y,f,a,b,t,gr);
%
% Argumentos de salida
%
%      U      :   Matriz U con la aproximación final de la función.
%
% Argumentos de entrada
%
%      x, y    :   Coordenadas de los puntos de la malla
%      f       :   Función para la condición inicial y de frontera.
%      a, b    :   Velocidades de movimiento del pulso de la función f.
%      t       :   Vector con los diferentes niveles de tiempo.
%      gr      :   Se utiliza para elegir la manera del cálculo de Gammas.
%      0       :   Cálculo clásico de Gammas.
%      1       :   Cálculo con fórmulas explícitas.

function [U, iter] = implicit5 (x,y,f,a,b,t,gr)
tic
close all

% Inicializamos variables
lambda = 1;
[m, n] = size(x);
nt = length(t);
dt = t(2) - t(1);
U1 = zeros (m, n, nt);
Gamma = zeros (m, n, 4);
iter = zeros (nt, 1);

% Llenamos con condición inicial.
```

```

for i = 1:m
    for j = 1:n
        U1(i,j,1) = f([x(i,j), y(i,j)], t(1), a, b);
    end
end

% Llenamos con condición de frontera.
for k = 2:nt
    for i = 1:m
        U1(i,1,k) = f([x(i,1), y(i,1)], t(k), a, b);
    end
    for j = 2:n
        U1(1,j,k) = f([x(1,j), y(1,j)], t(k), a, b);
    end
end

% Calculamos las Gammas
if gr == 0
    for i = 2:m
        for j = 2:n
            dx = [x(i-1,j)-x(i,j), x(i-1,j-1)-x(i,j), x(i,j-1)-x(i,j)];
            dy = [y(i-1,j)-y(i,j), y(i-1,j-1)-y(i,j), y(i,j-1)-y(i,j)];
            M = [dx; dy; dx.*dx; dx.*dy; dy.*dy];
            YY = pinv(M)*[-a*dt - b*dt(a*dt)^2a*b*dt^2(b*dt)^2]';
            %r = [-a*dt - b*dt(a*dt)^2a*b*dt^2(b*dt)^2];
            %YY = GMRESnew(M,r);
            Gamma(i,j,:) = [-sum(YY); YY];
        end
    end
else
    % Nuevas maneras de calcular Gammas
    for i = 2:m
        for j = 2:n
            h1 = x(i-1,j)-x(i,j);
            h2 = x(i-1,j-1)-x(i,j);
            h3 = x(i,j-1)-x(i,j);
            k1 = y(i-1,j)-y(i,j);
            k2 = y(i-1,j-1)-y(i,j);
            k3 = y(i,j-1)-y(i,j);

```

```

s1 = (h2*k3-h3*k2)/(h1*k2-h2*k1);
s2 = (h3*k1-h1*k3)/(h1*k2-h2*k1);
al = -a*dt;
be = -b*dt;
ga = (a * dt)^2;
de = a * b * dt^2;
et = (b * dt)^2;
t1 = (al*k2-be*h2)/(h1*k2-h2*k1);
t2 = (-al*k1+be*h1)/(h1*k2-h2*k1);
Gamma(i,j,4) = ((h1^2 * s1 + h2^2 * s2 + h3^2) * (ga - h1^2 * t1 - h2^2 * t2) + ...
    (k1*h1*s1 + k2*h2*s2 + k3*h3)*(de - k1*h1*t1 - k2*h2*t2)+ ...
    (k1^2 * s1 + k2^2 * s2 + k3^2) * (et - k1^2 * t1 - k2^2 * t2))/...
    ((h1^2 * s1 + h2^2 * s2 + h3^2)^2 + (k1 * h1 * s1 + k2 * h2 * s2 + k3 * h3)^2 + ...
    (k1^2 * s1 + k2^2 * s2 + k3^2)^2);
Gamma(i,j,2) = s1*Gamma(i,j,4) + t1;
Gamma(i,j,3) = s2*Gamma(i,j,4) + t2;
Gamma(i,j,1) = - Gamma(i,j,2) - Gamma(i,j,3) - Gamma(i,j,4);
end
end
end
U = U1;
for k = 2:nt
    %er = ones(n,m);
    er = 1;
    for i = 2:m
        for j = 2:n
            U(i,j,k) = U(i,j,k-1) +...
                Gamma(i,j,1)*U(i,j,k-1) + ...
                Gamma(i,j,2)*U(i-1,j,k-1) + ...
                Gamma(i,j,3)*U(i-1,j-1,k-1) + ...
                Gamma(i,j,4)*U(i,j-1,k-1);
        end
    end
end
while er >= sqrt(eps)
    Z = U(:, :, k);
    for i = 2:m
        for j = 2:n
            U(i,j,k) = (U(i,j,k-1) + ...
                lambda*( ...

```

```

        Gamma(i,j,1)*U(i,j,k-1) + ...
        Gamma(i,j,2)*U(i-1,j,k-1) + ...
        Gamma(i,j,3)*U(i-1,j-1,k-1) + ...
        Gamma(i,j,4)*U(i,j-1,k-1)) + ...
        (1-lambda)*( ...
        Gamma(i,j,2)*U(i-1,j,k) + ...
        Gamma(i,j,3)*U(i-1,j-1,k) + ...
        Gamma(i,j,4)*U(i,j-1,k))) ...
        /(1+(lambda-1)*Gamma(i,j,1));

    end

end

iter(k) = iter(k) + 1;
er = max(max(abs(U(:,k) - Z)));

end
end
toc

% Empezamos a graficar
for i=1:25:nt
    surf(x,y,U(:,i));
    axis([0 1 0 1.4 -0.02 .2]);
    % view([45 45]);
    %view(3);
    view(2);
    pause(0.02)
end
end

```

**Explícito de 4 puntos**

```

% Explícito 4 puntos
function [U, Gamma] = wendroffg(x,y,f,a,b,t,graf)
close all
[m,n]= size(x);
nt = length(t);
dt = t(2) - t(1);
U1 = zeros(m,n,nt);
Gamma = zeros(m,n,4);

%Primero llenamos k=1 con condiciones iniciales
for i = 1:m
    for j = 1:n
        U1(i,j,1) = f([x(i,j),y(i,j)],t(1),a,b) ;
    end
end

%Ahora llenamos con condiciones de frontera
for k = 2:nt
    for i = 2:m
        U1(i,1,k) = f([x(i,1),y(i,1)],t(k),a,b);
    end
    for j = 2:n
        U1(1,j,k) = f([x(1,j),y(1,j)],t(k),a,b);
    end
end

%Calculamos las Gamas
for i = 2:m
    for j = 2:n
        dx = [x(i-1,j)-x(i,j),x(i-1,j-1)-x(i,j),x(i,j-1)-x(i,j)];
        dy = [y(i-1,j)-y(i,j),y(i-1,j-1)-y(i,j),y(i,j-1)-y(i,j)];
        M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
        YY = pinv(M) * [-a * dt - b * dt(a * dt)^2 * a * b * dt^2(b * dt)^2]';
        %r = [-a * dt - b * dt(a * dt)^2 * a * b * dt^2(b * dt)^2];
        %YY = GMRESnew(M,r);
        Gamma(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
    end
end

if graf == 1
    for i=1:50:nt
        surf(x,y,U(:, :,i));
        axis([0 1 0 1 -.02 .2]);
    end
end

```

```

        view([45 45]);    pause(0.01)
    end
end
end

```

### Explícito de 6 puntos

```

% Explícito 6 puntos
% Esta es la versión con más precisión hasta el momento del método de
% Lax-Wendroff programado de manera implícita con el esquema de 6 puntos.
%
% Es importante revisar que la matriz coincida con los límites de la malla.
%
% Esta versión funciona calculando el método explícito primeramente para
% utilizar como semilla del método implícito.
% Cuenta con ambas versiones para calcular las gammas, la versión donde se
% resuelve el sistema de ecuaciones y la versión donde se tienen las
% fórmulas explícitas.
%
% La llamada al método se hace:
%
%     U = principal(x,y,f,a,b,t,graf);
%
% Argumentos de salida
%
%     U      :   Matriz U con la aproximación final de la función.
%
% Argumentos de entrada
%
%     x, y    :   Coordenadas de los puntos de la malla
%     f       :   Función para la condición inicial y de frontera.
%     a, b    :   Velocidades de movimiento del pulso de la función f.
% Los valores por defecto de a y b son .1
%     t       :   Vector con los diferentes niveles de tiempo.
% El valor por defecto de t es 0:1/1023:2;
%     graf    :   Se utiliza para elegir si se grafica o no.
%     0       :   No se grafica (valor por defecto).
%     1       :   Sí se grafica.
%

```

```
function [U1,Gamma] = wendroffg6(x,y,f,a,b,t,graf)
```

```
tic
```

```
close all
```

```
switch nargin
```

```
    case 3
```

```
        a = .1;
```

```
        b = .1;
```

```
        t = 0:1/1023:2;
```

```
        graf = 0;
```

```
    case 4
```

```
        b = .1;
```

```
        t = 0:1/1024:1;
```

```

    graf = 0;
case 5
    t = 0:1/1024:1;
    graf = 0;
case 6
    graf = 0;
end

%Inicializamos variables.
[m,n] = size(x);
nt = length(t);
dt = t(2)-t(1);
U1 = zeros(m,n,nt);
%Gamma

%Llenamos con condición inicial.
for i = 1:m
    for j = 1:n
        U1(i,j,1) = f([x(i,j),y(i,j)],t(1),a,b);
    end
end

%Llenamos con condición de frontera.
for k = 2:nt
    for i = 1:m
        U1(i,1,k) = f([x(i,1),y(i,1)],t(k),a,b);
    end
    for j = 2:n
        U1(1,j,k) = f([x(1,j),y(1,j)],t(k),a,b);
    end
end

%Hacemos el cálculo de Gammas

% Calculamos para los nodos interiores
for i = 3:m
    for j = 3:m
        dx = [x(i-1,j)-x(i,j), x(i-2,j)-x(i,j), x(i-1,j-1)-x(i,j), ...
            x(i,j-2)-x(i,j), x(i,j-1)-x(i,j)];
        dy = [y(i-1,j)-y(i,j), y(i-2,j)-y(i,j), y(i-1,j-1)-y(i,j),...
            y(i,j-2)-y(i,j), y(i,j-1)-y(i,j)];
        M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
        YY = pinv(M) * [-a * dt - b * dt(a * dt)^2a * b * dt^2(b * dt)^2]';
        Gamma(i,j,:) = [-sum(YY);YY];
    end
end

```

```

end
end

% Calculamos para los nodos de la segunda fila horizontal
for i = 2:m-1

    dx = [x(i-1,3)-x(i,2), x(i-1,2)-x(i,2), x(i-1,1)-x(i,2), ...
    x(i,1)-x(i,2), x(i+1,1)-x(i,2)];

    dy = [y(i-1,3)-y(i,2), y(i-1,2)-y(i,2), y(i-1,1)-y(i,2),...
    y(i,1)-y(i,2), y(i+1,1)-y(i,2)];

    M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];

    YY = pinv(M) * [-a * dt - b * dt(a * dt)^2a * b * dt^2(b * dt)^2]';

    Gamma(i,2,:) = [-sum(YY);YY];

end

% Calculamos para los nodos de la segunda fila vertical
for j = 3:n-1

    dx = [x(1,j+1)-x(2,j), x(1,j)-x(2,j), x(1,j-1)-x(2,j), ...
    x(2,j-1)-x(2,j), x(3,j-1)-x(2,j)];

    dy = [y(i-1,3)-y(i,2), y(i-1,2)-y(i,2), y(i-1,1)-y(i,2), ...
    y(i,1)-y(i,2), y(i+1,1)-y(i,2)];

    M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];

    YY = pinv(M) * [-a * dt - b * dt(a * dt)^2a * b * dt^2(b * dt)^2]';

    Gamma(2,j,:) = [-sum(YY);YY];

end

% Calculamos para el nodo (2,n)
dx = [x(1,n)-x(2,n), x(1,n-1)-x(2,n), x(1,n-2)-x(2,n), ...
x(2,n-1)-x(2,n), x(3,n)-x(2,n)];
dy = [y(1,n)-y(2,n), y(1,n-1)-y(2,n), y(1,n-2)-y(2,n), ...
y(2,n-1)-y(2,n), y(3,n)-y(2,n)];
M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
YY = pinv(M) * [- a * dt - b * dt(a * dt)^2a * b * dt^2(b * dt)^2 ]';

Gamma(2,n,:) = [- sum(YY);YY ];

%Calculamos para el nodo (m,2)
dx = [x(m,3)-x(m,2), x(m-1,3)-x(m,2), x(m-2,3)-x(m,2), ...
x(m-1,2)-x(m,2), x(m,1)-x(m,2)];
dy = [y(m,3)-y(m,2), y(m-1,3)-y(m,2), y(m-2,3)-y(m,2),...
y(m-1,2)-y(m,2), y(m,1)-y(m,2)];
M = [dx ; dy ; dx.*dx ; dx.*dy ; dy.*dy];
YY = pinv(M) * [-a * dt - b * dt(a * dt)^2a * b * dt^2(b * dt)^2]';
Gamma(m,2,:) = [-sum(YY);YY];

%Llenamos la matriz

```

```

for k = 2:nt
%para todos los nodos interiores
    for i = 3:m
        for j = 3:n
            U1(i,j,k) = U1(i,j,k-1) + ...
                Gamma(i,j,1)*U1(i,j,k-1) + ...
                Gamma(i,j,2)*U1(i-1,j,k-1) + ...
                Gamma(i,j,3)*U1(i-2,j,k-1) + ...
                Gamma(i,j,4)*U1(i-1,j-1,k-1) + ...
                Gamma(i,j,5)*U1(i,j-2,k-1) + ...
                Gamma(i,j,6)*U1(i,j-1,k-1);
        end
    end

%Llenamos la matriz para todos los nodos de la segunda linea horizontal.

    for i = 2:m-1
        U1(i,2,k) = U1(i,2,k-1) + ...
            Gamma(i,2,1)*U1(i,2,k-1) + ...
            Gamma(i,2,2)*U1(i-1,3,k-1) +...
            Gamma(i,2,3)*U1(i-1,2,k-1) +...
            Gamma(i,2,4)*U1(i-1,1,k-1) + ...
            Gamma(i,2,5)*U1(i,1,k-1) + ...
            Gamma(i,2,6)*U1(i+1,1,k-1);
    end

%Llenamos la matriz para todos los nodos de la segunda linea vertical.
    for j = 3:n-1
        U1(2,j,k) = U1(2,j,k-1) + ...
            Gamma(2,j,1)*U1(2,j,k-1) + ...
            Gamma(2,j,2)*U1(1,j+1,k-1) + ...
            Gamma(2,j,3)*U1(1,j,k-1) + ...
            Gamma(2,j,4)*U1(1,j-1,k-1) +...
            Gamma(2,j,5)*U1(2,j-1,k-1) + ...
            Gamma(2,j,6)*U1(3,j-1,k-1);
    end

%Llenamos la matriz para los nodos (2,n) y (m,2)

    U1(2,n,k) = U1(2,n,k-1) +...
        Gamma(2,n,1)*U1(2,n,k-1) + ...

```

```

Gamma(2,n,2)*U1(1,n,k-1) + ...
Gamma(2,n,3)*U1(1,n-1,k-1) + ...
Gamma(2,n,4)*U1(1,n-2,k-1) +...
Gamma(2,n,5)*U1(2,n-1,k-1) + ...
Gamma(2,n,6)*U1(3,n,k-1);

U1(m,2,k) = U1(m,2,k-1) + ...
Gamma(m,2,1)*U1(m,2,k-1) + ...
Gamma(m,2,2)*U1(m,3,k-1) + ...
Gamma(m,2,3)*U1(m-1,3,k-1) + ...
Gamma(m,2,4)*U1(m-2,3,k-1) + ...
Gamma(m,2,5)*U1(m-1,2,k-1) + ...
Gamma(m,2,6)*U1(m,1,k-1);
end
toc

% Hacemos la gráfica
if graf == 1
    for i=1:50:nt
        surf(x,y,U1(:, :, i));
        %CABS y esas cosas
        axis([0 1 0 1 -.02 .2]);
        view([45 45]);
        %fLW
        %axis([-1.15 1 -1 2 -1 2])
        %view(3);
        pause(0.01)
    end
end
end

% errors
function er1 = errors(x,y,U,a,b,T)
er1 = [];
U1 = U;
x1 = x;
y1 = y;
for i = 1:length(T)
    t = T(i);

    %fCAB
    g1 = 0,2 * exp(-(x1 - ,5 - a * t).^2 - (y1 - ,3 - b * t).^2)/,01);
    %fHA

```

```

%g1 = 0,2 * exp((- (x1 - ,45 - a * t).^2 - (y1 - ,5 - b * t).^2)/,01);
%fMI
%g1 = 0,2 * exp((- (x1 - ,4 - a * t).^2 - (y1 - ,25 - b * t).^2)/,01);
%fUC
%g1 = 0,2 * exp((- (x1 - ,5 - a * t).^2 - (y1 - ,3 - b * t).^2)/,01);
er1 = [er1;l2er(g1,U1(:,i),x,y)];
end
end

```

```

%fcab
function f=fCAB ( p,t,a,b)
    f = 0,2 * exp((- (p(1) - ,5 - a * t)^2 - (p(2) - ,3 - b * t)^2)/,01);
end

```

```

%l2err
function e=l2er(u,uaprox,x,y)
[m,n]=size(x);
e=0.0;
for i=1:m-1
    for j=1:n-1
        t1=[1 x(i,j) y(i,j);
            1 x(i+1,j) y(i+1,j);
            1 x(i+1,j+1) y(i+1,j+1)];
        t2=[1 x(i,j) y(i,j);
            1 x(i+1,j+1) y(i+1,j+1);
            1 x(i,j+1) y(i,j+1)];
        a=(abs(det(t1))+abs(det(t2)))/2;
        e = e + (abs(u(i + 1, j + 1) - uaprox(i + 1, j + 1))^2) * a;
    end
end
end
e=sqrt(e);

```

```

%norm2er
function n2e=norm2er(err) n2e=0;
for i=1:length(err)
    n2e=n2e+(err(i)*err(i));
end
n2e=n2e/length(err);
n2e=sqrt(n2e);
end

```

```

% Gammas

```

```

function [g1, g2] = Gammas(x,y,t,a)
b = a;
dt = t(2)-t(1);
[m,n] = size(x);
Gamma = zeros(m,n,4);

for i = 2:m
    for j = 2:n
        dx = [x(i-1,j)-x(i,j),x(i-1,j-1)-x(i,j),x(i,j-1)-x(i,j)];
        dy = [y(i-1,j)-y(i,j),y(i-1,j-1)-y(i,j),y(i,j-1)-y(i,j)];
        M = [dx;dy;dx.*dx;dx.*dy;dy.*dy];
        YY = pinv(M) * [-a * dt - b * dt(a * dt)^2a * b * dt^2(b * dt)^2]';
        %YY = pinv(M)*[-a*dt -b*dt 0 0 0]';
        YY = [-sum(YY);YY];
        Gamma(i,j,:) = YY;
    end
end

g1 = Gamma;
for i = 2:m
    for j = 2:n
        h1 = x(i-1,j)-x(i,j);
        h2 = x(i-1,j-1)-x(i,j);
        h3 = x(i,j-1)-x(i,j);
        k1 = y(i-1,j)-y(i,j);
        k2 = y(i-1,j-1)-y(i,j);
        k3 = y(i,j-1)-y(i,j);
        s1 = (h2*k3-h3*k2)/(h1*k2-h2*k1);
        s2 = (h3*k1-h1*k3)/(h1*k2-h2*k1);
        al = -a*dt;
        be = -b*dt;
        ga = (a * dt)^2;
        de = a * b * dt^2;
        et = (b * dt)^2;
        t1 = (al*k2-be*h2)/(h1*k2-h2*k1);
        t2 = (-al*k1+be*h1)/(h1*k2-h2*k1);
        Gamma(i,j,4) = ((h1^2 * s1 + h2^2 * s2 + h3^2) * (ga - h1^2 * t1 - h2^2 * t2) + ...
            (k1*h1*s1 + k2*h2*s2 + k3*h3)*(de - k1*h1*t1 - k2*h2*t2)+ ...
            (k1^2 * s1 + k2^2 * s2 + k3^2) * (et - k1^2 * t1 - k2^2 * t2))/...
            ((h1^2 * s1 + h2^2 * s2 + h3^2)^2 + (k1 * h1 * s1 + k2 * h2 * s2 + k3 * h3)^2 + ...
            (k1^2 * s1 + k2^2 * s2 + k3^2)^2);
    end
end

```

---

```
Gamma(i,j,2) = s1*Gamma(i,j,4) + t1;
Gamma(i,j,3) = s2*Gamma(i,j,4) + t2;
Gamma(i,j,1) = - Gamma(i,j,2) - Gamma(i,j,3) - Gamma(i,j,4);
    end
end
g2 = Gamma;
end
```



# Bibliografía

- [1] BARRERA-SÁNCHEZ, P., CASTELLANOS-NODA, L., PÉREZ-DOMÍNGUEZ, A., *Métodos Variacionales Discretos para la Generación de Mallas*. DGAPA-UNAM, México, D.F., 1994.
- [2] RANDALL J. LEVEQUE, *Finite Difference Methods for Differential Equations*. University of Washington, September 2005.
- [3] TINOCO-RUIZ, J.G., *Funcionales Discretos para la Generación de Mallas Suaves y Convexas sobre Regiones Planas Irregulares* Tesis Doctoral, CIMAT, Guanajuato, Gto. México 1997.
- [4] BARRERA-SÁNCHEZ, P., CASTELLANOS-NODA, L., PÉREZ-DOMÍNGUEZ, A., *Métodos Variacionales Discretos para la Generación de Mallas*. DGAPA-UNAM. México, D.F., 1994.
- [5] BARRERA-SÁNCHEZ, O., PÉREZ-DOMÍNGUEZ, A., CASTELLANOS-NODA, L., *Curvilinear Coordinate System Generation Over Plane Irregular Regions*. Vínculos Matemáticos No. 133, Facultad de Ciencias, UNAM, México 1992.
- [6] BARRERA-SÁNCHEZ PABLO, CASTELLANOS-NODA LONGINA, DOMÍNGUEZ-MOTA FRANCISCO J, GONZÁLEZ-FLORES GUILMER F., PÉREZ-DOMÍNGUEZ ANGEL *Adaptive discrete harmonic grid generation* Mathematics and computers in simulation, April 2007.
- [7] KNUPP, PATRICK M. AND STIENBERG, STANLEY, *Fundamentals of Grid Generation* CRC Press. Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo. 1993.
- [8] CASTILLO-MORENO, JOSÉ E., *On Variational Grid Generation*. Ph. D. Thesis, The University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico. 1987.
- [9] CASTILLO, J.E., *Mathematical Aspects of Numerical Grid Generation I. en Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics*. J. Hauser and C. Taylor eds., pp 35-43. Pineridge Press, Swansea, UK. 1986.
- [10] CASTILLO, J. E., STEINBERG, S. AND ROACHE, P.J., *Mathematical Aspects of Variational Grid Generation II*. J. Comp. and Appl. Math. 20, 127-135. 1987.
- [11] CASTILLO, J. E., STEINBERG, S. AND ROACHE, P.J., *Parameter Stimulation in Variational Grid Generation*. Appl. Math. and Comp. 28(2), 1-23. 1988.
- [12] CASTILLO, J. E., STEINBERG, S. AND ROACHE, P.J., *On the Folding of Numerically Generated Grids. Use of a Reference Grid*. Comm. Applied Num. Methods 4, 471-481. 1988.
- [13] P. BARRERA-S., L. CASTELLANOS-N., F. DOMÍNGUEZ-M., G. GONZÁLEZ-F. y A. PÉREZ-D., *Adaptive discrete harmonic grid generation*. Mathematics and Computer Simulations, 79, (2009), pp. 1892-1809.
- [14] F. DOMÍNGUEZ-M., S. MENDOZA AND J. TINOCO, *Finite Diference Schemes Satisfying an Optimality Condition*. MASCOT10 Proceedings, (2011).
- [15] IVANENKO, S.A., AND CHARAKHCH'YAN, A.A., *Curvilinear Grids of Convex Quadrilaterals*. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol 28, No. 2. pp. 126-133. 1988.
- [16] IVANENKO, S.A., *Generation of Non-Degenerate Meshes*. U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., Vol 28, No. 5. pp. 141-146. 1988.
- [17] IVANENKO, S.A., *Adaptive grids an gris on surfaces*. Cmput. Maths. Math. Phys. 33 (9) (1993), pp. 8.1-8.41.
- [18] M. CELIA AND W. GRAY, *Numerical Methods for Diferential Equations* Prentice-Hall, (1992).

- [19] FRANCISCO J. DOMÍNGUEZ MOTA, *Sobre la generación variacional discreta de mallas casiortogonales en el plano*. Febrero 2005.
- [20] A. ISELES, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2008).
- [21] WALTER RUDIN, *Principios de análisis matemático*. Tercera edición 1980.
- [22] UNAMALLA VERSIÓN 4.5 *An automatic package for numerical grid generation*. Website: <http://www.matematicas.unam.mx/unamalla/>
- [23] MATLAB R2013A. *The language of technical computing*. Website: <http://mathworks.com/products/matlab/>
- [24] TINOCO GUERREO, GERARDO, *Solución numérica de la ecuación de advección empleando mallas estructuradas sobre planas irregulares utilizando un esquema de diferencias finitas*. Tesis de licenciatura. FCFM UMSNH, Morelia, 2014.
- [25] JAVIER A. KREINER, *Generación de mallas de elementos finitos en 3D y aplicaciones a problemas elípticos*. Tesis de licenciatura, Universidad de Buenos Aires. 2008.
- [26] RANDALL J. LEVEQUE, *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington, September 2007.
- [27] VÍQUEZ CANO MÓNICA ZAIMA, *Un sistema para la generación de mallas estructuradas armónicas*. Junio 2008.
- [28] S. D. CONTE, CARL DE BOOR, *Elementary numerical analysis. An Algorithmic Approach*. Third Edition 1980.
- [29] BURDEN, R. AND FAIRES, J., *Análisis Numerico*. Thomson Learning, Mexico,D.F. 2002.
- [30] MATHEWS, J. AND FINK, K., *Métodos numéricos con Matlab*. Prentice Hall. Madrid. 1999
- [31] SMITH, G., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Oxford University Press, New York.1999.
- [32] RAMÍREZ R. JHON JAIRO, VANEGAS G. CARLOS ANDRÉS, VILLEGAS R. ANDRÉS MAURICIO, *Método de Diferencias Finitas para la Solución de Ecuaciones en Derivadas Parciales* Universidad Eafit, Medellín, Colombia.
- [33] < <http://mmc.geofisica.unam.mx/Bibliografia/Matematicas/EDP/MetodosNumericosParaFenomenosDeTransporte.pdf> > [con acceso el 05-05-2014]
- [34] <<http://www.ugr.es/~lorente/APUNTESCN/capitulo5.pdf>> [con acceso el 02-03-2014]
- [35] < [http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n\\_diferencial#Tipos\\_de\\_soluciones](http://es.wikipedia.org/wiki/Ecuaci%C3%B3n_diferencial#Tipos_de_soluciones) > [con accesos el 19-01-2014]
- [36] BARRERA SÁNCHEZ, P., CORTS, J. GONZÁLEZ FLORES, G., TINOCO RUÍZ, J.G., *Smoothness and convex area functionals-revisited*. SIAM Journal on Scientific Computing, 2010, Vol. 32, No. 4 : pp. 1913-1928.